ALGEBRA 2012

LA ENCICLOPEDIA

7000 PROBLEMAS RESUELTOS (1500 PAGINAS)

NIVEL PREUNIVERSITARIO











TEÓRICO - PRÁCTICO

- 40 capítulos completamente desarrollados.
- Incluye programación lineal.





Algebra virtual

Versión 2012

ALGEBRA 2012

ALGEBRA 2012

LA ENCICLOPEDIA

VERSION CORREGIDA Y AUMENTADA

PROGRAMA CURRICULAR ACTUALIZADO

www.SIGLO21X.blogspot.com





Dedicatoria :

- *A la facultad de la UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA (U.N.I.)*
- *A mis alumnos, colegas y familiares, quienes comparten el dia a dia de mi existencia.*

ALGEBRA 2012

LA ENCICLOPEDIA

7000 PROBLEMAS RESUELTOS

TODOS LOS DERECHOS AUTORALES DE ESTA OBRA SON PROPIEDAD DEL EDITOR

NUEVA EDICIÓN : ENERO 2012

TODOS LOS DERECHOS RESERVADOS:

Ni la totalidad ni parte de este libro puede reproducirse o transmitirse por ningún procedimiento electrónico o mecánico. Incluyendo fotocopia grabación magnética o cualquier almacenamiento de información y sistema de recuperación sin permiso escrito del autor o editor.

RAZÓN SOCIAL: *EDICIONES RUBIÑOS* Dec. Leg. 822
DEPÓSITO LEGAL: *N° 2008 - 07332*
I.S.B.N.: 2008 - 07332
REGISTRO DEL PROYECTO EDITORIAL: *S00055240*
REGISTRO DE LA PROPIEDAD INDUSTRIAL:
CERTIFICADO N° 00055240

La Dirección de Signos Distintivos del Instituto Nacional de Defensa de la Competencia y de la Protección de la Propiedad Intelectual - INDECOPI, certifica que por mandato de la Resolución N° 002630-2009DSD - INDECOPI de fecha de 25 de febrero de 2009, ha quedado inscrito en el Registro de Marcas de Servicio, el siguiente signo: RUBIÑOS EDICIONES (El logotipo conformado por la denominación RUBIÑOS EDICIONES escrita en letras características, sobre la representación estilizada de un tumi).

TELÉFONO: 5281921-7259505
rmrubinos@hotmail.com

Diagramación y diseño:
- Lila Cordova
- Karin Cabrera
- Khaterin Cabrera
- Elizabeth Caja, Nelly Cordova, Oscar.

Corrección y revisión:
- JESUS CALERO

Impresión:
- Raquel Becerra
- Khaterin Cabrera
- Brandy Torres
- Clisman Carrasco
- Alberto Moran
- Yuri Moran
- Roberto Moran

REPÚBLICA DEL PERÚ
PERÚ Presidencia del Consejo de Ministros INDECOPI

Presentación

EL ÁLGEBRA , de brillante historia , con más de tres mil años de antiguedad , muy Bien pudiera considerarse como el idioma universal de la civilización. Constituye la base sobre la que se apoya la alta matemática y es el lenguaje en que se expresan la ciencia y técnica moderna . Problemas de difícil solución a partir de un planteamiento aritmético se resuelven mucho más fácilmente si se plantean en términos algebraicos.

Igual que ocurre con los idiomas , el álgebra también exige muchas horas de dedicación antes de que el estudioso pueda considerarse versado en ella. El viejo adagio de que ***«no existe un camino de aprendizaje corto»*** no es una excepción en este caso . Para llegar a «hablar» con soltura este idioma es necesario adquirir , ante todo , una idea clara y concisa de sus principios fundamentales y , después , poseer una gran dosis de práctica.

El proposito de este libro es , en esencia, proporcionar al alumno los conocimientos necesarios para llegar a dominar este campo fundamental de la matemática . Además de servir como libro de texto a los alumnos de un curso preuniversitario y superior , puede ser de considerable utilidad para aquellos otros que deseen repasar sus principios fundamentales y aplicaciones como introducción a ulteriores estudios de matemáticas , ciencias o ingeniería.

El contenido del libro se divide en capítulos que abarcan todos los conceptos clásicos de la teoría . Cada uno de ellos comienza con las definiciones , principios y teoremas correspondientes , junto con ejemplos ilustrativos de los mismos . A continuación , figura una gran colección de problemas resueltos y otra de problemas propuestos . Los primeros se han elegido de forma que proporcionen una visión clara de la aplicación correcta de los principios enunciados . Ilustran y complementan la teoría , ya que la repeticion de los teoremas es de importancia vital para conseguir una enseñanza eficaz e iluminan con potente foco aquellos conceptos que por su especial dificultad escapan generalmente al alumno , y cuya ignorancia se traduce siempre en sentimiento de inseguridad . Entre los problemas resueltos figura la aplicación de algunas fórmulas y teoremas . El estudio que se hace de muchas de las materias tratadas es más profundo y completo que el que se encuentra en la mayoría de los libros de texto ; su exposicion incluye el campo complejo , la teoría de ecuaciones , la combinatoria, el calculo superior , los determinantes , las series infinitas , ...,etc..

La finalidad de la presente obra es dar respuesta a cualquier selección de temas propuesta por el profesor , servir como libro de consulta y estimular un ulterior interés del alumno por el álgebra y las matemáticas básicas.

No deseo terminar, sin antes expresar mi profundo reconocimiento a la valiosa colaboración y sugerencias recibidas por parte de los licenciados ***EVER CASTELLANOS*** y ***AXEL LOAYZA*** y a las diseñadoras ***LILA CORDOVA MALPARTIDA , JAQUI TORRES VILLEGAS*** ; Vaya mi eterno agradecimiento, por su valioso apoyo para la materialización de esta obra . Únicamente me resta decir que cada capítulo de este libro no encierra solamente experiencia docente y esmero , sino , además, el sincero anhelo de que sirva de un paso más , para el estudiante en su ascenso al saber.

El Autor.







TABLILLA NEOSUMERIA

ORIGENES DEL ALGEBRA

El Álgebra es, en esencia, la doctrina de las operaciones matemáticas analizadas desde un punto de vista abstracto y genérico, independiente de los números u objetos concretos. A lo largo de la historia de la humanidad esta ciencia ha ido evolucionando, y cada civilización y cada cultura con sus características propias han dejando un legado testimonial escrito del que en la actualidad somos herederos.

LOS EGIPCIOS

Hacia el cuarto milenio a.C. nació una gran civilización a orillas del río Nilo: los Egipcios. Gracias a ellos y después de un largo proceso, los primitivos textos pictográficos evolucionaron para dar lugar a una ordenación lineal de símbolos más sencillos: sistema de notación jeroglífica.

La cantidad de información matemática que podemos obtener de las piedras talladas encontradas en las tumbas, los templos y de los calendarios es muy limitada y el panorama de las contribuciones egipcias que tendríamos sería extremadamente incompleto. Afortunadamente disponemos de otras fuentes de información; hay un cierto número de papiros egipcios que de una manera u otra , han conseguido llegar hasta nuestros días. El más extenso de los que contienen información matemática es un rollo de papiro de unos **30 cm** de alto y casi **6 m** de largo que está expuesto en el British Museum de Londres.

Este papiro fue comprado en ***1858*** en una ciudad comercial del Nilo por un anticuario escocés, Henry Rhind, de donde deriva el nombre de *Papiro Rhind* con el que se conoce usualmente o, no tan a menudo como el *Papiro de Ahmes* , en honor del escriba qúe lo copió hacia ***1650 a.C***. Este escriba cuenta que el material escrito se deriva de un prototipo del Imperio Medio de entre los años ***2000* y *1800 a.C.***, y es posible que parte de estos conocimientos provengan en realidad de Imhotep, el legendario arquitecto y médico del faraón Zoser. En cualquier caso la matemática egipcia parece haberse estancado durante unos ***2000*** años después de unos comienzos prometedores.



Los problemas que hay en el *Papiro de Rhind,* no se refieren a objetos concretos y específicos como pan o cerveza, ni tampoco piden el resultado de operaciones con números conocidos, sino que piden lo equivalente a resolver ecuaciones lineales de la forma $x + ax = b$ ó $x + ax + bx = c$, donde a, b y c son números conocidos y x es desconocido; a este número desconocido o incógnita le llamaban ***«aha»*** o ***«montón»***.

La solución que se da en el *Papiro de Rhind,* de los problemas de carácter algebraico planteados no es la que podría verse en los libros de texto modernos, sino que es característica de un procedimiento que conocemos hoy como el «método de la falsa posición» o *«regula falsi»*.

En este método se supone un valor concreto para el «montón», lo más probable es que sea incorrecto, y se efectúan con dicho número las operaciones indicadas en el miembro de la izquierda de la igualdad, a continuación se compara el resultado de estas operaciones con el resultado que debería haberse obtenido, y mediante el uso de proporciones se halla la respuesta correcta. Por ejemplo, el problema ***24*** del

Papiro de Ahmes , traducido literalmente, dice: «una cantidad , su ***1/7***, su totalidad asciende a ***19***». Esto para nosotros significaría : $x + x/7=19$

se toma como valor de prueba para la incógnita el ***7***, de manera que la ecuación toma el valor ***8*** en lugar del correcto que debía de ser ***19***, pero en vista de que ***8(2+1/4+1/8) =19***, tenemos que multiplicar ***7*** por ***2+1/4+1/8*** para obtener el valor correcto del «montón» ; Ahmes halla la respuesta correcta , ***16+1/2+1/8*** y «comprueba» su resultado mostrando que si a ***16+1/2+1/8*** se le suma un séptimo de él mismo, es decir ***2+1/4+1/8***, se obtiene efectivamente ***19***.

El único tipo de ecuación de segundo grado que aparece es el más sencillo : $ax^a = b$

Muchos de los cálculos de ***«aha»*** en el *Papiro de Rhind* eran evidentemente ejercicios para que practicasen los jóvenes estudiantes.

Este álgebra egipcia tan restringida no utilizaba prácticamente ningún simbolismo. En el *Papiro de Ahmes* las operaciones de sumar y restar aparecen representadas por un dibujo esquemático de las piernas de una persona que se acerca y que se aleja .

En definitiva, los egipcios solucionaban problemas de una incógnita que vienen a ser equivalentes a nuestra resolución de ecuaciones lineales. Sin embargo, los procesos seguidos eran puramente aritméticos y no constituían para los egipcios un tema distinto como podía ser la resolución de ecuaciones.

CIVILIZACIÓN MESOPOTÁMICA

Al igual que en el valle del Nilo, nació a orillas de los río Tigris y Eufrates a finales del cuarto milenio una nueva civilización : civilización mesopotámica o también llamada babilónica.



Antiguamente, como hoy en día, «la Tierra de los Dos Ríos» fue un territorio abierto a invasiones de diversa procedencia. Una de las más importantes fue la llevada a cabo por los acadios semitas debido al vasto territorio que ocuparon. Otras invasiones y revueltas posteriores elevaron al poder en el valle a los amorritas, cassitas, elamitas, hititas, asirios, medos y persas entre otros. Pero lo importante es que se conservó siempre una uniformidad cultural, en particular el uso generalizado de la escritura cuneiforme, lo suficientemente alta para que podamos referirnos a esta civilización simplemente como mesopotámica.

En Mesopotamia, el álgebra alcanzó un nivel considerablemente más alto que en Egipto ya que los babilónicos solucionaron tanto ecuaciones lineales como ecuaciones cuadráticas sin ninguna dificultad y algunos ejemplos de ecuaciones cúbicas.

Los documentos matemáticos que se conservan de la época son tablillas de arcilla blanda donde se imprimía el texto con una varilla y a continuación se cocían en hornos para endurecerlas. Estos documentos han sido menos vulnerables al paso del tiempo que los papiros egipcios, por lo que se dispone actualmente de una mayor información de la matemática mesopotámica que de la egipcia. La mayoría de las tablillas con contenido matemático se encuentran en las Universidades de Columbia, Pennsylvania y Yale, las cuales fueron suministradas por un yacimiento arqueológico de la antigua ciudad de Nipur.

Los problemas algebraicos aparecen formulados y resueltos de una manera completamente verbal, sin utilizar símbolos especiales. A menudo aparecen las palabras ***us*** (longitud), ***sag*** (anchura) y ***asa*** (área) utilizadas para representar las incógnitas, no porque dichas incógnitas representen tales cantidades geométricas, sino porque muchos problemas algebraicos seguramente surgieron de situaciones geométricas y esta terminología terminó por imponerse. Un indicio de que esto era así, es que los babilónicos no tenían ningún reparo en sumar una longitud con un área o un volumen.

Algunos ejemplos de estos problemas son:

- el problema en el que se pide hallar el lado de un cuadrado si su área menos el lado es igual a ***14;30*** ; la solución de este problema es equivalente a la resolución de la ecuación cuadrática $x^2 - x = 870$.

ÉPOCA HELENÍSTICA

La actividad intelectual que se desarrollaba en Egipto y Mesopotamia perdió impulso antes de que comenzase la Era Cristiana y además, empezaron a surgir nuevas civilizaciones a lo largo de la costa del mar Mediterráneo. A este progresivo cambio en los principales centros de las civilizaciones se le conoce como Edad Talásica (***800 a.C.- 800 d.C.***).

A principios de este periodo una nueva civilización se estaba preparando para ser la heredera de la hegemonía cultural del Mediterráneo, los helenos. Por ello, a la primera etapa de la Edad Talásica se la llamó época helénica. Este pueblo procedente del norte,que se asentó a orilas del mar Egeo, vino desprovisto de cultura, pero con grandes ansias de aprender.

Los griegos en menos de cuatro siglos, de Tales de Mileto a Euclides, muchos de ellos rivales de ciudades o de escuelas, construyeron un imperio invisible y único cuya grandeza perdura hasta nuestros días, este logro se llama ***Matemáticas.***

La matemática griega se ha desarrollado en tres etapas fundamentales, cuyas principales figuras son Pitágoras, Platón y Euclides. Cada uno de ellos aportó una singularidad esencial. Euclides fue el sintetizador de todos los conocimientos precedentes; su obra *Los Elementos* se convirító en canónica y paradigmática, y como tal ha marcado una pauta a lo largo de veintidós siglos. La figura central en todos los sentidos fue Platón, se ocupó de crear un entorno académico donde se potenciaron de forma extraordinaria lo estudios geométricos. Y finalmente Pitágoras, pionero instaurador de la tradición matemática griega y artífice de los fundamentos filosóficos e ideológicos de la Matemática. La tradición matemática de la escuela de Pitágoras es recogida por Platón para ponerla en manos de Euclides, que en la compilación de *Los Elementos* creó un modelo estructural paradigmático.

Los Elementos es un compendio, en lenguaje geométrico, de todos los conocimientos de la matemática elemental, es decir, por una parte la geometría sintética plana (puntos, rectas, polígonos y círculos) y espacial (planos, poliedros y cuerpos redondos); y por otra parte, una aritmética y un álgebra, ambas con una indumentaria geométrica. Así pues *Los Elementos* de Euclides son una exposición en orden lógico de los

fundamentos de la matemática elemental; y por su valor didáctico y su carácter de síntesis, ha sido utilizado como manual escolar hasta no hace mucho tiempo.

La obra de Euclides está formada por trece libros, de los cuales el Libro ***II*** y el ***V*** son casi completamente algebraicos; pero a diferencia de nuestra álgebra actual, que es simbólica, el álgebra de *Los Elementos* es un álgebra geométrica.

La matemática griega no se mantuvo uniforme a un nivel alto, sino que el glorioso periodo del siglo ***III a.C.*** fue seguido por una época de decadencia que quizá mejoró un poco con Ptolomeo, pero que no se recuperó hasta la «Edad de Plata» de la matemática griega, en torno al siglo que va del año ***250*** al año ***350*** aproximadamente. A comienzos de este periodo, conocido también como la Edad Alejandrina Tardía, nos encontramos con el más importante de todos los algebristas griegos, Diofanto de Alejandría .

*Diofanto ha sido llamado muchas veces **el padre del álgebra*** pero muchos le reniegan este título ya que a pesar de que en cuestiones de notación sin duda se lo merece, en términos de las motivaciones y los conceptos desarrollados esta pretensión resulta menos justificada. Su libro más importante es *Aritmética*, colección de unos ***150*** problemas sobre aplicaciones del álgebra. Según dice Diofanto, la *Aritmética* comprende trece libros, pero sólo conservamos seis de ellos procedentes de un manuscrito del siglo ***XIII*** que es una copia griega de otro más antiguo y de versiones posteriores. En ellos no hay ningún desarrollo axiomático ni tampoco se hace ningún esfuerzo por calcular todas las soluciones posibles, en el caso de las ecuaciones de segundo grado con dos raíces positivas se da solamente la mayor.

La gran innovación de Diofanto está en que manteniendo aún en los enunciados algebraicos la forma retórica de la estructura de la frase, sustituye con abreviaturas una serie de magnitudes, conceptos y operadores frecuentes, es decir, inicia el « álgebra sincopada».

En un problema de la *Aritmética* que se explica a continuación se puede observar el método que utiliza de forma sistemática Diofanto. Para calcular dos números, tales que su suma sea ***20*** y la suma de sus cuadrados ***208***, los números desconocidos no se representan por x e y , sino por lo que en nuestra notación moderna sería $10+x$ y $10-x$, entonces se tendrá que verificar únicamente que:

$(10+x)^2+(10-x)^2=208$, luego $x=2$ y los números buscados son ***8*** y ***12.***

En su libro, Diofanto no establece ninguna distinción entre los problemas determinados e indeterminados, en estos últimos sólo da una de las infinitas soluciones. En el problema indeterminado siguiente se ve como usa el mismo método para resolverlo que en el problema determinado anterior:

se pide calcular dos números tales que al sumar cualquiera de ellos con el cuadrado del otro da siempre como resultado un cuadrado perfecto ; éste es un ejemplo claro de problema de análisis diofántico, en el que sólo se admiten como soluciones aceptables números racionales. Para resolver el problema, Diofanto llama a los números buscados x y $2x+1$, de forma que al añadir el segundo al cuadrado del primero dará un cuadrado perfecto cualquiera que sea el valor atribuido a x. Pero se exige además que $(2x+1)^2+x$ también sea cuadrado perfecto, y llegados a este punto Diofanto no se preocupa en buscar las infinitas soluciones posibles, sino simplemente elige un cuadrado perfecto, en este ejemplo concreto es el número $(2x-2)^2$ tal que al igualarlo a $(2x+1)^2+x$ resulta una ecuación lineal en x, de la que se obtiene

que $x = 3/13$, luego el segundo número buscado será $x = 19/13$. Ahora bien, se podía haber utilizado $(2x-3)^2$ ó $(2x-4)^2$ u otra expresión análoga en vez de $(2x-2)^2$ para obtener otro par de números distintos con la misma propiedad .

Uno de los planteamientos que utiliza Diofanto que se puede acercar un poco a lo que llamamos «método» es que él en vez de manejar un sistema de dos ecuaciones simultáneas en dos incógnitas, opera con las condiciones sucesivas de manera que solo aparezca una única incógnita a lo largo de todo el proceso.

Actualmente no se sabe cuántos de los problemas de la *Aritmética* son originales de Diofanto y cuántos tomó prestados de otras colecciones análogas, ya que es muy probable que algunos de los problemas y de los métodos se puedan rastrear hasta sus orígenes babilónicos, que a diferencia de sus algebristas Diofanto utiliza números abstractos y no unidades de medida para determinar a las incógnitas.

No obstante, Diofanto ha tenido una influencia mucho mayor sobre la teoría de números moderna que cualquier otro algebrista no-geométrico griego.

ANTIGUA CIVILIZACIÓN CHINA

Las civilizaciones china e hindú se remontan a lo que se conoce hoy en día como Edad Potámica. La civilización china tuvo su cuna en la cuenca de los ríos Yangtze y Amarillo y el primer imperio chino data del año ***2750 a.C.***, aunque algunos historiadores creen que estuvo más cerca del año ***1000 a.C.***

La tarea de fechar los documentos matemáticos chinos no es fácil. Por ejemplo, las estimaciones que se han hecho acerca del *Chou Pei Suan Ching*, escrito en forma de diálogo entre un príncipe y su ministro que está considerado en general como el texto chino más antiguo de contenido matemático, difieren entre sí en casi mil años, ya que se le atribuyen varios autores de distintas épocas comprendidos entre ***1200 a.C.*** y ***300a.C.*** donde en esta última fecha, esta obra, coincidiría con otro tratado matemático muy importante *Chui-chang suan-shu* o los *Nueve Capítulos sobre el Arte Matemático,* poco antes de la dinastía Han (***200 a.C.- 220 a.C.***). Esta obra ejerció una gran influencia en los libros matemáticos chinos posteriores; incluye ***246*** problemas sobre agrimensura, agricultura, impuestos, cálculo, resolución de ecuaciones y propiedades de los triángulos rectángulos. En muchos casos la resolución de problemas conduce a sistemas de ecuaciones lineales utilizando números positivos y negativos.

Los *Nueve Capítulos* nos recuerdan en cierta manera a la matemática egipcia por su uso del método de la «falsa posición», pero lo cierto es que la invención de este procedimiento, lo mismo que el origen de la matemática china en general, parece haber sido independiente de toda influencia occidental.

Mayor interés histórico y matemático despierta el *SSu-yüan yü- Chien* o «Espejo Precioso de los Cuatro elementos» escrito por Chu Shih- Chieh en ***1303***. Los cuatro elementos a los que se refiere el título, que son el cielo ,la tierra el hombre y la materia , representan las cuatro incógnitas de una ecuación. Este libro marca la cota más alta que alcanzó el desarrollo del álgebra china, y en él se estudian tanto sistemas de ecuaciones simultáneas como ecuaciones individuales de grados tan altos como catorce. Chu Shih-Chieh explica un método de transformación para ecuaciones, que él llama el *fan fa* y cuyo fundamento debe de haber aparecido en China mucho tiempo atrás. Este método suele conocerse en occidente con el nombre de «método de Horner», matemático que vivió medio milenio más tarde, y consiste en evaluar de manera eficiente polinomios de una forma monomial.

Un ejemplo que vienen el libro de Chu Shih-Chieh para resolver la ecuación $x^2 + 252x - 5292 = 0$ es :

obtene en primer lugar por tanteo la aproximación $x = 19$, lo que significa que la ecuación tiene una raíz entre $x = 19$ y $x = 20$, a continuación utiliza el *fan fa,* en este caso la transformación $y = x - 19$ para obtener la ecuación $y^2 + 290y - 143 = 0$ con una raíz entre $y = 0$ e $y = 1$. El valor aproximado de la raíz buscada de esta última es $y = 143/(1+290)$ y por tanto el correspondiente valor de x. En algunos casos Chu Shih-Chieh obtiene aproximaciones decimales de las raíces.

El llamado «método de Horner» era bien conocido en China ,ya que por lo menos otros matemático del periodo Sung ***(960-1224)*** tardío hicieron uso de procedimientos análogos. Uno de ellos fue Ch'in Chiu-Shao ***(1202-1261)*** donde su obra *Shu-Shu Chiu-Chang* o «Tratado matemático en nueve secciones» marca el punto culminante del análisis indeterminado chino con la invención de reglas rutinarias para resolver sistemas de congruencias simultáneas, y el cálculo de la raíz cuadrada por etapas, paralelamente a lo que se hace en el «método de Horner».

LA CIVILIZACIÓN HINDÚ

Las excavaciones arqueológicas que se han realizado en Mahenjo Daro (valle indio que aguardó una gran población) muestran la existencia de una vieja civilización con un alto nivel cultural, contemporánea de los egipcios, pero de la cual no existe ningún documento matemático de aquella época. Un milenio

más tarde, el país fue ocupado por los invasores arios, procedentes de las altiplanicies de Irán, quienes introdujeron el sistema social de castas y desarrollaron la literatura sánscrita.

En el caso de la matemática hindú, nos encontramos con una sorprendente falta de continuidad. Las importantes contribuciones matemáticas se han realizado en periodos separados por largos intervalos de tiempo.

La primera época matemática se conoce como el periodo de los *Sulvasutras* o «regla de la cuerda», que terminó hacia el siglo ***II d.C.*** Este nombre hacía alusión a la operación de extender o tensar las cuerdas para efectuar mediciones y guardar los datos obtenidos según unas reglas marcadas. Estos conocimientos geométricos, algo primitivos, sirvieron para la planificación de templos y construcciones de altares.

La segunda época de la matemática hindú, conocida también como el «periodo alto», abarca desde el año ***200 d.C.*** al año ***1200 d.C.*** Este periodo es el más importante, especialmente en lo referente al álgebra hindú, ya que ésta alcanzó su plenitud gracias a cuatro destacados matemáticos :

Aryabhata (nacido el ***476***), Brahmagupta (nacido el ***598***), Mahavira (siglo ***IX***) y Bhaskara ***(1114-1185).***

Muchos de sus trabajos, y en general los de los matemáticos indios, estaban motivados por la astronomía y la astrología, de hecho la mayor parte del material matemático aparece en capítulos de libros de astronomía.

La primera obra que se conoce de este periodo fue la del matemático Arybhata: *Aryabhatiya*, libro bastante análogo a los *Elementos* de Euclides. Ambas obras son recopilaciones de desarrollos anteriores compiladas por un único autor. Pero a diferencia de los *Elementos*, *Aryabhatiya* está compuesta por ***123*** estrofas métricas y no tiene ninguna relación con la metodología deductiva.

Uno de los grandes progresos de la matemática hindú en la rama del álgebra fue el uso de abreviaturas de palabras y algunos símbolos para describir las operaciones. Como en el caso de Diofanto, no había ningún símbolo para la adición, una tilde sobre el sustraendo indicaba sustracción , otras operaciones se designaban con palabras clave o abreviaturas. Por ejemplo *ka*, de la palabra «karama» indicaba raíz cuadrada. Para las incógnitas utilizaban palabras que denotaban colores. Este simbolismo aunque no era exhaustivo, es suficiente para que se pueda clasificar el álgebra hindú como cuasisimbólica, y en realidad lo era más que el álgebra sincopada de Diofanto. Los problemas y sus soluciones correspondientes se escribían en este estilo cuasisimbólico, y sólo se daban los pasos y no iban acompañados de justificaciones ni demostraciones.

Los indios sabían que las ecuaciones cuadráticas tenían dos raíces e incluían las negativas y las irracionales. Los tres tipos de ecuaciones cuadráticas

$ax^2 + bx = c$, $ax^2 = bx + c$, $ax^2 + c = bx$ con a, b, c positivos estudiados por Diofanto de manera independiente, fueron tratados por dos de los matemáticos hindúes antes mencionados, Brahmagupta y Bhaskara, como un solo caso:

$px^2 + qx + r = 0$ porque admitían que algunos coeficientes podían ser negativos. Para ello utilizaban el método de completar cuadrado.

En las ecuaciones indeterminadas avanzaron más allá que Diofanto. Estas ecuaciones surgieron en problemas de astronomía, las soluciones mostraban cuándo ciertas constelaciones habían aparecido en el firmamento. Brahmagupta y Bhaskara consideraban todas las soluciones enteras, mientras que Diofanto tomaba una única solución racional. El procedimiento para obtener las soluciones enteras de $ax \pm bx = c$ donde a, b y c son números enteros positivos era la siguiente: ellos sabían que para que la ecuación tuviese soluciones enteras, a y b debían dividir a c, y además Brahmagupta descubrió que si a y b eran primos entra sí, todas las soluciones de la ecuación vendrían dadas por las fórmulas $x = p + mb$ e $y = q - ma$, donde m es un número arbitrario.

Brahmagupta también estudió la ecución diofántica cuadrática $x^2 = 1 + py^2$, la cual recibe el nombre erróneo de ecuación de J. Pell ***(1611-1685)***, y su colega Bhaskara resolvió algunos casos particulares.

Bhaskara, último matemático medieval importante en la India, plasmó las contribuciones hindúes anteriores a su época , en especial los problemas planteados por Brahmagupta, en su tratado más conocido, el *Lilavati* (título que toma del nombre de su hija) y en otra obra menos conocida llamada *Vija-Ganita*.

LA CULTURA ÁRABE

La península arábiga estaba habitada en el siglo ***VI*** por nómadas del desierto, los beduinos, que no sabían leer ni escribir. En esta época apareció el profeta Mahoma, quien en medio siglo consiguió formar un estado «mahometano» con centro en La Meca. En el año ***622*** muere Mahoma, pero esto no entorpece la expansión de la cultura islámica. En unos veinte años conquistan Damasco, Jerusalén y Alejandría; el valle mesopotámico está bajo su mandato.Y en el siglo VIII ocupan España y Marruecos. Esto, crea una pequeña fisura entre los árabes de Oriente y los de Occidente,

por lo que nos damos cuenta que su unidad era más económica y religiosa que política.

Su despertar intelectual fue gracias al califa Al-Mamun quien ordenó traducir todas la obras griegas existentes al árabe y fundó la Casa de la Sabiduría en Bagdad, donde los miembros de esta especie de universidad estudiaban las obras antiguas e investigaban en el terreno científico.



ABU MUHAMMAD AL- KHWARIZMI (780 - 850)

Uno de los matemáticos que trabajaron por instaurar un lenguaje matemático universal y válido, fue ***Abu Ja'far Muhammad ibn Musa Al-Khwarizmi (780-850)***, nacido en Bagdad, mediante una obra escrita en el año ***830*** y llamada *Hisab-al-jabr-wa-al-muqabala.* El título traducido significa "libro sobre las operaciones abr (restablecimiento) y qabala (reducción)". En honor a su nombre y su labor, hoy llamamos álgebra a esta parte de las matemáticas.

Al-Khwarizmi, fue un gran traductor de textos hindúes y griegos por lo que parece natural pensar que parte de su obra fuera debida a estos pueblos.

En Hisab-al-jabr-wa-al-muqabala se introducían en una primera parte las operaciones a efectuar para el traslado de términos de un miembro a otro en una ecuación (al-jabr). La segunda parte estaba dedicada a la reducción de términos semejantes en una ecuación (al-qabala).

POR EJEMPLO:

$x+2=3 \Rightarrow x+2-2=3-2 \Rightarrow x=1$ (transformación por al-jabr)

$x^2-5x^2=-4x^2$ (transformación por al-qabala)

Además en dicho libro se contenían las resoluciones sistemáticas de las ecuaciones de primer y segundo grado de la forma:

$$ax=b$$
$$ax^2=b$$
$$ax^2=bx$$
$$x^2+bx=a$$
$$x^2+a=bx$$
$$bx+a=x^2$$

y las soluciones de determinadas ecuaciones en forma geométrica.

Las aportaciones de Al-Khwarizmi fueron vitales ya que los textos árabes y mediavales posteriores a él se vieron claramente influidos por su notación y los términos álgebra (que procede de la primera parte al-*jabr* del libro Al-Khwarizmi) y algoritmo (que procede del propio nombre de Al-Khwarizmi y cuyo significado actual es el de sistema de cálculo producido por reglas estrictamente determinadas y que conducen a la solución) quedaron absolutamente arraigados en las matemáticas a partir de este matemático.

Las obras del musulmán Al-Jwarizmi fueron fundamentales para el conocimiento y el desarrollo del álgebra. Al - Jwarizmi investigó y escribió acerca de los números, de los métodos de cálculo y de los procedimientos algebraicos para resolver ecuaciones y sistemas de ecuaciones. Su nombre latinizado dio origen a la palabra *algoritmo* que, usada primero para referirse a los métodos de cálculos numéricos en oposición a los métodos de cálculo con ábaco, adquirió finalmente su sentido actual de «procedimiento sistemático de cálculo». En cuanto a la palabra *álgebra*, deriva del título de su obra más importante, que presenta las reglas fundamentales del álgebra, *Al-jabr wal muqabala.*

El conocimiento de la obra de Al-Khwarizmi a través de la primera traducción de Roberto de Chester en ***1145*** y de otros textos árabes posteriores, influyó decisivamente en matemáticos como Leonardo de Pisa ***(1170-1240)***, apodado Fibonacci, quien introdujo un álgebra algo mejorada en Italia así como el sistema de numeración decimal hindú mientras que, algo más tarde, Robert Recorde ***(1510-1558)*** lo hizo en su país, Inglaterra, con su libro Whetstone of Witte publicado en ***1557.***

En el siglo **X** vivió el gran algebrista musulmán Abu Kamil, quien continuó los trabajos de Al-Jwarizmi y cuyos avances en el álgebra serían aprovechados en el siglo ***XIII*** por el matemático italiano Fibonacci.

Al álgebra contribuyeron antes que nada con el nombre. *La* ***palabra álgebra*** *viene de un libro escrito en año* ***830*** *por el astrónomo Mohamed ibn Musa al-Khowarizmi, titulado Al-jabr w 'al muqábala, que significa restauración y simplificación.*

Como ya hemos dicho, a veces se le llama a Diofanto el padre del álgebra, pero según muchos este título se le aplicaría mejor a Al- Khowarizmi. Aunque sea verdad que al menos en dos aspectos la obra de Al-Khowarizmi representa un retroceso respecto a la de Diofanto : es de un nivel mucho más elemental y el álgebra de Al-Khowarizmi es completamente retórica, sin ninguna de las sincopaciones que se encuentran en la *Aritmética*

de Diofanto o en la obra del matemático hindú Brahmagupta. Aunque es probable que Al-Khowarizmi hubiese estado familiarizado con las obras de estos dos matemáticos.

EUROPA MEDIEVAL

Tras la caída del imperio romano en el año ***476***, Europa comienza una nueva etapa, conocida como Edad Media que finalizaría a principios del siglo ***XIV***.

El punto de arranque de las matemáticas en Europa fue la creación de los centros de enseñanza. Con anterioridad, tan solo algunos monjes se habían dedicado a estudiar las obras de carácter matemático de los antiguos. Uno de los primeros centros de enseñanza fue organizado en Reims, ciudad francesa, por Gerberto (Silvestre ***II***) a finales del siglo ***X***. Gerberto, fue posiblemente el primero de Europa que enseñó el uso de los numerales indo-arábigos. Sin embargo, hubo que esperar a que los musulmanes rompieran la barrera lingüística, hacia el siglo ***XII***, para que surgiera una oleada de traducciones que pusiera en marcha la maquinaria matemática. Tras estas traducciones en árabe, entra en escena el importante papel que desempeñaron los traductores españoles, ya que éstos a su vez tradujeron las obras del árabe al latín, permitiendo su difusión por Europa. Uno de los traductores más importantes fue Gerardo de Carmona (***1114-1187***), quien tradujo del árabe los *Elementos* de Euclides, el *Almagesto* de Ptolomeo y el *Algebra* de Al-Khowarizmi.

Los principales centros en los que se desarrolló este punto de arranque matemático en Europa fueron las universidades de Oxford, París, Viena y Erfurt (estas dos últimas fundadas en los años ***1365*** y ***1392*** respectivamente).

Cabe destacar a tres matemáticos del siglo ***XII*** y ***XIII*** procedentes de sectores sociales muy distintos, que contribuyeron a popularizar el «algorismo»:

-***Alexandre de Villedieu*** fue un franciscano francés que escribió *Carmen de algoritmo*, una obra lírica en la que se describen con detalle las operaciones fundamentales con los enteros utilizando los numerales hindú- arábigos y considerando al cero como un número.

-***John de Halifax (1200-1265)*** conocido también como Sacrobosco, fue un maestro inglés que contribuyó con su obra *Algorismus vulgaris*, manual práctico de cálculo que rivalizó en popularidad con su otra famosa obra: *Sphaera*, un tratado sobre astronomía que se usó en las escuelas a lo largo de la Edad Media tardía.

-Y el tercero y más importante fue Leonardo de Pisa ***(1170 - 1250)***, más conocido como Fibonacci o «hijo de Bonaccio». Fue educado en África y viajó extensamente por Europa y Asia Menor, gracias a lo que pudo aprender el sistema de numeración indo-arábigo. En ***1202***, Fibonacci escribió su *Liber Abaci* (el libro del ábaco), un tratado muy completo sobre métodos y problemas algebraicos en el que se recomienda con gran insistencia el uso de los numerales hindú-arábigos.

El *Liber Abaci* no es un libro cuya lectura resulte precisamente gratificante al lector moderno porque explica los procesos algorítmicos o aritmético usuales, incluida la extracción de raíces en problemas de transacciones comerciales, utilizando para ello un complicado sistema de fracciones al calcular los cambios de moneda .No deja de ser una de ser una de las ironías más notables de la historia que la principal ventaja del sistema de notación posicional, es decir, su aplicación a las fracciones, pasase casi desapercibido a los que utilizaron los numerales indo-arábigos durante los primeros mil años de su existencia.

Tanto en el *Liber Abaci* como en su trabajo posterior: *Liber Quadratorum* ***(1225)***, Leonardo se ocupó del álgebra. Siguió a los árabes en usar palabras en lugar de símbolos y basar el álgebra en métodos aritméticos. Expuso la solución de ecuaciones determinadas e indeterminadas de primer y segundo grado, así como de algunas ecuaciones cúbicas. Al igual que Khayyam (matemático árabe), creía que las ecuaciones cúbicas no podían ser resueltas algebraicamente.

La característica nueva más significativa del trabajo de Leonardo es la observación de que la clasificación de Euclides de los irracionales en el libro ***X*** de los *Elementos* no incluía todos los irracionales. Fibonacci mostró que las raíces de la ecuación :

$x^3+2x^2+10x=20$ no pueden construirse con regla y compás. Esta fue la primera indicación de que el sistema de números contenía más de los que permitía el criterio griego de existencia basado en la construcción mencionada.

Pero a pesar de todo, Fibonacci quedaría inmortalizado por la famosa sucesión que lleva su nombre y su no menos conocido «***problema de los conejos***».

RENACIMIENTO

Durante los siglos ***XV*** y ***XVI*** hubo un vasto movimiento de revitalización de la cultura en Europa Occidental. El nombre de Renacimiento es debido a que se retomaron los elementos de la cultura clásica tanto en el ámbito del arte como en el estudio de los científicos antiguos. El invento de la imprenta ayudó notablemente a que este movimiento cultural pudiese

expandirse de una manera rápida por toda Europa.

Los matemáticos del Renacimiento prepararon el terreno para el resurgir del estudio matemático en Europa mediante las traducciones de los trabajos griegos y árabes y los trabajos enciclopédicos de compilación del conocimiento existente. Pero las motivaciones y direcciones de las creaciones matemáticas surgieron principalmente de los problemas tecnológicos y científicos. Pero hubo algunas excepciones, como es el caso del crecimiento del álgebra.

Ya en el siglo *XV* Regiomontano fue el matemático que más enriqueció el álgebra, su rama de las matemáticas favorita, aunque su influencia se vio limitada por su adhesión a la forma de expresión retórica y por su temprana muerte. Después de su fallecimiento, sus manuscritos fueron a parar a las manos de otro matemático, Nuremberg, quien no logró hacer accesible la obra de Regiomontano en los años posteriores. Así, Europa continuó aprendiendo su álgebra de forma lenta dado a la escasez de traducciones que discurrían por las universidades y el poco interés que mostraban muchos humanistas por las ciencias.

Hasta la aparición del *Ars Magna* de Cardano en ***1545***, no hubo en el Renacimiento desarrollos trascendentes en álgebra. Sin embargo, merecen ser mencionadas algunas obras que contribuyeron a que esta rama de las matemáticas no quedase en el olvido.

El trabajo de un fraile italiano llamado Luca Pacioli***(1445-1514)***, su principal publicación es la *Summa* , una recopilación de material de cuatro campos distintos: aritmética, álgebra, geometría euclídea y contabilidad de doble entrada. Fue escrita en lengua vernácula y la parte dedicada al álgebra incluye las soluciones de las ecuaciones lineales y algunas soluciones de las cuadráticas. Su álgebra es retórica; sigue a Leonardo y a los árabes al llamar a la incógnita la «cosa» y, al cuadrado de la incógnita «census», que a veces abrevia como «ce» o «Z»; el cubo de la incógnita , «cuba», se presenta a veces como «cu» o «C. Al escribir ecuaciones, cuyos coeficientes son siempre numéricos, coloca los términos en el lado que permite la utilización de coeficientes positivos y sólo da las raíces positivas. La parte del libro dedicada al álgebra termina con la observación de que la solución de las ecuaciones

$x^3 + mx = n$ y $x^3 + n = mx$ son tan imposibles como la cuadratura del círculo. Gracias al amplio conocimiento disponible en el libro, fue más usada de lo que le correspondería por su originalidad.

A parte de la innegable influencia de Italia durante el despegue cultural del siglo *XV* y *XVI*, en otros lugares Europeos no se quedaron rezagados. En Alemania los libros de álgebra publicados llegaron a ser tan numerosos que durante algún tiempo se impuso en casi toda Europa el uso de la palabra alemana «coss» para designar a la incógnita y el álgebra misma vino a llamarse «el arte cósico» o «arte de la cosa». Entre la numerosas álgebras germánicas cabe destacar la *Die Coss* , escrita en ***1524*** por el famoso matemático alemán Adam Riese ***(1492-1559)***. Este autor fue el más influyente de los matemáticos alemanes por su tendencia de reemplazar los viejos métodos de cálculo basados en el uso de cuentas o fichas, o bien de los numerales romanos, por los nuevos métodos utilizando pluma y los numerales hindú-árabes. Sus numerosos textos de aritmética resultaron ser tan efectivos que aún se usa en Alemania la frase «Nach Adam Riese» como un elogio a la exactitud en los cálculos aritméticos. Riese menciona también en su *Die Coss* el *Algebra* de Al-Khowarizmi y cita además a un cierto número de predecesores alemanes en este campo. Entre ellos se encuentran la *Coss (1525)* de Christoph Rudolff, el *Rechnung (1527)* de Peter Apian y la *Aritmética integra* (***1544***) de Michael Stifel.

La primera obra es importante por ser uno de los primeros libros impresos que hace uso de las fracciones decimales, así como del símbolo moderno para las raíces; la segunda es notable por el hecho de que en ella en una aritmética comercial a fin de cuentas, aparece impreso en la portada el llamado «triángulo de Pascal», casi un siglo antes del nacimiento de Pascal. Y la tercera de las obras que se ha mencionado, *Aritmética integra*, fue la más importante de las tres, trata los números negativos, la raíces y las potencias. Mediante el uso de los coeficientes negativos en las ecuaciones, Stiffel pudo reducir la multiplicidad de casos de ecuaciones cuadráticas a una forma única, pero como contrapartida tenía que explicar por medio de una regla especial cuándo usar el signo **+** y el signo **–**. Para las sucesivas potencias de la cantidad incógnita en álgebra, propuso utilizar una letra única para representar la incógnita, y repetir dicha letra para las potencias más elevadas de la incógnita tantas veces como indique la potencia en cuestión.

Stiffel daba en su obra muchos ejemplos que conducían a ecuaciones cuadráticas , pero ninguno de sus problemas conducía a una ecuación cúbica, por la sencilla razón de que no había nada más sobre la resolución algebraica de las cúbicas que lo que sabían Pacioli o Khayyam.

Sin embargo en al año ***1545*** se divulgó la solución no sólo de la ecuación cúbica, sino también de la cuártica, gracias a la publicación del *Ars Magna* de Jerónimo

Cardano ***(1501-1576)***.Un avance tan sorprendente e inesperado como éste produjo un impacto tan importante en el mundo de los algebristas, que el año ***1545*** se suele consideras a menudo como el que marca el comienzo del periodo moderno en la matemática. No obstante, Cardano afirma en su libro que no fue el descubridor original de la solución de la ecuación cúbica ni de la cuártica. La sugerencia para resolver la cúbica la obtuvo de Niccolo Tartaglia ***(1500-1557)***, que a su vez obtuvo la idea de Scipione del Ferro ***(1465 -1526)*** un profesor de matemáticas que nunca llegó a publicar la solución, sino que se la reveló antes de su muerte a uno de sus alumnos, Antonio María Fior, un matemático mediocre. Mientras, la solución de la cuártica fue descubierta por primera vez por el antiguo secretario de Cardano, Ludovico Ferrari ***(1522-1565)***.

Sea como fuere, estos desarrollos abrieron las puertas a muchos otros hallazgos matemáticos en los siglos posteriores.

En el *Ars Magna* aparece además el genial descubrimiento de que un polinomio es divisible por los factores del tipo $(x-a)$ donde a es raíz del polinomio, aunque no se da ninguna demostración.

Una de las consecuencias más importantes tras la publicación del *Ars magna* fue que la solución de la ecuación cúbica condujo a las primeras consideraciones significativas acerca de un nuevo tipo de número. Tuvieron que aceptar la existencia de los número irracionales y de los números negativos, pero estos últimos presentaban más dificultades ya que no se les podía aproximar por números positivos a diferencia de los irracionales que podían ser aproximados fácilmente por números racionales. Cardano se encontraba a menudo con el problema de que la fórmula para resolver ecuaciones cúbicas le conducía a raíces cuadradas de números negativos.

Ante este problema, otro importante algebrista italiano Rafael Bombelli ***(1526-1573)*** tuvo una genial idea, como los dos radicandos bajo las raíces cúbicas que aparecen en la fórmula final solo difieren en un signo, Bombelli imaginó que los radicales mismos podían estar relacionados entre sí de la misma manera que lo están los radicandos; es decir, lo que ahora nosotros denominaríamos como complejos conjugados. Pero Bombelli se encuentró con que necesitaba conocer de antemano una de las raíces de la ecuación, y sin tal conocimiento previo su planteamiento fallaba. Bombelli plasmó todas sus ideas en su obra pòstuma *Algebra*.

Uno de los avances más significativos en el álgebra durante el siglo XVI fue la introducción de un mejor simbolismo, lo que hizo posible hacer una ciencia del álgebra. Los símbolos + y – fueron introducidos por los alemanes en el siglo XV para denotar excesos y defectos en los pesos de cofres y arcas; el símbolo & para la multiplicación lo introdujo William Oughtret y el símbolo = fue obra de Robert Recorde, matemático en Cambridge, donde escribió un tratado sobre el álgebra, *The Whet-stone of Witte;* en él decía que no conocía dos cosas más iguales que dos líneas paralelas y por tanto este tipo de líneas debían denotar la igualdad.

Pero sin duda el cambio más significativo en el carácter del álgebra relacionado con el simbolismo fue introducido por François Viète ***(1540-1603)*** un abogado francés cuyo interés por las matemáticas era puro entretenimiento y describe su *In Artem Analyticam Isagoge* como la obra del análisis matemático restaurado. Viète traza la línea divisoria entre la aritmética y el álgebra y propone utilizar una vocal para representar una cantidad que se supone en álgebra desconocida o indeterminada, y una constante para representar una magnitud o un número que se supone conocido o dado. Esta distinción entre el concepto de parámetro y la idea de incógnita fue un paso previo a la matemática moderna.



SIGLO XVII

Hacia el año ***1575***, Europa occidental había recuperado ya la mayor parte de las obras matemáticas más importantes de la antigüedad. El álgebra árabe no sólo había sido asimilada, sino mejorada gracias a la resolución de las ecuaciones cúbicas y cuárticas y el uso de un cierto simbolismo. Por tanto Europa estaba preparándose para la matemática del mundo moderno. Pero este salto no hubiera sido posible sin una excelente transición del Renacimiento al mundo moderno.

Esto fue posible gracias a la intensa intercomunicación que hubo entre los distintos matemáticos de este siglo, algo que no existía desde los tiempos de Platón. Todavía no existía ninguna organización matemática de tipo profesional, pero en países como Italia, Francia e Inglaterra ya había algunos científicos que estaban más o menos organizados. En Italia estaban las Accademias

dei Lincei y del Cimento, en Francia el Cabinet Du Puy y el Invisible College en Inglaterra. Además hubo un fraile, Marin Mersenne, que se encargó de que la información sobre nuevos hallazgos matemáticos circulase por todo el ámbito científico con una rapidez y eficacia inusual hasta el momento.

Este preludio a la matemática moderna viene marcado por grandes figuras matemáticas.

El escocés John Napier ***(1550-1617)*** con su *obra Canonis mirifici logarithmorum descripto* ; los ingleses Henry Briggs ***(1561-1639)***, Thomas Harriot ***(1598-1621)*** y William Oughtred (1574-1660), éste último introdujo el aspa & para denotar a la multiplicación en su libro *Clavis mathematicae*, y el flamenco Albert Girad ***(1590-1633)*** quien en su obra *Invention nouvelle* adopta una notación algo singular, las potencias están escritas con números dentro de círculos. Pero el álgebra simbólica alcanza su madurez ocho después de la publicación de la obra de Girad, aparece *La Géométrie* de René Descartes ***(1596-1650)***, que sitúa a Francia en el centro del mundo matemático, durante el último tercio del siglo ***XVII***.

Descartes comienza *La Géométrie* con la resolución de problemas geométricos mediante el álgebra. Primero muestra cómo se pueden interpretar geométricamente las operaciones algebraicas, incluida la resolución de las ecuaciones cuadráticas, y a continuación Descartes se centra en la aplicación del álgebra a determinados problemas geométricos formulando el planteamiento general de una manera mucho más clara que los «cosistas» del Renacimiento. A lo largo de los libros ***I*** y ***III*** se dedica a este tipo de problema geométrico en el que la ecuación algebraica resultante sólo puede contener una incógnita. Él sabía muy bien que el grado de esta ecuación final era el que determinaba los métodos geométricos con ayuda de los cuales podría efectuarse la construcción geométrica pedida. Descartes comenzaba con el estudio de un problema puramente geométrico para traducirlo a continuación al lenguaje de una ecuación algebraica. Él insistía en que al resolver geométricamente una ecuación se deberían utilizar únicamente los métodos más sencillos compatibles con el grado de la ecuación. Para las ecuaciones cuadráticas son suficientes rectas y circunferencias y para las cúbicas y las cuárticas bastan las cónicas.

En el Tercer libro de *La Géométrie*, Descartes afirma que una ecuación puede tener tantas raíces como el número de dimensiones (el grado) de la incógnita , usando la expresión «puede tener», por considerar las raíces negativas como falsas. Más tarde, al incluir las raíces imaginarias y las negativas a efectos de contar las raíces, concluyó que hay tantas como indica el grado. Descartes en esta obra enunció sin demostración la regla de los signos conocida como «regla de Descartes», que afirma que el máximo número de raíces positivas de $f(x)=0$ donde f es un polinomio, es el número de variaciones del signo de los coeficientes, y que el máximo número de raíces negativas es el número de apariciones de dos signos «+» o dos signos «–» consecutivamente. En terminología actual, la última parte de la regla afirma que el número máximo de raíces negativas es el número de variaciones en la ecuación $f(-x)=0$. Esta regla fue demostrada por varios matemáticos del siglo ***XVIII***. Descartes también enuncia y demuestra en este tercer libro que $f(x)$ es divisible por $(x-a)$ con a positivo, si y sólo si a es una raíz de $f(x)=0$ y por $(x+a)$ si y sólo si a es una raíz falsa. Con este y otros resultados, Descartes establece el método moderno de hallar las raíces racionales de una ecuación polinómica.

En *La Géométrie*, introduce el principio de coeficientes indeterminados.

Aunque Descartes usó las mejoras en la notación algebraica , su libro no es fácil de leer, de hecho Descartes presumía de que pocos matemáticos en Europa podían entender su trabajo, tal vez por ello , la difusión del empleo de ecuaciones algebraicas para representar y estudiar curvas fue lento.

Descartes ve en el álgebra un poderoso método de guía del razonamiento con cantidades desconocidas y abstractas. En su visión el álgebra mecaniza la matemática de forma que el pensamiento y los procesos se simplifican. Por ello, propone tomar lo mejor del álgebra y la geometría y corregir los defectos de una con la ayuda de la otra .Así crea lo que se denominará geometría analítica. Él fue el primero en asignar al álgebra un lugar fundamental en el sistema de conocimiento. Y al argumentar que una curva es cualquier lugar geométrico que tiene una ecuación algebraica, Descartes abrió de un solo golpe el dominio matemático.



El otro francés importante de la época fue Pierre de Fermat ***(1601-1665)*** que contribuyó también a la geometría analítica y al análisis infinitesimal, aunque su aportación más importante fue en el campo de la teoría de números, según él gracias haber leído la *Aritmética* de Diofanto. Fermat formuló que no hay números enteros positivos x , y , z tales que $x^3+y^3=z^3$; conocida esta afirmación como «último teorema de

Fermat».Aunque desgraciadamente no dejó ninguna demostración escrita, según él porque «el margen era demasiado estrecho para contenerla».

SIGLO DE LAS LUCES

El siglo ***XVIII*** fue el siglo de las «revoluciones». En ***1789*** estalla en Francia la conocida como Revolución Francesa, y en otras zonas de Europa, especialmente en Inglaterra, la llamada Revolución Industrial que cambió profundamente la estructura social del mundo occidental.

A pesar de la inestabilidad política en Francia, los matemáticos franceses seguían siendo el centro de atención de la Europa matemática, y fueron los responsables de las principales líneas de investigación y desarrollo matemático.

Las gran cantidad de publicaciones anteriores a la Revolución Francesa, contribuirían un siglo después a la aparición del álgebra abstracta.

En ***1707*** aparece *De Análysis* de Isaac Newton ***(1642-1727)***; la esencia de la obra consiste en reducir cualquier problema a la formación de una ecuación algebraica, cuya raíz será la solución del problema. En el libro, Newton enuncia un teorema que permite determinar el número de raíces reales de un polinomio, así como una regla con la que es posible dar una cota superior de las raices positivas. *De Análysis* termina con los resultados de la teoría general de ecuaciones y además la resolución gráfica de éstas mediante la construcción geométrica de las raíces.

En ***1646*** nace, en Leipzig, Gottfried Leibniz ***(1646-1716)***, su contribución más importante a la matemática, a parte de en el cálculo, lo fue en el campo de la lógica. Lo que más le impresionaba del cálculo era el carácter de universalidad que presentaba, y esta misma idea fundamental, la aplicó a sus restantes trabajos. Leibniz pretendía reducir todas las cosas a un orden, y para reducir todas las discusiones lógicas a una forma sistemática quería desarrollar una «característica universal» que sirviera como una especie de álgebra de la lógica. Además pensaba que se podían hacer descubrimientos nuevos mediante operaciones correctas, pero más o menos rutinarias con los símbolos, de acuerdo con las leyes del cálculo lógico. Su sugerencia revivió en el siglo ***XIX*** y jugó un papel muy importante en la matemática de este siglo.

D'Alembert ***(1717-1783)*** dio una demostración, defectuosa , del teorema fundamental del álgebra y Clairaut en ***1740*** ya había publicado un texto, los *Eléments d'algèbre*, que llegó a alcanzar tal popularidad que aún se publicó una sexta edición de él en ***1801***. Euler no sólo contribuyó a la teoría de números, sino que escribió también un texto de álgebra muy popular que se publicó en ediciones en alemán y en ruso en San Petersburgo ***1770-1772***, en francés (bajo los auspicios de D'Alembert)***1774*** y en otras muchas versiones, incluidas algunas ediciones americanas en inglés. La excepcional calidad didáctica del *Algebra* de Euler se suele atribuir al hecho de que la dictó el autor ya ciego a un criado de escasos conocimientos. Los libros de texto de Clairaut y Euler se utilizaron relativamente poco en Inglaterra, en parte debido al aislamiento matemático de Inglaterra a finales del siglo ***XVIII***, y en parte también a que Maclaurin y otros matemáticos habían escrito buenos libros de texto de nivel elemental. El *Treatise of Álgebra* de Maclaurin llegó alcanzar media docena de ediciones desde ***1748*** a ***1796***. Uno de los textos rivales de este tratado fue el *Treatise of Álgebra* de Thomas Simpson***(1710-1761)*** quien pudo jactarse de llegar a ocho ediciones, por lo menos en Londres de ***1745*** a ***1809***; otro, los *Elements of Álgebra* por Nicholas Saunderson***(1682-1739)*** se editó cinco veces entre ***1740*** y ***1792***.

Los textos de álgebra del siglo ***XVIII*** ilustraban de manera clara la tendencia hacia un énfasis creciente en los aspectos algorítmicos de la materia, mientras que sus fundamentos lógicos permanecían aún sumergidos en una incertidumbre considerable. La mayor parte de los autores consideraba necesario insistir largamente sobre las reglas que regían la multiplicación de números negativos, aunque algunos rechazaban de forma categórica la posibilidad de multiplicar dos números negativos.

A juzgar por la aparición casi repentina de tantas obras sobre geometría analítica a partir de ***1798***, se produjo una auténtica revolución en la enseñanza. La geometría analítica, que había permanecido eclipsada por el cálculo durante más de un siglo, consiguió de pronto que se le reconociera un lugar por derecho propio en las escuelas; la paternidad de esta «revolución analítica» hay que atribuirla principalmente a Gaspard Monge ***(1746-1818)***. Entre los años ***1798*** y ***1802*** aparecieron cuatro obras sobre geometría analítica elemental, de las plumas de Sylvestre François Lacroix ***(1765-1842)***, Jean-Baptiste Biot ***(1774-1862)***, Louis Puissant ***(1769-1843)*** y F.L.Lefrançais, todas ellas inspiradas directamente por las lecciones dadas en la École Polytechnique. Los «politécnicos «fueron responsables de otros tantos textos de nuevo en la década siguiente. La mayor parte de ellos alcanzaron un gran éxito, publicándose en numerosas ediciones. El libro de Biot llegó a cinco ediciones en menos de una docena de años; el de Lacroix, alumno y más tarde colega de Monge, apareció

en veinticinco ediciones en noventa y nueve años. Lacroix se negó a utilizar el nombre de «geometría analítica «como posible título de su libro de texto, al que tituló *Traite élémentairede trigonométrie rectiligne et sphérique et*

application de l'algèbre à la géométrie. Aunque el nombre de «geometría analítica « había aparecido ya de vez en cuando a lo largo del siglo ***XVIII***, parece ser que el primero que lo utilizó como título de un libro de texto fue Lefrançais en una edición de sus *Essais de géométrie* de ***1804***, así como Biot en la edición de ***1805*** de sus *Essais de géométrie analytique*

SIGLO XIX

El siglo ***XIX*** merece ser llamado más que ningún otro periodo anterior, la Edad de Oro de la Matemática. Los progresos realizados en el ámbito matemático durante este siglo superan tanto en cantidad como en calidad, la producción reunida de todas las épocas anteriores. En ***1874*** el dominio del análisis se ve conmocionado por la matemática del infinito que acababa de introducir Cantor ***(1845-1918)***, un matemático alemán que había nacido en Rusia. Francia ya no era el centro reconocido del mundo matemático aunque produjera la meteórica carrera de un jovencísimo Évariste Galois ***(1811-1832)***, tuvo que compartir este liderazgo con otros países como Alemania, país que crea al matemático más importante de este siglo o para muchos de la historia, Carl Friedrich Gauss***(1777-1855)***. El carácter internacional de la matemática también queda de manifiesto en el hecho de que las dos contribuciones más revolucionarias al álgebra, en ***1843*** y ***1847*** las hicieron dos matemáticos que enseñaban en Irlanda. La primera de ellas fue obra de Sir William Hamilton ***(1805-1865)*** y la segunda de George Boole ***(1815-1864)***. No obstante,los algebristas más prolíficos del siglo ***XIX*** fueron dos ingleses que vivieron parte de su vida en Estados Unidos; se trata de Arthur Cayley***(1821-1895)*** y J.J.Sylvester ***(1814-1897)*** y fue principalmente de su *alma mater*, Cambrige, de donde surgió el desarrollo del álgebra moderna.

En ***1799***, Gauss publica su tesis en la Universidad de Helmstadt que lleva el título de *Nueva Demostración del Teorema Que Toda Función Algebraica Racional y Entera de Una Variable Puede Resolverse en Factores Reales de Primero o de Segundo Grado.* Este teorema, al que más tarde se referirá Gauss como el «teorema fundamental del álgebra»,era conocido en su tiempo como «el teorema de D'Alembert»; pero Gauss demostró que todos los intentos de demostración anteriores, incluyendo los de Euler y Lagrange, eran incorrectos. La tesis doctoral de Gauss demostraba que toda ecuación polinómica $f(x) = 0$ tiene al menos una raíz, ya sean los coeficientes reales o complejos. Esta primera demostración se basa en su mayor parte en consideraciones geométricas, lo cual no resultaba del todo satisfactorio para nuestro genio. Por ello Gauss publica dos nuevas demostraciones en ***1816*** y ***1850***, intentando poder rescribir una demostración puramente algebraica. En su primera demostración, Gauss da una representación gráfica de los números complejos, la cual ya había sido publicada en ***1797*** por Wessel pasando desapercibida para el mundo matemático.Gauss considera las partes real e imaginaria pura de un número complejo $a+bi$ como las dos coordenadas rectangulares de un punto en el plano. El hecho de que se pudiera visualizar un número complejo como un punto del plano, hizo que el resto de matemáticos se sintiesen más cómodos con su uso.

Dos años después de la presentación de su tesis, Gauss publicó su libro más conocido, un tratado de teoría de números en latín, *Disquisitiones arithmeticae*. Esta obra es la responsable del desarrollo del lenguaje y de las notaciones de la parte de la teoría de números conocida como el álgebra de las congruencias. La notación que adoptó Gauss en su obra es la misma que utilizamos en la actualidad, $b=c(mod\ a)$ y procedió a construir un álgebra para la relación análoga al álgebra usual expresada en el lenguaje de la igualdad.

Las *Disquisitiones* de Gauss, sirvió para que con dieciséis años un chico noruego llamado Niels Henrik o más conocido como Abel, mostrase un gran interés por las matemáticas y tres años más tarde, en ***1824*** publicase un ensayo titulado *Sobre la Resolución Algebraica de Ecuaciones*. En su obra, Abel llega a la conclusión de la insolubilidad de la quíntica, es decir, demuestra que no puede existir ninguna fórmula general expresada en términos de operaciones algebraicas explícitas que nos de las raíces de la ecuación si el grado del polinomio es mayor que cuatro. Sin embargo, después de este descubrimiento, Abel sabía que había muchas ecuaciones especiales tales como las ecuaciones binómicas $x^n=a$, n primo, y las ecuaciones abelianas que eran solubles por radicales. La finalidad ahora era determinar qué ecuaciones eran solubles por radicales. Esta tarea iniciada por Abel, fue resulta en ***1830*** por el joven francés Galois con tan sólo ***20*** años. Galois escribió un ensayo sobre sus investigaciones *Sur les conditions de résolubilité des équations par radicaux.* Este texto le fue confiado a su mejor amigo antes de que Galois muriera trágicamente en un duelo a pistola. Y hasta ***1846*** que fue cuando Lioville publicó y editó en el *Journa l Mathématiques* (revista matemática importante de la época) algunos de estos artículos, no se dio a conocer el magnífico trabajo del joven francés.

El criterio aportado por Galois para la resolubilidad en radicales de las ecuaciones polinómicas tuvo un significado tan novedoso que se salía de los marcos del problema a tratar. La idea central de la teoría de ecuaciones algebraicas de Galois era la creación del concepto abstracto de grupo. Esta idea del estudio de la estructura de los campos algebraicos y la comparación con ellos de la estructura de los grupos de un número finito de sustituciones, fue la base de lo que se denomina «álgebra moderna».

El trabajo de Galois sobre la solubilidad de ecuaciones mediante procesos algebraicos cerró un capítulo del álgebra y, a pesar de que presentó ideas tales como las de grupo y dominio de racionalidad (cuerpo) que rendirían fruto más tarde, la completa explotación de estas ideas tuvo que esperar otros desarrollos. La siguiente gran creación algebraica, iniciada por William R. Hamilton, abrió nuevos dominios, mientras rompía con viejas convicciones acerca de cómo debían comportarse los «números».

Para apreciar la originalidad del trabajo de Hamilton, hay que examinar cómo se extendió la lógica del álgebra ordinaria en la primera mitad del siglo *XIX*. Hacia ***1800*** los matemáticos empleaban con libertad los varios tipos de números reales y complejos, pero la definición precisa de estos distintos tipos de números no tenía ninguna justificación respecto a las operaciones realizadas con ellas. Las mayores inquietudes parecían estar causadas por el hecho de que se manipulaban las letras como si tuvieran las propiedades de los enteros, sin embargo los resultados de estas operaciones eran válidos cuando números cualesquiera sustituían las letras. Como no se había realizado el desarrollo de la lógica de los diversos tipos de números no era posible ver que estos poseían las misma propiedades formales de los enteros positivos y consecuentemente, que expresiones literales que simplemente se mantenían para cualquier clase de números reales o complejos debían poseer las mismas propiedades. Parecía como si el álgebra de expresiones literales poseyera una lógica en sí misma, que respondía de su efectividad y corrección. De aquí que los matemáticos atacaran hacia ***1830*** el problema de justificar las operaciones con expresiones literales o simbólicas.

Este problema fue tratado en un principio por George Peacock ***(1791-1858)***, quien hizo una distinción entre el álgebra aritmética y simbólica. En su *Treatise on Algebra*, justificaba gracias a lo que él denominaba álgebra simbólica, las operaciones con expresiones literales que podían mantenerse para números reales y complejos, es decir quería hacer del álgebra una ciencia de símbolos sin interpretación, con sus correspondientes leyes de combinación.. De esta obra se derivó el principio de la permanencia de la forma de la adopción de los axiomas. Este enfoque allanó el camino para un pensamiento más abstracto en el álgebra e influenció notablemente en los desarrollos de Boole sobre el álgebra de la lógica.

En ***1833*** Hamilton presenta un importante artículo en la Irish Academy, en el que introduce y estudia un álgebra formal de parejas de números reales cuyas reglas de combinación eran las que se dan en la actualidad para el sistema de los números complejos. La importante regla que definía la multiplicación de parejas era $(a\ ,\ b)\cdot(\alpha\ ,\beta)=(a\alpha-b\beta\ ,\ a\beta+b\alpha)$

Hamilton interpreta este producto como una operación en la que interviene una rotación. Él se dio cuenta de que sus pares ordenados podían interpretarse como entidades dirigidas en el plano e intentó extender esta idea a tres dimensiones, pasando los números complejos binarios $a+bi$ a las ternas de números ordenados $a+bi+cj$. Pero a Hamilton estas ternas le crearon dificultades a la hora de operar con ellas. Así que en ***1843*** averiguó que si utilizaba cuádruplas, $a+bi+cj+dk$, en vez de ternas estas dificultades desaparecían. Para estas cuádruplas se debería tomar $i^2+j^2+k^2=-1$, $ij=k, ji=-k$, análogamente para el resto, perdiendo la propiedad conmutativa. Sus ideas las plasmó en su obra *Lectures on Quaternions* que más tarde ampliaría con el título *Elements of Quaternions*. Lo fundamental del descubrimiento de Hamilton no era en esencia este tipo particular de álgebra, sino más bien el descubrimiento de la gran libertad de que goza la matemática para construir álgebras que no necesitan satisfacer las restricciones impuestas por la llamadas «leyes fundamentales».

A mediados del siglo *XIX* los matemáticos alemanes sobresalían en general por encima de los de otros países. En cambio en lo referente al álgebra, Inglaterra estuvo a la cabeza con el Trinity College de Cambridge y el Cambridge Mathematical Journal como medio de expresión. En esta universidad inglesa trabaron amistad dos importantes algebristas G. Cayley y J. J.Sylvester.

Cayley fue uno de los primeros matemáticos en estudiar las matrices, como peculiar forma y estructura algebraica. Definió la suma y multiplicación de matrices y la matriz identidad.

Por su parte Sylvester consiguió eliminar una incógnita entre dos ecuaciones polinómicas; esto es conocido en la actualidad como «método dialítico de Sylvester». Este método es muy sencillo y consiste en multiplicar una o las dos ecuaciones por la incógnita que se quiere eliminar, repitiendo el proceso si es necesario hasta que el número de ecuaciones sea uno más que el número de potencias de la incógnita, entonces de este conjunto de $n+1$ ecuaciones se pueden eliminar todas las n potencias, considerando cada potencia como una incógnita distinta. Pero uno de los mayores logros lo consiguió junto a su amigo Cayley en el desarrollo de la teoría de las «formas» o «cuánticas», polinomios homogéneos en dos o más variables y sus invariantes, de donde les vino el apodo de «los gemelos invariantes».Los casos más importantes en geometría analítica y en física son las formas cuadráticas en dos y en tres variables, que al igualarlas a una constante, representan cónicas y cuádricas.

Mientras tanto, Boole, otro matemático autodidacto inglés estaba inventando otro tipo de álgebra radicalmente diferente al de sus colegas anteriores. En ***1847*** publicó un libro titulado *The Mathematical Analysis of Logic* en el que afirmaba que la lógica debía estar asociada a la matemática más bien que a la metafísica. En este libro se expresa claramente por primera vez que la característica esencial de la matemática no es tanto su contenido como su «forma»; si un tema cualquiera se presenta de manera que consiste únicamente en símbolos y reglas precisas para

operar con estos símbolos, sujeto todo ello únicamente a una exigencia de consistencia interna, entonces este tema constituye una parte de la matemática. En *1854* escribe otra obra, *Investigation of the Laws of Though;* en ella extendió y clarificó las ideas presentadas en su libro anterior, construyendo tanto la lógica formal como un nuevo tipo de álgebra que se conoce en la actualidad como «álgebra de Boole»que es a la vez el álgebra de los conjuntos y el álgebra de la lógica.

En el siglo *XIX* aparecia en el *Journal* uno de los artículos más revolucionarios de este siglo; la publicación de G.Cantor sobre las matemáticas del infinito. En *1874*, Cantor reconoce la propiedad fundamental de los conjuntos infinitos, atribuida por su compañero Dedekind; pero se dio cuenta además, de que no todos los conjuntos infinitos son del «mismo tamaño». En el caso finito, dos conjuntos se dicen que tienen el mismo cardinal si se pueden poner sus elementos en correspondencia biunívoca, así que Cantor se puso a construir de manera análoga una jerarquía de conjuntos infinitos atendiendo a la «potencia» del conjunto. Cantor demostró que el conjunto de los números reales tiene una potencia mayor que el conjunto de los números racionales; y dividió a los números reales en dos grupos, en racionales e irracionales y en algebraicos y transcendentes. Los sorprendentes resultados de Cantor le llevaron a desarrollar la teoría de conjuntos como una rama autónoma de la matemática a la que dio el nombre de *Mengenlehre* (teoría de conjuntos) o *Mannigfalttigkeitsslehre* (teoría de variedades o de multiplicidades). Durante los años que Cantor puso las bases a esta teoría, tuvo que esforzarse en convencer a sus contemporáneos de la validez de sus resultados, ya que había un cierto escepticismo a la hora de aceptar una teoría sobre el infinito. Esta teoría de conjuntos o variedades tuvo una gran influencia en la matemática de mediados del siglo *XX* a todos sus niveles.

SIGLO XX

El siglo *XX* se ha caracterizado por las dos Guerras Mundiales que asolaron el viejo continente, y por las dictaduras que emergieron en Europa.

Pero estos dos hechos no hicieron entorpecer el avance matemático que venía empujando con fuerza desde siglo anterior.

A comienzos del siglo *XX* era un hecho reconocido que la matemática era una forma de pensamiento axiomático, en la que uno deduce conclusiones válidas de sistemas de premisas arbitrarias. La cuestión de si los axiomas son o no verdaderos, en el sentido científico del término carecía de importancia; de hecho las palabras mismas con que se expresaban los axiomas son términos indefinidos.

Pero dentro del ámbito matemático hubo dos tipos de pensamiento distintos; por un lados los que identificaban a la matemática con la lógica como es el caso de Russell y por otro lado los que se inclinaban hacia una concepción intuicionista de la matemática, como Sylvester . Un matemático decididamente intuicionista, fue Henri Poincaré *(1854-1912)*, que marcó una gran transición entre los siglos *XIX* y *XX*. Poincaré no se detuvo en ningún campo el tiempo suficiente como para completar su obra.

Pero hubo un antes y un después tras la publicación en 1895 de su *Analysis Situ*, en este libro se daba por primera vez un desarrollo sistemático de una nueva rama de las matemáticas: la Topología. En esta obra Poincaré se adelantó a lo que sería una de las direcciones de investigación más desarrolladas y fructíferas del siglo *XX* . Aunque hay que destacar que la topología no ha sido invención de un solo hombre, algunos problemas topológicos se encontraban ya en las obras de Euler, Möbius y Cantor.

Actualmente la Topología se puede subdividir a grandes rasgos en dos ramas muy distintas: topología combinatoria o algebraica y la topología conjuntista.

El alto nivel de abstracción formal que se produjo tanto en el análisis como en la geometría y topología a comienzos del siglo *XX*, no podía por menos que invadir el álgebra. El resultado fue un nuevo tipo de álgebra al que se denominó «álgebra moderna» y se desarrolló a lo largo de la segunda mitad de este siglo. Las letras *x* e *y* ya no representaban necesariamente números desconocidos (reales o imaginarios), ni segmentos, ahora podían representar objetos del cualquier tipo: sustituciones, figuras geométricas, matrices, etc.

La transición del álgebra clásica al álgebra abstracta durante el intervalo de la Primera Guerra Mundial a la Segunda fue casi completa; y los artículos publicados tras estos treinta años dan coma vencedora favorita al álgebra abstracta.

Los conceptos fundamentales del álgebra moderna o abstracta, de la topología y de la teoría de espacios lineales se consolidaron entre *1920* y *1940*, pero la veintena siguiente fue testigo de una verdadera efervescencia de los métodos de la topología algebraica, que se transmitieron de forma rápida al álgebra y al análisis. El resultado fue una nueva rama conocida como álgebra homológica.

El álgebra homológica es una rama del álgebra abstracta que se ocupa de resultados válidos para tipos de espacios muy diferentes, una invasión de la topología algebraica en el dominio del álgebra pura. La gran rapidez con la que se produjo este cruce fue gracias a los artículos publicados en el *Mathematical Reviews* al libro publicado en *1956* por el francés Henri Cartan *(1904-)* y el polaco, Samuel Einlenberg*(1913- 1998)*, *Homological Algebra.*

Este proceso de abstracción y el interés creciente en el análisis de esquemas cada vez más amplios y generales, puede verse con una mayor claridad en la obra producida a lo largo de la segunda mitad del siglo *XX* por «el matemático» conocido como Nicolás Bourbaki. El nombre de Nicolás Bourbaki engloba a un grupo de matemáticos en su mayoría franceses, como Cartan, que constituían

una especie de críptica sociedad anónima. El primer volumen de los *Eléments* apareció en ***1939***, la obra aún no está completa, y su primera parte : *Les structures fondamentales de l 'analyse* , contiene libros de Teoría de Conjuntos y Álgebra entre otros. En los últimos años diversos fascículos de un nivel más avanzado se han añadido a sus *Eléments*.

Se dice que a partir del conocimiento del pasado uno puede anticipar, de una manera muy general, lo que puede deparar el futuro. Pero lo cierto es que la historia de la Matemática ha demostrado que es imposible hacer un pronóstico significativo de lo que va a venir. De hecho, una gráfica que represente el crecimiento de de la ciencia, incluida la matemática, se aproxima mucho a una curva exponencial.

SIGLO XXI

En el verano de ***1801*** Gauss estaba estudiando los movimientos de la Luna, se enteró de la desaparición de Ceres y se interesó por el asunto. Decidió utilizar un procedimiento matemático totalmente nuevo para calcular la trayectoria de la órbita del desaparecido planeta. Envió sus cálculos a uno de los mejores astrónomos de la época, quien el **7** de diciembre pudo comprobar que el trabajo de Gauss permitía redescubrir el asteroide perdido e inmediatamente publicó el método aplicado por el matemático con la siguiente nota: «Sin los agudos esfuerzos y cálculos del doctor Gauss quizá no hubiéramos vuelto a encontrar jamás a Ceres, la parte más bella del mérito le corresponde, por tanto, a él».

El redescubrimiento de Ceres supuso para Gauss su consagración como científico y matemático. La Unión Matemática Internacional creó en ***2002*** un nuevo galardón, el Premio Gauss para honrar a las personas cuyas matemáticas son particularmente útiles en la práctica. Este impresionante ejemplo de aplicación de las matemáticas inspiró el diseño de la medalla del Premio. En el anverso se puede ver la efigie de Gauss y en el reverso un círculo y un cuadrado conectados por una curva, lo que representa el método de los mínimos cuadrados con el que Gauss descubrió la órbita de Ceres. La primera y única vez que se ha entregado el premio Gauss fue en el ICM de ***2006*** en Madrid. El premiado fue Kiyosi Itô por sus trabajos sobre la formulación y resolución de ecuaciones diferenciales estocásticas. La integral de Itô modela carteras de inversión en los mercados financieros, permitiendo la asignación de precios a opciones de compra o venta en el futuro, con independencia de las fluctuaciones de los mercados. La moderna teoría de finanzas y el análisis de riesgos se sustentan hoy en los trabajos de Itô, como los cálculos de Gauss lo hiciesen en los de Newton. La teoría de Itô es matemática del siglo ***XXI*** .

Álgebra

El ÁLGEBRA ***es la rama de la matemática que tiene por objeto de estudio la generalización del cálculo aritmético mediante expresiones compuestas de constantes (números) y variables (letras).***

Al igual que en la aritmética, las operaciones fundamentales del álgebra son adición, sustracción, multiplicación, división y cálculo de raíces. La aritmética, sin embargo, no es capaz de generalizar las relaciones matemáticas, como el teorema de Pitágoras, que dice que en un triángulo rectángulo el área del cuadrado que tiene como lado la hipotenusa es igual a la suma de las áreas de los cuadrados cuyos lados son los catetos.

La aritmética sólo da casos particulares de esta relación (por ejemplo, 3 ; 4 y 5, ya que $3^2 + 4^2 = 5^2$).

El álgebra, por el contrario, puede dar una generalización que cumple las condiciones del teorema: $a^2 + b^2 = c^2$.

El álgebra clásica, que se ocupa de resolver ecuaciones, utiliza símbolos en vez de números específicos y operaciones aritméticas para determinar cómo usar dichos símbolos. El álgebra moderna ha evolucionado desde el álgebra clásica al poner más atención en las estructuras matemáticas. Los matemáticos consideran al álgebra moderna como un conjunto de objetos con reglas que los conectan o relacionan. Así, en su forma más general, se dice que *el álgebra es el idioma de las matemáticas.*

Etimológicamente, proviene del árabe (también nombrado por los árabes *AmucabaJa)* (yebr) *(al-dejaber)*, con el significado de reducción, operación de cirugía por la cual se reducen los huesos luxados o fraccionados (algebrista era el médico reparador de huesos).

El álgebra tuvo sus primeros avances en las civilizaciones de Babilonia y Egipto, entre el cuarto y tercer milenio antes de Cristo. Estas civilizaciones usaban primordialmente el álgebra para resolver ecuaciones de primer y segundo grado.

El álgebra continuó su constante progreso en la antigua Grecia. Los griegos usaban el álgebra para expresar ecuaciones y teoremas , un ejemplo es el teorema de Pitágoras. Los matemáticos más destacados en este tiempo fueron Arquímedes, Herón y Diofante. Arquímedes se basó en la matemática para componer su tratados de física y geometría del espacio. Herón fue otro que se basó en ellas para hacer algunos de sus inventos, como la primera máquina de vapor. Diofante fue el griego que más contribuyó a esta área del conocimiento; como principales trabajos tenemos al análisis diofántico y la obra *Las Aritméticas*, que recopila todo el conocimiento del álgebra existente hasta ese entonces.

Como consecuencia, el álgebra cambió de rumbo y amplió su dominio a todas las teorías que se habían inventado alrededor del tema inicial, incorporando las teorías de los grupos matemáticos y sus extensiones, y parte de la geometría, la rama relacionada con los polinomios de segundo grado de dos variables, es decir las cónicas elipse, parábola, hipérbola, círculo, ahora incluidas en el álgebra bilineal.

El álgebra se fundió con éxito con otras ramas de la matemática como la lógica (álgebra de Boole), el análisis matemático y la topología

IGUALDAD

Observa los siguientes gráficos:

1)



Determinar Aquí, si la balanza está en equilibrio.

2)



Aquí la suma de las edades de las personas de cada fotografía es igual.

¿Qué de común pueden tener estos gráficos?

Pues, que en ambos casos existen datos (pesas o personas) cuyo valor es desconocido.

A este valor desconocido se le denomina *INCÓGNITA*.

Pensando un poquito, podrás determinar los valores para cada caso; sin embargo,una manera sencilla de hacerlo, es interpretado ambas situaciones como ecuaciones, así:

* Para el primer caso tenemos:

platillo izquierdo — *platillo derecho*

observa que la incógnita es denotada con la letra "x"

$$\underbrace{5+2+2+2x}_{\text{platillo izquierdo}} = \underbrace{3x+3}_{\text{platillo derecho}}$$

equilibrio de la balanza

Luego:

$$5+4+2x=3x+3 \Rightarrow 9+2x=3x+3$$

$$\Rightarrow 6=3x-2x \Rightarrow \boxed{x=6}$$

* Para el segundo caso:

$$\overbrace{4x+30}^{\text{fotografía izquierda}} = \overbrace{2x+42}^{\text{fotografía derecha}}$$

Luego: $4x-2x=42-30 \Rightarrow 2x=12$

$$\Rightarrow \boxed{x=6}$$

DEFINICIÓN DE IGUALDAD :

Es la relación o comparación que nos indica que dos cantidades numéricas o literales tiene el mismo valor.

CLASES DE IGUALDAD :

Se distinguen dos clases de igualdades:

A)IDENTIDAD (IGUALADAD ABSOLUTA):

Es aquella que se verifica siempre.

EJEMPLO:

- $18+x=18+x$
- $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

A)ECUACIÓN(IGUALADAD CONDICIONAL):

Es aquella igualdad que sólo se verifica para valores particulares(numéricos) atribuidos a sus letras.

EJEMPLOS:

1er miembro 2do miembro

$$5x-2=8$$

Incógnita $x=2$

$$6y+9=3$$

Incógnita $y=-1$

EJEMPLO :

La ecuación : $x-9=5$

Se verifica sólo para : $x=14$

¿Cómo Resolver Una Ecuación?

Para resolver una ecuación de primer grado con coeficientes enteros, se recomienda:

1) Reducir términos semejantes (si los hubiera en cada uno de los miembros de la ecuación)

2) Realizar la transposición de términos es decir al pasar los términos de su miembro a otro de la ecuación, estos pasan efectuando la operación inversa.

→ Lo que está «sumando» pasa «restando»
(+) (–)

$$x \oplus 6 = 9 \Rightarrow x = 9-6 = 3$$

(–)

⇒ Lo que está «restando» pasa «sumando»

$$x \ominus 8 = 6 \Rightarrow x = 6+8 = 14$$

(+)

⇒ Lo que está «multiplicando» pasa «dividiendo»

$$3 \times x = 24 \Rightarrow x = \frac{24}{3} = 8$$

(÷)

⇒ Lo que está «dividiendo» pasa «multiplicando»

$$\frac{x}{6}=9 \Rightarrow x=9\times 6=54$$

(x)

3) Reducir nuevamente términos en cada miembro y finalmente "despejar" la incógnita.

SOLUCIÓN DE UNA ECUACIÓN

Se llama así al valor de la incógnita que reemplazando en la ecuación verifica la igualdad. Si la ecuación tiene una sola incógnita a la solución también se le denomina raíz .

EJEMPLO :

* $x^2=9 \Rightarrow$ soluciones o raíces :

$x=3$ ó $x=-3$

CLASIFICACIÓN DE LAS ECUACIONES

I) SEGÚN SUS SOLUCIONES PUEDEN SER :

1) ECUACIONES COMPATIBLES :

Son aquellas que aceptan por lo menos una sola solución .

A su vez se dividen en :

A) ECUACIONES DETERMINADAS :

Son aquellas que tienen un número limitado de soluciones :

EJEMPLO :

* $x^2-1=24 \Rightarrow$ tiene dos soluciones

$x=5$ ó $x=-5$

B) ECUACIONES INDETERMINADAS :

Son aquellas que tienen un número ilimitado de soluciones .

EJEMPLO :

Resolver :

$$3(x+1)-1=3x+2$$

RESOLUCIÓN:

$3x+3-1=3x+2$

$\Rightarrow 2=2$

Significa que la siguiente igualdad lo verifica $x \in \mathbb{R}$

⇒ La ecuación tiene infinitas soluciones .

2) ECUACIONES INCOMPATIBLES :

Son aquellas que no tienen solución, también se les denomina absurdas o imposibles .

EJEMPLO :

$$x+4=x+7 \Rightarrow 4=7 \text{ (absurdo)}$$

No existe valor de «x» que verifique la igualdad .

II) SEGÚN EL GRADO PUEDE SER :

Grado	Forma	Nº de Raíces
1°	$ax+b=0$	1
2°	$ax^2+bx+c=0$	2
3°	$ax^3+bx^2+cx+d=0$	3
4°	$ax^4+bx^2+cx^2+dx+e=0$	4

OBSERVACIONES :

1) Si se dividen ambos miembros de una ecuación por una misma expresión que contenga a la incógnita , entonces se perderá soluciones . Esto se puede evitar si la expresión que se divide (simplifica) se iguala a cero .

EJEMPLO :

Resolver : $(x+3)(x-2)=4(x-2)$

RESOLUCIÓN :

Simplificando : $(x-2) \Rightarrow x-2=0 \Rightarrow x=2$

(para no perder soluciones)

* Tendremos :

La ecuación tiene 2 soluciones $x=2$ y $x=1$ (de no haber igualado a cero, hubiéramos perdido la solución $x=2$)

2) Si se multiplica ambos miembros de una ecuación por una misma expresión que contenga a la incógnita , entonces se puede producir soluciones extrañas. Esto se puede evitar si previamente se simplifica por separado cada miembro de la ecuación .

EJEMPLO :

* Resolver : $\dfrac{(x+3)(x-2)}{x-2}=4$

* Primero simplificamos $(x-2)$ y tendremos $x+3=4 \Rightarrow x=1.$

OBSERVACIÓN:

Si hubiésemos trasladado $(x-2)$ a multiplicar , tendríamos que una solución sería $x=2$, que es una solución extraña, pues no verifica la igualdad .

3) Si se elevan ambos miembros de una ecuación a un mismo exponente , entonces se puede introducir

soluciones extrañas .

EJEMPLO :

Resolver : $\sqrt{x^2+7}=x-7$

RESOLUCIÓN:

* Elevando al cuadrado :

$$(\sqrt{x^2+7})^2=(x-7)^2$$
$$\Rightarrow x^2+7=x^2-14x+49$$
$$\Rightarrow 14x=42 \Rightarrow x=3$$

Pero si reemplazamos $x=3$ en la ecuación dada tendremos .

$$\sqrt{3^2+7}=3-7 \rightarrow \sqrt{16}=-4$$
$$4=-4 \quad \textit{(no cumple)}$$

* Luego : $x=3$ es una solución extraña , y la ecuación es incompatible , pues no tiene solución

OBSERVACIÓN :

Siempre que se potencie los 2 miembros de una ecuación , el valor o valores obtenidos para "x" deben comprobarse en la ecuación dada ; pues pueden no ser soluciones verdaderas .

ECUACIONES DE PRIMER GRADO O LINEALES

(CON UNA SOLA INCÓGNITA)

* La ecuación lineal con una incógnita .

$$ax+b=0 \quad ; \quad a\neq 0$$

* Tiene solución única: $x=-\frac{b}{a}$

* Por tanto , para resolver una ecuación de primer grado con una incógnita se transponen todos los términos que contienen a la incógnita a un miembro de la ecuación y se realizan las operaciones para el despeje de la incógnita .

EJEMPLO :

Resolver la ecuación :

$$ax+b^2=a^2+bx \quad ; \quad a\neq b$$

RESOLUCIÓN :

* Por supuesto , aquí se sobre entiende que la incógnita es x y que por tanto , todas las letras representan constantes conocidas . Entonces procedemos como sigue :

* Por transposición : $ax-bx=a^2-b^2$

* Factorizando : $(a-b)x=a^2-b^2$

* Dividiendo entre $(a-b)$ si $a\neq b$;

$$x=a+b$$

* Comprobaremos nuestra solución por sustitución directa de la raíz $(a+b)$ en la ecuación original , así tendremos . $a(a+b)+b^2=a^2+b(a+b)$

* Osea la identidad :

$$a^2+ab+b^2=a^2+ab+b^2$$

DISCUSIÓN DE LA RAÍZ :

$x=-\frac{b}{a}$; de : $ax+b=0$

1) Si : $a=0$; $b=0 \Rightarrow$ La ecuación es indeterminada

2) Si : $a=0$; $b\neq 0 \Rightarrow$ La ecuación es incompatible

3) Si : $a\neq 0$; $b\neq 0 \Rightarrow$ La ecuación es determinada

EJEMPLOS:

(01) Resolver: $3(x-7)+5=2x+4$

RESOLUCIÓN:

* Primero desaparecemos los paréntesis, multiplicando 3 por $(x-7)$:

$$3(x-7)+5=2x+4$$
$$\rightarrow 3x-21+5=2x+4$$

* Transponiendo términos:

$$3x-2x=4-5+21 \Rightarrow x=20$$

(02) Resolver: $3x-8=12$

RESOLUCIÓN

$$3x=12+8 \Rightarrow 3x=20 \Rightarrow x=\frac{20}{3}$$

(03) Resolver: $3(x+2)=5x-12$

RESOLUCIÓN

$$3(x+2)=5x-12$$
$$\Leftrightarrow 3x+6=5x-12 \Rightarrow 3x-5x=-12-6$$
$$\Rightarrow -2x=-18 \Rightarrow x=\frac{-18}{-2} \Rightarrow x=9$$

(04) Resolver: $\frac{x}{2}+\frac{x}{3}=\frac{5}{6}$

RESOLUCIÓN:

*Multiplicando todo por M.C.M.:$(2;3)=6$

$$\Rightarrow \frac{6x}{2}+\frac{6x}{3}=5 \Rightarrow 3x+2x=5 \Rightarrow 5x=5 \Rightarrow x=1$$

EJEMPLO 5 :

Resolver: $(x+3)^2+7=(x+6)(x+4)$

A) 1 *B) 2* *C) -2* *D) 0* *E) 4*

RESOLUCIÓN:

* Primero desaparecemos los paréntesis, aplicando productos notables: $\underbrace{(x+3)^2}+7=\underbrace{(x+6)(x+4)}$

* Se tiene: $x^2+6x+9+7=x^2+10x+24$

* Trasponiendo y agrupando términos:

$$9+7-28=\cancel{x^2}+10x-\cancel{x^2}-6x$$

* Reduciendo: $-8=4x$

* Luego: $-2=x$

RPTA : "C"

Observación

Nota que se procura tener a la incógnita con el coeficiente positivo.

NOTA

En un viejo pergamino del "País de las Maravillas" apareció este dibujo con la siguiente inscripción : "Te damos muchas pistas, para que sumando los valores que tienen los animalitos, tanto en las filas como en columnas , te den los números indicados.

Mira con atención y utiliza tu ingenio , ya que es más fácil de lo que parece"

				=13
				=?
				=18
= 10	= ?	= 15	= 10	

Como verás , éste es un ejemplo de un sistema de ecuaciones cuyas variables son los dibujos de cada animalito ¿descubriste su valor?

Algebraicamente , este problema puede ser escrito así :

$$\begin{cases} x+y+z+w=13 \\ 2y+2z=18 \\ 2x+y=10 \\ 3z=15 \\ y+z+w=10 \end{cases}$$

* Observa que para este sistema se han utilizado **4** variables: x , y , z , w , sin embargo en nuestro caso, veremos sistemas con **2** ó **3** variables.

SISTEMA LINEAL DE ECUACIONES DE DOS VARIABLES

* Son ecuaciones del tipo :

$$\begin{cases} ax+by=c \\ dx+ey=f \end{cases}$$

Donde: "x" e "y" son las incógnitas; a , b , c , d , e y f son constantes .

*¿Que significa "resolver un sistema de ecuaciones"?

Significa hallar los valores de las incógnitas (generalmente x e y) , de tal manera que al reemplazarlas en las ecuaciones se verifica la igualdad

MÉTODOS PARA RESOLVER SISTEMAS

Existen muchos métodos para resolver SISTEMAS DE ECUACIONES , algunos más sencillos que otros El día de hoy estudiaremos tres de ellos :

I)MÉTODO DE REDUCCIÓN POR SUMA Y RESTA :

Utilizamos el mismo sistema para seguir verificando que con cualquiera de los métodos se obtienen las mismas raíces .

$$\begin{cases} 3x-2y=7 \;.....(I) \\ 5x+\;\;y=3 \;.....(II) \end{cases}$$

* Mediante la suma o la resta de las dos ecuaciones se elimina una de las incógnitas ; luego con un pasaje de términos se halla la incógnita que quedó . Se observa que para eliminar una de las incógnitas , ellas tiene que tener el mismo coeficiente (así se anulan al sumar o restar) . Si no tienen el mismo coeficiente , se multiplica una de ellas o las dos ecuaciones por un factor o distintos factores , de modo tal que queden los términos de las incógnitas iguales .

* De acuerdo a los signos que tengan se suman o se restan las ecuaciones para anular la incógnita .

* En nuestro sistema para eliminar la incógnita x , a la ecuación I se la multiplica por el factor **5** y a la ecuación II por el factor **3** , quedando así :

$$\begin{matrix} \times 5 \\ \times 3 \end{matrix}\left|\begin{matrix} 3x-2y=7 \\ 5x+y=3 \end{matrix}\right. \quad \begin{matrix} \to 15x-10y=35 \\ \to \underline{15x+3y\;=9} \\ 0-13y=26 \end{matrix} \;\ominus$$

*Como los coeficientes de las "x" son iguales y del mismo signo ; para que se eliminen se restan las 2

ecuaciones miembro a miembro . Se despeja "y"

$$-y=\frac{26}{13}\Rightarrow -y=2$$

* Se multiplica por *(–1)*

$$\boxed{y=-2}$$

Es una de las raíces.

* Para eliminar la incógnita *y* , solamente es necesario multiplicar a la ecuación *II* por el factor 2 , para que los coeficientes de la incógnita queden iguales .

$$\times 2\begin{cases}3x-2y=7\\5x+y=3\end{cases}\quad\begin{aligned}&\rightarrow\ 3x-2y=7\\&\rightarrow\ 10x+2y=6\ \oplus\\ \hline &\ 13x+0=13\end{aligned}$$

$$\rightarrow x=\frac{13}{13}=1$$

$\boxed{x=1}\rightarrow$ la otra raíz.

* En este método , el objetivo es eliminar una de las incógnitas sumando ambas ecuaciones .

EJEMPLO 2 :

Resolver el sistema :

$$\begin{cases}x+2y=12\ ....ecuación\ (I)\\4x-y=13\ ....ecuación\ (II)\end{cases}$$

RESOLUCIÓN :

* Si sumamos ambas ecuaciones no se elimina ninguna incógnita , así que multipliquemos por 2 la ecuación *(II)*

$$\begin{cases}x+2y=12\\2(4x-y)=2(3)\end{cases}\Rightarrow$$ *Este artificio es muy usado en la resolución de sistemas*

* *Tenemos :*

$$x+\not{2y}=12$$
$$8x-\not{2y}=6\ \oplus$$

* *Sumando :* $9x\quad=18$

$\Rightarrow x=2\ \rightarrow$ *Este valor será sustituido en cualquier ecuación*

* Así obtenemos : $y=5$

II)MÉTODO DE IGUALACIÓN :

* Utilizamos el mismo sistema que en el método anterior .

$$\begin{cases}3x-2y=7\\5x+\ y=3\end{cases}$$

* Para verificar que al emplear otro sistema, se obtienen las mismas raíces.

* Se trabaja paralelamente con las dos ecuaciones , se despeja en ambas la misma incógnita por ejemplo *x* , y quedan dos igualdades con un mismo miembro igual ; entonces el otro también lo es .

* Se igualan los *2dos* . Miembros y se despeja el valor de *y*. Con un proceso análogo se halla el valor de *x* .

$$\begin{cases}3x-2y=7.....(I)\\5x+\ y=3.....(II)\end{cases}$$

* Para obtener el valor de *x* :

a) Se despeja la *y* en la ecuación *(I)* :

$$3x-2y=7$$

$$\rightarrow -2y=7-3x\ \Rightarrow -y=\frac{7-3x}{2}\ \Rightarrow y=\frac{-7+3x}{2}$$

b) Se reemplaza el valor de la *y* en la ecuación *(II)* :

$$5x+y=3\Rightarrow 5x+\left(\frac{-7+3x}{2}\right)=3$$

c) Se realizan las operaciones indicadas y luego se hace el pasaje de términos, despejando la *x*.

$$\frac{10x-7+3x}{2}=3$$

* Se agrupan los coeficientes de *x*.

$$\frac{10x-7}{2}=3$$

pasa el divisor 2.

$$13x-7=3\times 2$$

* El 7 se pasa sumando

$$13x=6+7$$

$$\rightarrow x=\frac{13}{13}\ \rightarrow\ \boxed{x=1}$$

* El valor de *x* es la otra raíz.

* Entonces :

Dado el sistema $\begin{cases}3x-2y=7\\5x+\ y=3\end{cases}$

*Las raíces que satisfacen a dicho sistema son:

(1; –2) o sea : $\boxed{x=1}\wedge\boxed{y=-2}$

* Recuerda que se despeja una misma variable en ambas ecuaciones, luego se igualan ambos resultados.

EJEMPLO 2 :

Resolver el sistema :

$$\begin{cases}x+2y=12\ ....ecuación(I)\\4x-\ y=3\ \ ....ecuación(II)\end{cases}$$

RESOLUCIÓN :

* Despejando "y" en *(I)* :

$$x+2y=12\Rightarrow 2y=12-x\Rightarrow y=\frac{12-x}{2}$$

* Despejando "y" en *(II)*:

$4x - y = 3$

$\Rightarrow 4x = 3 + y \Rightarrow 4x - 3 = y$

* Luego igualando ambos resultados :

$$\frac{12-x}{2} = 4x - 3 \Rightarrow 12 - x = 2(4x-3)$$

$$\Rightarrow 12 - x = 8x - 6 \Rightarrow 12 + 6 = 8x + x$$

$$\Rightarrow 18 = 9x \Rightarrow x = 2$$

*Reemplazando el valor de "x" en *(I)* o en *(II)* tenemos :

$$2 + 2y = 2 \Rightarrow 2y = 12 - 2 \Rightarrow y = \frac{10}{2} = 5 \Rightarrow y = 5$$

III) MÉTODO DE SUSTITUCIÓN :

Es similar al método anterior, con la diferencia de que únicamente se despeja una variable en una ecuación ,y este resultado es reemplazado en la otra ecuación

EJEMPLO :

Resolver el sistema :

$$\begin{cases} x + 2y = 12 \text{..........ecuación(I)} \\ 4x - y = 3 \text{ ....ecuación(II)} \end{cases}$$

RESOLUCIÓN :

* De *(I)* despejamos a la incógnita en «x»: $x = 12 - 2y$

* Este resultado lo reemplazamos en *(II)*:

$$4(12-2y) - y = 3 \Rightarrow 48 - 8y - y = 3$$

$$\Rightarrow 48 - 3 = 8y + y \Rightarrow 45 = 9y$$

$$\Rightarrow 5 = y$$

* Este valor se reemplaza en *(I)* o en *(II)* y obtenemos el valor de "x":

$$x + 2(5) = 12 \Rightarrow x = 12 - 10 \Rightarrow x = 2$$

CLASIFICACIÓN DE LOS SISTEMAS DE ECUACIONES

(DE ACUERDO A SU SOLUCIÓN)

A) SISTEMAS COMPATIBLES :

Aquellos que tienen solución , se subdividen en : $\frac{y+4}{2} = -3 - 2y$

A_1) DETERMINADO :

Número de soluciones limitado .

A_2) INDETERMINADOS :

Número de soluciones ilimitado .

B) SISTEMAS INCOMPATIBLES , IMPOSIBLES O ABSURDOS

Aquellos que no tienen solución .

ANÁLISIS DEL SISTEMA PARTICULAR :

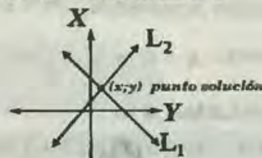
$$a_1x + b_1y = c_1$$

$$ax + by = c$$

El sistema será :

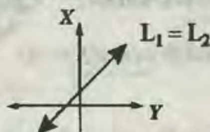
A) COMPATIBLE DETERMINADO :

$$\frac{a_1}{a} \neq \frac{b_1}{b}$$



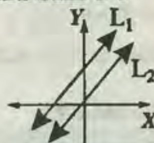
B)COMPATIBLE INDETERMINADO :

$$\frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b} = \frac{c_1}{c}$$



C) INCOMPATIBLE O ABSURDO :

$$\frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b} \neq \frac{c_1}{c}$$



PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1 :

Resolver: $3x - 8 = 2x + 12$

A) 10 B) 12 C) 20 D) 40 E) 0

RESOLUCIÓN:

$$3x - 8 = 2x + 12$$

+

I) Transponiendo términos :

$$3x - 2x = 12 + 8$$

II) Reducción de T.S.: $x = 20$

Conjunto solución = **C.S.** = {20}

RPTA : "C"

PROBLEMA 2 :

Resolver:

$$5(a-2) + 3a = 2(3a+4)$$

A) 7 B) 6 C) 9 D) 8 E) 12

RESOLUCIÓN:

* Suprimir signos de colección:

$$\rightarrow 5(a-2) + 3a = 2(3a+4)$$

* Reduzco términos semejantes:

$\Rightarrow 5\underline{a} - 10 + 3\underline{a} = 6a + 8$

* Transponer términos:

$\Rightarrow 8a - 10 = 6a + 8 \Rightarrow 8a - 6a = 8 + 10$

* Despejar la incógnita : $2a = 18 \Rightarrow a = \frac{18}{2}$

* Solución : $a = 9 \Rightarrow C.S. = \{9\}$

RPTA : "C"

PROBLEMA 3 :

Resolver: $x(x+2) = (x-2)(x-4)$

A) 1 B) 2 C) 3 D) -2 E) 0

RESOLUCIÓN:

$x(x+2) = \underline{(x-2)(x-4)}$ ← producto notable

$\Rightarrow x^2 + 2x = x^2 - 6x + 8 \Rightarrow x^2 - x^2 + 6x + 2x = 8$

$\Rightarrow 8x = 8 \Rightarrow x = \frac{8}{8}$

* Solución: $x = 1 \Rightarrow C.S. = \{1\}$

RPTA : "A"

PROBLEMA 4 :

Resolver: $\frac{x}{3} + \frac{2x}{5} = 2 + \frac{10x}{15}$

A) 20 B) 15 C) 40 D) 12 E) 30

RESOLUCIÓN:

* Se busca un denominador común, es decir se busca el m.c.m. de los denominadores.

En la ecuación: $\frac{x}{③} + \frac{2x}{⑤} = 2 + \frac{10x}{⑮}$

$\Rightarrow$ Extraemos el M.C.M.: $(3, 5, 15) = 15$

* El M.C.M. obtenido será el común denominador el cual se divide entre cada uno de los denominadores y cuyo resultado se multiplica por el numerador respectivo.

En la ecuación: $15 \div 3 = 5$ $15 \div 5 = 3$

Común denominador ← $\frac{⑤x}{15} + \frac{3 \times 2x}{15} = \frac{15 \times 2}{15} + \frac{1 \times 10x}{15}$

$\Rightarrow \frac{5x}{15} + \frac{6x}{15} = \frac{30}{15} + \frac{10x}{15}$

* Se anulan los denominadores multiplicando mentalmente toda la ecuación por el denominador común.

* En la ecuación; resultará:

$\cancel{15}\frac{5x}{\cancel{15}} + \cancel{15}\frac{6x}{\cancel{15}} = \cancel{15}\frac{30}{\cancel{15}} + \cancel{15}\frac{10x}{\cancel{15}}$

$\Rightarrow 5x + 6x = 30 + 10x$

* La ecuación queda simplificada , y se sigue resolviendo como una ecuación de coeficiente enteros.

* En la ecuación:

$5x + 6x = 30 + 10x$

* Se reducen términos :

$\Rightarrow 11x = 30 + 10x$

* Se transpone términos :

$\Rightarrow 11x - 10x = 30 \Rightarrow 1x = 30 \Rightarrow x = \frac{30}{1}$

* Se despeja la incógnita: $x = 30$

Solución de la ecuación

RPTA : "E"

Nota

* Cuando un número negativo que está multiplicando a la incógnita pasa a dividir no cambia de signo.

EJEMPLO:

$-8x = 16 \Rightarrow x = \frac{16}{-8} \Rightarrow x = -2$

PROBLEMA 5 :

Resolver: $\frac{5x-1}{5} = \frac{x-2}{3} - \frac{2x-3}{4}$

A) 1 B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{17}{40}$ D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{4}{7}$

RESOLUCIÓN:

$12(5x-1) = 20(x-2) - 15(2x-3)$

$; M.C.M._{(5,3,4)} = 60$

$\Rightarrow 30x - 12 = 20x - 40 - 30x + 45$

$\Rightarrow 30x - 12 = -10x + 5$

$\Rightarrow 30x + 10x = 5 + 12 \Rightarrow 40x = 17$

* Solución: $x = \frac{17}{40}$

RPTA : "C"

PROBLEMA 6 :

Resolver : $\frac{x}{2} + \frac{x+1}{7} = x - 2$

A) 1 B) 2 C) 6 D) 4 E) 1/2

RESOLUCIÓN:

$\frac{x}{2} + \frac{x+1}{7} = \frac{x}{1} - \frac{2}{1}$

$M.C.M_{(2;7)} = 14$

$\Rightarrow 7x + 2(x+1) = 14x - 28$

$\Rightarrow 7x + 2x + 2 = 14x - 28$

$\Rightarrow 9x + 2 = 14x - 28$

$\Rightarrow 9x - 14x = -28 - 2 \Rightarrow -5x = -30$

$\Rightarrow x=\frac{-30}{-5}$

* Solución: $x = 6$

RPTA : "C"

PROBLEMA 7 :

Resolver en x la siguiente ecuación de coeficiente literales. $a(x+a)-x=a(a+1)+1$

A) a B) $-\frac{a-1}{a+1}$ C) $\frac{a+1}{a-1}$ D) 1 E) $\frac{1}{a}$

RESOLUCIÓN :

* Efectuamos los productos indicados para suprimir los signos colección:

$ax+a^2-x=a^2+a+1$

* Eliminamos los términos repetidos en ambos miembros:

$ax+\not{a^2}-x=\not{a^2}+a+1 \Rightarrow ax-x=a+1$

* Se suman los términos semejantes (factorizando):

$x(a-1)=a+1$

* Despejar la variable :

$x(a-1)=a+1$

pasa dividiendo

$x=\frac{a+1}{a-1}$ Donde: $a\neq 1$

* El conjunto de solución: $C.S.=\left\{\frac{a+1}{a-1}\right\}$

RPTA : "C"

PROBLEMA 8 :

Hallar el conjunto solución en:

$$\frac{2x+a}{b}+\frac{x-b}{a}=\frac{3ax+(a-b)^2}{ab}$$

A) $\{2a\}$ B) $\{2b\}$ C) $\{a\}$ D) $\{b\}$ E) $\{1\}$

RESOLUCIÓN :

* Multiplicando ambos miembros por (ab) y efectuando operaciones:

$a(2x+a)+b(a-b)=3ax+(a-b)^2$

$\Rightarrow 2ax+a^2+bx-b^2=3ax+a^2-2ab+b^2$

$\Rightarrow -ax+bx=2b^2-2ab$

* Sacando factor común y despejando la variable:

$x(b-a)=2b(b-a)\Rightarrow x=\frac{2b(b-a)}{b-a}$

$\Rightarrow \quad x=2b\Rightarrow C.S.=\{2b\}$

RPTA : "B"

PROBLEMA 9 :

Resolver la siguiente ecuación de coeficientes fraccionarios. $\frac{5x-2}{3}=\frac{x-1}{2}+\frac{7x-1}{6}$

A) 1 B) 2 C) 4 D) $\{5\}$ E) $x\in\mathbb{R}$

RESOLUCIÓN:

* Calculamos el M.C.M. de los denominadores.

3	2	6	2
3	1	3	3
1	1	1	

$\Rightarrow$ $M.C.M=2\times 3=6$

* Se multiplica a toda la igualdad por dicho M.C.M :

$$(6)\frac{5x-2}{3}=(6)\frac{x-1}{2}+(6)\frac{7x-1}{6}$$

* Se simplifican con su respectivo denominador y se multiplica por su numerador:

$2(5x-2)=3(x-1)+7x-1\Rightarrow 10x-4=3x-3+7x-1$

* Transponer términos; agrupando en un miembro todas las incógnitas y en el otro todas las cantidades conocidas: $10x-3x-7x=-3-1+4$

*Reducir términos semejantes: $0x=0$

El conjunto solución : C.S. = {Todos los reales}

RPTA : "E"

PROBLEMA 10:

Resolver : $\left(x-\frac{5}{2}\right)\left(x+\frac{3}{2}\right)-(x-5)(x+3)=9\frac{3}{4}$

A) 1 B) 3 C) $-\frac{1}{2}$ D) $-\frac{3}{2}$ E) -2

RESOLUCIÓN :

*Abramos los paréntesis :

$$\underbrace{x^2+\left(-\frac{5}{2}+\frac{3}{2}\right)x+\left(-\frac{5}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)}_{*}-\underbrace{[x^2+(-5+3)x+(-5)(+3)]}_{**}=\frac{39}{4}$$

$\Rightarrow x^2-x-\frac{15}{4}-x^2+2x+15=\frac{39}{4}$

* Transponiendo y reduciendo términos semejantes, tendríamos: $x=\frac{39}{4}+\frac{15}{4}-15 \Rightarrow x=-\frac{6}{4}=-\frac{3}{2}$

RPTA : "D"

PROBLEMA 11 :

Resolver : $\frac{7}{24}-\frac{\frac{13}{15}}{\frac{2x}{3}+\frac{4}{5}}=\frac{1}{4}$

A) 20 B) 10 C) 15 D) -10 E) 50

RESOLUCIÓN :

* Simplificando la fracción :

$$\frac{\frac{13}{15}}{\frac{10x+12}{15}}\Rightarrow \frac{13}{10x+12}$$

* Reemplazando esta fracción en la ecuación:

$$\underbrace{\frac{7}{24}-\frac{1}{4}}_{**}=\frac{13}{10x+12}\Rightarrow \underbrace{\frac{1}{24}}_{**}=\frac{13}{10x+12}$$

* Luego : $10x + 12 = 24\times 13$

* Despejamos x : $x = \dfrac{312-12}{10} \Rightarrow x = 30$

RPTA : "E"

PROBLEMA 11:

Resolver :

$$2\left(\frac{x+2}{x-2}\right) - 3\left(\frac{x-2}{2x+3}\right) = \frac{x^2+78}{2x^2-x-6}$$

A) 1　*B) 2*　*C) 3*　*D) 0*　*E) 6*

RESOLUCIÓN :

* Los denominadores son:

• $(x-2)$　　• $(2x+3)$

• $2x^2 - x - 6 = (2x+3)(x-2)$

$2x \quad +3$

$x \quad -2$

* Luego el *MCM* será: $(2x+3)(x-2)$

* Multipliquemos ambos miembros de la ecuación por el *MCM* :

$$2\left(\frac{x+2}{x-2}\right)(2x+3)(x-2) - 3\left(\frac{x-2}{2x+3}\right)(2x+3)(x-2) = \frac{(x^2+78)}{(2x+3)(x-2)}(2x+3)(x-2)$$

* Simplificando:

$$2(x+2)(2x+3) - 3(x-2)^2 = x^2 + 78$$

* *¡Cuidado!*

Antes de continuar, tenemos que establecer la condición: El *MCM* por el que hemos multiplicado la Ecuación debe ser distinto de cero, es decir:

$$(2x+3)(x-2) \neq 0$$

* Para que esto ocurra, cada factor debe ser distinto de cero: $2x + 3 \neq 0 \Rightarrow x \neq -3/2$

$x - 2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 2$

*Ahora si, ... continuemos con *(1)*: (desarrollando las multiplicaciones)

$$4x^2 + 14x + 12 - 3x^2 + 12x - 12 = x^2 + 78$$

*Reduciendo términos semejantes y despejando x :

$$26x = 78 \Rightarrow x = 3$$

*Aceptamos $x=3$ como solución correcta porque es distinto de $-3/2$ y de 2 como establece la condición anterior.

RPTA : "C"

PROBLEMA 12 :

Despejar x en: $a\left(b - \dfrac{x}{c}\right) = d\left(c - \dfrac{x}{b}\right)$

A) bc　*B) ac*　*C) abc*　*D) a - b*　*E) 0*

RESOLUCIÓN :

* Efectuamos las restas dentro de los paréntesis:

$$a\left(\frac{bc-x}{c}\right) = d\left(\frac{bc-x}{b}\right)$$

*Multiplicando ambos miembros por **"bc"** y llevando todo al *1°* miembro:

$$ab(bc-x) - cd(bc-x) = 0$$

* Factor común polinomio:

$$(bc-x)\ (ab-cd) = 0$$

$$\Rightarrow bc - x = \frac{0}{ab-cd} \Rightarrow bc - x = 0 \Rightarrow x = bc$$

RPTA : "A"

PROBLEMA 13 :

Resolver la ecuación literal :

$$\frac{x+a}{a-b} + \frac{x-a}{a+b} = \frac{x+b}{a+b} + \frac{2(x-b)}{a-b}$$

A) 1　*B) a*　*C) a -1*　*D) 3b*　*E) ab*

RESOLUCIÓN :

* Notaras que el *MCM* de los denominadores es:

$$(a+b)\ (a-b)$$

* Multiplicamos a toda la ecuación por este *MCM*.

$$(a+b)(a-b)\frac{(x+a)}{(a-b)} + (a+b)(a-b)\frac{(x-a)}{(a+b)} = (a+b)(a-b)\frac{(x+b)}{(a+b)} + (a+b)(a-b)\frac{2(x-b)}{(a-b)}$$

* Al simplificar tendríamos:

$$(a+b)\ (x+a) + (a-b)(x-a) =$$
$$(a-b)\ (x+b) + 2(a+b)(x-b)$$

* Si efectuamos las multiplicaciones indicadas, y reduciendo tendremos:

$$2ax + 2ab = 3ax + bx - ab - 3b^2$$

* Transponiendo y reduciendo:

$$ax + bx = 3ab + 3b^2$$

* Extraigamos factor común:

$$x(a+b) = 3b(a+b) \Rightarrow x = 3b$$

RPTA : "D"

PROBLEMA 14 :

Resolver : $\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} = 1$

A) $\frac{5}{4}$　*B)* $\frac{4}{5}$　*C) 0*

D) Incompatible　*E) -1*

RESOLUCIÓN :

* Elevamos al cuadrado a ambos miembros de la ecuación, considerando que al hacerlo, se introducen "soluciones extrañas" que hay que identificar y desechar:

$$[\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}]^2 = 1^2$$

* Desarrollando:

$$\sqrt{x+1}^{\,2} + 2\ \sqrt{x+1}\ \sqrt{x-1} + \sqrt{x-1}^{\,2} = 1$$

* Reduciendo los radicales:

$$x + \cancel{1} + 2\sqrt{x^2-1} + x - \cancel{1} = 1$$

* Reduciendo términos semejantes y transponiendo:

$$2\sqrt{x^2-1} = 1 - 2x$$

* Volvamos a elevar al cuadrado: $4(x^2-1) = 1 - 4x + 4x^2$

* Reduciendo términos semejantes:

$4x = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{4}$ *¡Pero ... cuidado!*

* Como hemos elevado al cuadrado 2 veces, es probable que la raíz obtenida sea "*solución extraña*". ¿Cómo identificarlo?. Probémosla ; si reemplazamos $x = \frac{5}{4}$ en la ecuación original.

$$\sqrt{\frac{5}{4}+1} + \sqrt{\frac{5}{4}-1} = 1 \Rightarrow \sqrt{\frac{9}{4}} + \sqrt{\frac{1}{4}} = 1$$

$$\frac{3}{2}+\frac{1}{2}=1 \Rightarrow \frac{4}{2}=1 \Rightarrow 2=1 \text{ .... ¡absurdo!}$$

* Luego $x = \frac{5}{4}$ ES SOLUCIÓN EXTRAÑA que ahora descartamos. Como no hay más soluciones que probar, la ecuación no tiene solución, es decir es *INCOMPATIBLE*.

RPTA : "D"

PROBLEMA 15 :

Resolver en x :

$$\sqrt[3]{a+\sqrt{x}} + \sqrt[3]{a-\sqrt{x}} = \sqrt[3]{5a}$$

A) $\frac{a}{5}$ B) 0 C) a D) $\frac{3a^2}{2}$ E) $\frac{4a^2}{5}$

RESOLUCIÓN :

* Si elevamos al cubo a ambos miembros vamos a recurrir a:

$(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$

* Elevamos nuestra ecuación:

$$\left[\sqrt[3]{a+\sqrt{x}} + \sqrt[3]{a-\sqrt{x}}\right]^3 = [\sqrt[3]{5a}]^3$$

* Desarrollando:

$$\sqrt[3]{a+\sqrt{x}}^{\,3} + \sqrt[3]{a-\sqrt{x}}^{\,3} + 3\sqrt[3]{a+\sqrt{x}}\sqrt[3]{a-\sqrt{x}}\,(\sqrt[3]{a+\sqrt{x}} + \sqrt[3]{a-\sqrt{x}}) = 5a$$

* Simplificando: $a+\sqrt{x}+a-\sqrt{x}+3\sqrt[3]{a^2-x}\sqrt[3]{5a} = 5a$

* Reduciendo términos semejantes:

$$\cancel{3}\sqrt[3]{a^2-x}\ \sqrt[3]{5a} = \cancel{3}a$$

* Nuevamente... al cubo:

$[\sqrt[3]{a^2-x}\ \sqrt[3]{5a}]^3 = a^3 \Rightarrow 5a(a^2-x) = a^3$

* Más simplificaciones: $5a^2 - 5x = a^2$

* Despejamos x : $x = \frac{4a^2}{5}$

RPTA : "E"

PROBLEMA 16 :

Resolver :

$$\frac{n}{m}[a(m-x)+bx] = b(n-x)+ax$$

A) $m+n$ B) $mn-1$ C) $\frac{mn}{m+n}$ D) 0 E) 1

RESOLUCIÓN :

* Transformando:

$$\frac{n}{m}[am-ax+bx] = bn-bx+ax$$

$\Rightarrow amn - anx + bnx = bmn - bmx + amx$
$\Rightarrow amn - bmn = amx - bmx + anx - bnx$
$\Rightarrow mn(a-b) = mx(a-b) + nx(a-b)$

* Dividiendo por $(a-b)$, quedará así :

$$mn = x(m+n) \Rightarrow x = \frac{mn}{m+n}$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 17 :

Resolver: $\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x+b}=\frac{1}{x+a}+\frac{1}{x-b}$

A) ab B) $\sqrt{ab}$ C) $-\sqrt{-ab}$ D) $\sqrt{-ab}$ E) "C" o "D"

RESOLUCIÓN:

* Transponiendo términos:

$$\frac{1}{x+b}-\frac{1}{x+a}=\frac{1}{x-b}-\frac{1}{x-a} \Rightarrow \frac{x+a-x-b}{(x+b)(x+a)}=\frac{x-a-x+b}{(x-b)(x-a)}$$

$$\Rightarrow \frac{\cancel{a-b}}{(x+b)(x+a)}=\frac{-(\cancel{a-b})}{(x-b)(x-a)}$$

* De aquí:

$(x-b)(x-a) = -(x+b)(x+a)$

$\Rightarrow x^2 - (\cancel{a+b})x + ab = x^2 - (\cancel{a+b})x - ab$

$\Rightarrow 2x^2 = -2ab \Rightarrow x^2 = -ab$

$\Rightarrow x = \pm\sqrt{-ab}$

RPTA : "E"

PROBLEMA 18 :

Resolver : $\frac{1}{x}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{x+a+b}$

A) a B) b C) $-b$ D) $-a$ E) «C» o «D»

RESOLUCIÓN :

* Transponiendo:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{x+a+b}-\frac{1}{x} \Rightarrow \frac{a+b}{ab} = \frac{\cancel{x}-\cancel{x}-a-b}{(x+a+b)x}$$

$$\Rightarrow \frac{a+b}{ab}=\frac{-(a+b)}{(x+a+b)x} \Rightarrow (x+a+b)x = -ab$$

$$\Rightarrow x^2+(a+b)x+ab=0$$

x ⟍ ⟋ a
x ⟋ ⟍ b

* De aquí: $(x+a)(x+b)=0$

* Donde: $x=-a \wedge x=-b$

RPTA : "E"

PROBLEMA 19 :

Resolver:

$(x-3)(x-5)(x+2)(x+4)-(x^2-x-13)^2+2x=50$

A) 40 B) 41 C) 49,5 D) 45,2 E) 50

RESOLUCIÓN :

* Efectuemos los factores que se indican:

$(x-3)(x-5)(x+2)(x+4)-(x^2-x-13)^2+2x=50$

$(x^2-x-6)(x^2-x-20)-(x^2-x-13)^2+2x=50$

* De aquí, hacemos : $x^2-x=a$, quedará así:

$\Rightarrow (a-6)(a-20)-(a-13)^2+2x=50$

* Desarrollando :

$\Rightarrow a^2-26a+120-a^2+26a-169+2x=50$

* Transponiendo : $2x=50-120+169$

$\Rightarrow 2x=99 \Rightarrow x=49{,}5$

RPTA : "C"

PROBLEMA 20 :

Resolver:

$$\frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}}+\frac{1}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x+2}}+\frac{1}{\sqrt{x+4}+\sqrt{x+3}}=1$$

A) 1 B) – 1 C) 0 D) 4 E) – 4

RESOLUCIÓN :

* Multiplicando por la conjugada en cada término:

$$\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}}{(\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1})(\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1})}+\frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{x+2}}{(\sqrt{x+3}+\sqrt{x+2})(\sqrt{x+3}-\sqrt{x+2})}$$

$$+\frac{\sqrt{x+4}-\sqrt{x+3}}{(\sqrt{x+4}+\sqrt{x+3})(\sqrt{x+4}-\sqrt{x+3})}=1$$

$$\Rightarrow \sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}+\sqrt{x+3}-\sqrt{x+2}+\sqrt{x+4}-\sqrt{x+3}=1$$

$\sqrt{x+4}=\sqrt{x+1}+1$ elevando al cuadrado:

$x+4=x+1+1+2\sqrt{x+1} \Leftrightarrow 1=\sqrt{x+1}$

* Al cuadrado: $1=x+1 \Rightarrow x=0$

RPTA : "C"

PROBLEMA 21 :

Calcular "x" al resolver:

$\frac{x-100}{50}+\frac{x+48}{24}=\frac{37}{25}$ y dar el valor $\frac{x^2}{24}+1$

A) 25 B) 32 C) 56 D) 1 E) 40

RESOLUCIÓN :

$$\frac{x-100}{50}+\frac{x+48}{24}=\frac{37}{25}\Rightarrow \frac{x}{50}-2+\frac{x}{24}+2=\frac{37}{28}$$

$$\Rightarrow \frac{74x}{50\times 24}=\frac{37}{25}\Rightarrow x=\frac{37\times 50\times 024}{25\times 74}\Rightarrow x=24$$

* Luego: $\frac{x^2}{24}+1=25$

RPTA : "A"

PROBLEMA 22 :

Resolver por los 3 métodos , el siguiente sistema:

$5x-2y=11$ .... (I)
$2x+4y=2$ .... (II)

RESOLUCIÓN :

I) POR SUSTITUCIÓN :

$5x-2y=11$ .... (I)
$2x+4y=2$ .... (II)

* De (I).... $5x-2y=11$

$\Rightarrow 5x=11+2y \Rightarrow x=\frac{11+2y}{5}$

* Reemplazando en (II):

$$2\times\left(\frac{11+2y}{5}\right)+4y=2 \Rightarrow \frac{22+4y}{5}+4y=2$$

$$\Rightarrow \frac{22+4y+20y}{5}=2 \Rightarrow 22+24y=10$$

$\Rightarrow 24y=10-22$

$\Rightarrow y=\frac{12}{24}\Rightarrow \boxed{y=\frac{1}{2}}$

* Ahora de (I) ..... $5x-2y=11$

$-2y=11-5x \Rightarrow -y=\frac{11-5x}{2}$

$\Rightarrow y=\frac{-11+5x}{2}$

* Reemplazo en (II):

$$2\times x+4\frac{(-11+5x)}{2}=2 \Rightarrow 2x+\frac{-44+20x}{2}=2$$

$$\Leftrightarrow \frac{4x-44+20x}{2}=2 \Rightarrow 24x=4+44 \Leftrightarrow x=\frac{48}{24}\Rightarrow x=2$$

II) POR IGUALACIÓN :

* De: $5x-2y=11$

$\Rightarrow 5x=11+2y \Rightarrow x=\frac{11+2y}{5}$ ....(a)

* Ahora de: $2x+4y=2$

$\Leftrightarrow 2x=2-4y \Rightarrow x=\frac{2-4y}{2}$ ....(b)

* Igualando (a) y (b):

$\frac{11+2y}{5}=\frac{2-4y}{2}\Rightarrow 2(11+2y)=(2-4y)\times 5$

$\Rightarrow 22+4y=10-20y \Rightarrow 4y+20y=10-22$

$\Rightarrow 24y=-12 \Rightarrow y=-\frac{12}{24}\Rightarrow y=-\frac{1}{2}$

* Luego despejamos **y** en *(I)* y *(II)*:

$$-2y = 11 - 5x \Rightarrow -y = \frac{11-5x}{2} \Rightarrow y = \frac{-11+5x}{2}$$

* Ahora de : $2x + 4y = 2$

$$\Rightarrow 4y = 2 - 2x \Rightarrow y = \frac{2-2x}{4}$$

* Igualando:

$$\frac{-11+5x}{2} = \frac{2-2x}{4} \Leftrightarrow 4(-11+5x = 2(2-2x) \Rightarrow -44 + 20x = 4 - 4x$$

$$\Rightarrow 20x + 4x = 4 + 44 \Rightarrow 24x = 48 \Rightarrow x = \frac{\overset{2}{\cancel{48}}}{\underset{1}{\cancel{24}}} \Rightarrow x = 2$$

III) POR SUMA O RESTA :

* Para anular x:

$$\begin{cases} 5x - 2y = 11 \Rightarrow 10x - 4y = 22 \\ 2x + 4y = 2 \Rightarrow 10x + 20y = 10 \end{cases} \ominus$$

$$0 - 24y = 12$$

$$\Rightarrow y = -\frac{1}{2}$$

* Para anular **y** :

$$\times 2\begin{cases} 5x - 2y = 11 \Rightarrow 10x - 4y = 22 \\ 2x + 4y = 2 \Rightarrow 2x + 4y = 2 \end{cases} \oplus$$

$$12x + 0 = 24$$

$\Rightarrow x = 2$

PROBLEMA 23 :

Resolver :

$$\begin{cases} 6x - \dfrac{1}{2}y = 1 \text{ ....}(I) \\ 11x + y = 7 \text{ ....}(II) \end{cases}$$

A) $x = 1$, $y = \frac{7}{3}$ B) $x = \frac{62}{5}$, $y = 4$ C) $x = \frac{9}{23}$, $y = \frac{62}{23}$ D) $x = y = \frac{7}{3}$

RESOLUCIÓN :

* Cuando una de las ecuaciones tiene coeficiente fraccionario , para trabajar con más sencillez , se eliminan los denominadores , quedando ecuaciones lineales enteras.

* De *(I)*:

$$6x - \frac{1}{2}y = 1 \Rightarrow \frac{12x - 1y}{2} = 1 \Rightarrow 12x - 1y = 2$$

* El sistema queda:

$$\begin{cases} 12x - y = 2 \\ 11x + y = 7 \end{cases}$$

* Para obtener **y** : $12x - y = 2$ ....*(I)*

$$\Leftrightarrow 12x = 2 + y \Rightarrow x = \frac{2+y}{12}$$

* Reemplazo en *(II)*:

$$11x + y = 7 \Rightarrow 11\left(\frac{2+y}{12}\right) + y = 7 \Rightarrow \frac{22 + 11y + 12y}{12} = 7$$

$$\Rightarrow \frac{22+23y}{12} = 7 \Rightarrow 22 + 23y = 712 \Rightarrow 23y = 84 - 22 \Rightarrow y = \frac{62}{23}$$

* Para obtener x:

De *(I)* : $12x - y = 2$

$$\Rightarrow -y = 2 - 12x \Rightarrow -y = -2 + 12x$$

* Reemplazando en *(II)* :

$$11x + y = 7 \Rightarrow 11x + (-2 + 12x) = 7 \Rightarrow 11x - 2 + 12x = 7$$

$$\Rightarrow 23x - 2 = 7 \Rightarrow 23x = 7 + 2 \Rightarrow x = \frac{9}{23}$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 24 :

Resolver :

$$\frac{2}{3}x - 4y = 6 \text{ ....}(I)$$

$$3x - 6y = 5 \text{ ....}(II)$$

A) $x = -2$, $y = 1$ B) $x = -2$, $y = -\frac{7}{3}$ C) $x = 1$, $y = -2$ D) $x = -2$, $y = -\frac{11}{6}$

RESOLUCIÓN :

* Para eliminar la incógnita x:

A la ecuación *(I)* se la multiplica por el factor **3** y a la ecuación *(II)* por el factor $\frac{2}{3}$:

$$\begin{cases} \dfrac{2}{3}x - 4y = 6 \Rightarrow 2x - 12y = 18 \\ 3x - 6y = 5 \Rightarrow 2x - 4y = \dfrac{10}{3} \end{cases} \ominus$$

$$0 - 8y = \frac{44}{3}$$

* Como los coeficientes de x son del mismo signo , para eliminarlos se restaron ambos miembros de las ecuaciones.

$$-y = \frac{44}{38} \Rightarrow y = -\frac{11}{6}$$

* Para eliminar la incógnita **y** , a la ecuación *(I)* se la multiplica por el factor **3** y a la ecuación *(II)* por el factor **2**.

$$\begin{cases} \dfrac{2}{3}x - 4y = 6 \Rightarrow 2x - 12y = 18 \\ 3x - 6y = 5 \Rightarrow 6x - 12y = 10 \end{cases} \ominus$$

$$-4x + 0 = 8$$

* Como los coeficientes son del mismo signo, se restaron las ecuaciones para que se eliminen:

$$-x = \frac{\cancel{8}}{\cancel{4}} \Rightarrow x = -2$$

RPTA : "D"

PROBLEMA 26 :

Resolver el sistema:

$$\begin{cases} x+3y=6 \text{ ....}(I) \\ 5x-2y=13 \text{ ....}(II) \end{cases}$$

A) $\begin{matrix} x=1 \\ y=2 \end{matrix}$ B) $\begin{matrix} x=3 \\ y=2 \end{matrix}$ C) $\begin{matrix} x=1 \\ y=1 \end{matrix}$ D) $\begin{matrix} x=3 \\ y=1 \end{matrix}$ E) $\begin{matrix} x=3 \\ y=1 \end{matrix}$

RESOLUCIÓN :

* Despejamos cualquiera de las incógnitas , sea x en la ecuación *(I)*:

$$x+3y=6 \Rightarrow x=6-3y$$

* Este valor se reemplaza en la ecuación *(II)*:

$5x-2y=13$

$\Rightarrow 5(6-3y)-2y=13 \Rightarrow 30-15y-2y=13$

* Transponer términos , agrupando en un miembro todas las incógnitas y en el otro todas las cantidades conocidas: $-15y-2y=13-30 \Rightarrow -17y=-17 \Rightarrow y=1$

* Sustituimos : $y = 1$; en cualquiera de las ecuaciones dadas:

* Ecuación *(I)*: $x+3y=6 \Rightarrow x+3(1)=6 \Rightarrow x=6-3 \Rightarrow x=3$

RPTA : "D"

PROBLEMA 27 :

Resolver el sistema:

$$\begin{cases} 5x+6y=20 \text{ ....}(I) \\ 4x-3y=-23 \text{ ....}(II) \end{cases}$$

E indicar "$x+y$"

A) 3 B) 1 C) –2 D) 0 E) 4

RESOLUCIÓN :

* Multiplicamos la ecuación *(II)* por 2 , y tendremos:

$$\begin{cases} 5x+6y=20 \\ (4x-3y=-23)\times(2) \end{cases} \quad \begin{cases} 5x+6y=20 \text{ ....}(I) \\ 8x-6y=-46 \text{ ....}(II) \end{cases}$$

* Dado que los coeficientes de "y" tienen signos distintos se suman estas ecuaciones porque con ello se elimina la variable y:

$$5x+8x=20-46 \Rightarrow 13x=-26 \Rightarrow x=-\frac{26}{13} \Rightarrow x=-2$$

* Sustituyendo $x=-2$, en cualquiera de las ecuaciones dadas:

* Ecuación *(I)*: $5x+6y=20 \Rightarrow 5(-2)+6y=20$

$\Rightarrow -10+6y=20 \Rightarrow 6y=30 \Rightarrow y=5$

* Se pide : $x+y=-2+5=3$

RPTA : "A"

PROBLEMA 28 :

Resolver el sistema:

$$\begin{cases} x+2y=3 \text{ ....}(I) \\ 5x-3y=2 \text{ ....}(II) \end{cases}$$

E indicar "$x-y$"

A) 1 B) 2 C) 3 D) 0 E) –1

RESOLUCIÓN :

* Despejamos cualquiera de las incógnitas, sea x en ambas ecuaciones.

* Ecuación *(I)* : $x+2y=3 \Rightarrow x=3-2y$

* Ecuación *(II)*: $5x-3y=2 \Rightarrow x=\frac{2+3y}{5}$

* Luego se igualan entre si los dos valores de x obtenidos: $3-2y=\frac{2+3y}{5}$

* Resolviendo esta ecuación:

$5(3-2y)=(2+3y) \Rightarrow 15-10y=2+3y$

* Transporte términos , agrupando en un miembro todas las incógnitas y en el otro todas las cantidades conocidas: $-10y-3y=2-15 \Rightarrow -13y=-13 \Rightarrow y=1$

* Sustituimos $y=1$, en cualquiera de las ecuaciones dadas.

* Ecuación *(I)* : $x+2y=3 \Rightarrow x+2(1)=3 \Rightarrow x=1$

* Se pide : $x-y=1-1=0$

RPTA : "D"

PROBLEMA 29 :

Resolver el sistema:

$$x+3y=10 \text{ ....}(I)$$
$$4x-y=1 \text{ ....}(II)$$

A) $\begin{matrix} x=1 \\ y=2 \end{matrix}$ B) $\begin{matrix} x=2 \\ y=3 \end{matrix}$ C) $\begin{matrix} x=3 \\ y=4 \end{matrix}$ D) $\begin{matrix} x=1 \\ y=5 \end{matrix}$ E) $\begin{matrix} x=3 \\ y=3 \end{matrix}$

RESOLUCIÓN :

* Multiplicando por 3 ambos miembros de la ecuación *(II)*:

$$\begin{array}{r} x+2y=10 \\ 12x-3y=3 \\ \hline 13x+0=13 \end{array} \quad (+)$$

* Al sumar miembro a miembro se obtiene: $x=1$; $y=5$

RPTA : "D'

PROBLEMA 30 :

Resolver el sistema:

$$2x-y=9 \text{ ....}(I)$$
$$3x+2y=10 \text{ ....}(II)$$

A) $\begin{matrix} x=2 \\ y=4 \end{matrix}$ B) $\begin{matrix} x=1 \\ y=6 \end{matrix}$ C) $\begin{matrix} x=4 \\ y=-1 \end{matrix}$ D) $\begin{matrix} x=3 \\ y=5 \end{matrix}$ E) $\begin{matrix} x=2 \\ y=7 \end{matrix}$

RESOLUCIÓN :

* De la ecuación *(I)*: $y=2x-9$

* Sustituyendo en la ecuación *(II)*:

$3x+2(2x-9)=10$

$\Rightarrow 7x=28 \Rightarrow x=4$; $y=-1$

RPTA : "C"

PROBLEMA 31 :

Resolver el sistema:

$2x-3y=1$ .... (I)

$4x-5y=13$ .... (II)

A) $x=2$, $y=3$ B) $x=1$, $y=2$ C) $x=3$, $y=4$ D) $x=2$, $y=1$

RESOLUCIÓN :

* Despejando "x" en las dos ecuaciones: $x=\frac{1+3y}{2}$; $x=\frac{13-5y}{4}$

* Igualando: $\frac{1+3y}{2}=\frac{13-5y}{4}$

$4+12y=26-10y \Rightarrow y=1$

* Reemplazando $y=1$ en la ecuación (II) se tiene: $x=2$

RPTA : "D"

PRIMERA PRACTICA DIRIGIDA

TERMINOS SEMEJANTES

01) Reducir: $5a+7a+a$

A) 9a B) 12a C) 13a D) 7a E) 14a

02) Reducir: $-5x+2x-4x$

A) -7x B) 8x C) 7x D) 11x E) $-11x$

03) Resolver: $x\times x+3x^2$

A) $5x^2$ B) $4x^2$ C) 2x D) 4x E) $2x+3x^2$

04) Resolver:

$x+x+3(x+2)-5x$

A) 9x B) $10x+6$ C) $10x-6$ D) 6 E) -6

05) Resolver:

$3xy^2+7x^2y-3y^2x$

A) $7xy^2$ B) $7x^2y$ C) $3x^2-4x^2y^3$ d) 0 e) NA

06) Reducir: $-(-3x+4)-(3x-8)$

A) 4 B) $-6x-12$ C) $6x-4$ D) -4 E) $6x+4$

07) Reducir:

$(-5)(-2)(-3)+(-3)(5)(-4)$

A) 30 B) -30 C) 15 D) 60 E) -90

08) Reducir: $x.x.x+x^2x+7x^3$

A) $3x+8x^3$ B) $3x+2x^2+7x^3$ C) 9x D) $9x^3$ E) $9x^2$

09) Restar: $4xy$ de $8xy+4$

A) $-8xy-4$ B) $-4xy-4$ C) $4xy+4$ D) $4xy-4$ E) $-4xy+4$

10) De $5xy+8$ restar $4xy+8$

A) $-xy$ B) 10 C) -16 D) -9 E) xy

11) Reducir: $5x-18x+9x+4$

A) $-4x$ B) $4x+4$ C) 4 D) $4-4x$ E) 0

12) Reducir:

$7x+8x+9(-3x+2)+12x$

A) 18 B) -18 C) 54x D) $-54x$ E) $-8x+18$

13) Resolver: $x^2(x^3+1)-x(x-3x^4)$

A) $2x^2$ B) $4x^5$ C) 0 D) $-3x^5$ E) $6x^4$

14) Resolver:

$-(-(-4))+(4x-(-4))$

A) $8+4x$ B) $-8+4x$ C) 4x D) 0 E) $-8-4x$

15) Reducir:

$5x+7(x-8)-3(4x+1)$

A) $-x+5y$ B) $x-5y$ C) -53 D) 56 E) -59

16) Reducir :

$3x(x+y)+2y(x-2)+4y-5xy$

A) $3x^2$ B) 2xy C) x^2+7y^2 D) $8xy+9x^2$ E) 4

17) Resolver:

$xy(x^2+5xy)-x^3y-4x(xy^2)$

A) 0 B) x^2y^2 C) x^2y D) $-x^2y^2$ E) $-xy$

18) Restar: $2x+3y$ de $8x+7y$

A) $-6x+4y$ B) $10x-10y$ C) $6x+4y$ D) $6x-4y$ E) $-10x-10y$

19) Restar:

$5x-3y+7$ de $5x-3y-7$

A) 14 B) -14 C) 0 D) 10x E) 6y

20) De $5ab-7bc+8ac$ restar $-4ab+6bc+8ca$

A) $9a-13bc$ B) $ab+bc$ C) $-bc+ac$ D) $ab-bc$ E) $ab-bc-16ac$

SEGUNDA PRACTICA DIRIGIDA

OPERACIONES CON POLINOMIOS

(Suma, Resta, Multiplicación)

* Hallar la suma de:

01) $2b+3a-c$; $2a+3b+c$

02) $7a-4b+5c$; $-7a+4b-6c$

03) $m+n-p$; $-m-n+p$

04) $9x-3y+5$; $-x-y+4$; $-5x+4y-9$

05) $a+b-c$; $2a+2b-2c$; $-3a-b+3c$

06) $-7x-4y+6z$; $10x-20y-8z$; $-5x+24y+2z$

07) $2a+3b$; $6b-4c$; $-a+8c$

08) $2x-3y$; $5z+9$; $6x-4$; $3y-5$

* RESTAR :

09) $a-b$ de $b-a$

10) $x-y$ de $2x+3y$

11) $-5a+b$ de $-7a+5$

12) x^2-5x de $-x^2+6$

13) $-x+y-z$ de $x+3y-6z$

* De:

14) -9 restar $a-8$

15) 16 restar $5xy-x^2+16$

16) x^3 restar $-x^3-8x^2y-6xy^2$

17) $3m^2-5n^2$ restar $m^2+8mn+10n^2$

18) a^2-ab restar $3ab+b^2$

* *Suprimir signos de agrupación*

19) $x-(x-y)$

20) $x^2+(-3x-x^2+5)$

21) $a+b-(-2a+3)$

22) $4m-(-2m-n)$

23) $2x+3y-(4x+3y)$

24) $a+(a-b)+(-a+b)$

(25) $2a-\{-x+a-1\}-\{a+x-3\}$

OPERACIONES CON FRACCIONES

FRACCIONES :

Una fracción algebraica es el cociente indicado de dos expresiones algebraicas racionales; siendo por lo menos el divisor una expresión algebraica.

NOTACIÓN:

$$F=\frac{N}{D}\quad \begin{matrix} N \rightarrow \text{Numerador} \\ D \rightarrow \text{Denominador}\end{matrix}$$

PROPIEDADES FUNDAMENTALES DE LAS FRACCIONES

FRACCIONES HOMOGENEAS :

Son aquellas fracciones que tienen iguales denominadores

EJEMPLO :

- $\frac{7}{2}+\frac{9}{2}=\frac{7+9}{2}=\frac{16}{2}=8$
- $\frac{x}{3}+\frac{7x}{3}=\frac{x+7x}{3}=\frac{8x}{3}$
- $\frac{5}{3}-\frac{10}{3}=\frac{5-10}{3}=\frac{-5}{3}$

FRACCIONES HETEROGENEAS :

Cuando las fracciones son de denominadores diferentes se llaman: "Fracciones Heterogeneas" para ello se saca el Minimo Común Multiplo (MCM) de los denominadores

EJEMPLO :

- $\frac{3}{2}+\frac{2}{3}=\frac{9+4}{6}=\frac{13}{6}$

MCM de:

2	3	2	MCM = 2x3 = 6
1	3	3	
1	1		

PRODUCTO:

$$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}\times\frac{e}{f}=\frac{ace}{bdf}$$

EJEMPLO :

- $\frac{2x}{3}\times\frac{3y}{5}=\frac{6xy}{15}=\frac{2xy}{5}$

DIVISIÓN:

$$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}$$

EJEMPLO :

- $\frac{3x}{2}\div\frac{9y}{8}\Rightarrow\frac{3x}{2}\times\frac{8}{9y}=\frac{24x}{18y}=\frac{4x}{3y}$

TERCERA PRACTICA DIRIGIDA

(01) Sumar: $\frac{3x}{5}+\frac{7x}{5}$

A) x B) $2x$ C) $3x$
D) $\frac{11x}{5}$ E) $\frac{4x}{5}$

(02) Efectuar : $\frac{7x}{3}+\frac{8x}{3}-\frac{3x}{3}$

A) x B) $2x$ C) $3x$
D) $4x$ E) $5x$

(03) Efectuar : $\frac{a}{2}+\frac{2a}{3}$

A) $7a$ B) $\frac{7a}{3}$ C) $\frac{7a}{2}$
D) $\frac{7a}{6}$ E) $\frac{5a}{6}$

(04) Efectuar : $\frac{2x}{5}-\frac{x}{3}$

A) $\frac{x}{5}$ B) $\frac{x}{3}$ C) $-\frac{x}{5}$
D) $\frac{x}{6}$ E) $\frac{x}{15}$

(05) Efectuar: $\frac{3}{2}+\frac{5}{3}-\frac{1}{2}$

A) $8/3$ B) $5/3$ C) $7/6$
D) 1 E) 2

(06) Efectuar: $\frac{a}{2}-\frac{3a}{4}$

A) $a/2$ B) $-a/2$ C) $-a$
D) a E) $-a/4$

(07) Efectuar: $\frac{3a}{4}-\frac{a}{2}$

A) $-a/2$ B) $a/4$ C) $a/2$
D) $-a/4$ E) $-a$

(08) Efectuar: $\frac{a}{2}+a+\frac{2a}{3}$

A) $8a/3$ B) $11a/2$ C) $13a/6$
D) $14a/3$ E) $5a/2$

(09) Efectuar: $\frac{a}{2}+\frac{a}{4}+\frac{a}{8}$

A) $7a/8$ B) $7a/6$ C) $5a/8$
D) $2a/8$ E) $18a/4$

(10) Efectuar: $\frac{2y}{3}+\frac{y}{3}-y$

A) 0 B) $y/3$ C) $2y/3$
D) $-y/2$ E) $5y/3$

(11) Efectuar: $\frac{5a^2b}{6}-\frac{5a^2b}{12}$

A) $\frac{-5a^2b}{6}$ B) $\frac{5a^2b}{6}$ C) $-\frac{5a^2b}{12}$
D) $\frac{5ab^2}{12}$ E) $\frac{5a^2b}{12}$

(12) Efectuar: $\frac{9x^2y}{14}-\frac{4x^2y}{7}$

A) xy^2 B) $\frac{x^2y}{14}$ C) $\frac{x^2y}{7}$
D) $-\frac{x^2y}{14}$ E) $\frac{xy^2}{14}$

(13) Resolver: $-am+\frac{3am}{5}$

A) $-\frac{3am}{5}$ B) $-\frac{2am}{5}$ C) $-\frac{am}{5}$
D) $\frac{3am}{5}$ E) $\frac{2am}{5}$

(14) Resolver: $\left(\frac{3x}{5}+\frac{8x}{3}\right)\cdot\frac{15}{x}$

A) $\frac{40x}{15}$ B) 40 C) $\frac{49x}{3}$
D) 49 E) 1

(15) Resolver: $\left(\frac{3xy}{8z}\div\frac{3x}{4z}\right)+\frac{5y}{2}$

A) $2y$ B) $\frac{9y}{2}$ C) $\frac{8y}{3}$
D) $\frac{5y}{3}$ E) $\frac{7y}{2}$

CUARTA PRACTICA DIRIGIDA

OPERACIONES COMBINADAS DE TÉRMINOS SEMEJANTES

(01) Resolver: $2x-(3x+5)+x+7$

A) 1 B) 2 C) 3
D) 5 E) $x+1$

(02) Resolver: $-(-x+1)-(x-3)$

A) 1 B) 3 C) -2
D) 2 E) -1

(03) Calcular: $x+2x(3)-7(x-1)$

A) 6 B) 5 C) 4
D) 7 E) 9

(04) Resolver: $\frac{3x}{2}+\frac{5x}{3}-\frac{11x}{6}$

A) $2x/5$ B) $3x$ C) $5x/6$
D) $19x/6$ E) $2x$

(05) Resolver:

$$-3(x-2)-(-(-x+5))$$

A) $4x-9$ B) $11-4x$ C) $5x-11$
D) $4x-11$ E) $11-5x$

(06) Resolver: $2x-(5+2x)+13/2$

A) 21/2 B) 0 C) 3/2 D) − 3/2 E) 23/2

07 Resolver: $6x+\frac{3x}{2}-\frac{4x}{3}$

A) 13/2 B) 2/3 C) 2x/13 D) 13x/2 E) 37x/6

08 Resolver:

$$2x + 3x - 5(x+2) + 15$$

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

09 Calcular: $\left(2x+\frac{3x}{2}\right)\left(\frac{24}{x}\right)+5$

A) 24x B) 79 C) 74 D) 89 E) 19x

10 Resolver: $\frac{3x}{2}-\frac{7x}{3}+\frac{2x}{5}$

A) 12x/30 B) 13x/30 C) 13x/15 D) 27x/6 E) 17x/30

11 Efectuar:

$$4x + (3x - 4) - (5x + 3)$$

A) 2x − 9 B) 2x + 7 C) x − 9 D) 9x − 2 E) 9x + 7

12 Efectuar:

$$4x + 3 + (-4 + 2x) - \{-5x + 3\}$$

A) 7x − 5 B) 8x − 7 C) 11x − 4 D) 10x + 6 E) 7x + 3

13 Resolver:

$$9x - [-3 + 4x] - (5x + 3) - (-4)$$

A) 9x − 2 B) 4x C) 5x D) 3 E) 4

14 Efectuar:

$$3x + 2 - \{2x + 4 + (5 - 8x)\}$$

A) − 3x + 11 B) − 3x + 7 C) 9x − 7 D) 9x + 11 E) 9x − 11

15 Efectuar:

$$3 - 5a + [-2 + 4 - \{7a - 2\} + (2a - 5)]$$

A) − 2 − 6a B) − 4a + 2 C) − 2 − 4a D) 2 − 6a E) 8 − 6a

QUINTA PRACTICA DIRIGIDA

Ecuaciones Básicas I

Resolver en todos los casos:

01 $4x + 8 = -20$

A) − 7 B) − 3 C) 0 D) 4 E) 5

02 $x + 12 = 5$

A) − 7 B) 0 C) 1 D) − 1 E) − 2

03 $2x - 4 = 5 - x$

A) 1 B) 3 C) 2 D) 4 E) 5

04 $-2x + 6 = -2$

A) 2 B) 4 C) 6 D) 8 E) 0

05 $-3x - 5 = 10$

A) − 1 B) − 5 C) 0 D) 4 E) − 4

06 $4y - 4 = y - 16$

A) − 4 B) 4 C) 0 D) 1 E) 2

07 $3(x - 1) - 4 = 2(x - 1)$

A) 7 B) 5 C) − 5 D) 0 E) 1

08 $16 - 4x + 6x = 12x + 8$

A) 5/4 B) 4/5 C) − 8/7 D) 1 E) −1

09 $7x - 6x - 4 = 15x + 3 - 6x$

A) −7/8 B) 7/8 C) − 8/7 D) 1 E) −1

10 $-2x + 7x - 3 = 3x - x + 6$

A) 1/3 B) − 3 C) 3 D) 0 E) 2

11 $7(x - 2) + 3 = 4(2x - 6) - 2$

A) − 15 B) 15 C) 6 D) 4 E) 2

12 $x - 2(x + 1) = 7 - 4x$

A) 3 B) − 3 C) 1 D) 4 E) 5

13 $2x + 4 = 4(x - 6)$

A) − 14 B) 14 C) 13 D) 8 E) 9

14 $3(5x + 1) - 2(6x + 3) = 2(x - 1)$

A) − 1 B) 1 C) 3 D) 4 E) 5

15 $2x + 8 - 3x = 4x + 15 - 2x$

A) − 7/3 B) 7/3 C) 3/7 D) 1 E) 1/2

16 $5(2x - 4) = 2(3x + 4)$

A) − 7 B) 1/7 C) 7 D) 0 E) 77

17 $3(x + 1) + 4(2x - 1) = 5(x + 5) - 2(x - 3)$

A) 4 B) 8 C) − 4 D) − 2 E) 0

18 $2x - 8 = -6x - 4$

A) 2 B) 1/2 C) − 2 D) 0 E) 1

19 $-3(x - 2) + 2(x - 1) = 4(x + 6)$

A) 4 B) − 4 C) 2 D) − 6 E) 6

20 $(x - 3)^2 = (x + 4)(x - 6)$

A) 4/33 B) 33/4 C) − 33/4 D) 0 E) −1

TAREA DOMICILIARIA

01 Resolver:

$$3(x - 2) + 5 = x - 3$$

A) 1 B) −1 C) 0 D) 4 E) 2

02 Resolver:

$$2 + a - (3a + 7) = -11$$

A) 3 B) −3 C) −6 D) 8 E) 1

03 Resolver:

$$(x - 3)(x + 5) = x(x + 3)$$

A) 15 B) 8 C) − 15 D) − 8 E) 0

04 Resolver:

$$6x(7 - x) = 36 - 2x(3x - 15)$$

A) 3 B) 2 C) 1 D) −1 E) 0

05 Resolver:

$$10(y - 9) - 9(5 - 6y) = 2(4y - 1) + 5 + 10y$$

A) −3 B) 3 C) 1/3 D) 1/2 E) 1

SEXTA PRACTICA DIRIGIDA

Ecuaciones Básicas II

Resolver en cada caso:

01 $\frac{4x-3}{7} = 3$

A) −6 B) 3 C) 6 D) 5 E) 4

02 $5(x-4)+4(x-3)=3(x\ \ 2)$

A) 7/3 B) 13 C) 9/3 D) 13/3 E) 5/3

03 $\frac{x}{5}-\frac{x}{4}= 2$

A) 40 B) −40 C) 4 D) −10 E) 10

04 $\frac{x-3}{2}+\frac{x+2}{4}=5$

A) 8 B) 16 C) −8 D) −16 E) 5

05 $5(x-1)=8+4x$

A) 13/9 B) 9/13 C) 13 D) 15 E) 12

06 Hallar el valor de "x" en la siguiente ecuación:

$$\frac{x}{6}+\frac{3}{2}=\frac{x}{2}+\frac{5}{3}$$

A) −1/2 B) 1/4 C) −1/4 D) 1 E) 0

07 Resolver:

$$\frac{x}{6}+\frac{3}{2}=\frac{x}{2}+\frac{5}{3}$$

dar como respuesta 5x.

A) 1/10 B) −5/2 C) −1/2 D) 2 E) 0

08 Resolver la ecuación:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{x}{5}=\frac{x}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{5}$$

A) {3} B) {1} C) {−1} D) {0} E) {2}

09 Hallar la raíz de la siguiente ecuación:

$$\frac{9+x}{2}-\frac{8-x}{3}=\frac{x+1}{2}+x-2$$

A) −5 B) 5 C) 2 D) 4 E) −1

(10) $\frac{x-2}{3}-\frac{x-3}{3}=\frac{x-4}{5}$

A) 3/17 B) 17/3 C) −17/3 D) 1 E) 0

(11) $\frac{x-2}{3}-\frac{x-3}{4}=\frac{x-4}{5}$

A) 7/53 B) −7/53 C) 53/7 D) 2 E) 4

(12) $\frac{9+x}{2}-\frac{8-x}{3}=\frac{x+1}{2}+x-2$

A) 5 B) −5 C) 1 D) 0 E) 2

(13) $\frac{x-2}{3}+2=\frac{x-2}{5}+6$

A) 4 B) 32 C) −32 D) 8 E) 2

(14) $\frac{x+3}{4}-\frac{x-1}{2}=\frac{x}{6}+1$

A) 5/6 B) −3/5 C) 3/5 D) 1 E) 2

(15) $x+\frac{5x}{3}=2(x+1)$

A) 1/3 B) −3 C) 3 D) 2 E) 8

TAREA DOMICILIARIA

Resolver en todos los casos:

(01) $(x+2)^2-3=(x-5)^2+4$

A) 4 B) 6 C) 3 D) 5 E) 2

(02) Resolver:

$$\frac{3(x+9)}{5}+\frac{x-11}{10}=\frac{5(x+2)}{3}$$

A) 0 B) 1 C) −1 D) 3 E) 4

(03) $\frac{1}{2}(x-1)-(x-3)=\frac{1}{3}(x+3)$

A) 5/9 B) −9/5 C) 9/5 D) 1 E) 0

(04) $\frac{2}{3}\left(\frac{x+1}{5}\right)=\frac{3}{4}\left(\frac{x-6}{3}\right)$

A) 98 B) 14 C) 7/98 D) 0 E) 1

(05) $\frac{10-x}{x}=\frac{2}{3}$

A) 1/6 B) 6 C) −6 D) 2 E) 1/3

SÉPTIMA PRÁCTICA DIRIGIDA

Sistema de Ecuaciones

* Resolver en cada caso:

(01) $\begin{cases} 2x+y=10 \\ x+y=7 \end{cases}$

A) {1;2} B) {3;4} C) {2;3} D) {−1;−2} E) {6;1}

(02) $\begin{cases} x-y=3 \\ 2x+y=12 \end{cases}$

A) {6;3} B) {5;2} C) {4;1} D) {7;4} E) {8;5}

(03) $\begin{cases} 3x+2y=9 \\ 2x-y=-1 \end{cases}$

A) {2;3} B) {4;1} C) {2;1} D) {1;3} E) {4;7}

(04) $\begin{cases} x-3=2y \\ 3y-1=x \end{cases}$

A) {8;3} B) {11;4} C) {12;3} D) {6;4} E) {7;4}

(05) $\begin{cases} x-2y=4 \\ 2x+3y=1 \end{cases}$

A) {0;−2} B) {−2;−1} C) {5;−3} D) {2;−1} E) {1;−7}

(06) $\begin{cases} y=x+2 \\ 2x=5-y \end{cases}$

A) {1;2} B) {2;1} C) {3;1} D) {1;3} E) {1;0}

(07) $\begin{cases} x+y=3 \\ 2x-1=4(1-y) \end{cases}$

A) $\left\{\frac{1}{2};\frac{7}{2}\right\}$ B) $\left\{\frac{7}{2};\frac{1}{2}\right\}$ C) $\left\{-\frac{1}{2};\frac{7}{2}\right\}$ D) {1;−2} E) {1;−7}

(08) $\begin{cases} x-8y=0 \\ 2y+3x=13 \end{cases}$

A) $\left\{4;\frac{1}{2}\right\}$ B) $\left\{2;\frac{1}{2}\right\}$ C) $\left\{3;\frac{1}{3}\right\}$ D) $\left\{\frac{1}{2};4\right\}$ E) {2;−2}

(09) $\begin{cases} \frac{x+1}{3}=y \\ \frac{y-1}{2}=x-7 \end{cases}$

A) {8;3} B) {5;2} C) {6;4} D) {7;4} E) {2;1}

(10) $\begin{cases} \frac{x+3}{2}=2 \\ \frac{y+6}{x}=-1 \end{cases}$

A) {−5;1} B) {−3;4} C) {6;−2} D) {−2;3} E) {1;−7}

(11) $\begin{cases} 2x-4=-y \\ \frac{x+y}{2}=\frac{1}{2} \end{cases}$

A) {1;−7} B) {3;−2} C) {4;−3} D) {2;−5} E) {1;5}

(12) $\begin{cases} x-\frac{y-1}{2}=0 \\ \frac{x}{2}+\frac{y}{5}=2 \end{cases}$

A) {2;5} B) {4;3} C) {3;−1} D) {5;−3} E) {1;3}

(13) $\begin{cases} 2x+3y=-4 \\ 3x+7y=-1 \end{cases}$

A) {−5;−2} B) {−5;2} C) {3;−2} D) {4;−3} E) {1;−3}

(14) $\begin{cases} 5x-2y=1 \\ 3(x+y)=-12 \end{cases}$

A) {−1;3} B) {2;−4} C) {6;−3} D) {2;−3} E) {−1;−3}

(15) $\begin{cases} 2x-3y=-3 \\ 8x+3y=-7 \end{cases}$

A) $\left\{-1;\frac{1}{3}\right\}$ B) $\left\{-2;\frac{3}{2}\right\}$ C) {4;−1} D) $\left\{\frac{1}{2};\frac{1}{3}\right\}$ E) {5;1}

(16) $\begin{cases} y-x=-2 \\ y-2=-x-4 \end{cases}$

A) {3;−3} B) {2;−5} C) {4;−6} D) {0;−2} E) {3;−1}

(17) $\begin{cases} 3x-4=y \\ x=8-y \end{cases}$

A) {1;7} B) {3;−5} C) {3;5} D) {−1;7} E) {3;−1}

(18) $\begin{cases} 2x-4=-y \\ \frac{x+y}{2}=\frac{1}{2} \end{cases}$

A) {5;−3} B) {3;−2} C) {4;−3} D) {2;−5} E) {1;7}

(19) $\begin{cases} x-\frac{y-1}{2}=0 \\ \frac{x}{2}+\frac{y}{5}=2 \end{cases}$

A) {2;5} B) {4;3} C) {3;−1} D) {5;−3} E) {1;3}

(20) $\begin{cases} y=\frac{5}{3}-\frac{x}{2} \\ \frac{2x}{3}+\frac{1}{2}=y \end{cases}$

A) $\left\{1;\frac{7}{6}\right\}$ B) $\left\{2;\frac{2}{3}\right\}$ C) $\left\{\frac{1}{3};\frac{7}{2}\right\}$ D) $\left\{\frac{4}{5};\frac{2}{6}\right\}$ E) $\left\{\frac{1}{3};\frac{1}{2}\right\}$

TAREA DOMICILIARIA

(01) $\begin{cases} x-y=4 \\ 2x-y=9 \end{cases}$

A) {6;2} B) {−3;7} C) {4;−2} D) {5;1} E) {7;3}

02 $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ x + 3y = 6 \end{cases}$

A) {3;1} B) {2;-3} C) {4;-1} D) {4;-5} E) {7;2}

03 $\begin{cases} 4x = 3y - 3 \\ x + y = 1 \end{cases}$

A) {2;3} B) {-2;1} C) {6;-7} D) {4;-5} E) {0;1}

04 $\begin{cases} x + y = -1 \\ 3x + 2y = 0 \end{cases}$

A) {2;-3} B) {-2;1} C) {6;-7} D) {4;-5} E) {-2;3}

05 $\begin{cases} y - 8 = 2x \\ x + 2y = 3(y - 3) \end{cases}$

A) {1;10} B) {3;-2} C) {4;-9} D) {2;7} E) {4;7}

06 La diferencia de dos números es *14* y su suma es *52*; hallar el mayor número.

A) 13 B) 22 C) 33 D) 44 E) 35

07 La diferencia de dos números es *40* y su suma es *88*; hallar el menor número.

A) 24 B) 26 C) 62 D) 48 E) 42

08 La suma de dos números es *190* y su diferencia es "*18*". Hallar el mayor número.

A) 84 B) 104 C) 64 D) 102 E) 56

09 La suma de dos números es *1529* y su diferencia *101*. Hallar el menor número:

A) 648 B) 724 C) 812 D) 714 E) 517

10 Un cuarto de la suma de dos números es *45* y un tercio de su diferencia es *4*. Hallar los números.

A) 96 y 84 B) 12 y 48 C) 100 y 80 D) 120 y 60 E) 98 y 82

11 Un tercio de la suma de dos números es *37* y un quinto de su diferencia es *3*; hallar el mayor número.

A) 52 B) 48 C) 54 D) 61 E) 63

12 Un décimo de la suma de dos números es *15* y un sexto de su diferencia es *5*. Hallar el mayor número.

A) 90 B) 60 C) 100 D) 40 E) N.A.

13 Hallar dos números sabiendo que si uno de ellos se suma con el doble del otro se obtiene *21* y que si este último se suma con el doble del primero resulta "*18*".

A) 3,7 B) 8,6 C) 7,9 D) 6,4 E) 5,8

14 Hallar una fracción sabiendo que si se aumentan al numerador y el denominador en *3* unidades se obtiene $2/3$ y si ambos se disminuyen en *2* unidades resulta $1/2$.

A) $15/4$ B) $4/5$ C) $5/2$ D) $7/12$ E) $8/5$

15 Hallar un número sabiendo que el doble de la suma de dos números es igual al triple de su diferencia más *8* y que su semisuma es igual a su diferencia más uno.

A) 6 B) 4 C) 7 D) 5 E) 9

16 Hace 6 años Agustín era 4 veces mayor que Pedro. Hallar sus edades actuales sabiendo que dentro de 4 años solo será dos veces mayor que Pedro.

A) 11 B) 15 C) 18 D) 26 E) 25

17 Cinco cuadernos y *8* lapiceros cuestan *S/.115,3* cuadernos y *5* lapiceros cuestan *S/.70*; hallar el precio de cada cuaderno.

A) S/. 10 B) 12 C) 14 D) 15 E) 18

18 Repartir *1080* soles entre "A" y "*B*" de modo que *A* reciba *1014* más que *B*.

19 Hallar dos números enteros consecutivos cuya suma sea *103*.

20 Tres números consecutivos enteros suman *204*. Hallar los números.

21 Hallar dos números enteros pares consecutivos cuya suma sea *194*.

22 Hallar tres números enteros consecutivos cuya suma sea *186*.

23 Pagué *$325* por un caballo; un coche; y sus arreos. El caballo costo *$80* más que el coche y los arreos *$25* menos que el coche.

Hallar los precios respectivos.

CLAVES DE LA QUINTA PRACTICA

(ECUACIONES BÁSICAS I)

01) A	02) A	03) B	04) B
05) B	06) A	07) B	08) B
09) A	10) C	11) B	12) A
13) B	14) B	15) A	16) C
17) A	18) B	19) B	20) B
01) B	02) A	03) C	04) A
05) B			

CLAVES DE LA SEXTA PRACTICA

(ECUACIONES BÁSICAS II)

01) C	02) D	03) B	04) A
05) C	06) A	07) B	08) B
09) B	10) C	11) A	12) A
13) B	14) C	15) C	01) C
02) A	03) C	04) B	05) B

PROBLEMA RECREATIVO

En los tres gráficos mostrados , las balanzas se encuentran en perfecto equilibrio. ¿Cuántas tazas se necesitan para equilibrar una jarra?



Fig. 1



Fig. 2



Fig. 3



OBJETIVOS :

Al finalizar la unidad el alumno será capaz de:

* *Identificar los diferentes exponentes y el significado de cada uno de ellos .*

* *Realizar las operaciones de multiplicación y división de potencias en una misma base .*

* *Expresar un número de diferentes formas , como potencias de una cierta base .*

* *Entender que las leyes de exponentes son la base para el manejo de los distintos tipos de operaciones y artificios dentro de la matemática*

CUESTIONES PRELIMINARES

Nos introduciremos en las operaciones algebraicas, partiremos de algunos ejemplos :

Lila* tiene *4* libros y Brayan *3* libros. Si los juntáramos en un paquete tendríamos **7 libros** en total , esto se puede simbolizar , así :

4 libros+3 libros=7 libros ó 4 L+3 L=7L

* Pero si tuviéramos **4 libros** y **3 cuadernos**, y quisiéramos juntarlos en un solo paquete, sólo diríamos:

"se tiene **4 libros** y **3 cuadernos**", es decir, no podría efectuarse operación aritmética alguna, de donde se concluye que:

> * *Para adicionar o sustraer es necesario tomar elementos de un mismo conjunto.*
>
> * *Para no escribir el nombre de tal o cual objeto o cantidad de objetos, se les puede asignar ciertas letras equivalentes al nombre.*

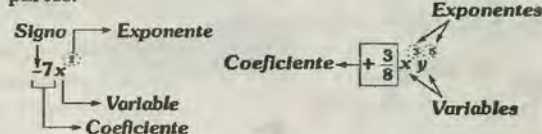
Luego del ejemplo anterior también se puede expresar de la siguiente forma:

«$4x + 3x$» y se obtendría $7x$ o en otras situaciones se tendrá: $7yx^3 + 2yx^3$ y se obtendrá $9yx^3$

* De donde , elementos del mismos conjunto como $7yx^3$ y $2yx^3$ se llaman ***"términos semejantes"***.

Término Algebraico

Es una expresión matemática que consta de tres partes:



Términos Semejantes

Son aquellos términos que poseen la(s) misma(s) variable(s) con su(s) respectivo(s) exponente(s)

EJEMPLOS :

* $5x^2 \; ; \; -\dfrac{3}{2}x^2 \; ; \; 9x^2$ → ***Son términos semejantes***

* $2y^4 \; ; -\dfrac{7}{5}x^2 \; ; \; 0{,}1a^3$ → ***No son términos semejantes***

* $7x^2y^3 \; ; \; 2y^2x^2$ ... ***"no son términos semejantes"***
  - y^3, y^2 → ***Los exponentes no son iguales***
  - x^2, x^2 → ***Los exponentes son iguales***

ADICIÓN Y SUSTRACCIÓN DE TÉRMINOS Y SEMEJANTES

Si descubrimos que dos o más términos son semejantes , estos pueden ser reducidos a uno solo , sumando o restando los coeficientes y escribiendo la misma parte literal.

EJEMPLO 1:

Reducir:

$$A = 2x^2 + 5x^2 = (2+5)x^2 = 7x^2$$

$2x^2$, $5x^2$ → ***Son términos semejantes***

NOTA :

Una manera práctica, es agrupar todos los términos

positivos, luego, los términos negativos, y al final restar ambos resultados, colocando el signo del mayor».

EJEMPLO 2 :

Simplificar: $-5x + 12x - 10x - 3x + 21x - 2x$

RESOLUCIÓN:

Negativos

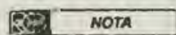
$+12x+21x-(5x+10x+3x+2x)$

$33x - 21x$

$\to 12x$

Observa cómo se han agrupado los coeficientes positivos conservando su propio signo

* Entonces la respuestas será : $12x$


NOTA

$7x^2y^3 \; : \; 5y^3x^2$

son T.S.

porque: $x^2y^3 = y^3x^2$

* El orden de los factores no alteran el producto

EJEMPLO 3 :

Reducir:

$P=-(-6x^2+3x^3-9x^2+6)+(16-10x^2-6x^3)+12x^2+11x^3$

RESOLUCIÓN:

I) Si delante del signo de colección aparece + eliminamos el signo de colección, y los signos de los términos interiores no cambian.

II) Si delante del signo de colección aparece el signo – eliminamos el signo de colección y los signos de los términos cambian.

* Luego:

$P=+6x^2-3x^3+9x^2-6+16-10x^2-6x^3+12x^2+11x^3$

$\Rightarrow P=6x^2+9x^2-10x^2+12x^2-3x^3-6x^3+11x^3-6+16$

$\Rightarrow P=(6+9-10+12)x^2+(11-3-6)x^3+16-6$

$\Rightarrow P=17x^2+2x^3+10$

$\Rightarrow$ Ya no se puede reducir porque no hay términos semejantes

EJEMPLO 4 :

Adicionar :

$$2x^2-3x-1 \text{ con } -x^2+3x+2$$

RESOLUCIÓN:

* Ordenando de acuerdo a sus términos semejantes :

$$\begin{array}{r} 2x^2-3x-1 \\ -x^2+3x+2 \\ \hline (2-1)x^2+(-3+3)x+1 \end{array} \quad (+)$$

* Lo cual es equivalente a: x^2+1

EJEMPLO 5 :

Sustraer : $5x-2$ de x^2-3x+2

RESOLUCIÓN :

* Ordenando y reduciéndo términos semejantes:

$$\begin{array}{r} x^2-3x+2 \\ 5x-2 \\ \hline x^2+(-3-5)x+2+2 \end{array} \quad (-)$$

* Lo cual es equivalente : x^2-8x+4

EJEMPLO 6 :

Simplificar :

$$-\left[-3m-\{n+[-m+(2m-n)-(-m+n)]+3n\}+4m\right]$$

RESOLUCIÓN:

*Empezaremos simplificando los términos semejantes más internos, es decir, los afectados por los paréntesis.

$=-\left[-3m-\{n+[-m+2m-n+m-n]+3n\}+4m\right]$

$=-\left[-3m-\{n+2m-2n+3n\}+4m\right]$

$=-\left[-3m-\{2m+2n\}+4m\right]$

$=-\left[-3m-2m-2n+4m\right]$

$=-\left[-m-2n\right]=m+2n$

* entonces al simplificar resulta : $m+2n$

Leyes de Exponentes

Esta unidad es importante para el estudiante porque le permite identificar, reconocer qué propiedades se pueden aplicar para solucionar un problema planteado. Además la expresión an se puede extender al caso que "n" no sea un entero positivo, siempre que el desarrollo sea consistente con las leyes de los exponentes. Es decir, los exponentes pueden ser enteros positivos o negativos o cero, números racionales o complejos.

Si el exponente en uno de los miembros de una ecuación incluye una incógnita $a^x=a^y$, donde $a>0$ y $a\neq 1$. Esta última recibe el nombre de ecuación exponencial.

Las leyes de exponentes son un conjunto de propiedades referidas a las distintas formas en que aparecen los exponentes, el significado de estos, las transformaciones y operaciones que pueden llevarse a cabo con ellos.

Los exponentes, de alguna forma, se relacionan con dos operaciones algebraicas: la potenciación y la radicación.

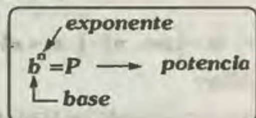
En diversas partes de la ciencia como por ejemplo : LA FÍSICA, LA QUÍMICA, LA ASTRONOMÍA ,..., etc. es muy común tratar con cantidades muy grandes o muy pequeñas como la masa de un electrón que es

equivalente a $9,1\times10^{-31}$ **kg**, o el número de avogradro el cual es : $6,02\times10^{23}$,............,etc. , por ello es de suma importancia saber operar en forma adecuada con todo tipo de exponentes .

A continuación pasaremos a detallar las leyes de exponentes y sus consecuencias

POTENCIA

Es el resultado obtenido al multiplicar un número llamado BASE, cierta cantidad de veces; esta cantidad es el EXPONENTE.



EJEMPLOS:

- $\underbrace{3\times3\times3\times3\times3}_{\text{5 veces}} = 3^5 = 243$ ⟶ Potencia (3: base; 5: Exponente)

- $\underbrace{2\times2\times2\times2}_{\text{4 veces}} = 2^4 = 16$ ⟶ Potencia (2: base; 4: Exponente)

I) EXPONENTE NATURAL :

Dada una cantidad elevada a un exponente «*n*» mayor que *1*, equivale a multiplicar «*n*» veces dicha cantidad, es decir:

$$b^n = \underbrace{b\times b\times b\times\ldots\ldots\times b}_{\text{"n" veces}} = P$$

Exponentes : $n \in \mathbb{N}$
Base : $b \in \mathbb{R}$
Potencia $P \in \mathbb{R}$

EJEMPLOS :

- $4^4 = 4\times4\times4\times4 = 256$
- $(-3)^5 = (-3)\times(-3)\times(-3)\times(-3)\times(-3) = -243$
- $\sqrt{5}^2 = \sqrt{5}\times\sqrt{5} = \sqrt{25} = 5$
- $\left(\frac{1}{7}\right)^3 = \frac{1}{7}\times\frac{1}{7}\times\frac{1}{7} = \frac{1}{343}$
- $-7^2 = -(7)^2 = -49$
- $xb^n \neq (xb)^n$; para $n \neq 1$
- $\underbrace{5\times5\times5\times\ldots\ldots\times5}_{\text{"m" veces}} = 5^m$
- $x^7 = \underbrace{x\times x\times x\times x\times x\times x\times x}_{\text{7 veces}}$
- $\underbrace{n\times n\times n\times\ldots\ldots\ldots\times n}_{\text{"2006 veces"}} = n^{2006}$
- $a\times a\times a\times a\times a\times a\times a\times a = a^8$

NOTA :

Es recomendable que se recuerde los siguientes resultados; pues, estos se presentan en determinadas ocasiones, dentro de ciertos problemas, y hay necesidad de expresarlos de la forma más adecuada.

$2^2 = 4$	$3^2 = 9$	$4^2 = 16$	$5^4 = 625$
$2^3 = 8$	$3^3 = 27$	$4^3 = 64$	$5^5 = 3125$
$2^4 = 16$	$3^4 = 81$	$4^4 = 256$	$7^2 = 49$
$2^5 = 32$	$3^5 = 243$	$4^5 = 1024$	$7^3 = 343$
$2^6 = 64$	$3^6 = 729$	$5^2 = 25$	$7^4 = 2401$
$2^7 = 128$	$3^7 = 2187$	$5^3 = 125$	
$2^8 = 256$			
$2^9 = 512$			
$2^{10} = 1024$			

- $(+)^{Par} = +$ - $(-)^{Par} = +$
- $(+)^{impar} = +$ - $(-)^{impar} = -$

Ley de Signos

1) Todo número positivo ***(+)*** elevado a un exponente "par" o "impar" es siempre positivo.

EJEMPLO:

- $(+9)^2 = +81$ - $(+4)^3 = +64$ - $(+2)^5 = +32$

2) Todo número negativo ***(–)*** elevado a un exponente "par" es siempre positivo.

EJEMPLO:

- $(-7)^2 = +49$ - $(-3)^4 = +81$
- $(-2)^6 = 64$ - $(-1)^{2008} = 1$

3) Todo número negativo ***(–)*** elevado a un exponente "impar" es siempre negativo.

EJEMPLO:

- $(-7)^3 = -343$ (impar)   - $(-6)^3 = -216$ (impar)
- $(-5)^5 = -3125$ (impar)

II) EXPONENTE UNO :

EJEMPLOS:

$\boxed{b^1 = b}$

- $\sqrt{7}^1 = \sqrt{7}$
- $2^1 + 6^1 = 2 + 6 = 8$
- $1^1 + (-1)^1 + 0^1 = 1 - 1 + 0 = 0$

III) EXPONENTE CERO :

EJEMPLOS :

$$\boxed{b^0 = 1};\ b \neq 0 \begin{cases} 13^0 = 1 \\ (-13)^0 = 1 \\ -13^0 = -1 \end{cases}$$

IV) EXPONENTE NEGATIVO :

Toda base diferente de cero elevada a un exponente negativo se convierte en fracción, cuyo numerador es uno y el denominador es la misma expresión pero con exponente positivo.

$$\boxed{b^{-n} = \frac{1}{b^n}};\ b \neq 0 \begin{cases} \bullet 5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{2}{25} \\ \bullet (-2)^{-3} = \frac{1}{(-2)^3} = \frac{1}{-8} \\ \bullet \left(\frac{3}{7}\right)^{-4} = \left(\frac{7}{3}\right)^4 \\ \bullet \left(-\frac{1}{2}\right)^{-2} = \left(-\frac{2}{1}\right)^2 = (-2)^2 = 4 \end{cases}$$

$$\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n}$$

"Se invierte la fracción"

V) MULTIPLICACIÓN DE BASES IGUALES :

Si se multiplican 2 o más bases con diferente o igual exponente se obtiene como resultado la misma ***base elevada a la suma de exponentes.***

$$a^x \times a^y = a^{\overbrace{x+y}}$$

Exponentes se suman

bases iguales

EJEMPLOS :

- $b^m \times b^n = b^{m+n}$
- $\underbrace{7^5 \times 7^7}_{\text{Bases iguales}} = 7^{5+7} = 7^{\overbrace{5+7}^{\text{Exponentes se suman}}} = 7^{12}$
- $b^4 \times b^3 = b^{4+3} = b^7$
- $w^2 \times w \times w^{-3} = w^{2+1-3} = w^0 = 1$
- $\left(\frac{7}{n}\right)^8 \times \left(\frac{7}{n}\right)^3 = \left(\frac{7}{n}\right)^{8+3} = \left(\frac{7}{n}\right)^{11}$
- $(-0,7)^6 \times (-0,7)^3 = (-0,7)^{6+3} = (-0,7)^9$
- $7^5 \times 7^2 = 7^{5+2} = 7^7$
- $3^{-3} \times 3^8 = 3^{-3+8} = 3^5$
- $x^a \times x^b \times x^c = x^{a+b+c}$
- $\boxed{a^{x+y} = a^x \times a^y}$

VI) DIVISIÓN DE BASES IGUALES :

Al dividir 2 bases diferentes de cero e iguales , con diferente o el mismo exponente , obtendremos la misma ***base elevada a la diferencia de exponentes.***

$$\frac{b^x}{b^y} = b^{x-y}$$

Diferencian de exponentes

EJEMPLOS:

$$\boxed{\frac{b^m}{b^n} = b^{m-n}};\ b \neq 0 \begin{cases} \bullet \frac{2^{13}}{2^7} = 2^{13-7} = 2^6 \\ \bullet \frac{5^{-7}}{5} = 5^{-7-1} = 5^{-8} \\ \bullet x^{n-1} = \frac{x^n}{x} \end{cases}$$

VII) POTENCIA ELEVADA A UN EXPONENTE :

Si se eleva «b^n», a otro exponente se obtiene la base ***«b», elevada al producto de ambos exponentes.***

Exponente ↓ → Exponente

$$(b^n)^m = a^{\overbrace{mn}}$$

"Exponentes se multiplican"

EJEMPLO :

$$(b^n)^m = b^{mn} \begin{cases} (a^2)^3 = a^{2\times3} = a^6 \\ \left[(x^3)^4\right]^2 = x^{3\times4\times2} = x^{24} \\ (b^n)^m = (b^m)^n = b^{mn} \end{cases}$$

VIII) POTENCIA DE UNA MULTIPLICACIÓN :

Si elevamos una multiplicación indicada de 2 ó más números a un exponente, este afecta a cada número que interviene.

EJEMPLOS:

$$(ab)^n = a^n \times b^n \begin{cases} \bullet (3x)^2 = 3^2 \times x^2 = 9x^2 \\ \bullet (xyz)^a = x^a \times y^a \times z^a \\ \bullet -2^m y^m = -(2y)^m \end{cases}$$

- $(2x^3y^5)^2 = 2^2(x^3)^2(y^5)^2 = 4x^6y^{10}$
- $(3ab^3)^5 = 243a^5b^{15}$
- $(-5x^2y^6)^3 = (-5)^3(x^2)^3(y^6)^3 = -125x^6y^{18}$

IX) POTENCIA DE UNA FRACCIÓN :

Si una fracción se eleva a un exponente, este afectará al numerador y al denominador.

EJEMPLOS :

$$\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}}\ ;\ b\neq 0\begin{cases}*\ \dfrac{12^3}{4^3}=\left(\dfrac{12}{4}\right)^3=3^3=27\\ *\ \dfrac{5^7}{x^7}=\left(\dfrac{5}{x}\right)^7\end{cases}$$

Observación:

$$b^{m^{n^{p}}}=b^{m^{n^{p}}}=b^{m^{x}}=b^{y}$$

«Se toma de arriba hacia abajo tomando a los exponentes de 2 en 2»

EJEMPLOS :

- $5^{2^{3^{0^1}}}=5^{2^{3^0}}=5^{2^1}=5^2=25$
- $2^{2^{2^{3^{0^5}}}}=2^{2^{2^{3^0}}}=2^{2^{2^1}}=2^{2^2}=2^4=16$

INTRODUCCIÓN A LA RADICACIÓN

El acontecer histórico radicación se remonta a la necesidad del hombre de hallar valores a partir de la Potenciación.

Por ejemplo ahora es fácil operar y resolver lo siguiente: $17^2=x$

El valor de «x» se encuentra fácilmente usando la definición de Potencia, por lo tanto $x=289$. Veamos otro caso: $y^7=128$, ahora nos piden hallar la base «y»; a esta operación, que es una de las operaciones inversas de la Potenciación se le conoce como Radicación.

En conclusión la Radicación es una de las operaciones inversas de la Potenciación que tiene por finalidad hallar la base, dado el exponente y la potencia.

RADICACIÓN

En general:

Si: $\underbrace{a\times a\times a\times a\times\ldots\ldots\times a}_{\text{"m" factores}}=a^m$

* En radicación:

$$\sqrt[m]{N}=a\Leftrightarrow a^m=N$$

- a: *raíz*
- N: *radicando ó cantidad sub-radical*
- $\sqrt{\ }$: *símbolo radical*
- m: *índice de la raíz*

DEFINICIÓN:

La radicación es aquella operación matemática en la cual, dados dos números llamados cantidad subradical e índice, se requiere encontrar otro número llamado raíz.

EJEMPLOS:

* $\sqrt[3]{64}=4$; porque $4^3=64$
* $\sqrt{25}=5$; porque $5^2=25$
* $\sqrt[11]{2048}=2$; porque $2^{11}=2048$

X) POTENCIA DE EXPONENTE FRACCIONARIO :

$$\boxed{a^{m/n}=\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[n]{a}^{\,m}}\ ;n\geq 2$$

"El denominador del exponente se convierte en el índice de la raíz".

EJEMPLOS:

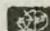
- $7^{1/2}=\sqrt{7}$
- $11^{3/4}=\sqrt[4]{11^3}$
- $b^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{b^2}$
- $2^{\frac{4}{5}}=\sqrt[5]{2^4}=\sqrt[5]{16}$
- $b^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{b}$
- $3^{\frac{1}{2}}=\sqrt[2]{3^1}=\sqrt{3}$
- $\sqrt[n]{b^n}=b$
- $\sqrt[n]{b^m}=\sqrt[n]{b}^{\,m}$
- $\sqrt[n\,k]{b^{m\,k}}=\sqrt[n]{b^m}$
- $\sqrt[12]{2^{18}}=\sqrt{2^3}$

 NOTA

Las potencias de exponente fraccionario siguen verificando las propiedades de los exponentes enteros.

EJEMPLOS:

* $3^{1/3}\times 3^{1/4}=3^{1/3+1/4}=3^{\frac{7}{12}}=\sqrt[12]{3^7}$
* $2^{-1/2}=\dfrac{1}{2^{1/2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$
* $(-9)^{-1/2}=\dfrac{1}{(-9)^{1/2}}=\dfrac{1}{\sqrt{-9}}$ } *Para este caso no tiene solución*
* $25^{-1/2}=\dfrac{1}{25^{1/2}}=\dfrac{1}{\sqrt{25}}=\dfrac{1}{5}$

 NOTA

Cuando el índice es 2, es usual escribir $\sqrt{a}$ en lugar de $\sqrt[2]{a}$ y llamar a $\sqrt{a}$ la raíz cuadrada de a. Al número $\sqrt[3]{a}$ se le llama la raíz cúbica de a.

OBSERVACION:

$\sqrt[3]{-8}=-2$

$\sqrt{-4}$ = No existe en el campo de los reales.

Además: *positivo*



$*\quad \sqrt[impar]{+a}=+r$

negativo



$*\quad \sqrt[impar]{-a}=-r$

$\sqrt[par]{+a}=+r$

$*\quad \sqrt[par]{-a}=$ | No existe en el conjunto de los $\mathbb{R}$

EJEMPLOS:

$\sqrt{-9}\,;\ \sqrt[4]{-3}\,;\ \sqrt[8]{-3000}\,;....;\ \sqrt[2n]{(-)}$ no están definidas en $\mathbb{R}$ (no existen)

XI) RAÍZ DE UN PRODUCTO :

Si tenemos la raíz de un producto, dicha raíz afecta a cada factor, así:

$$\sqrt[m]{a\times b}=\sqrt[m]{a}\times\sqrt[m]{b}$$

EJEMPLOS:

- $\sqrt[3]{27a}=\sqrt[3]{27}\times\sqrt[3]{a}=3\sqrt[3]{a}$
- $\sqrt[5]{16}\times\sqrt[5]{2}=\sqrt[5]{16\times 2}=\sqrt[5]{32}=2$
- $\sqrt[5]{7^{10}\times 3^{6}}=\sqrt[5]{7^{10}}\times\sqrt[5]{3^{6}}=7^{\frac{10}{5}}\times 3^{\frac{6}{5}}=49\times 3^{\frac{6}{5}}$
- $\sqrt[3]{x^{6}\times y^{9}}=\sqrt[3]{x^{6}}\times\sqrt[3]{y^{9}}=x^{\frac{6}{3}}\times y^{\frac{9}{3}}=x^{2}\times y^{3}$
- $\sqrt[3]{2}\times\sqrt[3]{4}=\sqrt[3]{2\times 4}=\sqrt[3]{8}=2$
- $\sqrt[5]{3}\times\sqrt[5]{2}\times\sqrt[5]{7}=\sqrt[5]{3\times 2\times 7}=\sqrt[5]{42}$

XII) RAÍZ DE UN COCIENTE :

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\ ;\ b\neq 0$$

EJEMPLOS:

- $\sqrt[4]{\frac{81}{256}}=\frac{\sqrt[4]{81}}{\sqrt[4]{256}}=\frac{3}{4}$
- $\frac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{2}}=\sqrt[3]{\frac{16}{2}}=\sqrt[3]{8}=2$
- $\sqrt{\frac{9}{49}}=\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{49}}=\frac{3}{7}$

XII) RAÍZ DE RAÍZ :

Si a un número le afectan sucesivamente varios índices, entonces dichos índices se multiplican, así:

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[mn]{a}$$

EJEMPLOS:

- $\sqrt{\sqrt{\sqrt{x^{16}\times y^{8}}}}=\sqrt[2\times 2\times 2]{x^{16}\times y^{8}}=\sqrt[8]{x^{16}\times y^{8}}=\sqrt[8]{x^{16}}\times\sqrt[8]{y^{8}}$
- $\sqrt[2]{\sqrt[7]{2}}=\sqrt[2\times 7]{2}=\sqrt[14]{2}$
- $\sqrt[2]{\sqrt[3]{x}}=\sqrt[6]{x}$
- $\sqrt[4m]{b}=\sqrt[4]{\sqrt[m]{b}}$
- $\sqrt[abc]{y}=\sqrt[a]{\sqrt[b]{\sqrt[c]{y}}}$
- $\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt{4096}}}=\sqrt[2\times 3\times 2]{4096}=\sqrt[12]{12^{12}}=2$

XIV) POTENCIA DE UNA RAÍZ :

$$\sqrt[n]{a^{m}}=\sqrt[n]{a}^{\,m}=\left(\sqrt[n]{a}\right)^{m}$$

EJEMPLOS:

- $\sqrt{49^{3}}=\sqrt{49}^{\,3}=7^{3}=343$
- $\sqrt[3]{8^{5}}=\sqrt[3]{8}^{\,5}=2^{5}=32$
- $\sqrt[3]{x^{7}}=\sqrt[3]{x^{6}\cdot x}=x^{2}\sqrt[3]{x}$

CONSECUENCIAS :

A) $\sqrt[n]{a\sqrt[m]{b}}=\sqrt[n]{a}\,\sqrt[mn]{b}$

B) $a\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a^{n}b}$

C) $\sqrt[n]{x^{a}\sqrt[m]{x^{b}\sqrt[p]{x^{c}}}}=x^{\frac{(am+b)p+c}{nmp}}$ (× + × +)

$\sqrt{b^{5}\sqrt[3]{b^{7}}}=b^{\frac{5\times 3+7}{2\times 3}}=b^{\frac{22}{6}}=b^{\frac{11}{3}}$

D) $\sqrt[n]{a^{\sqrt[m]{b^{\sqrt[p]{c}}}}}=\sqrt[n]{a}^{\sqrt[m]{b}^{\sqrt[p]{c}}}$

Operaciones Combinadas

En este tema, tendremos en consideración la «JERARQUÍA DE OPERACIONES» el orden de resolución para cada operación planteada.

EJEMPLO:

si queremos resolver lo siguiente:

$$E = -6 + 7 \times 2 - 3^2 + 2 \times 5 - 21 \div 7$$

Tenemos que hacerlo siguiendo un orden:

Primero:	Se efectúan las potencias y/o raíces.
Segundo:	Se efectúan las multiplicaciones y divisiones
Tercero:	Se efectúan las adiciones y sustracciones.

El resultado final será: $E = 6$

Ah!!... y además hay que considerar los signos de colección:

( ) Paréntesis ; [ ] Corchetes ; { } Llaves

* Así, el orden sugerido para efectuar operaciones combinadas es:

1ro: Signos de colección ( ), [ ], { }

2do: Potencias y raíces $(...)^n$; $\sqrt[n]{...}$

3ro: Multiplicación y división; × ; ÷

4to: Adición y sustracción: + ; −

Recordemos: $4 + 3 = 3 + 4 = 7$

* Para sumar dos números positivos se suman en forma usual : $-5 - 3 = -3 - 5 = -(3 + 5)$

* Para sumar dos números negativos se conserva el signo menos y los números se suman.

$$-6 + 3 = 3 - 6 = -(6 - 3) = -3$$

* Para sumar un número positivo con un negativo se conserva el signo del mayor número y luego se resta el mayor menos el menor.

$$\underbrace{5 \times 4} \div (-2) \div (-5) \times 3$$
$$\underline{20 \div (-2)} \div (-5) \times 3$$
$$\underline{-10 \div (-5)} \times 3$$
$$\underline{2 \times 3}$$
$$6$$

* Para efectuar una operación combinada de divisiones y multiplicaciones se procede de izquierda a derecha.

$$B = \left\{\left[20 \div \underline{(10-15)} + 2\right] - \left[15 \div \underline{(7-10)}\,\underline{(-2+5)}\right]\right\}$$

$$B = \left\{\left[\underline{20 \div (-5)} + 2\right] - \left[\underline{15 \div (-3)} \times (3)\right]\right\}$$

$$B = \left\{\left[\underline{-4 + 2}\right] - \left[\underline{(-5) \times (3)}\right]\right\}$$

$$\Rightarrow B = \{-2 - (-15)\} = 13$$

EXPRESIONES CON OPERACIONES QUE SE REPITEN INDEFINIDAMENTE

Son aquellas expresiones en donde las operaciones se repiten un número ilimitado de veces y a las que se les puede atribuir una regla de formación.

Algunas de ellas son:

* $x = \sqrt[n]{a^m \sqrt[n]{a^m \sqrt[n]{a^m ....\ \infty\ radicales}}} \Rightarrow x = \sqrt[n-1]{a^m}$

* $x = \sqrt[n]{a^m + \sqrt[n]{a^m + \sqrt[n]{a^m ...\infty\ radicales}}} \Rightarrow x = \sqrt[n+1]{a}$

* $x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{x^n}}}}} = n \Rightarrow x = \sqrt[n]{n}$

* $x = \sqrt[a]{a}^{\sqrt[a]{a}^{\sqrt[a]{a}^{\cdot^{\cdot^{\infty}}}}} \Rightarrow x = a$

* $x = \sqrt[a]{b}^{\sqrt[b]{a}^{\sqrt[a]{b}^{\sqrt[b]{a}^{\cdot^{\cdot^{\infty}}}}}} \Rightarrow x = b$

formas indeterminadas $: 0^0 ; \frac{0}{0} ; 0 \times \infty ; 1^\infty ; \frac{\infty}{\infty} ; \infty - \infty$

* $x = \sqrt{n(n+1) + \sqrt{n(n+1) + \sqrt{n(n+1) + ...\infty\ radicales}}} \Rightarrow x = n + 1$

* $x = \sqrt{n(n+1) - \sqrt{n(n+1) - \sqrt{n(n+1) - ....\infty\ radicales}}} \Rightarrow x = n$

 NOTA

I) $\sqrt[m]{a \sqrt[m]{a \sqrt[m]{a .... "n"\ radicales}}} = \sqrt[m^n]{\frac{m^n - 1}{a^{m-1}}}$

II) $\sqrt[m]{a + \sqrt[m]{a + \sqrt[m]{a + ..."n"\ radicales}}} = \sqrt[m^n]{\frac{m^n - 1}{a^{m+1}}}$; si "n" es par

III) $\sqrt[m]{a + \sqrt[m]{a + \sqrt[m]{a + ..."n"\ radicales}}} = \sqrt[m^n]{\frac{m^n + 1}{a^{m+1}}}$; si "n" es impar

NOTACIÓN CIENTÍFICA

La notación científica (o **notación índice estándar**) es un modo conciso de representar un número utilizando potencias de base diez. Los números se escriben como un producto: $a \times 10^n$, (siendo a un número mayor o igual que *1* y menor que *10*, y *n* un número entero). Esta notación se utiliza para poder expresar facilmente números muy grandes o muy pequeños.

La notación científica utiliza un sistema llamado coma flotante, o de punto flotante en países de habla inglesa y en algunos hispanohablantes.

El primer intento de representar números demasiados grandes fue emprendida por el matemático y filósofo griego Arquímedes, descrita en su obra *El contador de Areia* en el siglo ***III a.C.*** Ideó un sistema de representación numérica para estimar cuántos granos de arena existían en el universo. El número estimado

por él era de 10^{63} granos. Nótese la coincidencia del exponente con el número de casilleros del ajedrez sabiendo que para valores positivos , el exponente es $n-1$ donde n es el número de dígitos, siendo la última casilla la **Nº 64** el exponente sería **63** (hay un antiguo cuento del tablero de ajedrez en que al último casillero le corresponde – **2** elevado a la **63** granos).

A través de la notación científica fue concebido el modelo de representación de los números reales mediante coma flotante. Esa idea fue propuesta por Leonardo Torres Quevedo ***(1914)***, Konrad Zuse ***(1936)*** y George Robert Stibitz ***(1939)***.

ESCRITURA :

- $10^0 = 1$
- $10^1 = 10$
- $10^2 = 100$
- $10^3 = 1\,000$
- $10^4 = 10\,000$
- $10^5 = 100\,000$
- $10^6 = 1\,000\,000$
- $10^9 = 1\,000\,000\,000$
- $10^{10} = 10\,000\,000\,000$
- $10^{20} = 100\,000\,000\,000\,000\,000\,000$
- $10^{30} = 1\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000$

10 elevado a una potencia entera negativa $-n$ es igual a $1/10^n$ o, equivalentemente ***0, (n–1 ceros) 1***:

- $10^{-1} = 1/10 = 0{,}1$
- $10^{-3} = 1/1000 = 0{,}001$
- $10^{-9} = 1/1\,000\,000\,000 = 0{,}000\,000\,001$

Por tanto, un número como: ***156 234 000 000 000 000 000 000 000 000*** puede ser escrito como $1{,}56234\times10^{29}$,

y un número pequeño como ***0,000 000 000 023 4*** puede ser escrito como $2{,}34\times10^{-11}$

USOS :

Por ejemplo, la distancia a los confines observables del universo es $4{,}6\times10^{26}m$ y la masa de un protón es $1{,}67\times10^{-27}$ kilogramos. La mayoría de las calculadoras y muchos programas de computadora presentan resultados muy grandes y muy pequeños en notación científica; los números **10** generalmente se omiten y se utiliza la letra ***E*** para el exponente; por ejemplo: ***1,56234 E29***. Nótese que esto no está relacionado con la base del logaritmo natural también denotado comúnmente con la letra ***e***.

La notación científica es altamente útil para anotar cantidades físicas, pues pueden ser medidas solamente dentro de ciertos límites de error y al anotar sólo los dígitos significativos se da toda la información requerida sin malgastar espacio.

Para expresar un número en notación científica debe expresarse en forma tal que contenga un dígito (el más significativo) en el lugar de las unidades, todos los demás dígitos irán entonces después del separador decimal multiplicado por el exponente de **10** respectivo.

EJEMPLO S:

* ***238294360000 = 2,3829436E11***
* ***0,000312459 = 3,12459E – 4.***

OPERACIONES MATEMÁTICAS CON NOTACIÓN CIENTÍFICA

SUMA Y RESTA :

Siempre que las potencias de **10** sean las mismas, se debe sumar las mantisas, dejando la potencia de **10** con el mismo grado (en caso de que no tengan el mismo exponente, debe convertirse la mantisa multiplicándola o dividiéndola por **10** tantas veces como sea necesario para obtener el mismo exponente):

EJEMPLO:

* $1\times10^4 + 3\times10^4 = 4\times10^4$
* $2\times10^4 + 3\times10^5 = 0{,}2\times10^5 + 3\times10^5 = 3{,}2\times10^5$

Para sumar y restar dos números (o más) debemos tener el mismo exponente en las potencias de base diez. Tomamos como factor común el mayor y movemos la coma flotante, en los menores, tantos espacios como sea necesario, elevando los correspondientes exponentes hasta que todos sean iguales.

EJEMPLO:

$2\times10^4 + 3\times10^5 - 6\times10^3$ (tomamos el exponente **5** como referencia)

$0{,}2\times10^5 + 3\times10^5 - 0{,}06\times10^5 = 3{,}14\times10^5$

entonces la notacion científica es una manera de recoger todos los ***0*** en una base ***0***

MULTIPLICACIÓN :

Se multiplican los coeficientes y se suman a la vez los exponentes:

EJEMPLO:

$$(4\times10^5)\times(2\times10^7) = 8\times10^{12}$$

DIVISIÓN :

Se dividen las mantisas y se restan los exponentes (numerador denominador):

EJEMPLO:

$$(4\times10^{12})\div(2\times10^5) = 2\times10^7$$

Además se pueden pasar los dos números al mismo

exponente y luego nada más multiplicar.

DISCREPANCIA DE NOMENCLATURA

A pesar que la notación científica pretende establecer pautas firmes sobre la referencia numérica en materia científica, se presentan discrepancias de lenguaje.

Por ejemplo en EE.UU. 10^9 se denomina «*billion*». Para los países de habla hispana 10^9 es *mil millones* o *millardo* (del francés *millard*) y el *billón* se representa 10^{12}. Llegamos a un caso práctico donde para los estadounidenses *one billion dollars*, para los hispanohablantes será *un millardo de dólares* (poco usado) o *mil millones de dólares* (más usado).

Otra particularidad del mundo hispano es que a 10^4 (10 000), se le denomina miríada. No obstante para 10 000 se usa *diez mil* como uso frecuente y miríada cuando se quiere hacer notar el diez mil como «muchísimo» respecto a una comparación con algo cuantificable que elevó su cuenta significativamente, sin que esta uso tenga fundamento científico sino de *costumbres*.

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1:

Calcule: $E=\left[27\left(\frac{3}{5}\right)^{-1}+\left(\frac{3}{4}\right)^{-2}+\left(\frac{9}{20}\right)^{-1}\right]^{0,5}$

RESOLUCIÓN:

* Por propiedad del exponente negativo, se tiene:

$$E=\left[27\left(\frac{5}{3}\right)+\left(\frac{4}{3}\right)^2+\frac{20}{9}\right]^{\frac{1}{2}}\Rightarrow E=\left(\frac{27}{3}\times 5+\frac{16}{9}+\frac{20}{9}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow E=\left(9\times 5+\frac{16+20}{9}\right)^{\frac{1}{2}}\Rightarrow E=(45+4)^{\frac{1}{2}}\Rightarrow E=49^{\frac{1}{2}}=E=7$$

PROBLEMA 2 :

Calcule:

$$E=\left[\left(0,\widehat{3}\right)\right]^{-3}+\left(\frac{2}{5}\right)^{-2}+\left(\frac{4}{23}\right)^{-1}+10\Bigg]^{0,5}$$

RESOLUCIÓN:

* Al igual que el anterior , por propiedades , resulta:

$$E=\left[\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}+\left(\frac{5}{2}\right)^2+\frac{23}{4}+\right]^{\frac{1}{2}}\Rightarrow E=\left(3^3+\frac{25}{4}+\frac{23}{4}+10\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow E=(27+12+10)^{\frac{1}{2}}=(49)^{\frac{1}{2}}\Rightarrow E=7$$

PROBLEMA 3 :

Si: $x^{x^x}=3$, hallar el valor de: $E=x^{x^{x+x^x}}$

RESOLUCIÓN:

Por propiedad, se tiene que:

$$E=x^{x^x x^{x^x}}\Rightarrow E=\left(x^{x^x}\right)^{x^{x^x}}\Rightarrow E=(3)^3=27$$

PROBLEMA 4 :

Simplificar:

$$A=(\underbrace{b^2\times b^2\times b^2......\times b^2}_{12\ veces})^8\times(\underbrace{b^3\times b^3\times b^3......\times b^3}_{15\ veces})^7$$

A) b^{124} B) b^{150} C) b^{162} D) b^{362} E) b^{240}

RESOLUCIÓN:

* En la expresión:

$$(\underbrace{b^2\times b^2\times b^2\times..........\times b^2}_{12\ veces})=(b^2)^{12}=b^{24}$$

$$(\underbrace{b^3\times b^3\times b^3\times.........\times b^3}_{15\ veces})=(b^3)^{15}=b^{45}$$

* Luego:

$$A=(b^{24})^3\times(b^{45})^2=b^{72}\times b^{90}$$

$$\Rightarrow A=b^{72+90}\Rightarrow A=b^{162}$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 5 :

Reducir: $B=\underbrace{a^5b^4\times a^5b^4\times a^5b^4..........\times a^5b^4}_{25\ términos}$

señale la suma de los exponentes finales de «*a*» y «*b*»

A) 225 B) 92 C) 70
D) 285 E) 950

RESOLUCIÓN:

* En la expresión:

$$B=\underbrace{a^5b^4\times a^5b^4\times a^5b^4..........\times a^5b^4}_{25\ términos}$$

* Ordenando:

$$B=\underbrace{a^5\times a^5\times a^5..........\times a^5}_{25\ términos}\times\underbrace{b^4\times b^4\times b^4.....\times b^4}_{25\ términos}$$

* Tenemos que:

$$I)\ (\underbrace{a^5\times a^5\times a^5..........a^5}_{25\ términos})=(a^5)^{25}=a^{125}$$

$$II)\ (\underbrace{b^4\times b^4..........\times b^4}_{25\ términos})=(b^4)^{25}=b^{100}$$

* Luego: $B=a^{125}\times b^{100}\Rightarrow 125+100=225$

RPTA : "A"

PROBLEMA 6 :

Siendo:

$$L=\underbrace{x^3\times x^3........\times x^3}_{20\ veces}\qquad A=\underbrace{x^4\times x^4.........\times x^4}_{15\ veces}$$

$$R=\underbrace{x^{-2}\times x^{-2}........\times x^{-2}}_{20\ veces}\qquad T=\underbrace{x^{-1}\times x^{-1}........\times x^{-1}}_{40\ veces}$$

Simplificar : $L - A + R - T$

A) 1 B) x^{-2} C) x^{4}
D) 0 E) x^{6}

RESOLUCIÓN :

* Trabajando por partes:

$$L = \underbrace{x^3 \times x^3 .... \times x^3}_{20\ veces} = (x^3)^{20} = x^{60}$$

$$A = \underbrace{x^4 \times x^4 .... \times x^4}_{15\ veces} = (x^4)^{15} = x^{60}$$

$$R = \underbrace{x^{-2} \times x^{-2} .... \times x^{-2}}_{20\ veces} = (x^{-2})^{20} = x^{-40}$$

$$T = \underbrace{x^{-1} \times x^{-1} .... \times x^{-1}}_{40\ veces} = (x^{-1})^{40} = x^{-40}$$

* Luego lo pedido será :

$$x^{60} - x^{60} + x^{-40} - x^{-40} = 0$$

RPTA : "D"

PROBLEMA 7 :

Expresar: $7^7 \times 3^7 \times 21^8$, Como potencia de 21

RESOLUCIÓN :

* Como «7» y «3» tienen igual exponente luego se tendrá:

$$(7 \times 3)^7 \times 21^8 = 21^7 = 21^8 = 21^{7+8} = 21^{15}$$

PROBLEMA 8 :

Calcular el valor de : $S = \dfrac{15^6 \times 12^4 \times 5^9 \times 6^3}{10^{11} \times 3^{13} \times 5^4}$

A) 2 B) 3 C) 5
D) 15 E) 1

RESOLUCIÓN :

* En este problema se usará:

$$\boxed{(a \times b)^n = a^n \times b^n} \quad y \quad \boxed{(a^m)^n = a^{m \times n}}$$

* Previamente, transformando a factores primos

$$S = \frac{(3 \times 5)^6 (2^2 \times 3)^4 (5)^9 (2 \times 3)^3}{(2 \times 5)^{11} \times 3^{13} \times 5^4}$$

* Utilizando las leyes:

$$S = \frac{3^6 \times 5^6 \times 2^8 \times 3^4 \times 5^9 \times 2^3 \times 3^3}{2^{11} \times 5^{11} \times 3^{13} \times 5^4}$$

* Efectuando operaciones:

$$S = \frac{3^{6+4+3} \times 5^{6+9} \times 2^{8+3}}{2^{11} \times 5^{11+4} \times 3^{13}}$$

* También: $S = \dfrac{2^{11} \times 3^{13} \times 5^{15}}{2^{11} \times 3^{13} \times 5^{15}}$

* Simplificando, se obtiene: $S = 1$

RPTA : "E"

PROBLEMA 9 :

Simplificar: $T = \dfrac{15^4 \times 14^9 \times 30^3}{21^6 \times 35^3 \times 80^3}$

A)5 B)3 C)15
D)20 E)40

RESOLUCIÓN :

* Descomponiendo: 15 ; 14 ; 30 ; 21 ; 35 y 80

$$T = \frac{(3 \times 5)^4 (2 \times 7)^9 (2 \times 3 \times 5)^3}{(3 \times 7)^6 (5 \times 7)^3 (4^2 \times 5)^3}$$

$$\Rightarrow T = \frac{3^4 \times 5^4 \times 2^9 \times 7^9 \times 2^3 \times 3^3 \times 5^3}{3^6 \times 7^6 \times 5^3 \times 7^3 \times 4^6 \times 5^3}$$

$$\Rightarrow T = \frac{2^{12} \times 3^7 \times 5^7 \times 7^9}{2^{12} \times 3^6 \times 5^6 \times 7^6} \Rightarrow T = 15$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 10 :

Calcule: $E = 64^{9^{-4^{-2^{-1}}}}$

RESOLUCIÓN:

Aplicando sucesivamente propiedades y desarrollando de arriba hacia abajo:

Entonces: $E = 4$

PROBLEMA 11 :

Calcule: $E = 27^{-9^{-4^{-2^{-1}}}}$

RESOLUCIÓN:

$$2^{-1} = \frac{1}{2} \Rightarrow E = 27^{-9^{-4^{-\frac{1}{2}}}}$$

$$4^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow E = 27^{-9^{\frac{-1}{2}}}$$

$$9^{\frac{-1}{2}} = \frac{1}{3} \Rightarrow E = \frac{1}{3}$$

PROBLEMA 11 :

Simplificar:

$$P = \frac{7^{2m+1} + 49^{m+1}}{49^{m+1} - 7^{2m+1}}$$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 7 E) $\dfrac{4}{3}$

RESOLUCIÓN:

* Descomponiendo:

$$P=\frac{7^{2m}\times 7+49^m\times 49^1}{49^m\times 49^1-7^{2m}\times 7}\quad (7^2)^m=49^m$$

$$\Rightarrow P=\frac{49^m\times 7+49^m\times 49^1}{49^m\times 49^1-49^m\times 7}$$

* Factorizando « 49^m »:

$$\Rightarrow P=\frac{49^m(7+49)}{49^m(49-7)}\Rightarrow P=\frac{56}{42}=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}$$

RPTA : "E"

PROBLEMA 12 :

Simplificar:

$$R=\left[2-\left(\frac{3}{5}\right)^{-1}\right]^{-2}+\left[\left(\frac{1}{5}\right)^2+\left(\frac{5}{2}\right)^{-2}\right]^{-2}$$

A) 2 B) 4 C) 6 D) 41 E) 10

RESOLUCIÓN :

* Empezando por las partes internas:

$$R=\left[2-\frac{5}{3}\right]^{-2}+\left[\frac{1}{25}+\left(\frac{2}{5}\right)^2\right]^{-2}$$

$$\Rightarrow R=\left(\frac{6-5}{3}\right)^{-2}+\left[\frac{1}{25}+\frac{4}{25}\right]^{-2}$$

$$\Rightarrow R=\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}+\left(\frac{5}{25}\right)^{-2}=3^2+5^2=41$$

RPTA : "D"

PROBLEMA 13 :

Calcular el valor de la expresión:

$$M=\frac{2^{n+3}\times 7^{2n+1}-2^{n+1}\times 7^{2n}}{2^{n+5}\times 7^{2n}-2^{n+1}\times 7^{2n+1}}$$

A) 1 B) 2^n C) 7^n
D) 2 E) 3

RESOLUCIÓN :

* En la solución, de este ejercicio, utilizaremos la primera ley, que es:

$$a^{m+n}=a^m\times a^n$$

* En efecto se tiene :

$$M=\frac{2^n\times 2^3\times 7^{2n}\times 7^1-2^n\times 2^1\times 7^{2n}}{2^n\times 2^5\times 7^{2n}-2^n\times 2^1\times 7^{2n}\times 7^1}$$

* Extrayendo factor común en el numerador y denominador :

$$M=\frac{2^n\times 7^{2n}(2^3\times 7^1-2^1)}{2^n\times 7^{2n}(2^5-2\times 7)}$$

* Simplificando y efectuando operaciones:

$$M=\frac{56-2}{32-14}=\frac{54}{18}=3$$

RPTA : "E"

PROBLEMA 14 :

Calcular : $\dfrac{27^4\times 16^2}{18^6}$

A) 9 B) 8 C) 16 D) 1 E) 4

RESOLUCIÓN:

* Tratemos de formar bases iguales :

$$\frac{(3^3)^4+(2^4)^2}{(2\times 3^2)^6}=\frac{3^{12}\times 2^8}{2^6\times 3^{12}}=\frac{2^8}{2^6}=2^2=4$$

RPTA : "E"

PROBLEMA 15 :

Calcular:

$$E=\frac{10^4\times 30^2\times 42^3}{12\times 20\times 35^2\times 125\times 216}$$

A) 1 B) 2 C) 6 D) 126 E) 252

RESOLUCIÓN:

* Tratando de formar bases iguales, se obtendrá :

$$E=\frac{(2\times 5)^4\times(2\times 3\times 5)^2\times(2\times 3\times 7)^3}{2^2\times 3\times 2^2\times 5\times(5\times 7)^2\times 5^3\times(2\times 3)^3}$$

$$=\frac{2^4\times 5^4\times 2^2\times 3^2\times 5^2\times 2^3\times 3^3\times 7^3}{2^2\times 3\times 2^2\times 5\times 5^2\times 7^2\times 5^3\times 2^3\times 3^3}$$

$$E=\frac{2^9\times 5^6\times 3^5\times 7^3}{2^7\times 5^6\times 7^2\times 3^3}=2^2\times 3^2\times 7=252$$

RPTA : "E"

PROBLEMA 16 :

Reducir: $E=\dfrac{3^{x+1}+3^{x+2}+3^{x+3}+3^{x+4}}{3^{x-1}+3^{x-2}+3^{x-3}+3^{x-4}}$

RESOLUCIÓN:

Notamos que el menor exponente de 3 en el numerador es: $x+1$ y el menor exponente en el denominador es: $x-4$; luego descomponiendo en bases iguales y sacando factor común se tiene:

$$E=\frac{3^{x+1}+3^{x+1}3^1+3^{x+1}3^2+3^{x+1}3^3}{3^{x-4}3^3+3^{x-4}3^2+3^{x-4}3+3^{x-4}}=\frac{3^{x+1}\left(1+3+3^2+3^3\right)}{3^{x-4}\left(3^3+3^2+3+1\right)}$$

Aplicando la propiedad $\dfrac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$ resulta:

$$E=3^{x+1-(x-4)}=3^5=243$$

PROBLEMA 17 :

Simplifique: $E=\sqrt[2n+3]{\dfrac{225^{2n+4}}{5^{2n+5}\times 4+25^{n+3}}}$

RESOLUCIÓN:

$225=3^2\times 5^2$; $25=5^2$ *Aplicando la propiedad* $\left(a^m\, b^n\right)^p=a^{mp}\times b^{np}$ *, resulta:*

$$E=\sqrt[2n+3]{\frac{5^{4n+8}3^{4n+8}}{5^{2n+5}\times 4+5^{2n+5}5}}=\sqrt[2n+3]{\frac{5^{4n+8}3^{4n+8}}{5^{2n+5}(4+5)}}$$

$$=\sqrt[2n+3]{\frac{5^{4n+8}3^{4n+8}}{5^{2n+5}3^{2}}}$$

* Aplicando la propiedad $\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$ resulta :

$$E=\sqrt[2n+3]{5^{2n+3}3^{2(2n+3)}}$$

Aplicando la propiedad :

$$\sqrt[n]{a^m b^p}=\sqrt[n]{a^m}\times\sqrt[n]{b^p}=a^{\frac{m}{n}}b^{\frac{p}{n}},$$

resulta: $E=5\times 3^2=45$

PROBLEMA 18 :

Simplifique: $E=\sqrt[2^{2^{n+1}}]{\sqrt[2^{2^n}]{\sqrt[2^2]{625^{8^{2^n}}}}}$

RESOLUCIÓN:

Aplicando propiedad $\sqrt[m]{\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}}}=\sqrt[m\times n\times p]{a}$ resulta

$$E=\sqrt[2^{2^{n+1}}2^{2^n}2^2]{625^{8^{2^n}}}$$

* En el índice :

$$2^{2^{n+1}}2^{2^n}4=2^{2^{n+1}+2^n}4=2^{2^n2+2^n}4$$

$$=2^{3\times 2^n}4=\left(2^3\right)^{2^n}4=8^{2^n}4$$

Aplicando propiedad $\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$ resulta

$$E=625^{\frac{8^{2^n}}{8^{2^n}4}}=625^{\frac{1}{4}}=5$$

PROBLEMA 19 :

Dadas las expresiones:

$$*P=\sqrt[x^x]{x^{x^{2x}}+x^{2x+x^x}}$$

$$*Q=\sqrt[x^{2x}]{x^{x^{3x}}+x^{3x+x^x}}$$

$$*R=\sqrt[x^{3x}]{x^{x^{4x}}+x^{4x+x^x}}$$

Si $x^{x^x}=3$; entonces , ¿a qué es igual : $P+Q+R$?

RESOLUCIÓN:

* Trabajando en la cantidad subradical de P:

$$x^{x^{2x}+x^{2x+x^x}}=x^{x^{2x}+x^{2x}x^{x^x}}$$

$$=x^{x^{2x}+x^{2x}3}=x^{4x^{2x}}$$

* Note que: $x^{x^x}=3$ reemplazando y aplicando propiedades se tiene:

$$P=\sqrt[x^x]{x^{4x^{2x}}}=x^{\frac{4x^{2x}}{x^x}}=x^{4x^{2x-x}}$$

$$=x^{4x^x}=\left(x^{x^x}\right)^4=3^4=81$$

*De forma análoga se determina Q y R ,por lo que :$Q=R=81$

*Por lo tanto :$P+Q+R=81+81+81=243$

PROBLEMA 20 :

Simplificar: $2\sqrt[n]{4^{n+2}}\sqrt[n]{2^{n-4}}$

A) 1 *B) 2^n* *C) 4*
D) 8 *E) 16*

RESOLUCIÓN:

* Transformando :

$$2\times\left(2^2\right)^{\frac{n+2}{n}}\times 2^{\frac{n-4}{n}}=2^1\times 2^{\frac{2n+4}{n}}\times 2^{\frac{n-4}{n}}$$

$$=2^{1+\frac{2n+4}{n}+\frac{n-4}{n}}=2^{\frac{n+2n+4+n-4}{n}}=2^{\frac{4n}{n}}=2^4=16$$

RPTA : "E"

PROBLEMA 21 :

Calcular:

$$N=\left[\left(0,\hat{3}\right)^{-3}+\left(\frac{2}{5}\right)^{-2}+\left(\frac{4}{23}\right)^{-1}+10\right]^{0,5}$$

A) 1 *B) 2* *C) 7*
D) 9 *E) 16*

RESOLUCIÓN:

* Recordando que:

$$0,\hat{3}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}\quad\text{y}\quad 0,5=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$$

* Luego, se obtendrá que:

$$N=\left[\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}+\left(\frac{5}{2}\right)^{2}+\frac{23}{4}+10\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow N=\left[3^3+\frac{25}{4}+\frac{23}{4}+10\right]^{\frac{1}{2}}=\left(27+\frac{25+23}{4}+10\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow N=\left(37+\frac{48}{4}\right)^{\frac{1}{2}}=(37+12)^{\frac{1}{2}}=49^{\frac{1}{2}}=\sqrt{49}=7$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 22 :

Simplificar:

$$C=\left[81^{8^{-9^{-2^{-1}}}}\right]^{2^{-1}}$$

A) 5 *B) 3* *C) 1*
D) 2 *E) 9*

RESOLUCIÓN:

* Primero se opera dentro del corchete.

* En este caso es conveniente separar los exponentes que se encuentran "más arriba" y operarlos aparte, el signo menos se considera al final.

$$C = 81^{8^{9^{-2^{-1}}}} = 81^{8^{9^{1/2}}} = 81^{8^{-3^{-1}}}$$

* Pues : $9^{-1/2} = (3^2)^{-1/2} = 3^{-1}$

* Es decir: $81^{8^{3^{-1}}} = 81^{8^{-1/3}} = 81^{2^{-1}}$

* Pues: $8^{-1/3} = \left(2^3\right)^{-1/3} = 2^{-1}$

* Luego: $81^{2^{-1}} = 81^{1/2} = \sqrt{81} = 9$

* Entonces: $C = [9]^{2^{-1}} = 9^{1/2} \Rightarrow R = \sqrt{9} = 3$

RPTA : "B"

PROBLEMA 23 :

Calcular: $E = 125^{27^{-9^{-4^{-2^{-1}}}}}$

A) 3 B) 2 C) 5
D) 7 E) 25

RESOLUCIÓN:

* Primero veamos:

* $4^{1/2} = \frac{1}{4^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}$

* de igual manera $9^{-1/2} = \frac{1}{3}$

* Luego:

$$E = 125^{27^{-9^{-4^{-1/2}}}} = 125^{27^{-9^{-1/2}}} = 125^{27^{-1/3}} = 125^{27^{\frac{1}{1/3}}} = 125^{1/3}$$

$$\Rightarrow E = \sqrt[3]{125} = \sqrt[3]{5^3} = 5$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 24 :

Simplificar: $E = \left[\left(\frac{1}{64}\right)^{-2^{-1}}\right]^{(-27)^{-3^{-1}}}$

A) 7 B) 3 C) 12
D) 1/2 E) 1/4

RESOLUCIÓN:

* De:

$$E = \left[\left(\frac{1}{64}\right)^{-\frac{1}{2}}\right]^{(-27)^{-1/3}} = \left[64^{1/2}\right]^{\frac{1}{(-27)^{1/3}}} = \left(\sqrt{64}\right)^{\frac{1}{\sqrt[3]{-27}}}$$

$$\Rightarrow E = \left(\sqrt{8^2}\right)^{\frac{1}{-\sqrt[3]{27}}} = (8)^{-1/3} = \frac{1}{8^{1/3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{8}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2^3}} = \frac{1}{2}$$

RPTA : "D"

PROBLEMA 25 :

Determinar el valor de

$$E = \sqrt[3]{\left[\left(\frac{1}{5}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^{-2}\right]^{-1} + \left[3 - \left(\frac{3}{8}\right)^{-1}\right]^{-1}}$$

A) 1 B) 2 C) 5 D) 4 E) 3

RESOLUCIÓN:

* Se hace uso de $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$

* Se obtiene:

$$E = \sqrt[3]{\left[\frac{1}{25} + \frac{4}{25}\right]^{-1} + \left[3 - \frac{8}{3}\right]^{-1}}$$

* Efectuando operaciones

$$E = \sqrt[3]{\left[\frac{1+4}{25}\right]^{-1} + \left[\frac{9-8}{3}\right]^{-1}}$$

* Nuevamente, efectuando:

$$E = \sqrt[3]{\left[\frac{5}{25}\right]^{-1} + \left[\frac{1}{3}\right]^{-1}}$$

* Invirtiendo: $E = \sqrt[3]{5+3} = \sqrt[3]{8} = 2$

RPTA : "B"

PROBLEMA 26 :

Simplificar:

$$R = \left[\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}\sqrt{\sqrt{2}\sqrt{2^{\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}}}}}\right]^6$$

A) 8 B) 64 C) 4 D) 2 E) 128

RESOLUCIÓN:

* Empleando teoría:

$$R = \left[\sqrt[\sqrt[8]{2}]{\sqrt[\sqrt[2]{4}]{\sqrt[\sqrt{2}]{2^{\sqrt[8]{2^7}}}}}\right]^6$$

$$\Rightarrow R = \left[\sqrt[2^{\frac{1}{8}} \times 2^{\frac{1}{4}} \times 2^{\frac{1}{2}}]{2^{\sqrt[8]{2^7}}}\right]^6 = \left[\sqrt[2^{\frac{1}{8}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}}]{2^{\sqrt[8]{2^7}}}\right]^6$$

$$\Rightarrow R = \left[\sqrt[\sqrt[8]{2^7}]{2^{\sqrt[8]{2^7}}}\right]^6 = [2]^6 = 64$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 27 :

Simplificar: $\sqrt[x]{\frac{90^{x+1}}{9^{x+2} + 3^{2x+2}}}$

A) 2 B) 4 C) 6
D) 8 E) 10

RESOLUCIÓN :

* Analizando se obtendrá:

$$\sqrt[x]{\frac{9^{x+1}\times 10^{x+1}}{9^x\times 9^2+3^{2x}\times 3^2}}=\sqrt[x]{\frac{9^x\times 9^1\times 10^x\times 10^1}{9^x\times 9^2+9^x\times 9}}$$

$$=\sqrt[x]{\frac{9^x\times 10^x\times 90}{9^x\left(9^2+9\right)}}=\sqrt[x]{\frac{10^x\times 90}{90}}=\sqrt[x]{10^x}=10$$

RPTA : "E"

PROBLEMA 28 :

Calcular:

$$\frac{\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}}{\sqrt{2\sqrt[4]{2}}}$$

A) $\sqrt{2}$ B) 2 C) $\sqrt[4]{2}$ D) 1 E) $\frac{1}{2}$

RESOLUCIÓN :

* Desdoblando factores:

$$\frac{\sqrt{2}\times\sqrt[2\times 2]{2}\times\sqrt[2\times 2\times 2]{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt[2\times 4]{2}}=\frac{\sqrt[4]{2}\times\sqrt[8]{2}}{\sqrt[8]{2}}=\sqrt[4]{2}$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 29 :

Calcular: $S=\sqrt[3]{\left[\left(\frac{3}{2}\right)^{-2}+6^{-3}+\left(\frac{3}{2}\right)^{-3}-6^{-1}\right]^{-2}}$

A) 1 B) $\frac{2}{25}$ C) $\frac{18}{z}$ D) $\frac{36}{25}$ E) $\frac{3}{5}$

RESOLUCIÓN:

* Efectuando dentro del corchete:

$$S^3=\left[\left(\frac{2}{3}\right)^2+\frac{1}{6^3}+\left(\frac{2}{3}\right)^3-\frac{1}{6}\right]^{-2}$$

$$S^3=\left[\frac{4}{9}+\frac{1}{216}+\frac{8}{27}-\frac{1}{6}\right]^{-2}\Rightarrow S^3=\left[\frac{24\times 4+1+8\times 8-36\times 1}{216}\right]^{-2}$$

$$S^3=\left[\frac{125}{216}\right]^{-2}\Rightarrow S^3=\left[\frac{216}{125}\right]^{2}\Rightarrow S=\sqrt[3]{\frac{216}{125}^{2}}=\left(\frac{6}{5}\right)^2=\frac{36}{25}$$

RPTA : "D"

PROBLEMA 30 :

Simplificar : $\frac{2\times 3^{n+1}+3^{n+2}}{2\times 3^{n+1}-3^n}$

A) 1 B) 2 C) 3
D) 5 E) 2^x

RESOLUCIÓN:

* Recordemos que: $b^{m+n}=b^m\times b^n$

* Luego:

$$\frac{2\times 3^n\times 3^1+3^n\times 3^2}{2\times 3^n\times 3^1-3^n}=\frac{\not{3}^n(2\times 3^1+3^2)}{\not{3}^n(2\times 3^1-1)}=\frac{1}{15}=3$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 31 :

Calcular: $E=\frac{2^{x+4}+2^{x+3}+2^{x+2}+2^{x+1}}{2^{x-4}+2^{x-3}+2^{x-2}+2^{x-1}}$

A) 1 B) 32 C) 2
D) 4 E) 64

RESOLUCIÓN :

*En el numerador «factorizamos» 2^{x+1} y en el denominador 2^{x+4}, así:

$$E=\frac{2^{x+1}\times 2^3+2^{x+1}\times 2^2+2^{x+1}\times 2^1+2^{x+1}\times 1}{2^{x-4}\times 1+2^{x-4}\times 2^1+2^{x-4}\times 2^2+2^{x-4}\times 2^3}$$

$$\Rightarrow E=\frac{2^{x+1}\ (2^3+2^2+2^1+1)}{2^{x-4}\ (1+2^1+2^2+2^3)}\Rightarrow E=2^{x+1-(x-4)}$$

$$\Rightarrow E=2^{x+1-x+4}=2^5=32$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 32 :

Calcular : $\left[16^{-4^{-2^{-1}}}\right]^{2^{-1}}$

A) 1 B) 2 C) 0,5
D) 4 E) 0,25

RESOLUCIÓN :

* Efectuando de arriba hacia abajo y tomando a los exponentes de 2 en 2:

$$\left[16^{-4^{2^{-1}}}\right]^{2^{-1}}=\left[16^{-4^{-\frac{1}{2}}}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$=\sqrt{16^{-\frac{1}{\sqrt{4}}}}=\sqrt{16^{-\frac{1}{2}}}=\sqrt{\frac{1}{\sqrt{16}}}$$

$$=\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}=0,5$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 33 :

Calcular:

$$E=(-27)^{-243^{-625^{-4^{-1}}}}$$

A) 3 B) –3 C) $\frac{1}{3}$ D) $-\frac{1}{3}$ E) $\frac{1}{729}$

RESOLUCIÓN:

$$\frac{1}{\sqrt[4]{625}}=\frac{1}{5}$$

$$E=(-27)^{-243^{-625^{-4^{-1}}}}=(-27)^{-243^{-625^{-\frac{1}{4}}}}$$

$$\frac{1}{\sqrt[5]{243}}=\frac{1}{3}$$

$$E=(-27)^{-243^{-\frac{1}{5}}}$$

$$E=(-27)^{-\frac{1}{3}}=\frac{1}{\sqrt[3]{-27}}=\frac{1}{-3}=-\frac{1}{3}$$

RPTA : "D"

PROBLEMA 34 :

Calcular:

$$\sqrt[81^{3^{10}}]{\left[\sqrt[3]{729^{3^{3^{11}}}}\right]^{3^{3^{10}}}}$$

A) 3 B) 9 C) $\frac{1}{3}$
D) 27 E) 81

RESOLUCIÓN :

$$3\times(3^4)^{3^{10}}\sqrt{(729)^{\left[3^{3^{10}}\right]^3\times 3^{3^{10}}}}$$

* Haciendo: $3^{3^{10}}=a$; luego:

$$\sqrt[3a^4]{729^{a^3\times a}}=\sqrt[3a^4]{729^{a^4}}=\sqrt[3]{729}=9$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 35 :

Simplificar:

$$\left[\frac{\overbrace{\sqrt[5]{a^2}\ \sqrt[5]{a^2}\ \sqrt[5]{a^2}\ \ldots\ldots\ \sqrt[5]{a^2}}^{50\ veces}}{\underbrace{\sqrt{a^5}\ \sqrt{a^5}\ \sqrt{a^5}\ \ldots\ldots\ \sqrt{a^5}}_{20\ veces}}\right]$$

A) 1 B) a C) a^{-1}
D) $\sqrt{a}$ E) $\sqrt[3]{a}$

RESOLUCIÓN:

$$\sqrt[30]{\frac{\sqrt[5]{a^2}^{50}}{\sqrt{a^5}^{20}}}=\sqrt[30]{\frac{(a^2)^{10}}{(a^5)^{10}}}=\sqrt[30]{\frac{a^{20}}{a^{50}}}=\sqrt[30]{a^{-30}}=a^{-1}$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 36 :

Si: $x^{x^{x^x}}=2$

Calcular: $E=x^{3x^{x^x\times\left[x^{x(x^{x-1}-1)}+1\right]}}$

A) 2 B) 8 C) 16
D) 32 E) 64

RESOLUCIÓN :

$$E=x^{3x^{\left[x^x\times x^{x^x-x}+x^x\right]}}=x^{3x^{\left[x^{x^x}+x^x\right]}}$$

$$E=x^{3x^{x^{x^x}}\times x^{x^x}}=\left(x^{x^{x^x}}\right)^{3\times x^{x^{x^x}}}$$

* Colocando su valor a $x^{x^{x^x}}$:

$$E=(2)^{3\times2}=2^6=64$$

RPTA : "E"

PROBLEMA 37 :

Simplificar :

$$\sqrt[mn]{b^{m-n}}\ \sqrt[np]{b^{n-p}}\ \sqrt[pm]{b^{p-m}}$$

A) b B) b^2 C) 1
D) b^{-1} E) -1

RESOLUCIÓN:

$$b^{\frac{m-n}{mn}}\times b^{\frac{n-p}{np}}\times b^{\frac{p-m}{pm}}=b^{\frac{pm-pn+mn-mp+np-nm}{mnp}}=b^{\frac{0}{mnp}}=b^0=1$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 38 :

Calcular :

$$\left[256^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}(1-\sqrt{8})}}\right]^{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2^{2^{-1}}}}$$

A) 2 B) 1 C) 8 D) $\sqrt{2}$ E) 4

RESOLUCIÓN:

$$\left[256^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}-\sqrt{16}}}\right]^{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}}=\left[256^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}-4}}\right]^{\sqrt{2}^{-\sqrt{2}}}$$

$$=256^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}-4-\sqrt{2}}}=256^{\sqrt{2}^{-4}}=256^{2^{-2}}$$

$$=256^{\frac{1}{4}}=\sqrt[4]{256}=4$$

RPTA : "E"

PROBLEMA 39 :

Simplificar :

$$\sqrt[a]{\frac{1+2^a}{1+2^{-a}}}+\sqrt[b]{\frac{1+3^b}{1+3^{-b}}}+\sqrt[c]{\frac{1+5^c}{1+5^{-c}}}$$

A) 3 B) 7 C) 10
D) 20 E) -3

RESOLUCIÓN:

* Analizando uno de los radicandos :

$$\frac{1+2^a}{1+2^{-a}}=\frac{1+2^a}{1+\frac{1}{2^a}}=\frac{\frac{1+2^a}{1}}{\frac{2^a+1}{2^a}}=\frac{2^a(1+2^a)}{2^a+1}=2^a$$

* Luego por analogía y reemplazando, resultará:

$$\sqrt[a]{2^a}+\sqrt[b]{3^b}+\sqrt[c]{5^c}=2+3+5=10$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 40 :

Simplificar :

$$\left[\sqrt[\sqrt{3}]{\sqrt{3}}\sqrt{(3\sqrt{3})^{\sqrt[\sqrt{3}]{\sqrt{3}^{\sqrt{3}+1}}}}\right]^{\sqrt{3}}$$

A) 3 B) $\sqrt{3}$ C) $3\sqrt{3}$ D) $9\sqrt{3}$ E) $81\sqrt{3}$

RESOLUCIÓN:

* Haciendo: $n=\sqrt{3}\Rightarrow n^2=3$

* Luego:

$$\left[\sqrt[\sqrt[n]{n}]{(n^2\times n)^{\sqrt[n]{n^{n+1}}}}\right]^n = \sqrt[\sqrt[n]{n}]{(n^3)^{n\sqrt[n]{n}}}^{\,n} = (n^3)^{n^2}$$

* Reemplazando:

$$(\sqrt{3}^3)^3 = \sqrt{3}^9 = \sqrt{3}^8 \times \sqrt{3} = 3^4\sqrt{3} = 81\sqrt{3}$$

RPTA : "E"

PROBLEMA 41 :

Calcular aproximadamente :

$$E = \sqrt{2\sqrt{3\sqrt{2\sqrt{3\sqrt{2\ \ldots\ldots\infty}}}}}$$

A) $\sqrt{6}$ B) $\sqrt[3]{6}$ C) $\sqrt[4]{2}$ D) $\sqrt[3]{12}$ E) $\sqrt[6]{2}$

RESOLUCIÓN:

* Se puede apreciar que «E», contiene infinitos radicales, luego :

$$E = \sqrt{2\sqrt{3\underbrace{\sqrt{2\sqrt{3\sqrt{2\sqrt{3\sqrt{2\ \ldots\ldots\infty}}}}}}_{\text{Sigue siendo "E"}}}}$$

$\Rightarrow E = \sqrt{2\sqrt{3E}}$; lo llevamos al cuadrado

$\Rightarrow E^2 = 2\sqrt{3E}$; nuevamente lo elevamos al cuadrado:

$\Rightarrow E^4 = 2^2 \times \sqrt{3E}^2 \Rightarrow E^4 = 4\times 3E$

$\Rightarrow E^3 = 12 \Rightarrow E = \sqrt[3]{12}$

RPTA : "D"

PROBLEMA 42 :

Simplificar :

$$\sqrt[n]{7^n\sqrt[n]{7^{n^2}\sqrt[n]{7^{n^3}\ldots\ldots\sqrt[n]{7^{n^{2003}}}}}}$$

A) 7 B) 49 C) 7^{2003} D) $7^{n^{2004}}$ E) $7^{n^{2003}}$

RESOLUCIÓN:

* Aplicando un razonamiento inductivo:

I) $\sqrt[n]{7^{n^1}} = 7$

II) $\sqrt[n]{7^n\sqrt[n]{7^{n^2}}} = \sqrt[n^2]{7^{2n^2}} = 7^2$

III) $\sqrt[n]{7^n\sqrt[n]{7^{n^2}\sqrt[n]{7^{n^3}}}} = \sqrt[n^3]{7^{3n^3}} = 7^3$

$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$

$$\sqrt[n]{7^n\sqrt[n]{7^{n^2}\sqrt[n]{7^{n^3}\ldots\ldots\sqrt[n]{7^{n^{2003}}}}}} = 7^{2003}$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 43 :

Simplificar :

$$\left[\sqrt[a^{2a^a}]{a^{a^{a^a}+a^a}}\right]^{a^{a^a}-a^{a^a}}$$

A) a^{-1} B) $\sqrt[a]{a}$ C) a

D) a^a E) a^{-a}

RESOLUCIÓN:

* Haciendo: $a^{a^a} = n$; luego la expresión a simplificar, resultará:

$$\left[\sqrt[n^2]{a^{a^n}.a^{a^a}}\right]^{a^{a^a}.a^{-n}} = \left[\sqrt[n^2]{a^{a^n\times n}}\right]^{n\times a^{-n}}$$

$$= \sqrt[n^2]{a^{a^n\times n^2\times a^{-n}}} = a^{a^0} = a^1 = a$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 44 :

Reducir la expresión numérica:

$$A = \frac{35^{19}\times 40^{16}\times 27^{13}}{30^{30}\times 45^5\times 14^{18}}$$

A) 1 B) $\frac{2}{5}$ C) $\frac{5}{7}$ D) $\frac{7}{3}$ E) 2

RESOLUCIÓN:

* Transformando cada base:

$$A = \frac{(5\times 7)^{19}\times\left(2^3\times 5\right)^{16}\times\left(3^3\right)^{13}}{(2\times 3\times 5)^{30}\times\left(3^2\times 5\right)^5\times(2\times 7)^{18}}$$

$$\Rightarrow A = \frac{5^{19}\times 7^{19}\times 2^{48}\times 5^{16}\times 3^{39}}{2^{30}\times 3^{30}\times 5^{30}\times 3^{10}\times 5^5\times 2^{18}\times 7^{18}}$$

$$= \frac{2^{48}\times 3^{39}\times 5^{35}\times 7^{19}}{2^{48}\times 3^{40}\times 5^{35}\times 7^{18}} \Rightarrow A = \frac{3^{39}\times 7^{19}}{3^{40}\times 7^{18}} = \frac{7}{3}$$

RPTA : "D"

PROBLEMA 45 :

Reducir la expresión:

$$B = \frac{7^6+14^6}{14^6+28^6} + \frac{10^6+30^6}{20^6+60^6}$$

A) 32 B) 2^{-1} C) 3^{-1}

D) 32^{-1} E) 1

RESOLUCIÓN:

* Reduciendo cada fracción:

$$B = \frac{7^6+14^6}{7^6\times 2^6+14^6\times 2^6} + \frac{10^6+30^6}{2^6\times 10^6+2^6\times 30^6}$$

$$\Rightarrow B = \frac{7^6+14^6}{2^6\left(7^6+14^6\right)} + \frac{10^6+30^6}{2^6\left(10^6+30^6\right)}$$

$$\Rightarrow B = \frac{1}{2^6} + \frac{1}{2^6} = \frac{2}{2^6} = \frac{1}{2^5} = 32^{-1}$$

RPTA : "D"

PROBLEMA 46 :

Efectuar operaciones en:

$$S = \left(\frac{1}{4}\right)^{-2} + \left(\frac{1}{3}\right)^{-3^{2^0}} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-3^2}$$

A)26 B)24 C)36 D)59 E)68

RESOLUCIÓN:

* Por partes:

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}=\left(\frac{4}{1}\right)^{2}=4^2=16$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{-3^{2^0}}=\left(\frac{1}{3}\right)^{-3^1}=\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}=3^3=27$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{-2^2}=\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}=2^4=16$$

* Luego: $S=16+27+16=59$

RPTA : "D"

PROBLEMA 47 :

Reducir:

$$P=\sqrt[13]{\frac{\left\{2\left[2\left(2^3\right)^{-3}\right]^{-3}\right\}^{-3}}{\left\{2^{-3}\left[2^{-1}\left(2^{-3}\right)^{2}\right]^{5}\right\}^{3}}}$$

A) $\sqrt{2}$ B)2 C) 4 D) 8 E) 32

RESOLUCIÓN:

* Transformando, se obtendrá:

$$P=\sqrt[13]{\frac{2^{-3}\times 2^{9}\times 2^{-81}}{\left[2^{-9}\times 2^{-1}\times 2^{-6}\right]^{15}}}=\frac{\sqrt[13]{2^{-3+9-81}}}{2^{-9}\left[2^{-1}\times 2^{-6}\right]^{15}}$$

$$\Rightarrow P=\sqrt[13]{\frac{2^{-75}}{2^{-114}}}=\sqrt[13]{2^{39}}=2^3=8$$

RPTA : "D"

PROBLEMA 48 :

Si: $x,y\in Z^{+}$, tal que $y-x\geq 2$, hallar el valor más simple;

$$\sqrt[y-x]{\frac{x^{x+y}\,y^{y}+y^{x+y}x^{x}}{x^{2y}\,y^{x}+y^{2x}x^{y}}}$$

A) $\frac{x}{y}$ B) $\frac{x}{y^2}$ C) x^y D) $\frac{y}{x}$ E) y^x

RESOLUCIÓN:

* Buscando bases iguales:

$$\sqrt[y-x]{\frac{x^x\;x^y\;y^y+y^x\;y^y\;x^x}{x^{2y}\;y^x+y^{2x}\;x^y}}$$

* Al extraer la expresión común tenemos:

$$\Rightarrow\sqrt[y-x]{\frac{x^xy^y\left(x^y+y^x\right)}{x^y.y^x\left(x^y+y^x\right)}}=\sqrt[y-x]{\left(\frac{y}{x}\right)^{y-x}}=\frac{y}{x}$$

RPTA : "D"

PROBLEMA 49 :

Simplificar : $\sqrt[n-1]{\frac{2^{2n}-10^{n-1}}{2^{n+1}-5^{n-1}}}+\sqrt[1-n]{\frac{2^{1-n}+3^{1-n}}{3^{n-1}+2^{n-1}}}$

A) 0 B) 8 C) 6 D) $\frac{13}{6}$ E) – 4

RESOLUCIÓN :

• Debido a que las posibles respuestas (alternativas), son cantidades exactas (constantes), entonces la simplificación no va a depender de «n», por ello haremos que «n» sea 2 (un valor adecuado, que puede ser cualquier otro), entonces lo pedido será :

RPTA : "B"

PROBLEMA 50 :

Dada la sucesión:

$$a_1=\sqrt{3}\;;\;a_2=\sqrt{3\sqrt{3}}\;;\;a_3=\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3}}}\;;\;...$$

Calcular: $E=\frac{a_{2003}\times a_{2006}^2}{a_{2004}^2+a_{2005}}$

A) 1 B) 2 C) 9
D) 8 E) 16

RESOLUCIÓN :

* Se deduce que :

$$a_n=\underbrace{\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3......\sqrt{3}}}}}_{\text{"n" Radicales}}\Rightarrow a_n=\sqrt{3\underbrace{\sqrt{3\sqrt{3......\sqrt{3}}}}_{\text{"n-1" Radicales}}}\Rightarrow a_n^2=3\times a_{n-1}$$

* Con lo que al dar valores adecuados a «n», de acuerdo a lo pedido, se obtendrá que:

$$a_{2004}^2=3a_{2003}\;\text{ y }\;a_{2006}^2=3a_{2005}$$

* Que al reemplazar en «E», nos resultará :

$$E=\frac{a_{2003}\times 3a_{2005}}{3a_{2003}\times a_{2005}}=1$$

RPTA : "A"

PROBLEMA 51 :

Simplificar la siguiente expresión :

$$L=\left(\sqrt[2\sqrt{2}]{2^{2^{\sqrt{2}}}}\right)^{\sqrt[\sqrt{2}]{\frac{2^{\sqrt{2}}\,2^{\frac{\sqrt{2}}{2}}}{2^2}}}-\sqrt[4]{4}+\sqrt{2}$$

A) 1 B) 2 C) 8
D) $\frac{13}{6}$ E) – 2

RESOLUCIÓN:

* Transformando adecuadamente :

$$L=\left(\sqrt[2\sqrt{2}]{2^{2^{\sqrt{2}}}}\right)^{\frac{2^{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}}\,2^{\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}}}{2^{\frac{2}{\sqrt{2}}}}}-\sqrt[2\times 2]{2^{2}}+\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow L=\left(2^{\frac{2^{\sqrt{2}}}{2\sqrt{2}}}\right)^{\frac{2^{1}2^{\frac{1}{2}}}{2^{\sqrt{2}}}}-\underbrace{\sqrt[2]{2}+\sqrt{2}}_{se\ eliminan}=2-0=2$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 52 :

Simplificar la siguiente expresión :

$$L=\left(\sqrt[\sqrt{243}]{3^{3^{\sqrt{3}+1}}}\right)^{\sqrt[\frac{3}{\sqrt{3}}]{\frac{3^{\sqrt{3}+1}\,3^{\frac{\sqrt{3}+2}{2}}}{3^{5}}}}$$

A) 1 B) 3 C) 9 D) $\frac{13}{6}$ E) – 2

RESOLUCIÓN:

* Transformando adecuadamente cada parte se obtendrá:

$$L=\left(\sqrt[3^{\frac{5}{2}}]{3^{3^{\sqrt{3}+1}}}\right)^{\sqrt[\sqrt{3}]{3^{\sqrt{3}+1+\frac{\sqrt{3}+2}{2}-5}}}=\left(3^{\frac{3^{\sqrt{3}+1}}{3^{\frac{5}{2}}}}\right)^{3^{\frac{3\sqrt{3}-6}{2\sqrt{3}}}}$$

$$\Rightarrow L=3^{3^{\sqrt{3}+1-\frac{5}{2}+\frac{3\sqrt{3}-6}{2\sqrt{3}}}}=3^{3^{\frac{6+2\sqrt{3}-5\sqrt{3}+3\sqrt{3}-6}{2\sqrt{3}}}}$$

$$\Rightarrow L=3^{3^{\frac{0}{2\sqrt{3}}}}=3^{3^{0}}=3^{1}=3$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 53 :

Simplificar la siguiente expresión :

$$Q=\left(\sqrt[(2-\sqrt[4]{3})^{2}]{\left[\left(\sqrt[4]{3}^{\sqrt{3}}\right)^{\sqrt[4]{3}}\times 3^{\sqrt[4]{3}}\right]^{\sqrt[4]{3^{-1}}}3^{-\sqrt[4]{3}}}\right)^{4}$$

A) 1 B) 3 C) 9 D) 0 E) – 2

RESOLUCIÓN :

* **para** mejor visualización haremos el siguiente reemplazo : $n=\sqrt[4]{3}\Rightarrow n^{2}=\sqrt{3}\wedge n^{4}=3$

* resultando ahora así :

$$Q=\left(\sqrt[(2-n)^{2}]{\left[\left(n^{n^{2}}\right)^{n}\times n^{4n}\right]^{n^{-1}}n^{-4n}}\right)^{4}$$

$$\Rightarrow Q=\left(\sqrt[(2-n)^{2}]{n^{n^{2}-4n+4}}\right)^{4}=\left(\sqrt[(2-n)^{2}]{n^{(n-2)^{2}}}\right)^{4}\Rightarrow Q=n^{4}=3$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 54 :

Hallar el valor de n si :

$$\sqrt{x\div\sqrt{x\div\sqrt{x\div\sqrt{x}}}}=x^{\frac{1}{n}}$$

A) $-3\frac{1}{5}$ B) $5\frac{1}{3}$ C) $3\frac{1}{5}$ D) $\frac{5}{16}$ E) $-\frac{5}{16}$

RESOLUCIÓN:

* Transformando la expresión dada :

$$\sqrt{x\div\sqrt{x\div\sqrt{\frac{x}{\sqrt{x}}}}}=x^{\frac{1}{n}}\Rightarrow\sqrt{x\div\sqrt{x\div\sqrt{\sqrt{x}}}}=x^{\frac{1}{n}}$$

$$\sqrt{x\div\sqrt{x\div\sqrt[4]{x}}}=x^{\frac{1}{n}}\Rightarrow\sqrt{x\div\sqrt{x^{3/4}}}=x^{\frac{1}{n}}$$

$$\sqrt{x^{5/8}}=x^{\frac{1}{n}}\Rightarrow x^{5/16}=x^{\frac{1}{n}}$$

* Igualando exponentes resulta :

$$\frac{5}{16}=\frac{1}{n}\Rightarrow n=\frac{16}{5}=3\frac{1}{5}$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 55 :

Determinar el valor de:

$$\psi=\sqrt[n]{\frac{x}{\sqrt[n]{\frac{x}{\sqrt[n]{\frac{x}{\vdots}}}}}}$$

A) $\psi=\sqrt[n+1]{x}$ B) $\psi=\sqrt[n]{x}$ C) $\psi=\sqrt{x^{n}}$

D) $\psi=\sqrt{x^{n+1}}$ E) $\psi=x^{n+1}$

RESOLUCIÓN:

$$\psi^{n}=x/\psi\Rightarrow\psi^{n+1}=x\Rightarrow\psi=\sqrt[n+1]{x}$$

RPTA : "A"

PROBLEMA 56 :

Simplificar ; si $x>0$

$$\left[\sqrt{\frac{x^{2}}{\sqrt{\frac{x^{2}}{\sqrt{\frac{x^{2}}{\sqrt{x^{3}}}}}}}}\right]\div\left[\sqrt{\frac{\sqrt{\frac{\sqrt{\frac{\sqrt{\frac{1}{x^{5}}}}{x^{2}}}}{x^{2}}}}{x^{2}}}\right]^{-1}$$

A) x^{-1} B) x C) 1 D) $2x$ E) x^{4}

RESOLUCIÓN:

*Primero :

$$\sqrt{\frac{x^2}{\sqrt{\frac{x^2}{\sqrt{\frac{x^2}{\sqrt{x^3}}}}}}}=\sqrt{\frac{x^2}{\sqrt{\frac{x^2}{\sqrt{x^2\sqrt{x^{-3}}}}}}}=\sqrt{\frac{x^2}{\sqrt{x^2\sqrt{x^{-2}\sqrt{x^3}}}}}$$

$$=\sqrt{x^3\sqrt{x^{-2}\sqrt{x^2\sqrt{x^{-3}}}}}=x^{\frac{17}{16}}$$

*Luego del mismo modo , obtenemos :

$$\sqrt{\frac{\sqrt{\frac{\sqrt{\frac{\sqrt{\frac{1}{x^5}}}{x^2}}}{x^2}}}{x^2}}^{\,-1}=\sqrt{x^{-2}\sqrt{x^{-2}\sqrt{x^{-2}\sqrt{x^{-5}}}}}^{\,-1}=x^{\frac{33}{16}}$$

* Finalmente lo deseado , será : $x^{\frac{33}{16}}+x^{\frac{17}{16}}=x^{-1}$

RPTA : "A"

PROBLEMA 57 :

Si $A=\dfrac{5^{x+4}-5^{x+2}}{5^x}$ y $B=\dfrac{3^{y+5}-3^{y+3}}{3^y}$

Calcular $S=36\left(\frac{A}{B}\right)$

A) S=10 B) S=100 C) S=100/36
D) S=216 E) S=600

RESOLUCIÓN :

* Reduciendo cada expresión:

$$A=\frac{5^{x+2}\left[5^2-1\right]}{5x}\Rightarrow A=5^2\times\left[5^2-1\right]\Rightarrow A=25\times24$$

$$B=\frac{3^{y+3}\left[3^2-1\right]}{3^y}\Rightarrow B=3^3\times\left[3^2-1\right]\Rightarrow B=27\times8$$

* Reemplazando en lo pedido:

$$S=36\times\left(\frac{25\times24}{27\times8}\right)\Rightarrow S=100\ ;\ \forall x\in R$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 58 :

Si x es positivo , simplificar la expresión:

$$M=\frac{\sqrt[\frac{1}{2}]{x\sqrt[\frac{2}{3}]{x\sqrt[\frac{3}{4}]{x\sqrt[\frac{4}{5}]{x\ldots\sqrt[\frac{n}{n+1}]{x}}}}}}{\sqrt{x^{n^2+3n}}}$$

A) x^2 B) x^n C) x D) 1 E) x^{12}

RESOLUCIÓN:

En la expresión , dando valores a n , y tomando el valor de la unidad , tenemos:

- $n=1\Rightarrow M=\dfrac{\sqrt[1/2]{x}}{\sqrt{x^{1^2+3(1)}}}=\dfrac{x^2}{x^2}=1$
- $n=2\Rightarrow M=\dfrac{\sqrt[1/2]{x^{2/3}\sqrt{x}}}{x^{2^2+3(2)}}=\dfrac{\left[x^1.\left(x^{3/2}\right)\right]^2}{x^{\frac{10}{2}}}=\dfrac{x^5}{x^5}=1$
- $n=3\Rightarrow M=\dfrac{\sqrt[1/2]{x^{2/3}\sqrt{x^{3/4}\sqrt{x}}}}{\sqrt{x^{3^2+3(3)}}}=\dfrac{x^9}{x^{18/2}}=1$

RPTA : "D"

PROBLEMA 59 :

Si $x\in\mathbb{R}^+-\{1\}$, *determine el valor de* n *que verifique :*

$$\sqrt[4]{\frac{\sqrt[3]{\frac{\sqrt{\frac{1}{x}}}{x}}}{x}}=\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[4]{\left(\frac{1}{x}\right)^n}}}$$

Dar como respuesta : $(2n+3)\div3$

A) 5 B) 4 C) 7 D) 12 E) 3

RESOLUCIÓN:

* Reduciendo adecuadamente se obtiene :

$$\sqrt[4]{x^{-1}\sqrt[3]{x^{-1}\sqrt{x^{-1}}}}=\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[4]{\left(x^{-1}\right)^n}}}$$

$$\Rightarrow x^{\frac{-9}{24}}=x^{\frac{-n}{24}}\Rightarrow n=9$$

*Se desea : $(2\times9+3)\div3=7$

RPTA : "C"

PROBLEMA 60 :

Hallar el valor de E si $a^2b=a^2c+bc^2$ y

$$E=\sqrt[a+b]{\left[\frac{\sqrt[a]{x^{b+c}}\sqrt[b]{x^{c+a}}\sqrt[c]{x^{a+b}}}{\sqrt[a]{x^{b-c}}\sqrt[b]{x^{c+a}}\sqrt[c]{x^{a-b}}}\right]^{\frac{c}{2}}}$$

A) x^3 B) x^4 C) x^2 D) x^{-1} E) x

RESOLUCIÓN :

* Reduciendo la expresión:

$$E=\sqrt[a+b]{\left[\sqrt[a]{x^{2c}}+\sqrt[b]{x^{2a}}\sqrt[c]{x^{ab}}\right]^{c/2}}$$

$$E=\sqrt[a+b]{x^{\frac{c}{a}+\frac{a}{b}+\frac{b}{c}}}=\sqrt[a+b]{\left[x^{\frac{bc^2+a^2c+ab^2}{abc}}\right]^c}$$

* Pero: $a^2b=a^2c+bx^2$

$$E=\sqrt[a+b]{x^{\frac{a^2b+ab^2}{ab}}}=\sqrt[a+b]{x^{a+b}}=x$$

RPTA : "E"

PROBLEMA 61 :

Calcular el valor de la expresión siguiente cuando $x=2$ e $y=3$.

$$E=\left[\frac{\dfrac{x\sqrt{y^{-4}}}{y\sqrt{x^{-2}}}}{\dfrac{x^{2/3}\sqrt{y^{-1}}}{y\sqrt[3]{x^{-2}}}}\right]^3$$

A) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ B) 2 C) $\sqrt{2}$ D) $\frac{1}{2}$ E) $\sqrt[3]{2}$

RESOLUCIÓN:

$x=2\,;y=3$

$$E=\left[\frac{\sqrt{\dfrac{x\sqrt{y^{-4}}}{y\sqrt{x^{-2}}}}}{\dfrac{x^{2/3}\sqrt{y^{-1}}}{y\sqrt[3]{x^{-2}}}}\right]^3 \Rightarrow E=\left[\frac{\sqrt{\dfrac{xy^{-2}}{yx^{-1}}}}{\dfrac{x^{2/3}y^{-1/2}}{yx^{-2/3}}}\right]^3$$

$$\Rightarrow E=\left[\frac{\dfrac{x^{1/2}y^{-1}}{y^{1/2}x^{-1/2}}}{x^{4/3}\,y^{-3/2}}\right]^3=\left[\frac{xy^{-3/2}}{x^{4/3}\,y^{-3/2}}\right]^3=[x^{-1/3}]^3$$

$$\Rightarrow E=x^{-1}=\frac{1}{2}$$

RPTA : "D"

PRIMERA PRACTICA DIRIGIDA

ECUACIONES ELEMENTALES I

01 El valor de «x» en $x+3=9$ es :

A) 6 B) – 6 C) 7 D) 8 E) 1

02 El valor de x en : $15-10=x-15$ es :

A) 26 B) 25 C) 20 D) 30 E) 2

03 Marca la solución correcta para: $2(24-x)-40=16$

A) 4 B) 5 C) 7 D) –4 E) 2

04 Halla «x» si : $x+3-3x-3=2x-8$

A) 6 B) 5 C) 2 D) 3 E) 4

05 Hallar «x» en: $\frac{x}{9}=\frac{56}{63}$

A) 7 B) 8 C) 9 D) 1 E) N.A

06 El valor de «y» en $\frac{284}{142}=\frac{13}{y}$ es :

A) 0,2 B) 6,5 C) 6,125 D) 0,25 E) 1

07 El valor de «x» en $\frac{121}{x}=\frac{x}{4}$ es :

A) 25 B) 36 C) 40 D) 22 E) 20

08 Halla «x» en $\frac{x+3}{4}=\frac{5}{2}$

A) 6 B) 5 C) 4 D) 7 E) 8

09 Halla «x» en $\frac{x+4}{3}=\frac{x+3}{4}$

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

10 Si : $x\in Z$, el valor de «x» en $\frac{1}{2}+\frac{x}{3}=\frac{1}{4}$ es :

A) 3/2 B) – 3/2 C) 3/4 D) – 3/4 E) 1

11 El valor de «x» en $\frac{x}{2}-\frac{x}{4}=10$ es :

A) 10 B) – 10 C) 40 D) – 40 E) 50

12 Hallar «x» si $\frac{x}{45}+\frac{400-x}{8}=13$

A) 360 B) 400 C) – 360 D) 50 E) 40

13 Resuelve : $2x+3(41-5x)=32$

A) 7 B) 8 C) 12 D) 5 E) 1

14 Resolver: $8(x-1)-x+2=3(x+5)-5(2-3x)$

A) 2 B) $-\frac{13}{11}$ C) $-\frac{4}{7}$ D) 4 E) – 1

15 Resolver $1+\dfrac{1}{1+\frac{1}{x}}=3$

A) –1 B) –2 C) – 3 D) 1 E) 2

16 En $x-(2-x)=3(x+1)+x$, el valor de x es:

A) –1/6 B) –1/2 C) –5/2 D) –5/4 E) 2

17 Si : $\frac{x}{2}-\frac{x}{12}+\frac{5}{4}=\frac{x}{6}-2x+10$ es :

A) 0 B) – 1 C) – 2 D) – 3 E) 3

18 Resolver $\frac{x-3}{2}=2-\frac{x-2}{3}$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

19 Resolver $\frac{1}{3}(x+3)+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}(x-1)-(x-3)$

A) 7/5 B) 18/5 C) 11/2 D) 8/5 E) 18/15

20 Resolver $2x-\left(2x-\frac{3x-1}{8}\right)=\frac{2}{3}\left(\frac{x+2}{6}\right)-\frac{1}{4}$

A) 1/13 B) 2/13 C) 7/19 D) 13/15 E) 19/23

TAREA DOMICILIARIA

01 Resolver: $\frac{x-1}{2}-\frac{x-2}{3}-\frac{x-3}{4}=-\frac{x-5}{5}$

A) 1 B) 5/7 C) 3/8 D) 2/9 E) 11/7

02 Resolver:

$$-3(2x+7)+(-5x+6)-8(1-2x)-(x-3)=0$$

A) 2 B) – 3 C) 4 D) 5 E) 7

03 Resuelve: $3(x-1)+2(x+1)=3x+11$

A) 3　B) 4　C) 5　D) 6　E) 1

(04) Hallar el valor de x en: $\frac{x}{2}+6-\frac{x}{4}=\frac{2x}{5}+3$

A) 15　B) 20　C) – 15　D) – 20　E) 0

SEGUNDA PRACTICA DIRIGIDA

ECUACIONES ELEMENTALES II

(01) Resuelve $2(x+1)-3(x-1)=4x$

A) –1　B) 3　C) 1　D) 2　E) 0

(02) Resuelve $(x+2)^2-(x-2)^2=5$

A) 5/8　B) 3/5　C) 8/3　D) 2　E) 1

(03) Resolver: $(x-2)^2=1+(3-x)^2$

A) 3　B) 2　C) 1　D) 0　E) 7

(04) Hallar x en: $(x-3)^2-(3-x)^2=x$

A) 3　B) –1　C) 6　D) 4　E) 5

(05) Si: $\frac{x-2}{2}-\frac{x-3}{8}=\frac{x-4}{4}$ la raíz es:

A) –2　B) –3　C) 3　D) 2　E) 4

(06) Resuelve $\frac{2x}{x-3}-1=\frac{2x+1}{6}$

A) 4　B) 1　C) No tiene solución　D) 0　E) 2

(07) Resuelve $\frac{3x-1}{x-2}=\frac{3x-7}{x+4}$

A) 4/3　B) 2/3　C) 3/4　D) 1/3　E) 1

(08) Resuelve $\frac{x-3}{8}-\frac{3+5x}{9}=\frac{2x+1}{6}$

A) –63/55　B) 55/63　C) 5/6　D) 6/5　E) 1

(09) Resolver: $(4-5x)(4x-5)=(10x-3)(7-2x)$

A) 1/15　B) 2/35　C) 1/35　D) 4/9　E) 3/17

(10) Resolver: $(x+3)^3-x^3-9x^2=54$

A) 0　B) –1　C) 1　D) 2　E) –2

(11) Resolver: $x-5+\frac{4}{x-6}=7-x+\frac{4}{x-6}$

A) 6　B) –6　C) 6 y –6　D) indeterminado　E) incompatible

(12) Resolver: $x-4+2\sqrt{5-x}=8-x+\sqrt{20-4x}$

A) 6　B) –6　C) 6 y –6　D) indeterminado　E) incompatible

(13) Hallar el valor de «x» en:

$$2+\frac{5}{x-2}=\frac{(x+1)^2-4}{x-2}-x-2$$

A) $x\in R$　B) $x\in\phi$　C) $x=\frac{1}{3}$　D) $x\in R-\{2\}$　E) $x=\frac{3}{2}$

(14) Resolver: $\frac{1}{3+\frac{1}{8\frac{1}{5}-x}}=\frac{1}{3+\frac{1}{x+\frac{1}{5}}}$

A) 4　B) 3/15　C) 33/5　D) 3　E) 1

* RESOLVER EN CADA CASO :

(15) $\frac{m}{x}+\frac{n}{m}=\frac{n}{x}+1$

A) n　B) m　C) 0　D) 1　E) n + m

(16) $\frac{a-x}{a}-\frac{b-x}{b}=\frac{2(a-b)}{ab}$

A) a　B) b　C) ab　D) a+b　E) 2

(17) $x+\sqrt{4x+1}=5$

A) 1　B) 2　C) 3　D) 4　E) 5

(18) $2x-\sqrt{x-1}=3x-7$

A) 1　B) 2　C) 3　D) 4　E) 5

(19) $\sqrt{x+\sqrt{x+8}}=2\sqrt{x}$

A) 1　B) 2　C) 3　D) 4　E) 5

(20) $\sqrt{x-3}+\sqrt{2x+1}-2\sqrt{x}=0$

A) 1　B) 2　C) 3　D) 4　E) 5

TAREA DOMICILIARIA

* RESOLVER LAS SIGUIENTES ECUACIONES :

(01) $15x-10=6x-(x+2)+(-x+3)$

A) 1　B) 2　C) 3　D) 4　E) 5

(02) $\frac{a}{x}+\frac{2P-x}{x}=1+\frac{a}{P}$

A) aP　B) P　C) a　D) a+P　E) 2P

(03) $\frac{1}{2}\left(x-\frac{7}{3}\right)-\frac{1}{3}\left(x-\frac{7}{4}\right)+\frac{1}{4}\left(x-\frac{7}{5}\right)=0$

A) $\frac{27}{31}$　B) $\frac{56}{25}$　C) $\frac{45}{17}$　D) $\frac{66}{35}$　E) $\frac{25}{56}$

(04) $\frac{2x-5}{2x-6}+\frac{2(x-1)}{x-3}=\frac{3}{8}+\frac{3(2x-15)}{4x-12}$

A) 3　B) 9　C) –5　D) –7　E) –9

(05) Si a, b y c son constantes positivas; hallar «x» en:

$\frac{x-a}{b+c}+\frac{x-b}{a+c}+\frac{x-c}{a+b}=3.$

Señalar como respuesta: $E=\frac{(a+b-x)^2}{c}$

A) a　B) b　C) c　D) abc　E) a+b+c

TERCERA PRACTICA DIRIGIDA

POTENCIACION

(01) Si:

$A=\underbrace{2\times2\times2\times2\times\dots\dots\times2}_{9\text{ veces}}\ \wedge\ B=\underbrace{2+2+2+\dots\dots+2}_{128\text{ veces}}$

Halle: $(A-B)\dfrac{A}{B}$

A) 518 B) 300 C) 1 D) 300 E) 512

(02) Simplifique: $\dfrac{25^2\times 36^2\times 32}{30^4\times 8^3}$

A) $\dfrac{1}{16}$ B) $\dfrac{1}{4}$ C) $\dfrac{1}{2}$ D) 2 E) 5

(03) Reducir: $\dfrac{12^{10}\times 18^5\times 16^{-1}}{8^5\times 54^6}$

A) 12 B) 9 C) 6 D) 24 E) 18

(04) Calcular: $C=-\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{-3}+3\left(\dfrac{1}{5}\right)^{-2}-\dfrac{5}{49}\left(\dfrac{1}{7}\right)^{-2}$

A) 97 B) 96 C) 95 D) 94 E) 93

(05) Reducir: $M=\dfrac{x\left(x^2\left(x^3\right)^{-1}\right)^{-2}}{x^{-2}\times x^{-3}}$

A) x^6 B) x^7 C) x^8 D) x^9 E) x^{10}

(06) Calcular: $R=\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{-3}+\left(-\dfrac{1}{7}\right)^{-2}+(-3)^2$

A) 50 B) −50 C) 48 D) 30 E) 46

(07) Simplificar: $\left[\dfrac{2^{m+3}\times 4^{m+2n}}{8^{m-2}\times 16^{n+2}}\right]^3$

A) 2 B) 4 C) 6 D) 8 E) 16

(08) Calcular: $\dfrac{2^{n+3}-2^{n+1}}{2\left(2^{n-1}\right)}$

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

(09) Simplificar: $\dfrac{3^{n+1}+3^{n+2}+3^{n+3}}{3^{n-1}+3^{n-2}+3^{n-3}}$

A) 3^3 B) 3^4 C) 3^5 D) 3^6 E) 3^7

(10) Reducir: $\dfrac{\overbrace{(5\times 5\times\ldots\times 5)}^{10\text{ veces}}\overbrace{(15\times 15\times\ldots\times 15)}^{7\text{ veces}}}{81^2\times 5^{15}}$

A) 15 B) $\dfrac{125}{9}$ C) $\dfrac{5}{27}$ D) $\dfrac{25}{3}$ E) $\dfrac{3}{5}$

(11) Reducir: $P=\dfrac{2^{a+3}\times 4^{a+2b}}{8^{a-2}\times 16^{b+2}}$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

(12) Reducir: $P=\dfrac{2^{a+1}+2^{a+2}+2^{a+3}+2^{a+4}}{2^{a-1}+2^{a-2}+2^{a-3}+2^{a-4}}$

A) 1 B) 2 C) 16 D) 32 E) 64

(13) Efectuar: $M=2^{2a+2}-(0{,}25)\times 4^{a+2}$

A) 0 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

(14) Efectuar: $P=\dfrac{\left(2^4\right)^{-a}\left(2^2\right)^3}{2^{2^2}\times\left(2^{-2^2}\right)^a}$

A) 2 B) 4 C) 1 D) 1/2 E) 1/4

(15) Reduzca: $M=\dfrac{9^n+2^{2n}-4^n}{9^{n-1}}$

A) 7 B) 8 C) 9 D) 3 E) 5

(16) Si: $a^b=2;\ b^a=5$

Calcular: $a^{b^{a+1}}+b^{a^{b+1}}$

A) 25 B) 37 C) 32 D) 29 E) 57

(17) Reduzca: $\dfrac{2^{4+n}+2^{3+n}+2^{2+n}+2^{1+n}}{15\times 2^n}$

A) 2 B) 8 C) 4 D) 0 E) 5

(18) Si: $x^x=5$

Calcula: $x^{x^{x+1}}$

A) 25 B) 625 C) 3125 D) 125 E) 5

(19) Si: $(a)^{\frac{1}{a}}=3$; $a\in Z^+$, reducir: $\dfrac{5\times 3^a+7\times a^{\frac{1}{a}}+(3^a)^2}{42+10\times 3^a+2a^2}$

A) 2 B) $\dfrac{1}{2}$ C) $\dfrac{1}{4}$ D) 8 E) 12

(19) Si: $x^x=2$; hallar el valor de: $A=x^{2x^{1+x^{1+x}}}$

A) 16 B) 32 C) 64 D) 128 E) 256

TAREA DOMICILIARIA

(01) Reducir: $\underbrace{n^n+n^n+n^n+\ldots+n^n}_{n^n\text{ veces}}-\underbrace{n^2\times n^2\times n^2\ldots n^2}_{\text{"n" veces}}$

A) 7 B) 1 C) 0 D) 3 E) 5

(02) Efectuar: $N=\dfrac{27^{b+1}\times 3^{2a-1}}{9^{a+b}\times 3^{b+2}}$

A) 1 B) 9 C) 27 D) 3 E) 3^a

(03) Efectuar: $T=\dfrac{63\left(3^{a+4}\right)}{3^{a+4}+3^{a+2}-3^{a+3}}$

A) 9 B) 27 C) 81 D) 243 E) 3^a

(04) Simplificar: $M=\dfrac{2^{n+1}\times 4^{-2n+1}+8^{-n+2}}{16\left(2^n\right)^{-3}}$

A) 4,5 B) 2,5 C) 3,5 D) $\sqrt{3}$ E) $\sqrt{2}$

(05) Siendo $ab\neq 0$. Al reducir: $\left[\dfrac{a^b\times b^a}{a^a\times b^b}\right]\left[\dfrac{b}{a}\right]^{b-a}\times(ab)^{a^{ab^c}}$

se obtiene:

A) 1 B) ab C) a^3 D) $\frac{a}{b}$ E) $\frac{b}{a}$

CUARTA PRACTICA DIRIGIDA

RADICACIÓN

01 Al reducir, se obtiene: $N = 8^{-27^{-9^{-4^{-0,5}}}}$

A) 0,25 B) 0,75 C) 0,5 D) 2,5 E) 2

02 Reduzca: $\left(\frac{\sqrt[8]{256} - \sqrt[6]{9}}{\sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{-3}}\right)^{2^{-2^{0}}}$

A) 7 B) 1 C) 0 D) 3 E) 5

03 Simplificar la expresión:

$$D = \frac{\sqrt[4]{125} \cdot \sqrt{\sqrt{5^7}} \cdot \sqrt{5}}{\sqrt{5}^{6} \cdot \sqrt{5\sqrt{5}}}$$

A) 1/25 B) 1/5 C) 5 D) 25 E) 1

04 Si: $x = 16^{4^{-2^{-1}}}$; $y = 4^{-2^{-1}}$; $z = \sqrt[4]{3}^{16^{4^{-2^{-1}}}}$

Calcule: $\sqrt{(xy)^2 z + 4}$

A) 2 B) 4 C) 1 D) 3 E) 5

05 Simplifique la expresión:

$$N = \sqrt[16]{16}\left(\sqrt{\frac{18}{4}}\right)\left(\frac{\sqrt{72} + \sqrt{50} - 2\sqrt{32}}{\sqrt{18}}\right)$$

A) $4\sqrt{2}$ B) $3\sqrt[4]{8}$ C) $\sqrt{2}$ D) $\frac{5}{2}\sqrt[4]{8}$ E) 2

06 Al efectuar: $E = \dfrac{\sqrt{32} - \sqrt{8}}{\left(\sqrt{3}^{2\sqrt{3}^{2}} - \sqrt{5}^{4}\right)^{\frac{1}{2}}}$

A) 2 B) 0 C) 1 D) 3 E) 5

07 Calcular: $\left(\frac{\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}}{\sqrt{2\sqrt[4]{2}}}\right)^{8}$

A) 2 B) 4 C) 1 D) 3 E) 5

08 Calcular: $E = \left(4\sqrt{0,5\sqrt{0,5\sqrt{0,5}}}\right)^{4}$

A) $\sqrt[4]{2}$ B) $16\sqrt{2}$ C) $\sqrt[8]{32}$ D) $\sqrt{2}$ E) $\sqrt[8]{2}$

09 Calcular el valor reducido de: $E = \left(\frac{2^{-3} + 3}{1 - 3^{-2}}\right)^{-\frac{1}{2}}$

A) 8/15 B) 4/5 C) 7/3 D) 1/30 E) 1

10 Efectuar: $E = \dfrac{\overbrace{\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{a} \cdots \sqrt[3]{a}}^{45\ factores}}{\underbrace{\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} \cdots \sqrt{a}}_{20\ factores}} \div \dfrac{a^4}{a^{-1}}$

A) a B) 1 C) 2 D) 2a E) 3

11 Calcular el equivalente de: $R = \left(\sqrt[3]{\sqrt[4]{\sqrt{x^7}}}\right) + \sqrt[12]{x^{-7}}$

A) $\sqrt[7]{x^8}$ B) $\sqrt[7]{x^4}$ C) $\sqrt[4]{x^7}$ D) $\sqrt[8]{x^7}$ E) $\sqrt[4]{x^9}$

12 Calcular el equivalente de:

$$T = \sqrt[4]{\sqrt[7]{x^5}} + \sqrt[3]{\sqrt{x\sqrt[4]{x\sqrt{x^2}}}}$$

A) $\sqrt[12]{x}$ B) $\frac{1}{\sqrt[14]{x}}$ C) $\frac{1}{\sqrt[7]{x}}$ D) $\sqrt[28]{x}$ E) $\sqrt[8]{x}$

13 Simplificar: $\left(\sqrt[b^b]{b^{b^{b^2-1}}}\right)^{b^{b-b^2}}$

A) $b^{b^{-1}}$ B) b^{-1} C) b^{-2} D) b^{-3} E) b^{-4}

14 Simplificar: $\dfrac{\left(\sqrt[5]{x^2}\right)^3 \sqrt[15]{x} \cdot \sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[5]{x^3}}$

A) $\sqrt[3]{x}$ B) $\sqrt{x}$ C) x D) 1 E) $\frac{1}{x}$

15 Hallar n si al reducir:

$x\left(\sqrt[3]{\dfrac{x^n\sqrt{x^n}}{x \cdot x^{\frac{n-2}{4}}}}\right)$, el exponente de x es 5.

A) 8 B) 11 C) 9 D) 10 E) 12

16 Simplificar: $E = \sqrt[n]{\dfrac{1+2^n}{1+2^{-n}}}$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 0

17 Calcular el valor de: $R = \left(\sqrt{\sqrt{6}} \cdot \sqrt{6}^{16^{-1/4}}\right)^{2}$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 5 E) 6

18 Efectuar: $A = \left(2\sqrt{3}\right)^2 \cdot \left\{\left[\left(38\sqrt{74}\right)^5\right]^0\right\}^{18}$

A) 0 B) 1 C) 6 D) 12 E) 3824

19 Calcular el equivalente de: $Q = \sqrt[\sqrt{x}]{x^{\sqrt[3]{x\sqrt{x}}}}$

A) 1 B) 1–x C) x D) 3 E) 0

20 Si el exponente final de x es 15 en:

$\left(\dfrac{\sqrt[a]{x^{a+1}\sqrt[a]{x^{a^2+2}\sqrt[a]{x^{a^3+3}}}}}{\sqrt[a]{x\sqrt[a]{x^2\sqrt[a]{x^3}}}}\right)^{a}$. Halle a

A) 8 B) 5 C) 3 D) 3a E) 1

TAREA DOMICILIARIA

01 Simplificar: $P = \dfrac{\sqrt[4]{a^3b^5} \cdot \sqrt[5]{ab^2}}{\sqrt[20]{a^{19}b^{13}}}$

A) a B) b C) ab D) a/b E) b/a

(02) Reducir: $\sqrt[n]{\dfrac{18^n+12^n}{6^n+4^n}}$

A) 4 B) 6 C) 3 D) 9 E) 8

(03) Simplificar: $S=\left[\sqrt[b^b]{b^{b^{b^2+1}}}\right]^{b^{b-b^2}}$

A) b B) b^b C) $\dfrac{1}{b}$ D) b^{-1} E) b^2

(04) Simplificar: $\dfrac{\sqrt[3]{a^2b}\cdot\sqrt[6]{ab^2}}{\sqrt[12]{a^{-2}b^{-4}}}$

A) a B) 1 C) b D) ab E) N.A.

(05) Reducir: $\left(\dfrac{a^{1-x}+b^{1-x}}{a^{x-1}+b^{x-1}}\right)^{\frac{1}{1-x}}$

A) a^2b B) ab C) $a^{-2}b$ D) a^3b E) a^4b

QUINTA PRACTICA DIRIGIDA

Leyes de Exponentes

(01) Reducir: $A=\dfrac{2^{x+5}.16^{x+4}}{8^{x+3}.4^{x+2}}$

A) 64 B) 128 C) 256 D) 512 E) 1024

(02) Reducir: $E=\dfrac{8^{2x+1}+4^{3x+2}}{2^{3x-5}.\,2^{2x+7}}$

A) 2 B) 4 C) 6 D) 8 E) 12

(03) Sabiendo que: $P=3\sqrt[3]{3}^{\sqrt[3]{3}\sqrt[3]{3}^{3}\sqrt[3]{3}}$

$$Q=\sqrt{2}\sqrt{2}\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}\sqrt{2}}}$$

calcular : $P+Q$

A) 36 B) 13 C) 15 D) 17 E) 23

(04) Reducir: $M=\left(4^{3^{-2/7}}\right)^{3^{9/7}}$

A) 4 B) 16 C) 64 D) 128 E) 256

(05) Si: $ab=1$. Hallar: $E=(a^a\sqrt[b]{b})^{a/b}$

A) a B) ab C) a^2 D) $\sqrt[a]{a}$ E) $\sqrt[b]{b}$

(06) Reducir : $E=\dfrac{\sqrt[\frac{\sqrt{8}}{2}]{\sqrt{8}^{\sqrt{2}}}}{\sqrt[4\sqrt{2}]{\sqrt{2}^{\sqrt{32}}}}$

A) 1 B) 2 C) 4 D) $\sqrt{2}$ E) $\sqrt[2]{4}$

(07) Calcular : $x=\dfrac{15^6\times6^9}{27^5\times10^5}$

A) 40 B) 80 C) 200 D) 160 E) 50

(08) Calcular: $N=32^{-2/5}\times81^{3/4}\times27^{0/4}\times32^{-0/2}$

A) 9/2 B) 27/4 C) 3/2 D) 9/4 E) 108

(09) Efectuar :

$$E=(4^{-1/2}+27^{-2/3})^{-1}\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}+\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}\right\}$$

A) 6 B) 12 C) 18 D) 24 E) 11

(10) Si: $3^x=2$ halle : $E=\left(\sqrt[3^x]{3^{3^{2x}}+3^x}\right)^x$

A) 27 B) 8 C) 81 D) 729 E) 11

(11) Reducir : $E=\dfrac{2^{x+3}(3x^{-1})^x}{6^x\cdot x^{-x}}$

Para $x=-2^{-1}$

A) 1/8 B) 8 C) 41/6 D) 6 E) 16

(12) Simplificar: $\dfrac{6^x+10^x}{2^{x+1}+2^{x+4}}$

Si x verifica la ecuación: $3^x+5^x=6$

A) 6 B) 1/3 C) 3 D) 2 E) 1/2

(13) Sabiendo que: $\sqrt[3]{a}=\sqrt[5]{b}=\sqrt[7]{c}$

Halle: $E=\left(\dfrac{\sqrt[5]{ac}}{\sqrt[3]{b}}\right)^9$

A) 1 B) b C) c D) abc E) a

(14) Si : $x^n\ y^m=10^n$; $x^m\ y^n=10^m$

Hallar : $C=(x\ y)^{y/x}$

A) 10^{10} B) $\left(\dfrac{1}{10}\right)^{\frac{1}{10}}$ C) $\left(\dfrac{1}{10}\right)^{10}$ D) $10^{\frac{1}{10}}$ E) 10

(15) Si : $x^{x^{x^x}}=n$; $x^{x^n}=n^x$

Hallar : $E=\dfrac{n}{x^x+1}$

A) 1 B) n C) x^x D) x E) x^{x-n}

(16) Hallar xyz si:

$$\sqrt[n+3]{x}=(2^{n+2})^{n+5}$$

$$\sqrt[n+7]{y}=(2^{n+8})^{n}$$

$$\sqrt[2n+7]{z}=2^{-5}$$

A) 1/32 B) 8 C) 1/16 D) 1/6 E) 16

(17) Sabiendo que:

$$\frac{\left(\frac{x}{y}\right)^{x+y}\left(\frac{x}{y}\right)^{x-y}}{\left(\frac{y}{x}\right)^{x+y}\left(\frac{y}{x}\right)^{x-y}}=\left(\sqrt[y]{\frac{x}{y}}\right)^x$$

La relación que existe entre «x» e «y» es :

A) $x=y$ B) $x=y^2$ C) $x=4y$ D) $x=4y^2$ E) $x=2y^2$

18 Reducir: $\dfrac{\sqrt[4]{3^{2x+1}}\ \sqrt[3]{3}^{\,x+2}}{\sqrt[12]{3}\ \sqrt[6]{3^{5x+3}}}$

A) 1 B) $\sqrt{3}$ C) $\sqrt[3]{3}$ D) $\sqrt[4]{3}$ E) $\sqrt[6]{3}$

19 Reducir para 37 radicales: $\left(\sqrt[5]{\dfrac{4}{\sqrt[5]{\dfrac{\frac{4}{M}}{\sqrt[6]{\dfrac{4}{\sqrt[3]{2}}}}}}}\right)^{3}$

A) $\sqrt[5]{2}$ B) $\sqrt[4]{2}$ C) $\sqrt[3]{2}$ D) $\sqrt{2}$ E) 2

20 Reducir: $\sqrt[x^{x+n}]{x^{x^{x+n}}+x^{x+2n}}$

Para: $x^{x^n}=a$

A) ax B) x^a C) a^x D) x^3 E) a^{-x}

21 Siendo: $n=\dfrac{x^{-3}}{x^{-6}}\left[\dfrac{x^{-6}}{x^{-3}}\right]^2$

Reducir: $\dfrac{n^{-3}}{n^{-6}}\left[\dfrac{n^{-6}}{n^{-6}}\right]^2$

A) x^{18} B) x^8 C) x^5 D) x^3 E) x

22 Si: $x=-\frac{1}{2}$ indicar lo correcto.

A) $x+1^x=\sqrt{2}$ B) $-x^x=\sqrt{2}$

C) $\dfrac{2^{-4x}}{2x}=4$ D) $x^{1-2x}=0,25$

23 Si: $5^a=0,25$. Calcular: $\sqrt[a]{16}$

A) 0,04 B) 0,02 C) 0,16 D) 0,08 E) 0,01

24 Reducir: $E=\sqrt[2^{18}]{\left(4^{64^2}\right)^8\times 2^{16^4}}$

A) $\sqrt[8]{2}$ B) $\sqrt[4]{2}$ C) $\sqrt[4]{32}$ D) $\sqrt[4]{8}$ E) $\sqrt{2}$

SEXTA PRACTICA DIRIGIDA

01 Indique verdadero ***(V)*** o falso ***(F)*** según corresponda :

( ) $\underbrace{a.a.a......a}_{\text{"n" veces}}=a^n\,/\,n\in\mathbb{R}$

( ) $-8^0+3^{2^{4^0}}=8$

( ) $a^{-2}=\dfrac{1}{a^2},\forall a\in\mathbb{R}$

A) VFV B) VVF C) FVV D) FVF E) FFV

02 Simplificar: $A=\dfrac{2^{x+4}+6\times 2^{x+1}}{10\times 2^x+2^{x+2}},x\in\mathbb{N}$

A) 1 B) 2 C) 2x D) 2x + 1 E) 2x - 1

03 Simplificar la expresión: $\sqrt[n]{\dfrac{3^{n+1}}{\sqrt[n+2]{9\sqrt{9^n}}}}$

A) 1 B) 1/3 C) 3 D) $\sqrt{3}$ E) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

04 Simplificar la expresión:

$E=\dfrac{5^{2x+1}-25^{x+1}}{5^{2x}\div 5}$ Indicar: $\sqrt{-E}$

A) 10 B) -10 C) $\sqrt{10}$ D) 100 E) 1

05 Efectuar: $\dfrac{5^9.6^3.12^4.15^6}{3^{13}.5^4.10^{11}}$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

06 Calcular: $A=27^{-9^{-2^{-1}}}+8^{-9^{-2^{-1}}}$

A) 8 B) 5/6 C) 2 D) 0 E) 5

07 Efectuar:

$$A=\frac{81^n-\left(3^{-4}\right)^{-1}+3^{n^2}\left(3^{n-1}\right)^{2-n}}{\left(3^{-2+n}\right)^2\left(3^{-1}\right)^{1-n}}$$

A) 3^0 B) 3^1 C) 3^2 D) 3^3 E) 3^4

08 Reducir:

$$P=\frac{x^{3n}+x^{2n}+x^n}{x^n+x^{-n}+1}\div\frac{x^{3n}+1}{x^{2n}+x^{-n}},x\neq 0$$

A) 0 B) x C) x^n D) x^{-n} E) 1

09 Sabiendo que:

$P=\underbrace{2^4.2^4.2^4.....2^4}_{4^2\text{ veces}}\ \wedge\ N=\underbrace{8^4+8^4+8^4+...+8^4}_{4^8\text{ veces}}$

calcular el valor de: $\sqrt[5]{\dfrac{P}{N}}$

A) 4 B) 8 C) 16 D) 32 E) 64

10 Calcule el valor aproximado de:

$$\sqrt{19+\sqrt{3\sqrt{24\sqrt{3\sqrt{24....}}}}}$$

A)2 B)3 C) 4 D)5 E)6

11 Si «x» es diferente de «y», simplificar:

$$\left(\sqrt[3]{\frac{m^x \times n^y}{m^y \times n^x}}\right)^{\frac{1}{x-y}}$$

A) $\frac{m}{n}$ B) $\frac{n}{m}$ C) $\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{1}{3}}$ D) $\left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{1}{3}}$ E) $\left(\frac{m}{n}\right)^{0}$

12 Teniendo en cuenta: $T^T = 3$, calcular el valor de: $T^{2T} + T^{T^{T+1}}$

A)27 B)32 C) 36 D) 40 E) 42

13 Efectuar: $\left(a^{2^x}\right)^{2^{-x}} \cdot \left(a^{-2^{x-3}}\right)^{2^{5-x}}$

A)1 B)a^{-1} C) a^{-2} D) a^{-3} E) a

14 Reducir la expresión: $E = \left(\dfrac{x^a \times y^{-b^2}}{b^{-1}\sqrt{y^a \times x^{-1}}}\right)^{(a+b)^{-1}}$

A) xy^b B) $\frac{1}{xy^b}$ C) $\frac{x}{y^b}$ D) $\frac{y^b}{x}$ E) 1

15 Reducir la expresión: $\sqrt[ab]{\dfrac{\left(a^{-b} \times b^a\right)^{-c}}{\left(a^b\right)^{c-a}\left(b^a\right)^{b-c}}}$

A)a/b B)b/a C) ab D) $1/ab$ E) 1

16 Si: $m = 64n$, reducir: $P = \dfrac{\sqrt{n\sqrt{m}}\,\sqrt{m}}{\sqrt{m\sqrt{n}}\,\sqrt{n}}$

A) 8 B) $2\sqrt{2}$ C) 4 D) $\sqrt[4]{2}$ E) $2\sqrt[4]{2}$

17 Reducir a su mínima expresión:

$$\sqrt[mn]{\frac{20^{mn+1}}{2^{2mn+4} + 2^{2mn+2}}}$$

A)12 B)10 C) 5 D) 4 E) 2

18 Reducir la expresión: $\left(\sqrt[1-\frac{1}{h}]{\left(h^{h^{-2}}\right)^{h^2-1}}\right)^{\frac{h}{1+h}}$

A) h B) $\frac{1}{h}$ C) $\sqrt{h}$ D) $\frac{1}{\sqrt{h}}$ E) h^2

19 Sabiendo que: $A = \left\{\left(4^x + 8^x\right)\left(36^x + 72^x\right)^{-1}\right\}^{\frac{1}{x}}$

señalar: $\sqrt{A}$

A)2 B)3 C) 1/3 D) 1/2 E) 1

20 Si: $M = \sqrt{7\sqrt{5\sqrt{7\sqrt{5\ldots}}}}$

$N = \sqrt{5\sqrt{7\sqrt{5\sqrt{7\ldots}}}}$

indicar: $\sqrt[5]{NM - \sqrt[3]{3}^{\sqrt[3]{3}^{\sqrt[3]{3}^{3}}}}$

A)1 B)2 C) -1 D) -2 E) $\sqrt[5]{5}$

CLAVES

ECUACIONES ELEMENTALES I

01) A	02) C	03) D	04) C	05) B
06) B	07) D	08) D	09) A	10) D
11) C	12) A	13) A	14) C	15) B
16) C	17) D	18) E	19) D	20) C
01) B	02) D	03) D	04) D	

POTENCIACIÓN

01) E	02) A	03) B	04) A	05) C
06) A	07) A	08) E	09) B	10) B
11) B	12) D	13) A	14) B	15) C
16) E	17) A	18) C	19) B	
01) C	02) A	03) C	04) A	05) B

RADICACIÓN

01) C	02) B	03) B	04) B	05) D
06) A	07) B	08) B	09) A	10) B
11) D	12) B	13) A	14) C	15) D
16) B	17) E	18) D	19) C	20) B
01) B	02) C	03) B	04) D	05) B

LEYES DE EXPONENTES

01) C	02) C	03) B	04) C	05) B
06) B	07) B	08) B	09) C	10) B
11) B	12) B	13) E	14) D	15) A
16) A	17) D	18) B	19) E	20) A
21) A	22) D	23) A		

SEXTA PRACTICA (TEORIA DE EXPONENTES)

1)D	2)B	3)C	4)A	5)A	6)B	7)D	8)B	9)C	10)D
11)C	12)C	13)D	14)C	15)A	16)B	17)B	18)A	19)C	20)B



ECUACIONES EXPONENCIALES 03

OBJETIVOS :

* Aplicar lo aprendido en la teoría de exponentes en la resolución de ecuaciones exponenciales.

* Descomponer números en una ecuación exponencial, para acomodar en forma conveniente sus miembros, y aplicar uno de los principios fundamentales con que se resuelven aquellas.

INTRODUCCION :

La palabra ÁLGEBRA viene de ***«ilm al-jabr w'al miqabala»*** título árabe del libro escrito en el siglo *IX* por el matemático muhammad ibn musa ***al-khwarizmi***. éste título se traduce como *«ciencia de la restauración y la reducción»*

El álgebra es una rama de las matemáticas que estudia la forma de resolver las ecuaciones, por ello, todas las operaciones algebraicas, reglas, fórmulas, definiciones, etc. tienen un solo objetivo: ***el cálculo de incognitas***. una de las características es que utiliza símbolos o letras para representar números.Por ejemplo la letra *«x»*, puede representar el valor de una temperatura, una edad, una velocidad o la medida de un ángulo; pero el álgebra no estudia estas magnitudes, nos muestra las operaciones en general sin precisar qué tipo se está tratando.

ECUACIONES TRASCENDENTES

son aquellas ecuaciones donde al menos uno de sus miembros no es una expresión algebraica, asi pues tenemos:

I) formando parte de un exponente:

$3^{x-2}=27$; $5^{3x}=3025$

II) como base y exponente a la vez :

$7^{x}+x=51$; $x^{x}=256$

III) afectada por algún operador:

$\operatorname{sen}x=0,5$; $\operatorname{Log}_{2}x=512$

Observación:

una *EXPRESIÓN ALGEBRAICA* es un conjunto de números y letras relacionados entre sí por los operadores matemáticos de la adición, sustracción, multiplicación, división, potenciación y/o radicación ***, en un número limitado de veces.***

ECUACIÓN EXPONENCIAL

Es la ecuación trascendente donde la incógnita está como exponente en unos casos, y en otros como exponente y base.

EJEMPLOS:

* $25^{x}=1$ * $13^{x}+13^{x-1}=14$

* $x^{x}=0,25$

CRITERIOS DE RESOLUCIÓN

I) A BASES IGUALES . ENTONCES EXPONENTES IGUALES :

Para resolver una ecuación de este tipo, para los casos más elementales, se usa una secuencia de artificios, basados en las leyes de exponentes; junto con los siguientes principios.

$$\boxed{Si: b^{x}=b^{y} \Rightarrow x=y \ ; \ b\neq 0, b\neq \pm 1}$$

$$\boxed{Si: x^{n}=y^{n} \Rightarrow x=y \ ; \ n\neq 0}$$

NOTA :

si a ≠ b y ambos distintos de cero : $\boxed{x^{a}=y^{a} \Rightarrow x=0}$

EJEMPLOS:

* $Si: 2^{x+1}=2^{7} \Rightarrow x+1=7 \Rightarrow x=6$
* $Si: 5^{13}=(x+1)^{13} \Rightarrow 5=x+1 \Rightarrow 4=x$

EJERCICIO 1:

El valor de *«x»* que verifica la ecuación:

$9^{x+2}=27^{x-2}$, ***es:***

RESOLUCIÓN:

Expresando ambos miembros en una misma base:

$(3^{2})^{x+2}=(3^{3})^{x-2} \Rightarrow 3^{2x+4}=3^{3x-6}$

Aplicando el principio: $2x+4=3x-6$;

entonces: $x=10$

EJERCICIO 2 :

En la ecuación: $125^{x-3}=25^{x+1}$, el valor de *«x»* es:

RESOLUCIÓN:

* Expresando ambos miembros en base 5 :

$$\left(5^3\right)^{x-3}=\left(5^2\right)^{x+1}\Rightarrow 5^{3x-9}=5^{2x+2}$$

Aplicando el principio: $3x-9=2x+2$ entonces: $x=11$

EJERCICIO 3 :

Luego de resolver: $(2x-1)^{x+2}=(x+2)^{x+2}$, el valor de «x» es:

RESOLUCIÓN:

*Siendo $a\neq b$ y ambos distintos de cero:

$$\boxed{a^x=b^x\Rightarrow x=0}$$

Observe que $x+2\neq 0$, pues de lo contrario el segundo miembro sería: 0^0 (es una indeterminación). Entonces, aplicando el criterio: $2x-1=x+2\Rightarrow x=3$

II) FORMAS ANÁLOGAS:

Para resolver algunas ecuaciones trascendentes , a veces , es necesario recurrir al proceso de comparación comunmente llamado método de analogía , el cual consiste en dar forma a una parte de la igualdad tomando como modelo la otra .

Si: $\boxed{M^M=N^N\Rightarrow M=N}$

$$M\neq\frac{1}{2}\ ,\ N\neq\frac{1}{4}$$

EJEMPLO 1:

* Si: $x^{x^x}=16\Rightarrow x^{x^x}=2^4$

$$\Rightarrow x^{x^x}=2^{2^2}\Rightarrow x=2$$

EJEMPLO 2:

resolver : $x^{x^3}=3$

RESOLUCIÓN:

*transformando al segundo miembro se tendrá:

$$x^{x^3}=\sqrt[3]{3}^{\sqrt[3]{3}^3}\Rightarrow x=\sqrt[3]{3}$$

EJEMPLO 3 :

El valor de «x» en la ecuación : $x^x=\dfrac{\sqrt[3]{9}}{3}$,es:

RESOLUCIÓN:

Acomodando el segundo miembro como una potencia, de modo que la base y el exponente sean iguales:

$$x^x=\frac{3^{\frac{2}{3}}}{3}\Rightarrow x^x=3^{\frac{2}{3}-1}\Rightarrow x^x=\left(3^{-1}\right)^{\frac{1}{3}}\Rightarrow x^x=\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}$$

Luego , aplicando el principio: $x=\frac{1}{3}$

* ***En general:***

$$\boxed{x^{x^n}=a^{a^n}\Rightarrow x=a;a\neq 0;1\wedge\forall n\in\mathbb{Q}}$$

EJEMPLO 4 :

El valor de «x» que verifica la ecuación:

$$x^{x^5}=\sqrt[5]{4}$$

RESOLUCIÓN:

Fíjese con cuidado cómo se acomoda el segundo miembro, tratando de que su estructura sea la misma que la del primero:

$$x^{x^5}=\sqrt[5]{2}^2\Rightarrow x^{x^5}=\sqrt[5]{2}^{\sqrt[5]{2}^5}$$

De donde podemos afirmar, por la observación anterior, que: $x=\sqrt[5]{2}$

EJEMPLO 5 :

De la ecuación: $x^{x^7}=27^{729}$ el valor de «x» es:

RESOLUCIÓN:

En el segundo miembro, descomponiendo **27 y 729** en potencias de **3** , se tiene:

$$x^{x^7}=27^{729}=\left(3^3\right)^{3^6}=3^{3^7}$$

Luego, se puede afirmar que: $x=3$

NOTA

Debemos tener cuidado con el método de la analogía pues nos brinda una solución , pudiendo haber otras.

EJEMPLO:

en : $\sqrt[x]{x}=\sqrt{2}$ se observa que $x=2$

pero $\sqrt{2}=\sqrt[4]{4}$, con lo cual tenemos :

$\sqrt[x]{x}=\sqrt[4]{4}$ se observa que $x=4$

Observaciónes:

A) Si: $b^{\frac{m}{n}}=x\Rightarrow b=x^{\left(\frac{m}{n}\right)^{-1}}=x^{\frac{n}{m}}$

B) Si: $\underbrace{\left(x^{x^n}\right)^n=\left(x^n\right)^{x^n}}_{\textit{Artificio usual}}$

C) Si: $(a^n=b^n \wedge a \neq b) \Rightarrow n=0$

D) Si: $x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{x^n}}}}}} = n \rightarrow x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{x^n}}}}}} = \sqrt[n]{n}^{\sqrt[n]{n}^{\sqrt[n]{n}^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{\sqrt[n]{n}}}}}}} \longrightarrow x = \sqrt[n]{n}$

E) Si: $x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}} = 3 \rightarrow x^{\overbrace{x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}}^{a}} = a \rightarrow x^a = a \rightarrow x = \sqrt[a]{a}$

F) $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{4}}$

G) $\sqrt{2} = \sqrt[4]{4}$ H) $2^{-\sqrt{2}} = \left(\frac{1}{4}\right)^{\left(\frac{1}{4}\right)^{\left(\frac{1}{4}\right)}}$

I) $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)} = \left(\frac{1}{3\sqrt{3}}\right)^{\left(\frac{1}{3\sqrt{3}}\right)}$

J) $x^{-a^{-b^{-c^{-1}}}} = \left(\frac{1}{x}\right)^{\left(\frac{1}{a}\right)^{\left(\frac{1}{b}\right)^{\left(\frac{1}{c}\right)}}}$

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1:

Resolver: $8^{x-2} = 4^{x-1}$

A) 1 B) 2 C) 4 D) 5 E) -1

RESOLUCIÓN:

* Debido a que **8** y **4** (las bases), son potencias de **2**, entonces trataremos de formar bases iguales.

$$(2^3)^{x-2} = (2^2)^{x-1} \Rightarrow 2^{3(x-2)} = 2^{2(x-1)}$$

$\Rightarrow 3(x-2) = 2(x-1) \Rightarrow 3x-6 = 2x-2 \Rightarrow x = 4$

RPTA : "C"

PROBLEMA 2:

Resolver: $x^{2x^2} = 16^2$

A) 5 B) 6 C) 5 D) 2 E) 5^6

RESOLUCIÓN:

* Debido a que la incógnita se involucra en la base y en el exponente, entonces tratemos de formar una «analogía».

$x^{2x^2} = (4^2)^2$

$\Rightarrow (x^5)^{x^5} = 4^4 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x^2 = 2^2 \Rightarrow x = 2$

RPTA : "D"

PROBLEMA 3 :

En la ecuación: $\left(\frac{1}{7}\right)^{2x+3} = 5^{2x+3}$, el valor de «x» es:

RESOLUCIÓN:

Como $\frac{1}{7} \neq 5$; entonces, por la observación:

$2x+3 = 0 \Rightarrow x = -\frac{3}{2}$

PROBLEMA 4 :

Resolver: $2^{4^{x+3}} = 4^{2^{x+3}}$

RESOLUCIÓN:

En el segundo miembro, el exponente de **4** es: 2^{x+3}, por eso debemos poner ( ). Sabemos que: $4=2^2$,

reemplazando: $(2^2)^{2^{x+3}} = 2^{2(2^{x+3})} = 2^{2^{x+4}}$

* Luego: $2^{4^{x+3}} = 2^{2^{x+4}}$

Como las bases son iguales, entonces: $4^{x+3} = 2^{x+4}$

*Nuevamente: $(2^2)^{x+3} = 2^{2(x+3)} = 2^{2x+6} = 2^{x+4}$

De donde $2x+6 = x+4$; despejando $x=-2$

PROBLEMA 5 :

Al resolver: $\left(3^{17^x}\right)^{289^{x+3}} = \left(3^{17^3}\right)^{17^{33}}$

Calcular : $x^{x-8} + x^{12-x}$

RESOLUCIÓN:

* En ambos miembros, multiplicando los exponentes, resulta : $3^{17^x(289^{x+3})} = 3^{17^3(17^{33})} \Rightarrow 3^{17^x \times (17^2)^{x+3}} = 3^{17^{36}}$

* Igualando exponentes, resulta :

$$17^x \times 17^{2x+6} = 17^{3x+6} = 17^{36}$$

Nuevamente, igualando exponentes resulta:

$3x+6=36$, despejando: $x=10$ Reemplazando, se tiene: $10^2+10^2=200$.

PROBLEMA 6 :

Halle «x» si: $x^{x^{25}} = 5^{5^4}$

RESOLUCIÓN:

* Elevando a la 25: $\left(x^{x^{25}}\right)^{25} = \left(5^{5^4}\right)^{5\times5}$

* Realizando un intercambio de exponentes en cada miembro: $\left(x^{25}\right)^{x^{25}} = \left(5^5\right)^{5^4 5} = \left(5^5\right)5^5$

* Aplicando propiedad: $y^y = a^a \Rightarrow y = a$, resulta: $x^{25} = 5^5$ Despejando $x = \sqrt[5]{5}$

PROBLEMA 7:

Halle «a» si: $\left(a^n\right)^{a^{n^2}} = n$

RESOLUCIÓN:

* Sabemos que :

$$\left(a^n\right)^{a^{n.n}} = \left(a^n\right)^{(an)^n} \wedge n = \sqrt[n]{n}^{\,n} = \sqrt[n]{n}^{\sqrt[n]{n}^{\,n}}$$

* Reemplazando se tiene: $\left(a^n\right)^{\left(a^n\right)^n} = \sqrt[n]{n}^{\sqrt[n]{n}^{\,n}}$

* Aplicando la propiedad: $x^{x^n} = a^{a^n} \Rightarrow x = a$, resulta $a^n = \sqrt[n]{n}$

* Despejando, resulta : $a = \sqrt[n^2]{n}$

PROBLEMA 8 :

A partir de : $a^{2a-3b} = b^{28} \wedge b^{2a-3b} = a^7$, el valor de "$2a-3b$" es igual a:

RESOLUCIÓN:

* De la segunda ecuación despejando "b", se obtiene

$$b = \sqrt[2a-3b]{a^7}$$

* Reemplazando en la primera ecuación exponencial resulta: $a^{2a-3b} = \sqrt[2a-3b]{a^7}^{\,28} = a^{\frac{7\times 28}{2a-3b}}$

* Como las bases son iguales, igualando exponentes, se tiene: $2a-3b = \dfrac{7\times 28}{2a-3b}$ de donde $(2a-3b)^2 = 14^2 \Rightarrow 2a-3b = 14$

PROBLEMA 9 :

Un terno estándard cuesta x^x nuevos soles y un terno especial cuesta el triple que un terno estándard. Si se compran x ternos estándard y x ternos especiales, calcule el valor de x, si se gastó en total 324 nuevos soles.

RESOLUCIÓN:

Costo : x^x estándard , $3x^x$ especial

Gasto = (Cantidad).(Costo) $\Rightarrow 324 = x.x^x + x.3x^x$

Efectuando resulta:

$$4x^{x+1} = 1 \Rightarrow x^{x+1} = 81 = 3^4 = 3^{3+1} \Rightarrow x = 3$$

PROBLEMA 10 :

Si $a^a = 4$, calcule: $E = a^{a^{a+1}} + \left(a^{a^{2a+1}}\right)^{\frac{1}{8}}$

RESOLUCIÓN:

Acomodando la expresión que piden calcular: $E = a^{a^a a} + \left(a^{a^{2a} a}\right)^{\frac{1}{8}}$

sabemos que: $a^a = 4 \Rightarrow a^{2a} = 16$

Reemplazando: $E = a^{4a} + \left(a^{16a}\right)^{1/8}$

Aplicando la siguiente propiedad

$a^{m.n} = \left(a^n\right)^m ; \left(a^m\right)^n = a^{m.n}$ y reemplazando:

$E = (a^a)^4 + a^{2a}$ reemplazando otra vez lo anterior:

$E = 4^4 + 16 = 256 + 16 = 272$

PROBLEMA 11 :

Después de resolver la ecuación:

$$\sqrt[n]{\frac{x^n+5^n}{80^n+x^n}} = 0,25, \text{halle } E = \sqrt[x+12]{(x+5)^{x-4}}$$

RESOLUCIÓN:

* Tenemos: $\sqrt[n]{\dfrac{x^n+5^n}{80^n+x^n}} = \dfrac{1}{4}$ elevando a la «n», se obtiene $\dfrac{x^n+5^n}{80^n+x^n} = \dfrac{1}{4^n}$

* Multiplicando:

$$\left(x^n+5^n\right)4^n = 80^n + x^n \Rightarrow 4^n x^n + 20^n = 80^n + x^n$$

Factorizando y agrupando resulta:

$$x^n\left(4^n-1\right) = 80^n - 20^n = 20^n\left(4^n-1\right)$$

*Después de simplificar: $x^n = 20^n$, de donde: $x = 20$

*Luego, reemplazando:

$$E = \sqrt[20+12]{(20+5)^{20-4}} = \sqrt[32]{25^{16}} = 5$$

PROBLEMA 12 :

El valor de «x» que verifica la ecuación exponencial

$\left(x^{x^x}\right)^{x^{n-x}} = x^{x^{x^{x^n}}}$,es:

RESOLUCIÓN:

*Aplicando la propiedad:

$$(a^m)^n = a^{n.m}; m = x^x ; n = x^{n-x}$$

$$x^{x^x x^{n-x}} = x^{x^n} = x^{x^{x^{x^n}}} \Rightarrow n = x^{x^n}$$

(igualando los exponentes).

Pero: $n = \sqrt{n}^n = \sqrt{n}^{\sqrt{n}^n}$, *Luego* $x = \sqrt{n}$

PROBLEMA 13 :

Si $x^x = 2$. el valor de la expresión:

$$R = x^{2x^{1+x^{1+x}}}$$ es:

RESOLUCIÓN:

$I)\ x^{1+x} = x.x^x = 2x$

$II)\ x^{1+2x} = x.x^{2x} = 4x$

$III)\ R = x^{2\times 4x} = x^{8x} = \left(x^x\right)^8 = 2^8 = 256$

PROBLEMA 14 :

Resolver: $5^{5^{x-5}} = 3125^{25^{x+2}}$

RESOLUCIÓN:

$$3125 = 5^5 \Rightarrow \left(5^5\right)^{25^{x+2}} = 5^{5\times 25^{x+2}} \Rightarrow 5^{5^{x-5}} = 5^{5\times 5^{2x+4}}$$

A bases iguales se tiene exponentes iguales:

$$5^{x-5} = 5^{5\times 5^{2x+4}} = 5^{2x+5}$$

Una vez más, a bases iguales exponentes iguales:

$$x - 5 = 2x + 5 \Rightarrow x = -10$$

PROBLEMA 15 :

Resolver : $27^{27^x} = 3^{243^7}$

A) 5 B) 7 C) 34/7 D) 34/3 E) 6

RESOLUCIÓN:

$$(3^3)^{27^x} = 3^{243^7} \Rightarrow 3^{3\times 27^x} = 3^{243^7}$$

$\Rightarrow 3\times 27^x = 243^7 \Rightarrow 3\times(3^3)^x = (3^5)^7$

$\Rightarrow 3\times 3^{3x} = 3^{35} \Rightarrow 3^{1+3x} = 3^{35}$

$\Rightarrow 1+3x = 35 \Rightarrow x = 34/3$

RPTA : "D"

PROBLEMA 16 :

Resolver: $x^{x^{12}} = \sqrt{6}$

A) 3 B) $\sqrt[12]{6}$ *C) 9 D)* $\sqrt[18]{3}$ *E)* $\sqrt[3]{18}$

RESOLUCIÓN :

Elevando ambos miembros al exponente **12**, para provocar una forma análoga:

$$\left[x^{x^{12}}\right]^{12} = \sqrt{6}^{\,12} \Rightarrow (x^{12})^{x^{12}} = 6^6$$

$$\Rightarrow x^{12} = 6 \Rightarrow x = \sqrt[12]{6}$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 17 :

Hallar x en: $2^{x+1} \times 2^{3x-5} \times 2^{5x-9} = 2^5$

A) 4 B) 6 C) 8 D) 2 E) 10

RESOLUCIÓN:

* Por producto de bases iguales: $2^{9x-13} = 2^5$

* Entonces: $9x - 13 = 5 \Rightarrow 9x = 18$

$\Rightarrow x = 2$

RPTA : "D"

PROBLEMA 18 :

Resolver: $\sqrt[4]{8^{x-1}} = \sqrt[3]{4^{x+1}}$

A) 7 B) 6 C) 13 D) 17 E) 9

RESOLUCIÓN:

* Como **8** y **4** son potencias de **2**, se tiene:

$$\sqrt[4]{(2^3)^{x-1}} = \sqrt[3]{(2^2)^{x+1}} \Rightarrow \sqrt[4]{2^{3x-3}} = \sqrt[3]{2^{2x+2}}$$

* Por exponente fraccionario, resulta:

$$2^{\frac{3x-3}{4}} = 2^{\frac{2x+2}{3}}$$

* Igualando exponentes , se obtendrá:

$$\frac{3x-3}{4} = \frac{2x+2}{3}$$

* Despejando la incógnita: $x = 17$

RPTA : "D"

PROBLEMA 19 :

Hallar x en: $125^{x-3} = 25^{2x+1}$

A) –10 B) –9 C) –2 D) –11 E) –12

RESOLUCIÓN:

* Llevando todo a potencia de **5**:

$$(5^3)^{x-3} = (5^2)^{2x+1} \Rightarrow 5^{3(x-3)} = 5^{2(2x+1)}$$

* Entonces: $3x - 9 = 4x + 2 \Rightarrow -9 - 2 = 4x - 3x \Rightarrow -11 = x$

RPTA : "D"

PROBLEMA 20 :

Hallar x: $\sqrt[3]{\dfrac{2^7-2^x}{2^x-2}}=2$

A) 1 B) 4 C) 3 D) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{1}{2}$

RESOLUCIÓN:

* Del dato , se obtendrá:

$$\frac{2^7-2^x}{2^x-2}=2^3 \Rightarrow 2^7-2^x=2^3\times 2^x-2^4 \Rightarrow 128=8\times 2^x+2^x-16$$

$$\Rightarrow 144=9\times 2^x \Rightarrow 16=2^x \Rightarrow 2^4=2^x$$

* Entonces: $x=4$

RPTA : "B"

PROBLEMA 21 :

Resolver : $x^{x^{x^5}}=5$

A) 5 B) $\sqrt{5}$ C) $\sqrt[5]{5}$ D) 5^3 E) 5^5

RESOLUCIÓN:

*Tratando de formar una analogía, así:

$$x^{x^{x^5}}=\sqrt[5]{5}^5 \Rightarrow x^{x^{x^5}}=\sqrt[5]{5}^{\sqrt[5]{5}^5} \Rightarrow x^{x^{x^5}}=\sqrt[5]{5}^{\sqrt[5]{5}^{\sqrt[5]{5}^5}}$$

* Entonces : $x=\sqrt[5]{5}$

RPTA : "C"

PROBLEMA 22 :

Resolver : $5^{x+1}+5^x=150$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) –2

RESOLUCIÓN:

$$5^x\times 5^1+5^x\times 1=150$$

$$\Rightarrow 5^x(5^1+1)=150 \Rightarrow 5^x\times 6=150$$

$$\Rightarrow 5^x=\frac{150}{6} \Rightarrow 5^x=25 \Rightarrow 5^x=5^2 \Rightarrow x=2$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 23 :

Resolver: $x^{x^x}=2^{-\sqrt{2}}$

A) 2 B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{16}$ D) $\frac{1}{64}$ E) $\frac{1}{4}$

RESOLUCIÓN:

* Consideremos el *2do.* miembro para provocar una forma análoga:

$$2^{-\sqrt{2}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{2}}=\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]^{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\left(\frac{1}{4}\right)^{\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{4}}}$$

* Luego: $x^{x^x}=\left(\dfrac{1}{4}\right)^{\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{4}}} \Rightarrow x=\dfrac{1}{4}$

RPTA : "E"

PROBLEMA 24 :

Resolver: $\sqrt[6]{\dfrac{7^x+7^{14}}{7^2+7^x}}=7$

A) 5 B) 7 C) 8 D) 1 E) 14

RESOLUCIÓN:

* Transponer el índice:

$$\frac{7^x+7^{14}}{7^2+7^x}=7^6$$

$$\Rightarrow 7^x+7^{14}=7^6(7^2+7^x) \Rightarrow 7^x+7^{14}=7^8+7^6\times 7^x$$

$$\Rightarrow 7^x-7^6\times 7^x=7^8-7^{14} \Rightarrow 7^x\cancel{(1-7^6)}=7^8\cancel{(1-7^6)}$$

$$\Rightarrow 7^x=7^8 \Rightarrow x=8$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 25 :

Resolver: $x^{-2^{2^{-x}}}=2$

E indicar el valor de: $\sqrt[x]{x}$

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $-\frac{1}{4}$ D) $-\frac{1}{2}$ E) $\frac{1}{256}$

RESOLUCIÓN:

* Transponiendo $-2^{2^{-x}}$ al otro miembro:

$$x=2^{-2^{2^{-x}}}$$ Debido al Traspaso

* Formando analogía (usando artificios a la izquierda)

$$\sqrt[x]{x}^{\sqrt[x]{x}^{\sqrt[x]{x}^x}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)^x}} \Rightarrow \sqrt[x]{x}=\frac{1}{2}$$

RPTA : "A"

PROBLEMA 26 :

Resolver $\left(\sqrt[n]{x}\right)^{x^{n^n}}=\sqrt[n^n]{\sqrt[n^n]{n^{n^n}}}$

A) n B) $\sqrt[n]{n}$ C) n^n D) $\sqrt[n^n]{n}$ E) n^{-n}

RESOLUCIÓN:

* Haciendo: $a=n^n$

* Reemplazando: $\sqrt[n]{x}^{x^a}=\sqrt[a]{\sqrt[a]{n^a}}$

$$\Rightarrow \sqrt[n]{x^{x^a}}=\sqrt[a]{n} \Rightarrow x^{x^a}=\sqrt[a]{n^n}$$

$$\Rightarrow \left(x^{x^a}\right)^a=n^n \Rightarrow (x^a)^{x^a}=n^n$$

$$\Rightarrow x^a=n \Rightarrow x=\sqrt[a]{n} \Rightarrow x=\sqrt[n^n]{n}$$

RPTA : "D"

PROBLEMA 27 :

Resolver: $x^{\sqrt{x}^{\sqrt{2}}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

A)2 B)4 C)$2\sqrt{2}$ D)$2^{-2^{-1}}$ E)$2^{-4^{4^{-1}}}$

RESOLUCIÓN:

* Se tendrá que: $\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$x^{x^{\frac{\sqrt{2}}{2}}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

* Hagamos:

$$a=\frac{\sqrt{2}}{2}\ \text{ó}\ a=\frac{1}{\sqrt{2}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{4}}$$

* Entonces:

$$x^{x^x}=a\Rightarrow x^{x^a}=\sqrt[a]{a}^{\sqrt[a]{a}^a}\Rightarrow x=\sqrt[a]{a}$$

$$\Rightarrow x=\sqrt[\frac{\sqrt{2}}{2}]{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{\frac{2}{\sqrt{2}}}$$

$$\Rightarrow x=\left[\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right]^{\frac{1}{\sqrt{2}}}=\left(\tfrac{1}{2}\right)^{\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{4}}}=2^{-4^{-4^{-1}}}$$

RPTA : "E"

PROBLEMA 28 :

Resolver: $$\sqrt[6]{x}^{\sqrt[6]{x}^{\sqrt[6]{x}}}=\sqrt{2\sqrt{2}}^{\sqrt[6]{2\sqrt{2}}^{4+12\sqrt{2}}}$$

A) 2 B) 8 C) 64 D) 512 E) 128

RESOLUCIÓN:

* Considerando el miembro derecho.

$$\sqrt{2\sqrt{2}}^{\sqrt[6]{2\sqrt{2}}^4\cdot\sqrt[6]{2\sqrt{2}}^{12\sqrt{2}}}=\sqrt{2\sqrt{2}}^{2\cdot(2\sqrt{2})^{2\sqrt{2}}}$$

$$=(2\sqrt{2})^{(2\sqrt{2})^{2\sqrt{2}}}$$

$$\Rightarrow\sqrt[6]{x}^{\sqrt[6]{x}^{\sqrt[6]{x}}}=(2\sqrt{2})^{(2\sqrt{2})^{2\sqrt{2}}}$$

$$\Rightarrow\sqrt[6]{x}=2\sqrt{2}\Rightarrow x=(2\sqrt{2})^6=2^6\times\sqrt{2}^6$$

$$\Rightarrow x=64\times2^3=512$$

RPTA : "D"

PROBLEMA 29 :

Resolver: $$\left[2^{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{1}{2}}\right]^{\sqrt{2}}=x^{x^{\sqrt[4]{x}}\times\sqrt[4]{x}}$$

A) 0,5 B) 0,125 C) 0,25 D) 16 E) 4

RESOLUCIÓN:

$$\sqrt[2^{\sqrt{2}}]{(2^{-1})^{\sqrt{2}}}=\left(x^{\sqrt[4]{x}}\right)^{x^{\sqrt[4]{x}}}$$

$$\Rightarrow\left(2^{-\sqrt{2}}\right)^{2^{\frac{1}{\sqrt{2}}}}=\left(x^{\sqrt[4]{x}}\right)^{x^{\sqrt[4]{x}}}\Rightarrow\left(2^{-\sqrt{2}}\right)^{2^{-\sqrt{2}}}=\left(x^{\sqrt[4]{x}}\right)^{x^{\sqrt[4]{x}}}$$

$$\Rightarrow x^{\sqrt[4]{x}}=2^{-\sqrt{2}}=(2^{-2})^{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\left(\tfrac{1}{4}\right)^{\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{4}}}$$

$$\Rightarrow x^{x^{\frac{1}{4}}}=\left(\tfrac{1}{4}\right)^{\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{4}}}\Rightarrow x=\tfrac{1}{4}=0,25$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 30 :

Resolver: $$\sqrt[3]{x^2}^{\sqrt[6]{x^4}^{x^6}}=9$$

A)$\sqrt{3}$ B)$\sqrt[3]{3}$ C)$\sqrt[9]{3}$ D)$\sqrt[6]{3}$ E)$\sqrt[9]{9}$

RESOLUCIÓN:

* Haciendo: $\sqrt[3]{x^2}=a\Rightarrow x^2=a^3\Rightarrow x^6=a^9$
* Al reemplazar resulta:

$$a^{a^{a^9}}=9\Rightarrow a^{a^{a^9}}=\sqrt[9]{9}^{\sqrt[9]{9}^{\sqrt[9]{9}^9}}$$

$$\Rightarrow a=\sqrt[9]{9}\Rightarrow\sqrt[3]{x^2}=\sqrt[9]{9}$$

$$\Rightarrow x^2=\sqrt[9]{9}^3\Rightarrow x^2=\sqrt[3]{9}$$

$$\Rightarrow x=\sqrt{\sqrt[3]{9}}=\sqrt[3]{\sqrt{9}}=\sqrt[3]{3}$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 31 :

Resolver: $$(y-1)^{(y-1)^y}=\sqrt[\sqrt[8]{8}]{\sqrt[-8]{8}}$$

A) $\frac{1}{8}$ B) 8 C) $\frac{9}{8}$ D) $\frac{7}{8}$ E) $\frac{17}{8}$

RESOLUCIÓN:

* Haciendo: $x=y-1\Rightarrow y=x+1$

$$\Rightarrow x^{x^{x+1}}=\sqrt[\sqrt[8]{8}]{\sqrt[\sqrt[8]{8}^8]{8^{-1}}}\Rightarrow x^{x^{x+1}}=\sqrt[\sqrt[8]{8}^9]{\tfrac{1}{8}}=\left(\tfrac{1}{8}\right)^{\frac{1}{\sqrt[8]{8}^9}}$$

$$\Rightarrow x^{x^{x+1}}=\left(\tfrac{1}{8}\right)^{\sqrt[8]{\frac{1}{8}}^9}\left(\tfrac{1}{8}\right)^{\left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{9}{8}}}\Rightarrow x^{x^{x+1}}=\left(\tfrac{1}{8}\right)^{\left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{8}+1}}\Rightarrow x=\tfrac{1}{8}$$

$$\Rightarrow y-1=\tfrac{1}{8}\Rightarrow y=\tfrac{9}{8}$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 32 :

Resolver: $$\sqrt[4]{x^5}^{\sqrt[4]{x^5}^{\sqrt[4]{x^5}^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{\infty}}}}}}=x^{1+x^{1+x^{1+x^{\cdot^{\cdot^{\infty}}}}}}$$

A)$\sqrt[8]{4}$ B)$\sqrt[4]{2}$ C)$\sqrt[3]{4}$ D)$\sqrt[7]{4}$ E)$\sqrt[5]{4}$

RESOLUCIÓN:

* Haciendo:

$$n=\sqrt[4]{x^5}^{\sqrt[4]{x^5}^{\sqrt[4]{x^5}^{\cdot^{\cdot^{\infty}}}}}=x^{1+x^{1+x^{1+x^{\cdot^{\cdot^{\infty}}}}}}$$

(I): n; (II): $\sqrt[4]{x^5}$ …; (III): $x^{1+\dots}$

* De *(I)* y *(II)*, se obtiene:

$n=\sqrt[4]{x^5}^n\Rightarrow n=x^{\frac{5n}{4}}$ ....(α)

* De *(II)* y *(III)*, se obtendrá: $n=x^{1+n}$........(β)

* De (α) y (β): $x^{\frac{5n}{4}} = x^{1+n} \Rightarrow \frac{5n}{4} = 1+n \Rightarrow n=4$

* Piden: $\underbrace{x = \sqrt[n+1]{n}}_{de\ \beta} = \sqrt[5]{4}$

RPTA : "E"

PROBLEMA 33 :

Resolver:

$$3^{x-2}-1 = \sqrt[x]{x-1}^{\sqrt[x-1]{x}^{\sqrt[x]{x-1}^{\sqrt[x-1]{x}^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{\infty}}}}}}}$$

A) $\frac{4}{3}$ B) $\frac{3}{4}$ C) 4 D) 2 E) 3

RESOLUCIÓN:

* Haciendo : $a = 3^{x-2}-1$

$\Rightarrow a = \sqrt[x]{x-1}^{\sqrt[x-1]{x}^{a}} \Rightarrow \sqrt[a]{a}^{\sqrt[a]{a}^{a}} = \sqrt[x]{x-1}^{\sqrt[x-1]{x}^{a}}$

$\Rightarrow a = x-1 \Rightarrow 3^{x-2}-1 = x-1 \Rightarrow \underbrace{3^{x-2}=x}_{\text{Por un tanteo adecuado } x=3}$

RPTA : "E"

PROBLEMA 34 :

Resolver:

$$x^{x^{\sqrt{2}(x^4+2\sqrt{2})}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{\sqrt{2}}{16}+4}}$$

A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\sqrt{2}$ D) $\sqrt[2]{9}$ E) 9^{-1}

RESOLUCIÓN:

$$x^{x^{\sqrt{2}x^4+4}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}\right)^4+4}}$$

* Por una minuciosa comparación , se obtendrá , que:

$$x = \frac{1}{2}$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 35 :

Resolver : $\sqrt[-9]{9} = x^{\sqrt[9]{x^{1+9\sqrt[9]{x}}}}$

A) 1 B) 9 C) 9^9 D) $\sqrt[9]{9}$ E) 9^{1}

RESOLUCIÓN:

$$9^{-\frac{1}{9}} = x^{\sqrt[9]{x}^{1+9\sqrt[9]{x}}} = x^{\sqrt[9]{x}\times\sqrt[9]{x}^{9\sqrt[9]{x}}}$$

$\Rightarrow \left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{1}{9}} = x^{\sqrt[9]{x}\times x^{\sqrt[9]{x}}} \Rightarrow \left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{1}{9}} = \left(x^{\sqrt[9]{x}}\right)^{x^{\sqrt[9]{x}}} \Rightarrow x^{\sqrt[9]{x}} = \frac{1}{9}$

$\Rightarrow x^{x^{\frac{1}{9}}} = \sqrt[\frac{1}{9}]{\frac{1}{9}}^{\sqrt[\frac{1}{9}]{\frac{1}{9}}^{\frac{1}{9}}} \Rightarrow x = \sqrt[\frac{1}{9}]{\frac{1}{9}} = \left(\frac{1}{9}\right)^9 = 9^{-9}$

RPTA : "C"

PROBLEMA 36 :

Resolver: $\sqrt[x]{\frac{2}{x-1}} = (x-1)^{(x-2)}$

A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\sqrt{2}-1$ D) $\sqrt[4]{2}$ E) $\sqrt[8]{2}$

RESOLUCIÓN:

* tratemos de formar una analogía , así :

$$\frac{2}{x-1} = \left((x-1)^{(x-2)}\right)^x \Rightarrow 2 = (x-1)^{x^2-2x}(x-1)$$

$\Rightarrow 2 = (x-1)^{x^2-2x+1} \Rightarrow 2 = (x-1)^{(x-1)^2}$

$\Rightarrow \sqrt{2}^{\sqrt{2}^2} = (x-1)^{(x-1)^2} \Rightarrow x-1 = \sqrt{2}$

$\Rightarrow x = \sqrt{2}-1$

RPTA : "C"

PROBLEMA 37 :

Resolver: $25^x+9^x=2(15^x)$

A) $\frac{1}{4}$ B) 0 C) $\sqrt{5}$ D) $\sqrt[4]{2}$ E) $\sqrt[8]{2}$

RESOLUCIÓN:

* como 25 ; 9 son cuadrados perfectos haremos la siguiente transformación :

$(5^x)^2+(3^x)^2 = 2(5^x)(3^x) \Rightarrow (5^x)^2-2(5^x)(3^x)+(3^x)^2=0$

$\Rightarrow (5^x-3^x)^2=0 \Rightarrow 5^x=3^x \Rightarrow \frac{5^x}{3^x}=1$

$\Rightarrow \left(\frac{5}{3}\right)^x = \left(\frac{5}{3}\right)^0 \Rightarrow x=0$

RPTA : "B"

PROBLEMAS DE EXAMENES DE ADMISIÓN

PROBLEMA 38 :

Si: $a^{a^a} = a^2$, $a>0$. Hallar el valor de: a^{3a}.

A) 6 B) 4 C) 8 D) 9 E) 18

RESOLUCIÓN:

* Como $a>0$, igualando exponentes :

$a^a=2 \Rightarrow a^{3a}=8$

RPTA : "C"

PROBLEMA 39 :

Si $\left(2\sqrt[3]{7}\right)^x = 3136$, entonces el valor de x^2+1 es

A) 32 B) 29 C) 76 D) 23 E) 37

RESOLUCIÓN:

* Igualando bases tenemos:

$$\left(\sqrt[3]{8}\times\sqrt[3]{7}\right)^x = (56)^2 \Rightarrow (56)^{x/3} = (56)^2$$

* De donde: $\frac{x}{3}=2 \Rightarrow x=6 \Rightarrow x^2+1=37$

RPTA : "E"

PROBLEMA 40 :

Resuelva la ecuación exponencial :

$$2^{x+2}+2^{x+1}+2^{x}+2^{x-1}+2^{x-2}=248$$

Calcule : $2^{x+1}+2^{x}+2^{x-1}$

A)95 B) 3,5 C) 184 D) 112 E) 2

RESOLUCIÓN:

* Se observa que en la ecuación un factor común es 2^x, entonces por teoría de exponentes podemos expresar:

$(2^x)(2)^2+(2^x)(2)^1+(2^x)+(2^x)(2)^{-1}+(2^x)(2)^{-2}=248$

* Podemos factorizar (2^x):

$(2^x)[(2)^2+(2)^1+1+(2)^{-1}+(2)^{-2}]=248 \Rightarrow (2^x)[4+2+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}]=248$

* Operando: $(2^x)[\frac{31}{4}]=248 \Rightarrow (2^x)=4(\frac{248}{31})$

$\Rightarrow (2^x)=4(8)=2^5 \Rightarrow x=5$

* Se pide: $2^{x+1}+2^x+2^{x-1}=2^6+2^5+2^4=112$

RPTA : "D"

PROBLEMA 41 :

Si : $2^{x^2}+2^{x^2-1}+2^{x^2-2}+2^{x^2-3}+2^{x^2-4}=62$,

donde $x>0$, hallar x.

A) $\sqrt{5}$ B) 2 C) $\frac{5}{2}$ D) $\sqrt{2}$ E) 1

RESOLUCIÓN:

* Multiplicamos por 2^4 a ambos miembros :

$2^{x^2}\times 2^4+2^{x^2}\times 2^3+2^{x^2}\times 2^2+2^{x^2}\times 2+2^{x^2}=62\times 2^4$

$\Rightarrow 31\times 2^{x^2}=62\times 2^4 \Rightarrow 2^{x^2}=2^5$

$\Rightarrow x^2=5$

$\Rightarrow x=\sqrt{5} \vee x=-\sqrt{5}$

* Pero como $x>0 \Rightarrow x=\sqrt{5}$

RPTA: "A"

PROBLEMA 42 :

Calcule la suma de cifras de "x" si se cumple que:

$$9^{x+1}=27^{x-12}$$

A) 10 B) 11 C) 12 D) 13 E) 14

RESOLUCIÓN:

$$(3^2)^{x+1}=(3^3)^{x-12}$$

$$\Rightarrow 3^{2x+2}=3^{3x-36}$$

* Luego: $2x+2=3x-36$

$\Rightarrow 38=x$

$\Rightarrow$ Suma de cifras : $3+8=11$

RPTA : "B"

PROBLEMA 43 :

Si se cumple que $y^x=x$, hallar $x+y$ sabiendo además que: $y^{y^{-1}}=y^{x^{-1}}$

A) 4 B) 1/2 C) 1 D) 1/4 E) 3/4

RESOLUCIÓN :

* Del último dato , se obtendrá:

$x^x=y^y \Rightarrow (y^x)^x=y^y \Rightarrow y=x^2$ ......(*I*)

* Ahora en (*I*) en :

$y^x=x \Rightarrow (x^2)^x=x \Rightarrow 2x=1 \Rightarrow x=\frac{1}{2}$

* En (*I*) : $y=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$

* Se pide : $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

RPTA : "E"

PROBLEMA 44 :

Si $\left(\frac{7^{15}-7^n}{7^{n-4}-7^3}\right)^{1/8}=7$, hallar la suma de las cifras de "n".

A) 9 B) 8 C) 1 D) 3 E) 2

RESOLUCIÓN:

* Del dato $\left(\frac{7^{15}-7^n}{7^{n-4}-7^3}\right)^{\frac{1}{8}}=7$

* Elevando a la octava ambos miembros , se obtiene:

$$\frac{7^{15}-7^n}{7^{n-4}-7^3}=7^8$$

$$7^{15}-7^n=7^8(7^{n-4}-7^3)$$

$$7^{15}-7^n=7^{n+4}-7^{11}$$

$$7^{15}+7^{11}=7^{n+4}-7^n$$

$$7^{11}(7^4+1)=7^n(7^4+1)$$

$$7^{11}=7^n$$

* Luego , $n=11$

RPTA : "E"

PROBLEMA 45 :

Si : $x^{-x^{-2}}=2$,calcule : $x^{4x^{\sqrt{2}x+1}}$

A) 10 B) 2/5 C) 5 D) 1/2 E) 15

RESOLUCIÓN:

* $x^{-x^{-2}}=2$ elevando al cuadrado

$$\left(x^{-x^{-2}}\right)^2=2^2 \Rightarrow \left(x^{-2}\right)^{x^{-2}}=2^2$$

*Por comparación :

$$x^{-2}=2 \Rightarrow \frac{1}{x^2}=2 \Rightarrow x^2=\frac{1}{2} \Rightarrow x=\frac{1}{\sqrt{2}}...(x>0)$$

Además : $\sqrt{2}x=1$

*Reemplazando convenientemente :

$$x^{4x^{\sqrt{2}x+1}}=x^{4x^1x}=x^{4x^2}=x^{4(\frac{1}{2})}=x^2=\frac{1}{2}$$

RPTA : "D"

PROBLEMA 46 :

Si $25^x + 9^x = 2(15^x)$, determinar el valor de

$$E = \frac{5^{-7x+1}+3^{-7x+2}}{7(5^{-7x-1})}$$

A) 10 B) 2/5 C) 5 D) 8 E) 15

RESOLUCIÓN:

* Del dato se obtiene:

$(5^x)^2 + (3^x)^2 = 2\,(5^x \times 3^x)$

$\Rightarrow (5^x)^2 - 2(5^x)(3^x) + (3^x)^2 = 0$

* Recuerde que: $a^2 - 2ab + b^2 = (a+b)^2$

* Entonces: $(5^x - 3^x)^2 = 0$

Luego: $5^x = 3^x \Rightarrow x = 0$

Reemplazando en «E» $E = \dfrac{5^1+3^2}{7(5^{-1})} = 10$

RPTA : "A"

PROBLEMA 47 :

En la siguiente ecuación:

$16^{\sqrt{x}} - 256 = (60)4^{\sqrt{x}}$ el valor de x es:

A) 3 B) 4 C) – 4 D) 9 E) 1

RESOLUCIÓN:

*La ecuación se puede expresar así:

$$4^{2\sqrt{x}} - 256 = (60)\,(4)^{\sqrt{x}}$$

* Haciendo $y = 4^{\sqrt{x}}$ tenemos:

$y^2 - 60y - 256 = 0$, cuyas soluciones son $y_1 = 64$, $y_2 = -4$

* Entonces: $64 = 4^{\sqrt{x}}$; $-4 = 4^{\sqrt{x}}$

* La primera de estas ecuaciones tiene por solución a $x = 9$ y la segunda no tiene solución real.

RPTA : "D"

PROBLEMA 48 :

Si $3^{2x} + 3^{2y} = 27$; $3^{x+y} = 11$, calcular el valor de $K = (3^x+3^y)^3$.

A) 512 B) 216 C) 729 D) 125 E) 343

RESOLUCIÓN:

* Del dato: $(3^x)^2 + (3^y)^2 = 27$; $3^x \times 3^y = 11$

* Luego:

$(3^x)^2 + (3^y)^2 + 2(3^x)(3^y) = 27 + 2(11) = 49$

* De donde:

$(3^x+3^y)^2 = 49 \Rightarrow 3^x + 3^y = 7$

$\Rightarrow (3^x+3^y)^3 = 7^3 = 343$

RPTA : "E"

PROBLEMA 49 :

Si $x \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$, *determine el valor de n que verifique :*

$$\sqrt[4]{\frac{\sqrt[3]{\dfrac{\sqrt{\frac{1}{x}}}{x}}}{x}} = \sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[4]{\left(\frac{1}{x}\right)^n}}}$$

Dar como respuesta : $(2n+3)\div 3$

A) 5 B) 4 C) 7 D) 12 E) 3

RESOLUCIÓN:

* Reduciendo adecuadamente se obtiene :

$$\sqrt[4]{x^{-1}\sqrt[3]{x^{-1}\sqrt{x^{-1}}}} = \sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[4]{\left(x^{-1}\right)^n}}} \Rightarrow x^{\frac{-9}{24}} = x^{\frac{-n}{24}} \Rightarrow n = 9$$

*Se desea : $(2\times 9+3)\div 3 = 7$

RPTA : "C"

PRIMERA PRACTICA DIRIGIDA

ECUACIONES EXPONENCIALES I

01 El valor de x en: $(3x-2)^7 = 128$ es:

A) 1/3 B) 4/3 C) 2/3 D) 5/3 E) 1

02 Resolver la exponencial: $27^{9^{x+3}} = 3^{27^{8x-3}}$

A) $\frac{8}{13}$ B) $\frac{5}{12}$ C) $\frac{7}{24}$ D) $\frac{5}{13}$ E) $\frac{2}{3}$

03 Resolver: $3^{5^{x+13}} = 243^{25^{3x-4}}$

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

04 Resolver: $\left[5^{5^x}\right]^{5^5} = 5^5$

A) $\frac{1}{5}$ B) 5 C) –5 D) 25 E) –4

05 Calcular «x» si: $(5x)^x = 5^{5^5}$ y proporcionar el valor de $\sqrt[5]{x}$

A) 1 B) $\sqrt[4]{3}$ C) $\sqrt[4]{5}$ D) $\sqrt[4]{7}$ E) 5

06 Si $x^x = \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{4}}$. Dar el mayor valor de x.

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{1}{5}$ D) $\frac{1}{6}$ E) $\frac{1}{7}$

07 Hallar x^2 en: $x^x = 3^{324}$

A) $(81)^2$ B) 81 C) 80 D) 90 E) 100

08 Resuelve la ecuación: $\sqrt{a^3} \times \sqrt[3]{a^x} = \sqrt[4]{a^{2-x}}$

A) –7 B) –3,5 C) 12 D) –12/7 E) 7

09 Resuelve la ecuación: $27^x + 3^{3x+1} = 12$

A) 1/3 B) 2/3 C) 3/2 D) 3 E) –3

10 El valor de x en $a^{3x-5} - a^{2x} = 0$ es:

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 2

11 Si: $(2\sqrt[3]{7})^x = 3136$ dar el valor de x^2+1

A) 37 B) 34 C) 35 D) 36 E) 38

12 Resolver : $16^{1-3x^2} = 64^{4x^2-2}$; si: $x > 0$

A) 1/2 B) 1/3 C) 3/2 D) 2/3 E) 3/4

(13) Halle x^2+1 en $8^x + 8^{x+1} = 36$

A) $\frac{7}{4}$ B) $\frac{2}{5}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{9}{13}$ E) $\frac{13}{9}$

(14) En: $2^x + 4^x = 72$

hallar $x^3 + 1$

A) 28 B) 27 C) 26 D) 24 E) 25

(15) Hallar x en:

$$\sqrt[x]{2} \times \sqrt[x]{4} \times \sqrt[x]{8} = \sqrt[7]{2}$$

A) 18 B) 42 C) 30 D) 35 E) 34

(16) Calcular «x» si $a>1$

$$\sqrt[2^{-1}]{a} \times \sqrt[3^{-1}]{a} \times \sqrt[4^{-1}]{a} \times \sqrt[x^{-1}]{a} = a^{10}$$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

(17) Calcular «x» en la siguiente igualdad:

$$\sqrt[33]{3} \times \sqrt[3]{33} \times \sqrt[3]{3} \times \sqrt[33]{33} = \sqrt[11]{x^4}$$

A) 77 B) 33 C) $\frac{1}{99}$ D) 9 E) 99

(18) Hallar el valor de «x» en:

$$3(5^{x-2}) + 3(4^{x-2}) = 4^{x-1} + 11(5^{x-3})$$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

(19) Resolver:

$4^{x+3} = 2^{3x+1}$ .... (I)

$\left(\frac{1}{27}\right)^{y+1} = 9^{y-4}$ .... (II)

y proporcione el valor de «$x + y$»

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

(20) Dar el valor de verdad en:

- $x^{x^{x^n}} = m \Rightarrow x = \sqrt[n]{m}$
- En una ecuación exponencial la incógnita puede encontrarse en la base.
- $x^x = 2$ es una ecuación trascendente.
- $2^x = 3^x \Rightarrow x = 0$

A) FFVV B) VVFF C) FVVV D) FFFF E) VFVF

TAREA DOMICILIARIA

(01) Hallar «x» en: $x^{x^3} = \frac{1}{\sqrt[12]{2}}$

A) $\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$ B) $\frac{\sqrt[3]{4}}{2}$ C) $\frac{\sqrt[3]{4}}{4}$ D) $\frac{\sqrt[3]{2}}{4}$ E) $\frac{1}{2}$

(02) Calcular «x» si se cumple que: $(x^{2x^{-0,2}})^{-1} = 0,04$

A) $\frac{1}{5}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\sqrt[5]{5}$ D) 5^5 E) 0

(03) Si: $a>0$

$$a^{-a^{-3}} = 3 \text{ ; calcular : } a^{9a^{\sqrt[3]{3a}+2}}$$

A) $\frac{1}{9}$ B) $\frac{1}{3}$ C) 9 D) 3 E) $\frac{1}{27}$

(04) Si: $x^{-2^{2^{-x}}} = 2^{\sqrt[4]{4\sqrt{2}}}$

Hallar: $E = \sqrt[x]{x}$

A) 1/4 B) 1/2 C) 1/8 D) 1/16 E) 1/32

(05) Hallar «x», si: $y = x^{x^n}$; $y^{y^n} = x^{x^n}$

A) $\sqrt[n]{m-n}$ B) $\sqrt[n]{\frac{m-n}{n}}$ C) $\sqrt[n]{\frac{m+n}{n}}$ D) $\sqrt[n]{\frac{m-n}{m}}$

SEGUNDA PRACTICA DIRIGIDA

ECUACIONES EXPONENCIALES II

(01) Resolver para n:

$$\underbrace{\sqrt[3]{2}\ \sqrt[3]{2}\ \sqrt[3]{2}\ \ldots\ldots}_{(n+1)\text{veces}} = \underbrace{4 \times 4 \times 4 \times \ldots\ldots}_{(n-24)\text{veces}}$$

A) 26 B) 27 C) 28 D) 29 E) 30

(02) Resolver: $27^{x-3} \times 9^{x+1} = 81^{x+9}$

A) 12 B) 18 C) 19 D) 16 E) 20

(03) Resolver: $(2^{3^{x-7}})^{3^6} = 512^{27}$

E indicar: $\sqrt[x-4]{x+3}$

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

(04) Hallar x si: $3^{x-7} + 3^{x-5} = 3^{x-6} + 7^{x-6}$

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 0

(05) Hallar x: $2^{\sqrt{3}^x} = \sqrt[3]{2}^{9^x}$

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{4}{3}$ D) $\frac{5}{7}$ E) $\frac{3}{8}$

(06) Resolver: $\sqrt[6]{8^{x-1}} = \sqrt[3]{4}^{x+3}$

A) -39 B) 18 C) -29 D) -42 E) 54

(07) Resolver: $\sqrt[5]{\sqrt[x\sqrt{5}]{\sqrt[5]{\sqrt{5}}}} = 5$

A) 0 B) $\frac{1}{5}$ C) $-\frac{1}{5}$ D) $\frac{2}{5}$ E) -5

(08) Resolver: $\sqrt[4]{2^{2^{2^x+2}}} = 4^8$

A) 8 B) 4 C) 3 D) 2 E) 1

09 Resolver: $16^{8^{-27^{-x}}} = 4$

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{1}{2}$ C) 3 D) 2 E) 1

10 Hallar x:

$$25^{-8^{-x^{-3^{-1}}}} = 0,2$$

A) 5 B) 4 C) 10 D) 9 E) 13

11 Si se cumple: $\sqrt[4]{a^a\sqrt[8]{2}} = \sqrt[8]{a}$

Hallar : $\left(a^{a^{a^2}}\right)^{4-a^2}$

A) 16 B) 1 C) 2 D) 8 E) 4

12 Resolver:

$$\sqrt[3^{x+4}]{\sqrt[3^{2x+1}]{2^{3^{7x+13}}}} = 2^{3^{x+9}}$$

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{5}{2}$ D) $\frac{3}{4}$ E) $\frac{2}{5}$

13 Resolver: $\sqrt[4]{2^x\ \sqrt[3]{2}} = \sqrt[6]{2}^{\,x-1}$

A) 2 B) -3 C) 4 D) -5 E) $-\frac{1}{3}$

14 Hallar x si:

$$\frac{343^{2x^{0,5}} + 7^{3x^{0,5}}}{1+7^{3\sqrt{x}}} = 7$$

A) $\frac{1}{3}$ B) $\sqrt{3}$ C) $\sqrt[3]{3}$ D) $\sqrt[3]{33}$ E) $\frac{1}{9}$

15 Resolver: $(2^8x)^x = \sqrt[32]{2}$

A) 2^{-3} B) 2^{-4} C) 2^{-6} D) 2^{-8} E) 2^{-10}

16 Resolver: $\sqrt[4x]{8x} = \sqrt[16]{256}$

A) 2 B) 4 C) 8 D) 16 E) 256

17 Resolver:

$$\sqrt{2}^{\,4}\ \sqrt[4]{2}^{\,8}\ \sqrt[8]{2}^{\,16} = x^{3x}$$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

18 En la ecuación:

$$\sqrt[3]{x^2\sqrt[3]{x^2\sqrt[3]{x^2 \ldots\ldots\ldots\ radicales}}} = x^k$$

Donde: $k = \frac{80}{3^n}$; $x = \frac{n}{2}$

Hallar: $n + x$

A) 3 B) 4 C) 6 D) 7 E) 8

19 Hallar x si: $(m\ \ x)^{m^{nx}} = m^{1-n}$

A) m^n B) m^{n-mn} C) m^{-mn} D) n^{-mn} E) $n^{m^{-1}}$

20 Resolver: $\sqrt[x^{x+1}]{16^{18}} = x^{(x+1)^2}$

A) 2 B) 3 C) 4 D) 6 E) 7

21 Hallar x^x si:

$$\sqrt[x\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{0,5}}}]{x} = 2$$

A) 4 B) $\frac{1}{2}$ C) $\sqrt{2}$ D) 2 E) $\sqrt[4]{2}$

22 Resolver la ecuación:

$$2^{x+3} - 2^{x+2} + 2^{x+1} - 2^x = 50^x$$

Dar como respuesta : x^2

A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{9}{4}$ C) $\frac{4}{9}$ D) $\frac{9}{25}$ E) 4

23 Calcular el valor de x en la ecuación:

$$\left[\left(\frac{1}{3}\right)^{-3} + \left(\frac{2}{5}\right)^{-2} + \left(\frac{4}{11}\right)^{-1}\right]^x = 216$$

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{5}{3}$ D) $\frac{2}{3}$ E) $\frac{3}{2}$

24 Siendo :

$$\underbrace{2^{x-6} + 2^{x-6} + \ldots\ldots + 2^{x-6}}_{1024\ sumandos} = 1024$$

Determinar : $A = \sqrt[8]{x^3 + x^2 + x - 2}$

A) 1 B) 2 C) 4 D) 16 E) 256

25 Luego de resolver la ecuación:

$27^{9^{x+3}} = \sqrt[3]{3}$ determinar: $x + 1$

A) -4 B) -3 C) -2 D) 1 E) 2

26 En la ecuación:

$$\underbrace{\sqrt[3]{81 + \sqrt[3]{81 + \ldots\ldots\ldots + \sqrt[3]{81}}}}_{5\ radicales} = 3^{61x}$$

Determinar: x^2

A) 9 B) 4 C) $\frac{9}{4}$ D) $\frac{9}{16}$ E) 16

27 Si : $x^x = 27$ calcular :

$$E = \sqrt[x^x]{x^{3x}}\ \sqrt[3x]{x^x}$$

A) 3 B) $\sqrt{3}$ C) $\sqrt[3]{9}$ D) $\sqrt[3]{3}$ E) $3\sqrt[3]{3}$

28 Resolver: $1 + x^{x+1} = 9$

E indicar: $\sqrt[x]{x}^{\,4} + \sqrt[4]{x}^{\,x^2}$

A) 6 B) 8 C) 7 D) 9 E) 2

29 Hallar x:

$$(\sqrt{x}+1)^{(\sqrt{x}+1)^{(\sqrt{x}+1)^2}} = 2$$

A) $(\sqrt{2}+1)^2$ B) $2\sqrt{2}-2$ C) 1 D) $(\sqrt{2}-1)^2$ E) 3

30 Hallar el valor de x en :

$$\sqrt[2x]{x}^{\sqrt{x}} = \left(3^{3^{-1}}\right)^{4^0}$$

A) $\frac{1}{3}$ B) 2 C) $\frac{1}{9}$ D) 9 E) 3^{-3}

31 Resolver: $\sqrt[x]{\frac{3}{x-1}} = (x-1)^{(x-2)}$

A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\sqrt{3}-1$ D) $\sqrt[4]{2}$ E) $\sqrt[3]{2}$

32 Resolver:

$$x^{x^{\sqrt{2}(x^4+2\sqrt{2})}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{\sqrt{2}}{16}+4}}$$

A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\sqrt{2}$ D) $\sqrt[4]{2}$ E) $\sqrt[8]{2}$

TERCERA PRACTICA DIRIGIDA

01 Mencionar el valor de «x» , si:

$$9^{x+2} = 9^x + 240$$

A) 2 B) –2 C) 0,5 D) –0,5 E) $0,\hat{3}$

02 Indique verdadero *(V)* o falso *(F)* según corresponda:

( ) Si : $128^{x-1} = 32^{x+1} \Rightarrow x = 6$

( ) Si : $9^{2-x} \times 27^{x+3} = 1 \Rightarrow x = -13$

( ) Si : $\sqrt[4]{2^x} \times \sqrt{2^{1-x}} = 4 \Rightarrow x = -6$

AVVF B) VVV C) VFV D) VFF E) FVV

03 Calcular «x» en:

$$3^x\left(\frac{1}{3}\right)^{x-3} = \left(\frac{1}{27}\right)^x$$

A) –3 B) –2 C) –1 D) 0 E) 2

04 Cumpliéndose que:

$$\left(3\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3}}}\right)^{n-1} = 243$$

Calcular «n» .

A) 8/3 B) 9/3 C) 10/3 D) 11/3 E) 10/3

05 Resolver: $\frac{2}{3}\sqrt[3]{\left(\frac{8}{27}\right)^{\frac{5}{x}}} = \left(\frac{9}{4}\right)^{-4}$

A) $\left\{\frac{2}{9}\right\}$ B) $\left\{\frac{7}{4}\right\}$ C) $\left\{\frac{8}{3}\right\}$ D) $\left\{\frac{5}{7}\right\}$ E) $\left\{\frac{10}{3}\right\}$

06 Cumpliéndose que: $\sqrt{2}^{x-1} \times 4^x = 8^{2-x}$

proporcionar $11x$.

A)13 B)26 C) 24 D)12 E)1

07 Si : $\sqrt[3]{x\sqrt[3]{x^2}} = \left(3^{2^{-\frac{5}{8}}}\right)^{2^{\frac{13}{8}}}$ calcular x^5

A)3^7 B)3^{14} C) 3^9 D)3^{18} E)3^{12}

08 Luego de resolver: $4^{n-1} + 4^n + 4^{n+1} = 84$

indique lo correcto.

A) n es par B) n es primo

C) $1 < n < 4$ D)Más de uno es correcto

E) $n = 4$

09 Si: $\sqrt[8]{\dfrac{2^{17}+2^n}{2^n+2}} = \sqrt[4]{16}$, calcule "$n$"

A)9 B)8 C) 10 D)4 E)5

10 Resolver: $n^{n^9} = 9$

A) $\left\{\frac{1}{9}\right\}$ *B)* $\left\{\frac{1}{3}\right\}$ *C)* $\left\{\frac{2}{3}\right\}$ *D)* $\left\{9\sqrt{9}\right\}$ *E)* $\left\{9\sqrt{3}\right\}$

11 Si se cumple que: $n^{\sqrt[3]{n}} = 64$, calcule el valor de: $n^2 - 5n + 16$

A)38 B)40 C) 42 D)46 E)51

12 A Partir de: $m^{m^{12}} = \sqrt[6]{2}$,calcular: $1 + m^{12} + m^{24}$

A)4 B)5 C) 6 D)7 E)8

13 Si: $T^T = \sqrt[4]{2}^{-1}$ calcular el valor de $16T$.

A)1 B)-1 C) 2 D)-2 E)1/2

14 Sabiendo que $n^{n^{132}} = 11^{11^{11}}$,calcule el valor de n^2.

A) 11 B)100 C) 121 D) 132 E)14

15 Si se cumple: $\sqrt[x]{x^2} = \sqrt[4]{4}$, calcular: $\sqrt[x]{x^4}$

A) 2 B) $\sqrt{2}$ C) 4 D)8 E)16

16 Cuál es el valor de «n» que satisface:

$$\frac{\sqrt[3]{x\sqrt[4]{x\sqrt[5]{x}}}}{\sqrt[5]{x\sqrt[4]{x\sqrt[3]{x}}}} = \sqrt[n+2]{x}$$

A) 1 B)2 C) 4 D)5 E)6

17 Si: $\sqrt[8]{a\sqrt{b^3\sqrt[8]{a\sqrt{b^3...}}}} = a^{\alpha}b^{\beta}$ calcular: $\alpha + \beta$

A) 1/3 B)3/2 C) 2 D)1/2 E)3

18 Resolver el sistema: $\begin{cases} 2^x(x+y) = 10 \\ (x+y)^{\frac{1}{x}} = 5 \end{cases}$

A) $\{(2;6)\}$ *B)* $\{(1;4)\}$ *C)* $\{(1/2;5)\}$ *D)* $\{(2;4)\}$ *E)* $\{(1;3)\}$

19 Luego de resolver: $\begin{cases} 3^x \times 5^y = 75 \\ 3^y \times 5^x = 45 \end{cases}$

calcular: $x^y + y^x$

A) 18 B)9 C)10 D)3 E)12

20 Resolver: $2^{2x+1} + 2^{x+2} = 16$

A) 1 B)-2 C)2

C) Más de uno es correcto D)B ó C

CUARTA PRACTICA DIRIGIDA

01 Reducir:

$$E = \left[\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^{-\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}} + \left(\frac{1}{125}\right)^{-3^{-1}} + \left(\frac{1}{81}\right)^{-16^{-\frac{1}{2}}}\right]^{-\frac{1}{2}}$$

A)1 B)2 C)4 D) $\frac{1}{2}$ *E)* $\frac{1}{4}$

02 Calcular el valor de:

$$R = \frac{\left[-9^{-2^{-1}}\right]\left[-243^{-0,2}\right]^{-1}}{\left[81^{-4^{-2^{-1}}}\right]\left[-\left(\frac{1}{27}\right)^{-3^{-1}}\right]}$$

A)-1 B)3 C)-3 D) $\frac{1}{3}$ *E)* $-\frac{1}{3}$

03 Sabiendo que: $m^n = \frac{1}{3} \wedge n^m = -2$

calcular el valor de: $F = m^{n^{m+1}} + n^{m^{1-n}}$

A)-8 B)1 C) $-\frac{4}{9}$ *D)4 E)* $\frac{1}{9}$

04 Conociendo que: $n^n=n+1$, la siguiente expresión: $T=\sqrt[n^{n^2-n+1}]{(n+1)^{(n+1)^{n-1}}}$

A) n B) n^n C) n^n+1 D) $\sqrt[n]{n}$ E) n^{n+1}

05 Si: $n^n=2$, calcular el valor de:

$$E=\sqrt[4]{n^{n^{1+2n^{1+n}}}}$$

A) 2 B) 4 C) 8 D) 16 E) 32

06 Luego de operar:

$$\frac{\overbrace{\sqrt[a]{a}+\sqrt[a]{a}+\dots\sqrt[a]{a}}^{\text{"b" sumandos}}\!\!\sqrt{\overbrace{\sqrt[a]{a}\times\sqrt[a]{a}\dots\dots\sqrt[a]{a}}^{\text{"b" factores}}}}{\underbrace{\sqrt[\sqrt[a]{a}]{\sqrt[\sqrt[a]{a}]{\sqrt[\sqrt[a]{a}]{\dots\sqrt[\sqrt[a]{a}]{a}}}}}_{\text{"a+1" radicales}}}$$

Se obtiene:

A) $\sqrt[a]{a}$ B) a C) 1 D) a^{-1} E) $\sqrt[a]{a}^{\sqrt[a]{a}}$

07 Si x e y son dos números positivos, entonces la siguiente expresión: $H=\sqrt[2007]{\dfrac{x^{2007}+y^{2007}}{x^{-2007}+y^{-2007}}}$

es equivalente a:

A) 1 B) 2 C) x D) $x+y$ E) xy

08 Sabiendo que:

$$M=2\left(\sqrt[a]{\frac{28^a+112^a}{28^a+7^a}}\right)^3 \ ; \ N=4\left(\sqrt[a]{\frac{10^a+50^a}{25^a+5^a}}\right)^5$$

entonces el valor de $M-N$ es:

A) 0 B) 7 C) 14 D) 28 E) 36

09 Sabiendo que: $a+\dfrac{1}{b}=1 \ \wedge \ b+\dfrac{1}{c}=1$

calcular el valor de:

$$E=a\sqrt{\frac{1+b^2c^2}{a^2+1}}+b\sqrt[3]{\frac{c^3a^3+1}{b^3-1}}$$

A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 2

10 Reducir:

$$E=\left[\sqrt{8}^{\sqrt{8}^{\sqrt{8}}}\right]^{\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}-6}}$$

A) 1 B) 2 C) 4 D) 8 E) 16

11 El valor de: $K=\left(a^{a^{\sqrt{a}}}\right)^{\sqrt{a}}\sqrt{a}^{-a}$

para: $a=2^{2^{-1}}$, es:

A) 2 B) 4 C) $\sqrt{2}$ D) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ E) $\dfrac{1}{2}$

12 Indicar el exponente final de «x» en:

$$\sqrt[m]{x^{m^2}}\times\sqrt[m^2]{x^{m^3}}\times\sqrt[m^3]{x^{m^4}}\dots\sqrt[m^n]{x^{m^{n+1}}}$$

A) m B) n C) $m+1$ D) $n+1$ E) mn

13 Reducir:

$$S=\frac{2^{x-\sqrt[7]{x^{2x}}}-x^{2x-\sqrt[7]{x^{14}}}}{x-\sqrt[7]{x^{x+7}}}$$

sabiendo que: $x\in Z^+ \ \wedge \ x\geq 2\,008$

A) 1 B) x C) $2x$ D) 2 E) x^2

14 Simplificar la expresión:

$$F=\sqrt{\frac{x^3}{\sqrt{\frac{x^2}{\sqrt{\sqrt{\frac{x^2}{x^3}}}}}}}+\left[\sqrt{\sqrt{\frac{\sqrt{\frac{\sqrt{\frac{1}{x^5}}}{x^2}}}{x^2}}\Big/x^2}\right]^{-1}$$

A) x B) x^{-1} C) x^2 D) x^{-2} E) 1

15 Resolver la ecuación: $5^{2x+1}-3\times5^{2x-1}=550$

y dar como respuesta el valor de x^2.

A) 2 B) 2,25 C) 2,5 D) 2,75 E) 3,5

ECUACIONES EXPONENCIALES I				
01) B	02) E	03) E	04) E	05) E
06) A	07) B	08) D	09) A	10) C
11) A	12) D	13) E	14) A	15) B
16) A	17) E	18) C	19) C	20) A
01) C	02) D	03) B	04) B	05) D

ECUACIONES EXPONENCIALES II				
01) D	02) C	03) B	04) C	05) B
06) A	07) C	08) D	09) A	10) D
11) E	12) A	13) B	14) E	15) C
16) A	17) B	18) C	19) C	20) A
21) D	22) A	23) E	24) B	25) B
26) E	27) C	28) A	29) D	30) D
31) C	32) B			

TERCERA PRACTICA									
1)C	2)B	3)C	4)D	5)D	6)A	7)D	8)D	9)A	10)D
11)B	12)D	13)A	14)C	15)A	16)C	17)A	18)B	19)D	20)A

CUARTA PRACTICA									
1)E	2)C	3)B	4)A	5)D	6)C	7)E	8)A	9)E	10)D
11)C	12)E	13)B	14)B	15)B					



GRADOS y POLINOMIOS

04

OBJETIVOS :

Al finalizar la unidad, el estudiante será capaz de:

* *Utilizar de modo preciso la definición y la notación polinómica .*

* *Reconocer las características y propiedades de los polinomios, distinguir sus elemento determinar sus grados .*

* *Realizar operaciones básicas con polinomios .*

INTRODUCCIÓN :

Los matemáticos para poder expresarse hacen uso de símbolos o letras, es decir, hacen uso de fórmulas donde aparecen símbolos. Éstos pueden ser sustituidos por números reales. El valor de la velocidad de la luz siempre es el mismo, aproximadamente ***300000 km*** por segundo, o sea es una constante. Mientras que la velocidad de un auto varía con el tiempo, según la aceleración que lleve, es decir, es una variable.

En el álgebra , generalmente usamos símbolos para representar elementos arbitrarios de un conjunto . Por lo tanto la notación $x \in \mathbb{R}$, significa que x es un número real en particular . Un símbolo literal que se usa para representar cualquier elemento de un conjunto dado , se llama variable . Las últimas letras del alfabeto tales como x , y , z , w , ..., se emplean a menudo como variables . En cambio El numeral que se utiliza para indicar un elemento fijo de un conjunto numérico se llama constante . Por ejemplo , el numeral representa únicamente al número cinco.

En este capítulo , vamos a suponer que todas la variables representan números reales , en algunos casos , debemos restringir el conjunto de valores permitidos para una variable a algún conjunto de $\mathbb{R}$ por ejemplo , cuando trabajamos con la ***expresión algebraica:*** $P(x)=\sqrt{x}$*, si queremos garantizar la existencia de la expresión* $P(x)$*, entonces* x *debe ser no negativo* $(x \geq 0)$*. El subconjunto de* $\mathbb{R}$ *donde se encuentran los valores permitidos para la variable de x de la expresión* $P(x)$*, se llama dominio de* P.

EXPRESIÓN ALGEBRAICA

Es aquella que está formada por variables y/o constantes donde las variables están relacionadas con las operaciones matemáticas adición , sustracción, multiplicación , división, potenciación y radicación , en un número limitado de veces.

EJEMPLO :

* $A(x)=5x^3+x-\dfrac{4}{\sqrt{x-1}}$; ***la variable es x.***

* $B(x;y)=\dfrac{7xy+\sqrt[3]{7}\,x}{2y-1}$; ***las variables son x e y.***

* $C(x;y;z)=2+\dfrac{z^{-1}x^2-4y^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{m^2}+\sqrt{n}}$; ***las variables son x, y, z.***

* En la siguiente expresión algebraica :

$P(x;y)=\sqrt{2}xy^3-3x^ny^{1/3}+m^2$

→ son variables : x, y;

* Son constantes: $\sqrt{2}$; 3; -3; n; $\dfrac{1}{3}$; m^2

 **NOTA**

Las constantes que se representan con símbolos literales se llaman parámetros. En el ejemplo anterior , *m* y *n* son parámetros.

▲ **Las siguientes expresiones no son algebraicas:**

* $R(x)=x^2+\operatorname{sen} x$
* $G(x)=1+x+x^2+x^3+\ldots\ldots\ldots$
* $F(x)=1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x^3}+L$
* $J(x)=x^2+2x+2^x$
* $H(x;y)=2x^3+Logxy-Seny^2$

TÉRMINO ALGEBRAICO

Es aquella expresión algebraica donde no participa la operación adición y sustracción :

EJEMPLO:

$B(x;y)=-4\,x^2y^2$

Exponentes: 2, 2 — Coeficiente: -4 — Variables: x, y

Observación:

Dos o más términos algebraicos ***serán semejantes*** si los exponentes de sus respectivas variables son iguales.

EJEMPLO :

$$\underbrace{R(x;y) = 4x^3y^4 \text{ y } S(x;y) = 5x^3y^4}_{\text{son semejantes}}$$

$$\underbrace{A(a;b) = a^2b^3 \text{ y } P(a) = 4a^3b^2}_{\text{no son semejantes}}$$

* Los términos algebraicos :

$A(x;y) = 2x^3y^5$ y $N(x;y) = \frac{1}{2}x^3y^5$ ***son semejantes.***

* Los términos algebraicos :

$$M(x;y) = -\frac{4x^3}{y^2} \text{ y } N(x) = \frac{2x^3}{y^2}$$

no son semejantes , pues no tienen las mismas variables.

MONOMIO :

Es un término algebraico , cuyos exponentes de sus variables son números naturales.

EJEMPLOS :

Las siguientes expresiones son monomios :

OJO: Las variables de todo monomio están escritas dentro de estos paréntesis

$P_{(x)} = 5x^3$

$M_{(x;y)} = \frac{-7}{2}x^4y^9$

PARTES DE UN MONOMIO

Todo monomio posee las siguientes partes :

$$M_{(x;y)} = \frac{-7}{2}x^4y^9$$

Coeficiente: $\frac{-7}{2}$; Variables: x, y ; Exponentes: 4, 9

VALOR NUMÉRICO

Consiste en reemplazar las variables de un monomio por números determinados. Así , se obtendrán un resultado, denominado VALOR NUMÉRICO.

EJEMPLO :

Si : $P(x) = 7x - 2$, hallar «$P_{(5)}$»

RESOLUCIÓN:

* Reemplazamos : $x = 5$

$P_{(5)} = 7(5) - 2$

$\Rightarrow P_{(4)} = 35 - 2$; Luego , $P_{(5)} = 33$

POLINOMIO

Es aquella expresión algebraica donde los exponentes de las variables son números enteros positivos , además dichas expresiones están definidas para cualquier valor que se de a sus variables.

NOTA :

Se llama *polinomio* a la suma finita de expresiones de la forma: ax^m (si el polinomio tiene una sola variable) o de la forma: ax^my^n (si el polinomio tiene dos variables).

donde:

* a: es una constante, a la que se denomina *coeficiente.*
* x , y : son las variables.
* m , n : son los exponentes de las variables, los cuales son enteros no negativos.

En particular, al término ax^m se le llama *monomio* de variable «x» y al término ax^my^n, *monomio* de variables «x» e «y».

EJEMPLO :

$7x^3 + \frac{1}{2}x^3 - 7z^2$, ***Si es polinomio*** , porque todas sus variables tienen exponentes enteros no negativos.

$9x^8 - 6x^{\frac{3}{4}} + 19x^3 - 6$, ***No es polinomio***, porque una de sus variables tiene exponentes fraccionarios.

$12x^3 - 5y^{-5}z + 9x^2y^2$, ***No es polinomio***, porque una de sus variables tiene exponente negativo.

$A(x;y) = 4x^3 + y^4 - 1$................ ***(Si)***

$Q(x) = x - x^{-4}$......................... ***(No)***

$B(x) = x^2 + y^{1/2}$ .... ***(Si)***

NOTACIÓN POLINÓMICA

Es la forma abreviada de la representación de un polinomio.Un polinomio se denota así :

* $P_{(x)} = 3x^4 - \frac{1}{3}x^3 + 2x^2$
  - x ***es la única variable***
  - P: ***Nombre genérico del polinomio***

Se lee: «P de x» ó «P en x»

* $Q_{(x;y)} = 6x^4y^3 - 7x^3y$
  - ***x , y son variables del polinomio "Q"*** Se lee: «Q de x, y» ó «Q en x,y»

* $P(x)=13x^4-2x+7$, es un polinomio de variable x; donde los coeficientes son los números reales : 13 ; -2 ; 7.

* $Q(x;y)=7xy-4x^3y^3+11x^2$, es un polinomio de variables x e y ; donde los coeficientes son los números reales: 7; -4 ; 11.

Un polinomio de variable única «x», tiene la siguiente *forma general*

$P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+....+a^{n-1}x+a_n$; $a_0\neq 0$.

Donde:

* x : es la variable
* n : es el grado del polinomio.
* $a_0, a_1, a_2, ..., a_n$: son los coeficientes
* a_0: es el coeficiente principal, $a_0\neq 0$
* a_n: es el término independiente.

•Además podemos nombrar los polinomios de acuerdo a la cantidad de términos que poseen.

$P(x,y)=x^3y$ .... *Monomio*

$P(x)=x^2+5x$ .... *Binomio*

$Q(x,y)=y^2+xy-5x^2$.... *Trinomio*

$Q(x)=x^4-x^2+x-1$ ... *Cuatrinomio*

o simplemente polinomio de cuatro términos.

Observación:

La expresión $E(x;y)=\frac{1}{x^2+y^2}$; no es un polinomio , porque no está definido para: $x=0 \wedge y=0$.

FORMA GENERAL DE UN POLINOMIO EN LA VARIABLE «x».

$$P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+...+a_n$$

$$a_0\neq 0$$

Donde :

• $a_0; a_1; a_2; ......; a_n$ son los coeficientes del polinomio.

* a_0 es el coeficiente principal (coeficiente de la variable con mayor exponente)

* a_n es el término independiente.

EJEMPLO:

el polinomio : $P(x)=5x^4-x^3+2x-3$

* *Es de cuarto grado (puede llamársele polinomio cuártico aunque no es muy usual).*

Además :

•Su coeficiente principal es : $a_0=5$.

• Su término independiente es : -3

• Su término lineal es : $2x$

• Su término cuadrático es : $0x^2$ (carece de término cuadrático)

• Su término cúbico es : $-x^3$

Además:

$P(x)=x+7$.......... *Polinomio de primer grado*

$Q(x)=2x^2-x+1$... *Polinomio de segundo grado*

$P(x)=x^3-x+7$.... *Polinomio de tercer grado*

$G(x)=3x^4+x^2+5$..*Polinomio de cuarto grado*

FORMAS GENERALES :

POLINOMIO LINEAL :

(Polinomio de primer grado)

$$P(x)=ax+b\ ;\ a\neq 0$$

POLINOMIO CUADRÁTICO :

(Polinomio de segundo grado)

$$P(x)=ax^2+bx+c\ ;\ a\neq 0$$

VALOR NUMÉRICO (V.N.)

Si le asignamos valores a las variables de una expresión algebraica y efectuamos las operaciones que se indican , el número real que se obtiene se llama valor numérico de la expresión algebraica.

EJEMPLO:

el valor numérico de :

$P(x;y)=3y\sqrt{x}+5$, cuando $x=9$; $y=2$

Es : $P(x;y)=3(2)\sqrt{9}+5=23$

$\rightarrow P(9;2)=23$ *nos piden*

Sea $P(x)=-3x^3+2x^2+x-6$

* Si $x=-1$ entonces:

$P(x)=-3(-1)^3+2(-1)^2+(-1)-6=-2$

* Si $x=2$ entonces:

$P(x)=-3(2)3+2(2)2+(2)-6=-20$

NOTA

Si $P(x)$ es un polinomio, entonces se cumple que:

* $P(1)$ = suma de coeficientes del polinomio
* $P(0)$ = término independiente del polinomio

EJEMPLO:

Para el polinomio: $P(x)= 2x^3 + 17x^2 + 3x - 4$, se tiene que:

* $P(1) = 2 + 17 + 3 - 4 = 18$ = Suma de coeficientes del polinomio

$P(0) = 0 + 0 + 0 - 4 = -4$ = término independiente.

CAMBIO DE VARIABLE

Las variables de un polinomio (o expresión algebraica) pueden ser sustituidas por cualquier otra variable o polinomio , quedando el polinomio en términos de la nueva variable.

EJEMPLO 1:

Dado el polinomio $P(x) = 4x - 5$

Halle :

I) $P(y + 1)$ II) $P(3x - 1)$

RESOLUCIÓN:

I) El dato es $P(x) \xrightarrow{\text{nos piden}} P(y+1)$

Aquí hay que reemplazar directamente x por $y+1$ en $P(x)$.

* Luego : $P(y + 1) = 4(y + 1) - 5$

$\Rightarrow P(y + 1) = 4y - 1$

II) Igual que el anterior :

El dato es $P(x) \longrightarrow P(3x - 1)$

* Reemplazamos x por $3x-1$ en $P(x)$
* Luego : $P(3x - 1)= 4(3x - 1) - 5$

$\Rightarrow P(3x - 1)= 12x - 9$

EJEMPLO 2:

Sea $P_{(x)} = 9x + 6$

Calcular : $P_{(4)}$

RESOLUCIÓN :

* Primero se calcula el valor de la variable igualando las notaciones polinómicas.

$P_{(x)} = P_{(4)}$ entonces $x=4$

* Reemplazo el valor encontrado en el polinomio original : si $x = 4$ entonces $P_{(4)} = 9(4) + 6 = 42$

EJEMPLO 3:

Sea $P_{(x+4)} = 8x - 1$

Calcular : $P_{(5)}$

RESOLUCIÓN :

* Primero se calcula el valor de la variable igualando las notaciones polinómicas entonces : $x + 4 = 5$

$P_{(x+4)} = P_{(5)}$, luego $x=1$

* Reemplazo el valor encontrado en el polinomio original :

$P_{(1+4)} = 8(1) - 1$

$P_{(5)} = 8 - 1$

*Por lo tanto: $P_{(5)} = 7$

EJEMPLO 4:

Dado el polinomio : $P(x - 4)= 10x - 7$

Hallar $P(x)$

RESOLUCIÓN:

* ***1ra. Forma:***

Hagamos aparecer la primera variable $x - 4$ en el ***2do.*** miembro , así :

$\Rightarrow P(x - 4)= \underbrace{10x - 40} + 33$

$P(x - 4) = 10(x - 4) + 33$

Aquí reemplazamos $x - 4$ por x

$\Rightarrow P(x) = 10x + 33$

* ***2da. Forma:*** Se va a recurrir a un cambio de variable , así :
* De $P(x-4)$, se hace

$x - 4 = y \longrightarrow x = y + 4$

* Reemplazamos en $P(x - 4)$...... Dato

$\Rightarrow P(y)=10(y + 4) - 7 \Rightarrow P(y)=10y + 33$

*Ahora cambiamos y por x :

$P(x) = 10x + 33$

* ***3ra. Forma:*** (*Método super práctico*)

Hallando la regla como operar de:

$P(x - 4) = 10x - 7$

PREGUNTA CLAVE:

¿Qué podemos hacer a la parte interna de «P» , es decir a «x - 4», para que aparezca «10 x - 7» (miembro derecho)?

RPTA. : $P(x-4) = 10x-7$

+4 ×10 −7

$\Rightarrow P(x) = (x + 4)10 - 7 = 10x + 33$

+4 ×10 −7

MÁS EJEMPLOS:

* Si : $P(x)=2x+3 \Rightarrow P(x)= 2x + 3$

×2+3

* Si : $T(x - 2)= x^2 \Rightarrow T(x - 2)= x^2$

+2 $()^2$

* Si: $Q(2x - 3) = x + 1$

$\Rightarrow Q(2x - 3)= x + 1$

+3 ÷2 +1

* Si: $P(\sqrt[3]{y}) = 5y - 1$

$$\Rightarrow P(\sqrt[3]{y}) = 5y - 1$$

$(\ )^3 \times 5 - 1$

* Si: $P(x)=3x+1$

$$\left.\begin{array}{r} P(x)=3x+1 \\ \Rightarrow 3x+1 = F(x) \\ -1 \div 3 \end{array}\right\} \text{Forma inversa}$$

GRADO DE LAS EXPRESIONES ALGEBRAICAS

El grado es una característica de las expresiones algebraicas , que en una ecuación indica el número de valores que debe tener la incógnita.

El grado ***absoluto*** si se refiere a todas las variables y ***relativo*** si se refiere a una de las variables.

Grado de un Monomio

GRADO ABSOLUTO:

Se obtiene al sumar los exponentes de las variables.

GRADO RELATIVO:

El grado relativo a una variable es el exponente de dicha variable.

EJEMPLOS :

* Si tenemos los polinomios:

$$P_{(x;y)} = 5x^3y^5 ;\ M_{(a;b;c)} = a^4b^3c^2$$

* Entonces sus grados absolutos serán:

$G.A.(P_{(x;y)}) = 3 + 5 = 8$

$G.A.(M_{(a;b;c)}) = 4+3+2=9$

* Si tenemos los polinomios:

$$P_{(x,y)} = 5x^3y^5 ; \text{ entonces} \begin{cases} G.R._{(x)} = 3 \\ G.R._{(y)} = 5 \end{cases}$$

$$M_{(a,b,c)} = a^4b^3c^2 ; \text{ entonces} \rightarrow \begin{cases} G.R._{(a)} = 4 \\ G.R._{(b)} = 3 \\ G.R._{(c)} = 2 \end{cases}$$

* $F(x,y) = a^4x^5y^8$

$G.R.(x) = 5$
$G.R.(y) = 8$
$G.A.(F) = 8 + 5 = 13$

Grado de un Polinomio

GRADO ABSOLUTO:

Está dado por el mayor grado de sus términos.

GRADO RELATIVO:

El grado relativo a una variable es el mayor exponente de dicha variable.

EJEMPLO 1:

*Hallar el grado absoluto del polinomio:

$$P_{(x,y)} = \underbrace{5x^2y^7}_{G.A.=9} - \underbrace{3x^4y^2}_{G.A.=6} + \underbrace{4x^2y^2}_{G.A.=4}$$

*Luego el resultado es el mayor G.A.

$\Rightarrow G.A.(P_{(x,y)}) = 9$

EJEMPLO 2:

* Hallar el grado relativo de «x» e «y» del polinomio

: $P_{(x,y)} = 5x^2y^7 - 3x^4y^2 + 4x^2y^2$

RESOLUCIÓN:

* Hallamos el grado relativo para cada término:

$5x^2y^7$	$3x^4y^2$	$4x^2y^2$
G.R.(x)=2	G.R.(x)=4	G.R.(x)=2
G.R.(y)=7	G.R.(y)=2	G.R.(y)=2

* Luego, cogemos el mayor en cada caso; así:

$\Rightarrow G.R.(x) = 4;\ G.R.(y) = 7$

EJEMPLO 3 :

$$P(x,y) = 6x^6y - 3x^7y^3 + 2xy^5$$

$G.R.(x)=7$; $G.R.(y)=5$; $G.A.(P)=10$

CÁLCULO DE GRADOS EN OPERACIONES

I) En la adición o sustracción se conserva el grado del mayor:

EJEMPLO:

Si P(x) es de grado: a
Si Q(x) es de grado: b
tal que : $a > b$

$\Rightarrow$ Grado $[P(x) \pm Q(x)] = a$

II) En la multiplicación los grados se suman:

EJEMPLO:

$(x^4 + x^5y + 7)(x^7y + x^4y^5 + 2)$

$\Rightarrow$ Grado: $6 + 9 = 15$

III) En la división los grados se restan:

EJEMPLO: $\dfrac{xy^8 - x^3y^3 + x^7}{x^4z - y^3 + x^3y^3} \Rightarrow$ Grado : $9 - 6 = 3$

IV) En la potenciación el grado queda multiplicado por el exponente:

EJEMPLO:

$$(x^3y - x^2y^6 + z^9)10 \Rightarrow Grado: 9\times10 = 90$$

V) En la radicación el grado queda dividido por el índice del radical:

EJEMPLO:

$$\sqrt[3]{xy^7 + 2x^3y^6 - 7x^{12}} \Rightarrow Grado: \frac{12}{3} = 4$$

Observaciones:

° cuando empleemos la palabra ***grado*** a secas, nos referimos al ***grado absoluto*** del polinomio.

° si todos los coeficientes del polinomio son nulos, el polinomio es llamado nulo (o polinomio cero) y en este caso diremos que carece de grado.

POLINOMIOS ESPECIALES

En esta parte definiremos algunos polinomios de uso frecuente y para los cuales existe una terminología de uso común:

I) POLINOMIOS HOMOGÉNEOS:

Son aquellos en los que todos los términos tienen igual grado.

EJEMPLO:

° $x^3y^2 - x^5 + x^2yz^2$ ***Es homogéneo de grado 5.***

° $P(x;y;z) = x^3 + y^3 + z^3 + xyz$

Es un polinomio homogéneo de grado 3.

NOTA

Otra definición de polinomio homogéneo es:

$$«P(kx;ky;kz;...;kw) = k^nP(x;y;z;...;w)$$

donde: $k \in \mathbb{Z}; k \neq 0$

II) POLINOMIOS ORDENADOS:

Un polinomio será ordenado con respecto a una de sus variables, si los exponentes de dicha variable están aumentando o disminuyendo según sea el orden ascendente o descendente a partir del primer término (contando de derecha a izquierda).

EJEMPLO:

° $x^4y^7 - x^8y^{10} + x^5y^{24}$

Está ordenado ascendentemente con respecto a **y**.

* $P(x;y) = 5x^2y^5 + 3x^4y^3 + 3x^7y^2$ está ordenado ascendentemente respecto a x y descendentemente respecto a **y**.

III) POLINOMIOS COMPLETOS:

Un polinomio será completo con respecto a una de sus variables si contiene todos los exponentes (potencias sucesivas) de dicha variable desde el mayor hasta el cero inclusive.

EJEMPLO:

* $xy^8 - y^6 + x^3y^7 + x^2y^8$ Es completo respecto a x.

* $P(x;y) = 5x^6y^3 + x^7 - xy + x^2y^2 - 8$ *es completo respecto a* **y**.

NOTA

Un polinomio completo no tiene porque ser ordenado y viceversa.

EJEMPLOS:

* el polinomio $P(x;y) = 3x^3y + xy^2 + x^2y^5 - 7$ *es completo respecto a la variable* x, *pero no está ordenado respecto a esta variable.*

* el polinomio $P(x) = 5x^3 + x^2 + x^2 - 2$ *es completo respecto a la variable* x, *y está ordenado respecto a esta variable.*

PROPIEDAD

En todo polinomio completo y de una sola variable, el número de términos es equivalente al grado aumentado en uno. Es decir:

Número de términos=Grado +1

EJEMPLO:

$$P(x) = x^3 - x^4 + 2x - 7x^2 + 11x^5 + 2$$

* Como es completo entonces:

Número de términos = 5+1 = 6

IV) POLINOMIOS IDÉNTICOS ($\equiv$):

Dos polinomios son idénticos si tienen el mismo valor numérico para cualquier valor asignado a sus variables. En dos polinomios idénticos los coeficientes de sus términos semejantes son iguales.

EJEMPLO:

* sea: $ax + by + cz \equiv 8x + 2z - 5y$

entonces: $a=8$; $b=-5$; $c=2$

* Los polinomios: $P(x) = 16x^2 + 45x + 98$ y $Q(x) = 98 + 45x + 16x^2$, son idénticos y se denota así: $P(x) \equiv Q(x)$

* Si: $P(x) = ax^3 + bx^2 + c$ y $Q(x) = 9x^3 + 31x^2 + 20$, son idénticos $ax^3 + bx^2 + c \equiv 9x^3 + 31x^2 + 20$, $\forall \in \mathbb{R} \cdot \Rightarrow a=9; b=31; c=20$

F) POLINOMIOS IDENTICAMENTE NULOS($\equiv 0$):

Son aquellas expresiones que son equivalentes a cero. Estando reducidas se cumple que cada coeficiente es igual a cero.

EJEMPLO:

* sea : $ax + by + cz \equiv 0$
entonces : $a=0$; $b=0$; $c=0$

* Si $P(x) = ax^2 + bx + c$ es idénticamente nulo, entonces: $a = 0$; $b = 0$ y $c = 0$

DEFINICIONES ADICIONALES

POLINOMIO MÓNICO :

Es aquel polinomio de una variable cuyo coeficiente principal es *1*.

EJEMPLO:

Los polinomios :

$P(x)= x^3 + 2x^2 - x + 4$

$Q(x)= 2x^4 + 3x^2 + x^5 - 2$

son mónicos.

•Pero los polinomios :

$F(x)= x^3 + 2x^2 - x^4 + 3$

$G(x)= x^5 + x^4 + 2x^6 + x^3 - 5$

No son mónicos.

POLINOMIOS CONSTANTES :

Son aquellos polinomios (de una o más variables) de la forma $P(x)= k$, «k» es un número real. Si $k \neq 0$, entonces definimos el grado del polinomio constantes como cero , pero si $k=0$, entonces $P(x) \equiv 0$ es llamado polinomio idénticamente nulo , cuyo grado no está definido.

EJEMPLO:

Los polinomios.

$P(x)= 7$; $P(x,y)=-1$; $P(x)=\sqrt{2}$

son constantes de grado cero.

* Pero el polinomio $P(x)=0$ es el único polinomio que no tiene grado.

 **PROPIEDADES**

Consideremos el polinomio de grado «n».

$$P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\dots+a_{n-1}x+a_n$$

donde: $a_0 \neq 0$, luego :

SUMA DE COEFICIENTES :

En todo polinomio de dos o más términos la suma de sus coeficientes se obtiene evaluando el polinomio en *1*. Es decir suma coeficientes es $P_{(1)}$ ó $P_{(1;1)}$ ó $P_{(1;1;1)}$ (según la cantidad de variables).

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n = P(1)$$

TÉRMINO INDEPENDIENTE :

En todo polinomio su término independiente se obtiene evaluando dicho polinomio en cero. Es decir :

Término independiente $P_{(0)}$ o $P_{(0;0)}$ o $P_{(0;0;0)}$ (según la cantidad de variables).

$$a_n=P(0)$$

EJEMPLOS :

* Sea el polinomio:

$P(x)=3x^4+x-2$, luego:

$\Rightarrow$ Suma de coeficientes: $P(1)= 3+1-2 = 2$

$\Rightarrow$ Término independiente: $P(0) =-2$

* Sea el polinomio:

$Q(x)= x(x + 2) + 2(x-1) + 4$, luego:

$\Rightarrow$ Suma de coeficientes: $Q(1) = 1(3) + 2(0) + 4 = 7$

$\Rightarrow$ Término independiente: $Q(0) = 0(2) + 2(-1) + 4 = 2$

* Sea el polinomio :

$P(x + 2) = 4x^3-x + 3$, luego:

$\Rightarrow$ Suma de coeficientes :

$x+ 2= 1 \Rightarrow x =-1$

$\Rightarrow P(1)= 4(-1)^3 -(-1)+3$

*Luego: $P(1)=0$

$\Rightarrow$ Término independiente:

$x + 2 = 0 \Rightarrow x =-2$

$\Rightarrow P(0) = 4(-2)^3 -(-2) + 3$

*Luego: $P(0)=-27$

OPERACIONES CON POLINOMIOS

SUMA DE POLINOMIOS

Al sumar polinomios, se reducirán sus términos semejantes. Aquellos que no lo sean, serán colocados conservando su propio signo.

EJEMPLOS:

01 *Dados los polinomios:*

$$P(x)=7x^2+3x-5$$
$$Q(x)=5x^2-2x+9$$

Calcular: $P(x)+Q(x)$

RESOLUCIÓN:

* En primer lugar; escribimos los polinomios uno al lado del otro:

$$\overbrace{7x^2+3x-5}^{P(x)}+\overbrace{5x^2-2x+9}^{Q(x)}$$

* Ahora seleccionamos los términos semejantes:

$$7x^2+3x-5+5x^2-2x+9$$

* Hecho esto, reducimos los términos, seleccionados obteniendo el resultado:

$$12x^2+x+4$$

02 Calcular $P(x)+Q(x)+R(x)$ sabiendo que:

$$P(x)=3x^2+5\,;\,Q(x)=8x^3+5x^2-1$$
$$R(x)=8x+4$$

RESOLUCIÓN:

* Colocamos los tres polinomios juntos:

$$3x^2+5+8x^3+5x^2-1+8x+4$$

* Los términos semejantes se reducen, los otros son colocados con su propio signo.

$$8x^3+8x^2+8x+8$$

RESTA DE POLINOMIOS

La gran diferencia que existe con la suma, es que al polinomio negativo (precedido por un signo –) se la cambiarán, previamente, los signos de TODOS sus términos. Luego de esto, se procederá como en la suma.

EJEMPLO:

Si tenemos:

$$P(x)=2x^2-5x^2+10x-7$$
$$Q(x)=x^3-7x^2+3x-11$$

Calcular : $P(x)-Q(x)$

RESOLUCIÓN:

* Tenemos:

$$\overbrace{2x^3-5x^2+10x-7}^{P(x)}-\overbrace{(x^3-7x^2+3x-11)}^{Q(x)}$$

Q(x) es el polinomio negativo (observa el signo a su izquierda). Nota como se han colocado los «( )».

* Ahora cambiamos los signos a todos los términos de $Q(x)$: $2x^3-5x^2+10x-7-x^3+7x^2-3x+11$

* Observa que al cambiar los signos. Los «()» desaparecen automáticamente.

* Seleccionamos términos semejantes y reducimos:

$$2x^3-5x^2+10x-7-x^3+7x^2-3x+11$$

$$=x^3+2x^2+7x+4$$

MULTIPLICACIÓN DE POLINOMIOS

Para multiplicar polinomios debemos tener en cuenta a la siguiente propiedad:

$$\boxed{a^m\times a^n=a^{m+n}}\;;m,n\in N,a\in R$$

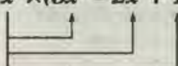
* Considerando esto, veremos los siguientes

EJEMPLOS:

01 Multiplicar x^5 por $3x^2-2x+1$

RESOLUCIÓN:

* Tenemos: $x^5\times(3x^2-2x+1)$



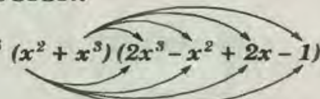
$$=x^5\times3x^2-x^5\times2x+x^5\times1$$
$$=3x^7-2x^6+x^5$$

Observa como se usó la propiedad mencionada.

02 Multiplicar (x^2+x^3) por $(2x^3-x^2+2x-1)$

RESOLUCIÓN:

* Tenemos



* Luego, multiplicando tenemos:

$$x^2\times2x^3-x^2\times x^2+x^2\times2x-x^2\times1+x^3\times2x^3-x^3\times x^3+x^3\times2x-x^3\cdot1$$

$$=2x^5-x^4+2x^3-x^2+2x^6-x^6+2x^4-x^3$$

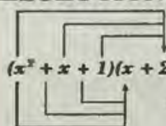
$$=2x^6+x^5+x^4+x^3-x^2$$

Observa como hemos reducido los términos semejantes.

03 Multiplicar

$A(x)=x^2+x+1$ con $B(x)=x+2$

RESOLUCIÓN:



* o también

$$\begin{array}{r} x^2+x+1 \\ x+2 \\ \hline x^3+x^2+x \\ +2x^2+2x+2 \\ \hline x^3+3x^2+3x+2 \end{array}$$

multiplicamos

sumamos

* Luego $C(x)=x^3+3x^2+3x+2$
* Con respecto a los grados :

$$\underbrace{A(x)}_{r}\underbrace{B(x)}_{r}=\underbrace{C(x)}_{s}$$

* Se observa que el grado de $C(x)$ resulta de sumar los grados de $A(x)$ y $B(x)$

EJERCICIO 1:

Reducir:

$$A = 5x + 2 -[-(6x + 2) - (-8 + x)]$$

A) 0 B) –1 C) 2 D) 4 E) –4

RESOLUCIÓN:

$$A=5x+2-[+6x-2+8-x]$$
$$\Rightarrow A=5x+2-[5x+6]$$
$$\Rightarrow A=5x+2-5x-6$$
$$\Rightarrow A=-4$$

RPTA : "E"

EJERCICIO 2:

Multiplicar $(2x + 3y^4)$ por $(5x^2 - y)$

RESOLUCIÓN:

* Aplicando la propiedad distributiva conforme se indica:

$$(2x+3y^4)(5x^2-y)$$

$=2x\times 5x^2-2x\times y+3y^4\times 5x^2-3y^4\times y$

$=10x^3-2xy+15x^2y^4-3y^5$

EJERCICIO 3 :

Multiplicar $3x^2-5xy+y^3$ por $-2x^3y^4$

RESOLUCIÓN:

$$(3x^2-5xy+y^3)(-2x^3y^4)$$

* Aplicando la propiedad distributiva:

$=-3\times 2x^2\times x^3y^4+5\times 2xy\times x^3y^4-2y^3\times x^3y^4$

$=-6x^5y^4+10x^4y^5-2x^3y^7$

EJERCICIO 4:

Reducir: $(2x^3+5xy)(x-y)-(x^3+xy)(2x-5y)$

RESOLUCIÓN:

*Aplicando la propiedad distributiva:

$$(2x^3+5xy)(x-y)-(x^3+xy)(2x-5y)$$

$=\left(2x^4-2x^3y+5x^2y-5xy^2\right)-\left(2x^4-5x^3y+2x^2y-5xy^2\right)$

$=\cancel{2x^4}-2x^3y+5x^2y-\cancel{5xy^2}-\cancel{2x^4}+5x^3y-2x^2y+\cancel{5xy^2}$

$=3x^3y+10x^2y$

EJERCICIO 5 :

Reducir: $(x+5)(2x-3)-(2x+1)(x-4)$

RESOLUCIÓN :

* Aplicando la propiedad distributiva :

$$(x+5)(2x-3)-(2x+1)(x-4)$$

$=\left(2x^2-3x+10x-15\right)-\left(2x^2-8x+x-4\right)$

$=2x^2+7x-15-\left(2x^2-7x-4\right)$

$=\cancel{2x^2}+7x-15-\cancel{2x^2}+7x+4=14x-11$

* De donde lo reducido es : $14x-11$

EJERCICIO 6:

Multiplicar $a^{m+2}-4a^m-2a^{m+1}$ por a^2-2a

RESOLUCIÓN:

* Análogamente conforme se indica:

$$(a^{m+2}-4a^m-2a^{m+1})(a^2-2a)$$

$=a^{m+2}\times a^2-4a^m\times a^2-2a^{m+1}\times a^2-a^{m+2}$

$\times 2a+4a^m\times 2a+2a^{m+1}\times 2a$

$=a^{m+4}-\cancel{4a^{m+2}}-2a^{m+3}-2a^{m+3}+8a^{m+1}+\cancel{4a^{m+2}}$

$=a^{m+4}-4a^{m+3}+8a^{m+1}$

LA REGLA DIAGONAL :

Una disposición usual para ejecutar el producto de polinomios mediante la regla de distribución es la variante de orientación rectangular, la cual se expone a continuación:

EJEMPLO :

Efectuar: $E=(3x^2+7x+21)(4x^2-9x+11)$

RESOLUCIÓN:

I) Disposición rectángular

$$\begin{array}{c|l} & 4x^2-9x+11 \\ \hline 3x^2 & \\ 7x & \\ 21 & \end{array}$$

II) Ejecutando una fila

$$\begin{array}{c|l} & 4x^2-9x+11 \\ \hline 3x^2 & 12x^4-27x^3+33x^2 \\ 7x & \\ 21 & \end{array}$$

III) De modo análogo

$$\begin{array}{c|l} & 4x^2-9x+11 \\ \hline 3x^2 & 12x^4-27x^3+33x^2 \\ 7x & 28x^3-63x^2+77x \\ 21 & 84x^2-189x+231 \end{array}$$

Luego de sumar términos semejantes por las diagonales, resulta:

$$E=12x^4+x^3+54x^2-112x+231$$

RESUMEN :

Los polinomios son expresiones algebraicas racionales enteros de dos o más términos. A los polinomios se les denota de la siguiente forma: ***P(x) , P(x;y) , ...***

Los polinomios poseen grados relativos y absolutos y estos son enteros y positivos.

Los polinomios especiales son: Polinomios ordenados, completos, homogéneos, idénticos o idénticamente nulo.

Con los polinomios podemos efectuar las operaciones de adición, sustracción, multiplicación y división. Esto último se estudiará en posterior capítulo.

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1:

Si: $\begin{matrix} A=7nx^{n-1} \\ B=-\sqrt{5}x^7 \end{matrix}$ son términos semejantes.

Hallar: $\sqrt{n^2+17}$

A) 9 *B) 8* *C) -1* *D) 12* *E) 131*

RESOLUCIÓN:

*Si: $\begin{cases} 7nx^{(n-1)} \\ -\sqrt{5}x^{(7)} \end{cases}$ Son ***T.S.*** ⇒ Los elementos de «x» deben ser iguales . Entonces : $n-1=7$® $n=8$

* Pero me piden hallar: $\sqrt{n^2+17}=\sqrt{8^2+17}=9$

RPTA : "A"

PROBLEMA 2:

Calcular el V.N. de M ; para $a=-1$;

$$M=-10a-2b+6a+2b$$

A) 1 *B) 2* *C) -2* *D) 4* *E) 8*

RESOLUCIÓN:

* De: $M=-10a-2b+6a+2b$

⇒ reduciendo:

$$M=-10a+6a \Rightarrow M=-4a$$

pero $a=-1$, luego : $M=-4(-1)=4$

RPTA : "D"

PROBLEMA 3:

Si: $P_{(x)}=2x^2-1$. Calcular : $E=\dfrac{P(2)^{P(1)}-P(0)^{P(2)}}{P(-2)+P(-1)}$

A) 1 *B) 2* *C) 3* *D) 4* *E) 6*

RESOLUCIÓN :

*Calculando por partes :

* $P(2)=2(2)^2-1=2(4)-1=8-1=7$
* $P(1)=2(1)^2-1=2(1)-1=2-1=1$
* $P(1)=2(1)^2-1=2(1)-1=2-1=1$
* $P(0)=2(0)^2-1=2(0)-1=0-1=-1$
* $P(-2)=2(-2)^2-1=2(4)-1=8-1=7$
* $P(-1)=2(-1)^2-1=2(1)-1=2-1=1$

*Luego: $E=\dfrac{7^1-(-1)^7}{7+1}=\dfrac{7-(-1)}{8}=\dfrac{7+1}{8}=\dfrac{8}{8}=1$

RPTA : "A"

PROBLEMA 4 :

Si: $P_{(x)}=x^3+2x^2-4x+5$

Hallar : $E=P(1)-P(-1)+P(2)-P(-2)$

A) -2 *B) -6* *C) 4* *D) 0* *E) 10*

RESOLUCIÓN:

* $P(1)=(1)^3+2(1)^2-4(1)+5=1+2-4+5=4$
* $P(-1)=(-1)^3+2(-1)^2-4(-1)+5=-1+2+4+5=10$
* $P(2)=(2)^3+2(2)^2-4(2)+5=8+8-8+5=13$
* $P(-2)=(-2)^3+2(-2)^2-4(-2)+5=-8+8+8+5=13$

* Luego : $E=4-10+13-13=-6$

RPTA : "B"

PROBLEMA 5:

Si: $P_{(x)}=3x^2+x-3$ Calcular el valor de: $P_{\left[P_{\{P(1)\}}\right]}$

A) 1 *B) 2* *C) 0* *D) -1* *E) 6*

RESOLUCIÓN:

* Nos piden calcular: $P_{\left[P_{\{P(1)\}}\right]}$

$$\Rightarrow P_{(1)}=3(1)^2+1-3$$

$$\Rightarrow P_{(1)}=3(1)+1-3=1$$

*Entonces : $P_{\left[P_{\{P(1)\}}\right]} = P_{[P(1)]} = P_{(1)} = 1$

RPTA : "A"

PROBLEMA 6 :

Sea: $P(x)=(2a-1)x^3-x^2+ax-a+3$

un polinomio mónico , indicar el término independiente :

A) 1 B) 2 C) 3 D) -2 E) -4

RESOLUCIÓN :

*Si $P(x)$ es mónico , entonces su coeficiente principal es 1, es decir : $2a-1=1 \Rightarrow 2a=2 \Rightarrow a=1$

* Se pide: $\underset{\text{Independiente}}{\text{Término}} = -a+3=-1+3=2$

RPTA : "B"

PROBLEMA 7:

Si: $F(x)=\dfrac{[x^{2n-3}(x^{n-2})^3]^2}{x^{2n+3}}$

Se reduce a un monomio de *3er*. grado, calcular el valor de «n».

A) 5 B) 3 C) 7 D) 1 E) – 2

RESOLUCIÓN:

• Efectuando tenemos:

$$F(x)=\frac{x^{4n-6}\times x^{6n-12}}{x^{2n+3}}=\frac{x^{10n-18}}{x^{2n+3}}$$

$$\Rightarrow F(x)=x^{8n-21}$$

•Ahora como es de grado 3 , entonces:

$$8n-21=3 \Rightarrow 8n=24 \Rightarrow n=3$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 8:

Luego de reducir clasifique la expresión algebraica.

$$P(x;y;z)=\frac{9x^4y^3}{7z^{-3}}-\frac{\sqrt{3}x^{\frac{1}{3}}y^2}{\sqrt[3]{x^{-2}}}-\frac{\sqrt{5}}{3}y^8z^{-4}$$

A) Racional constante
B) Irracional
C) Racional fraccionaria
D)No admite clasificación
E)Trascendente

RESOLUCIÓN:

* Llevamos las variables al numerador:

$$\frac{9}{7}x^4y^3z^3-\sqrt{3}xy^2\frac{\sqrt{5}}{3}y^8z^{-4}$$

Observación :

Exponentes de las variables son números enteros , esto hace que la expresión algebraica sea racional, pero como hay por lo menos uno que es negativo se concluye que $P(x,y,z)$ es una expresión algebraica racional fraccionaria.

RPTA : "C"

PROBLEMA 9:

Si el polinomio completo es de «3n» términos :

$$P(x)=2nx^{2n}+(2n-1)x^{2n-1}+(2n-2)x^{2n-2}+...$$

Calcular «n».

A) 1 B) 3 C) 5 D) 7 E) 9

RESOLUCIÓN:

* Se puede apreciar que $P(x)$ está ordenado descendentemente, entonces:

$$Grado\ [P]=2n$$

* Además sabemos que :

$$\overbrace{3n}^{\text{Número de términos de } P(x)} = \overbrace{2n+1}^{Grado+1} \Rightarrow n=1$$

RPTA : "A"

PROBLEMA 10:

Calcular «a» y «b», para que el polinomio sea completo.

$$P(x)=(2+a)x^{a+b}-3x^2+5+2x^a$$

e indicar: a^2-b

A) -1 B) 0 C) 2 D) 5 E) 3

RESOLUCIÓN:

* Como el polinomio es completo y de 4 términos , entonces $P(x)$ es de grado 3, donde el grado de los otros 2 términos serían 3 y 1; luego una de las posibilidades será : $a+b=3$ y $a=1 \Rightarrow b=2$

• Piden: $a^2-b=2^2-1=3$

RPTA : "E"

PROBLEMA 11:

Si el polinomio:

$$P(x,y)=(a^2+1)x^{a^2+2}y^a+(a+1)x^{2a-1}y^{a^2-1}$$

es homogéneo , hallar la suma de sus coeficientes.

A) 16 B) 13 C) 11 D) 4 E) 22

RESOLUCIÓN:

* Por ser homogéneo se cumple:

$$\underbrace{G.A.(término\ 1)}_{a^2+2+a} = \underbrace{G.A.(término\ 2)}_{2a-1+a^2-1}$$

de aquí: $a=4$

• Luego : $\sum coef.\ de\ P(x,y)=P(1,1)$

• Donde : $P(1,1)=a^2+1+a+1=22$

RPTA : "E"

PROBLEMA 12:

Si: $P(x)=(m+n)x^{n^m}-(m-n)x^{m^n}$

Es idénticamente nulo, calcular: $m\times n$

A) 1 B) 2 C) 0 D) – 1 E) – 3

RESOLUCIÓN:

* Como $P(x)$ es idénticamente nulo, entonces : $P(x)=0$; luego :

$* a+b=0$
$* a-b=0$ (+)

$2a=0 \longrightarrow a=0 \longrightarrow b=0$

* Piden: $a \times b = 0 \times 0 = 0$

RPTA : "C"

PROBLEMA 13:

Si los polinomios:

$P(x)=(a-2)x^3+(2a-b-3)x+(2c-3b)$

$Q(x)=-4x^3-5x+6$

son idénticos , hallar : $a+b+c$

A) 1 B) 2 C) – 1 D) – 4 E) 3

RESOLUCIÓN :

* Como $P(x) = Q(x)$, entonces :

$a-2=-4$ ....(I)

$2a-b-3=-5$ ....(II)

$2c-3b=6$ ....(III)

* De (I): $x=-2$

* Reemplazando en (II): $2(-2)-b-3=-5 \Rightarrow b=-2$

* Luego en (III): $2c-3(-2)=6 \Rightarrow c=0$

* Por tanto : $a+b+c=-2+-2+0=-4$

RPTA : "D"

PROBLEMA 14:

Si el polinomio cuadrático :

$$P(x)=\frac{n}{4}\ x^{\frac{m}{3}-5}+(p-13)x+2p-5$$

Tiene como coeficiente principal a 17, mientras que el término independiente es el triple del coeficiente del término lineal.

Calcular : $m+n+p$

A) 81 B) 12 C) 201 D) 123 E) 80

RESOLUCIÓN:

* Por ser cuadrático : $\frac{m}{3}-5=2 \Rightarrow m=21$

* Además:

Coeficiente principal = 17 $\frac{n}{4}=17 \Rightarrow n=68$

* Según último dato: $2p-5=3(p-13) \Rightarrow p=34$

* Piden: $m+n+p=21+68+34=123$

RPTA : "D"

PROBLEMA 15:

Del polinomio:

$$P(x,y)=3^5x^{n+3}y^{m-2}z^{6-n}+x^{n+2}y^{m-3}$$

$G.A.(P)=11$; $G.R.(x)-G.R.(y)=5$

Luego: $2m+n$ es:

A) 5 B) 15 C) 10 D) 25 E) 12

RESOLUCIÓN:

• Analicemos los grados de dos términos:

$* G.A.(T_1)=m+n+1$
$* G.A.(T_2)=m+n-1$
} De aquí $G.A(P)=m+n$

• Usando el dato: $m+n+1=11$

$\Rightarrow m+n=10$ ....(I)

• Además del polinomio :

$G.R.(x)=n+3 \wedge G.R.(y)=m-2$

• Por dato: $\underbrace{G.R.(x)}_{(n+3)} - \underbrace{G.R.(y)}_{(m-2)} = 5$

• De aquí : $n-m=0 \Rightarrow m=n$

• Reemplazando en I:

$m=5 \wedge n=5$

$\Rightarrow 2m+n=15$

RPTA : "B"

PROBLEMA 16 :

Determinar el grado del polinomio $P(x)$ sabiendo que el grado de $[P(x)]^2\ [Q(x)]^3$ es igual a 21, además el grado de $[P(x)]^4\ [Q(x)]^2$ es igual a 20.

A) 2 B) 5 C) 3 D) 7 E) 1

RESOLUCIÓN:

* Sea: $\begin{Bmatrix} Grado\ [P(x)]=m \\ Grado\ [Q(x)]=n \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} Grado[P(x)]^2=2m \\ Grado[Q(x)]^3=3n \end{Bmatrix}$

* Donde: $Grado[P(x)]^2\,[Q(x)]^3=2m+3n$

* Por dato: $2m+3n=21$ ....(I)

* Además: $Grado[P(x)]^4=4m$

$Grado[Q(x)]^2=2n$

$\Rightarrow [P(x)]^4\ [Q(x)]^2=4m+2n$

* Por tanto: $4m+2n=22$.........(II)

* Resolviendo (I) y (II): $m=3$; $n=5$

$\Rightarrow Grado\ [P(x)]=3$

RPTA : "C"

PROBLEMA 17:

¿Cuánto hay que agregar al polinomio :

$$Q_{(x,y)}=3x^4+5xy^3-2x^2y^2$$

para que sea un polinomio homogéneo $P_{(x,y)}$ y completo con respecto a «x» y la suma de coeficientes es 21, además $P(2;1)=114$?

A) $3x^3y+8y^4$ B) $7x^3y+8y^4$ C) $9x^3y+8y^4$
D) $11x^3+8y^4$ E) $13x^3y+8y^4$

RESOLUCIÓN:

* Lo que vamos a agregar al polinomio para que sea completo respecto axy homogéneo a la vez es a x^3y+by^4 ahora tendremos el polinomio:

$$P_{(xy)}=3x^4+ax^3y-2x^2y^2+5xy^3+by^4$$

* donde:

$P_{(2;1)}=3(2)^4+a(2)^3(1)-2(2)^2(1)^2+5(2)(1)^3+b(1)^4$

$=114 \Rightarrow P_{(2;1)}=50+8a+b=114 \Rightarrow a+b=15$

* También: $3+a+-2+5+b=21 \Rightarrow a+b=15$

* Resolviendo el sistema: $\begin{cases} 8a+b=64 \\ a+b=15 \end{cases}$

Tenemos: $a=7;b=8$

* Entonces debemos agregar: $7x^3y+8y^4$

RPTA : "B"

PROBLEMA 18:

Si: $(a^4+36)x+a^2+a=6+13a^2x$, se cumple para todo número real x, los valores reales de «a» son :

A) -2 y 3 B) 2 y -3 C) 2, -2, 3 y -3 D) 2 y 3

RESOLUCIÓN:

* Si la igualdad se verifica para todo número real x, entonces se concluye que ésta, es una identidad.

* Por lo tanto, dando un valor conveniente.

* Para $x=0$, se tendrá :

$a^2+a=6 \Rightarrow a^2+a-6=0 \Rightarrow (a+3)(a-2)=0$

* $a+3=0 \Rightarrow a=-3$

* $a-2=0 \Rightarrow a=2$

RPTA : "B"

PROBLEMA 19:

Si en el polinomio de grado par:

$$P(x)=\left[(n+1)x^n 1\right]^n-n(x^n-1)^n+2n$$

$n \in \mathbb{Z}^+$ se verifica que la suma de coeficientes excede su coeficiente principal.

A) 256 B) 512 C) 621 D) 725 E) 729

RESOLUCIÓN:

* Por dato: $P_{(1)}-50P_{(0)}=14$..........(I)

* En el polinomio: $P_{(x)}=\left[(n+1)x^n-1\right]^n-n(x^n-1)^n+2n$

* Evaluando y reemplazando en (I):

$(n+1-1)^n-n(1-1)^n+2n-50\left[(-1)^n-n(-1)^n+2n\right]=14$

$\Rightarrow n^n+2n-50[1-n+2n]=14$

$\Rightarrow n^n+2n-50-50n=14$

$\Rightarrow n^n=64+48n$

* Como $n \in Z^+ \Rightarrow n=4$

* Luego el polinomio tiene la forma:

$P_{(x)}=[5x^4-1]^4-4(x^4-1)^4+8$; de donde:

* Coeficiente principal : $5^4-4=625-4=621$

RPTA : "C"

PROBLEMA 20:

De las siguientes sentencias , cuántas son ciertas :

I) $P_{(x)}=5x^4+2\sqrt{3}x^{a-6}$, es homogénea si $a=10$

II) El término independiente de $P_{(-x)}$ es -7 :

$$P_{(x+1)}=2x-7$$

III) La suma de coeficientes de $P_{(-x)}$ es:

$$14;P_{(x-1)}=3x+11$$

IV) Si: $Q_{(x)}=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ se anula para 6 valores , entonces $Q(x)\equiv 0$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

RESOLUCIÓN:

*Analizando las proposiciones :

I) FALSO: Pues el polinomio está en una sola variable y no se definen polinomios homogéneos de una variable.

II) De $P_{(x+1)}=2x-7 \Rightarrow P_{(x)}=2x-9$

Luego: $P_{(-x)}=-2x-9$

FALSO ,pues el $T.I_{(P)}=-9$

III) En: $P_{(x-1)}=3x+11$

$P_{(1)}=3(2)+11=17$........... FALSO

IV) VERDADERO

RPTA : "A"

PROBLEMA 21:

Si: $F(5x^3-1)=\sqrt{7x+16}+8$

Calcular: $F(-6)$

A) 9 B) 5 C) 11 D) 19 E) 10

RESOLUCIÓN:

$F(5x^3-1)=\sqrt{7x+16}+8$

$F(-6)=\sqrt{7(\ )+16}+18$

El valor que se va hallar de x

$5x^3-1=-6$

$\Rightarrow 5x^3=-6+1$

$\Rightarrow 5x^3=-5 \Rightarrow x^3=-1$

$\Rightarrow x=\sqrt[3]{-1} \Rightarrow x=-1$

* Con lo que:

$$F(-6)=\sqrt{7(-1)+16}+8=\sqrt{9}+8=11$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 22:

Si: $H(x-5)=3x^2+1$

Calcular: $E=H(2)+H(1)$

A) 129 B) 427 C) 121 D) 257 E) 203

RESOLUCIÓN:

• Calculando la regla de como operar, (*3ra.* forma):

$$H\,(x-5)=3x^2+1$$

$+5(\ )^2\times 3+1$

$$\Rightarrow H(2)=(2+5)^2\times 3+1=148$$

$+5(\ )^2\times 3+1$

• $H(1)=109$

$+5(\ )^2\times 3+1$

* Piden : $E=148+109=257$

RPTA : "D"

PROBLEMA 23:

Si : $G(x+3)=7x$ Calcular: $G(G(4))$

A) 49 B) 28 C) 42 D) 21 E) 26

RESOLUCIÓN:

* Considerando la regla como operador:

$G(x+3)=7x$

-3×7

* Ahora calculemos , primero:

$G(4)=(4-3)7=7$

-3×7

* Recién: $G(G(4))=G(7)=28$

-3×7

RPTA : "B"

PROBLEMA 24:

Si: $P(x;y;z)=x^3-yz+5$

Calcular «n», en :

$$P(1;2n;3)=5P(2;3;-n)$$

A) $-\frac{1}{7}$ B) $-\frac{13}{7}$ C) $\frac{2}{5}$ D) $\frac{1}{5}$ E) 3

RESOLUCIÓN:

* Al aplicar la definición en ambos miembros , se obtendrá: $1^2-(2n)3+5=5\,[2^2-3(-n)+5]$

$$\Rightarrow 1-6n+5=20+15n+25$$

* Al despejar : $n=-\dfrac{13}{7}$

RPTA : "B"

PROBLEMA 25:

Si: $F(x^3-1)=x+5$ Calcular : «y»

$F(F(y)+1)=7$

A) 1 B) -1 C) 3 D) 0 E) 4

RESOLUCIÓN:

* Hallemos la regla como operar , pero en forma inversa (de afuera hacia adentro), debido a que el dato está en el miembro derecho. $F(x^3-1)=x+5$

$-1(\ )^3-5$

*Ahora en: $F(F(y)+1)=7$

$-1(\ )^3-5$

$$\Rightarrow (7-5)^3-1=F(y)+1$$

$$6=F(y)$$

$-1(\ )^3-5$

$$\Rightarrow (6-5)^3-1=y\Rightarrow 0=y$$

RPTA : "D"

PROBLEMA 26:

Si: $P(x+y)=P(x)+P(y)$

$P(7)=42$ Calcular: $P(1)$

A) 6 B) 5 C) 0 D) -1 E) $\sqrt{2}$

RESOLUCIÓN:

*Haciendo : $x=y=1$; se tendrá $P(1+1)=P(1)+P(1)$

$\Rightarrow$ $\boxed{P(2)=2P(1)}$

$\Rightarrow P(2+1)=P(2)+P(1)$

$\Rightarrow P(3)=2P(1)+P(1)$

$\Rightarrow P(3)=3P(1)$

* Análogamente se obtendrá que :

$P(7)=7P(1)$

$\overparen{42}=7P(1)$

$\Rightarrow 6=P(1)$

RPTA : "A"

PROBLEMA 27:

Si: $G(x+1)=x^2-2x+2$

$F(x-1)=x^2+x+1$

$Q(x)=F(x+1)+G(x-1)$

Calcular: $Q(3)$

A) 32 B) 0 C) 27 D) 81 E) – 3

RESOLUCIÓN:

* Se deduce que: $Q(3)=F(4)+G(2)$

* Pero $F(4)$ se obtiene para $x-5$ en $F(x-1)$ y $G(2)$ se obtiene para $x=1$ en $G(x+1)$.

* Luego : • $F(4)=5^2+5+1=31$

• $G(2)=1^2-2(1)+2=1$

* Con lo que: $Q(3)=31+1=32$

RPTA : "A"

PROBLEMA 28:

Si: $P(2x-7)=10x+2$ Calcular: $P(x)$

A) $5x-33$ B) $5x+37$ C) $5x-1$
D) $5x+1$ E) $4x-9$

RESOLUCIÓN:

* Hallando la regla como operar, se tendrá :

$$P(2x-7)=10x+2$$

+7 ÷2 ×10 +2

$$\Rightarrow P(x)=\left(\frac{x+7}{2}\right)10+2=5x+37$$

+7 ÷2 ×10 +2

RPTA : "B"

PROBLEMA 29:

A partir de: $F(x)=1+x+x^2+x^3+x^4+.....+\infty$

Calcular : $K=F_{(0,6)}$

A) 2 B) 2,5 C) 3 D) 2,8 E) 4

RESOLUCIÓN:

* Se puede apreciar que «$F(x)$», posee infinitos términos , luego :

$$F_{(x)}=1+\underbrace{x(1+x+x^2+x^3+x^4+...\infty)}_{\text{Esto también vale } F(x)}$$

$\Rightarrow F(x)=1+xF(x)$

$\Rightarrow F(x)-xF(x)=1$

$\Rightarrow F(x)(1-x)=1\Rightarrow \boxed{F(x)=\dfrac{1}{1-x}}$

* Haciendo : $x=0,6$; entonces :

$$F(0,6)=\frac{1}{1-0,6}=\frac{1}{0,4}=2,5$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 30:

Indicar el coeficiente del monomio:

$$M_{(x)}=2^n x^5\sqrt[7]{(3x)^{2n}\sqrt[3]{(nx)^n}}$$

si el grado del mismo es «$2n$» ($n\in Z^+$)

A) 3 B) 8 C) 12 D) 24 E) 32

RESOLUCIÓN:

* Tendremos : $x^5\times\sqrt[7]{x^{2n}\times\sqrt[3]{x^n}}$

$\Rightarrow x^5\times x^{\frac{7n}{21}}=x^{5+\frac{n}{3}}$

* Por condición de grado: $5+\dfrac{n}{3}=2n$

$\Rightarrow 15+n=6n\Rightarrow 15=5n\Rightarrow n=3$

* Luego: $Coef_{(M)}=2^3\sqrt[7]{3^6\sqrt[3]{3^3}}=2^3\times 3=24$

RPTA : "D"

PROBLEMA 31:

A partir de: $P_{(x)}=4x+2$ adonde: $P[P[P_{(x)}]]=298$

Hallar el valor de «x»

A) 2 B) 3 C) 4 D) 6 E) 8

RESOLUCIÓN:

* Hallando la regla como operar, en forma inversa , luego:

$$4x+2=P(x)$$

−2 ÷4

* Ahora para poder eliminar a $P[P[P(x)]]$, tendremos que aplicar 3 veces la regla.

$$298=P[P[P(x)]]$$

−2 ÷4 (1ro) −2 ÷4 (2do) −2 ÷4 (3ro)

$$x=\left[\left[\left[(298-2)\div 4\right]-2\right]\div 4-2\right]\div 4=4$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 32:

Dado: $F_{(x+3)}=2F_{(x+1)}+5$. Además: $F_{(2)}=6$

Hallar: $F_{(6)}$

A)35 B) 37 C) 38 D) 39 E) 40

RESOLUCIÓN:

* Haciendo $x=1$, se obtiene :

$F(4)=2F(2)+5=2(6)+5$

$\Rightarrow F(4)=17$

* Haciendo $x=3$, se obtendrá :

$$F(6)=2F(4)+5\Rightarrow F(6)=2(17)+5=39$$

RPTA : "D"

PROBLEMA 33:

Si: $P_{(x)}=\dfrac{2x+1}{x-2}$

Además: $P[P_{(x)}]=3x-8$

Hallar el valor de «x».

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 6

RESOLUCIÓN:

* Al reemplazar en el miembro izquierdo, se obtendrá:

$$P\left(\frac{2x+1}{x-2}\right)=3x-8$$

$$\Rightarrow\frac{2\left(\frac{2x+1}{x-2}\right)+1}{\frac{2x+1}{x-2}-2}=3x-8\Rightarrow\frac{\frac{4x+2+x-2}{x-1}}{\frac{2x+1-2x+4}{x-1}}=3x-8$$

$\Rightarrow\dfrac{5x}{5}=3x-8\Rightarrow x=4$

RPTA : "D"

PROBLEMA 34:

Si: $P[P[P(x)]] = 8x + 21$ Calcula : $P(5)$

A) 23 B) 11 C) 13 D) 14 E) 20

RESOLUCIÓN:

* Se deduce que : $P(x) = 2x + b$; ($\times 2$ $+b$)

ya que : $P[P[P(x)]] = 2^3x + 21$ (3 notaciones)

* Aplicando la regla como operar en:

$$P[P[P(x)]] = 8x + 21$$

$\times 2$ $+b$ $\times 2$ $+b$ $\times 2$ $+b$

$\Rightarrow [(2x+b)\times 2 + b]\times 2 + b = 8x + 21$

$8x + 7b = 8x + 21$

$7b = 21 \Rightarrow b = 3$

* Con lo que: $P(x) = 2x + 3 \Rightarrow P(5) = 2(5) + 3 = 13$

RPTA : "C"

PROBLEMA 35:

Se define una función lineal que satisface las siguientes condiciones: $F(2) = 6$; $F(3) = 10$

Hallar: $F(20) + F(30) - F(40)$

A) 24 B) 31 C) 38 D) 40 E) 10

RESOLUCIÓN:

* Se sabe que la función lineal se denota por :

$$F(x) = ax + b$$

* Luego dando valores :

Para: $x = 2 \Rightarrow F(2) = 2a + b \Rightarrow 6 = 2a + b$

Para: $x = 3 \Rightarrow F(3) = 3a + b \Rightarrow 10 = 3a + b$ (−)

$4 = a$ y $b = -2$

* Con lo que: $F(x) = 4x - 2$ ($\times 4$ -2)

$4(20) - 2 + 4(30) - 2 - [4(40) - 2] = 38$

RPTA : "C"

PROBLEMA 36:

Si: $F(x) = x^2 + 3x + 5 \wedge G(x) = 2x + 1$

Hallar : $F(G(x))$

RESOLUCIÓN:

*Mediante la Regla establecida : $F(G(x))$

*Sustituyendo $G(x) = 2x + 1$: $F(2x+1)$

* Sustituyendo en $F(x)$: $= (2x+1)^2 + 3(2x+1) + 5$

* Desarrollando : $= 4x^2 + 4x + 1 + 6x + 3 + 5$

PROBLEMA 37:

Si: $F(x+1) = 13x + 7 \wedge G(2x-1) = 6x + 11$

Hallar: $F(G(x)) + G(F(x))$

RESOLUCIÓN:

* De los datos: $F(x+1) = 13x + 13 - 13 + 7 = 13(x+1) - 6$,

entonce $F(x) = 13x - 6$

Además: $G(2x-1) = 6x - 3 + 3 + 11$

$\Rightarrow G(2x-1) = 3(2x-1) + 14$

entonces $G(x) = 3x + 14$

* *Luego:*

$F[G(x)] = F[3x+14] = 13(3x+14) - 6$

$= 39x + 182 - 6 = 39x + 176 \wedge G[F(x)] = G[13x - 6]$

$= 3(13x - 6) + 14 = 39x - 18 + 14$

$= 39x - 4$

Sumando: $F(G(x)) + G(F(x)) = 78x + 172$

PROBLEMA 38:

Si: $F\left(\frac{1}{3}x + \frac{2}{5}\right) = 15x + 2$.

Hallar : $F(F(x))$

RESOLUCIÓN:

* haciendo cambio de variable: $\frac{1}{3}x + \frac{2}{5} = a$

Y despejando «x»: $\frac{1}{3}x = a - \frac{2}{5} \Rightarrow x = 3a - \frac{6}{5}$, entonces:

$F(a) = \left(3a - \frac{6}{5}\right) = 45a - 18 + 2 = 45a - 16$

* Luego:

$F(F(x)) = F(45x - 16) = 45(45x - 16) - 16 = 2025x - 736$

PROBLEMA 39:

Si $F(x)$ es de primer grado y cumple con $F(x+1) + F(2x+1) + F(3x+1) = 42x + 24$

Hallar: $E = F(x) + F(F(x)) + F(F(F(x)))$

RESOLUCIÓN:

* Por ser de primer grado: $F(x) = ax + b$

$\Rightarrow \underbrace{a(x+1)+b}_{F(x)} + \underbrace{a(2x+1)+b}_{F(2x+1)} + \underbrace{a(3x+1)+b}_{F(3x+1)} = 42x + 24$

$\Rightarrow ax + a + b + 2ax + a + b + 3ax + a + b = 42x + 24$

$\Rightarrow 6ax + 3a + 3b = 42x + 24$

entonces $6a = 42 \wedge 3a + 3b = 24$;de donde: $a = 7$ y $b = 1$.

* Luego: $F(x) = 7x + 1$

* Cálculo de :

$F(F(x)) = F(7x + 1) = 7(7x + 1) + 1 = 49x + 7 + 1 = 49x + 8$

$\Rightarrow F(F(F(x))) = F(49x + 8) = 7(49x + 8) + 1$
$= 343x + 56 + 1 = 343x + 57$

Finalmente, reemplazando, se tiene:

$E = 7x + 1 + 49x + 8 + 343x + 57 = 399x + 66$

PROBLEMA 40:

El número de términos del siguiente polinomio completo:

$P(x) = (m-1)x^{m-6} + (m-2)x^{m-5} + (m-3)x^{m-4} + \dots\dots\dots$; es

RESOLUCIÓN:

* Como : $(m-6) < (m-5)$

* Entonces $P(x)$ es además ordenado en forma ascendente:

Luego: $m - 6 = 0 \Rightarrow m = 6 \Rightarrow P(x) = 5 + 4x + 3x^2 + 2x^3 + x^4$

$\Rightarrow P(x)$ tiene 5 términos

PROBLEMA 41:

Si: $f(x) = \dfrac{3x}{x-1}$, hallar $f(2x)$ en términos de $f(x)$.

A) $\dfrac{6f(x)}{f(x)-2}$ B) $\dfrac{3f(x)}{f(x)+3}$ C) $\dfrac{6f(x)}{f(x)+3}$ D) $\dfrac{6f(x)}{f(x)-3}$ E) $\dfrac{1}{f(x)}$

RESOLUCIÓN:

*Hallemos $f(2x)$: $f(2x) = \dfrac{3(2x)}{(2x-1)}$

*Dividir por $(x-1)$:

$$f(2x) = \frac{2\left(\frac{3x}{x-1}\right)}{1+\frac{x}{x-1}} \xrightarrow{\text{Transformando:}} f(2x) = \frac{2\left(\frac{3x}{x-1}\right)}{1+\frac{1}{3}\left(\frac{3x}{x-1}\right)}$$

* luego: $f(2x) = \dfrac{2f(x)}{1+\frac{1}{3}f(x)} = \dfrac{6f(x)}{3+f(x)}$

RPTA : "C"

PROBLEMA 42:

Si: $g(x) = \dfrac{nx}{n-x}$ donde $n \in Z^+$

Determine: $\underbrace{g(g(\dots g(x))\dots)}_{\text{"m" paréntesis}}; m \in N$

A) $\dfrac{mx}{n+mx}$ B) $\dfrac{x}{m-nx}$ C) $\dfrac{nx}{m-x}$ D) $\dfrac{nx}{n-mx}$ E) $\dfrac{mnx}{m-nx}$

RESOLUCIÓN:

* Aplicando un razonamiento inductivo.

* Sea : $x <> g(x)$

$$g_{(g_{(x)})} = \frac{ng_{(x)}}{n-g_{(x)}} = \frac{n\left(\frac{nx}{n-x}\right)}{n-\frac{n_x}{n-x}}$$

$$g_{(g_{(x)})} = \frac{nx}{n-2x} \text{...........(2 paréntesis)}$$

$$g_{(g_{g(x)})} = \frac{ng(x)}{n-2g(x)} = \frac{n\left(\frac{nx}{n-x}\right)}{n-2\left(\frac{nx}{n-x}\right)}$$

$$g_{(g_{g(x)})} = \frac{nx}{n-3x} \text{...........(3 paréntesis)}$$

* Si continuamos vamos a tener:

$$g_{(g_{(g\dots\dots g(x))})} = \frac{nx}{n-mx}$$

RPTA : "D"

PROBLEMA 43:

Sea : $P(x) = x^2 - 2$

Calcule: $\dfrac{3\underbrace{P(P(P(\dots P}_{8n \text{ veces}}(2)\dots))) + 5P(P(P(\sqrt{2})))}{\underbrace{P(P(P(\dots P}_{8n \text{ veces}}(0)\dots)))}$

A) 4 B) 6 C) 8 D) 2 E) 12

RESOLUCIÓN:

*$P(x) = x^2 - 2$

$P(2) = 2^2 - 2 = 2$

$P(\underbrace{P(2)}_{2}) = P(2) = 2$

⋮

$P(P(P\dots P(0)\dots)) = 2$

* $P(P(P(\sqrt{2}))) = P(P(0))) = 2$

* Reemplazando: $\dfrac{3(2)+5(2)}{2} = 8$

RPTA : "C"

PROBLEMA 44:

Si : $P(x) = 0$

$P[M(x) + G(x)] = 4x + 6$

$P[M(x) - 2G(x)] = x + 12$

Hallar : $M(G(2))$

A) 0 B) 1 C) 6 D) 3 E) 8

RESOLUCIÓN:

* Si: $P(x) = x$

$\Rightarrow P[M(x) + G(x)] = M(x) + G(x)$

• Usando el dato: $M(x) + G(x) = 4x + 6$ ....(I)

• Igualmente : $P[M(x) - 2G(x)] = M(x) - 2G(x)$

* Del dato: $M(x) - 2G(x) = x + 12$ ....(II)

• de (I) - (II): $3G(x) = 3x - 6 \Rightarrow G(x) = x - 2$

• $G(x)$ en (I): $M(x) + (x - 2) = 4x + 6$

$$\Rightarrow M(x) = 3x + 8$$

* Luego: $M(G(2)) = M(0) = 8$

RPTA : "E"

PROBLEMA 45:

Sabiendo que el polinomio:

$$P_{(x)} = (x-1)(ax+b) + c(1+x+x^2)$$

es idéntico a : $Q_{(x)} = 2x^2 + 5x - 1$ Calcular : $c - a - b$

A) 1 B) -1 C) 2 D) 3 E) 0

RESOLUCIÓN:

* De $P_{(x)} \equiv Q_{(x)}$; o sea:

$$(x-1)(ax+b) + c(1+x+x^2) \equiv 2x^2 + 5x - 1$$

* Ahora evaluando:

* Para $x=1$: $3c = 6 \Rightarrow \boxed{c = 2}$

* Para $x=0$: $-b + 2 = -1 \Rightarrow \boxed{b = 3}$

* Para $x=2$: $2a + 3 + 2(7) = 8 + 10 - 1$

$$\Rightarrow 2a + 17 = 17 \Rightarrow \boxed{a = 0}$$

* Luego: $c - a - b = -1$

RPTA : "B"

PROBLEMA 46:

Si P es un polinomio definido por :

$$P_{(x)} = 3x^{\frac{n}{2}} - 4x^{n-2} + 7x^{12-n} + 2x^{\frac{n}{3}}$$

entonces el número de valores enteros que admite «n» es:

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

RESOLUCIÓN:

* Como se trata de un polinomio, luego:

$$\left\{\frac{n}{2};\ n-2;\ 12-n;\ \frac{n}{3}\right\} \subset Z_0^+$$

$$\Rightarrow n = \overset{\circ}{2} \wedge n \geq 2 \wedge n \leq 12 \wedge n = \overset{\circ}{3}$$

$$\Rightarrow n = \overset{\circ}{6} \wedge 2 \leq n \leq 12 \Rightarrow n = 6 \vee n = 12$$

$\Rightarrow n$ admite sólo 2 valores

RPTA : "A"

PROBLEMA 47:

Si la suma de los grados absolutos de los términos del polinomio:

$$P(x,y) = mx^{m^{2n-14}} - 5mn(xy)^{m^{n-7}} + ny$$

es de $(m^{10}+1)^2$ entonces el valor de n es:

A) 17 B) 15 C) 14 D) 16 E) 18

RESOLUCIÓN:

* Del enunciado se planteará la siguiente igualdad :

$$m^{2n-14} + 2(m^{n-7}) + 1 = (m^{10}+1)^2$$

$$\Rightarrow (m^{n-7}+1)^2 = (m^{10}+1)^2$$

$$\Rightarrow n - 7 = 10 \Rightarrow n = 17$$

RPTA : "A"

PROBLEMA 48:

Sea P un polinomio definido por :

$$P_{(x)} = (1+3x)^n + (2x+1)^n$$

Si la suma de coeficientes excede en 23 al término independiente, entonces indicar el valor de verdad de las siguientes afirmaciones:

I) El polinomio $P_{(x)}$ es de grado 2.

II) La suma de sus coeficientes es 25.

III) El término cuadrático del polinomio $P_{(x)}$ es $12x^2$.

A) VVV B) VFV C) VVF D) FVV E) FFV

RESOLUCIÓN:

* Del enunciado se desprende que:

$$\begin{pmatrix}\text{suma de}\\ \text{coeficientes}\end{pmatrix} = 23 + \begin{pmatrix}\text{término}\\ \text{independiente}\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow P_{(1)} = 23 + P_{(0)}$$

$$\Rightarrow 4^n + 5^n = 23 + 2 \Rightarrow n = 2$$

* Reemplazando: $P_{(x)} = (1+3x)^2 + (2x+1)^2$

* Luego :

I) G.A.(P) = 2.................(Verdadero)

II) Suma de coeficientes:

$= P_{(1)} = 4^2 + 5^2 = 25$ ....(Verdadero)

III) $P_{(x)} = 13x^2 + 10x + 2$..........(Falso)

RPTA : "C"

PROBLEMA 49:

Si P es un polinomio definido por :

$$P_{(x,y)} = x^{2m+n-4}y^{m+n+2} + x^{2m+n-3}y^{m+n+1} + x^{2m+n-2}y^{m+n}$$

Tal que cumple las siguientes condiciones:

I) El grado del polinomio es 28

II) $G.R_{(x)} - G.R_{(y)} = 6$

Entonces el valor de $M = m + n$ es :

A) 8 B) 10 C) 12 D) 16 E) 24

RESOLUCIÓN:

I) $G.A.(P) = 20 \Rightarrow 3m + 2n - 2 = 28$

$\Rightarrow 3m + 2n = 30$ ....(α)

II) $G.R._{(x)} - G.R._{(y)} = 6$

$\Rightarrow (2m + n - 2) - (m + n + 2) = 6$

$\Rightarrow m = 10$

* En (α): $3(10)+2n=30 \Rightarrow n=0$
* Se pide : $M=10+0=10$

RPTA : "B"

PROBLEMA 50:

Si P es un polinomio homogéneo definido por :

$$P(x,y) = 3x^{n^2}y^3 - 5x^{2n+1}y^{m-1} - x^{3n}y^{m-2}$$

Entonces el valor de $T = G.R._{(x)} - G.R._{(y)}$ es:

A) 1 *B) 2* *C) 3* *D) 4* *E) 5*

RESOLUCIÓN:

* Como es un polinomio homogéneo, entonces: $n^2 + 3 = 2n + m = 3n + m - 2$
* De: $2n + m = 3n + m - 2 \Rightarrow n = 2$
* De: $n^2 + 3 = 2n + m \Rightarrow m = 3$
* Luego, reemplazando: $P(x,y) = 3x^4y^3 - 5x^5y^2 - x^6y$
* De donde: $G.R._{(x)} = 6 \wedge G.R._{(y)} = 3$

$\Rightarrow T = G.R._{(x)} - G.R._{(y)} = 3$

RPTA : "C"

PROBLEMA 51:

Si P es un polinomio homogéneo definido por:

$$P(x,y) = 5(a+n)x^{n^2}y^{5n+2} - 2(2a-4b-n^2)x^{3n+n^2}y^8 - 5(b+n^2-2n)(xy)^{a+3b}$$

Entonces la suma de coeficientes del polinomio es:

A) 31 *B) 40* *C) 38* *D) 41* *E) 42*

RESOLUCIÓN:

* Como se trata de un polinomio homogéneo, entonces: $\underbrace{n^2 + 5n + 2 = 3n + n^2 + 8}_{n=3 \ \wedge \ a+3b=13} = 2(a+3b)$
* Luego, la suma de coeficientes de P será:

$P_{(1,1)} = 5(a+n) - 2(2a-4b-n^2) - 5(b+n^2-2n)$

$\Rightarrow P_{(1,1)} = a + 3b - 3n^2 + 15n = 13 - 27 + 45$

$\Rightarrow P_{(1,1)} = 31$

RPTA : "A"

PROBLEMA 52:

Si P es un polinomio homogéneo definido por:

$$P(x,y) = 4x^ny^{2n-1} - nx^{n+1}y^{n+1} + x^{2n}y^{n-1}$$

tal que $P(2x,2y) = 4^k P(x,y)$, entonces el valor de k es:

A) 2 *B) 3* *C) 4* *D) 5* *E) 6*

RESOLUCIÓN:

* Como se trata de un polinomio homogéneo, luego:

$$3n - 1 = 2n + 2 = 3n - 1$$

* De donde: $n=3$, reemplazando se tiene que: $G.A._{(P)} = 8$
* Por propiedad : Si $P(x,y)$ es homogéneo de $G.A._{(P)} = p$, entonces: $P_{(kx,ky)} = k^p.P(x,y)$

$\Rightarrow P_{(2x,2y)} = 2^8 P_{(x;y)} = 4^k P_{(x;y)} \Rightarrow 2^8 = 4^k \Rightarrow k = 4$

RPTA : "C"

PROBLEMA 53:

Considere el polinomio $P(x,y)$ completo, homogéneo de grado 8 y ordenado ascendentemente con respecto a x. Se han tomado tres términos consecutivos que son: $... + x^a y^{b+2} + B + x^b y^{a+2} ...$, según esta condición el grado de la variable y en el monomio B es :

A) 3 *B) 4* *C) 5* *D) 6* *E) 7*

RESOLUCIÓN:

* Como se trata de un polinomio homogéneo de grado 8 y ordenado en forma ascendente en x, entonces :

$$... + x^a y^{b+2} + \underbrace{x^{a+1}y^{b+1}} + x^{a+2}y^b + ...$$

* De donde: $a + b + 2 = 8 \wedge b = a + 2$

$\Rightarrow a = 2 \wedge b = 4$

* Luego , el grado de y en el monomio B es : $b+1=5$

RPTA : "C"

PROBLEMA 54:

Si $m, n, p \in Z^+$ y Q es un polinomio completo y ordenado definido por :

$$Q(x) = mx^{6m+5n+p} + nx^{4m+5n+4p} + px^{5m+4n+5p} + x^{6m+5n} + ...$$

Entonces el número de términos del polinomio Q es:

A) 82 *B) 84* *C) 85* *D) 88* *E) 90*

RESOLUCIÓN:

* Como el polinomio es completo y ordenado, luego observamos que los exponentes de x; primero aparece: $6m + 5n + p$ y tres lugares más: $6m + 5n$.

$\Rightarrow$ es completo y ordenado en forma descendente y además $p=3$.

* Luego: $6m + 5n + 1 = 5m + 4n + 5p$

$\wedge \ 6m + 5n + 2 = 4m + 5n + 4p$

$\Rightarrow m + n = 14 \wedge 2m = 10$

$\Rightarrow m = 5 \wedge n = 9$

* Además: $G.R._{(P)} = 6m + 5n + p = 6 \times 5 + 5 \times 9 + 9 = 84$
* Se pide: *Número de términos* $= 84 + 1 = 85$

RPTA : "C"

PROBLEMA 55:

Si P y Q son dos polinomios definidos por:

$$P_{(x)} = x^3 + 6x^2 + 20x + 2$$

$$Q_{(x)} = a(x+c)^3 + bx + d$$

Tales que $P_{(x)} = Q_{(x)}$, entonces el valor de $M=abcd$ es:

A) –126 B) –116 C) –106 D) –96 E) –86

RESOLUCIÓN:

De: $Q_{(x)} = ax^3 + 3acx^2 + 3ac^2x + ac^3 + bx + d$

$$\Rightarrow Q_{(x)} = ax^3 + 3acx^2 + (3ac^2 + b)x + ac^3 + d$$

Como $P_{(x)} \equiv Q_{(x)}$ se tiene:

$a=1 \wedge 3ac=6 \wedge 3ac^2+b=20 \wedge ac^3+d=2$

$\Rightarrow a=1 \wedge c=2 \wedge b=8 \wedge d=-6$

Entonces: $abcd=-96$

RPTA : "D"

PROBLEMA 56:

Si P y Q son dos polinomios definidos por:

$$P(x,y,z) = x(x^2 - yz) + y(y^2 - zx) + z(z^2 - xy)$$

$$Q(x,y,z) = (x+y+z)\left[(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2\right]$$

Tal que $P(x;y;z) = kQ(x;y;z)$, entonces el valor de k es:

A) 2 B) 1 C) $\frac{1}{2}$ D) –1 E) –2

RESOLUCIÓN:

Como: $P(x;y;z) \equiv kQ(x;y;z)$

$\Rightarrow P(1;1;0) = kQ(1;1;0) \Rightarrow 1+1+0 = k(2)(0+1+1)$

$\Rightarrow 2 = 4k \Rightarrow k = \frac{1}{2}$

RPTA : "C"

PROBLEMA 57:

Si se cumple que $mx + my + nx - ny - 15x - 7y = 0$, para todo valor real de x e y, entonces el valor de $M = m \times n$ es:

A) 16 B) 36 C) 44 D) 70 E) 121

RESOLUCIÓN:

* Dando la siguiente forma:

$(m+n-15)x + (m-n-7)y \equiv 0$

$\Rightarrow m+n-15 = 0 \wedge m-n-7 = 0$

* De donde: $m = 11 \wedge n = 4$

* Luego: $M = m \times n = 44$

RPTA : "C"

PROBLEMA 58:

Si P es un polinomio idénticamente nulo definido por:

$$P_{(x)} = (x^2+x+3)(a-b) + (x^2+x+4)(b-c) + (x^2+x+5)(c-a)$$

Entonces el valor de $M = \frac{b+c}{a}$ es:

A) –2 B) –1 C) 1 D) 2 E) 3

RESOLUCIÓN:

* Como: $P_{(x)} \equiv 0$, entonces:

$$\Rightarrow a-b = b-c = c-a = 0 \Rightarrow a = b = c$$

* Luego: $M = \frac{b+c}{a} = \frac{2a}{a} = 2$

RPTA : "D"

PROBLEMA 59:

Si P es un polinomio definido por:

$$P_{(x;y)} = nx^m y^p + mx^{m-1}y^{p-3} + x^{n-8}$$

, tal que si le restamos $12x^3y^4$ su grado absoluto disminuye, entonces el $G.R_{(x)}$ en el polinomio P es:

A) 5 B) 4 C) 3 D) 2 E) 1

RESOLUCIÓN:

* Si a $P_{(x;y)}$ se le resta $12x^3y^4$ su grado absoluto disminuye; esto significa que $12x^3y^4$ debe ser idéntico a uno de los términos del polinomio. No puede ser idéntico al último, entonces sólo es posible que: $12x^3y^4 \equiv nx^m y^p$

$\Rightarrow m = 3 \wedge n = 12 \wedge p = 4$

* Luego: $P_{(x;y)} = 12x^3y^4 + 3x^2y + x^4$

$\Rightarrow G.R_{(x)} = 4$

RPTA : "B"

PROBLEMA 60:

Si $m \in N$ y A_m es un conjunto definido por:

$A_m = \{P_{(x)} / P_{(x)}$ es un polinomio de grado $m\}$

entonces determinar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I) Si $P_{(x)}, Q_{(x)} \in A_m$, entonces $P_{(x)} + Q_{(x)} \in A_m$

II) Si $P_{(x)}, Q_{(x)} \in A_m$, entonces $P_{(x)} - Q_{(x)} \in A_m$

III) Si $P_{(x)}, Q_{(x)} \in A_m$, entonces $P_{(x)}Q_{(x)} \notin A_m$

A) VVV B) FFV C) VVF D) VFV E) VFF

RESOLUCIÓN:

I) Si $P_{(x)}, Q_{(x)} \in A_m$, entonces: $P_{(x)} + Q_{(x)}$ no necesariamente $\in A_m$.

POR EJEMPLO:

$P_{(x)} = x^2 + x + 1$ y $Q_{(x)} = -x^2 + 2 \in A_2$;

sin embargo $P_{(x)} + Q_{(x)} = x + 3 \notin A_2$.

* Luego *(I)* es **FALSA**.

II) Si $P_{(x)}, Q_{(x)} \in A_m$, entonces $P_{(x)} - Q_{(x)}$ no necesariamente $\in A_m$, como puede verificarse de inmediato.

* Luego *(II)* es **FALSA**.

III) Si: $P_{(x)}, Q_{(x)} \in A_m$, entonces

$$G.A_{(P.Q)} = G.A_{(P)} + G.A_{(Q)} = m + m = 2m$$

$$\Rightarrow P_{(x)}.Q_{(x)} \in A_{2m} (\notin A_m)$$

* Luego ***(III)*** es **VERDADERA.**

RPTA : "B"

PROBLEMA 61:

Si $P_{(x)}$ y $Q_{(x)}$ son dos polinomios, entonces determinar el valor de verdad de cada una de las afirmaciones siguientes:

I) $G.R(P_{(x)} + Q_{(x)}) = max\{G.R(P_{(x)}), G.R(Q_{(x)})\}$

II) Si $G.R(P_{(x)}) = G.R(P_{(x)} + Q_{(x)}) + 1$, entonces la suma de los coeficientes principales de $P_{(x)}$ y $Q_{(x)}$ es cero.

III) Si $G.R(P_{(x)}) = G.R(Q_{(x)}) = m$, entonces el $G.R(P_{(x)}) = G.R(Q_{(x)}) = m$

A) VFF *B) FVV* *C) VFV* *D) FVF* *E) VVV*

RESOLUCIÓN:

I) Analicemos las únicas posibilidades que se pueden dar:

* $G.A_{(P)} \neq G.A_{(Q)}$

$\Rightarrow G.A_{(P+Q)} = máx[G.A_{(P)}; G.A_{(Q)}]$

* $G.A_{(P)} = G.A_{(Q)} \Rightarrow G.A_{(P+Q)} \leq G.A_{(P)}$

Pues, se puede dar que:

$P_{(x)} = x^3 + x^2 - 1 \wedge Q_{(x)} = -x^3 + 2x + 3$

$(G.A_{(P)} = G.A_{(Q)})$

* Con lo cual: $P_{(x)} + Q_{(x)} = x^2 + 2x + 2$

* De donde: $G.A_{(P+Q)} < G.A_{(P)}$....(***FALSA***)

II) $G.A_{(P)} = G.A_{(P+Q)} + 1 \Rightarrow G.A_{(P)} > G.A_{(P+Q)}$...$(\alpha)$

* Si: $G.A_{(P)} \neq G.A_{(Q)} \Rightarrow G.A_{(P)} > G.A_{(Q)} \vee G.A_{(P)} < G.A_{(Q)}$

* Si $G.A_{(P)} > G.A_{(Q)} \Rightarrow G.A_{(P+Q)} = G.A_{(P)}$ (contradice a (α)).

*Si: $G.A_{(P)} < G.A_{(Q)} \Rightarrow G.A_{(P+Q)} = G.A_{(Q)}$ (también contradice a (α)).

*Sólo queda que: $G.A_{(P)} = G.A_{(Q)}$, además: $G.A_{(P+Q)} < G.A_{(P)}$

$\Rightarrow$ Sólo queda que los términos de mayor grado de $P \wedge Q$ se eliminen al sumarlos.

$\Rightarrow$ La suma de los coeficientes principales de $P \wedge Q$ debe ser cero

(como el ejemplo dado en *I)*........(***VERDADERA***).

III) $G.A_{(P)} = G.A_{(Q)} = m \Rightarrow G.A_{(P+Q)} \leq m$

(como se indicó en *I)*....(***FALSA***)

RPTA : "D"

PROBLEMA 62:

Sea $P_{(x)} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$ un polinomio de grado $n(n \in N)$ y sobre el polinomio P se define un operador D mediante:

$$D[a_0 + a_1x^2 + ... + a_nx^n] = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 ... + na_nx^{n-1}$$

Si: $D[P_{(x)}] = 3x^2 + 2x^3$, entonces la suma de coeficientes del polinomio P es:

A) $\frac{1}{2} + a_0$ *B)* $\frac{3}{2} + a_0$ *C)* $\frac{5}{2} + a_0$ *D)* $\frac{7}{2} + a_0$ *E)* $\frac{9}{2} + a_0$

RESOLUCIÓN:

* Como: $D[P_{(x)}] = 3x^2 + 2x^3$

$\Rightarrow a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + ... + na_nx^{n-1} = 3x^2 + 2x^3$

$\Rightarrow a_1 = 0 \wedge 2a_2 = 0 \wedge 3a_3 = 3 \wedge 4a_4 = 2 \wedge a_5 = a_6 = ... = a_n = 0, n \geq 5$

$\Rightarrow a_1 = a_2 = 0 \wedge a_3 = 1 \wedge a_4 = \frac{1}{2} \wedge a_5 = a_6 = ... = a_n = 0$

$n \geq 5$

* Luego:

$$P_{(x)} = a_0 + x^3 + \frac{1}{2}x^4 \Rightarrow \Sigma coef(P) = a_0 + 1 + \frac{1}{2} = a_0 + \frac{3}{2}$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 63:

Indicar el valor de verdad de las siguientes afirmaciones:

I) El polinomio P definido por :

$P_{(x)} = (x^2 - 3x^3 + x)^4 (x - 3)^4$, tiene término lineal.

II) $\forall n \in N: P$ es definido por $P_{(x)} = x^{n+1} - \frac{3x^{n-1}}{y} + 4x^2y^{-2}$ es un polinomio.

III) $\forall P, Q$ polinomios no nulos : $G.R_{(P+Q)} = G.R_{(P \cdot Q)}$

A) VVV *B) VVF* *C) FVV* *D) FFV* *E) FFF*

RESOLUCIÓN:

I) FALSA, dado que $P_{(0)} = 0$, entonces no tiene término lineal.

II) FALSA

III) FALSA, dado que $\forall P, Q$ polinomios:

$G.A_{(P+Q)} \leq máx\{G.A_{(P)}, G.A_{(Q)}\}$

$G.A_{(P-Q)} \leq máx\{G.A_{(P)}, G.A_{(Q)}\}$

$\Rightarrow G.A_{(P+Q)}$ no siempre es igual a: $G.A_{(P-Q)}$

RPTA : "E"

PROBLEMA 64 :

Sea $P(x)=a_0+a_1x+...+a_nx^n$ un polinomio de grado n. Definimos un operador sobre los polinomios mediante

$$D[a_0+a_1x+...+a_nx^n]=$$
$$a_1+2a_2x+3a_3x^2+...+na_nx^{n-1}$$

Determine el polinomio $P(x)$ tal que $D[P(x)]=3x^2+2x^3$

Dar la suma de sus coeficientes como respuesta.

A) $a_0+\frac{1}{2}$ B) $a_0+\frac{9}{2}$ C) $a_0+\frac{7}{2}$ D) $a_0+\frac{5}{2}$ E) $a_0+\frac{3}{2}$

RESOLUCIÓN:

* Se sabe por dato: $D[P(x)]=3x^2+2x^3$
* De acuerdo al operador tenemos:

$$D[P(x)]=3x^{3-1}+\frac{4}{2}x^{4-1}$$

* Se concluye que: $P(x)=x^3+\frac{1}{2}x^4+a_0$
* Piden la suma de coeficientes.

$$\sum coef[P]=P(1)=a_0+\frac{3}{2}$$

El operador D aplicado al polinomio representa a la primera derivada del polinomio.

RPTA : "E"

PROBLEMA 65 :

Sean los polinomios :

$P(x)=ax^3+bx^2+cx+d$; $Q(x)=ax^2+d$ $\wedge R(x)=ax+b$

Si $P(0)=2$, $Q(1)=R(2)=1$, halle x tal que $R(x)=0$

A) –3 B) –1 C) 0 D) 1 E) 3

RESOLUCIÓN :

* *Por dato:*

$$P(0)=2\Rightarrow P(0)=a(0)^3+b(0)^2+c(0)+d=2$$

* *Luego resulta que:* $d=2$
* *Dato:*

$$Q(1)=a+d=1\Rightarrow a=1-d\Rightarrow a=-1$$

$$R(2)=2a+b=1\Rightarrow b=1-2a\Rightarrow b=3$$

* *Por tanto:* $R(x)=ax+b=-x+3$, *pero como* $R(x)=0\Rightarrow x=3$

RPTA : "E"

PROBLEMA 66 :

Dada la función polinomial :

$$P(x)=x^3-10000x^2-10002x+9999$$

Calcule el valor de $P(1001)$.

A) –3 B) –2 C) –1 D) 0 E) 1

RESOLUCIÓN:

* Sea: $10001=a$
* Reemplazando en la función polinomial:

$P(x)=x^3-(a-1)x^2-(a+1)x+a-2$

* Nos piden:

$$P(a)=a^3-(a-1)a^2-(a+1)a+a-2$$
$$P(a)=\cancel{a^3}-\cancel{a^3}+\cancel{a^2}-\cancel{a^2}-\cancel{a}+\cancel{a}-2$$

* Entonces: $P_{(10001)}=-2$

RPTA : "B"

PROBLEMA 67 :

Sean P, Q dos polinomios dados por :

$$P(x)=ax^3+bx^2+cx+d$$
$$Q(x)=2x^3-x^3+3x+1$$

Si $P(x)=Q(x-1)$

determine el valor de : $a+b+c+d$.

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 5

RESOLUCIÓN :

* Por dato se sabe que $P(x)=Q(x-1)$ es una identidad por definición, podemos evaluar en cualquier valor:

Evaluando para $x=1$.

* Luego : $P(1)=Q(0)$
* Reemplazando, se obtiene :

$$a(1)^3+b(1)^2+c(1)+d=2(0)^3-0^2+3(0)+1$$

* Por tanto, el valor es: $a+b+c+d=1$.

RPTA : "B"

PROBLEMA 68 :

Sea $P(x)=ax^2+bx+c$ tal que $P(1)=-2$, $P(2)=3$ y $P(5)=34$. Determine un valor de x^* de modo que $P(x^*)=0$

A) $\frac{3-\sqrt{34}}{8}$ B) $\frac{-3+\sqrt{217}}{8}$ C) $\frac{-3+\sqrt{17}}{8}$

D) $\frac{\sqrt{217}+3}{8}$ E) $\frac{\sqrt{217}+\sqrt{3}}{8}$

RESOLUCIÓN:

* Del enunciado , se tendrá lo siguiente:

$P(1)=a+b+c=-2$..............................(I)

$P(2)=4a+2b+c=3$...........................(II)

$P(5)=25a+5b+c=34$......................(III)

* *Restando:* $(II)-(I): 3a+b=5$

$(III)-(II): 21a+3b=31$

* *Donde:* $a=\frac{4}{3}$; $b=1$; $c=-\frac{13}{3}$

* *Al reemplazar los coeficientes tenemos:*

$P(x)=\frac{4}{3}x^2+x-\frac{13}{3}$

* *Resolviendo:* $P(x)=0$

* *Luego:* $\frac{4}{3}x^2+x-\frac{13}{3}=0 \Rightarrow 4x^2+3x-13=0 \Rightarrow x=\frac{-3\pm\sqrt{217}}{8}$

* *Por lo tanto:* $x_1=\frac{-3+\sqrt{217}}{8} \vee x_2=\frac{-3-\sqrt{217}}{8}$

RPTA : "B"

PROBLEMA 69 :

Sea $h(t)=\begin{cases}1; & t\geq 0\\ 0; & t<0\end{cases}$

Si definimos $g(t)=h(t+2)-h(t-2)$, entonces se cumple que.

A) $g(t)=\begin{cases}0 & t<1\\ 1 & 1<t<2\\ 0 & t<2\end{cases}$ B) $g(t)=\begin{cases}0 & t\leq 1\\ 1 & 1<t<2\\ 0 & t\geq 2\end{cases}$

C) $g(t)=\begin{cases}0 & t<1\\ 1 & 1\leq t<1\\ 0 & t\geq 2\end{cases}$ D) $g(t)=\begin{cases}0 & t\leq -2\\ 1 & -2<t<2\\ 0 & t\geq 2\end{cases}$

E) $g(t)=\begin{cases}0 & t<-2\\ 1 & -2\leq t<2\\ 0 & t\geq 2\end{cases}$

RESOLUCIÓN

* Según la definición de $h(t)$, se tiene que:

$$h(t+2)=\begin{cases}1\ ; & t\geq -2\\ 0\ ; & t<-2\end{cases}$$

$$h(t-2)=\begin{cases}1\ ; & t\geq 2\\ 0\ ; & t<2\end{cases}$$

* Por dato: $g(t)=h(t+2)-h(t-2)$ luego, restando $h(t+2)$ menos $h(t-2)$, tenemos:

$$g(t)=h(t+2)-h(t-2)=\begin{cases}0; & t\geq 2\\ 1; & -2\leq t<2\\ 0; & t<-2\end{cases}$$

RPTA : "E"

PROBLEMA 70 :

Si: $H=\sqrt{(x-5)(x+6)(x-1)(x+2)+196}$;

halle: $R=\sqrt{H+16,25}$

A) $2x+1$ B) $\frac{x+1}{2}$ C) $x+2$ D) $\frac{2x+1}{2}$ E) $2x-1$

RESOLUCION:

* De lo dado:

$\sqrt{(x-5)(x+6)(x-1)(x+2)}=\sqrt{(x^2+x-30)(x^2+x-2)}$

* Haciendo un cambio de variable: $x^2+x-2=a$

* Reemplazando:

$H=\sqrt{(a-28)a+196}=\sqrt{(a-14)^2}=|a-14|$

* Donde uno de los valores será: $H=x^2+x-16$

* Reemplazando:

$R=\sqrt{x^2+x-16+16,25}=\sqrt{x^2+x+\frac{1}{4}}$

$\Rightarrow R=\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2} \Rightarrow R=x+\frac{1}{2}$

RPTA: "D"

PROBLEMA 71 :

Indicar el valor de verdad de las siguientes afirmaciones:

I) si $P(x;y)$ es homogéneo, entonces $Q(x;y)=P(x+2y)$ es también homogéneo.

II) si $P(x;y)$ y $Q(x;y)$ son homogéneos del mismo grado, entonces $P(x;y)+Q(x;y)$ es también homogeneo del mismo grado.

III) si $Q(x;y)$ es un polinomio homogéneo de grado 3 y $Q(1;2)=5$, entonces $Q(-2;-4)=-40$

A) VVV B) VVF C) FVV D) FFV E) FFF

RESOLUCIÓN:

I) consideremos $Q(kx;ky)$ el cual se escribe como: $Q(kx;ky)=P(kx+2ky\ ;\ 2kx+ky)$ por ser $P(x;y)$ homogéneo, digamos de grado n, se tiene:

$Q(kx;ky)=k^nP(x+2y;2x+y)=k^nQ(x;y)$.....*(VERDADERO)*

II) $H(x;y)=P(x;y)+Q(x;y)$ entonces:

$H(kx;ky)=P(kx;ky)+Q(kx;ky)=k^n(x;y)+k^nQ(x;y)$
$=k^n[P(x;y)+Q(x;y)]=k^nH(x;y)$..............*(VERDADERO)*

III) $Q(x;y)$ es un polinomio homogéneo de grado 3 entonces: $Q(x;y)=k^3Q(x;y)$; ***luego:***

* ***para :*** $x=1$; $y=2$; $k=-2$ se tendrá:

$Q(-2;-4)=(-2)^3Q(1;2)=-8(5)=-40$
...........*(VERDADERO)*

RPTA : "A"

PROBLEMA 72 :

Determine la suma de los coeficientes del siguiente trinomio:

$P(x;y)=(m-3)x^{9-m}+mx^{m-2}y^{m/3}+y^{17-2m}$

A) 10 B) 8 C) 6 D) 4 E) 7

RESOLUCIÓN:

• Es un trinomio, entonces:

$\{9-m;m-2;\frac{3}{m};17-2m\}\subset N_o$

$\Rightarrow m\in Z \wedge m=\overset{o}{3} \wedge 2\leq m\leq\frac{17}{2}$

$\Rightarrow m=3 \vee m=6$

$si\ m = 3 \Rightarrow P(x;y)$ *no es trinomio*

pues $P(x,y) = 3xy + y^{11}$

$si\ m = 6 \Rightarrow P(x;y) = 3x^3 + 3x^4y^2 + y^5$

es un trinomio.

luego : $\sum_{coef(P)=3+3+1=7}$

RPTA : "E"

PROBLEMA 73 :

Indique uno de los grados absolutos que puede tomar el polinomio: $P(x;y) = 5x^{n-2} + 6\,y^{\frac{8}{n-1}} + 9xy^{5-n}$

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

RESOLUCIÓN:

*Como lo dado es un polinomio, entonces:

$\left\{n-2; \frac{8}{n-1}; 5-n\right\} \subset N_0 \Rightarrow n \in Z \wedge 2 \le n \le 5 \wedge n-1$ *es un Divisor de 8*

$\Rightarrow n = 2 \vee n = 3 \vee n = 5$

$n = 2 : P_{(x;y)} = 5 + 6y^8 + 9xy^3 \Rightarrow GA(P) = 8$

$n = 5 : P_{(x;y)} = 5x + 6y^4 + 9xy^2 \Rightarrow GA(P) = 4$

$n = 3 : P_{(x;y)} = 5x^3 + 6y^2 + 9x \Rightarrow GA(P) = 3$

RPTA : "D"

PROBLEMA 74 :

Determine el grado absoluto del polinomio:

$$P(x;y) = \frac{3}{m-n}x^{m-n}y^m + 2x^{6-m}y^{n-3} + \frac{10}{n-3}x$$

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

RESOLUCIÓN:

* ***Lo dado es un polinomio**, entonces :*

$\{m-n; m; 6-m; n-3\} \subset N \Rightarrow m,n \in Z / 3 < n < m \le 6$

$\Rightarrow (n = 4 \wedge m = 5) \vee (n = 4 \wedge m = 6) \vee (n = 5 \wedge m = 6)$

$I)\ n = 4 \wedge m = 5 \Rightarrow GA_{(P)} = 6$

$II)\ n = 4 \wedge m = 6 \Rightarrow GA_{(P)} = 8$

$III)\ n = 5 \wedge m = 6 \Rightarrow GA_{(P)} = 7$

* Luego, el menor grado absoluto: $GA_{(P)} = 6$

RPTA : "D"

PROBLEMA 75:

Si:

$$f(x) = b(x^a + 1)^{a+b} + \left(1 - \frac{8}{a-1}\right)x^{-5} + \left(1 - \frac{9}{b-2}\right)|x| + a^2 + a,$$

es una expresión cuya equivalencia es un polinomio, indique cuál(es) de los siguientes enunciados son correctos.

I) $GR(f) = 180$

II) El término constante es la mitad del grado.

III) La suma de coeficientes de $f(x)$ es: 101

A) I, II y III B) solo I C) solo II D) solo III E) I y III

RESOLUCIÓN:

*Como lo dado es equivalente a un polinomio ,entonces :

$$1 - \frac{8}{a-1} = 0 \wedge 1 - \frac{9}{b-2} = 0 \Rightarrow a = 9 \wedge b = 11$$

$$f(x) = 11(x^9 + 1)^{20} + 9^2 + 9$$

$I)\ GR_{(f)} = 9 \times 20 = 180$..........(Verdadero)

$II)\ TI_{(f)} = f_{(0)} = 11 + 90 \neq \frac{GR_{(f)}}{2}$....(Falso)

$III) \sum_{COEF(f)=f(1)=11(2)^{20} \neq 101}$....(Falso)

luego , son correctos :*sólo I.*

RPTA : "B"

PROBLEMA 76:

Se define el polinomio :

$P(x;y) = 2^2\,x^{a+b-4}\,y^{a+b-3} + x^{2a+b-3}\,y^{a+b+1} + x^{2a+b-2}\,y^{a+b+2}$

de grado absoluto 41, y la diferencia de los grados relativos a x e y es 2.

Determine el valor de : $E = \frac{a+b-1}{b-a}$

A) 3 B) 5 C) 6 D) 7 E) 10

RESOLUCIÓN:

$GA_{(P)} = 3a + 2b = 41$..............................(α)

$GR_{(x)} - GR_{(y)} = 2a + b - 2 - (a + b + 3) = 2$

$\Rightarrow a - 5 = 2 \Rightarrow a = 7$

*En (α): $3(7) + 2b = 41 \Rightarrow b = 10$

*Luego : $E = \frac{a+b+1}{b-a} = \frac{7+10+1}{10-7}$

$\Rightarrow E = 6$

RPTA : "C"

PROBLEMA 77 :

Sea $P(x;y)$ el polinomio dado por:

$P(x;y) = 2x^{3a-6}y^5 - 3x^{a+2}y^{a-4} + x^3y^{2a-7} - x^{a-5}y^{a-9}$

Cacule el grado absoluto mínimo que puede tomar $P(x;y)$

A) 12 B) 13 C) 15 D) 16 E) 17

RESOLUCIÓN:

* Como se trata de un polinomio , entonces:

$$\{2a-6; a+2; a-4; 2a-7; a-5; a-9\}$$

Es un subconjunto de $N_0 \Rightarrow a \in N / a \geq 9$

Además :

$GA_{(t_1)} = 2a-1; GA_{(t_2)} = 2a-2; GA_{(t_3)} = 2a-4$

$\wedge GA_{(t_4)} = 2a-14$

$\Rightarrow GA_{(P)} = 2a-1$

Éste será mínimo cuando a tome su mínimo valor:

$a_{min}=9 \Rightarrow GA_{(P)min} = 17$

RPTA : "E"

PROBLEMA 78 :

Sea el polinomio:

$$P(x;y) = 4x^{3n-6}y^5a^{n-1} - 12x^{n+2}a^{n-4}y^{n-4} + 6x^{n-5}y^{n-7}b^{n+1} + 2x^{9-n}b^n$$

a y b constantes no nulas, cuál(es) de los siguientes enunciados son correctos?

I) El mínimo valor de n es 8.

II) El máximo valor de n es 9

III) El mínimo grado absoluto que puede tomar $P(x;y)$ es 13.

A) solo I B) II y III C) I y II
D) solo III E) I y III

RESOLUCIÓN:

Es un polinomio $\Rightarrow n \in N \wedge 7 \leq n \leq 9$

I) $n_{min} = 7$..................(Falso)

II) $n_{máx} = 9$..................(Verdadero)

III) $GA_{(P)} = 2n-1$

para $n_{min} = 7$

$: GA_{(P)_{min}} = 13$..................(Verdadero)

$\Rightarrow$ son correctos : $II \wedge III$

RPTA : "B'

PROBLEMA 79 :

El polinomio

$$P(x) = (9x^8-7)^n(2x^2+3x^3-1)^{n-2}(x^9+3)$$

tiene como grado 47, entonces se puede afirmar que:

$\sqrt[5]{coef\ \ principal\ de\, P(x)}$ es :

A) 3 B) 6 C) 9 D) 12 E) 27

RESOLUCIÓN:

$$P_{(x)} = \left(9x^8-7\right)^n\left(2x^2+3x^3-1\right)^{n-2}\left(x^9+3\right)$$

Dato : $GA_{(P)} = 47$

$\Rightarrow 8n + 3(n-2) + 9 = 47$

$\Rightarrow 11n + 3 = 47 \Rightarrow n = 4$

Luego :

$coeficiente\ principal = 9^n \times 3^{n-2} \times 1 = 3^{3n-2}$

$\Rightarrow \sqrt[5]{coeficiente\ principal} = \sqrt[5]{3^{3\times4-2}} = 9$

RPTA : "C"

PROBLEMA 80 :

Se definen los polinomios:

$$P(x;y) = x^m y^{n-1} + x^{m-1}y^{2n}$$
$$Q(x;y) = x^{m-1}y^{n+2} - x^m y^{n-2}$$
$$R(x;y) = P(x;y).\ Q(x;y)$$

Además en el polinomio R se cumple que $GR_x = GR_y, GA = 14$. Determine el grado del polinomio

$$S(x;y) = P(x;y) - Q(x;y).$$

A) 3 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

RESOLUCIÓN:

* De lo dado se obtiene :

$m + m = 2n + n + 2 \Rightarrow 2m = 3n + 2$....($\alpha$)

* $GA_{(R)} = 14$
$\Rightarrow m + 2n - 1 + m + n + 1 = 14 \Rightarrow 2m + 3n = 14$...($\beta$)

* De (α) $\wedge$ (β) : $2m + 8 \wedge 3n = 6$

$\Rightarrow m = 4 \wedge n = 2$

con esto : $P_{(x,y)} = x^4y + x^3y^4 \wedge Q_{(x,y)} = x^3y^4 - x^4$

$\Rightarrow S_{(x;y)} = x^4y + x^3y^4 - x^3y^4 + x^4 = x^4y + x^4 \Rightarrow GA_{(s)} = 5$

RPTA : "B

PROBLEMA 81 :

Indique cuál(es) de los siguientes enunciados son correctos:

I) $P(x) = 6x^3 + 5x^2 + 6\,|x| + 1$ es un polinomio ordenado.

II) $Q(x) = 1 + x^2 - x + 3x^3$ es un polinomio ordenado.

III) $H(x;y) = x^3y + xy^3 + x^2y^2$ es un polinomio homogéneo.

A) I, II y III B) I y III C) II y III
D) I y II E) solo III

RESOLUCIÓN:

I) por definición , **$P(x)$ no es un polinomio**
....(Falso)

II) $Q_{(x)} = 1 + x^2 - x + 3x^3$ no es ordenado...(Falso)

$III) H_{(x;y)} = x^3y + xy^3 + x^2y^2$

es homogenéo , todos sus términos tiene el mismo grado absoluto...*(Verdadero)*

$\therefore$ ***son correctos : solo III.***

RPTA : "E"

PROBLEMA 82 :

Si el polinomio:

$$P(x;y) = 2^{-1}(a+b)\,x^{a^2+n} - y^{b^2+12} + 3^{-1}(a-b)x^{b^2+n}y^n$$

es homogéneo. Determine el producto de sus coeficientes.

A)-2 B)-1 C)0 D) 2 E) 3

RESOLUCIÓN:

* Es homogéneo , entonces :

$a^2 + n = b^2 + 12 = b^2 + 2n$

$\Rightarrow a^2 + n = b^2 + 12 \wedge b^2 + 12 = b^2 + 2n \Rightarrow a^2 - b^2 = n \wedge n = 6$

Luego , el producto de coeficientes del polinomio es:

$$2^{-1}(a+b)(-1)3^{-1}(a-b) \Rightarrow \frac{-1}{6}(a^2 - b^2) \Rightarrow -\frac{1}{6}(6) = -1$$

RPTA : "B

PROBLEMA 83:

Si se cumple que:

$$A(x-1)(x-3) + B(x-1)(x+5) + C(x-3)(x+5) \equiv 10x^2 - 44x + 58$$

para cada $x \in R$, cuál(es) de los siguientes enunciados son correctos.

I) A+B+C=10
II) A =B² + C² - 3BC.
III) A>C>B

A) I y II B) II y III C) I y III
D) solo II E) solo III

RESOLUCIÓN:

$x \equiv 1 : C(-2)(6) = 24 \Rightarrow C = -2$

$x \equiv 3 : B(2)(8) = 10(9) - 44(3) + 58$

$16B = 16 \Rightarrow B = 1$

por otro lado ; considerando sólo términos en " x^2 ,se tiene :

$A + B + C = 10 \Rightarrow A = 11$

$I) A + B + C = 10$..........*(Verdadero)*

$II) B^2 + C^2 - 3BC = 1 + 4 - 3(-2) = 11$

$\Rightarrow A = B^2 + C^2 - 3BC$..........*(Verdadero)*

$III) 11 > 1 > -2 \Rightarrow A > B > C$....*(Falso)*

$\therefore$ ***son correctos : I y II***

RPTA : "A"

PROBLEMA 84 :

¿Cuántos términos posee el polinomio homogéneo

$P(x;y) = x^m + x^{m-2}y^2 + x^{m-4}y^4 + ...$ para que sea de grado **40** respecto a la variable «y»

A) 19 B) 20 C) 21 D)22 E)23

RESOLUCIÓN:

*Dado que el polinomio es homogéneo y de $GR_{(y)} = 40$ de donde , se nota claramente que:

Número de términos =*21*

RPTA : "C'

PROBLEMA 85:

Sea $P(x;y;z)$ un polinomio homogéneo de grado 3 que cumple $P(1;2;-1) = 4.$

Determine el valor de $P(-4;-8;4)$

A)- 256 B)-128 C)- 32 D) -16 E) 64

RESOLUCIÓN:

propiedad: *si* $P_{(x;y;z)}$ es homogéneo de grado n , entonces :

$P_{(kx;ky;kz)} \equiv k^n P(x;y;z)$

pord dato : $P(1;2;-1) = 4 \wedge n = 3$

se pide $(-4;-8;4)$***,osea*** $k = -4$

$\Rightarrow P(-4;-8;4) = (-4)^3 P(1;2;-1) = (-4)^3 \times 4 = -256$

RPTA : "A'

PROBLEMA 86 :

La siguiente suma:

$nx + (n-1)x^2 + (n-2)x^3 + ... + 2x^{n-1} + 1x^n$; con $n \in N$ es igual a.

A) $\frac{x^2(x^n-1)}{n(x-1)^2} - \frac{x}{x-1}$ B) $\frac{x(x^n-1)}{n(x-1)^2} + \frac{x}{x-1}$

C) $\frac{x(x^n+1)}{(x-1)^2} - \frac{nx}{x-1}$ D) $\frac{x^2(x^n-1)}{(x-1)^2} - \frac{nx}{x-1}$

RESOLUCION:

* *Sea S lo que piden y multipliquemos la por x a ambos miembros :*

$xS = nx^2 + (n-1)x^3 + (n-2)x^4 + ... + 2x^n + x^{n+1}$....(I)

$\Rightarrow S = nx + (n-1)x^2 + (n-2)x^3 + ... + 2x^{n-1} + x^n$.... (II)

* *Restando convenientemente((I)–(II)) :*

$\Rightarrow xS - S = \underline{x^2 + x^3 + x^4 + ... + x^{n-1} + x^n + x^{n+1}} - nx$

$$\Rightarrow (x-1)S = x^2\left(\frac{x^n-1}{x-1}\right) - nx \Rightarrow S = \frac{x^2(x^n-1)}{(x-1)^2} - \frac{nx}{x-1}$$

RPTA : "D"

PROBLEMA 87 :

Sea : $x_1=\sqrt{1}; x_2=\sqrt{1+\sqrt{1}}; x_3=\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}}$

entonces el valor de :

$x_{n+1}^4-2x_{n+1}^2-x_{n-1};\ \forall n\geq 2$ es.

A) 0 B) 1 C) $1+\sqrt{1}$ D) $\sqrt{1+\sqrt{1}}$ E) $1+\sqrt{2}$

RESOLUCIÓN:

* Por recurrencia : $x_n=\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+...}}}$ *(n radicales)*

* luego :

$x_n=\sqrt{1+x_{n-1}} \Rightarrow x_n^2=1+x_{n-1}$........................(I)

además :

$x_{n+1}^2=1+x_n \Rightarrow x_n=x_{n+1}^2-1$.......al cuadrado

$x_n^2=x_{n+1}^4-2x_{n+1}^2+1$.......................................(II)

*De : (I)=(II) $\Rightarrow 1+x_{n-1}=x_{n+1}^4-2x_{n+1}^4+1$

* Reduciendo, se obtiene : $x_{n+1}^4-2x_{n+1}^2-x_{n-1}=0$

RPTA : "A"

PROBLEMAS DE EXAMEMES DE ADMISIÓN

PROBLEMA 88 :

Si $f(x+1)=x^2-1$ entonces $\frac{f(1)-f(0)}{f(-1)}$ es igual a:

A) 1 B) −1/3 C) 1/2 D) 1/3 E) −1/2

RESOLUCIÓN:

* Si:

$f(x+1)=x^2-1=(x+1)(x-1)=(x+1)(x+1-2)$

* Si hacemos $(x+1)=y$; tenemos : $f(y)=y(y-2)$

* Luego evaluando: $f(1)=(0)^2-1=-1$

$f(0)=(-1)^2-1=0$

$f(-1)=(-2)^2-1=3$

* Entonces , reemplazando tenemos:

$\frac{f(1)-f(0)}{f(-1)}=\frac{-1+0}{3}=-\frac{1}{3}$

RPTA : "B"

PROBLEMA 89 :

Sea la función f tal que $f(-3)=2$ y $f(x-1)=2f(x-2)-1$; además $x\in R$, entonces halle $f(0)$.

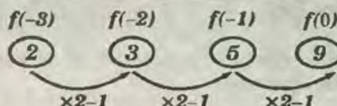
A) 16 B) 13 C) 5 D) 9 E) 11

RESOLUCIÓN:

* Por definición :

$f(x-1)=2f(x-2)-1$

El doble del anterior menos 1



$f(0)=9$

RPTA : "D"

PROBLEMA 90 :

El valor numérico de :

$f(x)=x^3-3x^2+3x+1$ en 1,001 es:

A) 3,002002001 B) 5,006004001 C) 2,002002001
D) 2,000000001 E) 2,0011001001

RESOLUCIÓN:

* Sumando +1 y quitando −1 la expresión dada:

$f(x)=x^3-3x^2+3x-1+1+1$

$f(x)=\underbrace{x^3-3x^2+3x-1}_{(x-1)^3}+2=(x-1)^3+2$

* Para : $x=1,001$

$f(1,001)=(1,001-1)^3+2=(0,001)^3+2$

$f(1,001)=0,000000001+2$

$\Rightarrow f(1,001)=2,000000001$

RPTA : "D"

PROBLEMA 91 :

Si $f(x)=1+x$. ¿Cuál es el valor de y , si sabemos que $f(f(x)=y+f(1-x)$?

A) 0 B) x C) $-2x$ D) $-x$ E) $2x$

RESOLUCIÓN:

Despejando "y": $y=f(f(x))-f(1-x)$ ....(I)

Dato: $f(x)=1+x$ ....(II)

* (II) en (I):

$y=f(1+x)-f(1-x)$

$\Rightarrow E\ y=2+x-(2-x)\Rightarrow E\ y=2x$

RPTA : "E"

PROBLEMA 92 :

Si $f(x-1)=x^2+2x$ y $f(a)-f(b)=b-a\neq 0$

¿Cuál es el valor de $a+b+5$?

A) 5 B) 1 C) −1 D) −2 E) 0

RESOLUCIÓN :

* Buscando la regla como operar , se obtendrá:

$f(x-1)=(x+1)^2-1$

$+2;()^2;-1$

* Luego lo aplicaremos en:

$f(a)-f(b)=b-a$

$(a+2)^2-1-[(b+2)^2-1]=b-a$

$\Rightarrow (a+2)^2-(b+2)^2=b-a \Rightarrow (a+b+4)(a-b)^2=b-a$

$\Rightarrow a+b+4=-1 \Rightarrow a+b+5=0$

RPTA : "E"

PROBLEMA 93 :

Dado $3f(x)=x+4+\frac{f(x)}{2}$, calcule $f(f(-4)$.

A) −4 B) 8/5 C) 4 D) 0 E) −8/5

RESOLUCIÓN:

* Dato: $3f(x)=x+4+\frac{f(x)}{4}$
* Despejando f(x): $f(x)=\frac{2x+8}{5}$
* Luego : $f(-4)=\frac{2(-4)+8}{5}=0$

$$f(0)=\frac{2(0)+8}{5}=\frac{8}{5}\Rightarrow f(f(-4))=f(0)=\frac{8}{5}$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 94 :

$P(x)$ es un polinomio de 2° grado tal que
$P(x)-P(x-1)=-2x$
$P(x)=0$
La suma de sus coeficientes es
A) -3 B) -2 C) 4 D) 3 E) 2

RESOLUCIÓN:

* Sabemos que en todo polinomio con más de un término se cumple que :

$P(1)$ = suma de coeficientes
* Usando la igualdad se tiene:

$$P(x)-P(x-1)=-2x$$

* Ahora evaluamos para: $x=1$

$$\Rightarrow P(1)-P(0)=-2\Rightarrow P(1)=P(0)-2$$

* Por dato :

$$P(0)=P(1)=0-2\Rightarrow P(1)=-2$$

$\Rightarrow$ Suma de coeficientes: -2

RPTA : "B"

PROBLEMA 95 :

Sea $F(x)=x^2+2x-3$. Si $F(2x-1)=2F(x)$, el valor de x^2-x+1, es:
A) -1 B) 0 C) 1 D) 1/2 E) 2

RESOLUCIÓN:

* $F(x)=x^2+2x-3\Rightarrow 2F(x)=2x^2+4x-6$
* $F(2x-1)=(2x+1)^2+2(2x-1)-3=4x^2-4$
* Si $2F(x)=F(2x-1)$, entonces se tiene que:

$$2x^2+4x-6=4x^2-4.$$

* De donde:

$$x^2-2x+1=0\Rightarrow(x-1)^2=0\Rightarrow x=1$$

* Reemplazando este valor en x^2-x+1, se obtiene: $(1)^2-1+1=1$

RPTA : "C"

PROBLEMA 96 :

Dados : $R(x)=\frac{x+1}{x-1};\ Q(x)=\frac{x^2+1}{x^2-1}$
Determine : $E=R(Q(R(x)))$
A) $[Q(x)]^2$ B) $R(x)-Q(x)$ C) $[R(x)]^2$
D) $R(x)+Q(x)$ E) $Q(x)-R(x)$

RESOLUCIÓN:

* hallamos gradualmente , así :

$$Q(R(x))=\frac{[R(x)]^2+1}{[R(x)]^2-1}=\frac{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2+1}{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2-1}=\frac{x^2+1}{2x}$$

$$\Rightarrow E=R(Q(R(x)))=R\left(\frac{x^2+1}{2x}\right)=\frac{\frac{x^2+1}{2x}+1}{\frac{x^2+1}{2x}-1}$$

$$=\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2=[R(x)]^2$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 97 :

Si $P(x)=ax^2+b$ y $P(P(x))=8x^4+24x^2+c$
El valor de $a+b+c$ es:
A) 28 B) 32 C) 30 D) 31 E) 26

RESOLUCIÓN :

* Se tiene que:

$$P[P(x)]=a(P(x))^2+b=a(ax^2b)^2+b$$

* De donde resulta: $a^3x^4+2a^2bx^2+ab^2+b$
* Luego por igualdad de polinomios:

$$a^3x^4+2a^2bx+ab^2+b=8x^4+24x^2+c$$

* Entonces:

$a^3=8\Rightarrow a=2$

$2a^2b=24\Rightarrow b=3$

$ab^2+b=c\Rightarrow c=21$

* Por lo tanto : $a+b+c=26$

RPTA : "E"

PROBLEMA 98 :

Sea $f(x)=ax^2+bx+c$. Si $f(0)=-2$, $f(1)=6$ y $f(3)+f(2)=76$, determine el valor de $3a+2b+c$.
A) 23 B) 17 C) 13 D) 19 E) 29

RESOLUCIÓN:

Como: $f(x)=ax^2+bx+c$ y $f(0)=-2$

$$\rightarrow a(0)^2+b(0)+c=-2\rightarrow c=-2$$

* Además:

$f(1)=6\rightarrow a+b+c=6\rightarrow a+b=8$..................$(\alpha)$
* También:

$f(3)+f(2)=76$
$\rightarrow a(3)^2+b(3)+c+a(2)^2+b(2)+c=76$
$\rightarrow 9a+3b-2+4a+2b-2=76$
$\rightarrow 13a+5b=80$..................................(β)
* De (α) y (β) se obtiene:

$a=5$ y $b=3$

$$\Rightarrow 3a+2b+c=3(5)+2(3)+(-2)=19$$

RPTA : "D"

PROBLEMA 99 :

El polinomio :

$P(x)=(7x^2-3)^{n-3}(2x-1)^{n+1}+(n^2x^3-9)^7(2x+3)^{n-17}+(5x-7n)(5x-1)^{2n-17}$ tiene como término independiente 112. Hallar : n

A) 13 B) 18 C) 16 D) 20 E) 12

RESOLUCIÓN :

* Dato: $P(0)=112$

* Entonces:

$$112=(-3)^{n-3}(-1)^{n+1}+a(-9)^7(3)^{n-17}+(-7n)(-1)^{2n-17}=112$$

* Analizando tanto para n par o impar resulta:

$$112=3^{n-3}-3^{14}\times 3^{n-17}+7n \Rightarrow 112=3^{n-3}-3^{n-3}+7n \Rightarrow n=16$$

RPTA : "C"

RESUMEN :

Los polinomios son expresiones algebraicas racionales enteros de dos o más términos.

A los polinomios se les denota de la siguiente forma: $P(x)$, $P(x;y)$, ...

Los polinomios poseen grados relativos y absolutos y estos son enteros y positivos.

Los polinomios especiales son: Polinomios ordenados, completos, homogéneos, idénticos o idénticamente nulo.

Con los polinomios podemos efectuar las operaciones de adición, sustracción, multiplicación y división. Esto último se estudiará en un posterior capítulo.

PRIMERA PRACTICA DIRIGIDA

Operaciones con Polinomios

01 Considerando los siguientes polinomios:

$P(x)=2x^3-7x^2+5x+3$ $Q(x)=5x^2+2x-6$

$R(x)=7x^4+x^3-x^2$ $S(x)=9x^3-x+3$

Calcular:

I) $P(x)+Q(x)=$

II) $Q(x)+R(x)=$

III) $R(x)+S(x)=$

IV) $P(x)+S(x)=$

V) $P(x)+Q(x)+R(x)=$

02 Ahora , considera los siguientes polinomios:

$A(x)=3x^2+5x-6$

$B(x)=4x^2-11x-1$

$C(x)=8x^3-x^2+9$

y determina lo siguiente:

I) $B(x)-A(x)=$

II) $C(x)-B(x)=$

III) $C(x)-A(x)=$

IV) $A(x)+B(x)-C(x)=$

V) $C(x)-[A(x)-B(x)]=$

03 Tomando en cuenta los polinomios anteriores, determina: $Q(x)+2S(x)$

A) $10x^2+9x^3$ B) $23x^5$ C) $5x^2+9x^3$
D) $18x^2+5x^3$ E) $5x^2+18x^3$

04 Tomando en cuenta los polinomios anteriores, determina: $5S(x)+A(x)$

Indicar la suma de coeficientes del resultado:

A) 29 B) 57 C) 49 D) 37 E) 91

05 Efectuar:

- $(-6x^3)(8x^4)=$
- $(2x^6)(-3x^9)(-5x^2)=$
- $(-9x^3y^2)(-8xy)(2x^2y^4)=$
- $(-8xy)(2x^3y^4)(-3x^2y)=$
- $2x^6(5x^5-9x+6)=$
- $-3x^4(-2x^2+8x-9x^5)=$
- $+2x^4y^5(-3xy+6x^3y^3)=$

06 Simplificar: $5x(6x^4-2)+10x$

A) $30x^5$ B) $30x^4$ C) $30x^5-10x$ D) x E) 0

07 Efectuar: $x^2(x^2+1)-x^2(x^2+5)$

A) $4x^2$ B) $-4x^2$ C) 0 D) 1 E) $4x$

08 Si $R=3x^3(-2x+4x^6-2)$, hallar la suma de coeficientes de R.

A) 24 B) 12 C) 0 D) 8 E) 6

09 Reducir: $A=m(m+2)-3(m-m^2)+m-m^2$

A) $50m^2$ B) $3m^2$ C) m^2 D) m E) 1

10 Reducir: $F=-4(3y-8y^2)+y(-2)-(16y)(2y)$

A) $-14y$ B) $14y$ C) $-10y$ D) $7y$ E) $-7y$

11 Reducir: $M=x(x+4)+x(x+2)-x(x+4)$

A) x^2-2x B) x^2-x C) x^2+2x

D) $x - 1$ E) $x + x$

(12) Si

$$A = m^2(m^2 - m) - m^4$$
$$B = m^3(m^2 - 6) + 6m^3$$

Hallar «A×B»

A) m^8 B) $-m^8$ C) $-m^{15}$ D) m^6 E) m^4

(13) Efectuar: $(-2x^4)(-3x)(6x^4)$

A) $-36x^8$ B) 12 C) $36x^9$ D) $36x$ E) 0

(14) Efectuar: $2x^2(-3x^5 - 8x^4)$

A) $6x^7 - 16x^6$ B) $-6x^{10} - 16x^8$
C) $-6x^7 - 16x^6$ D) $6x - 1$ E) $1 + 6x$

(15) ¿Cuáles de las siguientes expresiones son equivalentes a $4x$?

I) $4(x - 1) + 4$ II) $4(x + 4) - 4$
III) $4(x + 1) - 4$

A) I B) I, II C) I, III D) N.A. E) F.D.

(16) Simplificar: $2x(3x^3 - 6) + 12x$

A) $6x^4 - 12x$ B) $6x^4$ C) $6x^3$
D) $6x$ E) $-6x$

(17) Reducir: $A = x(x + 1) - 2(x - x^2) + x - 2x^2$

A) $3x^2 - x$ B) $-x^2$ C) x^2 D) x E) $-x$

(18) Reducir: $E = -5(8y - 3y^1) + y(-3 + y) - (4y)(4y)$

A) -43 B) $-43y$ C) $-43y + 10y^2$
D) $4y$ E) $-4y$

(19) Reducir: $N = x(x - 2) + x(x + 1) - x(x - 3)$

A) $x^2 + 2x$ B) $x^2 - 3x$ C) $x^2 - x$
D) $x - 1$ E) $x + 1$

(20) Si: $P = x(x + 1) - x \ \wedge \ Q = x^2(x^5 - 3) + 3x^2$

Hallar $P \times Q$

A) x^2 B) x^9 C) x^7 D) x^4 E) x^5

TAREA DOMICILIARIA

(01) Si: $P(x) = x^2 - x + 1$; $P(x) = -x^2 + x - 1$.

Calcular: $P(x) + Q(x)$

A) $2x^2 - 2x + 2$ B) 0 C) x^2 D) $-x$ E) -1

(02) Si: $Q(x) = 5x^3 - 2x^2 + 7x - 1$: $R(x) = 5x^3 + 7x$.

Calcular: $Q(x) - R(x)$

A) $2x^2 + 1$ B) $-2x^2 - 1$ C) $2x^2$
D) 1 E) $-2x^2$

(03) Si: $M(x) = 2x^2 - 5x + 4$; $N(x) = 3x^2 - 7x + 6$

Calcular: $3M(x) - 2N(x)$

A) $-x$ B) x C) x^2 D) $-x^2$ E) 1

(04) Si: $P(x) = 2x^2 - x + 3$; $Q(x) = 3x^2 - x + 2$.

Calcular: $3P(x) - 2Q(x)$

A) $-x$ B) 5 C) $x - 5$ D) $-x + 5$ E) $-x - 5$

(05) Efectuar: $x(x + 1) - x(x + 2)$

A) $2x^2 - x$ B) $2x^2$ C) $-x$ D) 0 E) x

SEGUNDA PRACTICA DIRIGIDA

Operaciones con Polinomios II

(01) Si: $P(x) = x + 5$; $Q(x) = x - 5$.

Determinar: $[P(x)][Q(x)]$

A) $x^2 + 25$ B) $x^2 + 25$ C) $5x$ D) $-5x$ E) 0

(02) Si: $M(x) = x^2 + x + 1$; $N(x) = x^2 - x + 1$.

Determinar: $[M(x)][N(x)]$

A) $x^4 - x^2 - 1$ B) $x^4 + x^2 - 1$ C) $x^4 + x^2 + 1$
D) $x^4 - x^2 + 1$ E) $x^4 - 1$

(03) Si: $G(x) = 2x^3 - 5$; $D(x) = 2x^3 + 5$.

Calcular: $[G(x)][D(x)]$

A) $4x^6 - 25$ B) $4x^6 + 25$ C) $4x^6 - 5$
D) $4x^3 - 25$ E) $4x^2 - 25$

(04) Sabiendo que :

$$R(x) = x + 2 \ ; \ S(x) = 3x^2 - x + 1$$

Entonces : $[R(x)][S(x)]$ será :

A) $3x^3 - 5x^2 + 2$ B) $5x^3 - 3x^2$
C) $3x^3 + 5x^2 + x - 2$ D) $3x^3 + 5x^2 - x + 2$
E) $3x^2 + x^2 - 2$

(05) Si:

$$P(x) = (x + 1) \quad ; \quad Q(x) = (x + 2) \quad ; \quad R(x) = (x - 1)$$

Determinar el valor de: $[P(x)][Q(x)][R(x)]$

A) $x^3 - x^2 + 1$ B) $x^3 + 2x^2 - x - 2$
C) $x^3 + x^2 - 1$ D) $x^3 - 2x^2 + x + 2$ E) $x^3 - x - 2$

(06) Si: $A(x) = x - 3$; $B(x) = x + 2$, y también:

$C(x) = x - 6$; $D(x) = x + 1$.

Calcular: $[A(x) \times B(x)] - [C(x) \times D(x)]$

A) $-x$ B) $5x$ C) $-4x$ D) x E) $4x$

(07) Siendo: $M(x) = x + 2$; $N(x) = x + 5$ y también

$T(x) = x + 3$; $U(x) = x + 4$

Calcular : $[M(x) \times N(x)] - [T(x) \times U(x)]$

A) x B) $-x$ C) -2 D) 2 E) 0

(08) Reducir: $(x + 2)(x^2 - 3x + 1) - x^2(x - 1) + 5(x + 2)$

A) 10 B) 12 C) 8 D) 6 E) 4

(09) Simplificar: $(x+3)(x^2+x+1)-4x(x+1)$

A) x^2+3 B) x^3-3 C) x^2-3
D) $x+3$ E) x^3+3

(10) Efectuar: $(x+1)(x+2)-x(x+3)$

A) 2 B) 4 C) 8 D) 10 E) 12

(11) Efectuar: $x^2(x^3-5)-x^5$

A) $-5x^2$ B) $5x^2$ C) x^2 D) $-x^2$ E) 0

(12) Efectuar: $2x(x^2-3x)+6x^2$

A) $2x$ B) $2x^2$ C) $2x^3$ D) 2 E) $2x^4$

(13) Simplificar: $3x(x+1)-x(x+3)$

A) $2x^2$ B) $3x^2$ C) x^2 D) $-3x^2$ E) -2

(14) Reducir: $7x^2(x^5-2x^3)+2(x^7+7x^5)$

A) $9x^7$ B) $5x^2$ C) $6x^2$ D) $14x^6$ E) 0

(15) Si: $P(x)=7x^2+x-1$; $Q(x)=x^2+1$, calcular:

$$[P(x)\times Q(x)]-[Q(x)\times P(x)]$$

A) $7x^4+x^3$ B) x^3-x^2+7x C) $7x^5-x^2+9$
D) $14x^4-1$ E) 0

TERCERA PRACTICA DIRIGIDA

Polinomios I

(01) Si: $P(x)=x^2+x+1$

Calcular: $P(3)$

A) 1 B) 2 C) 5 D) 4 E) 13

(02) Si $P(x)=3x+7$

Evaluar: $P(-1)$

A) 4 B) 7 C) 10 D) 12 E) 6

(03) Si $P(x)=(2x+1)^2+10$

Evaluar: $P(0)$

A) 11 B) 12 C) 13 D) 14 E) 16

(04) Si $P(x)=x^3+2x+4$

Calcular: $\sqrt{P(2)}$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

(05) Si $P(a)=3a^2+a+3$

Calcular: $E=\dfrac{P(0)+P(1)}{P(-1)}$

A) -2 B) -1 C) 2 D) 4 E) $\frac{1}{2}$

(06) Calcular $f(f(f(1)))$

Si: $f(x)=x+3$

A) 4 B) 7 C) 10 D) 11 E) 9

(07) Si: $P(x)=5x^2+7x-12$

Calcular: $(P(-1))^{P(1)}$

A) 1 B) -1 C) 2 D) -2 E) 0

(08) Si: $P(x)=x^2-3x+1$

Calcular: $E=\dfrac{P(-2)+P(1)}{P(4)-P(3)}$

A) 1 B) 4 C) -4 D) 2 E) 0

(09) Si se conoce el polinomio: $P(x)=3x^2+x-3$

Calcular el valor de: $E=P(P(P(1)))$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

(10) Si: $P(x)=(m-2)x^2+8x-5$

Además: $P(-1)=10$. Calcular "m".

A) 25 B) 30 C) 35 D) 40 E) 15

(11) Si: $P(x)=ax^2+2ax+3n-1$

Además: $P(-2)=5$. Calcular: "n"

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 7

(12) Si: $P(x)=2x^2+\frac{3}{5}x+\frac{1}{3}$

Calcular: $P\left(-\frac{1}{2}\right)$

A) $\frac{8}{15}$ B) $\frac{9}{13}$ C) $\frac{9}{15}$ D) $\frac{8}{17}$ E) $\frac{9}{17}$

(13) Se define: $f(x-2)=x^2+3x+1$

Calcular: $f(3)$

A) 41 B) 42 C) 39 D) 38 E) 37

(14) Si: $P(x+2)=5x+7$. Hallar: $P(3)+P(1)$

A) 12 B) 14 C) 11 D) -11 E) 15

(15) Si: $P(x)=x^{100}-16x^{96}+4x-3$

Calcular: $E=P(2)+P(1)+P(0)$

A) 12 B) -12 C) 11 D) -11 E) 15

(16) Si: $F(x)+G(x)=3x+5$
$F(x)-G(x)=7x-3$

Calcular: $G[F(2)]$

A) -18 B) -15 C) -16 D) -17 E) 26

(17) Si: $P(x)=3(x^5+x^4)-2\left(x^3+\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\right)$

Evaluar: $P(-1)$

A) -1 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

(18) Si: $P\left(\frac{x}{3}-1\right)=2x+3$

Calcular: $P(2)$

A) 18 B) 20 C) 21 D) 24 E) 19

19 Si: $P(x) = mx^2 + 5(m-1)x + 1$

Además: $P(-2) = 17$

Calcular "m".

A) 1 B) 2 C) 3 D) –1 E) 4

20 Si: $F(x) = e^x + a^x$ y $F(4) = 1$

Calcular; $R = \sqrt[3]{\dfrac{F(7) - F(3)}{F(1)}}$

A) $\frac{1}{e}$ B) $\frac{1}{a}$ C) ae D) $-ae$ E) $\frac{a}{e}$

TAREA DOMICILIARIA

01 Si: $P(x) = 2x^2 + x - 4$

Calcular: $E = \dfrac{P(0) + P(2)}{P(-1) - P(-2)}$

A) $-\frac{2}{5}$ B) $-\frac{2}{3}$ C) $\frac{2}{3}$ D) $-\frac{3}{4}$ E) $-\frac{1}{5}$

02 Hallar el V.N. de $M = x^2 + 2xy + y^2$

Para: $x = \frac{1}{3}$; $y = -\frac{1}{3}$

A) 0 B) –2 C) –1 D) 2 E) 1

03 Si: $P\left(\frac{x+1}{3}\right) = 5x + 12$

Calcular: $P(-1)$

A) –8 B) –10 C) –12 D) –14 E) –16

04 Si: $P\left(\frac{2x}{3} - 2\right) = 4x + 4$

Calcular: $\sqrt{P(0)}$

A) 3 B) 4 C) 5 D) 7 E) –13

05 Si: $P(ax + b) = a - bx$

$Q(a + bx) = b - ax$

Calcular: $P[Q(a)]$

A) b B) –1 C) a D) $-a$ E) ab

CUARTA PRACTICA DIRIGIDA

Polinomios II

01 Si: $P(x) = \frac{1}{x}$

Calcular: $P(2) + P(3) + P(6)$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 6

02 Si : $P(x) = 3x - 1$

Calcular: $P(P(2))$

A) 12 B) 14 C) 8 D) 10 E) 5

03 Si: $F(x) = 2x^2 - 2$

Calcular: $F(F(2) - 2)$

A) 70 B) 60 C) 50 D) 40 E) 0

04 Dado el polinomio: $P(x) = x^2 + 2x - 1$, halla $P(2)$

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8

05 Dado el polinomio $P(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 1$, halla : $P(2) - P(3)$

A) –13 B) –15 C) 14 D) –12

06 Si $R(x) = \frac{x-1}{1+x}$ halla $R(5) - R(0{,}5)$.

A) 2/3 B) 3/4 C) 1 D) –1

07 Se han hecho cuatro compras, la segunda ha costado «*a*» nuevos soles más que la primera , la tercera «*b*» nuevo soles más que la segunda y la cuarta «*c*» nuevos soles más que la tercera. ¿Cuánto se ha gastado en total si la primera costó «*x*» nuevos soles?

A) $x - (abc + ac + a + 1)$ B) $x + a + b + c$
C) $x + a + b - c$ D) $4x + 3a + 2b + c$
E) $4x + 3a + 2b - c$

08 Si: $f_{(x+2)} = 3x + 2$

Hallar: $f_{(x+3)}$

A) $2x+5$ B) $3x-5$ C) $3x+6$ D) $3x+5$ E) $x-4$

09 De un juego de 52 cartas , se sacan primero $(2x^2 - 3x + 1)$ cartas y x más ; la segunda vez se saca el doble de lo que se había retenido la primera vez y x^2 más. Indique lo que queda.

A) $x^2 - 2x - 51$ B) $x^2 + 2x + 51$ C) $2x + 51$
D) $-7x^2 + 6x + 49$ E) $7x^2 - 6x + 49$

10 Si se cumple $P(x+1) = P(x-1) + x$

Calcule $P_{(7)}$, Si $P_{(1)} = -2$

A) 0 B) 1 C) 10 D) 15 E) 20

11 Halle n si: $P_{(2)} \times P_{(4)} \times P_{(6)} \times \ldots \times P_{(2n)} = 145$

donde : $P_{(x)} = \dfrac{x+1}{x-1}$

A) 10 B) 24 C) 45 D) 72 E) 145

12 Si: $h_{(x)} = x^2 + a - x$ y $f_{(x)} = x - 3$

Halle el valor de «*a*» si se cumple $h(f_{(12)}) = 2$

A) –4 B) 0 C) 1 D) 2 E) 3

13 Si: $H_{(H_{(x)}+1)} = H_{(x+2)} + H_{(x+1)} + 2$ y $H(2) = 1$

Calcule : $H_{(3)}$

A) –4 B) –2 C) 0 D) 2 E) 3

14 Si: $f(x) = (x-1)^2 + (x-1)^4 + (x-1)^6 + \ldots + (x-1)^{2n}$

$/ n \in Z$

Halle : $f_{(f_{(1)})}$

A) 0 *B) 1* *C) -2* *D) 3n* *E) n*

(15) Si $M_{(N_{(x)})} = N^2(x) + 3x - 2$

$M_{(x+1)} = x^2 - x + 8$

Calcule $N_{(3)}$

A) -3 *B) -2* *C) -1* *D) 0* *E) 1*

(16) Si $F(2x+1) = 6x-10$ y $F(G_{(x)} - 3) = 3x-4$

Halle $G_{(x)}$

A) x+1 *B) x+4* *C) x+6* *D) x+8* *E) x-2*

(17) Si $H_{(x)} = (x+1)^{-\sqrt{6}^6} \times \sqrt[4]{(-x)^4}$

Calcule $H_{(H_{(1)}H_{(2)} \ldots H_{(10)})}$

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{5}$ C) $\frac{1}{12}$ D) 1 E) 2

(18) Si : $P(x) = x^{18} - x^{15} + x^{12} \ldots - x^3 + 1$

Calcule $\underbrace{P(\ldots P_{(0)} \ldots)}_{20\ paréntesis}$

A) 0 *B) 1* *C) 2* *D) 3* *E) 4*

(19) Calcule : $P_{(5)} - P_{(4)}$

Si $P(x) = P(x-1) + x^2$

A) 5 *B) 6* *C) 10* *D) 54* *E) 60*

(20) Si : $F(x) = 3x-2$

Hallar: $\underbrace{F(F(F(F \ldots (F(x)) \ldots)))}_{10\ paréntesis}$

A) $3^{10}x$ B) $3^{10}x - 3^{10}$ C) $3^{10}x - (3^{10}-1)$
D) $3^{10}x + (3^{10}-1)$ E) 0

TAREA DOMICILIARIA

(01) Sea $F(x)$ un polinomio que cumple con :

$$F(x+1) = 3F(x) - 2F(x-1)$$

Además : $F(4) = 1 \wedge F(6) = 4$

Calcular : $F(5)$

A) 1 *B) 2* *C) 3* *D) 5* *E) 6*

(02) Si : $F(2x+1) = 6x+1$

Halle $F(3x)$

A) x+1 *B) 3x-1* *C) 9x-2* *D) 9x+2* *E) x-1*

(03) Si : $F_{(x)} = 3x+1$

Calcule : $F(x+1) + F_{(F_{(x)})}$

A) x+1 *B) x-3* *C) 12x+8* *D) 2x+1* *E) x-1*

(04) Si $F(x)$ es un polinomio lineal que cumple $F_{(F_{(x)})} = 4x+9$ de coeficiente principal positivo.

Calcule : $F(F_{(1)} + F_{(-1)})$

A) -7 *B) 0* *C) 3* *D) 15* *E) 40*

(05) Si : $F\left(\frac{x+2}{x-2}\right) = \frac{x}{2}$. Calcule $F_{(x)}$

A) 0 B) 1 C) $\frac{x+1}{x-1}$ D) x E) $\frac{x+1}{2}$

QUINTA PRACTICA DIRIGIDA

GRADOS

(01) En el polinomio:

$$P(x;y) = -\frac{1}{4}x^{7m-2} - \sqrt{2}x^{6m}y^{4-m} + 8x^{7^{m+6}}y^{7-m}$$

Se tiene $GR(x) = 20$ calcular: $m^2 + GR(y)$

A) 6 *B) 7* *C) 8* *D) 9* *E) 10*

(02) Calcular la suma de coeficientes del siguiente polinomio sabiendo que su $GR(y) = 5$;

$$P(x;y) = \sqrt{2}m^2x^4 - 5\sqrt{2}xy^{m-6} + 3\sqrt{2}my^{m-7}$$

A) $149\sqrt{2}$ B) $141\sqrt{2}$ C) $-\sqrt{2}$ D) $\sqrt{2}$ E) $133\sqrt{2}$

(03) Halla el valor de $b-a$, sabiendo que el grado relativo a x es 6 y el relativo a y es 9:

$$Q(x;y) = -x^{a-1}y^{b+2} + 2x^a y^{b+1} - 3x^{a+1}y^b$$

A) 1 *B) 2* *C) 3* *D) 0* *E) 4*

(04) Efectuar : $bx^2y^{a+1} + (a+b)x^{b+2}y^3 + ax^a y^{b+3}$

siendo términos semejantes.

A) $4x^3y^2$ B) $4x^2y^3$ C) $4xy$ D) $4xy^7$ E) $4x^7y$

(05) La siguiente expresión se puede reducir a un monomio, proporcionar su valor reducido.

$$M = (a-b)^{a+b}\sqrt[b]{x^4} + (b^2+a)^{a-b}\sqrt[b]{x^2} - ab\sqrt[3]{x}$$

A) $2\sqrt[3]{x}$ B) $-4\sqrt[3]{x}$ C) $-3\sqrt[3]{x}$ D) $8\sqrt[3]{x}$ E) $11\sqrt[3]{x}$

(06) Clasificar:

$$\sqrt[x]{\left[\frac{(a^2b)^x}{(ab^2)^x}\right]^{x+1}\left[\frac{(ab^2)^x}{(a^2b)^x}\right]^{x-1}}$$

A) racional B) irracional
C) racional entera D) racional fraccionaria
E) irracional entera

(07) Calcular la suma de los valores enteros distintos de «n» que convierten a la siguiente expresión en racional entera.

$$(x^{8-n} + x^{n-3})^2 + x^n$$

A) 33 B) 24 C) 32 D) 22 E) 36

(08) Si el grado de P es «m» y el grado de Q es «n» $(m>n)$. Hallar el grado de: $R=\frac{(P+\sqrt{PQ})}{2Q}$

A) m B) $\frac{m}{2}$ C) $\frac{(m+n)}{2}$ D) $\frac{(m-n)}{2}$ E) $m-n$

(09) Sabiendo que el grado relativo respecto a x es 5, halla el valor de $2a$.

$$R(x)=2+3x^{a-1}-5x^{a}+x^{a+1}-3x^{a+2}$$

A) 6 B) 8 C) 5 D) 3 E) 1

(10) Hallar el valor de a/b, sabiendo que: $P(x;y)=2x^{6a+1}y^{b}-3x^{1-4a}y^{6b}$ es un polinomio homogéneo.

A) 2 B) 10 C) 1/5 D) 1/2 E) −2

(11) Si el polinomio:

$P(x)=0,5x^{3}-6x^{2}+0,75x-0,2$ es opuesto a

$Q(x)=Ax^{3}+(B-4)x^{2}+(C-0,5)x+(D-0,2)$,

entonces el valor de $(A+C+D)\times B^{2}$ es:

A) −0,5 B) 10 C) −35 D) 35 E) −10

(12) En el polinomio homogéneo:

$$P(x;y)=x^{a-2b}y^{a+b}-15x^{b}y^{2b+a}+2x^{a-b}y^{8}$$

Calcular: $(a+b)ab$

A) 60 B) 100 C) 160 D) 200 E) 180

(13) Indicar la suma de coeficientes del polinomio:

$$P(x;y)=a^{2}x^{a+7}-bx^{a}y^{b}+aby^{b+4}$$

Sabiendo que es homogéneo.

A) 35 B) 36 C) 37 D) 38 E) 39

(14) Si: $P(x)=x^{a+b}+2x^{b+c}+3x^{c+d}+4x^{d+4}$

Es completo y ordenado ascendentemente.

Calcular «$abcd$».

A) −12 B) 12 C) −6 D) 6 E) 3

(15) Calcular el valor de «n^{-1}» $(n\in Z^{+})$, si el producto de los grados relativos de «x» e «y» es 24.

$$R(x,y)=x^{n-2}y^{n}+x^{2}y^{3+n^{n}}+x^{n^{n}}$$

A) 0,2 B) 0,3 C) 0,4 D) 0,5 E) 0,6

(16) Determinar el término central del polinomio:

$$P(x)=nx+(n-1)x^{2}+(n-2)x^{3}+...+x^{n}$$

Sabiendo que la suma de sus coeficientes es 153.

A) $8x^{9}$ B) $9x^{10}$ C) $9x^{9}$ D) $10x^{8}$ E) x^{10}

(17) El grado con respecto a x es 6 y con respecto a y es 2 en el polinomio.

$$H(x,y)=8x^{n+m}+2^{4}x^{m}y+7^{3}y^{n-m}/m,n\in Z$$

Calcule su grado

A) −5 B) 0 C) 3 D) 6 E) 10

(18) Si el polinomio

$$P(x,y)=5x^{2m+n-4}y^{m+n+2}+3x^{n+2m-3};m,n\in Z$$

tiene grado 39 y $GR_{x}[P]-GR_{y}[P]=6$

Calcule $m-n$

A) 4 B) 5 C) 7 D) 8 D) 9

(19) Halle el grado del monomio.

$$F(x^{3},y)=7x^{8}y^{5}z^{3}$$

A) 0 B) 1 C) 7 D) 11 E) 13

(20) Halle el grado con respecto a y si el grado del polinomio :

$$H_{(x;y)}=4^{3}x^{3n-3}y^{m+1}-\frac{1}{5}x^{3n+2}y^{m}+5x^{3n-1}y^{m+5}+7x^{2n}y^{n-2}$$

es 24 y el grado con respecto a x es 18. $m,n\in Z$

A) 5 B) 6 C) 9 D) 10 E) 12

TAREA DOMICILIARIA

(01) Sabiendo que:

$P(x)=0,5x^{n}-0,3x^{n+2}-x^{n+4}$ es séptimo grado absoluto, la afirmación incorrecta es:

A) $n<3$ B) $n>0$ C) $n\leq 3$ D) $n=3$

(02) ¿Cuál es el grado absoluto de $Q(x,y)$ si se sabe que es de cuarto grado relativo a «x» y de sexto grado relativo a «y»?

$$Q(x,y)=6x^{a+3}-2x^{a+2}y^{b}+3y^{b+4}$$

A) 4to. B) 5to. C) 6to. D) 7mo.

(03) Qué valor como mínimo debe tener «n» para que la expresión sea fraccionaria:

$$x\sqrt{x^{-1}\sqrt{x^{-1}\sqrt{x^{-1}\sqrt{x^{-n}}}}}$$

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

(04) ¿Cuál es la condición necesaria y suficiente para que el polinomio $Q(a,b,c)$ sea homogéneo?

$$Q(a,b,c,)=a^{m+n+p}+b^{n+p+q}+c^{m+n+q}$$

A) $m=p$ B) $m=n=p$ C) $p=q$ D) $m=p=q$

(05) Sabiendo que:

$P(x)=(n-3)x^{12-n}+(n-4)x^{13-n}+(n-5)x^{14-n}+....$

es completo y ordenado; determine su número de términos.

A) 12 B) 8 C) 11 D) 10 E) 9

SEXTA PRACTICA DIRIGIDA

Grados y Polinomios

01 Si el grado de «M» es **5** y el grado de «N» es **6**. Calcular el grado de (M^2N^5).

A) 51 B) 180 C) 28 D) 30 E) 56

02 El polinomio:

$$F(x;y)=(m+n-5)x^2y+(m-n-3)xy$$

es identificado nulo. Hallar «mn».

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

02 Calcular la suma de coeficientes del polinomio.

$$P(x;y) = mx^{m+5} + 6x^m y^n + nx^{n+3}$$

si es homogéneo.

A) 10 B) 11 C) 12 D) 13 E) 14

04 ¿Qué valor debe tener «n» para que el polinomio «P» sea completo?

$$P = 6x^{n-5} + 3x^{n-6} + 1$$

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

05 Hallar «mn» con la condición que el siguiente polinomio:

$$(x+3)^2(m+6)+(x-5)^2(n+2)$$

sea idénticamente nulo.

A) 5 B) 6 C) 8 D) 10 E) 12

06 Si: $P(x)=2(n-2)\sqrt[5]{x^n\sqrt{x^6}}$ es de tercer grado, indicar el coeficiente.

A) 20 B) 12 C) 18 D) 22 E) 14

07 Si: $P(x,y)=3x^{m-9}y^7+5x^{m-12}y+2x^{m-10}y^{19}$

tiene $GR(x)=5$. Hallar el grado absoluto.

A) 22 B) 21 C) 19 D) 14 E) 23

08 Si:

$$P(x;y)=2x^{m+5}y^{m-1}+3x^{m-2}y^{m+9}-5x^{m+7}y^{m-2}$$

es de grado absoluto **33**, hallar «m».

A) 15 B) 17 C) 7 D) 13 E) 11

09 Hallar la suma de coeficientes del polinomio homogéneo.

$$P(x;y)=2mx^{2m-n}+n^2x^ny^{m+2n}+x^{m-n}y^8$$

A) 21 B) 18 C) 19 D) 24 E) 17

10 Hallar «$m+n+p$» en:

$$mx(1+x)+n(x+p)+x^2=3x^2+8x-12$$

A) 2 B) 6 C) -4 D) 5 E) 7

11 Hallar «k» en:

$$P(x,y)=x^{k+3}y^{k-2}+x^{k+3}y^{k-6}+x^{k+4}y^{k-7}$$

sabiendo que $GR(x)+GR(y)=19$.

A) 4 B) 9 C) 2 D) 12 E) 8

12 La siguiente expresión se puede reducir a un monomio, proporcional a su valor reducido.

$$M=(a-b)^{a+b}\sqrt{x^4}+(b^2+a)^{a-b}\sqrt{x^2}-ab\sqrt[3]{x}$$

A) $7\sqrt[3]{x}$ B) $-4\sqrt[3]{x}$ C) $-3\sqrt[3]{x}$ D) $9\sqrt[3]{x}$ E) $11\sqrt[3]{x}$

13 Clasificar:

$$\sqrt[x]{\left[\frac{(a^2b)^x}{(ab^2)^x}\right]^{x+1}\left[\frac{(ab^2)^x}{(a^2b)^x}\right]^{x-1}}$$

A) racional B) irracional
C) racional entera D) raciona fraccionaria
E) irracional entera

14 Calcular la suma de los valores enteros distintos de «n» que convierten a la siguiente expresión en racional entera.

$$(x^{8-n}+x^{n-3})^2+x^n$$

A) 33 B) 24 C) 32 D) 22 E) 36

15 Qué valor como mínimo debe tener «n» para que la expresión sea fraccionaria.

$$x\sqrt{x^{-1}\sqrt{x^{-1}\sqrt{x^{-1}\sqrt{x^{-n}}}}}$$

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

16 Hallar el valor numérico *(V.N.)* de:

$$\sqrt[6]{\frac{x^2\sqrt{x}}{y^2}}$$

Para: $x=0{,}125$; $y=0{,}0001$

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

17 Si el grado de P es «m» y el grado de Q es «n» $(m>n)$. Hallar el grado de:

$$R=\frac{(P+\sqrt{PQ})}{2Q}$$

A) m B) $\frac{m}{2}$ C) $\frac{(m+n)}{2}$ D) $\frac{(m-n)}{2}$ E) $m-n$

18 De un juego de **52** cartas, se sacan primero $(2x^2-3x+1)$ cartas y x más; la segunda vez se saca el doble de lo que se había retenido la primera vez y x^2 más. Indique lo que queda.

A) $x^2-2x-51$ B) $x^2+2x+51$ C) $2x$ 51
D) $-7x^2+6x+49$ E) $7x^2-6x+49$

SEPTIMA PRACTICA DIRIGIDA

01 Si: $P(x) = 5x^2+7x-12$

Calcular: $E=\left[P(-1)\right]^{P(1)}$

A)1 B)2 C)0 D)-1 E)-2

02 Si: $P(x)= x^4+2x^2-2(\sqrt{2}+1)$

Calcular: $P(\sqrt{2})$

A) -1 B) $\sqrt{2}$ C) $2\sqrt[4]{2}$ D)8 E)0

03 Si: $P(x)= x^2+x-3$ calcular: $E=P(P(P(1)))$

A)1 B)-1 C)2 D)-2 E)3

04 Sabiendo que: $P(x+2)=2x-1$ Calcular: $P(3)$

A)1 B)0 C)-1 D)2 E)-2

05 Calcular «m» $(m<0)$ de:

$$P(x)=\left(2x^2+x-2\right)^3\left(m^2x+5\right)+x+2$$

si la suma de sus coeficientes es 24.

A)3 B)-3 C)4 D)-4 E)-5

06 Calcular «n» en:

$$P(x)=(x+1)^2(x+n)^3(x+3)^2+x+1$$

si su término independiente es 73.

A)3 B)1 C)2 D)4 E)-3

07 Si el grado absoluto del monomio:

$$M(x;y)=3nx^{2n+1}y^{3n-4}$$

es 17. calcular el valor de «n».

A)5 B)4 C)3 D)2 E)1

08 Calcular el coeficiente del monomio:

$$M(x;y)=\left(\frac{m+n}{m-n}\right)x^{3m+2n}y^{5m-n}$$

si: $G.A(M) = 20$ y $G.R(x)=14$

A)-2 B)2 C)-3 D)3 E)1

09 Calcular el grado absoluto del polinomio:

$$P(x;y)= 2x^{a+2}y^{2a+1}+3x^{a}y^{3a+b}$$

si. $G.R(x) = 16$ y $G.R(y) = 50$

A)55 B)64 C)60 D)50 E)58

10 Calcular la suma de los coeficientes del siguiente polinomio mónico:

$$P(x)=(n-2)x^3+(n-3)x^4+nx-1$$

A)3 B)4 C)5 D)6 E)7

11 Si los siguientes términos son semejantes: $3x^{m-2}y^{n^2+5} \wedge 8x^{n+5}y^{m+4}$

indicar el mayor valor de: $m+n$.

A)3 B)7 C)9 D)11 E)13

12 Si: $P(x)=(m-2)x^2+8x-5$

Calcular «m». sabiendo que: $P(-1) = 10$

A)25 B)35 C)15 D)30 E)40

13 Sabiendo que: $P(x)=\begin{cases}2x+1; \text{Si}: 0<x\le 2\\ -x^2; \text{Si}: -2<x\le 0\end{cases}$

calcular: $E=\dfrac{P(1)+P(-1)}{P(2)}$

A)1/5 B)2/5 C)3/5 D)2/3 E)3/2

14 Calcular $m+n+p$, si el monomio:

$$M(x;y;z)=x^{m+3n+2p}y^{2m+n+3p}z^{3m+2n+p}$$

tiene grado 48.

A)6 B)7 C)8 D)9 E)10

15 Calcular $(n-m)$, si:

$$P(x;y)=x^{3m+2n-5}y^{m-n+4}+x^{3m+2n-1}y^{m-n+2}$$

tiene $G.A(P) = 28$ y $G.R(y) = 2$

A)1 B)2 C)3 D)4 E)5

16 Si: $P(x)=6x-11$

$P[(F(x)]=12x-17$

Calcular: $F(5)$

A)12 B)1 C)3 D)6 E)9

17 Si: $P(x) = x^2-6x+9$

calcular: $(a-1)^2$, sabiendo además que:

$$P(a+3)-P(a-3)=12$$

A)1 B)4 C)9 D)16 E)25

18 Si: $P\left(\dfrac{2x}{3}-2\right)=7x+4$ calcular: $\sqrt{P(0)}$

A)6 B)3 C)4 D)5 E)7

19 En el polinomio:

$$P(x+1)=(2x+1)^n+(x+2)^n-128(2x+3)$$

la suma de coeficientes y el término independiente suman *1*. Calcular el valor de «*n*» (*n* es impar).

A)11 *B)9* *C)7* *D)5* *E)3*

20 Calcular: $E=m+n+mn$, si el G.A del polinomio:

$$P(x;y)=x^{m+3}y^{n-2}+x^{m+1}y^{n+1}+x^my^{n+2}$$

es *8* y el grado relativo a «*x*» supera en una unidad al grado relativo de «*y*».

A)15 *B)14* *C)16* *D)18* *E)13*

OCTAVA PRACTICA DIRIGIDA

01 Si el polinomio: $P(x;y)=2x^5y^6-5x^3y^a+3x^9y^{\frac{a}{4}}$

es homogéneo, calcular: $E=\sqrt[3]{a\sqrt[3]{a\sqrt[3]{a...}}}$

A) 2 *B)* $\sqrt{2}$ *C)* $2\sqrt{2}$ *D)* $\sqrt[3]{2}$ *E)* $2\sqrt[3]{2}$

02 Calcular $(m+n)$ del siguiente polinomio homogéneo: $P(x;y)=3x^{2n}y^{n+3}-4x^ny^{11}+5y^{m+2}$

A)15 *B)16* *C)17* *D)18* *E)19*

03 Calcular la suma de coeficientes de:

$$P(x;y)=mnx^{m+6}-3nx^my^n+my^{n+4}$$

si el polinomio es homogéneo.

A)8 *B)10* *C)12* *D)14* *E)24*

04 Si el polinomio:

$$P(x)=x^{n-2}+x^{n-3}+x^{n-4}+x^{n-1}$$

es completo, calcular «*n*».

A)0 *B)1* *C)2* *D)3* *E)4*

05 Indicar el valor de «*a*», si el polinomio es ordenado en forma decreciente:

$$P(x)=x^{2a-3}+x^{5-a}+x^{a-2}$$

A)1 *B)2* *C)3* *D)4* *E)5*

06 Dado el siguiente polinomio completo y ordenado en forma ascendente

$$P(x)=5x^{3m-12}+2x^{m+n-9}-3x^{n+p}$$

calcular: $m+n-p$

A)6 *B)10* *C)12* *D)14* *E)16*

07 Si: $a(x-2)+b(x+1)\equiv 5(x-5)$, encontrar el valor de: a/b.

A)2 *B)-2* *C)1* *D)-1* *E)-1/2*

08 Señale el valor de $(m-1)^{n-1}$, si:

$$4(2x-1)\equiv m(x+2)+n(x-2)$$

A)128 *B)64* *C)8* *D)16* *E)32*

09 Si: $(a-5)x^2+(b-3)x+2c-14\equiv 0$, calcular el valor de: $E=\sqrt{\sqrt[3]{a+b}+c}$

A)1 *B)3* *C)5* *D)6* *E)9*

10 Si el polinomio:

$$P(x;y)=(9-n)x^2y+mxy^2+3x^2y-2xy^2$$

es idénticamente nulo, calcular: $\sqrt[m]{n^4}$

A)15 *B)14* *C)12* *D)225* *E)144*

11 Si el polinomio

$$P(x;y)=x^{m+n}y^3+x^{2m}y^{n+1}+y^{2n+m}$$

es homogéneo, calcular su grado de homogeneidad.

A)5 *B)6* *C)7* *D)8* *E)9*

12 Dado el polinomio homogéneo:

$$P(x;y;z)=x^ny^3z^{n+1}+xy^nz^m+x^3y^{n+1}z^4$$

calcular: $G.R(x)+G.R(y)+G.R(z)$

A)15 *B)2m* *C)17* *D)* n^2 *E)2m+n*

13 Dado el polinomio homogéneo:

$$P(x;y)=x^ay^{2b+c}+x^{a+b}y^{2c}+x^{a+2c}y^{a-2b}$$

calcular: $a+b+c$, si su grado de homogeneidad es *6*.

A)9 *B)8* *C)7* *D)6* *E)5*

14 Si: $P(x)=x^{a+2}+2x^{b+1}-5x^{c+6}+7$ está completo y ordenado, calcular: $a+2b+3c$

A)12 *B)-12* *C)8* *D)-8* *E)-10*

15 El siguiente polinomio está completo y ordenado en forma descendente:

$$P(x)=x^{2m-10}+3x^{m+n-7}-5x^{3n-2p}$$

Calcular: $E=\sqrt{mnp}+1$

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

(16) Calcular $(m+n+p)$, si el polinomio:

$$P(x)=x^{2m-6}-x^{5m+n-19}+x^{p+n-3}$$

está completo y ordenado en forma descendente.

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

(17) Calcular la suma de coeficientes del siguiente polinomio: $P(x;y)=ax^a+bcx^by^c+dy^d$ si está completo y ordenado respecto a sus dos variables.

A) 5 B) 4 C) 3 D) 2 E) 1

(18) Si se cumple: $\frac{m}{x+2}+\frac{n}{x+3}\equiv\frac{5x+13}{x^2+5x+6}$

señale el valor de: m^n.

A) 4 B) 8 C) 9 D) 27 E) 32

(19) Calcular $(a+b+c)$, si:

$$a(x-1)(x-2)+b(x-1)(x-3)+c(x-2)(x-3)\equiv 2x^2-x+5$$

A) 0 B) 1 C) 2 D) –1 E) –2

(20) Calcular el número de términos del siguiente polinomio completo y ordenado:

$$P(x)=(n-5)x^{n-12}+(n-6)x^{n-11}+(n-7)x^{n-10}+\dots$$

A) 13 B) 12 C) 10 D) 7 E) 6

NOVENA PRACTICA DIRIGIDA

(01) ¿Cuántos valores de «m» hacen que la expresión:

$$E(x;y)=x^{m+3}y^7+5x^9y^{23-m}+72\sqrt{x^m}$$

nos represente a un polinomio:

A) 11 B) 12 C) 13 D) 14 E) 15

(02) Sea: $P(x)=(a^3-7)x^5+ax^2+a^2+1$; un polinomio mónico $(a\in\mathbb{R})$. Calcular el término que no depende de la variable.

A) 2 B) 5 C) 10 D) 17 E) 26

(03) Si luego de efectuar:

$$T(x)=a_1x^{a_1-5}+a_2x^{a_2-6}-a_3x^{a_3-7}+10x^3$$

se obtiene: $mx^3\ (a_1a_2a_3\neq 0)$, calcular el valor de:

$$M=a_1+2a_2+3a_3-m$$

A) 40 B) 39 C) 37 D) 36 E) 35

(04) El producto de los coeficientes del siguiente binomio:

$$H(x;y)=ax^{a+b}y^2+x^9y^2+b^2x^5y^{a-b}-x^5y^5$$

es:

A) -24 B) -28 C) 12 D) 24 E) 28

(05) Sea el polinomio: $P(x)=4x+7$, además: $a_1+a_2+a_3+\dots+a_{10}=35$. Calcular el valor de:

$$F=P(a_1)+P(a_2)+P(a_3)+\dots+P(a_{10})$$

A) 310 B) 300 C) 290 D) 280 E) 270

(06) Se define la expresión «F_m» $(m\in\mathbb{Z}^+)$ como: $F_m(x)=mx+b$. Sabiendo que: $F_m(F_m(0))=F_{m+1}(b)+b$, calcular el valor de:

$$H=F_5(F_3(1))+F_7(F_5(1))+F_9(5)$$

A) 100 B) 95 C) 90 D) 80 E) 75

(07) Halle el término lineal del polinomio mónico $P(x)$ de menor grado $(Gdo(P)>1)$, tal que:

$$P(1)=1;\ P(2)=2;\ P(3)=3\ \wedge\ P(4)=4$$

A) $-x$ B) $-47x$ C) $-48x$ D) $-49x$ E) $-50x$

(08) Si P es un polinomio definido por:

$$P(x-1)=(3mx-4m)^2+(3x-4)^{2m}-x^2+4;\ m\in\mathbb{Z}^+$$

tal que la suma de coeficientes de P es el cuádruple de su término independiente, entonces la suma de coeficientes de dicho polinomio es:

A) 4 B) 8 C) 16 D) 32 E) 64

(09) Si: $F\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=x^{2008}-243x^{2003}+5$,

calcular el valor de: $T=[F(2)]^{F(-1)}$

A) 3 125 B) 625 C) 125 D) 25 E) 5

(10) Si: $P(x+3)=5x+7$

además: $P(A(x)-3)=15x+2$

entonces el valor de $P(A(1))$ es:

A) 32 B) 35 C) 37 D) 81 E) 120

(11) Sabiendo que: $F(x)=\frac{3x}{x-1}$, hallar $F(2x)$ en términos de $F(x)$.

A) $\frac{6F(x)}{F(x)-2}$ B) $\frac{3F(x)}{F(x)+3}$ C) $\frac{3F(x)}{F(x)-3}$ D) $\frac{6F(x)}{F(x)+3}$ E) $\frac{1}{F(x)}$

(12) Si: $A(x)=2x+5$; además:

$$A(B(x)+C(x))=4x-1$$

$$A(B(x)-C(x))=6x+11$$

calcular el valor de: $E=B(4)\times\sqrt[39]{C(-8)}$

A) 1,25 B) $5\sqrt[3]{12}$ C) 10 D) 1 E) 0

13 Sabiendo que: $F(x)=\dfrac{25^x}{25^x+5}$, calcular el valor de:

$$T=F\left(\frac{1}{1001}\right)+F\left(\frac{2}{1001}\right)+...+F\left(\frac{999}{1001}\right)+F\left(\frac{1000}{1001}\right)$$

A) 400 B) 450 C) 500 D) 550 E) 600

14 $\forall x \in \mathbb{R}-\{-1;0;1;2\}$ se define F como:

$$F^2(x)\times F(1-x)=x(x-2)$$

Encuentre el valor de $1-m$, tal que:

$$F(m)=\sqrt[3]{m^2}$$

A) 0,25 B) 0,5 C) 0,75 D) 1 E) 1,25

15 Sea P un polinomio definido por:

$$P(x;y)=nx^my^p+mx^{m-1}y^{p-3}+x^{n-8}$$

tal que si a dicho polinomio le restamos el monomio $12x^3y^4$, su grado absoluto disminuye. Entonces el valor de $mn^{-1}p$ es:

A) 4 B) 3 C) 1 D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{1}{4}$

16 Calcular el valor de «n» para que el grado del polinomio:

$$T(x)=(x^3+7)^{n-1}(5x^2-1)^{n-2}(x^2-7x+2\,008)$$

sea igual a 18.

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

17 Dado el siguiente polinomio homogéneo:

$$P(x;y)=5x^ay^b+7x^by^c+12x^cy^a+x^{13}y^7$$

entonces el valor de $a+b+c$ es:

A) 20 B) 30 C) 40 D) 50 E) 60

18 Si se cumple que:

$$a_0x^{10}+a_1x^9+a_2x^8+...+a_9x+a_{10}=(2x^2+x+1)^5$$

calcular el valor de: $R=\sum_{n=0}^{5}a_{2n}$

A) 530 B) 529 C) 528 D) 527 E) 526

19 Dado el polinomio completo y ordenado descendentemente:

$$P(x)=ax^{b-c^3-2a}-bx^{2(a-b)}+cx-x^{a-b+c^3}$$

Calcular el valor de: $J=P(a)+5^2P(0)$

A) 94 B) 99 C) 100 D) 114 E) 199

20 Sea la expresión matemática «F_i», $i=1;2;3;...;$ definida por: $F_1(x)=\dfrac{1}{1-x}$ y además: $F_{i+1}(x)=F_1(F_i(x))$. Calcular el valor de: $F_{2\,000}(2\,000)$

A) 0 B) 2 000 C) $-\frac{1}{1\,999}$ D) 0,9995 E) 1999

CLAVES

OPERACIONES CON POLINOMIOS I				
01) *	02) *	03) E	04) B	05) *
06) A	07) B	08) C	09) B	10) A
11) C	12) B	13) C	14) C	15) C
16) B	17) C	18) B	19) A	20) B
01) B	02) B	03) A	04) A	05) D

OPERACIONES CON POLINOMIOS II				
01) B	02) C	03) A	04) D	05) B
06) E	07) C	08) B	09) E	10) A
11) A	12) E	13) A	14) A	15) E

POLINOMIOS I				
01) E	02) A	03) A	04) D	05) C
06) C	07) A	08) B	09) A	10) A
11) A	12) A	13) A	14) B	15) B
16) A	17) C	18) C	19) D	20) D
01) A	02) A	03) A	04) B	05) C

POLINOMIOS II				
01) A	02) B	03) A	04) C	05) D
06) C	07) E	08) A	09) D	10) C
11) D	12) B	13) B	14) E	15) E
16) C	17) C	18) B	19) D	20) C
01) B	02) C	03) C	04) D	05) C

GRADOS				
01) D	02) A	03) B	04) B	05) C
06) D	07) A	08) E	09) A	10) D
11) C	12) C	13) C	14)	15) D
16) C	17) D	18) C	19) C	20) C
01) A	02) C	03) A	04) D	05) E

GRADOS Y POLINOMIOS				
01) C	02) C	03) E	04) D	05) E
06) A	07) E	08) D	09) A	10) B
11) D	12) C	13) D	14) A	15) A
16) D	17) E	18) D		

SEPTIMA PRACTICA									
1)A	2)E	3)E	4)A	5)D	6)C	7)B	8)C	9)B	10)D
11)E	12)A	13)B	14)C	15)B	16)E	17)C	18)D	19)B	20)A

OCTAVA PRACTICA									
1)C	2)C	3)B	4)E	5)C	6)D	7)B	8)D	9)B	10)E
11)D	12)D	13)E	14)B	15)D	16)C	17)A	18)C	19)C	20)D

NOVENA PRACTICA									
1)C	2)B	3)B	4)D	5)C	6)B	7)D	8)D	9)A	10)A
11)D	12)C	13)C	14)A	15)C	16)C	17)B	18)C	19)A	20)D

PRODUCTOS NOTABLES

05

OBJETIVOS :

* Conocer aquellas multiplicaciones indicas muy conocidas y utilizadas en el desarrollo del curso de matemáticas.

* Utilizar los productos notables, en forma correcta y cuando sea necesario, para efectuar la multiplicación.

Cuadrado de una suma

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$



Cuadrado de una diferencia

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Cuadrado del primer término, menos el doble producto del primero por el segundo, más el cuadrado del segundo término



Suma por diferencia

$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

Cuadrado del primer término, menos el cuadrado del segundo término.



El trabajo algebraico se simplifica si logramos la habilidad para encontrar algunos productos, sin necesidad de operar la multiplicación.

INTRODUCCIÓN :

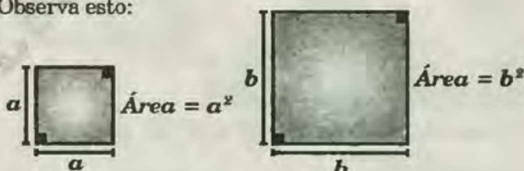
Si nos piden multiplicar ***(a + b) (a – b)*** obtendremos:

$$(a+b)(a+b) = a^2 + ab + ab + b^2$$

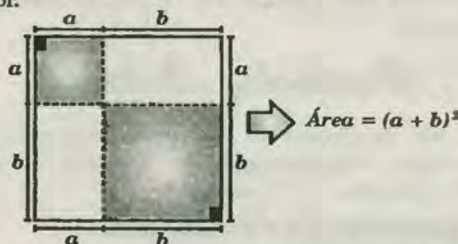
Osea : $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Lo anterior es un resultado obtenido algebraicamente al multiplicar dos binomios. Sin embargo, no es la única manera de obtenerlo. Existe la manera GEOMÉTRICA.

Observa esto:



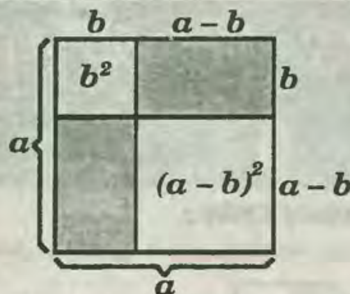
* Ahora, juntemos los cuadrados por una de sus esquinas y formemos imaginariamente un cuadrado mayor.



* Sin embargo el área de ese cuadrado mayor, puede ser obtenida mediante la suma de las áreas que están en él.

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

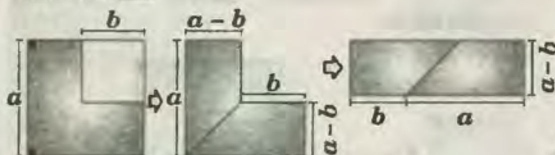
(Diagrama: cuadrado de lado $a+b$ dividido en a^2, ab, ab, b^2; $= a^2 + ab + ab + b^2$)



$$\Rightarrow (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

* Observa el siguiente producto algebraico :

$$(a+b)(a-b) = a^2 + ab - ab + b^2$$
$$= a^2 - b^2$$



• El área del rectángulo es $(a+b)(a-b)$

• La diferencia de áreas es: $a^2 - b^2$(corresponde al primer cuadrado)

• Entonces: $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$; que es el resultado requerido.

Productos Notables

Son los resultados de ciertas multiplicaciones indicadas, que se obtienen en forma directa, sin tener que efectuar la multiplicación.

I) BINOMIO AL CUADRADO :

(Trinomio cuadrado perfecto): El cuadrado de la suma (diferencia) de dos términos es igual al cuadrado del primer término, más (menos) el doble producto de ambos términos más el cuadrado del segundo término.

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

EJEMPLOS:

* $(x+5)^2 = x^2 + 2(x)(5) + (5)^2$

$\Rightarrow (x+5)^2 = x^2 + 10x + 25$

* $(2x-3y)^2 = (2x)^2 - 2(2x)(3y) + (3y)^2$

$\Rightarrow (2x-3y)^2 = 4x^2 - 12xy + 9y^2$

* $(2x+\sqrt{2}y)^2 = (2x)^2 + 2(2x)(\sqrt{2}y) + (\sqrt{2}y)^2$

$= 4x^2 - 4\sqrt{2}xy + 2y^2 = 2(2x^2 - 2\sqrt{2}xy + y^2)$

IDENTIDADES DE LEGENDRE

$$(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2(a^2 + b^2)$$

$$(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$$

EJEMPLOS:

• $(\sqrt{7}+2)^2 + (\sqrt{7}-2)^2 = 2(\sqrt{7}^2 + 2^2) = 22$

• $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2 - \left(x-\frac{1}{x}\right)^2 = 4x\left(\frac{1}{x}\right) = 4$

OJO: $(a+b)^2 = (b-a)^2$

$$(a+b)^4 - (a-b)^4 = 8ab(a^2 + b^2)$$

II) DIFERENCIA DE CUADRADOS :

El producto de la suma de dos términos por su diferencia es igual al cuadrado del primer término menos el cuadrado del segundo.

$$\underset{\text{suma}}{\underset{\Uparrow}{(a+b)}} \quad \underset{\text{diferencia}}{\underset{\Uparrow}{(a-b)}} = a^2 - b^2$$

EJEMPLOS:

• $(x+2y)(x-2y) = x^2 - (2y)^2$

$\Rightarrow (x+2y)(x-2y) = x^2 - 4y^2$

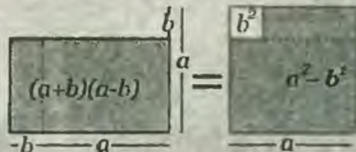
• $(a+6)(a-6) = a^2 - 6^2 = a^2 - 36$

• $(5x^2 - 3y^3)(5x^2 + 3y^3)$

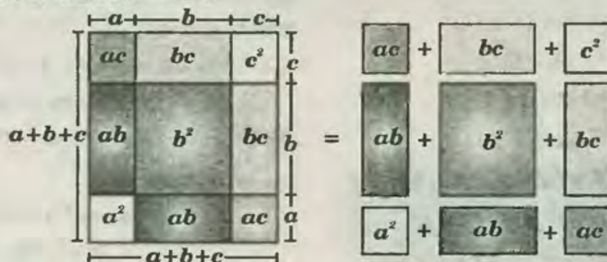
$= (5x^2)^2 - (3y^3)^2 = 25x^4 - 9y^6$

• $(n+3)(n-3) = n^2 - 3^2 = n^2 - 9$

• $(x^2+1)(x^2-1) = (x^2)^2 - 1^2 = x^4 - 1$



III) TRINOMIO AL CUADRADO :



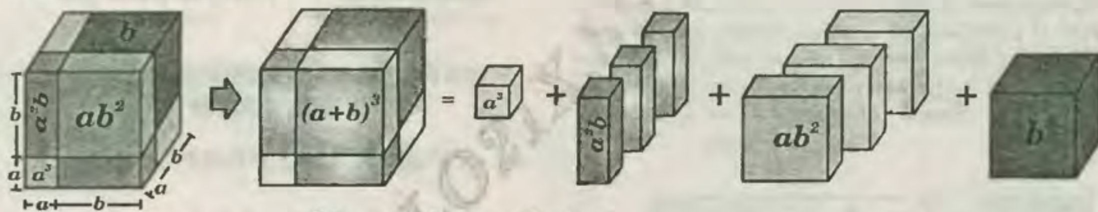
$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + ac + bc)$$

EJEMPLOS:

- $(m+n+2)^2 = m^2 + n^2 + 2^2 + 2(mn + 2m + 2n) \Rightarrow (m+n+2)^2 = m^2 + n^2 + 4 + 2mn + 4m + 4n$

IV) BINOMIOS AL CUBO :

«El cubo de la suma de dos cantidades es igual al cubo de la primera cantidad más el triple del cuadrado de la primera cantidad por la segunda , más el triple de la primera por el cuadrado de la segunda , más el cubo de la segunda»



Forma desarrollada :

$$(a+b)^3 = a^2 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

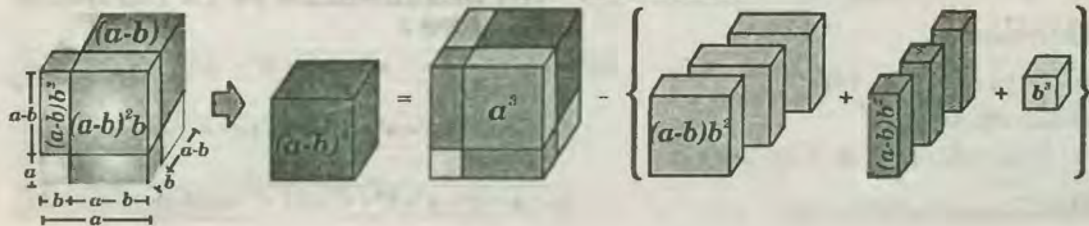
Forma abreviada :

$$(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$$

«El cubo de la diferencia de dos cantidades es igual al cubo de la primera cantidad menos el triple del cuadrado de la primera cantidad por la segunda , más el triple de la primera por el cuadrado de la segunda,, menos el cubo de la segunda»

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$(a-b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a-b)$$



EJEMPLOS:

o $(x+1)^3 = x^3 + 3x^3(1) + 3x(1)^2 + (1)^3$

$\Rightarrow (x+1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$

o $(n-2)^3 = n^3 - 2^3 - 3n(2)(n-2)$

$\Rightarrow (n-2)^3 = n^3 - 8 - 6n(n-2)$

V) SUMA Y DIFERENCIA DE CUBOS :

$$(a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$$

$$(a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$$

EJEMPLO:

- $(x+1)(x^2 - x + 1) = x^3 + 1^3 = x^3 + 1$
- $(a^2 + 4)(a^4 - 4a^2 + 16) = a^6 + 64$
- $(n^2 - 3)(n^4 + 3n^2 + 9) = n^6 - 27$

VI) MULTIPLICACIÓN DE BINOMIOS CON TÉRMINO COMÚN :

El producto de dos binomios con un término común es igual al cuadrado del término común, más la suma "algebraica" de los términos no comunes por el término común, más el producto de los términos no comunes.

Suma "algebraica" de términos no comunes

$$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$$

Cuadrado del término común — **Producto de términos no comunes**

b	bx	ab
x	x^2	ax
	x	a

$$(x+a)(x+b)(x+c) = x^3 + x^2(a+b+c) + x(ab+bc+ac) + abc$$

EJEMPLOS:

01 Efectuar : $(x-8)(x+15)$

RESOLUCIÓN:

$(x-8)(x+15) = x^2 + (-8+15)x + (-8)(15)$

Término común $= x^2 + 7x - 120$

02 Efectuar : $(x-3)(x-6)$

RESOLUCIÓN:

$(x-3)(x-6) = x^2 + (-3-6)x + (-3)(-6)$

$= x^2 - 9x + 18$

03 Efectuar : $(x-7)(x+4)$

RESOLUCIÓN:

$(x-7)(x+4) = x^2 + (-7+4)x + (-7)(4)$

$= x^2 - 3x - 28$

o $(x+2)(x+3) = x^2 + (2+3)x + 2\times 3 = x^2 + 5x + 6$

o $(x-1)(x+7) = x^2 + (-1+7)x + (-1)\times 7 = x^2 + 6x - 7$

NOTA

Al desarrollo de un binomio suma al cuadrado, se le llama también trinomio cuadrado perfecto ***(T. C. P)***.

* Luego:

$$\underbrace{(a+b)^2}_{\text{binomio suma al cuadrado}} = \underbrace{a^2 + 2ab + b^2}_{\text{trinomio cuadrado perfecto}}$$

RECONOCIMIENTO DE UN TRINOMIO CUADRADO PERFECTO

Para saber si se trata de un T .C. P:

a) Se saca la raíz cuadrada a los extremos.

b) El doble producto de los resultados debe coincidir con el término central.

EJEMPLO:

* Reconoce si es un T. C. P : $16a^2 + 24ab^5 + 9b^8$

1) Saca raíz cuadrada a los extremos

$4a \ldots\ldots\ldots\ldots 3b^4$

2) El doble producto de los resultados es:

$$2(4a)(3b^4) = 24ab^4$$

Por lo tanto, si es un T. C. P.

VII) DESARROLLO DE UN TRINOMIO AL CUBO :

$$(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3a^2b + 3a^2c + 3b^2c + 3b^2a + 3c^2a + 3c^2b + 6abc$$

$$(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a+b)(b+c)(a+c)$$

$$(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a+b+c)(ab+bc+ca) - 3abc$$

OTRAS IDENTIDADES

A) IDENTIDAD TRINÓMICA DE ARGAND :

$$(x^2+x+1)(x^2-x+1)=x^4+x^2+1$$

$$(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)=x^4+x^2y^2+y^4$$

GENERALIZANDO:

$$(a^{2n}+a^nb^m+b^{2m})(a^{2n}-a^nb^m+b^{2m})=a^{4n}+a^{2n}b^{2m}+b^{4m}$$

B) IDENTIDAD DE GAUSS :

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac)$$

* de donde :

$$a^3+b^3+c^3-3abc=\frac{1}{2}(a+b+c)\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right]$$

C) IDENTIDAD ESPECIAL :

$$(x+y)(y+z)(z+x)+xyz=(x+y+z)(xy+yz+zx)$$

$$(ab+ac+bc)^2=a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2+2abc(a+b+c)$$

D) IDENTIDAD DE LAGRANGE:

$$(a^2+b^2)(x^2+y^2)=(ax+by)^2+(ay-bx)^2$$

$$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)=(ax+by+cz)^2+(ay-bx)^2+(az-cx)^2+(bz-cy)^2$$

E) IGUALDADES CONDICIONALES:

Si: $a+b+c=0$, entonces se cumple:

$$a^2+b^2+c^2=-2(ab+bc+ca)$$

$$a^3+b^3+c^3=3abc$$

$$(ab+bc+ac)^2=(ab)^2+(ac)^2+(ca)^2$$

$$a^4+b^4+c^4=\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)^2$$

$$a^5+b^5+c^5=-5abc(ab+bc+ac)$$

$$(a^2+b^2+c^2)^2=2(a^4+b^4+a^4)$$

$$\left(\frac{a^3+b^3+c^3}{3}\right)\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{2}\right)=\frac{a^5+b^5+c^5}{5}$$

$$\left(\frac{a^5+b^5+c^5}{5}\right)\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{2}\right)=\frac{a^7+b^7+c^7}{7}$$

$$\frac{(a^3+b^3+c^3)(a^{n-3}+b^{n-3}+c^{n-2})}{3}+\frac{(a^2+b^2+c^2)(a^{n-2}+b^{n-2}+c^{n-2})}{2}=a^n+b^n+c^n$$

F) TEOREMAS :

Sean: $(a,b,c)\subset R$; $\{a,b,c\}\subset Z^+$

Luego:

1) $a^{2m}+b^{2n}+c^{2p}=0 \Leftrightarrow a=b=c=0$

2) $a^2+b^2+c^2=ab+ac+ca \Leftrightarrow a=b=c$

3) $a^3+b^3+c^3=3abc \Leftrightarrow a=b=c$ ó $a+b+c=0$

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1:

Reducir: $(x+y)^2+(x-y)^2$

A) $2x^2$ B) $2y^2$ C) $2x^2+2y^2$
D) $2x^2-2y^2$ E) N.A.

RESOLUCIÓN:

*Desarrollando los binomios se obtendrá:

$$\left(x^2+2xy+y^2\right)+\left(x^2-2xy+y^2\right)$$

*Juntando los términos semejantes, se obtendrá:

$$2x^2+2y^2$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 2 :

Reducir : $(x+y)^2-(x-y)^2$

A) xy B) $4xy$ C) x D) y E) N.A

RESOLUCIÓN:

* Desarrollando:

$$x^2+2xy+y^2-\left(x^2-2xy+y^2\right)$$

$$\Rightarrow x^2+2xy+y^2-x^2+2xy-y^2$$

* Eliminando, se obtendrá: $4xy$

* Entonces: $(x+y)^2-(x-y)^2=4xy$

RPTA : "B"

PROBLEMA 3 :

Simplificar: $E=(a+b)(a-b)+(a+3b)(a-3b)+(a+5b)(a-5b)$

RESOLUCIÓN:

Ejecutando por partes :

* $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

* $(a+3b)(a-3b)=a^2-(3b)^2=a^2-9b^2$

* $(a+5b)(a-5b)=a^2-(5b)^2=a^2-25b^2$

*Luego, reemplazando:

$$E=a^2-b^2+a^2-9b^2+a^2-25b^2$$

$$\Rightarrow E=3a^2-35b^2$$

PROBLEMA 4 :

Simplificar: $K=(a+b)\left(a^2-ab+b^2\right)+(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)$

RESOLUCIÓN:

Usando la suma y diferencia de cubos:

$$(a+b)\left(a^2-ab+b^2\right)=a^3+b^3$$
$$(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)=a^3-b^3$$

* Luego: $K=a^3+b^3+a^3-b^3 \Rightarrow K=2a^3$

PROBLEMA 5 :

Realizar:

$$M=\left[\frac{(x+y)^2-(x-y)^2}{xy}\right]^{\frac{1}{2}}$$

A) 1 B) 2 C) 3 D)4 E)8

RESOLUCIÓN:

*Considerando lo obtenido en el problema dos en "M", se obtendrá:

$$M=\left[\frac{4xy}{xy}\right]^{\frac{1}{2}}=(4)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{4}=2$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 6 :

Calcular:

$$M=[(x+13)(13-x)+(x+12)(x-12)]^{0.5}$$

A)1 B) 2 C) 3 D)4 E)5

RESOLUCIÓN:

* Ordenando para poder aplicar la diferencia de cuadrados:

$$M=[(x+13)(13-x)+(x+12)(x-12)]^{\frac{1}{2}}$$
$$\Rightarrow M=\sqrt{13^2-x^2+x^2-12^2}$$
$$\Rightarrow M=\sqrt{169-144}=\sqrt{25}=5$$

RPTA : "E"

PROBLEMA 7 :

Efectuar:

$$M=(x+1)(x+3)+(x+2)(x+2)-2x^2-7-5x$$

A) 4x B) 2 C) 3x D)2x E)-2x

RESOLUCIÓN:

* Desarrollando los productos de los binomios:

$$M=\left[x^2+(1+3)x+1\times 3\right]+\left[x^2+4x+4\right]-2x^2-7$$
$$\Rightarrow M=x^2+4x+3+x^2+4x+4-2x^2-7-5x$$
$$\Rightarrow M=3x$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 8 :

Calcular: $E=(x+4)(x-2)+(x+6)(x+4)-2x^2$

A) 16 B) -16 C) 24 D) -32 E) 30

RESOLUCIÓN:

*Desarrollando los productos de binomios:

$$E=x^2+2x-8+x^2-2x-24-2x^2$$
$$\Rightarrow E=2x^2-32-2x^2\Rightarrow E=-32$$

RPTA : "D"

PROBLEMA 9 :

Si: $a+b=2$

$ab=1$

dar «a^2+b^2»

A)1 B) 2 C) 3 D)4 E)6

RESOLUCIÓN:

* Buscando un producto notable que relacione a "$a+b$", "ab" y "a^2+b^2", encontraremos a:

$$\boxed{(a+b)^2=a^2+2ab+b^2}$$

ó $\boxed{(a+b)^2=a^2+b^2+2ab}$

* Que al reemplazar datos, se obtendrá:

$$(2)^2=a^2+b^2+2(1)\Rightarrow 4=a^2+b^2+2$$
$$\Rightarrow 4-2=a^2+b^2\Rightarrow 2=a^2+b^2$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 10 :

Si : $a-b=2$

$ab=1$

dar «a^2+b^2»

A)6 B) 7 C) 8 D)9 E)N.A

RESOLUCIÓN :

* Aplicando un criterio análogo al problema anterior, pero con:

$$\boxed{(a-b)^2=a^2-2ab+b^2}$$

ó $\boxed{(a-b)^2=a^2+b^2-2ab}$

* Reemplazando datos:

$$(2)^2=a^2+b^2+2(1)\Rightarrow 4=a^2+b^2-2\Rightarrow 6=a^2+b^2$$

RPTA : "A"

PROBLEMA 11 :

Si : $x+y=\sqrt{5}$

$xy=1$

Calcular : $E=x-y$

A) 1 B) 2 C) 3 D) $\sqrt{5}$ E) $-\sqrt{2}$

RESOLUCIÓN :

* Aplicando lo obtenido en el Problema :

$$\boxed{(x+y)^2-(x+y)^2=4xy}$$

$$\Rightarrow(\sqrt{5})^2-E^2=4(1)\Rightarrow 5-4=E^2\Rightarrow 1=E^2\Rightarrow 1=E$$

RPTA : "A"

PROBLEMA 12 :

Si: $x+\frac{1}{x}=3$

dar: $x^2+\frac{1}{x^2}$

A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) N.A

RESOLUCIÓN:

* Elevando al cuadrado a "$x+\frac{1}{x}=3$"

* Es decir: $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=3^2$

$\Rightarrow x^2+2x\times\frac{1}{x}+\left(\frac{1}{x}\right)^2=9 \Rightarrow x^2+2+\frac{1}{x^2}=9$

$\Rightarrow x^2+\frac{1}{x^2}=9-2 \Rightarrow x^2+\frac{1}{x^2}=7$

RPTA : "B"

PROBLEMA 13 :

Si :

$$a+b=\sqrt{5}$$
$$ab=1$$

Calcular: $E=a^2+b^2$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

RESOLUCIÓN:

Busquemos alguna identidad que involucre únicamente a «$a+b$», «ab» y a «a^2+b^2» ; la cual será:

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$
$$\Rightarrow (a+b)^2=a^2+b^2+2ab$$

• Al reemplazar valores se obtendrá:

$$(\sqrt{5})^2=E+2(1)$$
$$\Rightarrow 5=E+2 \Rightarrow 3=E$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 14 :

Dado: $x-\frac{1}{x}=\sqrt{2}$

Calcular: $x^2+\frac{1}{x^2}$

A) 1 B) 2 C) 8 D) 4 E) 0

RESOLUCIÓN:

- Elevando al cuadrado, ambos miembros del dato , con lo que se obtendrá:

$$\left(x-\frac{1}{x}\right)^2=\sqrt{2}^2$$
$$x^2-2x\left(\frac{1}{x}\right)+\left(\frac{1}{x}\right)^2=2$$

(donde $2x\left(\frac{1}{x}\right) \rightarrow 2$)

$$\Rightarrow x^2+\frac{1}{x^2}=2+2=4$$

RPTA : "D"

PROBLEMA 15 :

Si: $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=2$

Calcular : $P=\left(\frac{a}{b}\right)^{2003}+\left(\frac{b}{a}\right)^{2003}$

A) 2003 B) 1 C) 2 D) 4 E) 4006

RESOLUCIÓN:

• Del dato se obtendrá:

$$\frac{a^2+b^2}{ab}=2$$
$$\Rightarrow a^2+b^2=2ab$$
$$\Rightarrow a^2-2ab+b^2=0$$
$$(a-b)^2=0 \Rightarrow a-b=0$$
$$\Rightarrow a=b$$

• Piden:

$$P=\left(\frac{b}{b}\right)^{2003}+\left(\frac{b}{b}\right)^{2003}$$
$$=1^{2003}+1^{2003}=2$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 16 :

Si: $a=3\sqrt{2}$ y $b=1$;

calcular: $E=(a+b)^4+(a-b)^4$

RESOLUCIÓN:

$$E=\left\{(a+b)^2\right\}^2+\left\{(a-b)^2\right\}^2$$

$$\Rightarrow E=\left(a^2+b^2+2ab\right)^2+\left(a^2+b^2-2ab\right)^2$$

* De los datos:

$a=3\sqrt{2} \Rightarrow a^2(3\sqrt{2})^2=9(2)=18 \wedge b=1 \Rightarrow b^2=1$

* Sustituyendo:

$E=\left[18+1+2(3\sqrt{2})(1)^2\right]+\left[18+1-2(3\sqrt{2})(1)^2\right]$

$=(19+6\sqrt{2})^2+(19-6\sqrt{2})^2$

* Según Legendre:

$E=2\left[19^2+(6\sqrt{2})^2\right] \Rightarrow E=2[361+72]$

$\Rightarrow E=2[433]=866$

PROBLEMA 17 :

Si : $m+n=2$

$m^3+n^3=4$

Calcular: $A=(mn)^5$

A) $\frac{1}{32}$ B) $\frac{32}{243}$ C) $\frac{1}{243}$ D) $\frac{1024}{243}$ E) 1

RESOLUCIÓN:

• Consideremos:

$$(m+n)^3=m^3+n^3+3mn(m+n)$$

(con $(m+n) \rightarrow 2$, $m^3+n^3 \rightarrow 4$, $(m+n) \rightarrow 2$)

$\Rightarrow 2^3=4+3mn(2)$

$\Rightarrow mn=\frac{2}{3}$

• Piden: $A=\left(\frac{2}{3}\right)^5=\frac{32}{243}$

RPTA : "B"

PROBLEMA 18 :

Si: $x-\sqrt[3]{5}=2$

Calcular: $x^3-6x^2+12x-8$

A) 0 B) 5 C) 1 D) 3 E) 2

RESOLUCIÓN:

• Del dato , se obtendrá:

$$x-2=\sqrt[3]{5}$$
$$\Rightarrow (x-2)^3=5$$
$$x^3-3(2)x^2+3(2)^2x-2^3=5$$
$$\Rightarrow \underbrace{x^3-6x^2+12x-8}_{\text{La expresión a calcular}}=5$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 19 :

Si: $x+x^{-1}=\sqrt{5}$, entonces el valor de: x^5+x^{-5}, es:

RESOLUCIÓN:

$\left(x+x^{-1}\right)^2=\sqrt{5}^2 \Rightarrow x^2+2+x^{-2}=5$

$\Rightarrow x^2+x^{-2}=3$..........................(α)

$\left(x+x^{-1}\right)=\sqrt{5}^3$

$\Rightarrow x^3+x^{-3}+3x.x^{-1}\left(x+x^{-1}\right)=5\sqrt{5}$

$x^3+x^{-3}+3\sqrt{5}=5\sqrt{5}$

$\Rightarrow x^3+x^{-3}=2\sqrt{5}$ ....(β)

* De $(\alpha)\times(\beta)$:

$\left(x^2+x^{-2}\right)\left(x^3+x^{-3}\right)=3\left(2\sqrt{5}\right)$

$\Rightarrow x^5+x^{-1}+x+x^{-5}=6\sqrt{5}$

$\Rightarrow x^5+x^{-5}+x+x^{-1}=6\sqrt{5}$

$\Rightarrow x^5+x^{-5}+\sqrt{5}=6\sqrt{5}$

$\Rightarrow \boxed{x^5+x^{-5}=5\sqrt{5}}$

PROBLEMA 20 :

Si: $\left(\frac{x}{y}\right)^n+\left(\frac{y}{x}\right)^n=62$

calcular: $E=\sqrt[3]{\frac{x^n+y^n}{\sqrt{x^n.y^n}}}$

RESOLUCIÓN:

* De la condición:

$\frac{x^n}{y^n}+\frac{y^n}{x^n}=62 \Rightarrow x^{2n}+y^{2n}=62x^ny^n$

* Sumando miembro a miembro $2x^ny^n$:

$x^{2n}+2x^ny^n+y^{2n}=62x^ny^n+2x^ny^n$

$\Rightarrow \left(x^n+y^n\right)^2=64x^ny^n$

$\Rightarrow x^n+y^n=8\sqrt{x^ny^n} \Rightarrow \frac{x^n+y^n}{\sqrt{x^ny^n}}=8$

*Remplazando en E resulta:

$$E=\sqrt[3]{8}=2$$

PROBLEMA 21 :

Si: $x^2+3x-\sqrt{2}=0$

Calcular: $x(x+1)(x+2)(x+3)-2\sqrt{2}$

A) 0 B) 3 C) 2 D) −2 E) $\sqrt{2}$

RESOLUCIÓN:

- Del dato : $x(x+3)=\sqrt{2}$
- Ahora en la expresión pedida :

$$\underbrace{x(x+3)}_{\sqrt{2}}\underbrace{(x+1)(x+2)}_{(x^2+3x+2)}-2\sqrt{2}$$

$$=\sqrt{2}(\sqrt{2}+2)-2\sqrt{2}=2+2\sqrt{2}-2\sqrt{2}=2$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 22 :

Si: $x-y=\sqrt[4]{5}$; $xy=\sqrt{5}$

Calcular: $S=x^2-y^2$

A) 5 B) 0 C) 2 D) − 5 E) 10

RESOLUCIÓN:

* Consideremos la identidad de Legendre:

$$(x+y)^2-(x-y)^2=4xy$$
$$\Rightarrow (x+y)^2-(\sqrt[4]{5})^2=4(\sqrt{5})$$
$$\Rightarrow x+y=\sqrt{5\sqrt{5}}=\sqrt{5}\,\sqrt[4]{5}$$

* Piden:

$$S=(x+y)(x-y)=(\sqrt{5}\times\sqrt[4]{5})(\sqrt[4]{5})=5$$

RPTA : "A"

PROBLEMA 23 :

Si : $a^2+b^2=8$

Calcular el máximo valor de:

$$P=a+b$$

A) 2 B) $2\sqrt{2}$ C) 16 D) $\sqrt{2}$ E) 4

RESOLUCIÓN:

• Consideremos la siguiente identidad de Legendre:

$$(a+b)^2+(a-b)^2=2(a^2+b^2)$$

• Al reemplazar valores se obtendrá:

$$P^2+(a-b)^2=2(8)$$
$$\Rightarrow P=\sqrt{16-(a-b)^2}$$

• Luego para que:

$$P_{máximo}=\sqrt{16-\underbrace{(a-b)^2}_{\text{Este debe ser "0" (lo mínimo)}}}\Rightarrow P_{máximo}=\sqrt{16}=4$$

RPTA : "E"

PROBLEMA 24 :

Si : $a^2+b^2=\sqrt[3]{10}+1$

$ab=\sqrt[3]{100}-\sqrt[3]{10}+1$

Calcular: $M=(a+b)^4-(a-b)^4$

A) 0 B) 32 C) 41 D) 88 E) 9

RESOLUCIÓN:

* Se pide:

$$M=[(a+b)^2]^2-[(a-b)^2]^2$$
$$\Rightarrow M=[(a+b)^2+(a-b)^2][(a+b)^2-(a-b)^2]$$
$$\Rightarrow M=[2(a^2+b^2)]\ [4ab]\Rightarrow M=8(a^2+b^2)ab$$
$$\Rightarrow M=8(\sqrt[3]{10}+1)\ (\sqrt[3]{100}-\sqrt[3]{10}+1)$$
$$\Rightarrow M=\underbrace{8(\sqrt[3]{10}+1)\ (\sqrt[3]{10}^2-\sqrt[3]{10}+1)}_{\text{Esto es una suma de cubos}}$$
$$\Rightarrow M=8(\sqrt[3]{10}^3+1^3)=88$$

RPTA : "D"

PROBLEMA 25 :

Si : $a=\sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt{2}$

$b=\sqrt{2}+\sqrt{3}-2\sqrt{5}$

$c=\sqrt{5}-2\sqrt{3}$

Calcular: $E=a^3+b^3+c^3-3abc$

A) 5 B) −7 C) 0 D) −3 E) −5

RESOLUCIÓN:

* Al sumar los datos se obtendrá :

$$a+b+c=0$$

* Según lo obtenido (igualdad condicional) , se obtendrá que:

$$a^3+b^3+c^3=3abc$$

* Entonces lo pedido será:

$$E=3abc-3abc=0$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 26 :

Simplificar:

$(x^2+x-4)^2-(x-2)(x-1)(x+2)(x+3)$

A) 0 B) x C) −x D) 4 E) −3

RESOLUCIÓN:

Asociando adecuadamente:

$$(x^2+x-4)^2-\underbrace{(x-2)(x+3)}_{(x^2+x-6)}\underbrace{(x-1)(x+2)}_{(x^2+x-2)}$$

* Haciendo: $a=x^2+x$; se obtendrá:

$$(a-4)^2-(a-6)(a-2)$$
$$=(a^2-8a+16)-(a^2-8a+12)$$
$$=a^2-8a+16-a^2+8a-12=4$$

RPTA : "D"

PROBLEMA 27 :

Reducir :

$(x^2-x+1)(x^2+x+1)(x^4-x^2+1)(x^4-1)$

A) 0 B) x^8+1 C) x^8-1 D) $x^{12}-1$ E) $x^{24}-1$

RESOLUCIÓN:

* Efectuando los 2 primeros trinomios por Argand:

$$\underbrace{(x^4+x^2+1)(x^4-x^2+1)}_{(x^8+x^4+1)}(x^4-1)$$

$$=\underbrace{(x^8+x^4+1)(x^4-1)}_{\text{Esto es una diferencia de cubos}}$$

$$=(x^4)^3-1^3=x^{12}-1$$ RPTA : "D"

PROBLEMA 28 :

Si: $\gamma+\gamma^{-1}=1$

Calcular: $E=\gamma^3-\gamma^{-3}$

A) 0 B) −1 C) 1 D) $\sqrt{2}$ E) −2

RESOLUCIÓN:

• En lo pedido:

$$\gamma^3-\frac{1}{\gamma^3}=\left[\gamma-\frac{1}{\gamma}\right]\left[\gamma^2-\gamma\times\frac{1}{\gamma}+\left(\frac{1}{\gamma}\right)^2\right]$$

$$=\left[\gamma-\frac{1}{\gamma}\right]\left[\underbrace{\gamma^2+2\gamma\times\frac{1}{\gamma}+\left(\frac{1}{\gamma}\right)^2}_{\left(\gamma+\frac{1}{\gamma}\right)^2}-\gamma\times\frac{1}{\gamma}\right]$$

$$=\left[\gamma-\frac{1}{\gamma}\right]\left[\left(\gamma+\frac{1}{\gamma}\right)^2-1\right]$$

$$=\left[\gamma+\frac{1}{\gamma}\right][1^2-1]=0$$

RPTA : "A"

PROBLEMA 29 :

Simplificar:

$$\frac{(a-b)^2}{(b-c)(c-a)}+\frac{(b-c)^2}{(c-a)(a-b)}+\frac{(c-a)^2}{(a-b)(b-c)}$$

A) 1 B) a + b + c C) 0 D) abc E) 3

RESOLUCIÓN:

- Hagamos los cambios:

$$a-b=x\ ;\ b-c=y\ ;\ c-a=z$$

$\Rightarrow$ nos piden: $\dfrac{x^2}{y\,z}+\dfrac{y^2}{z\,x}+\dfrac{z^2}{x\,y}$

• Donde M.C.M = xyz , se tiene:

$$\frac{x^3+y^3+z^3}{x\,y\,z}\ \ldots\ldots\ldots\ldots(\alpha)$$

*Pero de los cambios vemos que:

$$x+y+z=0$$

y cuando esto ocurre , se cumple que: $x^3+y^3+z^3=3xyz$ ....¿si?

*Reemplazando en (α) : $\dfrac{3\cancel{xyz}}{\cancel{xyz}}=3$

RPTA : "E"

PROBLEMA 30 :

Si: $x^3+\frac{1}{y^3}=y^3+\frac{1}{z^3}=1$. Hallar el valor de $(xyz)^{102}-1$.

A) 2 B) −1 C) 0 D) 1 E) 2

RESOLUCIÓN:

• De la condición: $x^3+\frac{1}{y^3}=1$

$\Rightarrow x^3y^3+1=y^3$ o también

$x^3y^3=y^3-1$ ....(α)

• Además: $y^3+\frac{1}{z^3}=1\Rightarrow\frac{1}{z^3}=1-y^3$

•Invirtiendo: $z^3=\frac{1}{1-y^3}$ ....(β)

* De $(\alpha)\times(\beta)$:

$$x^3y^3z^3=\cancel{(y^3-1)}\left[\frac{1}{-\cancel{(y^3-1)}}\right]=-1$$

• Elevando a la 34 : $(xyz)^{102}-1$

$\Rightarrow(xyz)^{102}-1=0$

RPTA: "C"

PROBLEMA 31 :

Si: $r^2+\frac{1}{r^2}=3$; $r>0$

Calcular: $E=r^5-\frac{1}{r^5}$

A) 10 B) 11 C) 12 D) 13 E) 14

RESOLUCIÓN:

* Del dato:

$$\underbrace{r^2-2+\frac{1}{r^2}}=3-2 \qquad 2=2(r)\left(\frac{1}{r}\right)$$

$$\left(r-\frac{1}{r}\right)^2=1\Rightarrow r-\frac{1}{r}=1$$

* Elevando al cubo:

$$\left(r-\frac{1}{r}\right)^3=1$$

$$\Rightarrow r^3-\frac{1}{r^3}-3(1)\underbrace{\left(r-\frac{1}{r}\right)}_{1}=1$$

$$\Rightarrow r^3-\frac{1}{r^3}=4$$

• Ahora:

$$\underbrace{\left(r^2+\frac{1}{r^2}\right)}_{3}\times\underbrace{\left(r^3-\frac{1}{r^3}\right)}_{4}=\underbrace{r^5-\frac{1}{r^5}}_{E}+\underbrace{r-\frac{1}{r}}_{1}$$

$\Rightarrow 11=E$

RPTA : "B"

PROBLEMA 32 :

Si a, b y c son números que cumplen las condiciones:

$$a+b+c=20$$
$$a^2+b^2+c^2=300$$

Entonces el valor de :

$$T=(a+b)^2+(a+c)^2+(b+c)^2$$

es:

A) 900 B) 700 C) 500 D)300 E)100

RESOLUCIÓN:

* Se pide:

$$T=(20-c)^2+(20-b)^2+(20-a)^2$$

* Desarrollando y acomodando, se obtendrá:

$$T=3(20)^2-40(a+b+c)+(a^2+b^2+c^2)$$
$$\Rightarrow T=3(400)-40(20)+300=700$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 33 :

Si a y b son números reales que satisfacen la condición: $\frac{a^3}{b^3}+\frac{b^3}{a^3}=2$

Entonces el valor de la expresión:

$$E=\frac{(a^2+b^2)^2+(a^2-b^2)^2}{(a^2+b^2)^2-(a^2-b^2)}$$

es:

A) 3 B) 2 C) 1 D) 0 E) −2

RESOLUCIÓN:

* El dato se puede acomodar, así:

$$a^6-2a^3b^3+b^6=0$$
$$\Rightarrow(a^3-b^3)^2=0\Rightarrow a=b$$

*Luego en lo pedido:

$$E=\frac{(b^2+b^2)^2+(b^2-b^2)^2}{(b^2+b^2)^2-(b^2-b^2)}=1$$

RPTA: "C"

PROBLEMA 34 :

Si a, b y c son números que satisfacen las condiciones:

$$\begin{cases}a+b+c=3\\a^3+b^3+c^3=30\\abc=4\end{cases}$$

Entonces el valor de: $E=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ es:

A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{5}$ D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{1}{6}$

RESOLUCIÓN:

* Se pide : $E=\frac{ab+bc+ca}{abc}$

* Ahora de :

$$(a+b+c)^3=3(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)-2(a^3+b^3+c^3)+6abc$$
$$\Rightarrow 3^3=3(3)(a^2+b^2+c^2)-2(30)+6(4)\Rightarrow a^2+b^2+c^2=7$$

* Además:

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$$
$$\Rightarrow 3^2=7+2(ab+bc+ca)\Rightarrow ab+bc+ca=1$$

* Reemplazando: $E=\frac{1}{4}$

RPTA: "A"

PROBLEMA 35 :

Si a, b y c son números que satisfacen las condiciones:

$$\begin{cases}a^3+b^3+c^3=3\\(a+b)(a+c)(b+c)=-1\end{cases}$$

Entonces el valor de la expresión:

$$N=\frac{a^{-2}+b^{-2}+c^{-2}}{(a^{-1}+b^{-1}+c^{-1})^2}$$, es:

A)1 B)2 C)3 D)4 E)5

RESOLUCIÓN:

* Lo pedido es equivalente a:

$$N=\frac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}{(ab+bc+ca)^2}\text{ ....(I)}$$

* Pero de :

$$(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+3(a+b)(b+c)(c+a)$$
$$\Rightarrow(a+b+c)^3=3+3(-1)\Rightarrow a+b+c=0$$

* Además:

$$(ab+bc+ca)^2=a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2abc(a+b+c)$$
$$\wedge\ a+b+c=0\Rightarrow(ab+bc+ca)^2=a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$$

* Reemplazamos en ***(I)***:

$$N=\frac{a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2}{a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2}=1$$

RPTA : "A"

PROBLEMA 36 :

Si: $U+N+I=1$, entonces el valor de la expresión:

$$\frac{2(U^3+N^3+I^3)-3(U^2+N^2+I^2)}{6UNI-1}$$

es:

A) −1 B) $\frac{1}{6}$ C) $\frac{1}{3}$ D) $\frac{1}{2}$ E) 1

RESOLUCIÓN :

* De:

$$(U+N+I)^3=3(U+N+I)(U^2+N^2+I^2)-2(U^3+N^3+I^3)+6UNI$$
$$\Rightarrow 1^3=3(U^2+N^2+I^2)-2(U^3+N^3+I^3)+6UNI$$
$$\Rightarrow 2(U^3+N^3+I^3)-3(U^2+N^2+I^2)=6UNI-1$$
$$\Rightarrow\frac{2(U^3+N^3+I^3)-3(U^2+N^2+I^2)}{6UNI-1}=1$$

RPTA: "E"

PROBLEMA 37 :

Si a, b y c son números reales no nulos tales que :

$$x=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\text{ ....(I)}$$

$$y=\frac{a^2-(b-c)^2}{(b+c)^2-a^2}\text{ ....(II)}$$

Entonces el valor de la expresión: $T=\frac{1-xy}{x+y}$ es:

A) a+b+c B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

RESOLUCIÓN:

* Aplicando propiedades de razones y proporciones en *(II)*, se obtendrá:

$$\frac{y-1}{y+1}=\frac{a^2-(b^2+c^2)}{2bc} ....(III)$$

*Observando a detalle *(III)* y *(I)*, se obtendrá que:

$$\frac{y-1}{y+1}=-x \Rightarrow y-1=-yx-x \Rightarrow x+y=1-xy$$

* Luego lo pedido será: $T=\frac{1-xy}{1-xy}=1$

RPTA: "B"

PROBLEMA 38 :

Si *U,N,I* son números reales no nulos que satisfacen las condiciones:

$$\begin{cases}(UN)^2+(NI)^2+(IU)^2=49\\ UN+NI+IU=-7\end{cases}$$

Entonces el valor de:

$F=\frac{(U+N-I)^3+(N+I-U)^3+(I+U-N)^3}{U^3+N^3+I^3+UNI}$ es:

A) -24 B) -12 C) -6 D) 8 E) 9

RESOLUCIÓN:

* Como:

$$(UN+NI+IU)^2=(UN)^2+(NI)^2+(IU)^2+2UNI(U+N+I)$$

$$\Rightarrow(-7)^2=49+2UNI(U+N+I)$$

$$\Rightarrow UNI(U+N+I)=0 \text{ pero, } UNI\neq 0$$

$$\Rightarrow U+N+I=0 \Rightarrow U^3+N^3+I^3=3UNI$$

* Luego:

$$F=\frac{(U+N-I)^3+(N+I-U)^3+(I+U-N)^3}{U^3+N^3+I^3+UNI}$$

$$\Rightarrow F=\frac{(-I-I)^3+(-U-U)^3+(-N-N)^3}{U^3+N^3+I^3+UNI}$$

$$\Rightarrow F=\frac{-8(U^3+N^3+I^3)}{U^3+N^3+I^3+UNI}=-\frac{-8(3UNI)}{3UNI+UNI}=-6$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 39 :

Calcular: $x=\sqrt[3]{1+\frac{2\sqrt{7}}{3\sqrt{3}}}+\sqrt[3]{1-\frac{2\sqrt{7}}{3\sqrt{3}}}$

A) 2 B) 3 C) 4 D) 1 E) 5

RESOLUCIÓN:

*Elevando al cubo:

$$x^3=1+\frac{2\sqrt{7}}{3\sqrt{3}}+1-\frac{2\sqrt{7}}{3\sqrt{3}}+3\sqrt[3]{1-\frac{4(7)}{9(3)}}(x)$$

$$\Rightarrow x^3=2+3\sqrt[3]{\frac{-1}{27}}x \Rightarrow x^3=2+3\left(\frac{-1}{3}\right)x$$

$$\Rightarrow x^3=2-x \Rightarrow x^3+x=2$$

* Tanteando: $x=1$

RPTA: "D"

PROBLEMA 40 :

Si el polinomio :

$$P_{(x)}=27x^6+27x^5+mx^4-17x^3+nx^2+3x-1$$

es un cubo perfecto, entonces el valor de $T=n+m$ es:

A) -24 B) -18 C) -12 D) 12 E) 24

RESOLUCIÓN:

* Como $P_{(x)}$ es un cubo perfecto, se deduce que debe ser de la siguiente forma: $P(x)=(3x^2+bx-1)^3$

* Luego de su desarrollo:

$$3bx(-1)^2=3x \Rightarrow b=1$$

* Entonces: $P(x)=(3x^2+x-1)^3$

* Evaluando para: $x=-1$, se obtendrá:

$$(3-1-1)^3=27-27+m+17+n-3-1$$

$$\Rightarrow m+n=-12$$

RPTA: "C"

PROBLEMA 41:

Halle el valor numérico de:

$$P=\left(\frac{n^{-3}+m^{-3}}{m^{-3}n^{-3}}\right)^{-1}$$

si $m+n=\sqrt[3]{12}$; $mn=2\sqrt[3]{18}$

A) -24 B) -12 C) $-\frac{1}{24}$ D) $\frac{1}{24}$ E) $\frac{1}{12}$

RESOLUCIÓN:

*Reduciendo:

$$P=\left(\frac{n^{-3}+m^{-3}}{m^{-3}n^{-3}}\right)^{1}=\left(\frac{\frac{m^3+n^3}{m^3n^3}}{\frac{1}{m^3n^3}}\right)^{-1}=\frac{1}{m^3+n^3}$$

Datos: $m+n=\sqrt[3]{12} \wedge mn=2\sqrt[3]{18}$

Si: $m+n=\sqrt[3]{12}$

Elevando al cubo: $(m+n)^3=\sqrt[3]{12}^3$

Efectuando: $m^3+n^3+3\underset{2\sqrt[3]{18}}{mn}\underset{\sqrt[3]{12}}{(m+n)}=12$

Luego: $m^3+n^3+36=12$

Reduciendo: $m^3+n^3=-24$

**Entonces :* $P=-\frac{1}{24}$

RPTA : "C"

PRIMERA PRACTICA DIRIGIDA

PRODUCTOS NOTABLES I-(NIVEL BÁSICO)

01 Desarrollar cada uno de las siguientes expresiones:

- $(x+2)^2=$ .... • $(x-2)^2=$ ....
- $(x-7)^2=$ .... • $(x+4)(x-4)=$ ....
- $(2x+3)^2=$ .... • $(x+6)(x-6)=$ ....
- $(x+5)^2=$ .... • $(x+1)(x-1)=$ ....

02 Reducir :

$$(m+n)(m-n)+n\times n$$

A) m^2 B) n^2 C) 0 D) 1 E) 2n

03 Reducir : $(x+3)^2-x^2-6x$

A) 9 B) -9 C) 3 D) 0 E) 12

04 Reducir : $(x+5)(x-5)-x^2$

A) 5 B) 25 C) -25 D) 0 E) -5

05 Reducir: $(x+1)^2+(x-1)^2$

A) $2x^2-2$ B) $2x^2+2$ C) $2x^2$ D) 2 E) 0

06 Efectuar: $(x+3)^2-(x-3)^2$

A) 12x B) 6x C) -6x D) $2x^2+18$ E) 0

07 Efectuar: $(4x+5)(4x-5)+25$

A) $4x^2$ B) $16x^2$ C) $8x^2$ D) $10x^2$ E) x^2

08 Efectuar:

$$(x+3)(x-3)+(7+x)(7-x)$$

A) 40 B) 49 C) x^2 D) $2x^2$ E) 0

09 Efectuar: $(x-6)^2$

A) $x^2+12x+36$ B) $x^2-12x+12$ C) $x^2-12x+36$ D) x^2-1 E) x^2+1

10 Efectuar: $(x+7)(x-7)$

A) x^2-14 B) x^2-49 C) x^2-7 D) x^2-1 E) x^2

11 Reducir:

$$E=(a+b)(a-b)+b\times b$$

A) a^2-b^2 B) b^2 C) a^2 D) a E) b-a

(12) Reducir: $(x-2)^2 - x^2 + 4x$

A) 4 B) 1 C) –2
D) 0 E) 6

(13) Reducir: $(x-4)(x+4) - x^2$

A) –4 B) 4 C) –16
D) 2 E) –2

(14) Reducir:

$$(a+1)(a-1)(a^2+1)$$

A) a^4 B) $a^4 - 2$ C) $a^4 - 1$
D) $a^2 - 1$ E) 0

(15) Reducir: $(x+1)(x-1)(x^2+1)$

A) x^4 B) $x^4 - 1$ C) $x^4 - 2$
D) $x - 1$ E) $x + 1$

(16) Calcular : $\sqrt{(8+x)(8-x)-(x+6)(x-6)-2x^2}$

A) 10 B) 9 C) 8
D) 7 E) 5

(17) Reducir: $\sqrt{(x+13)(x-13)+(12+x)(x-12)}$

A) 3 B) 4 C) 5
D) 6 E) 7

(18) Efectuar:

$$(x-2)(x+2)+(x+3)(3-x)$$

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

(19) Reducir: $\sqrt{(x+1)^2-(x+2)^2-(x+3)^2+(x+4)^2}$

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

(20) Reducir : $\sqrt[3]{(x+6)^3-(x+3)^3-6x}$

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) –2

TAREA DOMICILIARIA

(01) Reducir: $(x+5)^2 + (x-5)^2$

A) $2x^2 + 50$ B) $2x^2 + 20$ C) 50
D) $x - 5$ E) $x + 5$

(02) Hallar la suma de coeficientes de "*R*":

$$R = (7x - 3y)^2$$

A) 49 B) 21 C) 16
D) 5 E) 4

(03) Luego de reducir , señalar el mayor coeficiente de "*N*".

$$N = (2a + 5b)^2 + (a+b)(a-b)$$

A) 20 B) 25 C) 24
D) 0 E) 40

(04) Hallar la suma de coeficientes de "*Q*"

$$Q = (5x - 6y)^2$$

A) 121 B) –1 C) 1
D) 0 E) –1

(05) Luego de reducir, señalar el mayor coeficiente de "*P*".

$$P = (2x+3y)^2 + (x+y)(x-y)$$

A) 8 B) 12 C) 5
D) 2 E) –2

SEGUNDA PRACTICA DIRIGIDA

PRODUCTOS NOTABLES II-(NIVEL BÁSICO)

(01) Desarrolla cada uno de los siguientes productos notables.

- $(x+5)(x+3) =$ ....
- $(x+7)(x+1) =$ ....
- $(m+5)(m-2) =$ ....
- $(m+2)(m-6) =$ ....
- $(2x+5)^2 =$ ....

(02) Efectuar: $(x-7)(x-9)$. Dar como respuesta la suma de coeficientes:

A) 47 B) 48 C) 78
D) 63 E) 70

(03) Reducir:

$$A = (x-3)(x-2) - (x-6)(x+1)$$

A) $-10x$ B) $-10x - 10$ C) 12
D) –12 E) 0

(04) Reducir:

$$E = (x-6)(x+4) - (x+1)(x-3)$$

A) –21 B) 21 C) 27
D) –27 E) 0

(05) Efectuar: $(x-6)(x-7)$. Dar como respuesta la suma de coeficientes:

A) 42 B) 30 C) 29
D) –13 E) 40

(06) Reducir:

$$N = (x-2)(x-1) - (x-4)(x+1)$$

A) 6 B) 2 C) $6x + 6$
D) $-6x - 2$ E) 0

(07) Reducir:

$$R = (x+8)(x-6) - (x+4)(x-2)$$

A) 56 B) $4x - 40$ C) 40
D) –40 E) 0

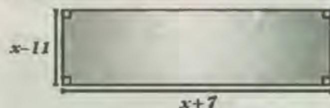
(08) Efectuar: $(x-4)(x-5)$. Dar como respuesta la suma de coeficientes:

A) –9 B) 20 C) 11
D) 12 E) 0

(09) Efectuar: $(a-12)(a+6)$. Dar como respuesta la suma de coeficientes:

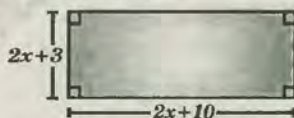
A) –72 B) –78 C) –77
D) –67 E) 0

(10) Calcular el área de la siguiente figura:



A) $x^2 + 4x + 77$ B) $x^2 - 4x - 77$
C) $x^2 - 4x + 77$ D) $x^2 + 4x - 77$
E) 1

(11) Determinar el área del siguiente rectángulo.



A) $2x^2 + 26x + 30$
B) $4x^2 + 26x + 30$
C) $4x^2 + 30x + 26$
D) $2x^2 + 30x + 26$
E) 30

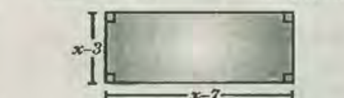
(12) Cuál es la suma de áreas de las figuras:



A) $81 + x^2$
B) $2x^2 + 6x + 90$
C) $6x + 81$
D) $2x^2 - 6x + 90$
E) $6x + 90$

(13) Calcular la suma de áreas de:





A) $x^2 - 55$ B) $x^2 + 55$ C) $x + 55$
D) $x - 55$ E) $x^2 + 6x + 37$

(14) Reducir:

$$(x+5)^2 - (x+3)(x+7)$$

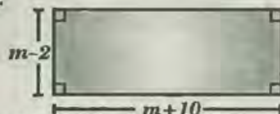
A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

15 Simplificar:

$$(x+5)(x-2)-x^2$$

A) $3x$ B) -10 C) $3x-10$
D) $3x+10$ E) $-10-3x$

16 Calcular el área de la siguiente figura:



A) $m^2-20m+8$
B) $m^2-8m-20$
C) $m^2+8m+20$
D) $m^2+8m-20$
E) $m^2+20m-8$

17 Efectuar:

$$(x+2)^2-(x+1)(x+3)$$

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

18 Reducir:

$$(2x+3)^2+(1-2x)(1+2x)-10$$

A) $12x$ B) $10x$ C) $8x$
D) $6x$ E) $4x$

19 Efectuar:

$$(x+25)(x+1)-(x+5)^2$$

A) $4x$ B) $8x$ C) $12x$
D) $16x$ E) $20x$

20 Reducir:

$$(x+3)(x+7)-(x+1)(x+9)$$

A) 2 B) 6 C) 10
D) 12 E) 14

TAREA DOMICILIARIA

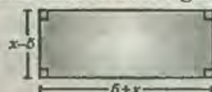
01 Efectuar: $(x-6)(x-7)$. La suma de coeficientes es:

A) -13 B) 42 C) 29
D) 30 E) 0

02 Efectuar: $(x-9)(x+12)$. Dar como respuesta la suma de coeficientes.

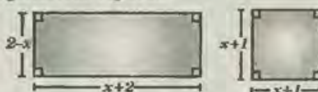
A) 3 B) -108 C) -105
D) -104 E) 0

03 Calcular el área de la siguiente figura:



A) $25+x^2$ B) $25-x^2$ C) $x+25$
D) $x-25$ E) x^2-25

04 Calcular la suma de áreas de las siguientes figuras



A) $x+5$ B) $x+2$ C) $2x+5$
D) $5x+2$ E) 5

05 Reducir: $(x+4)(x-4)-x(x)$

A) 16 B) -16 C) $2x^2$
D) 0 E) 4

TERCERA PRACTICA DIRIGIDA

PRODUCTOS NOTABLES I-(NIVEL INTERMEDIO)

* Indicar el equivalente en cada caso:

01 $(2-\sqrt{2})^2$

A) $6-\sqrt{2}$ B) 2 C) $4-2\sqrt{2}$
D) $2(3-\sqrt{2})$ E) $2(3-2\sqrt{2})$

02 $(2x^3+5)^2$

A) $4x^6+25$
B) $4x^6+20x^3+25$
C) $2x^6+20x^3+25$
D) $4x^6+10x^3+25$
E) $2x^6-10x^3+25$

03 $(3a^5-3)^2$

A) $9a^{10}-9$
B) $9a^{10}-9a^5+9$
C) $9a^{10}-18a^5+9$
D) $3a^{10}-18a^5+9$
E) $a^{10}-9a^5-9$

04 $(x+4)^2+(x-4)^2-2(x^2-4)$

A) 40 B) 20 C) 24
D) x^2 E) 20

05 $(2a+3)(2a-3)(4a^2+9)+81$

A) $16a^4-18a^2+81$
B) 81
C) $16a^2$
D) $16a^4$
E) 7

06 $\sqrt[4]{1+(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)}$

A) 1 B) x^8 C) x^2
D) x^2+1 E) x^4

07

$$(x+1)(x+2)+(x+2)(x+3)-2(x-5)(x-2)-x$$

A) 28 B) $x^2+4x+28$ C) $2x^2-12$
D) $x+28$ E) $x-28$

08 Efectuar:

$$(x+1)^3-(x-1)^3-6x^2$$

A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 6

09 Efectuar:

$$A=(a+2m)^3+(a-2m)^3-2a(a^2+12m^2)$$

A) a B) -1 C) 0
D) m E) $-2m$

10 $(x^2+6)(x^2-5)-(x^2+4)(x^2-7)$

A) x^4+x^2 B) $4x^2-2$ C) $4x^2+2x$
D) 12 E) x^2-2

11 Si: $ab=4$, $a^2+b^2=17$

Hallar: $(a+b)$

A) 5 B) 3 C) 4
D) 2 E) 1

12 Si: $x+\frac{1}{x}=4$

Calcular: $x^3+\frac{1}{x^3}$

A) 50 B) 64 C) 12
D) 52 E) 40

13 Calcular: $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$

Si: $a+b=\sqrt{3}$; $ab=2$

A) -4 B) $2/3$ C) $-1/2$ D) $-3/4$

14 Efectuar: $R=(t+2)^3-(t-2)^3-12t^2$

A) 12 B) 14 C) 16
D) 18 E) 20

15 Efectuar: $E=(x+y)^3-(x-y)^3-2y(3x^2+y^2)$

A) 0 B) 1 C) 2
D) 3 E) 4

16 Si: $a^3+b^3=3$ y $ab(a+b)=8$

Calcular: $(a+b)$

A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 6

17 La diferencia de dos números es $\sqrt[3]{3}$ y su producto $\sqrt[3]{9}$; calcular la diferencia de sus cubos.

A) 12 B) 10 C) 13
D) 15 E) 17

18 Si: $a^2+b^2=45$

$ab=18$

Hallar: a^3-b^3

A) 170 B) 179 C) 183
D) 189 E) 200

19 Si: $a+b=6$; $a^2+b^2=20$

Calcular: $E=\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{a}$

A) 7 B) 8 C) 9
D) 10 E) 12

(20) Efectuar : $(9x^2+3x+1)(3x-1)$

A) $9x^2-1$ B) $9x^2+1$ C) $27x-1$
D) $27x^3+1$ E) $27x^3-1$

TAREA DOMICILIARIA

(01) Efectuar:

$$(\sqrt[3]{10}-\sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{100}+\sqrt[3]{20}+\sqrt[3]{4})$$

A) 3 B) 6 C) 8
D) 10 E) 12

(02) Efectuar :

$$(x-1)^2(x^2+x+1)^2-(x^6+1)$$

A) $2x^3$ B) $-2x^3$ C) $3x^2$
D) $-3x^2$ E) x^3

(03) Efectuar: $(x+2)^3-6x(x+2)-8$

A) x^3 B) x^4 C) x^5
D) x^6 E) x^2

(04) Efectuar:

$$\frac{\sqrt[3]{a^3+3ab(a+b)+b^3}-(a-b)}{\sqrt[3]{a^3-3ab(a-b)-b^3}+(a+b)}$$

A) a/b B) b/a C) ab
D) a E) b

(05) Si: $a+\frac{1}{a}=6$; hallar: $a^3+\frac{1}{a^3}$

A) 195 B) 198 C) 200
D) 205 E) 210

CUARTA PRACTICA DIRIGIDA

PRODUCTOS NOTABLES II-(NIVEL INTERMEDIO)

(01) Efectuar:

$$M=(x+2)^2+(x+4)^2-2(x+3)^2$$

A) 0 B) $2x$ C) 2
D) -1 E) $2x-1$

(02) A qué es igual:

$$E=\sqrt{(x-y)^2+4xy}\ ;x>y>0$$

A) $x+y$ B) x C) xy
D) 0 E) $x-y$

(03) Efectuar:

$$R=\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2-\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2;\ \forall x;\ y\in R^+$$

A) $4xy$ B) $\sqrt[4]{xy}$ C) 0 D) $x+y$ E) $2x+2y$

(04) Efectuar:

$$R=\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)\times\left(\sqrt{5-2\sqrt{6}}\right)+1$$

A) 1 B) 2 C) $\sqrt{5}$
D) $2\sqrt{6}$ E) $\sqrt{3}$

(05) Efectuar:

$$S=(x+6)^2-(x+8)(x+4)+1$$

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

(06) Reducir:

$$E=\frac{(x+9)^2-(x+13)(x+5)-2}{(x+11)(x+8)-(x+15)(x+4)}$$

A) 1/2 B) 1 C) 2
D) 4 E) 1/4

(07) Si se cumple:

$$(a+b)^3=a^3+b^3$$

Hallar: a/b

A) 1 B) -1 C) 2
D) -2 E) 1/2

(08) Si: $\left(a+\frac{1}{a}\right)^2=3$

Hallar el valor de $a^3+\frac{1}{a^3}$

A) 27 B) 6 C) 12
D) 4,5 E) 0

(09) Si: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{4}{x+y}$

Calcular el valor de:

$$\frac{x^2-y^2}{xy}+\frac{xy}{x+y}+\frac{(x+y)^2}{x^2}$$

A) $\frac{x+8}{2}$ B) $\frac{x+4}{2}$ C) $\frac{x+y}{2}$ D) $\frac{x+3y}{2}$ E) 1

(10) Dada la expresión:

$$(a+2b)^2+(a-2b)^2=8ab$$

Hallar el valor de: $M=\frac{ab+2b^2}{a^2}$

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

(11) Si: $x+\frac{1}{x}=\sqrt{7}$

Calcular: $x^4+\frac{1}{x^4}$

A) 34 B) 23 C) 47
D) 49 E) 45

(12) Simplificar:

$$(x^2+5x+5)^2-(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$$

A) 0 B) 1 C) 2
D) 3 E) 4

(13) Efectuar:

$$E=(2x+5y)^2-(2x-5y)^2-36xy$$

A) xy B) $8xy$ C) $4xy$
D) $6xy$ E) $12xy$

(14) Si : $x^2+5x-\sqrt{3}=0$
Calcular: $x(x+1)(x+4)(x+5)-4\sqrt{3}$

A) 2 B) 3 C) 5
D) 7 E) 9

(15) Resolver:

$$M=\sqrt{(1800)^2-(1799)^2+(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}$$

A) 40 B) 36 C) 60
D) 18 E) 72

(16) Si a y b son números reales tales que $a^2+b^2=1$, entonces el valor de a^6+b^6 es:

A) a^3+b^3 B) 1 C) 3
D) a^3-b^3 E) $1-3a^2b^2$

(17) Si : $x^2+1=3x$
Hallar : x^3+x^{-3}

A) 36 B) 24 C) 18
D) 29 E) 31

(18) Si: $\left(n+\frac{1}{n}\right)^2=7$

Hallar el valor de: $n^3+\frac{1}{n^3}$

A) $5\sqrt{7}$ B) $\sqrt{7}$ C) 7 D) $2\sqrt{7}$ E) $4\sqrt{7}$

(19) Simplificar:

$$P=\left(\frac{a+b}{a-b}+\frac{a-b}{a+b}\right)\left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)$$

A) 1 B) 2 C) a
D) b E) ab

(20) Si: $\sqrt{m+n}+\sqrt{m-n}=n$

Calcular: $\sqrt{m+n}-\sqrt{m-n}$

A) m B) $2n$ C) 0
D) 2 E) 1

TAREA DOMICILIARIA

(01) Efectuar:

$$E=(x+2y)^2-(x-2y)^2-4xy$$

A) xy B) $3xy$ C) $4xy$
D) $6xy$ E) $9xy$

(02) Reducir:

$$R=(a+b)^2-(b-a)^2+(a-2b)^3-a^3-4b^3$$

A) a B) b C) 0
D) $2ab$ E) ab

(03) El valor de: $\left(\sqrt{5+\sqrt{24}}+\sqrt{5-\sqrt{24}}\right)^2$ es igual a:

A) 6 B) 8 C) 10
D) 12 E) 14

(04) Luego de efectuar:

$E=(x+1)(x+2)+(x+3)(x+4)-2x(x+5)$ se obtiene:

A) 15 B) 14 C) 13
D) 12 E) 11

(05) Si : $m=2a+2b+2c$
Calcular:

$$\frac{m^2-(m-a)^2-(m-b)^2-(m-c)^2}{m^2+a^2+b^2+c^2}$$

A) $a+b+c$ B) 1 C) $a^2+b^2+c^2$
D) abc E) -1

QUINTA PRACTICA DIRIGIDA

PRODUCTOS NOTABLES III-(NIVEL INTERMEDIO)

01 Reducir: $\frac{x^3-27}{x^2+3x+9}$

A) $x+3$ B) $x-3$ C) $x+27$
D) $x-27$ E) $x-9$

02 Si: $x^3-y^3=m$; $x-y=n$, entonces, ¿Cuál es el valor de "xy"?

A) $\frac{m^2-n}{3n}$ B) $\frac{m-n^2}{3}$ C) $\frac{m-n^2}{3n}$ D) $\frac{m^2-n^2}{n}$ E) $\frac{m+n^2}{3n}$

03 Reducir:

$$(x+3)(x^2-3x+9)+(x^2+3x+9)(x-3)$$

A) x^3 B) 18 C) $2x^3$
D) 54 E) 27

04 Reducir:

$$(x+2)(x-2)(x^2-2x+4)(x^2+2x+4)$$

A) x^3+64 B) x^3-64 C) x^6+64
D) x^6-64 E) x^6+16

05 Luego de efectuar:

$$R=(\sqrt[3]{7}-\sqrt[3]{5})(\sqrt[3]{49}+\sqrt[3]{35}+\sqrt[3]{25})+3$$

Indique lo correcto:

A) $R+1=0$ B) $2<R<3$ C) $R\in N$
D) $R^2+1=3$ E) $R-1=7$

06 Teniendo en cuenta que:

$$a+b=2ab=1$$

calcular: $R=\frac{a^4+b^4}{a^3+b^3}$

A) 0 B) -1 C) 1
D) $1/2$ E) -2

07 Calcule usted el valor de:

$$T=\frac{(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

A) -3 B) -1 C) 0
D) 1 E) 3

08 Sabiendo que:

$$a+2b+3c=0$$

Indique el valor de:

$$\frac{(a+b)^3+(b+2c)^3+c^3}{(a+b)(b+2c)c}$$

A) 6 B) 3 C) 1
D) -3 E) -6

09 Si: $a+b+c=0$

efectuar: $R=\frac{2a^2+b^2+c^2}{ab+ac+bc}$

A) $-3a$ B) -3 C) $3a$
D) 3 E) -1

10 Si: $a+b+c=6$

Reducir: $R=\frac{(a-1)^3+(b-2)^3+(c-3)^3}{(a-1)(b-2)(c-3)}$

A) -3 B) -2 C) 0
D) 2 E) 3

11 Hallar el valor de:

$$(a+b)^2+(b+c)^2+(a+c)^2-(a+b+c)^2$$

Si: $a^2+b^2+c^2=7$

A) 5 B) 6 C) 7
D) 8 E) 9

12 si: a ; b ; $c\in\mathbb{R}$; y además se verifica:

$$a^2+b^2+c^2+21=2(a+2b+4c)$$

Calcular el valor de "abc"

A) 1 B) 2 C) 4
D) 8 E) 16

13 Si: $a+b+c=0$

Efectuar:

$$N=\frac{a(a^2+bc)+b(b^2+ac)+c(c^2+abc)}{(a+b)(a+c)(b+c)}$$

A) $-3abc$ B) -3 C) $-6abc$
D) -6 E) 3

14 Si se cumple: $a+a^{-1}=\sqrt{6}$:

Calcular el valor de:

$$\sqrt{a^2+a^{-2}}+(a^3+a^{-3})^2$$

A) 54 B) 56 C) 58
D) 60 E) N.A.

15 Si: $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}=0$

entonces: $L=\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3$

es equivalente a:

A) $(abc)^2$ B) $\sqrt[3]{abc}$ C) $(abc)^3$ D) $3\sqrt{abc}$ E) abc

16 Efectuar:

$$(x+y)^2(x^2-xy+y^2)^2-(x-y)^2(x^2+xy+y^2)^2$$

A) $4x^3y^3$ B) $3x^3y^3$ C) $2x^3y^3$
D) x^3y^3 E) $4xy$

17 Encontrar el valor de:

$$E=(x-y)(x^2+xy+y^2)+y(3x^2+3xy+2y^2)$$

para: $x=3-2\sqrt{2}$; $y=3+2\sqrt{2}$

A) 32 B) 27 C) 0
D) 36 E) 216

18 Efectuar:

$$S=(x^2+2)^2(x^4-2x^2+4)^2-(x^6+8)(x^6-8)-128$$

A) $10x^6$ B) 0 C) $16x^3$
D) $10x^3$ E) $16x^6$

19 Si: $xy^{-1}+yx^{-1}=2$

calcular: $\frac{(x+y)^3}{xy^2}$

A) 6 B) 7 C) 8 D) 27 E) 1

20 Si: $x^2-x+1=0$

Calcular el valor de: $F=x^{14}+x^{-8}$

A) -2 B) -1 C) 0
D) 1 E) 2

TAREA DOMICILIARIA

01 Halle el valor numérico de:

$$\sqrt{(x+4)(x+2)+1}$$

para: $x=1997$

A) 1996 B) 1997 C) 1998
D) 1999 E) 2000

02 Calcular el valor numérico de:

$$(a-b)[(a+b)^2+2ab+(a-b)^2]+2b^3$$

Si: $a=\sqrt[3]{4}$ $b=\sqrt[3]{\sqrt[3]{2}-1}$

A) 2 B) 4 C) 8
D) 16 E) 12

03 Si x; y; z son enteros diferentes de cero, entonces si $x+y+z=0$ se cumple:

A) $x^3+y^3+z^2=8xyz$
B) $x^3+y^3+z^3=3xyz$
C) $x^2+y^2+z^2=xyz$
D) $x^2+y^2+z^2=4xyz$
E) $x^3+y^2+z^3=0$

04 Si: $\frac{x^2}{y}-\frac{y^2}{x}=3(x-y)$

Determinar: $\frac{4(x^8+y^8)}{(x^2y^2)^2}$.

A) 6 B) 8 C) 12
D) 16 E) 1

05 Si: $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{z}=0$, calcular "$n$" de:

$$\left[\frac{x+y+z}{\sqrt[3]{xyz}}\right]^{4n}=27^{n+2}$$

A) 6 B) 5 C) 4
D) 3 E) 2

SEXTA PRACTICA DIRIGIDA

01 Realizar:

$$B=\frac{(3x+4y)^2-(3x-4y)^2}{x\,y}$$

A) 4 B) 12 C) 36
D) 48 E) 72

02 Si: $a^2+b^2+c^2=300$

$a + b + c = 20$

Calcular: $(a+b)^2 + (b+c)^2 + (a+c)^2$

A) 400 B) 500 C) 600
D) 700 E) 800

(03) Efectuar:

$V=(x^2+x+3)(x^2+x+2)-(x^2+x+1)(x^2+x+4)$

A) 2 B) −2 C) $6x$
D) $-6x$ E) 1

(04) Si: $x + y = 5$

$x^2 + y^2 = 25$

Hallar : $x-y$

A) 3 B) 5 C) 7
D) 9 E) N.A.

(05) Si: $x - y = 2 \wedge xy = 3$

Hallar : $x + y$

A) 2 B) 4 C) 8
D) 6 E) N.A.

(06) Reducir: $M = \dfrac{a^4-b^4}{(a^2+b^2)(a-b)}$;

si: $a + b = 5$

A) 5 B) 3 C) 7
D) 9 E) 15

(07) Si : $x^2 + y^2 = 12xy$

Calcular: $\dfrac{x^2}{y^2} + \dfrac{y^2}{x^2}$

A) 145 B) 144 C) 143
D) 141 E) 142

(08) Si : $x = 24 \wedge y = 22$

Calcular:

$R = \sqrt[8]{2(x+y)(x^2+y^2)(x^4+y^4)+y^8}$

A) 128 B) 24 C) 12
D) 64 E) 144

(09) Hallar el valor de:

$V = \sqrt[8]{8-(3^2+1)(3^4+1)(3^8+1)+1}$

A) 1 B) 9 C) 27
D) 81 E) 729

(10) Calcular el valor de:

$$V = \frac{a^3+b^3+c^3}{abc}$$

Para: $a=2$; $b=1-\sqrt{2}$ $c=\sqrt{2}-3$

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

(11) Evaluar:

$E=\left[(a+b)^2+(a-b)^2\right]^2-\left[(a+b)^2-(a-b)^2\right]^2$

Para : $a=\sqrt{999}$; $b=\sqrt{997}$

A) 2 B) 4 C) 6 D) 8 E) 10

(12) Si : $a^2+b^2+c^2=ab+ac+bc; abc \in \mathbb{R}$

Además:

$$n = \sqrt[1]{1}+\sqrt[2]{2}+\sqrt[3]{3}+...+\sqrt[1999]{2000}$$

Calcular:

$$P = a^n b^n c^n\left(\frac{1}{a^{3n}}+\frac{1}{b^{3n}}+\frac{1}{c^{3n}}\right)$$

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

(13) Calcular:

$$P = (a+b+c)^3-(b+c-a)^3 -(c+a-b)^3-(a+b-c)^3$$

Calcular : $a=\sqrt[6]{2}$; $b=\sqrt[3]{2}$; $c=\sqrt{2}$

A) 12 B) 24 C) 26 D) 28 E) 48

(14) Hallar el valor numérico de:

$$E = \frac{(a^3+b^3-c^3)^2}{3a^2b^2}$$

Cuando: $a = 13$; $b = 17$; $c = 30$

A) 9 B) 27 C) 90
D) 900 E) 2700

(15) Para «x» e «y» $\in R$

Además : $x^2 + y^2 - 4x + 6y = -13$

Hallar el valor de: $x + y$

A) 1 B) 5 C) 4
D) −2 E) −1

(16) El valor de: $\left(\sqrt{5+\sqrt{24}}-\sqrt{5+\sqrt{24}}\right)^2$ es igual a:

A) 6 B) 8 C) 10
D) 12 E) 14

(17) Calcular:

$$P = \frac{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)+(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}$$

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

(18) Si: $(x+y)^2 = 4xy$

Calcular el valor de:

$$R = x^8 - y^8 + \frac{x\ y}{x^2+y^2} + \frac{3}{2}$$

A) 2 B) 3 C) $2x$
D) 4 E) $5+x/2$

(19) si: $(a+b+c+d)^2 = 4(a+b)(c+d)$

Calcular el valor de: $\sqrt[3(a+b)]{8^{c+d}}$

A) 1 B) 2 C) $\sqrt[3]{3}$
D) 3 E) $\sqrt[3]{2}$

(20) Si : $2yz = \sqrt{x+2yz} + \sqrt{x-2yz}$

Calcular: $R = \sqrt{x+2yz} - \sqrt{x-2yz}$

A) 3 B) 2 C) 1
D) 1/2 E) 1/3

(21) Si : $x^3 + y^3 = 16$; $x + y = 4$

Hallar : xy

A) 1 B) −1 C) 2
D) 3 E) 4

(22) Si: $x = \sqrt[4]{27}$; $y = \sqrt[4]{3}$

Hallar: $K = \dfrac{(x+y)^4-(x-y)^4}{x^2+y^2}$

A) 18 B) 24 C) 18
D) 16 E) 9

(23) Simplificar:

$(x+5)(x+1) - 2(x+4)^2 + (x+7)(x+3)$

A) 6 B) −6 C) 3
D) −3 E) x

(24) Si: $xy + xz + yz = 0$

$x + y + z = 5$

Calcular: $K = \dfrac{xy}{z} + \dfrac{xz}{y} + \dfrac{yz}{x}$

A) -5 B) 5 C) 10
D) −10 E) 1

(25) Si : $x^3 + y^3 = 10$; $xy = 6$

Hallar:

$E = (x+y)^3 - 18(x+y) + 20$

A) 18 B) 5 C) 30
D) 20 E) 10

(26) Si: $x - x^{-1} = \sqrt{3}$. Hallar: $x^3 + \dfrac{1}{x^3}$

A) 3 B) 4 C) $4\sqrt{7}$
D) $4\sqrt{3}$ E) 2

(27) Si: $x + y + z = 0$

Calcular: $E = \dfrac{(x-y)^3+(y-z)^3+(z-y)^2}{(x-y)^2+(x+z)^2+(y+z)^3}$

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

(28) Si: $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{11}$; $xy = 4$

Hallar: $\sqrt{x} - \sqrt{y}$

A) 1 B) $\sqrt{2}$ C) 11
D) $\sqrt{7}$ E) $\sqrt{3}$

(29) Si: $x - y = y - z = 2$

Calcular:

$$R = \frac{(x-y)^2+(z-y)^2+(z-x)^2}{8}$$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 6

(30) Si: $\dfrac{x^2}{y} - \dfrac{y^2}{x} = 3(x-y)$

Hallar el valor de: $E = \dfrac{x^2+x\ y+y^2}{(x+y)^2}$

A) 1 B) 2 C) 3/4 D) 1 E) 1/4

HABILIDAD OPERATIVA

La capacidad para efectuar rápidamente operaciones aritméticas mentales parece tener sólo una moderada correlación con la inteligencia general y menor aún con la intuición y creatividad matemática. Hasta matemáticos más sobresalientes han tenido dificultades al operar, y muchos aficionados a la matemática se han visto en aprietos cuando de operaciones mentales se trata.

Sin embargo, algunos grandes matemáticos han sido también diestros calculistas mentales. Carl Friedrich Gauss, por ejemplo gustaba hacer alarde de que aprendió a calcular antes que hablar. Se dice que a los tres años de edad corrigió el resultado de la suma de una larga lista de números que su padre había efectuado. También se afirma que el matemático Zerah Colburn multiplicaba los números grandes fraccionándolos en partes y multiplicándolos, empleaba una técnica algebraica mental.

EJEMPLO :

56×42 se convierte en $(50 + 6) \times (40 + 2)$ las operaciones se hacen como se indica a continuación

56 ⇨ 50 + 6
42 ⇨ 40 + 2

1er paso: $50 \times 40 = 2000$
2do paso: $50 \times 2 = 100$
3er paso: $6 \times 40 = 240$
4to paso: $6 \times 2 = 12$
(+) $= 2352$

Es recomendable ir sumando los resultados parciales luego de cada paso.

A continuación presentamos una manera curiosa de multiplicar números comprendidos entre el 6 y el 9 mediante los dedos de la mano.

EJEMPLO :

sabemos que $8 \times 7 = 56$

Expresemos el ocho y el siete mediante excesos respecto del 5 así:

$$8 = 5 + ③ \ ; \quad 7 = 5 + ②$$

Representemos el **3** y el **2** mediante los dedos extendidos en las manos



⇨ $8 \times 7 = 56$

número total de dedos extendidos — resultado de multiplicar los dedos cerrados en ambas manos (2×3)

MULTIPLICACIONES RÁPIDAS

* Para multiplicar por **5** al número se le añade un cero y luego se le divide entre **2**.

EJEMPLOS :

- $74 \times 5 = 74 \xrightarrow{\text{agregar un cero}} 740 \xrightarrow{\div 2} 370$
- $243 \times 5 = 243 \xrightarrow{\text{agregar un cero}} 2\,430 \xrightarrow{\div 2} 1\,215$

* Para multiplicar por **9** , al número se le añade un cero y se le resta el número original.

EJEMPLOS :

- $26 \times 9 = 26 \xrightarrow{\text{agregar un cero}} 260 \xrightarrow{-26} 234$
- $67 \times 9 = 67 \xrightarrow{\text{agregar un cero}} 670 \xrightarrow{-67} 603$

Siguiendo este criterio podemos realizar otras multiplicaciones

Multiplicar por 99	⇨	Se le agrega dos ceros y se le resta el número original

EJEMPLOS :

- $36 \times 99 = 3\,600 - 36 = 3\,564$
- $125 \times 99 = 12\,500 - 125 = 12\,375$

De manera práctica, para multiplicar un número por **99...99,** al número se le agrega tantos ceros como nueves tenga el multiplicador y luego se le resta el número original.

EJEMPLOS :

- $397 \times 999 = 397\,000 - 397 = 396\,603$

EJERCICIO 1 :

Calcule las cuatro últimas cifras del producto y dé como respuesta la suma de ellos.

... $4\,568 \times 9\,999$

EJERCICIO 2 :

Calcule la suma de las dos cifras centrales al multiplicar de manera abreviada $99\,988 \times 99\,996$

EJERCICIO 3 :

Calcule la suma de cifras del resultado al operar :

$$M = 22 \times 202 \times 20\,002 \times 100\,000\,001$$

PRODUCTOS NOTABLES I (NIVEL BÁSICO)

01) *	02) A	03) A	04) C	05) B
06) A	07) E	08) A	09) C	10) B
11) C	12) A	13) C	14) C	15) B
16) A	17) C	18) E	19) B	20) C
01) A	02) C	03) C	04) C	05) B

PRODUCTOS NOTABLES II (NIVEL BÁSICO)

01) *	02) B	03) C	04) A	05) B
06) A	07) D	08) D	09) C	10) D
11) B	12) E	13) E	14) D	15) E
16) B	17) A	18) A	19) D	20) D
01) D	02) D	03) E	04) C	05) B

PRODUCTOS NOTABLES I (NIVEL INTERMEDIO)

01) E	02) B	03) C	04) A	05) D
06) B	07) D	08) A	09) C	10) B
11) A	12) D	13) C	14) C	15) A
16) B	17) A	18) D	19) C	20) E
01) C	02) B	03) B	04) A	05) B

PRODUCTOS NOTABLES II NIVEL- INTERMEDIO

01) C	02) A	03) B	04) B	05) E
06) A	07) B	08) E	09) A	10) A
11) B	12) B	13) C	14) B	15) C
16) E	17) C	18) E	19) B	20) D
01) C	02) D	03) E	04) B	05) D

PRODUCTOS NOTABLES III NIVEL - INTERMEDIO

01) B	02) C	03) C	04) D	05) C
06) C	07) E	08) B	09) A	10) E
11) C	12) D	13) D	14) B	15) E
16) A	17) E	18) E	19) C	20) B
01) C	02) C	03) D	04) B	05) E

PRODUCTOS NOTABLES (REPASO)

01) B	02) D	03) A	04) B	05) B
06) A	07) E	08) B	09) B	10) C
11) C	12) C	13) E	14) E	15) E
16) B	17) D	18) A	19) B	20) D
21) E	22) B	23) B	24) D	25) C
26) C	27) C	28) E	29) C	30) C

SEPTIMA PRACTICA DIRIGIDA

01 Observe y relacione correctamente:

I) a^2-b^2	a) $4ab$
II) $(a+b)^2$	b) $(a+b)(a-b)$
III) $(x+a)(x+b)$	c) $a^3+b^3+3ab(a+b)$
IV) $(a+b)-(a-b)^2$	d) a^2+b^2+2ab
V) $(a+b)^3$	e) $x^2+(a+b)x+ab$

A) Ia – IId – IIIe – IVb – Ve
B) Ib – IId – IIIe – IVa – Ve
C) Ie – IId – IIIb – IVe – Va
D) Ib – IId – IIIe – IVc – Va
E) Ia – IIe – IIId – IVc – Vb

02 Sabiendo que: $P=(a+2b)^2$

$N=(2a-b)^2$

$M=(b+a)(b-a)$

obtener: $P+N+5M$

A) 0 B) $10a^2$ C) $10b^2$ D) $5a^2$ E) $5b^2$

03 Si $\{x;y\}\subset\mathbb{R}^+$, además:

$A=(3x+2y)^2+(3x-2)^2$

$B=(3x+2y)^2-(3x-y)^2$

$C=(3x+2y)(3x-2y)$

obtener el equivalente de: $\sqrt{A+B-C+(2y)^2}$

A) $3x+2y$ B) $3x-2y$ C) $3x+4y$
D) $3x-4y$ E) Más de uno es correcto

04 Reducir:

$(a+c+b)(a+c-b)+(b+a-c)(b-a+c)$

A) $a+c$ B) $a-c$ C) ac D) $2ac$ E) $4ac$

05 Luego de reducir:

$(x+2)^2(x^2+4x-4)-(x-2)^2(x^2-4x-4)$

se obtiene:

A) $2x^3$ B) $4x^3$ C) $4x^3$ D) $12x^3$ E) $16x^3$

06 Luego de reducir:

$M=(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)-(n^2+7n+11)^2$

A) –10 B) –11 C) –9 D) –1 E) –6

07 Si: $x=\sqrt[3]{2+\sqrt{2}}\wedge y=\sqrt[3]{1-\sqrt{2}}$

calcular: $x^9+9x^3y^3+y^9$

A) 27 B) 18 C) 9 D) 81 E) 36

08 Cumpliéndose que:

$x=3a+b^2;\ y=3b+a^3;ab=1$ reducir la siguiente expresión: $\sqrt[3]{(x+y)^2}-\sqrt[3]{(x-y)^2}$ donde: $\{a;b;x;y\}\subset\mathbb{R}$

A) 1 B) 2 C) 4 D) 0 E) –1

09 Si: $x=\sqrt[3]{-1}+\sqrt[3]{-2}+\sqrt[3]{-4}$ calcular el valor de: $A=\dfrac{x^3+3x^2}{3x-1};x\in\mathbb{R}$

A) –2 B) –1 C) 0 D) 1 E) 2

10 Efectuar:

$(x+6)(x^2-6x+36)-(x-4)(x^2+4x+16)$

A) 280 B) 220 C) 292 D) 296 E) 300

11 Efectuar:

$$\frac{(x+y)(x^2-xy+y^2)+(z-y)(z^2+zy+y^2)}{(x+z)(x^2-xz+z^2)}$$

A) 1 B) 2 C) 3 D) $x+y$ E) $y+z$

12 Si se sabe que: $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{4}{a+b};ab\neq 0$

resucir: $\sqrt[n]{\dfrac{(a+b)^{n+1}}{a^{n+1}+b^{n+1}}};n\in\mathbb{N}-\{1\}$

A) 1/2 B) 2 C) 4 D) 2^n E) 1/4

13 Calcule el valor de: $\dfrac{3(x^{19}+y^{19})}{2x^7y^{12}};xy\neq 0$

si: $\dfrac{x^2}{y}-\dfrac{y^2}{x}=3(x-y)$

A) 1 B) –3 C) 3 D) 2 E) –2

14 Si: $a=\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}$

$b=\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}$

calcular el valor de «a».

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

15 Cumpliéndose que: $3a+b=3\wedge ab=1$

calcular: $\dfrac{a^2+b^2}{3+8b^2}$

A) 1/3 B) 1/6 C) $(-3)^{-2}$ D) 4/9 E)1

16 Reducir:

$$\sqrt{\left(x^2+x-7\right)^2-(x-1)(x+2)(x-3)(x+4)}$$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E)5

17 Simplificar:

$$\sqrt[32]{1+3\left(2^2+1\right)\left(2^4+1\right)\left(2^8+1\right)...\left(2^{64}+1\right)}$$

A) 1 B) 16 C) 4 D) 8 E)2

18 Si $a^2+b^2+c^2=2(a+b+c)-3$

además: $\{a; b; c\} \subset \mathbb{R}^+$, calcular : $a^2-b^3-c^4$

A)- 1 B) 18 C)-26 D)-48 E)-108

19 Sabiendo que: $b^{2x}+b^{-2x}=\sqrt{5}$ calcule:

$b^{2x}-b^{-2x}; b>1 \wedge x>0$

A) 1 B) 2 C)3 D)4 E)5

20 Cumpliéndose que: $x^2-2x-1=0, x \neq 0$,

calcular: $A=x^8+\dfrac{1}{x^8}$

A) 1124 B)1134 C)1144 D)1154 E)1164

OCTAVA PRACTICA DIRIGIDA

01 Observar y relacionar:

I) $(a+b+c)^2$

II) $(a+b+c)^3$

III) Si: $a+b+c=0$

IV) $a^4+a^2b^2+b^4$

A) $a^3+b^3+c^3=3abc$

B) $a^2+b^2+c^2+2(ab+ac+bc)$

C) $(a^2+ab+b^2)(a-ab+b^2)$

D) $a^3+b^3+c^3+3(a+b)(a+c)(b+c)$

A)IA – IIC – IIIB – IVD B)IA – IIB – IIIC – IVD
C)IB –IIA–IIID – IVC D) IB – IID – IIIA – IVC
E) IC – IIA –IIIC – IVD

02 Cumpliéndose que: $a^2+b^2+c^2=5; ab+ac+bc=6$

además:

$P=(a+b+c)^2$
$N=(a-b+c)^2$
$M=(a+b-c)^2$

calcular: $\sqrt[3]{P+N+M}$

A) 1 B) 2 C)3 D)4 E)5

03 Si : $m+n+p=0$, simplificar

$$\frac{(m+n)^2+(m+p)^2+(n+p)^2}{mn-p^2}$$

A) -1 B) -2 C)-3 D)-1/2 E)-4

04 Si existen tres números a, b y $c \in \mathbb{R}$, que verifican las siguientes condiciones: $a+b+c=4$
$(4-a)(4-b)(4-c)=12$. Calcular: $a^3+b^3+c^3$

A) 27 B) 28 C)29 D)32 E)36

05 Indique verdadero *(V)* o falso *(F)*, según corresponda:

( ) $(x+1)(x+2)(x+3)=x^3+6x^2+11x+6$)
( ) $(x+1)(x+2)(x-3)=x^3-7x-6$
( ) $(x-1)(x-2)(x-3)=x^3-6x^2+11x-6$

A) VVF B)VFV C)VVV D)FVV E)VFF

06 Si: $x+y+z=0$

Calcular: $\dfrac{(x+y)^3+(x+z)^3+(y+z)^3}{(x+y)(x+z)(y+z)}$

A) -3 B) -2 C) -1 D) 3 E)1/3

07 Calcular el valor de:

$$A=\frac{(m-n)^3+(n-p)^3+(p-m)^3}{(m-n)(m-p)(n-p)}$$

sabiendo que: $m \neq n \neq p$

A) -1 B) 1 C) 3 D) -3 E)2

08 Cumpliéndose que: $a^2+b^2+c^2=12$
$ab+ac+bc=-6$

calcular el valor de:

$$\frac{abc}{a(b+c)^2+b(c+a)^2+c(a+b)^2}$$

A) 3 B) 3^{-1} C) 2/9 D) 18 E)6

09 Cumpliéndose que:

$a^2+ab+b^2=8$
$a^2-ab+b^2=4$

calcular: $\dfrac{a^4+a^2b^2+b^4}{(a+b)^2+(a+b)^2}\left[(a+b)^2-(a-b)^2\right]$

A) $20,\hat{3}$ B) $21,\hat{3}$ C) $22,\hat{3}$ D) $23,\hat{3}$ E) $24,\hat{3}$

10 Si: $\{a;b;c\} \subset \mathbb{Z}^+$; abc es el menor valor posible.

además: $a^2+b^2+c^2=81; a^{-1}+b^{-1}+c^{-1}=1\frac{3}{8}$

calcular: $3a-8b+9c$

A) 41 B) 42 C) 43 D) 44 E) 45

11 Si se cumple que: $(m+n+p)^2=3(mn+mp+np)$

además: $m,n \wedge p \in \mathbb{R}$ calcular:

$$\sqrt{\frac{8m+24n+18}{9m+3n-10p}}$$

A) $\sqrt{10}$ B) $\sqrt{3}$ C) $\frac{4}{3}$ D) 5 E) 9

12 Si: $2(x+y+z)=x^2+y^2+z^2=4$

calcular: $\dfrac{(xy)^2+(xz)^2+(yz)^2}{xyz}$

A) 2 B) 1/2 C) 1 D) 5 E) –4

13 Sabiendo que:

$$m=\frac{-x+\sqrt{x^2-4}}{2}; n=\frac{-x-\sqrt{x^2-4}}{2}$$

calcular: $\dfrac{m^3+n^3+x^3}{x}$

A) –2 B) –1 C) 1 D) 2 E) 3

14 Si: $a^{-1}+b^{-1}+c^{-1}=1; abc \neq 0$

reducir: $M=\dfrac{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}{abc-2(a+b+c)}$

A) a B) b C) c D) abc E) a+b+c

15 Dado: $a+b+c=1$

$ab+ac+bc=0; abc \neq 0$

calcular: $\dfrac{(ab)^2+(ac)^2+(bc)^2}{abc}$

A) –1 B) –2 C) 1/2 D) 1/4 E) 2

16 Sabiendo que:

$$\left(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}\right)\left(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{c}\right)=-c$$

calcular: $\dfrac{(a^2+b^2+c^2)(a^3+b^3+c^3)}{abc(ab+ac+bc)}$

A) –1 B) –4 C) –6 D) –8 E) –1/3

17 Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$, tales que:

$(ab)^2+(ac)^2+(bc)^2=k^2$

$abc=a+b+c=k$; $(k \neq 0)$

Calcule: $\dfrac{k}{\sqrt{3}}$

A) $\dfrac{ac+bc+ac}{3\sqrt{3}}$ B) $(a+b+c)^2$ C) $2ab+ac+bc$

D) $abc+a^2+b^2+c^2$ E) 3

18 Si $m+n=10$

simplificar y calcular: $\dfrac{(m-3)^3+(n-3)^3-64}{2mn-42}$

A) 9 B) –3mn C) –3 D) –6mn E) –6

19 Cumpliéndose que:

$a+b+c=1$

$a^2+b^2+c^2=2$

$a^3+b^3+c^3=3$

calcular: $\dfrac{ab+ac+bc}{abc}$

A) –3 B) –2 C) –1 D) –1 E) 6

20 Si: $a+b+c=0$

reducir:

$$M=a^4+b^4+c^4-2\left(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2\right)$$

A) 1 B) 0 C) –2 D) 2 E) abc

SEPTIMA PRACTICA									
1)B	2)C	3)C	4)E	5)E	6)D	7)A	8)C	9)D	10)A
11)A	12)B	13)C	14)B	15)C	16)E	17)B	18)A	19)A	20)D

OCTAVA PRACTICA									
1)D	2)C	3)B	4)B	5)C	6)D	7)D	8)B	9)B	10)C
11)D	12)E	13)E	14)D	15)B	16)C	17)E	18)E	19)A	20)B



REPASO PARCIAL 5B

PRIMERA PRACTICA DIRIGIDA

EXPONENTES Y RADICALES

01 Dado: $a=2; b=\sqrt[3]{2+a+a^2}$

Calcular el valor de: « b^{a^3} »

A) 512 B) 256 C) 64 D) 1 024 E) 258

02 Calcular A^8, sabiendo que:

$$A=8\left(\frac{4}{5}\right)^{-2}-\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}-\left(\frac{8}{9}\right)^{-1} \quad ; \quad B=\left(\frac{3}{\sqrt[3]{9}}\right)^{-3}$$

A) 1 B) 2 C) 8
D) 1/3 E) 1/8

03 Efectuar:

$$\left[\frac{a}{b}\right]^{-2}\left[\left(\frac{\frac{1}{a}}{\frac{1}{b}}\right)\frac{b}{a}\right]^{-1}$$

A) b/a B) 1/a C) 1/b D) 1 E) a/b

04 Calcular:

$$\left[\left(\frac{1}{3}\right)^{-\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}}-\left(\frac{1}{2}\right)^{-\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}}+\left(\frac{1}{4}\right)^{-\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}}\right]^{\frac{1}{2}}$$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

05 Señalar la verdad *(V)* o falsedad *(F)* de cada una de las siguientes proposiciones:

( )....Si $x > 0$: $(x^{-n})^2(x^2)^n = 1$

( )....$2(3^n) = 6^n$

( )....$(-2)^{2/5}(-8)^{1/5} = 2$

A) VFF B) FVF C) VVF D) VFV E) VVV

06 Al multiplicar:

$$\left(\frac{x^3y^3}{-x^4y^2}\right)^3\cdot\left(\frac{x^3y}{-x^2y^2}\right)^5 \quad \text{se obtiene:} \quad \left(\frac{y}{x}\right)^{-m}$$

Dar como respuesta el valor de m^{m+1}

A) 2 B) 8 C) 4 D) -3 E) -2

07 Al simplificar:

$$E=\frac{2^{3x+1}+8^{x+2}}{2^{3x}+1} \quad \text{se obtiene:}$$

A) 2 B) 2^x C) 33 D) 66 E) 128

08 Efectuar: $$\sqrt{2}^{4x-y}\times 2^{\frac{y}{2}-x}\times 4^{2-\frac{x}{2}}$$

A) 2 B) 4 C) 8 D) 16 E) 32

09 Si: $a = b + c$; al reducir: $(b+c)^b\,a^{c-a+2}$

se obtiene:

A) a^2 B) a^3 C) b^2 D) a E) b

10 En la expresión: $\left[\frac{x^{n^{2n}}}{x^{n^n}}\right]^{n^{-n}}$ el exponente de x es:

A) n^n-1 B) n^n C) 1 D) n^n+1 E) n

11 Al simplificar la expresión:

$$\left[\frac{6\times 4^m}{4^{2m+1}+2^{4m+1}}\right]^{m^{-1}} \quad \text{se obtiene:}$$

A) $m/4$ B) $\frac{2m^2}{5}$ C) $\frac{m+1}{4}$ D) 1/4 E) 4

12 Reducir: $$\left[2^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\sqrt{2^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}+1}}}\right]^{\sqrt{2}}$$

A) $\sqrt{2}$ B) 2 C) 4 D) 2^{-1} E) 2^{-2}

13 Simplificar: $$E=\sqrt[3]{\frac{1-64^x}{1-64^{-x}}}$$

A) 4^x B) -4^x C) 8^x D) 8 E) 2^x

14 Simplificar: $$\sqrt[n+1]{\frac{51^{n+1}-42^{n+1}}{34^{n+1}-28^{n+1}}}$$

A) 2 B) 3 C)6 D)2/3 E)3/2

15 Calcular el exponente final de «3» en:

$$\frac{3\sqrt[n]{3^{n+4}}.\sqrt[n]{9^{-2+n}}}{9}$$

A) 1 B) 2 C) 3 D) n E) 2n

16 Si: $m^m=2$ calcular: $H=m^{m+m^{1+m}+1}$

A) 2 B) 256 C) 512 D) 8 E) 16

17 Calcular el producto de los dígitos del valor de la expresión: $\sqrt[b]{\frac{49^{b+\frac{1}{4}}\sqrt{7^{b-2}}}{\sqrt{7^b}\sqrt{\frac{1}{7}}}}$

A) 49 B)56 C) 36 D) 32 E) 14

18 Calcular el valor de M, si:

$$M=\sqrt[2^{2^{n+1}}]{2^{2^n}\sqrt{2^2\sqrt{625^{8^{2^n}}}}}$$

A) 5 B)1/5 C) 1 D) 25 E) 125

19 Si: $2^x=3$ calcular: $K=\sqrt[x]{9}-\sqrt[x]{3}+1$

A) 2 B) 3 C) 4 D)5 E)6

20 Simplificar: $\sqrt[\sqrt{2}]{\sqrt{2}+1\sqrt{\sqrt{2}-1\sqrt{2}}\sqrt{2}}$

A)2 B) $\sqrt{2}$ C)4 D) $\sqrt[3]{2}$ E) $\sqrt[4]{2}$

21 Calcule el exponente de x en :

$$\left(\cdots\left(\left(x^3\right)^5\right)^7\cdots\right)^{2n-1}$$

A) $\frac{(2n-1)!}{n!}$ B)1 C) $\frac{(2n-1)!}{n!-1}$ D) $\frac{(2n+3)!}{2^n!}$ E) $\frac{(2n)!}{2^n!}$

22 Calcule el exponente final de x luego de reducir la siguiente expresión :

$$\sqrt[n]{x\sqrt[n]{x\sqrt[n]{x......\sqrt[n]{x}}}}......(10\,radicales)$$

A) $\frac{n^{10}-1}{n^{10}(n-1)}$ B) $\frac{n^{11}-1}{n^{10}(n-1)}$ C) $\frac{n^{10}}{n^{11}(n-1)}$ D)1 E) $\frac{(2n+5)^n}{2^n!}$

SEGUNDA PRACTICA DIRIGIDA

ECUACIONES EXPONENCIALES

01 Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

* Si $7^{m+2}=343 \Rightarrow m=1$ ....( )
* Si $x^x=\sqrt{72}^{3\sqrt{3}} \Rightarrow x=\sqrt{27}$.........( )
* Si $x^{x^2}=2 \Rightarrow x=\sqrt[4]{2}$.................( )

A) FVF B) VVF C) FFV D) VVV E) VFV

02 Calcular «n» en:

$$\underbrace{128\times128\times128.........\times128}_{(n-1)\ veces}=\underbrace{32\times32\times32........\times32}_{(n+5)\ veces}$$

A 16 B)8 C)12 D) -10 E) 14

03 El valor de «x» en: $512^{x-3}=4^{-5}\times32^{5-x}$

A) 4 B) 3 C) 5 D)2 E)6

04 Resolver: $\frac{13^{n+5}\times13^{n+3}}{13^{4+n}}=13^{2n-7}$

A) {12} B) {11} C) {10} D) {9} E) {8}

05 Resolver la ecuación:

$$\left\{\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}-\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}\right\}^{x-11}=169^{2x+5}$$

calcular: $J=(1-x)^{0,\hat{3}}$

A) $\sqrt[3]{2}$ B)2 C) $\sqrt[2]{2}$ D) $\sqrt[3]{4}$ E) $\sqrt[6]{3}$

06 Resolver: $\sqrt{7}^{m-1}\times\sqrt[4]{7}^{m+1}=\sqrt[6]{7}^{m+9}$

A) {12} B) {10} C) {6} D) {5} E) {3}

07 Calcular «P» en la siguiente igualdad:

$$\sqrt[0,1]{0,2}\ \sqrt[0,3]{0,04}=\sqrt[P]{5}$$

A) 1 B)–50/3 C)–50/3 D)–3/50 E)50/3

08 Resolver: $\frac{3^{2x-5}-3x}{3x}=26$

Luego indicar el recíproco de «x»

A) 8 B) –8 C) 1/8 D) 4 E)–4

09 Si A es la solución de la siguiente ecuación:

$5^t+5^{t-2}=26$ entonces lo incorrecto es:

A) $A \in Q$ B) $A \geq 2$ C) $A \in R$ D) $A \notin I$ E) $A \in I$

10 Luego de resolver:

$$5^{5^{n+2}} = 3125^{625^{n-2}}$$

se obtiene que «*n*» es:

A) Par B) Negativo C) Fraccionario
D) Impar E) Irracional

11 Resolver: $\left\{19^{x+1}\right\}^{x-1} = \left\{19^{7}\right\}^{5}$ Dar como respuesta $Q = \sqrt{4x+1}$

A) 5 B) 6 C) 8 D) 2 E) 7

12 Si: $5^a = 3^b$; $a \neq b$. Calcular: $P = \dfrac{5^{a+2}+3^b}{3^{b+1}-5^a}$

A) 10 B) 13 C) 14 D) 16 E) 17

13 Si: $\dfrac{5^{2a-2}}{100^{a-1}} = 2^{-4}$ calcular: $a^2 + a + 1$

A) 10 B) 11 C) 14 D) 13 E) 21

14 Resolver: $\sqrt{2^{x-2}\sqrt[3]{2^{x-1}}} = \sqrt[3]{2^x\sqrt{2^{x-2}}}$

indicando luego: $\sqrt{x-1}$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

15 Calcular «*x*» si: $4^{x-4} + 4^{x-3} + 4^{x-1} = 69$

A) 1 B) 2 C) 4 D) 8 E) 5

16 Calcular «*a*» $3^{3^{a-2}} = \sqrt[a]{9}$ ***dando:*** $P = \sqrt[a]{a^3+1}$

A) 2 B) $\sqrt[3]{28}$ C) $\sqrt[3]{4}$ D) 3 E) 9

17 Resolver: $\left(\dfrac{1}{4}\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)^{4^x}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Dar el valor de: $\sqrt{2x+3}$

A) 4 B) 2 C) 5 D) 7 E) 3

18 Resolver: $\left(b^b x\right)^x = b^{b^{1-b}}$

A) $\left\{b^{1-b}\right\}$ B) $\left\{b^{b}\right\}$ D) $\left\{b^{-1}\right\}$ E) $\left\{b^{1+b}\right\}$

A) 5 B) 1/5 C) 1 D) 25 E) 125

19 Calcular: $M = x^{-x^5}$ si se cumple que:

$$x^{5x^{x^5}} = 3125$$

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

20 Resover: $x^x = 7^{98}$

Dar como respuesta: $\sqrt{\dfrac{x+1}{2}}$

A) 4 B) 7 C) 8 D) 5 E) 6

21 ¿Qué valor de x verifica la siguiente igualdad ?

$$x^{-x^x} = 2^{\sqrt{2}}$$

A) 1/2 B) 1/4 C) 2 D) 3 E) 1/8

TERCERA PRACTICA DIRIGIDA

GRADOS Y POLINOMIOS

01 Del polinomio: $P(y) = 5y - 7y^3 + 3y^4 - 11 + y^2$ indicar verdadero (V) o falso (*F*) según corresponda en:

( ) El término lineal es $5y$.

( ) El polinomio es mónico.

( ) El coeficiente del término cuadrático es *1*.

A) FFF B) VFF C) FVF D) VVV E) VFV

02 En el siguiente polinomio:

$P(x;y) = 7x^9y^2 - 5x^4y^8 + 3x^6y^7$ indicar correcto (*c*) o incorrecto (*i*):

( ) El G.R(x) = G.R(y) + 1

( ) El G.A(P) = 18

( ) La suma de coeficientes de $P(x;y)$ es *15*

A) cci B) icc C) cii D) iic E) cic

03 Si:

$P(x) = 7(x^2-1) + 9(x^3 - x^2 + 1) + 3x^2 - (3x)^2x$

calcular : $P(\sqrt{3})$

A) 1 B) 4 C) 3 D) 5 E) 9

04 Si: $P(x) = x^2 - x + 2$, calcular:

$M = P\{P[2 - P(-1)]\}$

A) 64 B) 36 C) 58 D) 44 E) 49

05 Si: $P(x) = \dfrac{x-1}{\sqrt{x}+1}$. Calcular: $N = P(P(25))$

A) 8 B) 1 C) 13 D) 4 E) 25

06 Si: $P(x) = (x^2+1)^3 - (x^2-1)^3$

Calcular : $P\left(\sqrt{\dfrac{1}{2}}\right)$

A) 2,5 B) 4,5 C) 2 D) 1 E) 3,5

(07) Si los términos algebraicos: $T_1=3a^2x^{a-1}y^{12-b}$

$T_2=4b^2x^{b+1}y^{a+4}$

son semejantes, indicar la diferencia del mayor menos el menor.

A) $48x^4y^8$ B) $66x^4y^{12}$ C) $39x^4y^9$ D) $36x^4y^9$ E) $53x^8y^{12}$

(08) Si: $P(3x-2)=12x-5$

Calcular: $J=P(x+1)-P(x-1)$

A) 7 B) –1 C) 8 D) 1 E) 10

(09) Si: $P(x+5)=3x-2$.

Calcule «t», además : $P(2x+t)=6x+7$

A) 1 B) 3 C) 5 D) 7 E) 8

(10) Si: $P(x)=(x-1)^2-1$

Calcular : $N=\dfrac{P(x)+P(x+2)}{x^2}$

A) 6 B) 1 C) 2 D) 4 E) 3

(11) Dado el polinomio: $F(z+2)=z^2-5z+m$ si el término independiente de $F(z)$ es 6, calcule la suma de coeficientes de $F(z)$.

A) –5 B) 3 C) –4 D) –2 E) 8

(12) Calcular la suma de valores que puede tomar «n» para que la expresión: $M(x)=x^{n-3}+7x^{7-n}-6x^{n/2}$ sea un polinomio.

A) 12 B) 10 C) 25 D) 15 E) 9

(13) Si la expresión:

$$M(x;y)=a^bx^{3a+b}y^{a-b}+dx^{2a-b}y^{b+4}+bcx^cy^d$$

puede reducirse a monomio, encontrar su coeficiente

A) –3/2 B) –1/2 C) –1 D) –2 E) –2/3

(14) Si $P(x)=x+2 \wedge P[P(x)+x]=ax+b$.

Calcular $F(2)$, si $F(x)=x+ab$

A) 13 B) 24 C) 16 D) 10 E) 42

(15) Sea el polinomio:

$$P(x;y;z)=ax^{a-5}y^{b-6}-bx^{7-a}y^{8-b}+cx^{c-3}y^{5-c}$$

además a y c son números pares y b es impar.

Calcular el valor de $(a+b)c$

A) 52 B) 66 C) 42 D) 70 E) 38

(16) Si el grado del polinomio:

$$P(x;y)=x^{3n}y^{n-1}+7x^{2n-3}y^{2n+1}-5x^{n-2}y^{3n-1}$$

es 19, calcular el valor de n^2.

A) 1 B) 4 C) 9 D) 16 E) 25

(17) Calcular «$m+n$» si el polinomio:

$$Q(x;y)=x^{2m+n-4}y^{m+n+2}+x^{2m+n-3}y^{m+n+1}+x^{2m+n-2}y^{m+n}$$

es de grado absoluto 28 y la diferencia de grados relativos a «x» e «y» sea igual a 6.

A) 17 B) 15 C) 13 D) 10 E) 9

(18) Dado el polinomio:

$$P(2x-3)=(2x+3)^{4m}+2(12x-6)^{2m}+(2x+1)^{2m}$$

calcular «m», si su término independiente es igual a $1\,600$

A) 1 B) 7 C) 0 D) 3 E) 2

(19) En:

$P(x+1)\equiv(2x+1)^n+(x+2)^n-128(2x+3)$ donde «n» es impar, la suma de coeficientes y el término independiente suman 1, entonces el valor de «n» es:

A) 7 B) 9 C) 5 D) 6 E) 8

(20) Si: $P\left(\dfrac{5x+3}{5x-3}\right)=\dfrac{5}{3}x$

Calcular: $M=P(2)\times P(4)\times P(6)\times\ldots\ldots\times P(2n)$

A) 1 B) n C) $n+1$ D) $2n$ E) $2n+1$

(21) Dado el polinomio:

$$P(x;y)=\left[\left(\left(8x^my^n-2x^{m-1}y^{n+1}+4x^{m+2}y^{n-1}\right)^2\right)^3\right]^4$$

si $GR(y)=48$. Determine el $GR(x)$, si el grado absoluto de $P(x)$ es 96.

A) 24 B) 36 C) 48 D) 96 E) 108

(22) Si el grado de $P^5(x)\cdot Q^2(x)$ es 19 y el grado de $\dfrac{P^2(x)}{Q(x)}$ es 4. Determine el grado de $Q(x)$.

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

(23) Si el monomio $M(x;y;z)=(xz)^a(xy)^b(yz)^c$ es de grado 18, y los grados relativos a x, y, z son 3 números consecutivos *(en ese orden)*. Calcular: abc.

A) 6 B) 8 C) 12 D) 18 E) 24

(24) Determine el grado del polinomio:

$$P(x;y)=x^{m+n-3}y^{m+2}+5x^{m+n+3}y^{m-3}+7x^{m+n-8}y^{m+1}$$

Si la suma de los grados relativos a x e y es 21 y además el menor exponente de y es 2.

A) 12 B) 13 C) 14 D) 15 E) 16

(25) Si $P(a,b,c)$ es idénticamente nulo determine M^3+N^3, siendo:

$P=(a^2+b^2+c^2+d^2)-(a^2+b^2-c^2-d^2)^2+M(ac+bd)^2+N(ad-bc)^2$

A) –16 B) –2 C) –48 D) –81 E) –128

(26) El polinomio $P(x)$ es ordenado y completo.

$P(x)=(n-2)x^{n-9}+(n-3)x^{n-8}+(n-4)x^{n-7}+...$

Calcular: $M=gr(P)+(N^o$ términos de $P)$

A) 7 B) 12 C) 13 D) 15 E) 18

(27) Sea $P(x;y)$ un polinomio homogéneo de grado 2. Si $P(2;-4)=4$, hallar $P(-4;8)$.

A) 1 B) 2 C) 4 D) 8 E) 16

(28) Indicar cuales de los siguientes enunciados son correctos.

I) $P(x;y)=xy$ es homogéneo.

II) $P(x;y)=0$ es homogéneo.

III) $P(x;y)=\pi$ es homogéneo.

A) Sólo I B) Sólo II C) Sólo III
D) I y II E) I, II y III

(29) Se tienen 3 polinomios en x, $P(x)$, $Q(x)$ y $R(x)$, se sabe que la suma de los grados de Q y R excede en 10 al grado de P. Asi mismo el grado de $\sqrt[4]{P^2QR}$ es 10 y el grado de $\dfrac{(PQ)^3}{R^4}$ es 34, hallar la diferencia entre los grados de $Q(x)$ y $P(x)$.

A) 2 B) 4 C) 7 D) 9 E) 11

(30) Sean P y Q dos polinomios con:

$$P(x)=(x+a)(b+cx)+ax+4$$
$$Q(x)=(x+b)(x+2)+x$$

Si $P(x)+Q(x)$ es un polinomio de grado cero, entonces $4b^2+c^2$ es igual a.

A) 1 B) 4 C) 5 D) 10 E) 17

(31) Si al sumar $M(x)$ y $P(y;z)$ se obtiene un polinomio homogéneo donde:

$$M(x)=ax^{(a+1)^b(b^a)}$$
$$P(y;z)=y^{(a-1)^a b^{2b}}+6z^{b^{a+2b}}$$

Calcular: $\sqrt[a]{b(a+1)};ab\neq 0$

A) 2 B) $\sqrt{12}$ C) $\sqrt[3]{12}$ D) 1 E) 3

(32) Sea $P(x;y)$ un polinomio homogéneo de grado homogéneidad 2, si :

$$P(4;1)=5,\ P(1;0)=1 \text{ y } P(2;1)=-1$$

Determine la sumar de los coeficientes de $P(x;y)$

A) –2 B) –1 C) 0 D) 2 E) 2

(33) Si se cumple: $(a+2x+b)(a-2x+b)=(a-b)^2$

Simplificar: $E=\dfrac{(x+a)(x+b)}{a+2x+b}-\dfrac{x^3}{ab}$

A) -1 B) $-\dfrac{1}{2}$ C) 0 D) $\dfrac{1}{2}$ E) 1

(34) Sean los polinomios: $P(x)=2x^3+5x^2+4x+1$

$Q(x)=(ax+b)^c(cx+d)^a+k;k\neq 1$ donde

$P(x)-Q(x)\equiv 0;$

Calcular : $\left(\dfrac{b^c d^a}{1-k}\right)(a^c c^a)$

A) –1 B) 2 C) 1 D) –2 E) 4

(35) Sea $x_0=\dfrac{\sqrt[3]{\dfrac{1}{2}\sqrt[4]{\dfrac{3}{4}\sqrt[5]{\dfrac{5}{6}}}}\cdot\sqrt[3]{\dfrac{3}{2}\sqrt[4]{\dfrac{5}{3}\sqrt[5]{\dfrac{4}{5}}}}}{\sqrt[3]{\dfrac{3}{4}\sqrt[4]{\dfrac{5}{4}\sqrt[5]{\dfrac{2}{3}}}}}$ ¿cual es el valor numérico de $P(x)=x^3+3x+1$ en $x=x_0$?

A) 5 B) 2 C) 17/3 D) 5/3 E) 1

(36) Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I) El polinomio $P(x)=ax^2+bx+c$ siempre es cuadrático.

II) En el polinomio $Q(x-1)=mx^2+nx+p$ sus coeficientes suman $m+n+p$

III) El polinomio $P(x;y)=a+b^2, a\neq 0\wedge b\neq 0$ es un binomio.

IV) La expresión $P(x^2;y)=x^3+y^5$ es un polinomio

A) VVV B) VFVF C) VFFF D) FFFF E) FFVV

(37) Dado el polinomio : $P_{(2x+1)}=6x-1$

Se sabe que : $P_{\left(P_{(x)}-P_{(-x)}\right)}=ax-b$

Luego, calcule el valor de $a+b$

A) 14 B) 20 C) 16 D) 24 E) 22

(38) Halle la suma de coeficientes de un polinomio

$P_{(x)}$ de mínimo grado que cumple $(x-2)P_{(x)} \equiv P_{(x-1)}.x$. si $P_{(x)}$ es mónico.

A) 0 B) 1 C) -1 D) 2 E) -2

(39) Sea : $f\left(1-\frac{1}{x}\right)=\frac{x+1}{x-1};x>1$

Calcule el valor de n si :

se cumple que $f\left(\frac{1}{2}\right).f\left(\frac{2}{3}\right).f\left(\frac{3}{4}\right)....f\left(\frac{n}{n+1}\right)=45$

A) 8 B) 12 C) 10 D) 20 E) 25

(40) Si $P(x)$ es un polinomio que cumple :

$P(1-x)=3P(x)-mx-7$ cuyo término independiente es m, Calcule la suma de coeficientes.

A) 7 B) 6 C) 5 D) 3 E) 1

(41) Sean los polinomios :

$$f(x)=\sqrt{2}x^3-(2\sqrt{2}+1)x^2+(2-\sqrt{2})x+\sqrt{2}$$

$$G(x-1)=x.calcule\ f\left(G\left(\sqrt{2}\right)\right).$$

A) $\sqrt{2}-1$ B) $\sqrt{2}+1$ C) $1-\sqrt{2}$ D) $2\sqrt{2}$ E) $-\sqrt{2}$

(42) Sea $y=f(x)$ tal que $f(x)=x-1$ Indique el valor de $\frac{(x^3-y^3)^4+\sqrt[4]{4}}{(1+3xy)^4+\sqrt{2}}$ si se cumple que $x,y\in R^+$.

A) 1/3 B) 1/2 C) 1/4 D) 3/4 E) 1

(43) Si x es un número de modo que $10x^4+10x^2+4=3x^2-6$, ¿cuál es el valor de $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2$?

A) 10/13 B) 3/10 C) 10/3 D) 13/10 E) 1/5

MULTIPLICACIÓN POR COMPLEMENTO

Para poder aplicar este método, ambos números deben tener la misma cantidad de dígitos.

EJEMPLO :

para multiplicar 96×93.

PRIMERO :

Se calcula los complementos de cada número y se multiplica ambos complementos.

2 cifras 2 cifras

$96 \times 93 = ...28$

complemento 4×7

SEGUNDO :

Se resta a uno de los números el complemento del otro número. (Por ejemplo 93 – 4)

$96 \times 93 = 8\,928$

$4 - 7$

$93-4$

La operación ha culminado $96 \times 93 = 8\,928$

EJEMPLO :

Si desea multiplicar 87×91

2 cifras 2 cifras

$87 \times 91 = ...17$

complemento 13×9

117

• Se multiplican los complementos $13 \times 9 = 117$ escribo 17 y llevo 1.

$87 \times 91 = 7917$

13

$91-13+1$

• Se resta $91-13=78$ y se adiciona lo que llevo $78+1=79$.

La operación ha culminado $87 \times 91 = 7\,917$

EJERCICIO 1 :

Calcule la suma de las dos cifras centrales al multiplicar de manera abreviada $99\,9889 \times 99\,9968$

EJERCICIO 2 :

Calcule la suma de las cifras centrales al multiplicar de manera abreviada $99\,90000099 \times 99\,9955$

EJERCICIO 3 :

Calcule el producto de las dos cifras centrales al multiplicar de manera abreviada :

$89\,8888 \times 99\,99996$

CUARTA PRACTICA DIRIGIDA

01 Efectuar: $F=\dfrac{(x+5)^2-(x+11)(x-1)}{(x+3)^2-(x+5)(x+1)}$

A) 7 B) 6 C) 8 D) 9 E) –5

02 Simplificar:

$$E=\sqrt{\frac{(a^2+2ab-b^2)^2+(a^2-2ab-b^2)^2}{2}}$$

A) a^2-b^2 B) $2a^2$ C) $2b^2$ D) a^2+b^2 E) ab

03 Sea: $A=(x+1)(x+2)(x+3)$

$B=(x+2)(x+3)+(x+2)(x+4)$

Indicar: $\dfrac{A-x^3}{B-5x^2-8}$

A) 2 B) 3 C) 1 D) 0 E) x

04 Encontrar el valor de x^4-4x-4, si:

$$x=\sqrt{\sqrt{2}+1}+\sqrt{\sqrt{2}-1}$$

A) 4 B) 3 C) 1 D) 0 E) –2

05 Si: $a+b+c=2p$

calcular: $T=(p-a)^2+(p-b)^2+(p-c)^2+p^2$

A) $a+b+c$ B) abc C) $1+abc$
D) $a^2+b^2+c^2$ E) 1

06 Efectuar:

$$E=(x^2+1-x)(x^2+1+x)(x^6+1)(x^2-1)$$

Dar el valor de: $E+1$

A) 1 B) 0 C) x^6 D) x^2 E) x^{12}

07 Dados los números a, b, c tal que $a\neq b\neq c$, además $(a+b+c)^2=3(ab+ac+bc)$.

Calcular: $\dfrac{(a+b)^2+(a+c)^2+(b+c)^2}{a^2+b^2+c^2}$

A) 2 B) 4 C) 8 D) 5 E) 1

08 Calcular el valor de:

$$E=\frac{(x+a)(x+b)}{a+2x+b}-\frac{x^3}{ab}$$

si: $(a+2x+b)(a-2x+b)=(a-b)^2$

A) 11 B) 0 C) 4 D) 2 E) 3

09 Si: $a-\dfrac{1}{2}=2$, calcular:

$$\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)\left(a^3-\frac{1}{a^3}\right)$$

A) 78 B) 80 C) 82 D) 84 E) 86

10 Sea la expresión:

$$\frac{(a+b)^4-(a-b)^4}{(a^2+b^2)^2-(a^2-b^2)}=4$$

Calcular: $N=\dfrac{4a+2b}{4a-b}$

A) 1 B) 2 C) $\dfrac{3}{4}$ D) $\dfrac{5}{3}$ E) 4

11 Si se cumple: $\dfrac{x^4+1}{x^2}=5;\ x\neq 0$

señalar: $G=x^8+\dfrac{1}{x^8}$

A) 525 B) 527 C) 526 D) 528 E) 529

12 Dada la expresión:

$$2(x+y)^2+2(z+w)=(x+y+z+w)^2-(x+y-z-w)^2$$

calcular: $E=\left(\dfrac{x+y}{z+w}\right)^{10}$

A) 3 B) 4 C) 2 D) 1 E) 0

13 Reducir: $M=(x+1)(x-1)(x^4+x^2+1)$

si: $x=\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{3-\sqrt{5}}$

A) 99 B) 100 C) 1 000 D) 999 E) 1

14 Si: $a^3+b^3+c^3=ab+ac+bc$, simplificar:

$$E=\frac{(1-a)bc+(1-b)ac+(1-c)ab}{a(a-b)+b(b-c)+c(c-a)}$$

A) $a+b+c$ B) $a+b-c$ C) $a-b-c$ D) 0 E) 1

15 Si: $a+\dfrac{1}{a}=5$; calcular:

$$E=\sqrt{\frac{(a^5+a^3)(a^3+a)}{4a^5}}$$

A) $\dfrac{5}{2}$ B) $\dfrac{2}{5}$ C) 1 D) 2 E) 5

PRIMERA PRACTICA — EXPONENTES Y RADICALES

1) B	2) B	3) D	4) E	5) A	6) B	7) C	8) D	9) A	10) A
11) D	12) C	13) B	14) E	15) B	16) B	17) C	18) A	19) B	20) C
21) E	22) A								

SEGUNDA PRACTICA — ECUACIONES EXPONENCIALES

1) B	2) A	3) B	4) B	5) B	6) E	7) C	8) C	9) E	10) D
11) A	12) B	13) D	14) B	15) C	16) D	17) B	18) A	19) C	20) D

TERCERA PRACTICA — GRADOS Y POLINOMIOS

1) E	2) C	3) D	4) C	5) B	6) E	7) C	8) C	9) E	10) C
11) D	12) B	13) A	14) D	15) A	16) E	17) D	18) A	19) B	20) E
21) D	22) A	23) E	24) E	25) E	26) C	27) E	28) E	29) B	30) D
31) A	32) B	33) C	34) B	35) A	36) E	37) E	38) A	39) A	40) C

CUARTA PRACTICA

1) D	2) D	3) C	4) D	5) D	6) E	7) B	8) B	9) D	10) B
11) B	12) D	13) D	14) A	15) A					



OBJETIVOS :

Al finalizar la unidad, el alumno será capaz de:

* Reconocer los elementos y las propiedades de la división
* Efectuar la división usando los métodos de Horner y Ruffini
* Encontrar el resto de una división sin efectuar la operación (en ciertos casos)
* Reconstruir polinomios, bajo ciertas condiciones, usando la divisibilidad polinómica
* Conocer la importancia y aplicaciones del teorema del factor.

INTRODUCCIÓN :

Al empezar nuestra" historia matemática", desde muy pequeños vimos las primeras cifras ***1 ; 2 ; 3 ;... etc***. Y luego de eso, tratábamos de relacionarlas mediante las operaciones aritméticas fundamentales: suma(adición), resta(sustracción), multiplicación(producto) y división. Y es aquí donde, quizás para mucha gente, empieza el ***"GRAN DOLOR DE CABEZA"*** con respecto a las matemáticas, al tratar de resolver ejercicios un tanto más complejos. Sin embargo, esto no tiene necesariamente que ser así, pues la matemática puede ser disfrutada a plenitud aplicándola a hechos reales vividos día a día.

Debemos recordar que la primera operación vista fue:

LA SUMA(+), con ejercicios clásicos como lo son: ***2+2 ; 5+2***; etc. Posteriormente, vimos una operación opuesta a la anterior:

LA DIFERENCIA(–), y resolvimos ejercicios como. ***7 – 2 ; 5 – 1***, etc.

Luego conocimos lo que se denomina "suma abreviada", osea:

LA MULTIPLICACIÓN(×) y calculamos productos como: ***3×2; 5×4***,etc.

Y finalmente llegamos a una operación opuesta a la multiplicación:

LA DIVISIÓN(÷). Aquí, distinguimos los siguientes elementos:

Dividendo ⟵ 21 | 5 ⟶ Divisor
20   4 ⟶ Cociente
Residuo ⟵ 1

Bueno, pero a lo mejor te preguntas, "¿Y qué tiene que ver esto con el álgebra?", pues la respuesta es muy sencilla.

Toda nuestra "historia matemática" vivida de manera aritmética (es decir, utilizando únicamente números) será repetida, pero ahora de manera algebraica (es decir, utilizando polinomios).

La división de polinomios se origina con la división entera de números naturales, y hay una relación directa entre las propiedades de ambas divisiones. Así, las operaciones algebraicas de polinomios son análogas a las operaciones de los números naturales, de este modo, la adición y multiplicación de números naturales generan números naturales, en cambio, la sustracción y la división de los números naturales no siempre generan números naturales. Luego, para dividir enteros se creó el algoritmo de Euclides, y como consecuencia de la operación de división nace la teoría de la divisibilidad entre enteros, pero no solamente estos resultados se pueden aplicar para dividir números enteros, sino también se pueden aplicar para dividir polinomios y en forma análoga aplicar la divisibilidad entre polinomios.

DIVISIÓN DE POLINOMIOS

La operación de división tiene por objeto calcular dos polinomios denominados ***COCIENTE*** y ***RESIDUO*** , partiendo de dos polinomios conocidos: ***DIVIDENDO*** y ***DIVISOR.***

Dividendo ⟵ D(x) | d(x) ⟶ Divisor
Residuo ⟵ R(x)   Q(x) ⟶ Cociente

La división es un proceso en el cual, conocidos dos polinomios llamados ***DIVIDENDO*** y ***DIVISOR*** , se obtienen otros dos llamados ***COCIENTE*** y ***RESIDUO.***

$$D(x) \equiv d(x)\,q(x) + R(x)$$

Identidad fundamental de la división

*Donde:

- $D(x)$: **polinomio dividendo**
- $d(x)$: **polinomio divisor**
- $q(x)$: **polinomio cociente**
- $R(x)$: **polinomio residuo.**

*Además:

$°[D(x)] \geq °[d(x)] \geq 1$

$°[R(x)] < °[d(x)] \vee R(x) = 0$

EJEMPLO:

A partir de:

$$\underbrace{x^2}_{D} = \underbrace{(x+1)}_{d}\underbrace{(x-1)}_{q} + \underbrace{1}_{R}$$

podemos afirmar que: al efectuar la división $\frac{x^2}{x+1}$ se obtiene como cociente $q_{(x)} = x-1$ y como $x+1$ residuo $R_{(x)}=1$; donde además se puede observar que: $GA(R) < GA(d)$, pues $GA(R) = 0$ y $GA(d) = 1$.

OBSERVACIÓN

Para poder dividir dos polinomios estos deben encontrarse completos y ordenados.

EJEMPLOS:

① Sea el polinomio: $P(x) = 5x + 3 + 2x^2 + x^3$

Ordenando → $P(x) = x^3 + 2x^2 + 5x + 3$

② Sea el polinomio: $Q(x) = 3x^3 + 5x - 1$

Completando → $Q(x) = 3x^3 + 0x^2 + 5x - 1$

③ Sea el polinomio: $J(x) = 2x - x^2 + 3x^4 + 5$

Ordenando y Completando → $J(x) = 3x^4 + 0x^3 - x^2 + 2x + 5$

EJEMPLO:

$$\underbrace{x^3 - 3x + 4}_{D(x)} = \underbrace{(x-1)}_{d(x)}\underbrace{(x^2 + x - 2)}_{q(x)} + \underbrace{2}_{R(x)}$$

CLASES DE DIVISIÓN

De acuerdo a su resto, se pueden clasificar en:

I) DIVISIÓN EXACTA :

Es aquella que no deja residuo o que: $R(x) \equiv 0$. Con esto, el *ALGORITMO* de la *DIVISION* queda así: $D(x) = d(x).q(x)$

EJEMPLOS:

Al dividir $x^2 - x - 12$ entre $x + 3$ se obtiene:

$$\underbrace{x^2 - x - 12}_{D(x)} = \underbrace{(x+3)}_{d(x)}\underbrace{(x-4)}_{q(x)}$$

donde: $R(x) \equiv 0$

*Veamos a otro ejemplo :

$$\underbrace{x^2 + 13x + 34}_{D(x)} = \underbrace{(x+2)}_{d(x)}\underbrace{(x^2 - 2x + 17)}_{q(x)}$$

*Es una división exacta es decir: $R(x) \equiv 0$

II) DIVISIÓN INEXACTA :

Es aquella que sí deja residuo o que: $R(x) \neq 0$.

EJEMPLO:

Al dividir $x^3 - 2x + 6$ entre $x^2 + 2x - 1$, se obtiene:

$$\underbrace{x^3 - 2x + 6}_{D(x)} = \underbrace{(x^2 + 2x - 1)}_{d(x)}\underbrace{(x-2)}_{q(x)} + \underbrace{(7x+4)}_{R(x)}$$

donde: $R(x) \neq 0$

• A partir del algoritmo, dividiendo ambos miembros entre $d(x)$, se obtiene:

$$\frac{D_{(x)}}{d_{(x)}} = q_{(x)} + \frac{R_{(x)}}{d_{(x)}}$$

• La expresión del segundo miembro se denomina ***cociente completo*** y se denota por $Q(x)$; es decir:

$$Q_{(x)} = q_{(x)} + \frac{R_{(x)}}{d(x)}$$

EJEMPLO:

$$\underbrace{x^2 + 13x + 34}_{D(x)} \equiv \underbrace{(x+2)}_{d(x)}\underbrace{(x^2 - 2x + 17)}_{q(x)}$$

*Es una división exacta es decir: $R(x) \equiv 0$

OBSERVACIÓN:

Si $R(x) \equiv 0$, tenemos $D(x) \equiv d(x)q(x)$, luego podemos decir :
- $d(x)$ es divisor de $D(x)$
- $d(x)$ es factor de $D(x)$
- $D(x)$ es divisible por $d(x)$

EJEMPLO:

El polinomio $d(x) = x - 1$, es un factor de:

$D(x) = 3x^2 + 2x - 5$

*pues, $D(x)$ es divisible por $d(x)$, es decir :

$$\frac{D(x)}{d(x)} = \frac{3x^2 + 2x - 5}{x - 1} \Rightarrow R(x) \equiv 0$$

PROPIEDADES DE GRADOS

En cualquier caso, la división de polinomios se efectúa con respecto a una sola variable. Según esto, con respecto a esa variable, se cumple que:

* $GA(D) \geq GA(d)$
* $GA(q) = GA(D) - GA(d)$
* $GA(R) < GA(d)$
* $GA(R)máx = GA(d) - 1$

EJEMPLO :

Si $°[d(x)] = 3$, entonces el resto podría tener la forma : $R(x) = ax^2 + bx + c$.

Si $a = b = c = 0$, entonces $R(x) \equiv 0$

CASOS QUE SE PRESENTAN EN LA DIVISIÓN DE POLINOMIOS

DIVISIÓN DE MONOMIOS :

EJEMPLO:

Aplicando las leyes de los exponentes se tiene:

$$\frac{a_0 x^m}{b_0 x^n} = \frac{a_0}{b_0} x^{m-n} \text{ para } \quad b_0 \neq 0$$

$$\frac{8x^{17}}{24x^{12}} = \frac{8}{24} x^{17-15} = \frac{1}{3} x^5$$

DIVISIÓN DE UN POLINOMIO EN UN MONOMIO

Para dividir un polinomio entre un monomio se divide cada uno de los términos del polinomio separadamente entre el monomio divisor y se suma algebraicamente cada uno de estos términos. Es decir, aplicando la propiedad distributiva de la divisiòn se tiene:

$$\frac{a+b+c}{m} = \frac{a}{m} + \frac{b}{m} + \frac{c}{m}$$

EJEMPLO:

$$\frac{5x^4 - x^3 + 3x}{x} = \frac{5x^4}{x} - \frac{x^3}{x} + \frac{3x}{x} = 5x^3 - x^2 + 3$$

DIVISIÓN ENTRE DOS POLINOMIOS

La división de polinomios está definida para una variable tomada como referencia, a la cual se le llama variable ordenatriz.

MÉTODOS PARA DIVIDIR POLINOMIOS

Para dividir polinomios se utilizan los siguientes métodos:

- *Método clásico o general*
- *Método de los coeficientes separados*
- *Método de Horner*
- *Método de los coeficientes indeterminados*
- *Regla de Ruffini*

Antes de efectuar una división de polinomios, debemos observar que el dividendo y divisor sean polinomios completos y ordenados en forma descendente, con respecto a la variable ordenatriz. Si faltase algún término, ya sea en el dividendo o en el divisor, éste se completará con **"0"**.

Por su facilidad en su aplicación, debemos considerar como lo más importantes los métodos de Horner y de Ruffini.

A) MÉTODO CLÁSICO :

se emplea para la división de polinomios de cualquier grado ,para ello se tienen en cuenta los siguientes pasos:

*1)*Se completa y se ordena los polinomios dividendo y divisor con respecto a una sola variable (llamada ordenatriz) en forma descendente, en caso de que falten términos,estos se completan con cero . En caso de que halla dos variables se asume a una de ellas como tal y las demás hacen el papel de números o constantes .

*2)*Se divide el primer término del dividendo entre el primer término del divisor , obteniendose así el primer término del cociente ; luego este último se multiplica por cada uno de los términos del divisor y el producto asi obtenido se resta del dividendo , para lo cual se le cambia de signo colocando cada término con su semejante . en caso de que algún término de ese producto no tenga ningún término semejante en el dividendo , se escribe dicho término en el lugar que corresponde de acuerdo con la ordenación del dividendo y divisor.

*3)*Se baja el siguiente término del dividendo y se repite el paso anterior tantas veces hasta que el resto sea a lo más de un grado menos que el grado del divisor (resto de grado máximo) , o en todo caso hasta obtener cero como resto(división exacta).

EJEMPLO1:

*dividir $P(x)=6x^3-2x^2-15x+8$ entre $Q(x)=-5+2x^2$

RESOLUCIÓN:

*Se ordenan y se completan los polinomios de acuerdo a la potencias de x :

$$6x^3 - 2x^2 - 15x + 8 \quad \underline{|2x^2 + 0x - 5}$$

* Se divide término del dividendo entre el primer término del divsor :- $6x^3 \div 2x^2 = 3x$; se multiplica este resultado por el divisor $2x^2 + 0x - 5$ y se resta el producto del dividendo.

$$\begin{array}{l|l} 6x^3 - 2x^2 - 15x + 8 & \underline{2x^2 + 0x - 5} \\ \underline{-6x^3 + 0x^2 + 15x} & 3x \\ \quad -2x^2 + 0 & \end{array}$$

*Se baja el siguiente término del dividendo *(+8)* y se divide el primer término del dividendo parcial

entre el primer término del divisor $:-2x^2 \div 2x^2 = -1$; *continuando* el proceso hasta llegar a un residuo cuyo grado sea menor que el grado del divisor.

$$\begin{array}{l|l} 6x^3-2x^2-15x+8 & 2x^2+0x-5 \\ \cline{2-2} \underline{-6x^3+0x^2+15x} \downarrow & 3x-1 \\ \quad -2x^2+0+8 & \\ \quad \underline{+2x^2+0-5} & \\ \qquad\quad 3 & \end{array}$$

*luego :

COCIENTE: $3x-1$; ***RESTO :*** 3

EJEMPLO 2:

Dividir: $\dfrac{3x^{17}-4x^{12}+9x^{10}-4x^7+3x^5-2}{3x^5+2}$

RESOLUCIÓN:

* Efectuando, se tiene:

$$\begin{array}{l|l} 3x^{17}-4x^{12}+9x^{10}-4x^7+3x^5-2 & 3x^5+2 \\ \cline{2-2} \underline{-3x^{17}-2x^{12}} & x^{12}-2x^7+3x^5-1 \\ \quad -6x^{12}+9x^{10}-4x^7 & \\ \quad \underline{6x^{12} \qquad\quad 4x^7} & \\ \qquad -9x^{10}+3x^5 & \\ \qquad \underline{-9x^{10}-6x^5} & \\ \qquad\qquad -3x^5-2 & \\ \qquad\qquad \underline{3x^5+2} & \\ \qquad\qquad\quad 0 & \end{array}$$

*Como puede observar es una división exacta, donde:

Cociente: $q_{(x)} = x^{12}-2x^7+3x^5-1$

Residuo: $R_{(x)} \equiv 0$

B)MÉTODOS DE LOS COEFICIENTES SEPARADOS

Es un procedimiento similar a la de la metodología clásica, con la diferencia que en este caso, sólo se utilizan los coeficientes. Debemos tener en cuenta que a parte de la ordenación, tanto el dividendo como el divisor deben estar completos. Caso contrario, se sustituirán con CEROS los espacios correspondientes de los términos que faltasen.

EJEMPLO:

Dividir: $\dfrac{4x^6-7x^4+3x^3+8x+5}{2x+3}$

RESOLUCIÓN:

* Utilizando sólo los coeficientes, se tiene:

$$\begin{array}{rrrrrrr|l} 4 & 0 & -7 & 3 & 0 & 8 & 5 & 2 \;\; 3 \\ \cline{8-8} 4 & -6 & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & 2 \; -3 \; 1 \; 0 \; 0 \; 4 \\ \cline{1-2} & -6 & -7 & & & & & \\ & 6 & 9 & & & & & \\ \cline{2-3} & & 2 & 3 & & & & \\ & & -2 & -3 & & & & \\ \cline{3-4} & & & 0 & 0 & & & \\ & & & 0 & 0 & & & \\ \cline{4-5} & & & & 0 & 8 & & \\ & & & & 0 & 0 & & \\ \cline{5-6} & & & & & 8 & 5 & \\ & & & & & -8 & -12 & \\ \cline{6-7} & & & & & & -7 & \end{array}$$

Donde:

Cociente: $q_{(x)} = 2x^5-3x^4+x^3+4$

Residuo: $R_{(x)} = -7$

C) MÉTODO DE WILLIAM G. HORNER :

El esquema para efectuar la operación se muestra en la figura *1*. Sobre la línea horizontal y a la derecha de la línea vertical se ubica el dividendo; y a la izquierda de la vertical se coloca el divisor, el primer término por arriba de la horizontal con su propio signo y los demás términos por debajo de la misma pero con signo cambiado.

Se completa el esquema trazando una horizontal por la parte inferior y también una vertical, que separa a partir del final un número de coeficientes igual al grado del divisor. Suponiendo que ya se terminó con la operación, el cociente y el residuo se obtienen tal como se señala en la figura 2.

d	DIVIDENDO
i	
v	
i	
s	
o	
r	

figura 1

d	DIVIDENDO	
i		
v		
i		
s		
o		
r		
	COCIENTE	RESTO

figura 2

Se emplea para la división de polinomios de cualquier grado, para ello se tienen en cuenta los siguientes pasos:

1) Se completa y se ordena los polinomios dividendo y divisor con respecto a una sola variable (llamada ordenatriz). En caso de que halla dos variables se asume a una de ellas como tal y las demás hacen el papel de números o constantes .

2) Se distribuyen en forma horizontal los coeficientes del dividendo .

y en forma vertical los coeficientes del divisor con signo cambiado a excepción del primero.

3) Se traza una línea vertical separando tantas columnas a partir de la derecha , indicado por el grado del divisor ; de esta manera se marca la separación entre el cociente y residuo.

4) Se divide el primer coeficiente del dividendo entre el primero del divisor y se obtiene el primero del cociente . Luego este se multiplica por cada uno de los coeficientes del divisor que han cambiado de signo y el resultado se coloca en la segunda fila , corriendose un lugar a la derecha .

5) Se reduce la siguiente columna (se suman los coeficientes), y se repite el paso anterior tantas veces hasta que la última operación efectuada caiga debajo del último coeficiente del dividendo.

6) Se suman directamente los números que están en las columnas que corresponden a los coeficientes del residuo .

7) El grado del polinomio queda determinado por la diferencia entre los grados del dividendo y divisor ; y el grado del residuo queda determinado según la cantidad de términos.

ESQUEMA :



EN GENERAL:

Este es el métodos general para dividir polinomios. Consideremos los polinomios completos y ordenados:

$$D(x) = a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4$$

$$d(x) = b_0x^2 + b_1x + b_2$$

Donde: $a_0 \neq 0$ y $b_0 \neq 0$

Para mostrar el esquema de Horner.

Coeficientes de D(x)

Coeficientes de d(x)					
b_0	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4
$-b_1$		□	□		
$-b_2$			□	□	
				□	□
	q_0	q_1	q_2	r_0	r_1

Coeficientes de Q(x) — Coeficientes de R(x)

$$\Rightarrow Q(x) = q_0x^2 + q_1x + q_2 \wedge R(x) = r_0x + r_1$$

OBSERVACIÓN:

1) El primer coeficiente del divisor ***d (x)*** mantiene su signo, los demás coeficientes van con signo cambiado.

2) La línea (punteada) vertical que separa los coeficientes del cociente con el coeficiente del resto se traza contando desde el último coeficiente del dividendo, un número de espacios igual al grado del divisor.

En nuestro ejemplo $°[d(x)]=2$, luego 2 coeficientes del dividendo quedan a la derecha de la línea vertical.

EJEMPLOS ILUSTRATIVOS:

EJEMPLO 1 :

Efectúe la división e indique el cociente y el residuo de:

$$\frac{15x^5 - 11x^4 + 21x^3 - x^2 + 3}{3x^2 - x + 2}$$

Fíjese que falta el término en *"x"* en el dividendo. Trazando el esquema y completando con *"0"* aquel término, ubiquemos los coeficientes del dividendo y divisor como en el primer cuadro. Efectuando las operaciones correspondientes como se muestra en el segundo cuadro.

3	15	−11	21	−1	0	3
1						
−2						

3	15	−11	21	−1	0	3
1		5	−10			
−2		−6	−2	4		
			9	3	−6	
				6	2	−4
	5	−2	3	2	−4	−1

Luego, el cociente será: $q(x) = 5x^3 - 2x^2 + 3x + 2$, el resto: $R(x) = -4x - 1$ y el cociente completo será: $Q_{(x)} = 5x^3 - 2x^2 + 3x + 2 + \dfrac{-4x-1}{3x^2 - x + 2}$

EJEMPLO 2 :

Dividir: $\dfrac{8x^5+4x^4+6x^2+6x-1}{4x^2-4x+2}$

RESOLUCIÓN:

*colocando según el esquema los coeficientes del dividendo y divisor :

\# lugares = d° = 2

4	8	4	0	6	6	-1
4		8	-4			
			12	-6		
-2				8	-4	
					8	-4
	2	3	2	2	10	-5

(+, suma, por)

Coeficientes del "q" — Coeficientes del "R"

*solo se obtienen coeficientes , la variable se agrega de acuerdo al grado .

*asi tenemos : $q°=5-2=3$; $R°=2-1=1$

$$\rightarrow\begin{cases} q=2x^3+3x^2+2x+2 \\ R=10x-5 \end{cases}$$

EJEMPLO 3 :

Dividir: $\dfrac{6x^5+5x^4-4x^2-8x^3-6x+4}{2x^3+3x^2-1}$

RESOLUCIÓN:

*Aplicando el criterio general:

$D(x)=6x^5+5x^4-8x^3-4x^2-6x+4$

$d(x)=2x^3+3x^2+0x-1$

*Luego :

2	6	5	-8	-4	-6	4
-3		-9	0	3		
0			6	0	-2	
1				3	0	-1
	3	-2	-1	2	-8	-3

$q(x)=3x^2-2x-1$; $R(x)=2x^2-8x+3$

EJEMPLO 4 :

Dividir: $\dfrac{4x^4+9x^3+6x^5-1}{x+2x^3-1}$

RESOLUCIÓN:

*Preparando los polinomios:

$D(x)=6x^5+4x^4+9x^3+0x^2+0x-1$

$d(x)=2x^3+0x^2+x-1$

*Aplicando Horner :

2	6	4	9	0	0	-1
-0		0	-3	3		
-1		4	0	-2	2	
-1			6	0	-3	3
	3	2	3	1	-1	2

Coef. del $q_{(x)}$ — Coef. del $R_{(x)}$

Como $D(x)$ y $d(x)$ presenta todos sus términos y están presentados en forma descendente, entonces $q(x)$ y $R(x)$ también debe presentar todos sus términos y están orientados descendentemente.

Además como:

$grad[q]: 5-3=2$ y $max.grad.[R]: 3-1=2$

*se tiene: $q(x)=3x^2+2x+3$

$$R(x)=1x^2-1x+2=x^2-x+2$$

EJEMPLO 5 :

Halle el cociente y el resto de la división:

$$\frac{x^5-5x-4}{(x+1)^2}$$

Observe que faltan 3 términos en el dividendo, pues siendo de grado 5 debería tener 6 términos. Completando con "*ceros*" aquellos términos y desarrollando el divisor, el esquema queda así:

1	1	0	0	0	-5	-4
-2		-2	-1			
-1		-2	4	4		
			3	-6	-3	
				-4	8	4
	1	-2	3	-4	0	0

donde : $q(x)=x^3-2x^2+3x-4$

$R(x)=0$

EJEMPLO 6 :

Dividir: $\dfrac{x^4-3x+5x^2-3x^3+4}{x^2-3x+4}$

RESOLUCIÓN:

*Aplicamos el criterio general:

$D(x)=x^4-3x^3+5x^2-3x+4$

$d(x)=x^2-3x+4$

*Luego:

		+	+		
1	1	-3	5	-3	4
3		3	-4		
-4			0	3	
×		÷		3	-4
	1	0	1	0	0

$Q(x)=x^2+1$; $R(x)=0$

La división es exacta:

D) MÉTODO DE PAOLO RUFFINI

Es un caso particular del método de horner . Se utiliza cuando el divisor es de primer grado de la forma $x\pm b$ o en aquellas divisiones donde luego de un cambio de variable se obtiene un divisor de primer grado.

El esquema para dividir usando la regla de RUFFINI consiste en dos líneas, una horizontal y la otra vertical, tal como se muestra en la figura 3. El dividendo se coloca más arriba de la horizontal (a la derecha de la vertical) y a la izquierda de la vertical se coloca el "valor" que se obtiene para «x» luego de igualar el divisor a "0".

Se completa el esquema separando, con una vertical adicional, el último término del dividendo.

divisor=0	D I V I D E N D	O
	C O C I E N T E	Resto

PASOS A SEGUIR:

1) se ordena el dividendo con respecto a una letra y en caso de que falte una término se completa con ceros

2) En caso de que halla dos variables se asume a una de ellas como tal y las demás hacen el papel de números o constantes .

3) Se distribuyen los coeficientes del dividendo en forma horizontal , luego se despeja "x" del divisor igualando a cero al divisor y el resultado se coloca debajo de la siguiente columna.

4) Se baja el primer coeficiente del dividendo , siendo este el primer coeficiente del cociente , luego este valor se multiplica por el valor del divisor y el resultado se coloca debajo de la siguiente columna.

5) Se simplifica la siguiente columna y se repite el paso anterior tantas veces hasta la última operación efectuada caiga debajo del último coeficiente del dividendo .

6) Se reduce la última columna y el resultado será el valor del resto , y este siempre será un valor numérico.

OBSERVACIÓN :

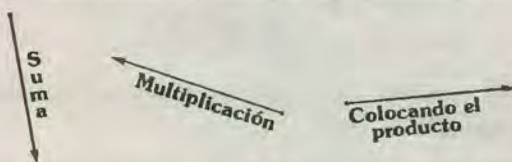
cuando el divisor es de la forma :

$ax\pm b$; *donde* $a\neq 1$ donde en este caso se procede en la forma similar al caso anterior pero al resultado del cociente obtenido se debe dividir entre el primer coeficiente del divisor .

ESQUEMA :

Aquí va el coeficiente independiente del divisor pero con signo opuesto	Coeficiente del dividendo	
	↓ + + + + ... +	
	Coeficiente del Cociente	Residuo

Las operaciones a realizar con los coeficientes son:



EJEMPLO GENERAL:

Consideremos los polinomios:

$$D(x)=a_0x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4$$

$$d(x)=Ax+B$$

donde: $a_0\neq 0 \wedge A\neq 0$

Para mostrar el Esquema de Ruffini.

Coeficientes de $D(x)$

$Ax + B = 0$	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4
$x = \frac{-B}{A}$	↓	□	□	□	□
	b_0	b_1	b_2	b_3	b_4
$\div A$	q_0	q_1	q_2	q_3	Resto

Coeficientes de $Q(x)$

$q(x) = q_0x^3 + q_1x^2 + q_2x + q_3 \wedge R(x) = R$

OBSERVACIONES:

I) El divisor $d(x) = Ax + B$ se iguala a cero y despejamos la variables $x = -\frac{B}{A}$ con este valor vamos a trabajar en el esquema.

II) Los coeficientes a_0 , b_1 , b_2 , b_3 aún son los coeficientes del cociente, debemos dividirlos por **A**, coeficiente principal del divisor, para hallar los coeficientes del divisor: q_0 , q_1 , q_2 , q_3

EJEMPLO 1 :

Dividir: $\dfrac{3x^4 + 2x^3 - 5x^2 + x + 1}{x - 1}$

RESOLUCIÓN :

*Completamos el diagrama con los coeficientes, teniendo mucho cuidado con los signos. Luego procedemos con las operaciones.

	3	2	–5	1	1
+1		3	5	0	1
	3	5	0	1	2

*El resultado será completado con las variables, obteniéndose

****Cociente :*** $\Rightarrow Q(x) = 3x^3 + 5x^2 + 0x + 1 = 3x^3 + 5x^2 + 1$

* Residuo : $R(x) = 2$

OJO : Aquí no es necesario dividir los coeficientes obtenidos pues el divisor $d(x)$ es mónico.

EJEMPLO 2 :

Dividir: $\dfrac{8x^4 + 10x^3 - x + 5}{4x - 3}$

RESOLUCIÓN:

* Aplicando el criterio general :

$D(x) = 8x^4 + 10x^3 + 0x^2 - x + 5$

$d(x) = 4x - 3$

* Luego :

$4x - 3 = 0$	8	10	0	-1	5
$x = \frac{3}{4}$	↓	6	12	9	6
×	8	16	12	8	11
$\div 4$	2	4	3	2	

$\Rightarrow q(x) = 2x^3 + 4x^2 + 3x + 2$; $R(x) = 11$

OJO :

En el esquema de Ruffini el resto obtenido siempre es una constante.

EJEMPLO 3 :

Halle el cociente y el resto de la división:

$$\frac{3x^5 - 10x^3 + x^2 + 5x - 1}{x - 2}$$

Completando con "0" el término que falta en el dividendo, el esquema queda como en el primer cuadro. Las operaciones se realizan como se muestra en el segundo cuadro.

$x-2=0$	3	0	–10	1	5	–1
$x=2$						

$x-2=0$	3	0	–10	1	5	–1
$x=2$	↓	6	12	4	10	30
	3	6	2	5	15	29

Como el coeficiente principal del divisor es igual a "1", el cociente es verdadero, luego:

$q(x) = 3x^4 + 6x^3 + 2x^2 + 5x + 15$

y el resto es: $R_{(x)} = 29$.

EJEMPLO 4 :

Dividir : $\dfrac{3x^4 - 7x^2 + 2x^3 - x + 5}{3x - 1}$

RESOLUCIÓN:

$3x - 10 = 0$	3	2	-7	-1	5
$x = \frac{1}{3}$	↓	1	1	-2	-1
×	$\frac{3}{3}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{-6}{3}$	$\frac{-3}{3}$	4
	1	1	-2	-1	

Verd. Coef. $q_{(x)}$

•Como $grad[q] = 4 - 1 = 3$, se tiene:

$q(x) = 1x^3 + 1x^2 - 2x - 1 = x^3 + x^2 - 2x - 1$

$\Rightarrow resto = 4$

EJEMPLO 5 :

Efectue la división: $\dfrac{4x^4 + 4x^3 + x^2 + 4x - 1}{2x + 3}$

Realizando el esquema de la división por Ruffini, se tiene que:

$2x+3=0$	4	4	1	4	-1
$x=-3/2$	↓	-6	3	-6	3
$\div 2$	4	-2	4	-2	2
	2	-1	2	-1	

Donde: $q(x) = 2x^3 - x^2 + 2x - 1$

$R(x) = 2$

Como el coeficiente principal del divisor es distinto de "*1*" entonces el cociente es falso. Luego, para hallar el cociente verdadero se divide el cociente resultante entre 2 como se indica en el cuadro.

EJEMPLO 6 :

Determine el cociente y el resto de dividir :

$$\frac{x^5 - 7x^2 + 3x + 6}{x + 2}$$

$x+2=0$	1	0	0	-7	3	6
$x=-2$	↓	-2		-8	30	-66
	1	-2	4	-15	33	-60

Donde: $q(x) = x^4 - 2x^3 - 4x^2 - 15x + 33$

$R(x) = -60$

TEOREMA DEL RESTO

El objetivo es hallar el resto de una división sin efectuarla ; este teorema se aplica por lo general cuando el divisor es de la forma $ax \pm b$, o también para cualquier expresión transformable a dicha forma .

ENUNCIADO:

En toda división de la forma: $P(x) \div (ax + b)$ el residuo es igual al valor numérico de $P(x)$ cuando $x = -\dfrac{b}{a}$

Es decir: $\dfrac{P(x)}{ax+b} \Rightarrow resto = P\left(-\frac{b}{a}\right)$

DEMOSTRACION:

Supongamos que queremos hallar el resto R de dividir $P(x)$ entre $(ax+b)$, entonces por el ALGORITMO de la división se tiene que:

$P(x) = d(x)q(x) + R$

$P(x) = d(x)q(x) + R$, pero: $ax + b = 0 \rightarrow x = -\dfrac{b}{a}$

luego reemplazan en el polinomio se tiene:

$$P\left(-\frac{b}{a}\right) = \underbrace{\left[a\left(-\frac{b}{a}\right) + b\right]}_{cero} q\left(-\frac{b}{a}\right) + R \Rightarrow R = P\left(-\frac{b}{a}\right)$$

ENUNCIADO :

Sea $P(x)$ un polinomio *NO CONSTANTE*. El resto de dividir $P(x)$ por $(x - m)$ viene dado por $P(m)$.

EJEMPLO:

○ $\dfrac{P(x)}{x-5} \Rightarrow Resto = P(5)$

○ $\dfrac{T(x)}{x+4} \Rightarrow Resto = T(-4)$

PROCEDIMIENTO PARA APLICAR EL TEOREMA DEL RESTO

I) El divisor se iguala a cero $(x - m = 0)$

Se iguala el divisor a "*0*". Si el divisor es de primer grado, se despeja "x". Si el divisor es de grado mayor que *1*, se despeja una expresión adecuada (por lo general, la mayor potencia de "x".

II) Se despeja la variable $(x = m)$

Se acomoda el dividendo, formando en él la expresión despejada anteriormente. Si el divisor es de primer grado, no es necesario realizar esto.

III) Se reemplaza en el dividendo $(P(m))$ obteniéndose el resto.

Es decir se reemplaza el valor de "x" (si el divisor es de primer grado) o el valor de aquella expresión (si el divisor es de grado mayor que *1*), en aquel dividendo. Luego de efectuar las operaciones correspondientes, el resultado que se obtiene es el resto.

EJEMPLO 1 :

Hallar el resto en la división: $\dfrac{3x^{11} + 4x^6 - 5x^3 - 1}{x+1}$

RESOLUCIÓN:

Por el teorema del resto:

• Igualando el divisor a "*0*" y despejando "x";

$x+1=0 \Rightarrow x-1$

* Reemplazando en el dividendo:

$P(-1)=3(-1)^{11}+4(-1)^{6}-5(-1)^{3}-1$

* Efectuando las operaciones correspondientes, el resto de la división será:

$$R=P_{(-1)}=-3+4+5-1 \Rightarrow R=5$$

EJEMPLO 2 :

Halle el resto en: $\dfrac{2x^5+x-60}{x-2}$

RESOLUCIÓN:

*Haciendo uso de la regla práctica :

I) El divisor se iguala a cero : $x-2=0$

II) Se elige una variable conveniente y se despeja esta variable. $x=2$

III) La variable elegida se busca en el dividendo para reemplazarlo por su equivalente, luego se realizan las operaciones indicadas y obtenemos el resto.

$$Resto=2(2)^5+2-60 \Rightarrow resto=6$$

OBSERVACIÓN:

Debe tenerse presente que el grado del resto es menor que el grado del divisor.

EJEMPLO 3 :

Hallar el resto de: $\dfrac{9x^7+27x^6-5x+7}{x+3}$

RESOLUCIÓN:

$$P(x)=9x^7+27x^6-5x+7$$

• Aplicando la regla práctica:

$$x+3=0 \Rightarrow x=-3$$

• Luego:

$R=P(-3)=9(-3)^7+27(-3)^6-5(-3)+7$

$\Rightarrow R=-3^2\times 3^7+3^3\times 3^6+15+7$

$\Rightarrow R=22$

EJEMPLO 4 :

Suponiendo que el polinómio P es de grado mayor que 0, halle el resto en cada caso:

• $\dfrac{P_{(x)}}{x+4} \Rightarrow R=P(-4)$

• $\dfrac{P_{(x)}}{2x-3} \Rightarrow R=P\left(\dfrac{3}{2}\right)$

EJEMPLO 5 :

Hallar el resto de dividir: $\dfrac{x^7+x^5+x^3+2x-3}{x^3-3}$

RESOLUCIÓN:

Usando el teorema del resto:

•Igualando el divisor a "0" y despejando la mayor potencia de "x" se tiene: $x^3-3=0 \to x^3=3$

Acomodando el dividendo: formando en este "x^3"

$D=(x^3)^2x+(x^3)x^2+(x^3)+2x-3$

• Reemplazando y efectuando las operaciones correspondientes, se obtiene el resto

$R_{(x)}=(3)^2x+(3)x^2+2x-3 \quad \to \quad R_{(x)}=3x^2+11x$

notese que éste resto es de menor grado que el divisor

EJEMPLO 6 :

Halle el resto de dividir: $\dfrac{2x^2+5x+3}{2x-1}$

RESOLUCIÓN:

* Siguiendo con la regla práctica, antes mencionada.

i) $2x-1=0$

ii) $x=\frac{1}{2}$

iii) $Resto=2\left(\frac{1}{2}\right)^2+5\left(\frac{1}{2}\right)+3$

$\Rightarrow Resto=\frac{1}{2}+\frac{5}{2}+3 \Rightarrow Resto=6$

EJEMPLO 7 :

Hallar el resto de: $\dfrac{x^6+3x^4+5x^2+6x-4}{x^2-1}$

RESOLUCIÓN :

$P(x)=x^6+3x^4+5x^2+6x-4$

* Aplicamos la regla práctica :

$x^2-1 \Rightarrow x^2=1$....*no se calcula "x"*

* Reescribiendo :

$P(x)=(x^2)^3+3(x^2)^2+5(x^2)+6x-4$

Luego : $R=1^3+3\times 1^2+5\times 1+6x-4$

$\Rightarrow R=1+3+5+6x-4$

$\Rightarrow R=6x+5$

EJEMPLO 8 :

Hallar el resto de la división: $\dfrac{(x+2)^{2n}+x^2+5}{(x+1)(x+3)}$

RESOLUCIÓN:

Aplicando el teorema del resto:

•Igualando el divisor a "0" y despejando la mayor potencia de "x" se tiene:

$(x+1)(x+3)=0 \Rightarrow x^2+4x+3=0 \Rightarrow x^2=-4x-3$

•Acomodando el dividendo:

$D=[(x+2)^2]^n+x^2+5 \to D=[x^2+4x+4]^n+(x^2)+5$

•Reemplazando y efectuando las operaciones correspondientes, se obtiene el resto:

$R=[-4x-3+4x+4]^n+(-4x-3)+5 \to R=[1]^n-4x-3+5$

$\Rightarrow R_{(x)}=-4x+3$

RESTOS ESPECIALES

La aplicación del teorema del resto resulta mucho más sencillo cuando el divisor contiene sólo dos términos y es de cualquier grado. Para esto, en algnos casos, previamente se debe transformar el divisor original en otro de sólos dos términos. Esto se consige multiplicando o dividiendo tanto al divividendo como al divisor; pero veamos que sucede con el resto,cuando se hace este artificio.

sabemos que: $D_{(x)}=d_{(x)}.q_{(x)}+R_{(x)}$

1) Si al dividendo y al divisor se les ***multiplica*** por un mismo polinomio $M_{(x)}(M_{(x)}\neq 0)$, entonces el resto queda multiplicando por el mismo polinomio $M_{(x)}$

$$\{D_{(x)}.M_{(x)}\}=\{d_{(x)}.M_{(x)}\}.q_{(x)}+\underbrace{R_{(x)}.M_{(x)}}$$

si luego de esta operación, aplicamos el teorema, lo que se obtendrá como resto será la parte señalada (resto falso). Para hallar el resto verdadero se ***divide*** aquel resto falso entre el polinomio $M_{(x)}$

$$R_{F(x)}=R_{(x)}.M_{(x)}\Rightarrow R_{(x)}=\frac{R_{F(x)}}{M_{(x)}}$$

EJEMPLO 1 :

Halle el resto de la siguiente división: $\dfrac{2x^{57}+x^{32}}{x^2+x+1}$

RESOLUCIÓN:

multiplicando el dividendo y el divisor por $(x-1)$:

$$\frac{(2x^{57}+x^{32})(x-1)}{(x^2+x+1)(x-1)}$$

operando: $\dfrac{2x^{58}-2x^{57}+x^{33}-x^{32}}{x^3-1}$

por el teorema del resto:

• $x^3-1=0\Rightarrow x^3=1$

•Acomodando el dividendo:

$D=2(x^3)^{19}x-2(x^3)^{19}+(x^3)^{11}-(x^3)^{10}x^2$

•Reemplazando:

$R=2(1)^{19}x-2(1)^{19}+(1)^{11}-(1^{10})x^2$

$\Rightarrow R=-x^2+2x-1 \quad\Rightarrow\quad R=-(x-1)^2$

Pero este resto es falso. Para hallar el resto verdadero, lo ***dividimos*** entre la expresión por la cual multiplicamos al inicio $(x-1)$:

$R_V=\dfrac{-(x-1)^2}{x-1}=-(x-1)\Rightarrow R_V=-x+1$

EJEMPLO 2 :

Calcule el resto en la división: $\dfrac{3x^{50}+x^{22}-2}{x^2-x+1}$

RESOLUCIÓN:

Como el trinomio (x^2-x+1) es parte de una suma de cubos, multiplicaremos por $(x+1)$ al dividendo y al divisor:

$\dfrac{(3x^{50}+x^{22}-2)(x+1)}{(x^2-x+1)(x+1)}\Rightarrow\dfrac{3x^{51}+3x^{50}+x^{23}+x^{22}-2x-2}{x^3+1}$

POR EL DEL TEOREMA DEL RESTO:

• $x^3+1=0\rightarrow x^3=-1$

•Acomodando el dividendo:

$D=3(x^3)^{17}+3(x^3)^{16}x^2+(x^3)^7x^2+(x^3)^7x-2x-2$

•Reemplazando:

$R=3(-1)^{17}+3x^2+(-1)^7x^2+(-1)^7x-2x-2$

Efectuando, el resto es:

$R=2x^2-3x-5 \quad\Rightarrow\quad R=(2x-5)(x+1)$

pero este resto es falso.

Entonces, para obtener el resto ***verdadero***, este resto falso se divide entre $(x+1)$ es decir:

$$R_V=\frac{(2x-5)(x+1)}{x+1}$$

Simplificando resulta: $R_V=2x-5$

2°) Si al dividendo y al divisor se les divide entre un mismo polinomio $M(x)$ $(M(x)\neq 0)$ entonces el resto también queda dividido entre el polinomio $M_{(x)}$.

$$\frac{D_{(x)}}{M_{(x)}}=\left\{\frac{d_{(x)}}{M_{(x)}}\right\}.q_{(x)}+\frac{R_{(x)}}{M_{(x)}}$$

Si, luego de esta operación aplicamos el teorema, lo que se obtendrá como resto será la parte señalada (resto falso). Para hallar el resto verdadero, se ***multiplica*** aquel resto falso por el polinomio $M(x)$.

$$R_{F(x)}=\frac{R_{(x)}}{M_{(x)}}\Rightarrow R_{(x)}=R_{F(x)}.M_{(x)}$$

EJEMPLO 1 :

Halle el resto de la división: $\dfrac{(x+1)^{11}(2x+7)}{(x+1)(x+2)}$

RESOLUCIÓN:

No podemos cancelar $(x+1)$ a nuestro libre albedrío; *lo* que tenemos que hacer es dividir al dividendo y divisor entre $(x+1)$, así:

$\dfrac{\dfrac{(x+1)^{11}(2x+7)}{x+1}}{\dfrac{(x+1)(x+2)}{x+1}}$; ahora sí, simplificando resulta:

$$\frac{(x+1)^{10}(2x+7)}{x+2}$$

Usando el teorema del resto:

•$x+2=0 \rightarrow x=-2$

•No hace falta acomodar el dividendo, reemplazando:

$R=(-2+1)^{10}[2(-2)+7] \Rightarrow R=3$

Pero este resto es falso. Para hallar el resto verdadero se ***multiplica*** aquel resto falso por la expresión entre la cual ***dividimos*** al inicio, $(x+1)$.

Entonces, se tendrá que:

$R_V=3(x+1) \rightarrow R_V=3x+3$

EJEMPLO 2 :

Determine el resto en:

$$\frac{(x-3)^{2n}(2x+1)}{(x-2)(x-3)};n\in N$$

RESOLUCIÓN:

Dividiendo el dividendo y el divisor entre $(x-3)$ y simplificando, se obtiene:

$$\frac{\frac{(x+3)^{2n}(2x+1)}{x-3}}{\frac{(x-2)(x-3)}{x-3}} \Rightarrow \frac{(x-3)^{2n-1}(2x+1)}{x-2}$$

Aplicando el teorema del resto:

•$x-2=0 \Rightarrow x=2$

•Reemplazando: $R_F=(-1)^{2n-1}(5) \Rightarrow R_F=-5$

Pero, este resto es falso, luego al ***multiplicar*** por $(x-3)$ encontramos el resto verdadero:

$R_V=R_F(x-3) \Rightarrow R_V=-5(x-3)$

DIVISIBILIDAD ALGEBRAICA

Se dice que un polinomio es divisible entre otro , si el resto de dividirlos es cero ; es decir : si en $P(x)\div d(x) \Rightarrow R=0$ **entonces** $P(x)$ **es divisible entre** $d(x)$.

Esto significa que existe un único polinomio $q_{(x)}$ tal que: $P_{(x)}\equiv d_{(x)}\times q_{(x)}$

También se dice que: "$d_{(x)}$ es un divisor o factor del polinomio $P_{(x)}$"

NOTA:

si un polinomio $P(x)$ es divisible por $x-a$ entonces se dice que $x-a$ es un factor de $P(x)$.

PROPIEDADES:

I) Si un polinomio $P(x)$ se anula para $x=a$ entonces dicho polinomio es divisible por $x-a$

II) Si un polinomio $P(x)$ es divisible separadamente por $x+a$; $x+b$; $x+c$, entonces también es divisible por el producto : $(x+a)(x+b)(x+c)$.

$$P(x)\equiv(x-a)\times q_{1(x)} \wedge P_{(x)}\equiv(x-b)\times q_{2(x)}$$
$$\Rightarrow P_{(x)}\equiv[(x-a)(x-b)]\times q_{(x)}$$

III) Si un polinomio $P(x)$ es divisible por el producto $(x+a)(x+b)(x+c)$, entonces $P(x)$es divisible separadamente por $x+a$; $x+b$; $x+c$.

Si un polinomio $P_{(x)}$ es divisible entre el producto $(x-a)(x-b)$, entonces $P_{(x}$ será divisible separadamente entre $(x-a)$ y $(x-b)$.

$$P_{(x)}\equiv[(x-a)(x-b)]\times q_{(x)}$$
$$\Rightarrow P_{(x)}\equiv(x-a)\times q_{1(x)} \wedge P_{(x)}\equiv(x-b)\times q_{2(x)}$$

IV) Si un polinomio se divide entre varias expresiones separadamente nos da un mismo resto, entonces al dividir dicho polinomio entre el producto de dichas expresiones también se obtiene el mismo resto .

$$P_{(x)}\equiv(x-a).\,q_{1(x)}+R \wedge p_{(x)}\equiv(x-b)\times q_{2(x)}+R$$
$$\Rightarrow P_{(x)}\equiv[(x-a)(x-b)]\times q_{(x)}+R$$

V) Si al dividendo y al divisor se les multiplica por un polinomio no nulo , entonces el cociente no se altera, pero el resto queda multiplicado por dicho polinomio.

VI) Si al dividendo y al divisor se les divide por un polinomio no nulo, entonces el cociente no se altera, pero el resto queda dividido por dicho polinomio.

EJEMPLOS:

* A partir de : $x^3-1==(x-1)(x^2+x+1)$
decimos que : x^3-1 es divisible entre $x-1$
ó también : $x-1$ es un divisor o factor de x^3-1

* De la identidad : $x^4-1\equiv(x^2+1)(x^2-1)$
decimos que : x^4-1 es divisible entre x^2+1
ó también : x^2+1 es un divisor o factor de x^4-1

* La identidad anterior también se puede escribir así: $x^4-1\equiv(x+1)(x^2+1)(x-1)$
de donde se puede decir que : x^4-1 es divisible entre $x+1$ o sino : $x+1$ es un divisor o factor de x^4-1

TEOREMA DEL FACTOR

Un polinomio $P_{(x)}$ se anula para $x=a$, esto quiere decir que $P_{(a)}=0$, si y sólo si $(x-a)$ factor de dicho polinomio. Es decir:

Dado un polinomio $P_{(x)}$ entonces:

$$P_{(a)}=0 \Leftrightarrow P_{(x)} \equiv (x-a)\times q_{(x)}$$

EJEMPLO 1 :

Si un polinomio cúbico mónico se anula para $x=6$ y para $x=2$. determinar dicho polinomio si la suma de sus coeficientes es 5 .

RESOLUCIÓN :

* aplicando la primera propiedad se deduce que el polinomio deseado será de la forma siguiente :

$$P(x)=(x-6)(x-2)Q(x)+0$$

donde $Q(x)=x-c$ *, ya que se trata de un polinomio cúbico y mónico .*

**pero como dato adicional tenemos a la suma de coeficientes (P(1)) que es igual a 5 , es decir :* $P(1)=5$

$\Rightarrow (1-6)(1-2)(1-c)=5 \Rightarrow c=0$

**** con lo que el polinomio pedido será :***

$$P(x)=(x-6)(x-2)x=x^3-8x^2+12x$$

EJEMPLO 2 :

El polinomio $P_{(x)}=x^4-5x+4$ se anula para $x=1$: $P_{(1)}=1-5+4=0$, entonces $(x-1)$ es un factor de $P_{(x}$, es decir:

$P_{(x)} \equiv (x-1).\ q_{1(x)}$

De la misma forma que en el caso anterior se tiene que:

- $P_{(4)}=0 \Rightarrow P_{(x)} \equiv (x-4)\times q_{2(x)}$
- $P_{(-2)}=0 \Rightarrow P_{(x)} \equiv (x+2)\times q_{3(x)}$

Nótese que los cocientes en cada caso son diferentes.

EJEMPLO 3 :

determinar el resto al dividir : $\dfrac{x^{357}+x^2+1}{x^2+x+1}$

RESOLUCIÓN :

*multiplicando dividendo y divisor por $(x-1)$se obtendrá:

$$\frac{\left(x^{357}+x^2+1\right)(x-1)}{\left(x^2+x+1\right)(x-1)}=\frac{x^{358}-x^{357}+x^3-x^2+x-1}{x^3-1}$$

*ahora por el teorema del resto : $x^3-1=0 \Rightarrow x^3=1$

*transformando el dividendo :

$$\left(x^3\right)^{119}x-\left(x^3\right)^{119}+x^3-x^2+x-1$$

*luego el resto será :

$$R_{falso}=(1)^{119}x-(1)^{119}+1-x^2+x-1$$

$$\rightarrow R_{falso}=-x^2+2x-1=-(x-1)^2$$

*luego el resto verdadero se obtendrá dividiendo R_{falso} entre $(x-1)$:

$$R(x)=\frac{-(x-1)^2}{(x-1)}=-(x-1)=1-x$$

COCIENTES NOTABLES

Son aquellos cocientes que se pueden obtener en forma directa sin necesidad de efectuar la operación de división.

CONDICIONES QUE DEBEN CUMPLIR:

$$\frac{x^m \pm y^m}{x \pm y}$$

Donde: x ; bases iguales

$m \in \mathbb{Z}^+$; $m \geq 2$

CASOS:

I) Si: $R=0 \rightarrow \dfrac{x^m \pm y^m}{x \pm y}=q(x)$

$\Rightarrow$ ***Cociente entero o exacto (C.N.)***

II) Si: $R \neq 0 \rightarrow \dfrac{x^m \pm y^m}{x \pm y}=q(x)+\dfrac{R(x)}{x \pm y}$

$\Rightarrow$ ***Cociente completo.***

*También según la combinación de signos se puede realizar ***4*** casos :

DIVISIÓN SEGÚN SU FORMA	COCIENTES $n \in \mathbb{Z}$
$\frac{x^n-y^n}{x-y}$	$=\underbrace{x^{n-1}+x^{n-2}y+x^{n-3}y^2+...+y^{n+1}}_{\text{Cociente Notable}};\forall n$
$\frac{x^n+y^n}{x-y}$	$=x^{n-1}+x^{n-2}y+x^{n-3}y^2+...+y^{n-1}+\frac{2y^n}{x-y}$
$\frac{x^n+y^n}{x+y}$	$x^{n-1}-x^{n-2}y+x^{n-3}y^2-...+y^{n-1}$ $\forall n$ *impar* $=x^{n-1}-x^{n-2}y+x^{n-3}y^2-...+y^{n-1}+\frac{2y^n}{x-y}$ $\forall n$ *par (Cociente Notable)*
$\frac{x^n-y^n}{x+y}$	$x^{n-1}-x^{n-2}y+x^{n-3}y^2-...+y^{n-1}$ $\forall n$ *par (Cociente Notable)* $x^{n-1}-x^{n-2}y+x^{n-3}y^2-...+y^{n-1}$ $\forall n$ *impar (Cociente Notable)*

CONDICIÓN NECESARIA Y SUFICIENTE PARA OBTENER UN C.N.

De: $\dfrac{x^m \pm y^n}{x^p \pm y^q}$ se debe cumplir:

$\boxed{\frac{m}{p}=\frac{n}{p}=r}$; $r \in \mathbb{Z}^+$

Además:

$r \rightarrow$ indica el número de términos de $q(x)$

FÓRMULA DEL TÉRMINO GENERAL DE UN C.N.

Es una fórmula que nos permite encontrar un término cualquiera en el desarrollo de los **C.N.** sin necesidad de conocer los demás.

De la división: $\dfrac{x^n \pm y^n}{x \pm y}$

a) Si: $d(x) = x - y \Rightarrow t_k = x^{n-k}y^{k-1}$

b) Si : $d(x) = x + y$

$$t_k = (-1)^{k-1}x^{n-k}\ y^{k-1}$$

Donde:

- $t_k \longrightarrow$ *término de lugar k*
- $x \longrightarrow$ *1er. término del divisor*
- $y \longrightarrow$ *2do. término del divisor*
- $n \longrightarrow$ *número de términos de q(x)*

OBSERVACIONES SOBRE COCIENTES NOTABLES

*El polinomio cociente tendrá tantos términos como unidades tenga el exponente común de las bases en el numerador .

*El cociente se caracteriza por ser completo y ordenado respecto a sus bases además de ser homogéneo respecto a las mismas .

*El primer término del desarrollo se obtiene dividiendo el primer término del dividendo entre el primer témino del divisor.

*A partir del segundo término los exponentes de la primera base disminuyen de uno en uno , mientras que los de la segunda van aumentando de uno en uno .

* Si el divisor es el binomio diferencia *(x-a)* todos los términos del cociente serán positivos ; en cambio si es el binomio suma *(x+a)* los términos del cociente serán alternados (positivos del lugar impar y negativos de lugar par)

EJEMPLOS:

$$\frac{x^5 - y^5}{x - y} = x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4$$

$$\frac{x^4 + y^4}{x + y} = x^3 - x^2y + xy^2 - y^3 + \frac{2y^4}{x+y}$$

(Cociente Completo)

$$\frac{x^{12} - y^{12}}{x^3 - y^3} = x^9 + x^6y^3 + x^3y^6 + y^9 \text{.....(C.N.)}$$

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1:

Dividir: $\dfrac{2x^5 - x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 2}{2x^3 - x^2 + 5}$

e indicar la diferencia entre el cociente y el resto.

A) $2x^2$ *B)* 0 *C)* -3 *D)* 4 *E)* $x-3$

RESOLUCIÓN:

*Primero completamos los polinomios:

$D(x) = 2x^5 - x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 0x + 2$

$d(x) = 2x^3 - x^2 + 0x + 5$

*Llevamos al esquema:

2	2	-1	2	5	0	2
1		1	0	-5		
1		(0)	0	0	0	
-5			(2)	1	0	-5
	1	0	1	1	0	-3
	q(x)			R(x)		

$q(x) = 1x^2 + 0x + 1 = x^2 + 1$

$R(x) = 1x^2 + 0x - 3 = x^2 - 3$

* Piden: $q(x) - R(x) = x^2 + 1 - (x^2 - 3) = 4$

RPTA: "D"

PROBLEMA 2 :

Divida e indicar el cociente, de: $\dfrac{x^3 - 2x - 3}{x - 2}$

A) $x^2 - 2x + 1$ *B)* $x^2 + x - 1$ *C)* $x^2 - x + 1$

D) $x^2 + 2x + 2$ *E)* $x^2 + 2x - 2$

RESOLUCIÓN:

x–2=0	1	0	–2	–3
x=2	↓	2	4	4
	1	2	2	1

Coef. $q_{(x)}$: 1 2 2

* Entonces: $Q(x) = x^2 + 2x + 2$

RPTA: "D"

PROBLEMA 3:

Dividir: $\dfrac{3x^5 - 7x^4 + 4x^2 + 5x - 6}{x - 2}$ e indicar el residuo

A) 1 *B)* 2 *C)* 4 *D)* 6 *E)* –2

RESOLUCIÓN:

*Regla: $x-2=0 \rightarrow x=2$

3	3	–7	0	4	5	–6
2	↓	6	–2	–4	0	10
	3	–1	–2	0	5	4

*Los elementos de división obtenidos son:

*Cociente: $Q(x)=3x^4-x^3-2x^2+5$

*Residuo: $R_{(x)}=4$

RPTA: "C"

PROBLEMA 4:

Luego de efectuar la división: $\dfrac{6x^6+x^5-2x^3-3x^2-2x+2}{2x^3-3x^2+-1}$, la suma de coeficientes del cociente es:

A)13 B)24 C)21 D)28 E)47

RESOLUCIÓN:

Usando el método de Horner:

2	6	1	0	–2	–3	–2	2
3		9	–3	3			
–1		10	15	–5	5		
1			12	18	–6	6	
				14	21	–7	7
	3	5	6	7	17	–3	9

Finalmente: $q(x) = 3x^3 + 5x^2 + 6x + 7$, luego la suma es: $S = 21$.

RPTA: "C"

PROBLEMA 5 :

Si el resto de la división: $\dfrac{8x^5+4x^3+mx^2+nx+p}{2x^3+x^2+3}$ es $5x^2-3x+7$

Halle el valor de: $m + n + p$.

A)13 B)24 C)27 D)28 E)47

RESOLUCIÓN:

* Aplicando el método de Horner:

2	8	0	4	m	n	p
–1		–4	0	–12		
0		–4	2	0	6	
–3			6	–3	0	–9
	4	–2	3	m–15	n+6	p–9

Luego el residuo es:

$$R(x)=(m-15)x^2+(n+6)x+p-9$$

Por dato se tiene:

$$(m-15)x^2+(n+6)x+p-9=5x^2-3x+7$$

Identificando el polinomio se tiene que:

$$m=20\ ,\ n=-9\ \text{y}\ p=16$$

Finalmente la suma es: $m+n+p=27$

RPTA: "C"

PROBLEMA 6 :

Luego de efectuar la división, halle la suma de los coeficientes del cociente.

$$\frac{12x^5-5x^4+12x^3+11x^2-13x+3}{3x+1}$$

A)1 B)8 C)4 D)3 E)2

RESOLUCIÓN:

Usando la regla de Ruffini:

3x+1=0	12	–5	12	11	–13	3
x=–1/3	↓	–4	3	–5	–2	5
	12	–9	15	6	–15	8
÷3						
	4	–3	5	2	–5	

Luego el cociente es: $q(x) = 4x^4-3x^3+5x^2+2x-5$

Finalmente, la suma de los coeficientes del cociente es: $S = 3$.

RPTA: "D"

PROBLEMA 7 :

Dividir: $\left(4x^5+3x^2-2x^3+2x-1\right)\div\left(x-3\right)$

e indicar la suma de coeficientes del cociente

A)16 B)801 C)401 D)28 E)472

RESOLUCIÓN:

* Ordenando y completando:

x–3=0	4	0	–2	3	2	–1
x=3 → 3	↓	12	36	102	315	951
	4	12	34	105	317	950
	$Q_{(x)}$					R

$\rightarrow Q(x)=4x^4+12x^3+34x^2+105x+317$

$R=950$

* Se pide: $4+12+34+105+317=472$

RPTA: "E"

PROBLEMA 8 :

Si se divide el polinomio :

$\left(x^5+2x^4-3x^3-2k-m\right)\div\left(x-2\right)$, el resto o residuo

es 4. Hallar "m".

A)1 B)2 C)32 D)44 E)0

RESOLUCIÓN:

x−2=0	1	2	−3	0	−2	−m
x=2 → 2	↓	2	8	10	20	36
	1	4	5	10	18	36−m

$^* R = 36 - m = 4$...................... (por dato)

$\Rightarrow M = 36 - 4 \Rightarrow M = 32$

RPTA: "C"

PROBLEMA 9 :

Si el resto de la división:

$$\frac{mx^{78} - 2x^{38} + 4x^6 - 3x^3 + 7x^2 - 5x + 1}{x^4 + 1}$$

carece del término cuadrático, calcule el valor de "m".

A)6 B)5 C)7 D)9 E)1

RESOLUCIÓN:

Aplicando el teorema del resto se tiene:

$x^4 + 1 = 0 \Rightarrow x^4 = -1$

$P(x) = m(x^4)^{19}x^2 - 2(x^4)^9x^2 + 4(x^4)x^2 - 3x^3 + 7x^2 - 5x + 1$

Luego:

$R(x) = P[x^4 = -1] = -3x^3 + (5-m)x^2 - 5x + 1$

Como el resto carece de término cuadrático se tiene: $m = 5$.

RPTA: "B"

PROBLEMA 10 :

Obtener el resto al dividir:

$$\left(3x^{12} - 4x^9 - x^6 - 2x^3 - 1\right) \div \left(x^3 + 2\right)$$

A)60 B)70 C)72 D)79 E)80

RESOLUCIÓN:

* Haciendo transformaciones:

$3\left(x^3\right)^4 - 4\left(x^3\right)^3 - \left(x^3\right)^2 - 2\left(x^3\right) - 1$ entre $\left(x^3\right) + 2$

* Haciendo el cambio de variable $x^3 = y$, entonces:

$\left(3y^4 - 4y^3 - y^2 - 2y - 1\right) \div (y + 2)$

y+2=0	1	−4	−1	−2	−1
y=−2 → −2	↓	−6	20	−38	80
	3	−10	19	−40	79

$Q(x) = 3y^3 - 10y^2 + 19y - 40$, como $y = x^3$,

*Entonces:

$Q(x) = 3\left(x^3\right)^3 - 10\left(x^3\right)^2 + 19\left(x^3\right) - 40$

$Q(x) = 3x^9 - 10x^6 + 19x^3 - 40$ y $R = 79$

RPTA: "D"

PROBLEMA 11 :

Luego de calcular el resto en:

$\dfrac{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)(x^2+5)}{x^2+5x+1}$, señale el coeficiente de su término lineal.

A)−60 B)−70 C)−75 D)79 E)80

RESOLUCIÓN:

Agrupando convenientemente los factores y efectuando, se tiene que:

$$\frac{(x^2 + 5x + 6)(x^2 + 5x + 4)(x^2 + 5x - 5x + 5)}{x^2 + 5x + 1}$$

haciendo el cambio de variable $y = x^2 + 5x$, se tiene:

$\dfrac{(y+6)(y+4)(y+5-5x)}{y+1} \Rightarrow y + 1 = 0 \Rightarrow y = -1$

Luego el resto es: $R(x) = -75x + 60$, entonces el coeficiente del término lineal es: -75

RPTA: "C"

PROBLEMA 12 :

Dividir

$$\frac{x^5 + 2bx^4 + b(a+2b)x^3 - \left(a^3 - b^3\right)x^2 + ax + ab}{x - a + b}$$

e indicar el término independiente del cociente

A)1 B)b C)a D)2a E)2b

RESOLUCIÓN:

*aplicando ruffini :

$x - a + b = 0 \rightarrow x = a - b$

	1	2b	$ab+2b^2$	a^3+b^3	a	ab
a−b	↓	a−b	a^2-b^2	a^3-b^3	0	a^2-ab
	1	a+b	a^2+ab+b^2	0	a	a^2

* Cociente:

$Q(x) = x^4 + (a+b)x^3 + \left(a^2 + ab + b^2\right)x^2 + a$

* Residuo: $R(x) = a^2$

* Se pide: "a"

RPTA: "C"

PROBLEMA 13 :

Si se divide el polinomio :

$x^6 - 2x^5 + 4x^4 - 2x^3 - 3x^2 + px + q$ separadamente entre $(x+1)$ y $(x-1)$ los residuos son 3 y 5 respectivamente. Hallar : $p + q$.

A)3 B)4 C)7 D)8 E)5

RESOLUCIÓN:

	1	–2	4	–2	–3	p	q
–1	↓	–1	3	–7	9	–6	6–p
	1	–3	7	–9	6	(p–6)	(q–p+6)

$R_1=q-p+6=3$

	1	–2	4	–2	–3	p	q
1	↓	1	–1	3	1	–2	p–2
	1	–1	3	1	–2	(p–2)	(q+p–2)

$R_2=q+p-2=5$

$\longrightarrow p+q=5$

RPTA: "E"

PROBLEMA 14 :

Halle el resto de dividir: $\dfrac{3(x+1)^{15}-(x+1)^{8}+2}{x^2+2x+2}$

A) $x+1$ B) $2x+5$ C) 0 D) $-3x-2$

RESOLUCIÓN:

Aplicando el teorema del resto se tiene:

$(x+1)^2=-1 \Rightarrow P(x)=3\left[(x+1)^2\right]^7(x+1)-\left[(x+1)^2\right]^7+2$

$\Rightarrow R(x)=-3(x+1)+1$

Finalmente, el resto es: $R(x)=-3x-2$

RPTA: "D"

PROBLEMA 15:

Halle un polinomio $P(x)$ de tercer grado que sea divisible separadamente entre $(x+3)$ y $(x-2)$, que su suma de coeficientes sea **12** y que su término independiente es **12**. Dar el resto de dividir: $P_{(x)}$ entre $(5x+5)$.

A) 6 B) 13 C) 12 D) 24 E) 42

RESOLUCIÓN:

Aplicando la $1°$ propiedad de la divisibilidad y por el algoritmo de la división se tiene:

$P(x)=(x+3)(x-2)q(x) \Rightarrow P(x)=(x+3)(x-2)(ax+b)$

Por dato: $P(1)=12$ y $P(0)=12$, entonces $a=5$ y $b=-2$

Luego el polinomio es: $P(x)=(x+3)(x-2)(5x-2)$

Por el teorema del resto: $R=P(-1) \rightarrow R=42$

RPTA: "E"

PROBLEMA 16 :

Un polinomio $P_{(x)}$ de tercer grado, al dividirlo entre $(x-1)$, $(x+2)$ y $(x-3)$ da el mismo resto **3**. Si se divide $P_{(x)}$ entre $(x+1)$ se obtiene como resto **19**.

Calcule $P_{(4)}$

A) 6 B) 13 C) 39 D) 24 E) 18

RESOLUCIÓN:

*Por el algoritmo de la división se tiene:

$P(x)=(x-1)(x+2)(x-3)q(x)+3$

$\Rightarrow P(x)=(x-1)(x+2)(x-3)k+3$

Pero $P(-1)=19$, entonces se tiene que $k=2$

Finalmente el polinomio es:

$P(x)=2(x-1)(x+2)(x-3)+3 \Rightarrow P(4)=39$

RPTA: "C"

PROBLEMA 17 :

Halle el término independiente del polinomio $P_{(x)}$ de tercer grado sabiendo que al dividirlo separadamente entre $(x-5)$ y $(x-4)$ deja el mismo resto **4**, pero si se le divide entre $(x+1)$ y $(x-1)$ deja como resto **34** y **40** respectivamente.

A) 44 B) 43 C) 12 D) 24 E) 18

RESOLUCIÓN:

Por el algoritmo de la división se tiene:

$P(x)=(x-5)(x-4)q(x)+4$

$\Rightarrow P(x)=(x-5)(x-4)(ax+b)+4$

Por dato se tiene que: $P(-1)=34$ y $P(1)=40$, luego: $a=1$ y $b=2$

Finalmente el polinomio es:

$P(x)=(x-5)(x-4)(x+2)+4 \Rightarrow P(0)=44$

RPTA: "A"

PROBLEMA 18 :

Al dividir $2F(x)+3$ entre $(x-1)$ el residuo es **29**; al dividir $4F(x)+x$ entre $(x-2)$ el residuo es **110**. Halle el residuo de dividir $F(x)$ entre el producto $(x-1)(x-2)$.

A) $x+3$ B) $14x-1$ C) $1+x$ D) $3x$ E) 0

RESOLUCIÓN:

Por el algoritmo de la división se tiene que:

$F(x)=(x-1)(x-2)q(x)+ax+b$

Pero por dato se tiene: $2F(1)+3=29$ y $4F(2)+2=110$. de donde se obtiene: $F(1)=13$ y $F(2)=27$, reemplazando en el polinomio se determina que: $a=14$ y $b=-1$

Finalmente el residuo es: $R(x)=14x-1$.

RPTA: "B"

PROBLEMA 19 :

Halle el resto en: $\dfrac{7(x-2)^7+5(x+3)^6+1}{(x-2)(x-3)}$

A) $6-x$ B) $13+2x$ C) 12 D) $12x-28$

RESOLUCIÓN:

Por el algoritmo de la división se tiene que:

$7(x-2)^7+5(x-3)^5+1=(x-2)(x-3)q(x)+ax+b$

Por dato se tiene:

Si $x = 2 \Rightarrow 2a + b = -4$

Si $x = 3 \Rightarrow 3a + b = 8$

Resolviendo el sistema se tiene: $a = 12$ y $b = -28$

Finalmente, el resto es: $R(x) = 12x - 28$

RPTA: "D"

PROBLEMA 20:

Determine el resto en: $\dfrac{2x^{78}+3x^{74}-x^{71}+x+3}{x^4+x^3+x^2+x+1}$ e indique el coeficiente del término lineal.

A) 6 B) 1 C) 12 D) – 3

RESOLUCIÓN:

Multiplicando el dividendo y divisor por el factor $(x-1)$ y simplificando se tiene:

$\dfrac{2x^{76}+x^{75}-3x^{74}-x^{72}+x^{71}+x^2+2x-3}{x^5-1}$, por el teorema del resto para $x^5 = 1$, se tiene que el resto falso resultante es:

$R_F(x) = -3x^4 + 5x - 2 = (x-1)(-3x^3 - 3x^2 - 3x + 2)$

Luego el resto verdadero es:

$$R_V(x) = \frac{R_F(x)}{x+1} = -3x^3 - 3x^2 - 3x + 2$$

$$R_V(x) = -3x^3 - 3x^2 - 3x + 2$$

Finalmente, el coeficiente del término lineal es: -3.

RPTA: "D"

PROBLEMA 21:

Si al dividir $P(x)$ separadamente entre $(x-2)$ y $(x-3)$ se obtiene el mismo residuo 5, el término principal del polinomio es $2x^3$ y el término independiente es 17. Determine el resto de la división: $P(x)/(x-1)$.

A) 6 – x B) 13 C) 12 D) 12

RESOLUCIÓN:

Por el algoritmo de la división se tiene:

$P(x)=(x-2)(x-3)Q(x)+5 \Rightarrow P(x)=(x-2)(x-3)(2x+B)+5$

Para:

$x=0 \Rightarrow P(0) = (-2)(-3)B+5 = 17 \Rightarrow B=2$

Luego el polinomio buscado es:

$P(x) = (x-2)(x-3)(2x+2) + 5$ Finalmente, el resto es:

$x=1 \Rightarrow P(1) = (-1)(-2)(4) + 5 \Rightarrow P(1)=13$

RPTA: "B"

PROBLEMA 22 :

Al dividir un polinomio cúbico de coeficiente principal 3 entre (x^2-9), se obtiene como residuo 6. Además, el término independiente del polinomio es -3. Luego, halle el resto de dividir el polinomio entre $(x-2)$.

A) 6 B) 22 C) 0 D) –29 E) x+3

RESOLUCIÓN:

Por el algoritmo de la división se tiene:

$$P(x) = (x-3)(x+3)Q(x) + 6$$

Usando el dato del problema se tiene:

$$P(x) = (x-3)(x+3)(3x+B) + 6$$

Pero: $x=0 \Rightarrow P(0)=(-3)(3)(B)+6=-3 \Rightarrow B=1$

Luego el polinomio es:

$$P(x)=(x-3)(x+3)(3x+1)+6$$

Finalmente el resto es: $P(2) = -29$

RPTA: "D"

PROBLEMA 23:

Al dividir un polinomio $P(x)$ entre $(x-3)$ el residuo es 6, pero al dividir $P(x)$ entre $(x+3)$ el resto es 0. Luego, halle el resto de dividir $P(x)/(x^2-9)$.

A) 6 B) x C) 0 D) 2–x E) x+3

RESOLUCIÓN:

Por el algoritmo de la división se tiene:

$$P(x) = (x-3)(x+3)Q(x) + Ax + B$$

Usando los datos se tiene que:

$P(3) = 6 \Rightarrow 3A+B=6$

$P(-3)=0 \Rightarrow -3A+B=0$

Resolviendo el sistema resulta : $A = 1 \wedge B = 3$

Finalmente el resto es: $R(x) = x + 3$

RPTA: "E"

PROBLEMA 24 :

En el esquema de Horner mostrado, determinar el valor de:

1	3	a	1	b	c
m		9	d		
2			e	f	
				g	h
	n	–2	p	4	–3

A) 6 B) 13 C) 12 D) 24 E) 18

RESOLUCIÓN:

Del esquema:

- $n = 3$
- $mn = 9 \Rightarrow m = 3$
- $2n = d \Rightarrow d = 6$
- $a + 9 = -2 \Rightarrow a = -11$
- $-2m = e \Rightarrow e = -6$
- $-4 = f$
- $1 + d + e = p \Rightarrow p = 1$
- $pm = g \Rightarrow g = 3$
- $2p = h \Rightarrow h = 2$
- $b + f + g = 4 \Rightarrow b = 5$

♦ $c + h = -3 \Rightarrow c = -5$

♦ **Luego:**

$(m + n + p) - (a + b + c) = 7 - (-11) = 18$

RPTA: "E"

PROBLEMA 25 :

Del esquema de Paolo Ruffini.

	A	B	C	D	E	F
−1	↓	1	3	5	7	9
	ℓ	d	c	b	a	0

Determinar la sumatoria de coeficientes del polinomio dividendo.

A) 0 *B) 30* *C) 70* *D) −30* *E) −50*

RESOLUCIÓN:

• Del esquema:

• $A = \ell$ • $\ell(-1) = 1 \Rightarrow \ell = -1 = A$

• $B + 1 = d$ • $d(-1) = 3 \Rightarrow d = -3$; $B = -4$

• $C + 3 = c$ • $c(-1) = 5 \Rightarrow c = -5$; $C = -8$

• $D + 5 = b$ • $b(-1) = 7 \Rightarrow b = -7$; $D = -12$

• $E + 7 = a$ • $a(-1) = 9 \Rightarrow a = -9$; $E = -16$

• $F + 9 = 0 \Rightarrow F = -9$

$\Rightarrow A + B + C + D + E + F = -50$

RPTA: "E"

PROBLEMA 26 :

Si al dividir $5x^3+6x^4-1$ entre $x + 3x^2-2$ se obtiene un resto de la forma $mx + n$, calcular $m-n$.

A) 0 *B) 1* *C) 2* *D) −2* *E) −1*

RESOLUCIÓN:

•Efectuando la división por Horner

•Recuerde completar el dividendo

3	6	5	0	0	−1
−1		−2	4		
2			−1	2	
				−1	2
	2	1	1	1	1

R(x)

•Entonces:

$R(x) = x + 1 \equiv mx + n$............................(dato)

*de aquí : $m = 1$ y $n = 1$

$\Rightarrow m - n = 0$

RPTA: "A"

PROBLEMA 27 :

Hallar $m + n$, sabiendo que la división:

$$\frac{3x^5 + mx^3 + nx^2 - x + 2}{x^2 + 3}$$

Da un residuo $5x - 10$.

A) 0 *B) −1* *C) −3* *D) 11* *E) 7*

RESOLUCIÓN:

•Por Horner :

1	3	0	m	n	−1	2
0		0	−9			
−3			0	0		
				0	(−3m +27)	
					0	−3n
	3	0	(m− 9)	n	(−3m+ 26)	(2−3n)

R(x)

OBSERVACIÓN:

$R(x) = (-3m + 26)x + (2 - 3n)$

$\equiv 5x - 10$......................(dato)

*de aquí: $-3m + 26 = 5 \longrightarrow m = 7$

$2 - 3n = -10 \longrightarrow n = 4$

$\Rightarrow m + n = 11$

RPTA: "D"

PROBLEMA 28 :

Sea: $Q(x) = ax^2 + bx + c$

el cociente de la división de $2x^4 + 3x^3 - 8x^2 + 1 - 4x$ entre $x^2 - (x + 1)$

Calcular : $a - b + c$

A) 0 *B) 2* *C) 4* *D) −4* *E) 1*

RESOLUCIÓN:

* Dividimos por Horner :

1	2	3	−8	−4	1
1		2	2		
1			5	5	
				−1	−1
	2	5	−1	0	0

Q(x)

OBSERVACIÓN:

$Q(x)=2x^3+5x-1\equiv ax^2+bx+c$ .....(dato)

*de aquí: $a=2$; $b=5$ y $c=-1$

$\Rightarrow a-b+c=-4$

RPTA: "D"

PROBLEMA 29 :

Al efectuar la división:

$$\frac{8x^5+14x^4+5x^3+16x^2+3x+2}{4x^2+x+3}$$

Se obtiene su residuo:

$(5m+4n)x+(m+2n)$

Encontrar el valor de: $m^{\frac{m}{n}}$

A) 0,25 *B) 1* *C) 0,5* *D) 0,125* *E) -1*

RESOLUCIÓN:

*Dividimos por Horner:

4	8	14	5	16	3	2
–1		–2	–6			
–3			–3	–9		
				1	3	
					–2	–6
	2	3	–1	2	4	–4

R(x)

* de aquí:

$R(x)=4x-4\equiv(5m+4n)x+(m+2n)$

OBSERVACIÓN:

$5m+4n=4$ y $m+2n=-4$

• Resolviendo el sistema: $m=4$; $n=-4$

$$\Rightarrow m^{\frac{m}{n}}=4^{-1}=\frac{1}{4}$$

RPTA: "A"

PROBLEMA 30 :

Halle la suma de coeficientes del polinomio lineal que se le debe restar al dividendo de la división:

$(8x^4+2x^3+2x+3)\div(1+3x+4x^2)$ para que sea exacta:

A) 6 *B) 4* *C) 7* *D) -3* *E) 5*

RESOLUCIÓN:

$$\frac{8x^4+3x^3+2x+3}{4x^2+3x+1}$$

*por horner :

4	÷ 8	+ 2	+ 0	+ 2	+ 3
- 3		$\frac{-6}{-4}$	-2		
			$\frac{3}{1}$		
- 1				$\frac{-3}{4}$	$\frac{-1}{4}$
	2	- 1	$\frac{1}{4}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{11}{4}$

Coef. Cociente · Coef. Resto

• Luego: $R(x)=\frac{9}{4}x+\frac{11}{4}$

• Se le debe restar: $R(x)=\frac{9}{4}x+\frac{11}{4}$

• Suma de coeficientes: $R=\frac{9}{4}+\frac{11}{4}=5$

RPTA: "E"

PROBLEMA 31 :

Si al dividir: $P(x)\equiv ax^4+bx^3+cx^2+3x+1$ entre x^2-x+1 se obtiene un cociente cuya suma de coeficientes es 22 y un resto $R(x)=10x-1$. Hallar $a+c$.

A) 133 *B) 42* *C) 57* *D) 61* *E) 50*

RESOLUCIÓN:

* Aplicando Horner :

1	a	b	c	3	1
+1		a	$-a$		
-1			$(a+b)$	$(-a-b)$	
				$(b+c)$	$(-b-c)$
	a	$(a+b)$	$(b+c)$	10	-1

q(x) · Dato

OBSERVACIÓN:

•$3-a+c=10\Rightarrow c-a=7$

•$1-b-c=-1\Rightarrow b+c=2$

*Recordando : $a+b=-5$

*Por dato: $q(1)=a+\underbrace{(a+b)}_{-5}+\underbrace{(b+c)}_{2}=22$

$a-3=22\Rightarrow a=25$

$c=32\Rightarrow a+c=57$

RPTA: "C"

PROBLEMA 32 :

Calcular «a», sabiendo que la división:

$\frac{x^4+7x^2+ax+16}{x+2}$ es exacta.

A) 20 B) 30 C) –7 D) 0 E) 31

RESOLUCIÓN:

•Utilizando el teorema del resto.

I) Haciendo el divisor a cero:

$x+2=0 \longrightarrow x=-2$

•Reemplazando este valor en el dividendo:

$Resto=(-2)^4+7(-2)^2+a(-2)+16$

•Ahora consideremos el dato que la división es exacta, entonces el resto es igual a cero:

$16+28-2a+16=0 \longrightarrow a=30$

RPTA: "B"

PROBLEMA 33 :

El resto de la siguiente división:

$$\frac{9x^{105}-3x^{60}+5x^{21}-6x^{12}+x^3+7}{x^3-1}\ ;\ \text{es}$$

A) 9 B) – 6 C) –16 D) 13 E) 6

RESOLUCIÓN:

•Aplicando el teorema de restos:

I) $x^3-1=0 \longrightarrow x^3=1$

•Reemplazando este valor en el dividendo:

$Resto=9(x^3)^{35}-3(x^3)^{20}+5(x^3)^7-6(x^3)^4+x^3+7$

$Resto=9(1)^{35}-3(1)^{20}+5(1)^7-6(1)^4+1+7=13$

RPTA: "D"

PROBLEMA 34 :

Hallar el resto de:

$$\frac{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)+x^2-4}{x^2+5x-1}$$

A) $x+12$ B) 7 C) $2x-7$ D) $-5x+3$ E) $-5x+32$

RESOLUCIÓN:

* Por el teorema del resto:

I) $x^2+5x-1=0 \longrightarrow x^2+5x=1$

II) $Resto=(\underbrace{x^2+5x}_{1}+4)(\underbrace{x^2+5x}_{1}+6)+x^2-4$

$\Rightarrow Resto=5\times 7+x^2-4=35+1-5x-4$

$\Rightarrow Resto=-5x+32$

RPTA: "E"

PROBLEMA 35 :

Calcular el sexto término del cociente al dividir :

$$\frac{x^{38}-b^{38}}{x^2-b^2}$$

A) $x^{24}b^{12}$ B) $x^{30}b^{16}$ C) $x^{26}b^{10}$

D) 1 E) $x^{32}b^{14}$

RESOLUCIÓN:

* Sabemos que:

Si : $\dfrac{a^n-b^n}{a-b} \longrightarrow \underbrace{T_K=a^{n-k}b^{k-1}}_{Término}$

* En lo dado:

$$\frac{(x^2)^{19}-(b^2)^{19}}{x^2-b^2} \longrightarrow T_6=(x^2)^{19-6}(b^2)^{6-1}$$

$\Rightarrow T_6=x^{26}b^{10}$

RPTA: "C"

PROBLEMA 36 :

Si A es el penúltimo término del cociente notable generado por : $\dfrac{x^{40}+y^{10}}{x^4+y}$

Hallar A

A) x^9y^8 B) $-x^4y^8$ C) x^4y^8 D) x^8y^9 E) $-x^8y^9$

RESOLUCIÓN:

de términos del C.N. $=\dfrac{40}{4}=10$

•Donde A ocupa el lugar 9 (penúltimo)

•Luego:

$$t_9=(x^4)^{10-9}\ y^{9-1}$$

$$\to A=x^4\ y^8$$

RPTA: "C"

PROBLEMA 37 :

Si al efectuar la siguiente división:

$$\frac{x^{2a+3b+26}-y^{5a+2b-12}}{x^5-y^3}$$, se obtiene un cociente notable cuyo número de términos es 11.

Hallar: $\dfrac{a}{b}$

A) $\dfrac{5}{7}$ B) $\dfrac{7}{5}$ C) $\dfrac{17}{15}$ D) $\dfrac{17}{5}$ E) $\dfrac{17}{3}$

RESOLUCIÓN:

•Si es un cociente notable se debe cumplir :

$$\frac{2a+3b+2b}{5}=\frac{5a+2b-12}{3}=11$$

•Efectuando convenientemente.

$5a+2b=45$..............(I)

$2a+3b=29$..............(II)

$\oplus$ $15a+6b=135$............(3I)

$-4a-6b=-5$..............(-2II)

$11a=77$

$a=7\ ;\ b=5$

•Entonces: $\frac{a}{b}=\frac{7}{5}$

RPTA: "B"

PROBLEMA 38 :

El residuo de la división:

$$2x^5+7x^4-50x^3-173x^2-22x+60$$

entre $x^2-2x-15$ es:

A) 0 B) x^2-x^{-2} C) $2x+4$ D) $2x-4$ E) $x+4$

RESOLUCIÓN:

*Aplicando el método de Horner:

1	2	7	–50	–173	–22	60
		4	30			
2			22	165		
15				4	30	
					–8	–60
	2	11	2	–4	0	0 (Residuo)

→ ***Residuo : 0***

RPTA: "A"

PROBLEMA 39 :

El residuo de la división del polinomio:

$$x^4-2x^2y+(y-z)^2-2x^2z$$

entre $x-\sqrt{y}-\sqrt{z}$ es:

A) $z-y$ B) 0 C) $y-z$ D) $2x\sqrt{z}$ E) $-2x\sqrt{z}$

RESOLUCIÓN:

*Aplicando el método de Ruffini:

	1	0	$-2y-2z$	0	$(y-z)^2$
$\sqrt{y}+\sqrt{z}$	↓	$\sqrt{y}+\sqrt{z}$			
			$y+z+2\sqrt{yz}$		
				$-(\sqrt{y}+\sqrt{z})(\sqrt{y}-\sqrt{z})^2$	$-(y-z)^2$
	1	$\sqrt{y}+\sqrt{z}$	$-(\sqrt{y}-\sqrt{z})^2$	$-(\sqrt{y}-\sqrt{z})(y-z)$	0

* ***Entonces: r=0***

RPTA: "B"

PROBLEMA 40 :

Determine el valor de «n» para que:

$$x^4+3x^3-5x^2+mx-n$$

sea divisible entre: x^2+x-2

A) 12 B) 10 C) 8 D) -6 E) -10

RESOLUCIÓN:

* Aplicando el método de Horner:

1	1	3	–5	m	–n
		–1	2		
–1			–2	4	
2				6	–10
	1	2	–5	$(m+9)$	$(-n-10)$

(Residuo: $(m+9)$ $(-n-10)$)

* Como el residuo es nulo:

$\rightarrow m+9=0\rightarrow m=-9$

$\rightarrow -n-10=0\rightarrow n=-10$

RPTA: "E"

PROBLEMA 41 :

Determinar m y n para que el polinomio:

$$4x^4+2x^3-mx^2+3x+n$$

Sea divisible por: x^2-2x+1.

Indicar el valor de: $m+n$

A) 17 B) 13 C) 15 D) 14 E) 16

RESOLUCIÓN:

*Por el método de Horner:

1	4	2	–m	3	n
		8	–4		
2			20	–10	
				$32-2m$	$m-16$
–1					
	4	10	$(16-m)$	$(25-2m)$	$(m+n-16)$

* Por ser divisible:

$25-2m=0\rightarrow m=\frac{25}{2}g$

$m+n-16=0\rightarrow m+n=16$

RPTA: "E"

PROBLEMA 42 :

Qué valores deberán tomar "a" y "b" para que el polinomio: x^5-ax+b sea divisible entre: x^2-4

A) $a=0;\ b=12$ B) $a=8;\ b=16$
C) $a=4;\ b=-16$ D) $a=16;\ b=0$

RESOLUCIÓN:

* Dividiendo por el método de Horner:

1	1	0	0	0	–a	b
0		0	4			
			0	0		
4				0	16	
					0	0
	1	0	4	0	$(a-16)$	b

* Por ser divisible: $a-16=0\rightarrow a=16$

$\rightarrow b=0$

RPTA: "D"

PROBLEMA 43 :

Se sabe que: x^4+mx^2+n

es divisible por: x^2+x+1

entonces: $m+n$ es igual a:

A) 6 B) 5 C) 4 D) 3 E) 2

RESOLUCIÓN:

*Utilizando el método de Horner:

1	1	0	m	0	n
		-1	-1		
-1			1	1	
				$-m$	$-m$
-1					
	1	-1		$(1-m)$	$(n-m)$

* Por ser divisible:

$1-m=0 \to m=1$

$n-m=0 \to n=m$ ó $n=1$

* Entonces : $m+n=2$

RPTA: "E"

PROBLEMA 44 :

El residuo de la división:

$$\frac{6x^4-x^3y-6x^2y^2+5xy^3-3y^4}{2x^2+xy-2y^2}$$

es igual a: (-16), cuando "y" es igual a:

A) -3 B) 0 C) 2 D) 5 E) 3

RESOLUCIÓN:

* Dividiendo por el método de Horner:

2	6	$-y$	$-6y^2$	$5y^3$	$-3y^4$
$-y$		$-3y$	$6y^2$		
			$2y^2$	$-4y^3$	
$2y^2$				$-y^3$	$2y^4$
	3	$-2y$	y^2	0	$-y^4$

$\underbrace{0-y^4}_{Residuo}$

*Por dato: $-y^4=-16$

*de donde: $y=2$

RPTA: "C"

PROBLEMA 45 :

Cuál es el valor de «m» para que:

$$2mx^2-m^2x^2-8x$$

sea divisible por: x^2-x-m

A) 2 B) $\frac{4}{3}$ C) -2 D) 1

RESOLUCIÓN:

*Empleando el método de Horner:

1	$2m$	0	$-m^2$	-8	0
1		$2m$	$2m^2$		
			$2m$	$2m^2$	
m				m^2+2m	m^3+2m^2
	$2m$	$2m$	(m^2+2m)	$(3m^2+2m-8)$	(m^3+2m^2)

*Por ser divisible:

$3m^2+2m-8=0 \to (3m-4)(m+2)=0$

* $m=\frac{4}{3}$ ó * $m=-2$

*También: $m^2(m+2)=0 \to m=0$ ó $m=-2$

*El único valor común para los 2 pares de soluciones es $m=-2$

RPTA: "C"

PROBLEMA 46 :

Qué valor debe darse a «m» para que el polinomio :

$$x^3-max^2+ma^2x-a^3$$

sea divisible por : x^2-ax+a^2

A) a B) 2 C) $-a^2$ D) 3

RESOLUCIÓN:

* Dividiendo por el método de Horner:

1	1	$-ma$	ma^2	$-a^3$
a		a	$-a^2$	
$-a^2$			a^2-ma^2	$-a^3+ma^3$
	1	$a-ma$	0	(ma^3-2a^3)

* De donde, para que sea divisible:

$a^3(m-2)=0 \to m=2$

RPTA: "B"

PROBLEMA 47 :

Si la siguiente división :

$$\frac{(2x^4+5x^3y+y^4+7y^3x+6y^2x^2)}{(2x^2+y^2+xy)}$$

Tiene como polinomio cociente:

$Q_{(x;y)}=x^2+axy+by^2$

Tiene como polinomio resto: $R_{(x;y)}=cy^3x+dy^4$

Entonces el valor de: $N=abcd$ es:

A) $-\frac{21}{11}$ B) $-\frac{21}{8}$ C) $-\frac{21}{10}$ D) $-\frac{21}{5}$ E) $-\frac{21}{4}$

RESOLUCIÓN:

*Ordenando los polinomios:

$$\frac{2x^4+5x^3y+6x^2y^2+7xy^3+y^4}{2x^2+xy+y^2}$$

* Dividiendo por Horner:

2	2	$5y$	$6y^2$	$7y^3$	y^4
$-y$		$\frac{-y}{4y}$	$-y^2$		
$-y^2$			$\frac{-2y^2}{3y^2}$	$-2y^3$	
				$-\frac{3}{2}y^3$	$-\frac{3}{2}y^4$
	1	$2y$	$\frac{3}{2}y^2$	$\frac{7}{2}y^3$	$-\frac{1}{2}y^4$

$$\rightarrow Q_{(x;y)} = x^2 + 2xy + \frac{3}{2}y^2 \equiv x^2 + axy + by^2$$

$$\wedge \; R_{(x;y)} \equiv \frac{7}{2}xy^3 - \frac{1}{2}y^4 \equiv cy^3x + dy^4$$

$$\rightarrow a = 2 \wedge b = \frac{3}{2} \wedge c = \frac{7}{2} \wedge d = -\frac{1}{2}$$

* Entonces:
$$N = abcd = -\frac{21}{4}$$

RPTA: "E"

PROBLEMA 48:

Si la siguiente división: $\frac{3x^5 + mx^3 + nx^2 - x + 2}{x^2 + 3}$

Da como residuo $5x - 10$, entonces el valor de $T = m + n$ es :

A)11 B)5 C)1 D)7 E)4

RESOLUCIÓN:

* Aplicando Horner:

1	3	0	m	n	–1	2
0		0	–9			
–3			0	0		
				0	6	
					0	–12
	3	0	–2	4	5	–10

* ***De la 3ra columna : m=7***
* ***De la 4ta columna : n=4***
* ***Luego: T=m+n=11***

RPTA: "A"

PROBLEMA 49:

Si al dividir el polinomio: $4x^4 - 4x^3 + mx^2 + nx + 2$ entre $x^2 + 1$, se obtiene un residuo tal que elevado al cuadrado es igual al cociente, entonces los valores de m y n respectivamente son:

A)5 y –2 B)5 y –6 C)–2 y 5
D)–6 y 5 E)–5 y 6

RESOLUCIÓN:

* Por dato: $R^2_{(x)} \equiv q_{(x)}$
* Luego por Horner:

1	4	–4	m	n	2
0		0	–4		
–1			0	4	
				0	4–m
	4	–4	m–4	n+4	6–m

$$\rightarrow q_{(x)} = 4x^2 - 4x + (m-4) \wedge R_{(x)} = (n+4)x + 6 - m$$

*Como $q_{(x)}$ es cuadrado perfecto, entonces:

$m - 4 = 1 \rightarrow m = 5$

*Luego: $\left[(n+4)x + 1\right]^2 \equiv 4x^2 - 4x + 1$

$$(n+4)^2x^2 + \underline{2(n+4)}x + 1 \equiv 4x^2 - \underline{4x} + 1$$

$$\rightarrow 2(n+4) = -4 \rightarrow n = -6$$

*Entonces: $m = 5 \wedge n = -6$

RPTA: "B"

PROBLEMA 50 :

El esquema siguiente muestra la división de dos polinomios según la regla de Horner:

a	e	–2b	d	c
b		bd	3d	
c			bf	cf ; b=a+e
	d	f	e	c

Entonces el valor de:

$T = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2$ es:

A)222 B)227 C)232 D)237 E)242

RESOLUCIÓN:

*De la 1ra columna : $e = ad$ ....(I)

*Al efectuar los productos: $cd = 3d \rightarrow c = 3$

*En la 4ta columna: $3 + 3f = 3 \rightarrow f = 0$

*Ahora en la 2da columna: $-2b + bd = f \rightarrow d = 2$

*En la ***3ra*** columna: $d + 3d + bf = e \rightarrow e = 8$

*En (I): $8 = a(2) \rightarrow a = 4$

* Pero por dato: $b = a + e \rightarrow b = 12$
* Entonces:

$$T = 4^2 + 12^2 + 3^2 + 2^2 + 8^2 + 0^2 = 237$$

RPTA: "D"

PROBLEMA 51 :

Si la siguiente división: $\left(x^5 + x^3 + ax^2 + b\right)$ entre $\left(x^3 + x^2 + cx + 1\right)$ es exacta, entonces el valor de $T = abc$ es:

A)1 B)2 C)–4 D)8 E)–12

RESOLUCIÓN:

*Aplicando Horner:

1	1	0	1	a	0	b
–1		–1	–c	–1		
–c			1	c	1	
–1				c–2	c^2-2c	c–2
	1	–1	2–c	0	0	0

*De la ***5ta*** columna:

$$1 + c^2 - 2c = 0 \rightarrow (c-1)^2 = 0 \rightarrow c = 1$$

* En la 4ta columna:
  $a-1+c+c-2=0 \to a=1$
* En la 6ta columna: $b+c-2=0 \to b=1$
* Luego: $T=abc=1$

RPTA: "A"

PROBLEMA 52 :

Si la siguiente división:

$\left(3mx^5+3nx^4+\left(5m^2+3p\right)x^3+9mnx^2+mnpx+n^2\right)$

entre: $\left(mx^2+nx+p\right)$ es exacta, entonces el valor de $T=\frac{p}{m}(m-16)$, es:

A)5 B)$\frac{5}{4}$ C)$\frac{2}{3}$ D)$\frac{4}{5}$ E)$\frac{3}{4}$

RESOLUCIÓN:

* Aplicando Horner:

m	3m	3n	$5m^2+3p$	9mn	mnp	n^2
–n		–3n	–3p			
–p			0	0		
				–5mn	–5mp	
					$-4n^2$	–4mp
	3	0	5m	4m	0	0

*De la 6ta columna:

$n^2-4np=0 \to n=4p$ ....(I)

* De la 5ta columna: $mnp-5mp-4n^2=0$

*Reemplazando (I):

$m(4p)p-5mp-4(4p)^2=0 \to 4p(m-16)=\frac{5m}{4}$

* Luego: $T=\frac{5\frac{m}{4}}{m}=\frac{5}{4}$

RPTA: "B"

PROBLEMA 53:

Si la división: $\frac{Ax^4+Dx^3+Cx+D}{Dx^3+E}$ es exacta, entonces una relación entre los coeficientes de la división es:

A)$D+E=C+A$ B)$AC=E$ C)$AD=EC$
D)$A+D=C$ E)$AC=DE$

RESOLUCIÓN:

*Aplicando Horner:

D	A	D	0	C	D
0		0	0	$-\frac{AE}{D}$	
0					
–E			0	0	–E
	$\frac{A}{D}$	1	0	0	0

*De la 5ta columna: $D-E=0 \to D=E$

*De la 4ta columna: $C-\frac{AE}{D}=0 \to C=A$

*Multiplicando : $D=E$

*con: $A=C$, se obtiene: $AD=EC$

RPTA: "C"

PROBLEMA 54 :

Hallar el valor de «p», para que al dividir el polinomio:

$$4x^3-5x^2-(1+p)x+7p+9$$

entre $(x+1)$ el resto de la división es cero.

A)$\frac{1}{7}$ B)$-\frac{1}{7}$ C)$-\frac{1}{8}$ D)$-\frac{1}{6}$ E)$-\frac{1}{3}$

RESOLUCIÓN:

* Por el teorema del resto: $x+1=0 \to x=-1$
* Luego:
  $R=4(-1)^3-5(-1)^2-(1+p)(-1)+7p+9=0$
* Efectuando:

$-5-5+1+p+7p+9=0 \to 8p+1=0 \to p=-\frac{1}{8}$

RPTA: "C"

PROBLEMA 55 :

Sea $2x^3+10x^2-14x-3$, ¿cuánto hay que aumentarle al coeficiente de x^2 para que la división entre $(x-3)$ sea exacta?.

A)11 B)12 C)-10 D)-11 E)12

RESOLUCIÓN:

* Del enunciado la división:

$\frac{2x^3+(10+a)x^2-14x-3}{x-3}$ es exacta

* Es decir: $R=0$
* Por el teorema del resto:

I) $x-3=0$

II) $x=3$

III) $R=2(3)^3+(10+a)\left(3^2\right)-14(3)-3$

$\to 0=54+9(10+a)-42-3$

$\to 0=9+9(10+a) \to -9=9(10+a)$

$\to 10+a=-1 \to a=-11$

RPTA: "D"

PROBLEMA 56 :

Hallar el valor de «k» para que el polinomio: $u^3+v^3+w^3+kuvw$ sea divisible entre: $u+v+w$

A)$k=-3vw$ B)$k=3$ C)$k=3uvw$ D)$k=0$ E)$k=-3$

RESOLUCIÓN :

* Utilizando el criterio del teorema del resto:

$u+v+w=0 \rightarrow u^3+v^3+w^3=3uvw$ (identidad condicional)

*Reemplazando en la expresión propuesta:

$3uvw+kuvw=0$ (por ser divisible); de donde:

$kuvw=-3uvw \rightarrow k=-3$

RPTA: "E"

PROBLEMA 57 :

Cuál debe ser el valor de r para que el polinomio:

$$2x^3+2x^2y-xy+r$$

sea divisible por: $x+y$

A)y B)$-y$ C)$2y$ D)y^3 E)$-y^2$

RESOLUCIÓN:

*Por el teorema del resto: $x+y=0 \rightarrow x=-y$

*Reemplazando en el polinomio:

$R=2(-y)^3-2(-y)^2y-(-y)(y)+r\equiv 0$ ....(por ser divisible)

*De donde: $-2y^3+2y^3+y^2+r=0 \rightarrow r=-y^2$

RPTA: "E"

PROBLEMA 58 :

Cuál debe ser el valor de «m» para que el polinomio: $x^3+m(a-1)x^2+a^2(mx+a-1)$ sea divisible entre: $x-a+1$

A)-1 B)$-a$ C)a D)a^2-1 E)$a-1$

RESOLUCIÓN:

*Aplicando el teorema del resto,, se tendrá:

$x-a+1=0 \rightarrow x=a-1$

*Reemplazando en la expresión:

$(a-1)^3+m(a-1)^3+a^2m(a-1)+a^3-a^2=0$ (por ser divisible)

$\rightarrow (a-1)^3(m+1)+a^2[m(a-1)+a-1]=0$

$\rightarrow (a-1)^3(m+1)+a^2(a-1)(m+1)=0$

$\rightarrow (m+1)(a-1)\left[(a-1)^2+a^2\right]=0$

*De donde: $m+1=0 \rightarrow m=-1$

RPTA: "A"

PROBLEMA 59 :

Al dividir un polinomio $P_{(x)}$ entre x^4-1 ,se obtuvo como residuo: $2x^3+mx^2+nx+12$,si se sabe que el resto de dividir $P_{(x)}$ entre (x^2-1) es cinco veces el resto de la división de $P_{(x)}$ entre (x^2+1), entonces el valor de $T=m+n$ es:

A)15 B)-15 C)-6 D)-9 E)11

RESOLUCIÓN:

*Se tiene que:

* $P_{(x)}\equiv(x^4-1)q_{(x)}+2x^3+mx^2+nx+12$

* $P_{(x)}\equiv(x^2-1)q_{1(x)}+R_{1(x)}$ ....(I)

$\wedge\ P_{(x)}\equiv(x^2+1)q_{2(x)}+R_{2(x)}$ ....(II)

$\rightarrow R_{1(x)}=5R_{2(x)}$

* Por el teorema del resto:

* En (I): $x^2-1=0 \rightarrow x^2=1$

$P_{(x)}=\left[(x^2)^2-1\right]q_{(x)}+2(x^2)x+m(x^2)+nx+12$

* Reemplazando:

$R_{1(x)}=0+2x+m+nx+12$

$\rightarrow R_{1(x)}=(2+n)x+(m+12)$

*En (II): $x^2+1=0 \rightarrow x^2=-1$

$P_{(x)}=\left[(x^2)^2-1\right]q_{(x)}+2(x^2)x+m(x^2)+nx+12$

*Reemplazando:

$R_{2(x)}=0-2x-m+nx+12$

$\rightarrow R_{2(x)}=(n-2)x+(12-m)$

*Luego como: $R_{1(x)}=5R_{2(x)}$

$\rightarrow (2+n)x+m+12\equiv 5(n-2)x+5(12-m)$

$\rightarrow 2+n=5(n-2) \wedge m+12=5(12-m)$

$\rightarrow n=3 \wedge m=8$

*Entonces: $T=m+n=11$

RPTA: "E"

PROBLEMA 60 :

Si: $A_{(x)}=x^2-4x+m+1$; $B_{(x)}=x^2-(m+1)x+4$ admiten un factor común lineal, halle «m», si $A_{(x)}\neq B_{(x)} \wedge m\in Z$.

A)0 B)3 C)-2 D)-6 E)-10

RESOLUCIÓN:

*Si $A_{(x)}$ y $B_{(x)}$ poseen un factor común, también $A_{(x)}\pm B_{(x)}$ posee el mismo factor.

$A_{(x)}-B_{(x)}=(m-3)x+(m-3)$

$\rightarrow A_{(x)}-B_{(x)}=(m-3)(x+1)$

*Este polinomio debe dividir a $A_{(x)}$ y $B_{(x)}$

$$\frac{A_{(x)}}{A_{(x)}-B_{(x)}}=\frac{x^2-4x+m+1}{(m-3)(x+1)}$$

*Por teorema del resto: $x=-1$

$R=A_{(-1)}=(-1)^2-4(-1)+m+1=0 \rightarrow m=-6$

RPTA: "D"

PROBLEMA 61 :

Si P es un polinomio definido por: $P_{(x)}=ax^5+bx^3+cx-8$ tal que el residuo de dividir $P_{(x)}$ entre $(x+3)$ es 6.

Entonces el residuo de dividir $P_{(x)}$ entre $(x-3)$ es:

A)21 B)18 C)-22 D)16 E)13

RESOLUCIÓN:

* Aplicando el teorema del resto:

$x+3=0 \rightarrow x=-3$

* Luego: $P_{(-3)}=6$

$\rightarrow a(-3)^5+b(-3)^3+c(-3)-8=6$

$\rightarrow 243a+27b+3c=-14$......................(I)

*Se pide:

$Nuevo\ resto=P_{(3)}=a(3)^5+b(3)^3+c(3)-8$

$=\underbrace{243a+27b+3c}_{-14........(por(I))}-8$

*Entonces:

$Resto\ pedido=(-14)-8=-22$

RPTA: "C"

PROBLEMA 62 :

Un polinomio $P_{(x)}$ de tercer grado tiene el mismo valor numérico 15, para $x=-1$, $x=-2$ y $x=3$. Si la suma de sus coeficientes es 3, entonces el polinomio $P_{(x)}$ es:

A) x^3+x^2-8x+9 B) x^3-2x+9 C) $2x^3-x^2$
D) x^3-7x-6 E) x^3-7x+9

RESOLUCIÓN:

*Datos:

$P_1=3$

$P_{(-1)}=15 \rightarrow P_{(x)}\equiv(x+1)q_{1(x)}+15$

$P_{(-2)}=15 \rightarrow P_{(x)}\equiv(x+2)q_{2(x)}+15$

$P_{(3)}=15 \rightarrow P_{(x)}\equiv(x-3)q_{3(x)}+15$

*Entonces, por propiedad:

$P_{(x)}\equiv(x+1)(x+2)(x-3)q_{(x)}+15$

* Donde: $q_{(x)}$ es de grado 0 $\rightarrow q_{(x)}=a$

$\rightarrow P_{(x)}\equiv(x+1)(x+2)(x-3)a+15$

* Pero $P_{(1)}=3 \rightarrow (2)(3)(-2)a+15=3$

$\rightarrow -4a+5=1 \rightarrow a=1$

* Luego: $P_{(x)}=(x+1)(x+2)(x-3)+15$

$\rightarrow P_{(x)}=x^3-7x+9$

RPTA: "E"

PROBLEMA 63 :

El cociente de dividir un polinomio de tercer grado entre $(2x-1)$ es: (x^2+2x-3) y el resto al dividir dicho polinomio entre $(2x+1)$ es 1.

Averigüe el resto que se obtiene al dividirlo entre $(2x-1)$.

A)-6,5 B)-15 C)4,5 D) 3,5 E)2,5

RESOLUCIÓN:

* De la identidad fundamental de la división:

$P_{(x)}=(x^2+2x-3)(2x-1)+R$...........................(I)

*Pero $\frac{P_{(x)}}{2x+1}$ tienen como resto $1 \rightarrow P\left(-\frac{1}{2}\right)=1$

* Para $x=-1/2$

* En (I): $1=\left(\frac{15}{2}\right)+R \rightarrow R=-\frac{13}{2}$

* Piden: $P_{\left(\frac{1}{2}\right)}=R \rightarrow P_{\left(\frac{1}{2}\right)}=-\frac{13}{2}=-6,5$

RPTA: "A"

PROBLEMA 64 :

Un polinomio $P_{(x)}$ se ha dividido por $(2x+1)$ y $(x-1)$ hallándose los residuos 6 y 3 respectivamente, entonces el resto de la división $P_{(x)}\div(2x+1)(x-1)$ es:

A) $2x+3$ B) $-2x+4$ C) $2x-3$
D) $-2x+5$ E) $2x-5$

RESOLUCIÓN:

$P_{(x)}=(2x+1)q_{1(x)}+6 \rightarrow P_{\left(-\frac{1}{2}\right)}=6$

$P_{(x)}\equiv(x-1)q_{2(x)}+3 \rightarrow P_{(1)}=3$

* Se pide el resto de: $\frac{P_{(x)}}{(2x+1)(x-1)}$

* Sea $R_{(x)}=ax+b$, entonces:

$P_{(x)}\equiv(2x+1)(x-1)q_{(x)}+ax+b$

* Para: $x=-\frac{1}{2}: P_{\left(-\frac{1}{2}\right)}=0+\left(-\frac{1}{2}\right)a+b=6$

$\rightarrow\ -a+2b=12$

* Para: $x=1: P_{(1)}=0+a+b=3$

$\rightarrow\ a+b=3$

* Resolviendo: $a=-2 \wedge b=5$
* Entonces: $R_{(x)}=-2x+5$

RPTA: "D"

PROBLEMA 65 :

Determine el valor de a_0, sabiendo que al dividir el polinomio: $P_{(x)}=a_0x^4+a_1x^3+x^2+1$ entre los binomios (x^2+1) y (x^2-1), se obtienen dos residuos que sumados dan 8.

A)1 B)2 C)3 D)4 E)5

RESOLUCIÓN:

* Por el teorema del resto:

I) $\dfrac{a_0x^4+a_1x^3+x^2+1}{x^2+1}$

$\rightarrow R_1=a_0\left(x^2\right)^2+a_1x\left(x^2\right)+x^2+1$

* Donde: $x^2=-1 \rightarrow R_1=a_0-a_1x$

II) $\dfrac{a_0x^4+a_1x^3+x^2+1}{x^2-1}$

$\rightarrow R_2=a_0\left(x^2\right)^2+a_1x\left(x^2\right)+x^2+1$

* Donde: $x^2=1 \rightarrow R_2=a_0+a_1x+1+1$
* Por dato: $R_1+R_2=8 \rightarrow 2a_0+2=8 \rightarrow a_0=3$

RPTA: "C"

PROBLEMA 66 :

Al dividir el polinomio $P_{(x)}$ entre $(6x^2+18x)$ el residuo es $(2x+1)$, si se divide $P_{(x)}$ entre $(-4x^2-20x)$ el residuo es $(6x+1)$, entonces el residuo de la división $P_{(x)} \div (-x^2-8x-15)$ es:

A)$10x+33$ B)$15x+28$ C)$13x+30$
D)$14x+29$ E)$12x+31$

RESOLUCIÓN:

* De: $P_{(x)}\equiv(6x^2+18x)q_{1(x)}+2x+1$

$\wedge\ P_{(x)}=(-4x^2-20x)q_{2(x)}+6x+1$

$\rightarrow P_{(x)}\equiv 6x(x+3)q_{1(x)}+2x+1$

$\wedge\ P_{(x)}\equiv -4x(x+5)q_{2(x)}+6x+1$

* De donde: $P_{(-3)}=-5 \wedge P_{(-5)}=-29$
* Sea $R_{(x)}=ax+b$ el resto de dividir:

$P_{(x)}$ entre $(-x^2-8x+5)$ por el algoritmo de la división, se tiene:

$P_{(x)}\equiv\left(-x^2-8x-15\right)q_{(x)}+ax+b$

$\rightarrow P_{(x)}\equiv-(x+5)(x+3)q_{(x)}+ax+b$

$x=-3: P_{(-3)}=0-3a+b=-5$

$x=-5: P_{(-5)}=0-5a+b=-29$

* Resolviendo el sistema: $a=12 \wedge b=31$
* Por lo tanto: $R_{(x)}=12x+31$

RPTA: "E"

PROBLEMA 67 :

Al efectuar la división indicada:

$$\frac{(x-2)^7+(x-3)^6+(x-4)^3+10}{(x-2)(x-3)(x-4)}$$

se obtiene como residuo:

A)$49x^2-214x+211$ B)$49x^2-21x+21$
C)$49x^2-21x-21$ D)$49x^2-21x+211$

RESOLUCIÓN:

* Por el teorema de Euclides:

$(x-2)^7+(x-3)^6+(x-4)^5+10$

$\equiv(x-2)(x-3)(x-4)Q_{(x)}+ax^2+bx+c$

Para: $x=2: 4a+2b+c=-21$..................(I)

Para: $x=3: 9a+3b+c=10$......................(II)

Para: $x=4: 16a+4b+c=139$...............(III)

*de (II)-(I) : $5a+b=31$...............................(α)

*de (III)-(II): $7a+b=129$...........................(β)

*luego de $(\alpha)-(\beta)$: $2a=98 \rightarrow \boxed{a=49}$

* En (α): $\boxed{b=-214}$
* En (I): $\boxed{c=211}$
* Entonces: $Resto=49x^2-214x+211$

RPTA: "A"

PROBLEMA 68 :

Si P es un polinomio tal que $P_{(0)}=21, P_{(2)}=P_{(3)}=3$. Determine el término independiente del cociente que se obtiene en la división (que no es exacta) del polinomio $P_{(x)}$ entre $(x-2)(x-3)$.

A)2 B)3 C)4 D)5 E)6

RESOLUCIÓN:

* De: $P_{(0)}=21 \wedge P_{(2)}=P_{(3)}=3$
* Sea $R_{(x)}=ax+b \wedge q_{(x)}$ el resto y cociente de dividir $P_{(x)}=(x-2)(x-3)$

$\rightarrow P_{(x)}=(x-2)(x-3)q_{(x)}+ax+b$

$x=2: P_{(2)}=0+2a+b=3$

$x=3: P_{(3)}=0+3a+b=3$

* Resolviendo: $a=0 \wedge b=3$

$x=0: P_{(0)}=(6)q_{(0)}+b$

$\rightarrow 21=6q_{(0)}+3 \rightarrow q_{(0)}=3$

* Luego el término independiente de "q", será :

$q_{(0)}=3$

RPTA: "B"

PROBLEMA 69 :

Si $P_{(x)}$ es un polinomio definido por:

$P_{(x)}=x^3-ax^2+bx+c$. Tal que $P_{(x)}$ es divisible separadamente entre $(x-a)$, $(x-b)$ y $(x-c)$, entonces el valor de $T=a+b+c$ con $b\neq 0$ es:

A) 0 B) 1 C) –1 D) 2 E) –2

RESOLUCIÓN:

*Si $P_{(x)}$ es divisible separadamente por $(x-a)$, $(x-b)$ y $(x-c)$, entonces, también es divisible entre el producto; es decir: $P_{(x)}\equiv(x-a)(x-b)(x-c)Q_{(x)}$

$\rightarrow x^3-ax^2+bx+c\equiv(x-a)(x-b)(x-c)Q$

* Como $P_{(x)}$ es ***MÓNICO***; entonces $Q=1$; ahora se igualan términos semejantes.

$a=a+b+c \rightarrow b+c=0$

$b=ab+ac+bc \rightarrow b=a(b+c)+bc$

$\rightarrow b=a(0)+bc \rightarrow b=bc$

* De donde $c=1$ y $b=-1$

* De igual manera: $c=-abc \rightarrow a=1$

* Se pide : $T=a+b+c=1$

RPTA: "B"

PROBLEMA 70 :

Si la siguiente división:

$$\frac{(x+2)^{82}-4(x+2)^{63}+5(x+2)^{24}+3(x+2)^3-7}{x^2+4x+5}$$

es inexacta, entonces el resto es:

A) $x+2$ B) $2x+1$ C) $2x-1$ D) $x+1$ E) $x-1$

RESOLUCIÓN:

* Por el teorema del resto:

$x^2+4x+5=0 \rightarrow x^2+4x+1=0 \Rightarrow (x+2)^2=-1$

* Acomodando el dividendo:

$$P_{(x)}=\left[(x+2)^2\right]^{41}-4\left[(x+2)^2\right]^{31}(x+2)$$

$$+5\left[(x+2)^2\right]^{12}+3(x+2)^2.(x+2)-7$$

* Reemplazando $(x+2)^2$ resulta:

$\rightarrow R_{(x)}=-1+4(x+2)+5-3(x+2)-7 \Rightarrow R_{(x)}=x-1$

RPTA: "E"

PROBLEMA 71 :

Si la siguiente división $\dfrac{x^{21}-ax+c}{x^2-x+1}$ es exacta, entonces el valor de $K=\sqrt{\dfrac{a+c-5}{a-c}}$ es:

A) 10 B) 8 C) 6 D) 4 E) 2

RESOLUCIÓN:

* Como $\dfrac{x^{21}-ax+c}{x^2-x+1}$ es exacta por $(x+1)$:

$$\frac{(x^{21}-ax+c)(x+1)}{(x^2-x+1)(x+1)}=\frac{x^{22}-ax^2+cx+x^{21}-ax+c}{x^3+1}$$

* Por teorema del resto: $x^3+1=0 \rightarrow x^3=-1$

* $P_{(x)}=(x^3)^7x-ax^2+cx+(x^3)^7-ax+c$

*$R_{F(x)}=-x-ax^2+cx-1-ax+c$

$\rightarrow R_{F(x)}=-ax(x+1)+c(x+1)-(x+1)$

$\rightarrow R_{F(x)}=(x+1)(-ax+c-1) \rightarrow R_{(x)}=\dfrac{R_{F(x)}}{x+1}$

$\rightarrow R_{(x)}=-ax+c-1\equiv 0$................ *(div. exacta)*

$\rightarrow a=0 \wedge c=1$

*Luego: $K=\sqrt{\dfrac{a+c-5}{a-c}}=\sqrt{\dfrac{0+1-5}{0-1}}=2$

RPTA: "E"

PROBLEMA 72 :

Si la siguiente división: $\dfrac{ax^{3a}+bx^{3b+1}+cx^{3c+2}}{x^2+x+1}$ es inexacta, entonces el residuo es:

A) $(a-b)x+b-c$ B) $(b-c)x+a-c$
C) $(c-a)x+a-b$ D) $(a-b)x+c-a$

RESOLUCIÓN :

* Multiplicando , a ambas, por $(x-1)$:

$$\frac{(ax^{3a}+bx^{3b+1}+cx^{3c+2})(x-1)}{(x^2+x+1)(x-1)}$$

$$\rightarrow\frac{ax^{3a+1}+bx^{3b+2}+cx^{3c+3}-ax^{3a}-bx^{3b+1}-cx^{3c+2}}{x^3-1}$$

* Recuerde que el resto también quedó multiplicado por $(x-1)$. Por el teorema del resto.

* $x^3-1=0 \rightarrow x^3=1$

*Acomodando el dividendo:

$$P_{(x)}=a(x^3)^a x+b(x^3)^b x^2+c(x^3)^{c+1}-a(x^3)^a$$

$$-b(x^3)^b x-c(x^3)^c x^2$$

* Reemplazando x^3 se tiene:

$R_{F(x)}=ax+bx^2+c-a-bx-cx^2$

$\rightarrow R_{F(x)}=(b-c)x^2+(a-b)x+c-a$

$\rightarrow R_{F(x)}=[(b-c)x+a-c][x-1]$

* Luego: $R_{(x)}=\frac{R_{F(x)}}{x-1}\Rightarrow R_{(x)}=(b-c)x+a-c$

RPTA: "B'

PROBLEMA 73 :

Si la siguiente división:

$$\frac{(x-5)^3(x+4)^2\left(x^3-3x-17\right)^n}{(x-3)(x+4)(x-5)}$$

es inexacta, entonces el polinomio residuo es:

A)28 B)$28x^2-28x-560$

C)$28x^2-28x+560$ D)$28x^2+28x-560$

RESOLUCIÓN:

*Dividiendo ambos entre $(x+4)(x-5)$:

$$\frac{\frac{(x-5)^3(x+4)^2(x^3-3x-17)^n}{(x+4)(x-5)}}{\frac{(x-3)(x+4)(x-5)}{(x+4)(x-5)}}=\frac{(x-5)^2(x+4)(x^3-3x-17)^n}{x-3}$$

* Por el teorema del resto: $x-3=0\rightarrow x=3$

* Reemplazando: $R_F=(2)^2(7)(27-9-17)^n=28$

* Luego: $R_{(x)}=R_F(x+4)(x-5)=28(x+4)(x-5)$

$\rightarrow R_{(x)}=28x^2-28x-560$

RPTA: "B'

PROBLEMA 74 :

Si la siguiente división:

$\left(2x^{16}+4x^{15}+2x^{32}+x^{33}+x+2\right)\div\left(x^3+3x^2+3x+2\right)$

es inexacta, entonces el residuo es:

A)x^2-1 B)x^2-4 C)$-x+2$

D)$-x^2+4$ E)$x-3$

RESOLUCIÓN:

* Factorizando: $\frac{(x+2)\left(x^{32}+2x^{15}+1\right)}{(x+2)\left(x^2+x+1\right)}$

* Dividiendo entre: $(x+2)$: $\frac{x^{32}+2x^{15}+1}{x^2+x+1}$

* Multiplicando por $(x-1)$:

$$\frac{\left(x^{32}+2x^{15}+1\right)(x-1)}{x^3-1}=\frac{x^{33}+2x^{16}+x-x^{32}-2x^{15}-1}{x^3-1}$$

*Por el teorema del resto: $x^3-1=0\rightarrow x^3=1$

*$P_{(x)}=\left(x^3\right)^{11}+2\left(x^3\right)^5x+x-\left(x^3\right)^{10}x^2-2\left(x^3\right)^5-1$

*$R_{F_2(x)}=1+2x+x-x^2-2-1=-x^2+3x-2$

$\rightarrow R_{F_2}=-(x-1)(x-2)\rightarrow R_{F_1}=\frac{R_{F_2}}{x-1}=-x+2$

* Luego: $R_{(x)}=R_{F}\cdot(x+2)=(-x+2)(x+2)$

$\rightarrow R_{(x)}=-x^2+4$

RPTA: "D"

PROBLEMA 75 :

Si la siguiente división:

$\left(x^3+x+2\right)(x-1)^{20}\div(x+3)(x-1)^{19}$

es inexacta, entonces la suma de coeficientes del polinomio resto es:

A)0 B)2 C)4 D)8 E)9

RESOLUCIÓN:

*Dividiendo ambos entre $(x-1)^{19}$, queda:

$$\frac{\left(x^3+x+2\right)(x-1)}{x+3}$$

* Por el teorema del resto: $x+3=0\rightarrow x=-3$

* Reemplazando: $R_F=(-27-3+2)(-3-1)=116$

* Luego: $R_{(x)}=R_F(x-1)^{19}=116(x-1)^{19}$

$\rightarrow \sum coef_{(R)}=R_{(1)}=0$

RPTA: "A"

PROBLEMA 76 :

Si el polinomio :

$P_{(x)}=x^5-2x^4+2x^3+mx^2+nx+p$ es divisible por $(x+1)(x-1)(x-2)$, entonces el valor de $T=m+n+p$ es :

A)-3 B)-2 C)-1 D)1 E)2

RESOLUCIÓN:

*Como $P_{(x)}$ es divisible entre :

$(x+1)(x-1)(x-2)$

$\rightarrow P_{(x)}\equiv(x+1)(x-1)(x-2)q_{(x)}$

* De donde, claramente: $P_{(1)}=0$

$\rightarrow 1-2+2+m+n+p=0$

$\rightarrow m+n+p=-1$

RPTA: "C"

PROBLEMA 77 :

Si el polinomio $P_{(x)}=Ax^3+Bx^2+Cx+D$ es divisible entre $q_{(x)}=x^2-k^2$, entonces la relación que existe entre sus coeficientes es:

A)AD=BC B)AB=DC C)AC=BD D) A=BCD

RESOLUCIÓN:

* Como $P_{(x)}=\left(x^2-k^2\right)$ no deja resto $\left(R_{(x)}\equiv 0\right)$

* Por el teorema del resto:

$x^2-k^2=0\rightarrow x^2=k^2$

* $P_{(x)}=A\left(x^2\right)x+B\left(x^2\right)+Cx+D$

*Reemplazando:

$$R_{(x)} = A(k^2)x + B(k^2) + Cx + D$$

$$\rightarrow R_{(x)} = (Ak^2 + C)x + (Bk^2 + D) \equiv 0$$

$$\rightarrow Ak^2 + C = 0 \wedge Bk^2 = D$$

$$\rightarrow k^2 = -\frac{C}{A} = -\frac{D}{B} \rightarrow AD = BC$$

RPTA: "A"

PROBLEMA 78 :

Si el polinomio:

$$\left(mx^5 + my^5 + mz^5 + xyz\left(x^2 + y^2 + z^2\right)\right)$$

es divisible por $(5x + 5y + 5z)$, entonces el valor de m es:

A) -3 B) -5 C) $\frac{2}{5}$ D) $-\frac{2}{5}$ E) $-\frac{1}{2}$

RESOLUCIÓN:

* Por el teorema del resto:

$$5(x + y + z) = 0 \rightarrow x + y + z = 0$$

* Por propiedad de los productos notables:

$$\frac{x^5 + y^5 + z^5}{5} \equiv \left(\frac{x^2 + y^2 + z^2}{2}\right)\left(\frac{x^3 + y^3 + z^3}{3}\right)$$

* Además: $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$

$$\rightarrow \frac{2}{5}\left(x^5 + y^5 + z^5\right) = \left(x^2 + y^2 + z^2\right)xyz$$

* Reemplazando en el dividendo:

$$R = m\left(x^5 + y^5 + z^5\right) + \frac{2}{5}\left(x^5 + y^5 + z^5\right) \equiv 0$$

$$\rightarrow \left(m + \frac{2}{5}\right)\left(x^5 + y^5 + z^5\right) \equiv 0 \Rightarrow m + \frac{2}{5} = 0 \rightarrow m = -\frac{2}{5}$$

RPTA: "D"

PROBLEMA 79 :

Si $P_{(x)}$ es un polinomio que cumple las siguientes condiciones:

- En de tercer grado
- Que $P_{(-1)} = 0$
- Que sea divisible por $(x - 2)$
- Que su término independiente sea -8
- Que al dividir entre $(x - 3)$ su resto sea 28

Entonces el polinomio $P_{(x)}$ es:

A) $(x-2)(x-1)(x+4)$ B) $(x-2)(x+1)(x+4)$
C) $(x+2)(x+1)(x-4)$ D) $(x-2)(x+3)(x+4)$

RESOLUCIÓN:

* $P_{(-1)} = 0 \rightarrow P_{(x)}$ es divisible entre $(x + 1)$

* $P_{(x)}$ es divisible entre $(x - 2)$

$\rightarrow P_{(x)}$ es divisible entre $(x + 1)(x - 2)$

$\rightarrow P_{(x)} \equiv (x + 1)(x - 2)(ax + b)$

* $T.I._{(P)} = -8 \rightarrow P_{(0)} = -2b = -8 \rightarrow b = 4$

* $P_{(x)} : (x - 3)$ deja resto 28

$$\rightarrow P_{(3)} = 28 \rightarrow (4)(1)(3a + b) = 28$$

$$\rightarrow 3a + 4 = 7 \rightarrow a = 1$$

* Luego: $P_{(x)} = (x + 1)(x - 2)(x + 4)$

RPTA: "B"

PROBLEMA 80 :

Calcule "a" sabiendo que $x^2 - x + a$ es un factor de $987x^{17} - 1597x^{16} + 1$

A) 0 B) -1 C) 2 D) 3 E) -3

RESOLUCIÓN:

* De la identidad fundamental de la división:

$$987x^{17} - 1597x^{16} + 1 \equiv \left(x^2 - x + a\right)q_{(x)} \ldots\ldots (\alpha)$$

* Donde $q_{(x)}$ es un polinomio de coeficientes enteros.

* Evaluando para $x = 0$ tenemos:

$$1 = aq_{(0)}$$

$\Rightarrow$ *"a" divide a 1* $\rightarrow a = 1 \vee a = -1$

* Analizando para $a=1$ tenemos de (α):

$$\frac{987x^{17} - 1597x^{16} + 1}{x^2 - x + 1} \equiv q_{(x)} \rightarrow R_{(x)} = 0$$

* Por el teorema del resto:

I) $x^2 - x + 1 = 0$

$$\underbrace{(x + 1)\left(x^2 - x + 1\right)}_{\rightarrow x^3 + 1} = \underbrace{(x + 1)0}_{= 0}$$

$$\Rightarrow x^3 = -1$$

II) $987x^{17} - 1597x^{16} + 1$

$$987\underbrace{\left(x^3\right)^5}_{-1} x^2 - 1597\underbrace{\left(x^3\right)^5}_{-1} x + 1$$

* Notamos que el residuo no es nulo

*«a» no puede ser 1 entonces nos queda la otra posibilidad $a = -1$; la cual satisface la condición.

RPTA: "B"

PROBLEMA 81 :

Dado el siguiente cociente notable $\dfrac{x^{3m+9} - y^{30}}{x^m - y^{m+2}}$.
Entonces el valor de «m», es:

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

RESOLUCIÓN:

* Por ser cociente notable:

$$\frac{3m + 9}{m} = \frac{30}{m + 2} = \textit{número de términos}$$

* De donde: $m=2 \vee m=3$

* Ahora:

número de términos = 6 para m=3

*Con $m=2$: #de términos $\frac{15}{2} \notin Z$

RPTA: "C"

PROBLEMA 82 :

Si la siguiente división $\frac{x^m y^n + y^{119}}{x^2 y^3 + y^7}$ genera un cociente notable, entonces indicar el valor de verdad de las siguientes afirmaciones:

I) El cociente posee *17* términos

II) $m+n=85$

III) El término central es: $-x^{16}y^{80}$

A)VVF *B)VFF* *C)FFV* *D)FFF* *E)VVV*

RESOLUCIÓN:

* Para la división: $\frac{x^m y^n + y^{119}}{x^2 y^3 + y^7}$

* Si ésta genera *C.N.* puede presentarse dos casos:

***1ER CASO**: $\frac{(x^2)^{\frac{m}{n}}(y^3)^{\frac{n}{3}} + (y^7)^{17}}{(x^2y^3)+(y^7)}$

genera *C.N* si: $\frac{m}{2}=\frac{n}{3}=17$

* **2DO CASO**:

$\frac{y^n(x^m + y^{119-n})}{y^3(x^2+y^4)} = y^{n-3}\left(\frac{x^m + y^{119-n}}{x^2+y^4}\right)$ genera *C.N* si:

$\frac{m}{2}=\frac{119-n}{4}$

Teniendo en cuenta el *1er* caso:

* El *C.N.* tiene *17* términos

$\rightarrow p$ es verdadera ....(**VERDADERA**)

* $\frac{m}{2}=\frac{n}{3}=17 \rightarrow \frac{m+n}{2+3}=17 \rightarrow m+n=85$

$\rightarrow q$ es veradera..............................(**VERDADERA**)

*El término central es de lugar: $\frac{17+1}{2}=9$

* Entonces: $t_9 = +(x^2y^3)^{17-9}(y^7)^{9-1} = +x^{16}y^{80}$

$\rightarrow r$ es falsa ....(**FALSA**)

RPTA: "A"

PROBLEMA 83 :

En el cociente generado por $\frac{x^a - y^b}{x^3 - y^7}$ existe un término central que es igual a $x^c y^{231}$, entonces el valor de $T = a+b+c$ es:

A)730 *B)715* *C)700* *D)679* *E)769*

RESOLUCIÓN:

$\frac{x^a - y^b}{x^3 - y^7}$ genera *C.N.* si $\frac{a}{3}=\frac{b}{7}=n$ como tiene un sólo término central, entonces n es impar y el lugar de aquel T_c es: $\frac{n+1}{2}$, entonces:

$$t_c = t_{\frac{n+1}{2}} (x^3)^{n-\frac{n+1}{2}}(y^7)^{\frac{n+1}{2}-1} = (x^3y^7)^{\frac{n-1}{2}}$$

$$t_c = x^c y^{231} \rightarrow 7\left(\frac{n-1}{3}\right) = 231 \wedge 3\left(\frac{n-1}{2}\right) = c$$

$$\rightarrow \frac{n-1}{2} = 33 \wedge c = 99 \rightarrow n = 67 \wedge c = 99$$

* Luego:

$$\frac{a}{3}=\frac{b}{7}=67 \rightarrow \frac{a+b}{3+7}=67$$

$$\rightarrow a+b=670$$

* Entonces: $T = a+b+c = 769$

RPTA: "E"

PROBLEMA 84 :

Si el término del desarrollo de: $\frac{x^{17,5} - y^{8,75}}{\sqrt{x} - \sqrt[4]{y}}$, entonces el número de términos del cociente notable, es :

A)16 *B)30* *C)15* *D) 35* *E)12*

RESOLUCIÓN:

* Se tiene : $\frac{\sqrt{x}^{35} - \sqrt[4]{y}^{35}}{\sqrt{x} - \sqrt[4]{y}}$

* Luego el número de términos, será: $\frac{35}{1}=35$

RPTA: "D"

PROBLEMA 85 :

Si en el desarrollo del cociente notable de $\frac{x^{n+3m} - y^{7m}}{x^2 - y^4}$ hay *14* términos, entonces el grado absoluto del término que ocupa el lugar $(m-n)$ es:

A)8 *B)16* *C)32* *D)64* *E)72*

RESOLUCIÓN:

* Del número de términos:

$$\frac{n+3m}{2}=\frac{7m}{4}=14$$

* De donde : $m=8$ y $n=4$

* Se pide: $T_{m-n} = T_4 = (x^2)^{10}(y^4)^3 = x^{20}y^{12}$ cuyo grado es *32*

RPTA: "C"

PROBLEMA 86 :

Dado el siguiente cociente notable $\frac{x^{3n+2} - y^{5n-1}}{x^2 - y^{n-5}}$, entonces el grado absoluto del décimo primer término en el cociente notable , es:

A)25 *B)32* *C)28* *D) 30* *E)34*

RESOLUCIÓN:

* Del número de términos: $\frac{3n+2}{2}=\frac{5n-1}{n-5}\rightarrow n=8$

* Se pide:

$T_{11}=\left(x^2\right)^2\left(y^3\right)^{10}=x^4y^{30}$ cuyo grado es 34

RPTA: "E"

PROBLEMA 87 :

Si en el desarrollo del siguiente cociente notable $\frac{x^{3n}-y^n}{x^3-y}$ el término de lugar 8 contando a partir del extremo final tiene por grado absoluto 38, entonces el número de términos que tiene el desarrollo es:

A)62 B)52 C)51 D)26 E)25

RESOLUCIÓN:

* En término de lugar 8 contando a partir del extremo final es:

$$\underline{t_8}=\left(x^3\right)^{8-1}(y)^{n-8}=x^{21}y^{n-8}$$

* Luego: $G.A_{(\underline{t_8})}=38=21+n-8\rightarrow n=25$

RPTA: "E"

PROBLEMA 88 :

Si: $x^ay^{28};x^{16}y^{2(a-6)}$ son lo términos equidistantes de los extremos en el desarrollo del cociente notable $\frac{x^m-y^p}{x^4-y^7}$, entonces el valor de $T=a+m+p$ es:

A)225 B)235 C)245 D) 257 E)322

RESOLUCIÓN:

* Como $\frac{x^m-y^p}{x^4-y^7}$ genera C.N. $\rightarrow\frac{m}{4}=\frac{p}{7}=n$

* Los términos dados son equidistantes, es decir:

$$\underline{t_k}=x^ay^{28}\wedge\underline{t_k}=x^{16}y^{2(a-6)}$$

$$\underline{t_k}=\left(x^4\right)^{n-k}\left(y^7\right)^{k-1}=x^ay^{28}$$

* De donde: $k-1=4\wedge a=4(n-k)$

$\rightarrow k=5\wedge a=4(n-5)$

$$\underline{t_k}=\left(x^4\right)^{k-1}\left(y^7\right)^{n-k}=x^{16}y^{2(a-6)}$$

$\rightarrow 7(n-k)=2(a-6)\rightarrow 7n-23=2a$

* Reemplazando:

$7n-23=2(4n-20)\rightarrow 7n-23=8n-40\rightarrow n=17$

* Luego: $a=4(17-5)=48$

$\wedge\frac{m}{4}=\frac{p}{7}=17\rightarrow\frac{m+n}{4+7}=17$

$\rightarrow m+p=187$

* Entonces: $T=a+m+p=235$

RPTA: "B"

PROBLEMA 89 :

Al efectuar $\frac{x^{95}-x^{90}+...+x^5-1}{x^{80}+x^{60}+...+x^{20}+1}$ se obtiene como cociente un polinomio que es idéntico a:

A)$x^{15}+x^{10}+x^5+1$ B)$x^{15}-x^{10}+x^5+1$

C)$x^{15}-1$ D)$x^{15}+1$

RESOLUCIÓN:

$$x^{95}-x^{90}+...+x^5-1=\frac{x^{100}-1}{x^5+1}$$

$$\wedge\ x^{80}+x^{60}+....+x^{20}+1=\frac{x^{100}-1}{x^{20}-1}$$

$$\rightarrow\ \frac{x^{95}-x^{90}+...+x^5-1}{x^{80}+x^{60}+...+x^{20}+1}=\frac{\frac{x^{100}-1}{x^5+1}}{\frac{x^{100}-1}{x^{20}-1}}$$

$$=\frac{x^{20}-1}{x^5+1}=x^{15}-x^{10}+x^5-1$$

RPTA: "B"

PROBLEMA 90 :

Si: $2\left(a^2-b^2\right)^5$ es uno de los términos en el desarrollo del cociente notable $\frac{(a+b)^n-(a-b)^n}{ab+b^2}$, entonces el valor de n es:

A)12 B)16 C)17 D) 18 E)20

RESOLUCIÓN:

* Dándole forma a la división:

$$\frac{(a+b)^n-(a-b)^n}{ab+b^2}=\frac{2}{a+b}\left(\frac{(a+b)^n-(a-b)^n}{(a+b)-(a-b)}\right)$$

* La expresión en paréntesis genera C.N. cada término de su desarrollo quedará multiplicado por $\frac{2}{a+b}$. Sea t_k el término dado, entonces:

$$t_k=\frac{2}{a+b}(a+b)^{n-k}(a-b)^{k-1}=2\left(a^2-b^2\right)^5$$

$$\rightarrow\ (a+b)^{n-k-1}(a-b)^{k-1}=2(a+b)^5(a-b)^5$$

* De donde: $n-k-1=5\wedge k-1=5$

$\rightarrow k=6\wedge n=12$

RPTA: "A"

PRIMERA PRACTICA DIRIGIDA

*En los siguientes ejercicios, calcular el cociente y residuo :

01 $\dfrac{2x^3+5x^2+3x-2}{x+1} \rightarrow$ $Q(x)=$ .... $R(x)=$ ....

02 $\dfrac{7x^3-2x^2+5x-10}{x-1} \rightarrow$ $Q(x)=$ .... $R(x)=$ ....

03 $\dfrac{5x^3+4x^2+3x+2}{x+1} \rightarrow$ $Q(x)=$ .... $R(x)=$ ....

04 $\dfrac{2x^3+x^2-x+1}{x-2} \rightarrow$ $Q(x)=$ .... $R(x)=$ ....

05 $\dfrac{5x+x^3+x-4x^2}{x-2} \rightarrow$ $Q(x)=$ .... $R(x)=$ ....

06 $\dfrac{2x^3-3x+1}{x+2} \rightarrow$ $Q(x)=$ .... $R(x)=$ ....

07 $\dfrac{5x^3+1}{x-1} \rightarrow$ $Q(x)=$ .... $R(x)=$ ....

08 $\dfrac{9x^2-8x^3-16-4x+2x^4}{x-3} \rightarrow$ $Q(x)=$ .... $R(x)=$ ....

09 $\dfrac{3x+2x^4+1}{x-1} \rightarrow$ $Q(x)=$ .... $R(x)=$ ....

10 $\dfrac{x^4-9+10x^2}{x-3} \rightarrow$ $Q(x)=$ .... $R(x)=$ ....

11 Dividir: $\dfrac{4x^3-5x^2+3x-3}{x-1}$, e indicar su residuo.

A1 B)-1 C)$\dfrac{1}{2}$ D)$-\dfrac{1}{2}$ E)0

12 Al dividir, su cociente es:

$$\frac{6x^3+x+2x^4+3}{x+3}$$

A)$2x^2+1$ B)$2x^4+1$ C)$2x^3+1$
D)$2x^3-1$ E)$2x^4-1$

13 Dividir: $\dfrac{x^3+x^2-x-2}{x-1}$, e indicar el término independiente de su cociente.

A)1 B)4 C)6 D)8 E)10

14 Al dividir $\dfrac{3x^2-5x+6}{x-1}$, su residuo es:

A)1 B)2 C)3 D)4 E)5

15 Al dividir $\dfrac{4x^2+2x^3+3x+6}{x+2}$, su cociente es:

A)x^2-3 B)$2x^3-3$ C)$2x+3$ D)$2x^3+3$ E)$2x^2+3$

16 Dividir: $\dfrac{x^2+2x^3-5x+3}{x+2}$ e indicar la suma de coeficientes del cociente.

A)1 B)-1 C)2 D)-2 E)0

17 Indicar la suma de coeficientes del cociente al dividir: $\dfrac{3x^3-32x^2+2x-63}{x-9}$

A)5 B)10 C)-5 D)-10 E)0

18 Completar el siguiente diagrama de Ruffini:

	2	3	–5	□	6
–3		□	9	–12	6
	2	–3	□	–2	–12

Luego, indicar la suma de valores hallados.

A)0 B)20 C)8 D)14 E)12

19 Completa el siguiente diagrama y luego indica el producto de los valores hallados:

	□	+1	–3	□	–8
–2		–4	6	–6	8
	2	□	3	–4	□

A)-12 B)12 C)1 D)16 E)0

20 Determinar el valor de «n» si la división:

$$\frac{2x^3+x^2-5x+(n-7)}{x+2}$$

tiene residuo nulo.

A)9 B)2 C)5 D)8 E)7

TAREA DOMICILIARIA

01 Indicar el cociente al dividir:

$$\frac{3x^3-x^2-11x+7}{x-2}$$

A)$3x+5$ B)$3x^3+5x^2-1$ C)$3x^2+5x-1$
D)$3x^3+5x-1$ E)$3x-1$

02 En la división anterior, indica su residuo:

A)1 B)2 C)3 D)4 E)5

03 Determinar el valor de «n» para que la división:

$\dfrac{2x^2+3x+(n+7)}{x-1}$ sea exacta.

A)–2 B)10 C)–6 D)8 E)–12

04 Calcular la suma de los valores que completan el diagrama:

	5	■	9	■
2		10	–2	14
	■	–1	■	2

A)–15 B)–17 C)12 D)23 E)–11

05 Hallar «*a*», para que la división:

$\dfrac{2x^3-5x^2+2x+a}{x-1}$ sea exacta.

A)1 B)2 C)3 D)4 E)5

SEGUNDA PRACTICA DIRIGIDA

DIVISION POLINOMIAL HORNER - RUFFINI

01 Indique verdadero *(V)* o falso *(F)* en las proposiciones siguientes:

( ) Si $R(x)=0;\ D(x)\equiv d(x).q(x)$

( ) $Gdo[q(x)]=Gdo[D(x)]+Gdo[d(x)]$

( ) Para efectuar la división, se completa y ordena forma creciente al dividendo y al divisor

A)VFV B)VVF C) FVV D)VFF E)FVF

02 Hallar el cociente de dividir:

$$\frac{12x^4-2x^3-16x^2+8x-3}{2x^2+x-3}$$

A) $6x^2+4x+3$ B) $6x^2-4x+3$

C) $6x^2+4x-3$ D) $6x^2-4x-3$

E) $6x^2+4x$

03 Al dividir: $\dfrac{2-5x+6x^2-7x^3+x^4}{x^3-5x^2+4x-1}$

dar como respuesta la suma de coeficientes del residuo.

04 Al efectuar: $\dfrac{4x^4-x^2-ax+b}{2x^2+x-1}$ se obtiene por resto: $R(x)=8x-4$. Calcular: ab^{-1}

A) $\dfrac{1}{50}$ B)2 C)–1 D) $\dfrac{1}{2}$ E)3

05 Si la siguiente división:

$$\frac{6x^4+16x^3+25x^2+Mx+n}{1+2x+3x^2}$$

tiene residuo: $R(x)\equiv 0$

señalar: $\sqrt[3]{M+N+8}$

A) 2 B) –2 C) 3 D) –3 E) 1

06 El resto de la división: $\dfrac{x^3-4x^2+px-p}{x^2-3x-2}$

es una constante, mencionar a dicho resto aumentado en *P*.

A) 1 B) –1 C) 0 D) –2 E) 2

07 A partir de la división:

$$\frac{25x^4+5x^3+bx^2+3(x+1)}{5x^2-3(x+1)}$$

calcular su cociente evaluado en «*1*», sabiendo que su resto es: $5cx$.

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

08 Después de dividir:

$$\frac{6x^4+11x+7(x+1)(x^2-x+1)}{x-\frac{1}{3}}$$

señalar el coeficiente del término lineal del cociente.

A) 2 B) 3 C) 6 D) 9 E) 12

09 Proporcionar el cociente de dividir:

$$\frac{x^3+(b-a)x^2+(b-a)x+a-ab}{x-a}$$

A) x^2+ax+a B) x^2+bx+b C) x^2+ax+b

D) x^2+bx+a E) $x^2+bx+(b-a+ab)$

10 Al dividir:

$$P(x)=x^3+(-2-\sqrt{7})x^2+(2\sqrt{7}-15)x+15\sqrt{7}+k$$

entre $x-\sqrt{7}$ se encontró un residuo $3k-8$. Encontrar «*k*».

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

11 Determinar el valor de «*a*» en la división

$\dfrac{25x^4+(x+a)^2+2}{2+5x}$ si el valor numérico de su cociente para $x=0$ es igual a 2.

A) 1 B) 2 C) 4 D) 3 E) 6

12 Determinar el residuo de la división:

$$\frac{px^5+2qx^4+(3r-p)x^3+(p-2q)x^2+(2q-p)x+p}{x-1}$$

si la suma de coeficientes del cociente es *54*.

A) 15 *B) 16* *C) 17* *D) 18* *E) 19*

13 Considerando el siguiente esquema de Horner:

2	2	1	4	b_1	b_2
1					
3					
	b_3	b_4	b_5	1	1

calcular: $b_1+b_2+b_3+b_4+b_5$

A) 10 *B) –11* *C) 12* *D) –13* *E) 14*

14 La siguiente división:

$$\frac{Ax^5+Bx^4+Cx^3+Dx^2+Ex+F}{x+1}$$

Se realiza empleando la regla de Ruffini obteniéndose el esquema

	A	B	C	D	E	F
–1		1	3	5	7	9
	m	n	p	q	r	0

Mostrar la suma de coeficientes del dividendo

A) –25 *B) 50* *C) 0* *D) 25* *E) –50*

15 Si al efectuar la división:

$(6x^4+Ax^3-14x^2+Bx-5)\div(-5+x+2x^2)$

se obtuvo como residuo al polinomio *(3x+5)*, calcular:

$$\sqrt[4]{A+B-1}$$

A) 1 *B) 2* *C) 3* *D) 4* *E) 0*

16 Cuál es el residuo de dividir:

$$\frac{amx^3+(an+bm)x^2+(ap+bn)x+bp}{ax+b}$$

A) 1 *B) –1* *C) bn* *D) 2bn* *E) 0*

17 Al efectuar la división:

$$\frac{2x^5+7x^4-3x^3+5x+1}{x^3+3x^2-4x+\lambda}$$

se obtiene un residuo de primer grado. Proporcionar dicho residuo.

A) 14x + 3 *B) 14x – 3* *C) 7(2x + 1)*
D) 7(2x – 1) *E) 7(2x + 3) – 20*

18 La siguiente división:

$$\frac{mx^5+nx^4-x^3+7x^2-5x-12}{3x^2+x-4}$$

es exacta. Calcular: *m.n*

A) 10 *B) 15* *C) 24* *D) 30* *E) 42*

19 Si: $15x^4+7x^3+Ax^2+Bx+C$ se divide entre $5x^2-x+3$, se obtiene un cociente cuyos coeficientes van disminuyendo de *1* en *1* a partir del principal y un resto *2x+5*. Calcular:

$$\sqrt[3]{-A-B-C}$$

A) –3 *B) –2* *C) –1* *D) 2* *E) 3*

20 Si los coeficientes del cociente de dividir:

$$\frac{ax^2+bx+c+8x^4+18x^3}{2x+3}$$

son números consecutivos y el residuo es *(–8)* señalar: $(a+b+c)^{0,5}$

A) 1 *B) 2* *C) 3* *D) 4* *E) 6*

TERCERA PRACTICA DIRIGIDA

DIVISION POLINOMIAL
HORNER - RUFFINI

01 Efectuar la división:

$$\frac{6x^5-x^4+4x^3-5x^2-x-15}{2x^2-x+3}$$

Señalar el resto.

A) 2x+1 *B) 4x–1* *C) x+2* *D) 0* *E) 1*

02 Dividir: $\frac{2x^3-8x+x^4+12-7x^2}{(x-2)(x-1)}$

Señalar el valor de verdad:

( ) $\sum Coef.(q)=12$

( ) El resto es: x+1

( ) La división es exacta

A) VVV *B) VFF* *C) FFV* *D) VFV* *E) FVV*

03 Calcular el valor m^{-1}, si la división:

$$\frac{x^4+x^3+mx^2-6x+8}{x^2+2x+8}$$

es exacta.

A) 3 B) 7 C) 4 D) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{1}{7}$

04 Al dividir: $\frac{2x^4-x^3+4x^2+7x+m}{x^2-x+n}$

el resto es $3x+4$. Calcular: m^{-n}.

A) 3 B) 4 C) $\frac{1}{3}$ D) 1 E) 5

05 Si el resto de la división:

$$\frac{8x^5+4x^3+mx^2+nx+p}{2x^3+x^2-3}$$

es $R(x)=5x^2-3x+7$, calcular: $m+n+p$.

A) 10 *B) n* *C) –10* *D) –n* *E) 0*

06 Si la división de:

$$P(x) = x^5 - x^4 - (a+3)x^3 + (b+3)x^2 + (c-2)x - 2$$

entre $x^3 - 8x + 2$ es exacta, calcular:

$$\sqrt{P(a)+P(b)\times P(c)}$$

A) 16 *B) 17* *C) 18* *D) 19* *E) 20*

07 El polinomio:

$$P(x) = mx^4 + nx^3 - 9x^2 + 4x + 10$$

es divisible por: $Q(x) = x^2 - 3x + 5$.

Calcular: $m - n$

A) 4 *B) –6* *C) 6* *D) 5* *E) –2*

08 En la división: $\dfrac{x^4 + 5x - 3x^2 - 8}{x - 2}$

señalar la suma de coeficientes del cociente.

A) 8 *B) 10* *C) 9* *D) 11* *E) 12*

09 Al dividir: $\dfrac{3x^4 + (n+1)x^3 + nx - 5}{x + 3}$

el resto es *1*. Calcular: $\sqrt[n-4]{n+1}$

A) 1 *B) 2* *C) 3* *D) 4* *E) 5*

10 Al efectuar la división:

$$\frac{x^5 + 5x^4 - 5x^3 + (9m+1)x^2 + n}{x - \frac{1}{3}}$$

el residuo es $R(x) = 8$, calcular: $(m + n)^2$

A) 4 *B) 16* *C) 36* *D) 64* *E) 100*

11 Calcular el resto de dividir:

$$\frac{8x^3 + 4x^2 - 6ax + 15}{2x - 1}$$

sabiendo que la suma de coeficientes del cociente es *37*.

A) 46 *B) 45* *C) 44* *D) 43* *E) 42*

12 En el esquema de la división por Ruffini:

	4	–3	a	–b	c
*		*	*	*	*
	*	1	b	*	3

calcular: $ac - bc$

A) 1 *B) –1* *C) 3* *D) –3* *E) 4*

13 Se define al polinomio mónico:

$$P(x) = (a-3)x^4 - 5x^2 + 2x - a$$

Calcular el resto de la división:

$$\frac{P(x) - P(0)}{x - 3}$$

A) 38 *B) 40* *C) 36* *D) 42* *E) 34*

14 En la división: $\dfrac{ax^5 + bx^4 + cx^3 - 5x - 3}{2x^3 + x^2 - x - 2}$

calcular $a + b + c$, si: $R(x) = 6x^2 + 8x - 5$

A) 17 *B) 9* *C) 10* *D) 11* *E) 20*

15 Calcular la suma de coeficientes del cociente al efectuar la división:

$$\frac{x^{99} - x^{30} + x - 1}{x - 1}$$

A) 50 *B) 99* *C) 100* *D) 70* *E) 1*

16 Calcular $m + n + p$, si al dividir:

$$\frac{2x^4 + mx^3 + nx^2 + px + q}{x^2 - x + 1}$$

se obtiene un cociente cuyos coeficientes están en P.A. y deja de resto igual a $3x+q$.

A) 2 *B) 3* *C) 4* *D) 5* *E) 6*

17 Al dividir: $\dfrac{x^5 - 10x^3 - 21x + 90}{x - b}$

el coeficiente del término cuadrático del cociente es *–1*. Calcular «*b*».

A) – 4 *B) 3* *C) 5* *D) – 3* *E) B ∨ D*

18 El esquema representa la división por el método de Horner:

a	a	b	a	b	a
b		b	c		
c			b	c	
				c	c^2
	b	b	c		

Señalar el resto.

A) x + 2 *B) 3x + 2* *C) 2x + 1* *D) 4x + 7* *E) 7x + 11*

19 Al efectuar la siguiente división:

$$\frac{x^{n+1} - (n-2)x + 2n - 3}{(x-1)^2}$$

se obtiene un cociente cuya suma de coeficientes es *190*. Entonces el resto de la división es:

A) x + 16 *B) 3x – 16* *C) x – 16* *D) 3x+16* *E) 4*

20 Si se divide:

$$Q(x) = (a+b)x^3 + (b-c)x^2 + (b+c)x + a - b$$

entre $x^2 + n^2$, el residuo es cero.

Calcular: $\dfrac{b^2}{a^2 + c^2}$

A) 3 B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{4}$ D) 1 E) $\frac{3}{2}$

CUARTA PRACTICA DIRIGIDA

TEOREMA DEL RESTO

01 Hallar el resto de:

$$\frac{(3x+5)^{2000}+(x+1)^{35}-x-2}{x+2}$$

A) 2 B) 0 C) 3 D) 7 E) 8

02 Calcular el resto de:

$$\frac{x^5-3x^3+2x+5}{x^2-5}$$

A) 12x+5 B) x C) 7x D) 2x+1 E) x+1

03 Hallar «n» si:

$$\frac{(x+y)^4-nx^4-y^4}{x-2y}$$ es exacta

A) 4 B) 7 C) 5 D) 8 E) 10

04 Cuál es el resto en:

$$\frac{x^{27}+243x^{22}+x+4}{x+3}$$

A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 2

05 Hallar el resto en:

$$\frac{(x-3)^{1999}+(x-4)^3}{(x-3)(x-4)}$$

A) x+7 B) 2x-7 C) x+5 D) x+4 E) 2x+5

06 Hallar el resto de dividir:

$$\frac{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)+5}{x^2+5x+5}$$

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

07 Al dividir:

$$\frac{x^3+\left(-2-\sqrt{7}\right)x^2+\left(2\sqrt{7}-15\right)x+15\sqrt{7}+m}{x-\sqrt{7}}$$

se obtuvo como residuo: *(3m–8)*. Hallar «m»

A) 1 B) 2 C) 4 D) 6 E) 8

08 Hallar «m» sabiendo que:

$x^3+z^3+y(y^2+mxz)$ es divisible entre : $x+y+z$

A) -3 B) 3 C) -1 D) 2 E) 5

09 Calcular el resto en:

$$\frac{x^{92}-2x^{91}+2x^2-3x+1}{x-2}$$

A) 2 B) 5 C) 3 D) 6 E) 4

10 Hallar el resto de la división:

$$\frac{x^{18}+3x^9+5x^6+7x+1}{x^2-1}$$

A) 4x-1 B) 4x-5 C) 4x+1 D) 4x+5 E) 4x+6

11 Al dividir un polinomio *P(x)* entre *(x+1)* se obtiene como cociente (x^2-x+1) y como resto *4*. Calcular el resto de dividir dicho polinomio entre *(x–3)*

A) 28 B) 29 C) 30 D) 32 E) 34

12 Al dividir *P(x)* entre $(x+2)^7$, se obtiene como resto: x^3+2x^2+x+6. Hallar el resto que se obtiene al dividir *P(x)* entre *(x+2)*

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

13 Un polinomio *P(x)* al ser dividido entre *(x –3)* y *(x+2)* se obtuvo como restos *6* y *1* respectivamente, hallar el resto que se obtiene al dividir dicho polinomio entre el producto de los dos polinomios.

A) x+5 B) x+4 C) x+3 D) x-1 E) 2x+1

14 Indicar el término independiente de un polinomio de *3er*. grado, tal que al dividirlo separadamente por *(x–1)*, *(x+2)* y *(x–4)* da el mismo resto *20* y además es divisible por *(x+1)*

A) 3 B) 6 C) 4 D) 8 E) 11

15 Hallar el término independiente de un polinomio de *3er*. grado, tal que al dividirlo entre *(x–3)(x–2)(x1)*, dé como resto *–36* y se anule para: *x=4*.

A) 30 B) 72 C) -72 D) 25 E) -25

16 Hallar «n» si el resto de dividir:

$$\frac{(x+5)^{2n}+2^n}{x^2+10x+23}$$ es *64*.

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

17 Hallar el resto de dividir:

$P(x)=(x+n)^7-x^7-n^7$ entre: $x+2n$

A) 0 B) $32n^5$ C) $64n^6$ D) $126n^7$ E) $256n^8$

18 Al dividir $(x^3-2x^2+ax+b)\div(x-2)$ el resto es *3* y al dividirlo entre *x+1* el resto es *9*.
Calcular "a+b"

A) 2 B) 3 C) 4 D) 6 E) 7

19 Calcular la suma de los coeficientes del cociente que se obtiene al dividir:

$$\frac{6x^4+3x^3+x^2-6x-1}{2x-1}$$

A) 14 B) 6 C) 7 D) 12 E) 10

20 ¿Cuánto le debemos aumentar al coeficiente del término cuadrático de $P(x)$ para que dicho polinomio sea divisible por $(x+1)$?

$$P(x)=2x^4+x^3+4x^2+1$$

A)–2 B)–1 C)4 D)2 E)–6

TAREA DOMICILIARIA

01 Efectuar:

$$\frac{3x^6+2x^4-3x^3+5}{x-2}$$

dar como respuesta el residuo de la división

A)203 B)204 C)205 D)202 E)200

02 ¿Cuánto habría que aumentar a $P(x)$ para que sea divisible por $(x-1)$?

$$P(x)=3x^3+5x^5-7x^2+1$$

A)2 B)3 C)1 D)–2 E)–3

03 Hallar el resto de dividir:

$$\frac{2x^4+174x^3-68x+32}{x-\frac{1}{2}}$$

A)0,25 B)3,5 C)–1,25 D)–3,5 E)0,75

04 Hallar «a», si al dividir:

$$\frac{5x^{18}+3x+a}{x+1}\text{; el resto es } 8.$$

A)4 B)5 C)7 D)6 E)8

05 Calcular el resto en:

$$\frac{(x+5)(x-1)(x+4)(x-2)+5x-18}{x^2+3x-2}$$

A)$5x-2$ B)$5x+2$ C)$5x-3$ D)$5x+3$ E)$5x-4$

QUINTA PRACTICA DIRIGIDA

COCIENTES NOTABLES

01 Hallar el tercer término en el siguiente cociente notable:

$$\frac{x^m-y^{5m-8}}{x^2-y^9}$$

A)$x^{15}y^{27}$ B)x^8y^9 C)$x^{10}y^{18}$ D)x^7y^6 E)xy^9

02 Calcular el segundo término en el desarrollo de:

$$\frac{x^3-y^{12}}{\sqrt{x}+y^2}$$

A)x^2y B)$-x^2y^2$ C)x^3y^4 D)xy^5 E)$-xy$

03 ¿Cuántos términos posee el desarrollo del cociente notable?

$$\frac{x^{13m+1}-y^{8m+2}}{x^{m+1}-y^m}$$

A)2 B)5 C)9 D)13 E)28

04 Calcular el t_{20} del siguiente $C.N$: $\dfrac{x^{70}+1}{x^2+1}$

A)x^{30} B)x^{28} C)x^{32} D)$-x^{30}$ E)$-x^{28}$

05 Dado el siguiente $C.N.$ $\dfrac{x^{6n}-y^{40}}{x^{n-4}-y^4}$

Indicar verdadero *(V)* o falso *(F)* en:

( ) «n» vale *10*

( ) El número de términos es *10*

( ) El primer término del desarrollo es x^{10}

A) VVV B) VFV C) FVF D) FVV E) VVF

06 El número de términos que tiene el siguiente cociente: $\dfrac{x^{4^3}-y^{4^4}}{x^2-y^8}$; es:

A)3 B)6 C)4 D)32 E)64

07 Calcular el término 25 en el desarrollo del $C.N.$

$$\frac{x^{150}-a^{100}}{x^3+a^2}$$

A)$x^{75}a^{48}$ B)$x^{25}a^{24}$ C)$x^{75}a^{56}$ D)$-x^{75}a^{48}$ E)$-x^{75}a^{56}$

08 Luego de efectuar el desarrollo de:

$\dfrac{a^{16}-1}{a^4+1}$; se obtiene:

A)$a^{12}-a^8+a^4-1$ B)$a^{12}+a^8+a^4+1$ C)$a^4+a^3+a^2+1$
D)$a^8+a^6+a^4+1$ E)$a^{12}+a^{10}+a^4+1$

09 El cociente notable $\dfrac{a^n-b^m}{a^2+b^3}$; posee *4* términos, hallar $\sqrt[m]{n}$

A)$\sqrt{2}$ B)$\sqrt[3]{4}$ C)$\sqrt[4]{2}$ D)$\sqrt[4]{3}$ E)$\sqrt{3}$

10 Calcular el grado del quinto término del desarrollo de : $\dfrac{x^{48}-y^{32}}{x^3-y^2}$

A)40 B)41 C)42 D)43 E)44

11 Si el cociente de : $\dfrac{a^n-b^{432}}{a^3-b^n}$

es exacto, calcular $\sqrt{n}$

A)36 B)4 C)2 D)6 E)25

12 Si «n» es el número de términos que presenta el cociente notable

$$\frac{x^{40}-y^{30}}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[4]{y}}$$

calcular: $\sqrt[3]{n+5}$

A)2 B)3 C)4 D)5 E)6

13 Indicar cuántos términos tiene el desarrrollo del cociente notable : $\dfrac{x^{3n}-y^{2n}}{x^3-y^2}$

si el sexto término tiene como grado absoluto **19**

A)6 B)12 C)9 D)7 E)10

14 Simplificar:

$$\frac{x^{37}+x^{36}+x^{35}+........+x+1}{x^{36}+x^{34}+x^{32}+..........+x^2+1}$$

A)x–1 B)x C)x+2 D)x+1 E)x–2

15 Halle el equivalente reducido de:

$$x^5+x^4y+x^3y^2+x^2y^3+xy^4+y^5$$

A) $\dfrac{x^6+y^6}{x-y}$ B) $\dfrac{x^6+y^6}{x+y}$ C) $\dfrac{x^7-y^7}{x-y}$

D) $\dfrac{x^6-y^6}{x-y}$ E) $\dfrac{x^6-y^6}{x^2-y^2}$

16 Hallar el coeficiente del cuarto término del desarrollo de : $\dfrac{32x^5+243y^5}{2x+3y}$

A) –108 B)–27 C)–54 D)–81 E)–12

17 Calcular $\sqrt[3]{n}$ si el siguiente cociente:

$$\frac{a^{2n+1}-b^{20}}{a^{n+5}-b^4}$$

es notable

A)8 B)27 C)3 D)2 E)1

18 Hallar el número de términos del siguiente cociente notable: $\dfrac{x^{150}+y^n}{x^n+y^5}$

A)7 B)4 C)5 D)8 E)6

19 Indique el número de términos del cociente notable de: $\dfrac{x^n-1}{x-1}$ si $t_{10}\,t_{50}=x^{400}$

A)220 B)230 C)240 D)250 E)260

20 Reducir: $\dfrac{(x+y)^{31}+(x+y)^{30}+......+1}{(x+y)^{30}+(x+y)^{28}+.....+1}$

A)$(x+y)^2$ B)x+y C)x+y–1 D)x–y+1 E)x+y+1

TAREA DOMICILIARIA

01 Hallar el término de lugar **21**, del desarrollo de : $\dfrac{x^{37}+y^{37}}{x+y}$

A)$-x^{16}y^{19}$ B)$x^{16}y^{20}$ C)$-x^{20}y^{16}$ D)$-x^{14}y^{18}$ E)$-x^{17}y^{21}$

02 Hallar el número de términos del cociente notable: $\dfrac{x^a-1}{x-1}$

sabiendo que: $(T_{10})\,(T_{50})\,(T_{100})=x^{236}$

A)132 B)136 C)141 D)94 E)147

03 Sea el cociente notable: $\dfrac{x^{2a+1}-y^{b+3}}{x^3-y^2}$

si posee **5** términos indique: $\dfrac{a^2+b}{a}$

A)3 B)5 C)8 D)7 E)2

04 Dar los valores de verdad:

( ) Es un cociente notable: $\dfrac{x^7-y^{16}}{x^3-y^6}$

( ) Posee **15** términos: $\dfrac{x^{60}-y^{90}}{x^4-y^6}$

( ) Es un cociente notable: $\dfrac{x^7+y^7}{x+y}$

A)VVF B)VVV C)VFV D)FVV E)FFF

05 El cociente notable que genera:

$$x^{35}-x^{30}+x^{25}-x^{20}+.....+x^5-1,\text{ es:}$$

A) $\dfrac{x^{40}+1}{x^5+1}$ B) $\dfrac{x^{40}+1}{x^5-1}$ C) $\dfrac{x^{40}-1}{x^5-1}$

D) $\dfrac{x^{40}-1}{x^5+1}$ E) $\dfrac{x^{40}+1}{x+1}$

SEXTA PRACTICA DIRIGIDA

TEOREMA DEL RESTO DIVISIBILIDAD

01 Siendo ***R(x)*** el resto de dividir:

$$\frac{(3x^2-13)^{2008}\,(x^2+3x-1)}{x-2}$$

calcular: $\sqrt{R(x)}$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

02 Al dividir: $\dfrac{(x^4+x^2+1)(x^2+x+1)}{x^2+2}$ se obtiene un resto de la forma: ***R(x)=ax+b***. Calcular: ***a.b***

A) 3 B) –3 C) 9 D) –9 E) –4

03 Calcular el resto de dividir:

$$\frac{(x-6)(x-5)(x+1)(x+2)}{(x-2)^2}$$

A) 100 B) 81 C) 16 D) 4 E) 144

04 Si la división: $\dfrac{x^{21} - 3x^{15} + ax^{3} - b}{x^{2} - 2x + 1}$

es exacta, calcular: $\dfrac{a-1}{b+1}$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

05 Si al dividir: $\dfrac{ax^{4} + bx^{3} + cx^{2} + dx + e}{x^{2} - x - 2}$ se obtiene un resto igual a: $2x + 2$, calcular el valor de:

$$\frac{a+c+e}{b+d}$$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

06 Si el resto de la siguiente división:

$$\frac{x^{48} - 5x^{14} + x^{6} - 5}{x^{4}+1}$$

tiene la forma: $R(x)=a(x+b)(x-c)$, $\{a; b; c\} \subset N$

calcular el valor de: $\sqrt[b+c]{a}$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

07 El polinomio $P(x)$ es divisible por $6x^{2}+x-2$
Calcular el resto de dividirlo por: $2x - 1$

A) 1 B) 2 C) P(1) D) 0 E) –1

08 Hallar el resto en la siguiente división:

$$\frac{(x+1)^{2}(x^{3}+x+1)}{x^{2}+x+1}$$

A) $x + 1$ B) $x - 1$ C) $2x + 1$
D) $2x - 1$ E) $3x + 1$

09 Calcular $(a + b + c)$, si la siguiente división:

$$\frac{2x^{53} + 7x^{20} - (x+1)^{2} + ax^{4} + bx^{2} + c}{x^{3} - 3x + 2}$$

deja un resto igual a: $x^{2} + x + 1$

A) 3 B) 1 C) –2 D) 2 E) –1

10 Hallar el resto de:

$$\frac{x^{24} + 2(x^{2}+2)^{23} - x^{10} - 3x^{8} + 64x^{2} + x + 3}{x^{2}+4}$$

A) $x + 3$ B) $x - 2$ C) $2x + 3$
D) $2x - 1$ E) $x + 4$

11 Se tiene un polinomio de grado 3 que se anula para $x = 4$; $x = -1$ y es divisible por $(x + 2)$. Si su coeficiente principal es igual al grado, calcular el resto de dividirlo por $(x - 3)$.

A) 50 B) –50 C) 60 D) –60 E) 24

12 Se tiene un polinomio $P(x)$ de tercer grado que es divisible separadamente por $(2x + 1)$ y $(x - 2)$ Sabiendo además que su coeficiente principal es simétrico con su término independiente, hallar un factor de $P(x)$.

A) $x + 2$ B) $x - 1$ C) $x + 1$
D) $2x - 1$ E) $x + 3$

13 Al dividir un polinomio $P(x)$ por $(x+5)$ se obtiene un resto igual a 4 y un cociente cuya suma de coeficientes es 7.
El resto de dividir $P(x)$ por $(x - 1)$ es:

A) 46 B) 48 C) 60 D) 63 E) 75

14 Hallar el resto de la siguiente división:

$$\frac{(x+3)^{162} + (x+2)^{4} + 2(x-1)}{x^{2}+6x+10}$$

A) $2x + 1$ B) $2x - 1$ C) $2x + 7$
D) $2x - 7$ E) $x + 7$

15 Sabiendo que el resto de dividir:

$$\frac{(x+1)^{98}(x-1)^{98} - x^{8} + x^{6} - 1}{x^{4} - 2x^{2}}$$

es $R(x) = ax^{b}$, calcular: $\sqrt[b+1]{ab}$

A) 2 B) –2 C) 3 D) –3 E) 4

16 En la división $\dfrac{(x-8)^{9}+(x-7)^{8}}{(x-8)(x-7)}$, hallar el resto.

A) $2x + 15$ B) $2x - 15$ C) $2x+3$
D) $2x - 3$ E) $3x + 2$

17 Determine el resto en:

$$\frac{(x+4)^{5}(x+3)}{x^{2}+6x+8}$$

A) $32x + 128$ B) $32x + 64$
C) $16x + 32$ D) $16x + 16$
E) $16x+64$

18 Si la siguiente división: $\dfrac{15x^{12n} - 2x^{9} + x^{6}}{x^{2} + 2x + 4}$ es exacta, calcular «n».

A) 1 B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{3}$ D) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{1}{5}$

19 Al dividir $P(x)$ entre $(x+a)^{4}$ se obtuvo de resto $(x^{3}-3a^{2}x+2a^{3})$.
Hallar el resto de dividir: $P(x) \div (x+a)^{2}$

A) $x + a$ B) 4 C) $a^{2}x + a^{3}$
D) $4a^{3}$ E) $x + 4a$

20 Un polinomio $P(x)$ al ser dividido por $(x^{2} + 1)$

da como resto $(-x+1)$. Hallar el resto de la siguiente división:

$$\frac{[P(x)]^5}{x^2+1}$$

A) $x-1$ B) $x+1$ C) $4x-4$ D) $2x$ E) $-2x$

SEPTIMA PRACTICA DIRIGIDA

COCIENTES NOTABLES

01 Establecer el valor de verdad, sabiendo que

$\frac{x^{10}-y^{10}}{x-y}$ genera un cociente notable.

( ) Número de términos: *10*

( ) Primer término: x^9

( ) Último término: y^{10}

A)VVV B)VFV C)VVF D)FVV E)VFF

02 Determine el décimosegundo término que se genera en su desarrollo el cociente notable:

$$\frac{x^{15}+y^{15}}{x+y}$$

A) $-x^3y^{11}$ B) $-x^3y^{11}$ C) $-x^4y^{10}$ D) x^4y^{10} E) x^3y^{11}

03 Si: $\frac{x^{n-1}-1}{x^4-1}$, genera un cociente notable de diez términos, determine el penúltimo término.

A) x^4 B) $-x^4$ C) x^8 D) $-x^8$ E) 1

04 Determine el quinto término del desarrollo que genera el siguiente cociente notable:

$$\frac{x^6-64y^{12}}{x-2y^2}$$

Dar el coeficiente.

A) 8 B) 16 C) 32 D) 64 E) 128

05 Si en el desarrollo del cociente notable

$$\frac{x^{2m+3n}-y^{7m}}{x^2-y^4}$$

Hay *14* términos, calcular el grado absoluto del término que ocupa el lugar $(m-n)$

A) 28 B) 30 C) 32 D) 18 E) 26

06 Calcular el grado absoluto del cuarto término en el desarrollo del cociente notable:

$$\frac{x^x-y^{14}}{x^3-y^2}$$

A) 16 B) 14 C) 13 D) 15 E) 12

07 Calcular el lugar que ocupa el término de grado *101* en el desarrollo de:

$$\frac{x^{180}-y^{80}}{x^9-y^4}$$

A) 13 B) 14 C) 15 D) 16 E) 18

08 Si la división: $\frac{x^a-1}{x^2-1}$ genera un cociente notable que tiene *4* términos, hallar la suma del tercer y cuarto término de su desarrollo.

A) x^4+1 B) x^4+x^2 C) x^2+1 D) x^2+x^4 E) $x+1$

09 Hallar el cuarto término del cociente notable generado por: $\frac{a^{9n+12}-b^{2n^2}}{a^3-b^2}$

A) $a^{36}b^{12}$ B) $a^{36}b^4$ C) $a^{40}b^6$ D) $a^{36}b^6$ E) $a^{39}b^6$

10 Reducir:

$$\frac{x^{88}+x^{86}+x^{84}+...+x^2+1}{x^{44}+x^{43}+x^{42}+...+x+1}$$

A) $\frac{x^{45}-1}{x+1}$ B) $\frac{x^{45}-1}{x-1}$ C) $\frac{x^{49}-1}{x-1}$

D) $\frac{x^{45}+1}{x+1}$ E) $\frac{x^{48}-1}{x-1}$

11 Hallar el décimo término del cociente notable generado por $\frac{x^{100}+y^{20}}{x^5+y^2}$

A) $x^{25}y^9$ B) $x^{18}y^{50}$ C) $-x^{10}y^9$ D) $-x^{50}y^{18}$ E) $x^{20}x^{30}$

12 Qué lugar ocupa el término en el cual la diferencia de exponentes de **x** e **y** es *11* en el desarrollo de:

$$\frac{x^{40}-y^{20}}{x^2-y}$$

A)10 B)12 C)14 D)16 E)18

13 Determine el conjunto:

$$A=\left\{n\in\mathbb{N}/\frac{x^{2n-4}-y^{n-1}}{n^{n-2}-y^{n-3}}\text{ es un cociente notable}\right\}$$

A) {1} B) {2} C) {2; 5} D) {5} E) { }

14 En el desarrollo del cociente notable:

$$\frac{x^{15m+50}-y^{15m-10}}{x^{m+1}-y^{m-2}}$$

calcular el lugar del término que tiene grado absoluto igual a *85*.

A) 17 B) 15 C) 13 D) 11 E) 9

15 Hallar el equivalente de:

$$x^{16}+x^{14}y^5+x^{12}y^{10}+...+x^2y^{35}+y^{40}$$

A) $\dfrac{x^{18}+y^{45}}{x^2+y}$ B) $\dfrac{x^{18}-y^{45}}{x^2-y}$ C) $\dfrac{x^{16}-y^{45}}{x-y^5}$

D) $\dfrac{x^{16}+y^{45}}{x+y^5}$ E) $\dfrac{x^{18}-y^{45}}{x^2-y^5}$

16 Siendo x^6y^4 uno de los términos que genera el cociente notable: $\dfrac{x^a-y^b}{x^2+y^2}$

calcular: $a+b^2$

A) 151 B) 153 C) 154 D) 156 E) 157

17 Si el quinto término que genera la siguiente división notable: $\dfrac{x^{14}-y^{35}}{x^2-y^5}$

es $x^{9-m}y^{12+n}$, calcular: $m+n$.

A) 15 B) 14 C) 13 D) 12 E) 10

18 Sabiendo que $x^a y^{24}$ es el término central que se obtiene en el desarrollo de:

$$\frac{x^{75}-y^b}{x^c-y^2}$$

calcular: $a+b+c$

A) 76 B) 85 C) 89 D) 92 E) 95

19 Calcular el número de términos del desarrollo de un cociente notable, que tiene los siguientes términos consecutivos:

$$...+x^{70}y^{12}-x^{63}y^{15}+...$$

A) 12 B) 13 C) 14 D) 15 E) 16

20 Si un término del cociente notable:

$$\frac{(5x-1)^{99}+(5x+1)^{99}}{x}$$

es de la forma $a(25x^2-1)b$, calcular $a+b$

A) 42 B) 40 C) 36 D) 28 E) 39

OCTAVA PRACTICA DIRIGIDA

TEOREMA DEL RESTO
DIVISIBILIDAD POLINOMIAL

01 Determine el residuo de la división:

$$x^{20}(x^2+x+1)+x^{19}(x+1)$$

A) $-x^{19}$ B) $-2x^{19}$ C) x^{19} D) $2x^{19}$ E) $3x^{19}$

02 Hallar el resto de la división:

$$\frac{(x-1)(x+2)(x+3)(2x-1)}{x^2+x-5}$$

A) $x+8$ B) $2x+7$ C) $6x+10$ D) $9x+21$ E) $9x+11$

03 El residuo de dividir:

$x^n(x+1)^n+(2x^2+2x-1)^{20}+(x+1)^2-(x+2)$ entre x^2+x-1, es:

A) $x+1$ B) 2 C) 1 D) -1 E) 0

04 Al dividir:

$$\frac{(x+1)^{35}+7(x+1)^{28}+3(x+1)^{17}+(x+1)^6+3}{x^2+2x+2}$$

obtenemos como residuo:

A) $2x+11$ B) $2x-11$ C) $2x+7$ D) $2x+13$ E) $2x-13$

05 Hallar el resto de la división: $\dfrac{2x^{23}-x^5+3}{x^2+x+1}$

A) $-4+x$ B) $4-x$ C) $2-x$ D) 3 E) -3

06 Determine el valor de M, si la siguiente división:

$$\frac{x(y+z)+y(x+z)+z(x+y)+M(x^2+y^2+z^2)}{x+y+z}$$

es exacta.

A) -3 B) -1 C) 1 D) 2 E) 3

07 Determine el resto de dividir:

$$(x+2)^3(x^6+x+1) \text{ por } x^2-x+1$$

Dar como respuesta el coeficiente del término lineal.

A) 12 B) 16 C) 18 D) 29 E) 55

08 Si el polinomio $P(x)$ de tercer grado es divisible por $x-2$, se anula para $x=-1$; tiene término independiente -10 y al ser dividido por $(x-3)$ su resto es 56. Calcular $P(4)$.

A) 164 B) 170 C) 128 D) 160 E) 156

09 Si el polinomio de tercer grado $P(x)$ se divide separadamente por $(x-3)$, $(x+2)$ y $(x-1)$ se obtiene el mismo resto -36. Además 4 es raiz de $P(x)$. Calcular $P(5)$.

A) 120 B) 124 C) 108 D) 144 E) 24

10 Si $P(x)$ es un polinomio de quinto grado divisible entre $(2x^4-3)$, al dividir $P(x)$ separadamente entre $(x+1)$ y $(x-2)$ los restos obtenidos son, respectivamente, 7 y 232. Determine la suma de los coeficientes del polinomio $P(x)$.

A) -15 B) -3 C) 5 D) 15 E) 27

11 Determine el polinomio $P(x)$ de cuarto grado, tal que sea divisible entre $(3x^3-2)$ y que al dividirlo separadamente entre $(x-1)$ y $(x+3)$ los restos obtenidos son, respectivamente, -5 y -249.

A) $-6x^4-9x^3+4x+6$ B) $-6x^4+8x^2+4x+6$

C) $-6x^4+9x^3-4x+6$ D) $6x^4+7x^3+4x+6$
E) $6x^4+9x^2+4x+6$

12 Si P es un polinomio de tercer grado, tal que al dividir P entre (x^2-2x+2) deja un residuo $(3x-6)$. Al dividir P entre (x^2+x) su residuo es $(6x+2)$. Calcule el residuo que se obtiene de dividir P entre $(x+1)(x-2)$.

A) $-8x+4$ B) $4x-8$ C) $8x+4$ D) $4x+8$ E) $8x-4$

13 Si al dividir un polinomio $P(x)$ entre (x^3+1), el resto resultante es (x^2+x-1). El resto de dividir $P(x)$ entre (x^2-x+1) es:

A) $2x-2$ B) $2x+2$ C) $x-2$ D) $x+2$ E) $x-1$

14 Si los cocientes de dividir $P(x)$ entre $(x-1)$ y $(x-2)$ son, respectivamente, $Q(x)$ y $q(x)$, determine $P(3)$, sabiendo que $P(1)=3$; $P(2)=2$ y $2Q(3)+q(3)=5$.

A) -3 B) 5 C) 2 D) 4 E) 5

15 Al dividir separadamente el polinomio $P(x)$ entre $x^2-(b+1)x+b$ y entre $x^2-(b+2)x+2b$ se obtiene por restos $7x-4$ y $5x-8$, respectivamente. Entonces la suma de coeficientes del resto de dividir $P(x)$ entre:

$x^3-(b+3)x^2+(3b+2)x-2b$ es:

A) -1 B) 0 C) 1 D) 2 E) 3

16 Un polinomio $P(x)$ de sexto grado al ser dividido por $(x+1)^5$ arroja un cociente entero $q(x)$ y un residuo $3x+2$. Si $q(x)$ tiene como coeficiente principal al número 7, y la suma de coeficientes de $P(x)$ es 325, determine el término independiente de $q(x)$.

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

17 El polinomio $P(x)$ dividido separadamente entre (x^2-x+1) y (x^2+x+1) originan residuos $-x+1$ y $3x+5$, respectivamente. Determine el término independiente del residuo de dividir $P(x)$ entre x^4+x^2+1.

A) 1 B) 3 C) 5 D) 6 E) 8

18 Hallar el residuo: $\dfrac{(x-5)^{10}+(x-6)^7+6}{(x-5)(x-6)}$

A) $2x-5$ B) $2x+5$ C) $2x$ D) 5 E) $3x-5$

19 Sabiendo que $P(x)$ es un polinomio y si $a \neq b$ son números reales tales que $P(a)=P(b)$, entonces el resto de la división de $P(x)$ por $x^2-(a+b)x+ab$ es:

A) $(P(a))^2$ B) 1 C) $P(a)$ D) $\sqrt{P(a)}$ E) 0

20 Si «n» es un número natural impar y múltiplo de 3, determine el resto en la siguiente división:

$$(x^{2n}+x^n+2)\div(x^2-x+1)$$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

NOVENA PRACTICA DIRIGIDA

COCIENTES NOTABLES

01 Si el cociente notable: $\dfrac{x^{\alpha-1}-y^{\beta-2}}{x^2-y^3}$

admite 10 términos, el valor de $\alpha+\beta$ es:

A) 50 B) 51 C) 52 D) 53 E) 54

02 Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

( ) Si $\dfrac{x^{n+3}-y^{20}}{x^2-y^4}$ es un cociente notable $\Rightarrow n=7$

( ) La división $\dfrac{x^{40}-y^{40}}{x^3+y^3}$ origina un cociente notable.

( ) El grado del tercer término de $\dfrac{x^{36}-y^{54}}{x^2+y^3}$ es 36.

A)VVF B)VFV C)VVV D)FFV E)FVF

03 El penúltimo término del cociente notable $\dfrac{x^{40}-y^{10}}{x^4+y}$, es:

A) x^9y^8 B) $-x^4y^8$ C) x^4y^8 D) x^8y^9 E) $-x^8y^9$

04 El siguiente polinomio:

$$P(x)=x^{135}-x^{130}+x^{125}-\dots-x^{10}+x^5-1$$

corresponde a un cociente notable originado por:

A) $\dfrac{x^{140}-1}{x^5-1}$ B) $\dfrac{x^{140}+1}{x^5+1}$ C) $\dfrac{x^{140}-1}{x^5+1}$

D) $\dfrac{x^{140}+1}{x^5-1}$ E) $\dfrac{x^{135}+1}{x^5+1}$

05 Si el cociente notable de $\dfrac{x^8-1}{x^m-1}$ admite cuatro términos, calcular:

$$m^9+m^8+m^7+\dots+m+4$$

A) 1024 B) 1026 C) 1 028 D) 1030 E) 1 032

06 El coeficiente del quinto término del cociente notable de: $\dfrac{x^5-32y^{10}}{x-2y^2}$ es:

A)8 B)16 C)32 D) 64 E) 128

07 Calcular el grado del onceavo término del desarrollo de: $\dfrac{a^{3n+2}-b^{5n-1}}{a^2-b^{n-5}}$

A) 25 B) 32 C) 28 D) 30 E) 34

08 Sabiendo que uno de los términos del cociente notable de: $\dfrac{x^\alpha+y^\beta}{x+y^2}$

A) 20 B) 200 C) 300 D) 100 E) 60

09 Si la división: $\dfrac{x^{5n+3}-y^{5(n+6)}}{x^{n-1}-y^{n+2}}$ genera un cociente notable, el número de términos es:

A)7 B)9 C)10 D)12 E)18

10 Si «*m*» es el décimosexto término del desarrollo del cociente notable: $\dfrac{a^{100}-a^\alpha}{a^5-1};\alpha\in\mathbb{Z}^+$

hallar el término central de: $\dfrac{m^{11}+b^{44}}{m+b^4}$

A) ab^2 B) $-a^{100}b^{20}$ C) $-a^{20}b^{10}$
D) ab^{20} E) $-a^{30}b^{20}$

11 Determinar el número de términos del desarrollo de: $\dfrac{x^{18m+4}-y^{6n+36}}{x^{3m-4}y^{n-1}}$ si el grado relativo a «y» en el quinto término es *12*.

A)18 B)19 C)20 D)21 E)22

12 la siguiente división $\dfrac{x^my^n+y^{119}}{x^2y^3+y^7}$ genera un cociente notable, determine el valor de verdad de las proposiciones:

( ) El cociente notable admite *17* términos.

( ) El valor de $m+n$ es *85*.

( ) El primer término es: $-x^{32}y^{48}$

A) VVV B) VVF C) VFF D) FVF E) FFV

13 En el cociente notable de: $\dfrac{x^{100}-y^{100}}{x^4-y^4}$ la suma de todos los exponentes de las variables de su desarrollo es:

A)2400 B)2500 C)2600 D) 2 700 E) 2 800

14 Determine el cociente notable que contiene en su desarrollo los siguientes términos consecutivos:

$$\ldots - x^{63}y^{15} + x^{56}y^{18} - \ldots$$

y proporcionar el número de términos que posee.

A) 11 B) 13 C)14 D) 15 E) 18

15 Calcular el valor de $a+b$ en el cociente notable de: $\dfrac{x^{2a+3b+26}-y^{5a+2b-12}}{x^5-y^3}$ si el término noveno es: $x^{10}y^{24}$

A)8 B)9 C)10 D)12 E)13

CLAVES DE LA PRIMERA PRACTICA									
1)*	2)*	3)*	4)*	5)*	6)*	7)*	8)*	9)*	10)*
11)B	12)C	13)A	14)D	15)E	16)E	17)A	18)C	19)E	20)A
1)C	2)E	3)E	4)E	5)A					

CLAVES DE LA SEGUNDA PRACTICA									
1)D	2)B	3)B	4)B	5)C	6)D	7)D	8)B	9)E	10)D
11)E	12)D	13)B	14)E	15)B	16)E	17)A	18)D	19)A	20)D

CLAVES DE LA TERCERA PRACTICA									
1)D	2)D	3)E	4)D	5)C	6)E	7)B	8)D	9)B	10)D
11)C	12)D	13)D	14)A	15)D	16)C	17)E	18)E	19)D	20)B

CLAVES DE LA CUARTA PRACTICA									
1)B	2)A	3)C	4)D	5)B	6)E	7)C	8)A	9)C	10)D
11)C	12)D	13)C	14)C	15)C	16)C	17)D	18)D	19)B	20)E
1)C	2)D	3)A	4)D	5)A					

CLAVES DE LA QUINTA PRACTICA									
1)C	2)B	3)C	4)D	5)E	6)D	7)A	8)A	9)C	10)B
11)D	12)D	13)C	14)D	15)D	16)C	17)D	18)C	19)B	20)E
1)B	2)A	3)C	4)D	5)D					

CLAVES DE LA SEXTA PRACTICA									
1)C	2)D	3)E	4)A	5)A	6)B	7)D	8)B	9)D	10)A
11)D	12)C	13)A	14)D	15)B	16)B	17)E	18)B	19)D	20)C

CLAVES DE LA SEPTIMA PRACTICA									
1)C	2)B	3)A	4)B	5)C	6)D	7)C	8)C	9)D	10)D
11)E	12)A	13)D	14)A	15)E	16)D	17)C	18)C	19)D	20)E

CLAVES DE LA OCTAVA PRACTICA									
1)A	2)D	3)B	4)A	5)C	6)C	7)E	8)B	9)C	10)B
11)A	12)C	13)A	14)E	15)E	16)C	17)A	18)A	19)C	20)B

CLAVES DE LA NOVENA PRACTICA									
1)D	2)B	3)C	4)C	5)B	6)B	7)E	8)B	9)B	10)B
11)C	12)B	13)A	14)D	15)D					



OBJETIVOS:

Al finalizar éste capítulo , el estudiante será capaz de:

* Expresar un polinomio como una multiplicación indicada de factores primos.

* Reconocer un factor primo de un polinomio factorizado

* Identificar el algoritmo a utilizar de acuerdo al tipo de polinomio que se presente

* Manejar de modo fluido las diferentes herramientas que se utilizan para factorizar polinomios.

* *Para* la resolución de las *ecuaciones polinomiales* del *tipo:* $P(x)=0$; la *descomposición* en *factores* de la *expresión* P, será *necesaria para* despejar *explícitamente* los *valores* de las raíces.

* *Del mismo* modo, *para determinar* el conjunto solución de las *inecuaciones polinomiales* de *la forma:* $P(x)\geq 0$, se *requiere factorizar* P , *para ubicar* los *puntos críticos* sobre la recta numérica real.

* A corto plazo , este *acápite* será *Importante para la simplificación* de *una fracción* reductible

INTRODUCCIÓN

Piensa en un número par mayor que ***10***... ¿lo tienes? ...ok!!

Bueno, ahora ese número escríbelo al lado izquierdo sobre la línea punteada y al lado derecho completa el número que falta:

... = 7 + ...



A estos números se les llama SUMANDOS

Ahora, el número pensando, escríbelo nuevamente al lado izquierdo, sobre la línea punteada y al lado derecho completa de acuerdo a la operación indicada:

... = ... x ...



A estos números se les llama FACTORES

Notarás que el número que pensaste puede ser escrito de dos maneras: el primer caso con SUMANDOS y el segundo con FACTORES . Cuando un número se escribe como en el último caso, se dice que está FACTORIZADO y esto nos interesa muchísimo , pues vamos a aplicar esta idea ya no a los números , sino a los polinomios.

¡Ah! ... lo olvidaba ... en Álgebra , al indicar el PRODUCTO de polinomios , no se utiliza el símbolo ×, sino los signos de colección: ( ); [ ]; { } o a veces se colocan las variables una al lado de otra. Observa:

• ***Multiplicar*** : $7x^2+5$ ***por*** $3x-7$

$\Rightarrow (7x^2+5)(3x-7)$

• ***Multiplicar:*** $3a^2$ ***por*** $b^5 \Rightarrow 3a^2b^5$

La factorización es un proceso de transformación de un polinomio de grado no nulo en una multiplicación indicada de dos o más polinomios también de grados no nulos. La factorización es un proceso inverso a la aplicación de las propiedades de la multiplicación; su operación no está sujeta a reglas. En muchos casos para factorizar un polinomio dependerá bastante de la habilidad que vaya adquiriendo el estudiante. Es importante que el estudiante aplique muchos de los conceptos que maneja en aritmética como, por ejemplo, número primo y divisor, ya que éstos los usaremos con bastante frecuencia en la presente unidad. En álgebra, en lugar de hablar de número primo como se hace en la aritmética, hablaremos de factor primo.

FACTORIZACIÓN

Proceso inverso de la multiplicación por medio del cual una expresión algebraica racional entera es presentada como el producto de dos o más factores algebraicos.

EJEMPLOS:

Factorización →

$$x^2-6x+8=(x-4)(x-2)$$

← **Multiplicación**

$$\underbrace{a^2-b^2}_{\text{antes de factorizar}}=\overbrace{\underbrace{(a+b)(a-b)}_{\text{factores}}}^{\text{ya factorizado}}$$

Puede notarse que si multiplicamos $(a+b)(a-b)$ se obtiene a^2-b^2 que viene a ser el polinomio original (la factorización y la multiplicación son procesos inversos)

POLINOMIO SOBRE UN CONJUNTO NUMÉRICO

Un polinomio estará bien definido sobre un campo numérico , si los coeficientes de dicho polinomio pertenecen al conjunto numérico asociado a dicho campo.

se consideran campo , al conjunto de los números racionales Q , al conjunto de los números reales R, y al conjunto de los números complejos C.

EJEMPLOS :

* $P(x) = x^2 - x + 16$ ***está definido en Q,R y C*** ,

también se puede decir que está definido en $\mathbb{Z}$, puesto que sus coeficientes son números enteros.

*$Q(x) = \sqrt{3}x^3 + x - \sqrt{17}$ ***está definido en R y C***,

también se puede decir que está definido en $\mathbb{R}$, puesto que sus coeficientes son números reales.

*$T(x) = \sqrt{3}ix^3 + x - \sqrt{17} + i$ ***está definido en C***

donde $i = \sqrt{-1}$ ***.............es la unidad imaginaria,*** dado que sus coeficientes son números complejos .

OBSERVACIONES :

*todo polinomio que está definido sobre los números racionales , también está definido sobre los números reales y complejos, pero no lo contrario no es verdad, es decir si los polinomios están definidos en los reales o complejos no siempre están definidos en los racionales.

*cualquier expresión podemos transformarla en un producto , pero no siempre se puede factorizar.

EJEMPLO:

* $a - b = \underbrace{\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)}_{\text{no es una factorizacion por tener radicales las variables}}$

* $5a^2 - 3b^2 = \underbrace{\left(\sqrt{5}a + \sqrt{3}b\right)\left(\sqrt{5}a - \sqrt{3}b\right)}_{\text{se ha factorizado porque los radicales afecta a los coeficientes mas no a las variables}}$

* $a - b = b(\frac{a}{b} - 1)$ ***es un producto indicado , pero no se ha factorizado porque en un factor la variable figura como denominador.***

NOTA:

la factorización o descomposición de factores de una expresión se realiza solo para polinomios , es decir que es una operación limitada , en cuanto se refiere al número de factores obtenidos.

FACTOR O DIVISOR ALGEBRAICO

un polinomio no constante es un factor común de otro polinomio , cuando lo divide exactamente , es decir : si ***f(x)*** es un factor de ***P(x)***, entonces ***P(x)*** es divisible por ***f(x)***.

EJEMPLO:

* ***$x + 1$ es un factor de $x^2 - 1$, dado que:***

$\frac{x^2 - 1}{x + 1} = x - 1$ ***es exacta***

POLINOMIO IRREDUCIBLE SOBRE UN CAMPO NUMÉRICO

un polinomio será irreducible sobre un campo numérico si no acepta transformación o multiplicación indicada de dos o más polinomios no constantes sobre el mismo conjunto numérico .

EJEMPLOS:

*$P(x) = x^2 + 1$ ***es irreducible en Q y R pero no en C dado que*** : $x^2 + 1 = (x + i)(x - i)$

*$P(x) = x^2 - 3$ ***es irreducible en Q pero no en R dado que :*** $x^2 - 3 = \underbrace{\left(x + \sqrt{3}\right)\left(x - \sqrt{3}\right)}_{\text{son factores primos en R}}$

OBSERVACIONES:

*todo polinomio lineal de la forma $ax+b$ es irreducible en cualquier campo numérico.

****LA FACTORIZACIÓN*** es un proceso de transformaciones sucesivas de un polinomio en una multiplicación indicada de polinomios irreducibles, dentro de un campo numérico.

*generalmente el conjunto en el que se ha de trabajar es el de los números ***RACIONALES*** , salvo que se indique lo contrario.

FACTOR PRIMO

Se llama ***polinomio primo*** a aquel de grado absoluto no nulo que no admite ser descompuesto como una multiplicación indicada de dos o más polinomios de grados no nulos. Es decir: un polinomio primo no puede ser factorizado. *Un factor* ***primo o irreductible*** es aquel polinomio primo que aparece como factor en una multiplicación indicada.

EJEMPLO:

En $x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$

El factor «$x + 1$» es primo, porque ya no puede ser

factorizado.

Los factores primos más comunes son:

•De primer grado:

$x; y; x + y; x - y; 3x + 7;$ *etc.*

Todo polinomio de primer grado o lineal es primo.

•De segundo grado:

$x^2+1\ ;\ x^2+a^2\ ;\ x^2+x+1\ ;\ x^2-x+1\ ;\ x^2+xy+y^2\ ;x^2-xy+y^2$, ..., *etc* .

El trinomio cuadrático: $ax^2 + bx + c$ es primo sí y solo si: $b^2 - 4ac < 0$ ó $b^2 - 4ac$ no es cuadrado perfecto.

•De tercer grado:

$x^3+7; x^3-7; x^3 \pm A$ es primo si A no es cubo perfecto

$x^3 + x+1\ ;\ x^3-x+1$;..... etc.

EJEMPLOS:

1) Sea el polinomio factorizado:

$$P(x)=(x-1)^3(x+1)^2\ (x^2+x+5)^2\ (x^2+1)^2$$

Sus factores primos son:

$x-1;\ x+1;\ x^2+ x+5$ y x^2+1 de donde los dos primeros son factores primos lineales y los dos últimos factores primos cuadráticos.

2) El polinomio:

$$Q(x) = x^2\ (x+3)^2\ (x-5)^2(x^2+x+1)(x^2-x+1)$$

tiene los siguientes factores primos:

$x\ ;\ x+3;\ x-5;\ x^2+x+1$ y x^2-x+1, de los cuales los tres primeros factores primos son lineales y los dos últimos factores primos son cuadráticos.

FACTOR PRIMO RACIONAL(Q)

Llamamos así a aquel polinomio que no se puede descomponer en otros factores racionales . Se podrá identificar mediante los siguientes detalles :

**Debe ser un polinomio de coeficientes racionales.*

**Un factor primo algebraico siempre contiene al menos una variable .*

** Serán divisibles únicamente por él mismo y por la unidad .*

**Si en la factorización aparecen más de un factor primo se identifica porque aparecen multiplicando.*

EJEMPLO:

**en* $(x-1)^3$ *sus factores son* $(x-1)$ *y* $(x-1)^2 = x^2-2x+1$ *, pero* x^2-2x+1 *no es primo ya que es divisible por* $(x-1)$.

NÚMERO DE FACTORES PRIMOS

El número de factores primos depende del campo númerico en el cual se trabaje .

En el conjunto de los números racionales , el número de factores primos se determina contando los factores basales (que figuran como bases y que contengan a las variables , denominados también factores algebraicos).

EJEMPLOS:

*$P(x)=(x+2)^4(x^2+1)^2(3x-2)$ ***,tiene 3 factores primos .***

*$P(x;y)=x^2y(x-5y)^3(x+5y)^5$, tiene *4* factores primos.

NÚMERO DE FACTORES TOTALES

sea $a^\alpha b^\beta c^\gamma$ donde «*a*», «*b*» y «*c*» son primos(no admiten factorización),entonces :

$$\begin{pmatrix}\text{número}\\ \text{de factores}\\ \text{totales}\end{pmatrix}=(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)$$

$$\begin{pmatrix}\text{número}\\ \text{de factores}\\ \text{algebraicos}\end{pmatrix}=(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)-1$$

EJEMPLO:

en $P(x\ ;y\ ;z)=x^3y^2z$

*tiene *3* factores primos

$$*\begin{pmatrix}\text{número}\\ \text{de factores}\\ \text{totales}\end{pmatrix}=(3+1)(2+1)(1+1)=24$$

$$\begin{pmatrix}\text{número}\\ \text{de factores}\\ \text{algebraicos}\end{pmatrix}=(3+1)(2+1)(1+1)-1=23$$

OBSERVACIÓN :

El número máximo de factores primos que tiene un polinomio está dado por su grado.

EJEMPLO:

$x^3-6x^2+12x-6$ a lo más tiene *3* factores primos .

*Los polinomios lineales (primer grado) necesariamente son primos.

*Solo se pueden factorizar los polinomios no primos.

MÉTODOS DE FACTORIZACIÓN

No existe un método especifico para factorizar a una expresión dado que esta se puede hacer por

dos o más metodos llamados también criterios . Al factorizar un polinomio, primero se identifica el tipo de polinomio y luego se establece el criterio a usar. Los criterios más usados son:

I) FACTOR COMÚN :

Dado un polinomio se extrae el ***M.C.D.*** de los coeficientes, luego la*(s)* variable*(s)* comun*(es)* a todos los términos es retirada con el menor exponente. Estos dos resultados se multiplican y son colocados al exterior de un par de paréntesis, en cuyo interior queda el cociente de dividir cada término con el producto hallado.

¿Muy difícil? ... No es así ... observa los siguientes ejemplos:

EJEMPLO 1 :

Factorizar: $7x^2 + 5x^3y$

RESOLUCIÓN:

$7x^2 + 5x^3y \rightarrow MCD(7; 5) = 1$

$\rightarrow$ variable común : x^2

*Así tenemos: $7x^2 + 5x^3y = 1x^2\left(\frac{7x^2}{1x^2} + \frac{5x^3y}{1x^2}\right)$

$$\Rightarrow 7x^2 + 5x3y = x^2(7 + 5xy)$$

Cuando en un polinomio se repite una o más variables en todos los términos, un factor común del polinomio es aquella variable que se repite con el menor exponente.

EJEMPLO 2 :

$12x^4y^3 - 18x^2y^5 + 6x^3y^2$

$\rightarrow MCD(12;18;6) = 6$

$\rightarrow$ variables comunes : x^2y^2

* Así tenemos:

$$12x^4y^3 - 18x^2y^5 + 6x^3y^2 = 6x^2y^2\left(\frac{12x^4y^3}{6x^2y^2} - \frac{18x^2y^5}{6x^2y^2} + \frac{6x^3y^2}{6x^2y^2}\right)$$

$$\Rightarrow 12x^4y^3 - 18x^2y^5 + 6x^3y^2 = 6x^2y^2\left(2x^2y - 3y^3 + x\right)$$

EJEMPLO 3 :

Factorice: $A_{(x)} = x^4 + 2x^3 + x^2$

RESOLUCIÓN:

Como se repite x,el factor común es: x^2

$$\Rightarrow A_{(x)} = x^2(x^2 + 2x + 1) \Rightarrow A_{(x)} = x^2(x + 1)^2$$

Sus factores primos son: $x ; x + 1 \Rightarrow A$ tiene dos factores primos lineales.

EJEMPLO 4 :

Hallar el número de factores primos lineales de:

$$B_{(x)} = x^5 + 4x^4 + 4x^3$$

RESOLUCIÓN:

El factor común es: x^3

Luego $B_{(x)} = x^3(x^2 + 4x + 4) = x^3(x + 1)^2$

Sus factores primos son: $x \wedge x + 2 \Rightarrow$ el número de factores primos es: 2.

*Sigamos practicando, recordando que:

I) Elige el mayor número que divida a «todos» los coeficientes.

II) La*(s)* variable*(s)* que sean comunes a «todos» los términos elevados a su «menor» exponente.

III) Finalmente realiza la división del «factor común» con cada uno de los términos.

EJEMPLO 5 :

Factorizar:

$$12a^3b^2 - 16a^4b^3 - 20a^2b^2$$

RESOLUCIÓN:

$$\underbrace{4a^2b^2}_{\text{Factor común}}\left(3a - 4a^2b - 5\right)$$

EJEMPLO 6 :

Factorizar:

$$5x^4y^5 - 7x^3y^4 + 3x^2y - 4xy$$

RESOLUCIÓN:

$$\underbrace{1xy}_{\text{Factor común}}\left(5x^3y^4 - 7x^2y^3 + 3x - 4\right)$$

EJEMPLO 7 :

$$abc + 4bc^2 - b^2c$$

$$= \underbrace{bc}_{\text{Factor común}}(a + 4c - b)$$

EJEMPLO 8 :

$$x(a + b) + y(a + b)$$

$$= \underbrace{(a + b)}_{\text{Factor común}}(x + y)$$

*veamos en forma más general el método del factor común.

MÉTODO DE FACTOR COMÚN

Se aplica cuando todos los términos del polinomio se repite el mismo factor , el que se denomina factor común . Para factorizar se extrae la parte que se repite en todos los términos para lo cual se extrae la expresión repetida , elevada a su menor exponente.

EJEMPLO 1:

Factorizar: $E = 7x^5y^5 - 2x^3y^3 + x^2y^2$

RESOLUCIÓN:

*El factor común monomio será x^2y^2. Ahora dividiremos cada uno de los términos entre dicho factor común , para lo que queda en el polinomio. Luego de dichó procedimiento se tendrá:

$$E=\underbrace{x^2y^2(7x^3\ \ y^3-2xy+1)}_{Factores\ primos}$$

EJEMPLO 2:

En el polinomio:

$$P(x)=4ax^2+2a^2x-6ax$$

RESOLUCIÓN:

*Observamos que se repiten las constantes: **2** , a y la variable x (la cual debe extraerse con su menor exponente) Luego escribimos:

$P(x)=2ax(2x+a-3)$ con lo cual el polinomio está factorizado sobre $\mathbb{Q}$.

Puede ocurrir que todos los términos de un polinomio no tengan factor común , entonces agrupamos convenientemente aquellos términos que vamos a factorizar.

EJEMPLOS 3:

*Factorice:

$$P(x,y)=2x^2y+3xy^2+xy$$
$$=x(2xy+3y^2+y)$$
$$=xy(2x+3y+1)$$

*Luego el polinomio presenta **3** factores primos:

$x\ ;\ y\ ;\ 2x+3y+1$

* Factorice:

$$N(x,y)=(x+2)y+(x+2)x+(x+2)$$
$$=(x+2)(y+x+1)$$

*Luego el polinomio presenta dos factores primos: $(x+2)\ ;\ (y+x+1)$

* Factorice : $xy+xz+xw$

$$\underbrace{xy+xz+xw}_{\text{"x" factor común}}\xrightarrow{\text{se extrae "x"}}\underbrace{x(y+z+w)}_{\text{polinomio ya factorizado}}$$

*Factorice : $xy^4+y^7z+y^3w$

$$\underbrace{xy^4+y^7z+y^3w}_{\text{"}y^3\text{" factor común}}\xrightarrow{\text{se extrae "}y^3\text{"}}\underbrace{y^3(xy+y^4z+w)}_{\text{polinomio ya factorizado}}$$

FACTOR COMÚN POLINOMIO

Se usa este método cuando el polinomio posee un factor común de 2 o más términos.

Si el polinomio tiene **4** términos o más, de manera que se puedan formar grupos de igual cantidad de términos y que, al ser factorizados por separado, cada grupo arroja un factor común para todos los grupos (en algunos casos se puede agrupar un producto notable), esto conduce a la factorización del polinomio.

Por lo general, se encuentra luego de agrupar términos y bajo los siguientes criterios.

•DE ACUERDO AL NÚMERO DE TÉRMINOS:

EJEMPLO:

Si el polinomio tiene **8** términos podemos agrupar de **2** en **2** ó de **4** en **4**.

* Factorice : $x^2+xy+xz+zy$

$$x^2+xy+xz+zy=\underbrace{x(x+y)+z(x+y)}_{factor\ común:(x+y)}=\underbrace{(x+y)(x+z)}_{ya\ factorizado}$$

•DE ACUERDO A LOS COEFICIENTES DE LOS TÉRMINOS.

EJEMPLO:

Factorizar: $E=x^{12}+x^8y^4+x^4y^8+y^{12}$

Como no hay factor común monomio podemos agrupar los **4** términos de **2** en **2** y en forma ordenada. En cada uno de los grupos:

$$E=x^8(x^4+y^4)+y^8(x^4+y^4)$$

*Factor común Polinomio (x^4+y^4). Ahora dividimos cada agrupación entre el factor común polinomio.

$$E=\underbrace{(x^4+y^4)}_{\text{Factor Primo}}\ \underbrace{(x^8+y^8)}_{\text{Factor Primo}}$$

*Los factores primos no se pueden descomponer en nuevos factores , tienen un único divisor que es si mismo.

*Esta expresión tendrá **2** factores primos:

EJEMPLO 3 :

Halle el número de factores primos de:

$$C_{(x)}=x^3+2x^2+x+2.$$

RESOLUCIÓN:

El polinomio tiene **4** términos, agrupamos de **2** en **2** en $2\Rightarrow C_{(x)}=(x^3+2x^2)+(x+2)$

factoricemos cada grupo por separado

$\Rightarrow C_{(x)}=x^2(x+2)+(x+2)$

como puedes ver «$x+2$» es un factor común para los **2** grupos.

Luego:

$C_{(x)}=(x+2)(x^2+1)$,entonces tiene dos factores primos.

EJEMPLO 4 :

En el polinomio: $P(x,y)=3x^2-2xy-2y^2+3xy$

*Agrupamos convenientemente el primer y cuarto término y también el segundo y tercer término.

Así: $P(x)=3x^2+3xy-2xy-2y^2$

$P(x) = 3x(x + y) - 2y(x + y)$

$P(x) = (x + y)(3x - 2y)$

En lo cual P es factorizado.

MÁS EJEMPLOS:

* Factorice:

$\underline{mx} + \underline{nx} + \underbrace{am + an}$

Agrupamos el factor común "x" — Agrupamos el factor común "a"

$= x\underline{(m+n)} + a\underline{(m+n)}$

$= (m+n)(x+a)$

* Factorice:

$P(x,y,z) = x^2 + xy + zx + zy + x + y$

$= x(x + y) + z(x + y) + (x + y)$

$= (x + y)[x + z + 1]$

Luego el polinomio presenta dos factores primos:

$(x + y) ; [x + z + 1]$

*Factorice:

$R(a,b,c) = a^2 + ab + ac + a^3 + a^2b + a^2c$

$= a(a + b + c) + a^2(a + b + c)$

$= (a + b + c)[a + a^2]$

$= (a + b + c)\, a(1 + a)$

Luego el polinomio presenta tres factores primos:

$(a + b + c) ; a ; (1 + a)$

* Factorizar: $a(x + 2) - x - 2$

RESOLUCIÓN:

$a(x + 2) - (x + 2) = (x + 2)(a - 1)$

* Factorice: $D_{(x)} = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$

RESOLUCIÓN:

El polinomio tiene 6 términos, entonces formamos grupos de 2 en 2 ó de 3 en 3

$D_{(x)} = (x^5+x^4)+(x^3+x^2)+(x+1)$

$D_{(x)} = x^4(x+1)+x^2(x+1)+(x+1)$

Luego:

$D_{(x)} = (x+1)\underbrace{[x^4+x^2+1]}_{\text{Identidad de Argand}} = (x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)$

* Factorice: $E_{(x)} = x^5 + 2x^4 - x^3 - 2x^3$

RESOLUCIÓN:

$E_{(x)} = x^2(x^3+2x^2-x-2) = x^2[x^2(x+2)-(x+2)]$

$E_{(x)} = x^2(x + 2)[x^2 - 1] = x^2(x + 2)(x + 1)(x - 1)$

* Factorice e indique el número de factores primos lineales de: $F_{(x)} = x^5 - 2x^4 - 16x + 32$.

RESOLUCIÓN:

$F_{(x)} = x^4(x-2) - 16(x-2) = (x-2)(x^4-16)$

$= (x-2)^2(x^2+4)(x+2)$

$\Rightarrow$ el número de factores primos lineales es 2.

II) MÉTODO DE LAS IDENTIDADES

Consiste aplicar en forma inversa los diferentes productos notables ya estudiados(trinomio cuadrado perfecto , diferencia de cuadrados , suma o diferencia de cubos,..........,etc.)

Algunos polinomios tienen la forma de ciertos productos, notables como los siguientes :

Diferencia de cuadrados	$a^{2m} - b^{2n} = (a^m + b^n)(a^m - b^n)$
Suma y diferencia de cubos	$a^{3m} \pm b^{3n} = (a^m \pm b^n)(a^{2m} \mp a^m b^n + b^{2n})$
Identidad de Argand	$a^{4m} + a^{2m}b^{2n} + b^{4n} = [a^{2m} + a^m b^n + b^{2n}][a^{2m} - a^m b^n + b^{2n}]$

donde m y $n \in \mathbb{N}$

A) TRINOMIO CUADRADO PERFECTO (T.C.P.)

Un trinomio es «cuadrado perfecto» cuando es el cuadrado de un binomio.

Un trinomio ordenado con relación a una variable es cuadrado perfecto cuando el primer y tercer término son cuadrados perfectos(o tienen raíz cuadrada exacta) y positivos , y el segundo término es el doble producto de sus raíces cuadradas .

$$A^2 \pm 2AB + B^2 = (A \pm B)^2$$

OBSERVACIÓN:

El trinomio cuadrado perfecto es el desarrollo de un binomio al cuadrado , se caracteriza porque el doble del producto de la raíz de dos de sus términos es igual al tercer término.Todo trinomio cuadrado perfecto se transforma en binomio al cuadrado.

EJEMPLO 1:

$16x^2 + 40xy^3 + 25y^6 = \underbrace{(4x + 5y^3)^2}_{\text{Binomio al cuadrado}}$

$16x^2 \downarrow (4x)^2$; $40xy^3 \downarrow 2(4x)5y^3$; $25y^6 \downarrow (5y^3)^2$

Luego, es *T.C.P.*

EJEMPLO 2:

Factorizar : $m^3 - 2m^2 + m$

RESOLUCIÓN:

• Factorizando el factor común:

$m\underbrace{(m^2 - 2m+1)}_{\text{Trinomio cuadrado Perfecto}} = m(m-1)^2$

$\Rightarrow m^3 - 2m^2 + m = m(m - 1)^2$

B) DIFERENCIA DE CUADRADOS :

Se denomina diferencia de cuadrados , a la diferencia de dos expresiones que tienen raíz cuadrada exacta.

De los productos notables se sabe que :

$$(A + B)(A - B)=A^2 - B^2$$

por lo tanto :

$$A^2 - B^2= (A + B)(A - B)$$

Toda diferencia de cuadrados se descompone en dos factores uno es la suma de las raíces cuadradas y el otro es la diferencia de dichas raíces cuadradas.

EJEMPLO 1 :

Factorizar: $m^8 - 25$

RESOLUCIÓN:

* Entonces:

$m^8 - 25$ → $\sqrt{\;}$ → m^4 ; 5

$$m^8 - 25 = (m^4 + 5)(m^4 - 5)$$

NOTA

• Extraemos la raíz cuadrada a cada término.

• La expresión factorizada, será la suma por la diferencia de dichas raíces

EJEMPLO 2 :

Factorizar: $a^6b^8 - 36$

RESOLUCIÓN:

$a^6b^8 - 36$ → $\sqrt{\;}$ → a^3b^4 ; 6

*entonces : $a^6b^8 - 36=(a^3b^4+6)(a^3b^4-6)$

NOTA

Una diferencia de cuadrados debe tener las siguientes características:

• Es un problema de dos términos.

• Ambos términos del polinomio tiene raíz cuadrada exacta.

EJEMPLO 3 :

$$4x^2 - 25 = (2x+5)(2x-5)$$

⇑

Aquí se utilizó la *DIFERENCIA DE CUADRADOS*

EJEMPLO 4 :

$$9 + x^2 + 6x = (x+3)^2$$

⇑

Aquí se utilizó el *BINOMIO AL CUADRADO*

NOTA

Extraer la raíz cuadrada de un monomio es dividir los exponentes entre dos, porque:

$$\sqrt[2]{a^6} = a^{\frac{6}{2}} = a^3$$

EJEMPLO 5 :

Factorizar: $x^4 - 4b^2$

RESOLUCIÓN:

Se tiene: $(x^2)^2 - (2b)^2 = (x^2 + 2b)(x^2 - 2b)$

EJEMPLO 6 :

Factorizar : $x^2 + 2xy + y^2 - z^6$

RESOLUCIÓN:

$$x^2 + 2xy + y^2 - z^6 \Rightarrow (x+y)^2 - (z^3)^2$$
$$= (x+y+z^3)(x+y-z^3)$$

EJEMPLO 7 :

Factorizar : $P(x) = x^4 - 1$

RESOLUCIÓN:

Aplicando diferencia de cuadrados, se tiene:

$$P(x) = (x^2)^2 - 1^2 = (x^2+1)(x^2-1)$$
$$\Rightarrow P(x) = (x^2+1)(x+1)(x-1)$$

EJEMPLO 8 :

Factorizar: $P(x) = x^2 + 2x - 3$

RESOLUCIÓN:

*Escribimos:

$$P(x) = x^2 + 2x + 1 - 4$$
$$P(x) = (x+1)^2 - 2^2$$
$$P(x) = (x+1+2)(x+1-2)$$
$$\Rightarrow P(x) = (x+3)(x-1)$$

EJEMPLO 9:

Factorizar: $a^2 + b^2 - c^2 + 2ab$

RESOLUCIÓN:

•Asociando adecuadamente:

$$a^2 + 2ab + b^2 - c^2 = (a+b)^2 - c^2$$

• Por diferencia de cuadrados:

$$(a+b+c)(a+b-c)$$

C) SUMA O DIFERENCIA DE CUBOS:

Se denomina «suma de cubos» a la suma de dos cantidades donde ambas tienen raíz cúbica exacta .

De los productos notables se sabe que :

$(a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$ por lo tanto :

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

*toda suma de cubos se descompone en dos factores, uno es la suma de las raíces cúbicas y el otro es igual

a la raíz cúbica elevada al cuadrado menos el producto de las raíces cúbicas más la segunda raíz cúbica elevada al cuadrado.

EN GENERAL :

$$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$$

EJEMPLO 1 :

Factorizar: $27x^3 - 8$

RESOLUCIÓN:

$$(3x)^3 - 2^3 = (3x-2)(9x^2+6x+4)$$

EJEMPLO 2:

Factorizar : $x^6 - 1$

RESOLUCIÓN:

$$(x^2)^3 - 1^3 = (x^4 - 1)(x^4 + x + 1)$$
$$= (x+1)(x-1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)$$

EJEMPLO 3 :

Factorice: $G_{(x)} = x^9 - 1$

RESOLUCIÓN:

Como el exponente es múltiplo de **3** por diferencia de cubos:

$$G_{(x)} = x^9 - 1 = (x^3-1)(x^6+x^3+1) = (x-1)(x^2+x+1)(x^6+x^3+1)$$

EJERCICIO :

Factorice: $H_{(x)} = x^8 + x^4 + 1$

RESOLUCIÓN:

Aplicando la Identidad de Argand:

$$H_{(x)} = (x^4+x^2+1)\ (x^4-x^2+1)$$

Nuevamente por Argand:

$$H_{(x)} = (x^2+x+1)\ (x^2-x+1)\ (x^4-x^2+1)$$

III) ASPA SIMPLE :

Se utiliza para factorizar expresiones trinomias o aquéllas que adopten esa forma:

$$Ax^{2m} + Bx^m y^n + Cy^{2n}$$

Cuando un trinomio (*3* términos) es de grado par, puede tener **2** factores binómicos.

$$P_{(x,y)} = Ax^{2m} + Bx^m y^n + Cy^{2n}$$

$A_1 x^m \quad C_1 y^n$

$A_2 x^m \quad C_2 y^n$

Condición: $(A_1 x^m)(C_2 y^n) + (A_2 x^m)(C_1 y^n) = Bx^m y^n$

$\Rightarrow P_{(x;y)} = (A_1 x^m + C_1 y^n)(A_2 x^m + C_2 y^n)$

Para factorizar a este tipo de polinomios se sigue los siguientes pasos:

i) Se adecúa la expresión a la forma mencionada

ii) Se descompone convenientemente los extremos (teniendo en cuenta el juego de signos)

iii) Se efectúa el producto en aspa y se suman los resultados , si este coincide con el término central de la expresión , entonces se concluye que los factores serán las sumas horizontales.

$$1x^8 - 6x^4 - 12$$

- **Mayor exponente es par**
- 12 → **Sin variable, puede ser (+) ó (–)**
- 1 → **Coeficiente**
- 4 → **Exponente es la mitad del mayor**
- **Variables iguales**

EJEMPLOS:

1) Factorizar : $x^2 - 6x + 8$

RESOLUCIÓN

Extraemos la raíz cuadrada → x^2 $- 6x + 8$

$x \quad \ominus\ 4$

$x \quad \ominus\ 2$

$(-)(+)$

Como los signos son «iguales» tengo que buscar dos números que sumados den **6** y multiplicados **8**.

$\Rightarrow x^2 - 6x + 8 = (x-4)(x-2)$

NOTA

Si:

$x^2 - 6x + 8$

$x \quad -4 \to 2x$

$x \quad -2 \to 4x$

$\quad\quad -6x$

La multiplicación en aspa me permite «comprobar».

- La ley de signos para la adición en Z :

  $-2+8=6$

- Signos diferentes se restan y la respuesta lleva el signo del mayor. $-3-2=-5$
- Signos iguales se suman y se colocan el mismo signo a la respuesta.

2) Factorice : $I(x) = x^2 + 6x + 8$

RESOLUCIÓN:

Como es un trinomio de segundo grado (grado par) por el aspa simple:

$I_{(x)} = x^2 + 6x + 8$

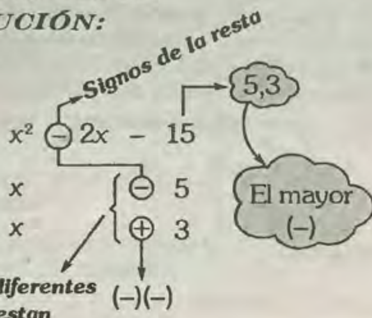
$x \quad 4$ ***condición:*** $2x + 4x + = 6x$

$x \quad 2$

Luego: $I_{(x)} = (x+4)(x+2)$

3) Factorizar : $x^2 - 2x - 15$

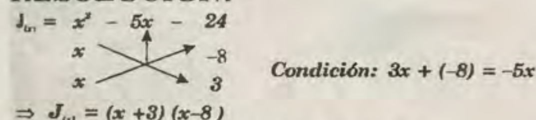
RESOLUCIÓN:



$\rightarrow x^2 - 2x - 15 = (x-5)(x+3)$

4) Factorice: $J_{(x)} = x^2 - 5x - 24$

RESOLUCIÓN:



$\Rightarrow J_{(x)} = (x+3)(x-8)$

5) Halle el número de factores primos :

$$K_{(x)} = x^4 - 13x^2 + 36$$

RESOLUCIÓN

$K_{(x)} = x^4 - 13x^2 + 36$

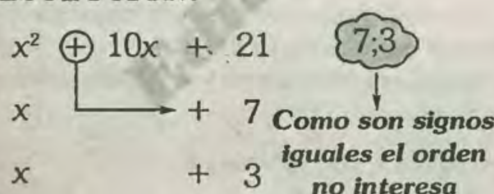


$\Rightarrow K_{(x)} = (x^2-9)(x^2-4)$ por diferencia de cuadrados:

$K_{(x)} = (x+3)(x-3)(x+2)(x-2) \Rightarrow$ el número de factores primos es: ***4***

6) Factorizar: $x^2 + 10x + 21$

RESOLUCIÓN:



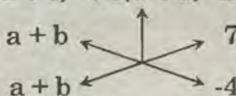
$\rightarrow x^2 + 10x + 21 = (x+3)(x+7)$

EJERCICIO:

Factorizar: $a^2 + b^2 + 3a + 3b + 2ab - 28$

RESOLUCIÓN:

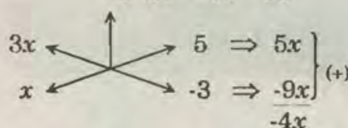
$(a+b)^2 + 3(a+b) - 28 \rightarrow (a+b+7)(a+b-4)$



MÁS EJEMPLOS:

Factorizar : $P(x) = 3x^2 - 4x - 15$

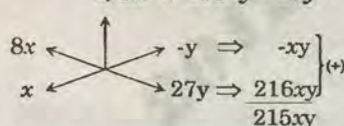
$\Rightarrow 3x^2 - 4x - 15$



Luego: $P(x) = (3x+5)(x-3)$

• $Q(x,y) = 8x^2 + 215xy - 27y^2$

$\Rightarrow 8x^2 + 215xy - 27y^2$



Luego: $Q(x;y) = (8x-y)(x+27y)$

• Sea: $P(x) = x^3 - \underline{x^2 + x} - 1 = (x^2+1)(x-1)$

$\Rightarrow x^3 - x^2 + x - 1 = (x^2+1)(x-1)$

IV) ASPA DOBLE

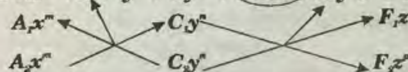
Se utiliza para factorizar polinomios de la forma:

$$Ax^{2m} + Bx^my^n + Cy^{2n} + Dx^m + Ey^n + F$$

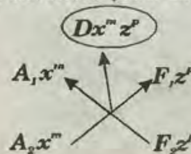
O cualquier otra expresión transformable a esta .

Cuando un polinomio tiene ***6*** términos de grado par, puede aceptar ***2*** factores de ***3*** términos.

$P(x,y,z) = Ax^{2m} + Bx^my^n + Cy^{2n} + Dx^mz^p + Ey^nz^p + Fz^{2p}$



Aspa de comprobación (con los extremos)



Luego:

$P_{(x,y,z)} = (A_1x^m + C_1y^n + F_1z^p)(A_2x^m + C_2y^n + F_2z^p)$

Los pasos a seguir son los siguientes :

A) se adecúa el polinomio a la forma general , en caso de que falte uno o más términos estos se completan con ceros .

B) se toma el primer trinomio de la expresión y se aplica aspa simple para comprobar el término $x^m y^n$.

C) seguidamente a los términos en y^{2n} ; y^n y el término independiente F se les aplica un aspa simple para comprobar al término en y^n.

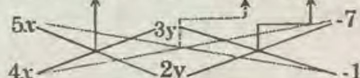
D) finalmente se aplica un aspa de extremo a extremo para comprobar al término en x^n.

Cumplidos los pasos anteriores , se concluye que los factores serán las sumas horizontales .

EJEMPLO 1:

• Factorizar:

$$20x^2 + 22yx + 6y^2 - 33x - 17y + 7$$



*La expresión factorizada es :

$$(5x + 3y - 7)(4x + 2y - 1)$$

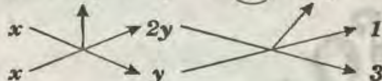
EJEMPLO 2 :

Factorice:

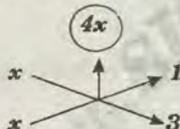
$$L_{(x,y,z)} = x^2 + 3xy + 2y^2 + 4x + 7y + 3$$

RESOLUCIÓN:

$$L(x,y,z) = x^2 + 3xy + 2y^2 + \textcircled{4x} + 7y + 3$$



Aspa de comprobación (con los extremos) .



Luego: $L(x, y, z) = (x + 2y + 1)(x + y + 3)$

EJEMPLO 3 :

Factorice:

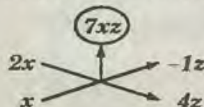
$$M_{(x,y,z)} = 2x^2 + 7xy + 6y^2 + 7xz + 10yz - 4z^2$$

RESOLUCIÓN:

$$2x^2 + 7xy + 6y^2 + \textcircled{7xz} + 10yz - 4z^2$$



Aspa de comprobación:

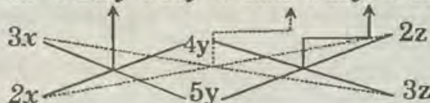


Luego: $M_{(x,y,z)} = (2x + 3y - z)(x + 2y + 4z)$.

EJEMPLO 4:

• Factorizar:

$$6x^2 + 23xy + 20y^2 + 13xz + 22yz + 6z^2$$



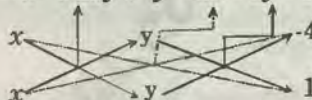
*La expresión factorizada es:

$$(3x + 4y + 2z)(2x + 5y + 3z)$$

EJEMPLO 5 :

Factorizar:

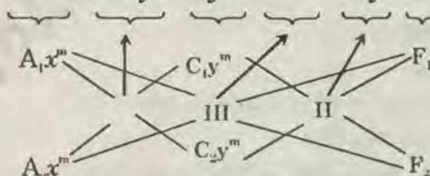
$$P(x,y) = x^2 + 2xy + y^2 - 3x - 3y - 4$$



$P(x;y) = (x + y - 4)(x + y + 1)$

PROCEDIMIENTO GENERAL:

$$Ax^{2m} + Bx^m y^n + Cy^{2n} + Dx^m + Ey^n + F$$



Debe ocurrir que:

i) $A_1x^m C_2y^n + A_2x^m C_1y^n = Bx^m y^n$

ii) $C_1y^n F_2 + C_2y^n F_1 = Ey^n$

iii) $A_1x^m F_2 + A_2x^m F_1 = Dx^m$

Luego los factores se toman en forma horizontal.

$$P(x;y) = (A_1x^m + C_1y^n + F_1)(A_2x^m + C_2y^n + F_2)$$

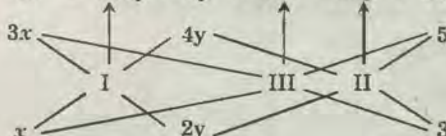
EJEMPLO :

Factorizar:

$$P(x;y) = 3x^2 + 10xy + 8y^2 + 14x + 22y + 15$$

RESOLUCIÓN:

$$3x^2 + 10xy + 8y^2 + 14x + 22y + 15$$



*Verificando:

I) $3x \times 2y + x \times 4y = 10xy$

II) $4y \times 3 + 2y \times 5 = 22y$

III) $3x \times 3 + x \times 5 = 14x$

*Luego: $P(x,y) = (3x + 4y + 5)(x + 2y + 3)$

V) ASPA DOBLE ESPECIAL :

Cuando en un aspa doble el término central es semejante al aspa de comprobación se reducen a un término y solo aparecen **5** términos, este es el caso del aspa doble especial.

Primero se comienza con los extremos para hallar el aspa de comprobación y luego se calcula el verdadero término central.

Se utiliza para factorizar polinomios de la forma :

$$Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E$$

REGLA:

•Se descompone el término de mayor grado y el término independiente ; se calcula la suma del producto en aspa.

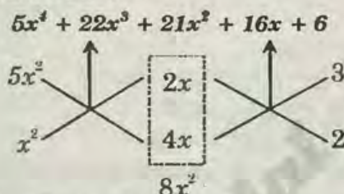
•A la suma obtenida se le agrega la expresión que haga falta para ver el término central . ***La expresión agregada es la que se descompone para comprobar los otros términos del polinomio.***

EJEMPLO 1 :

Factorizar:

$$Q(x) = 5x^4 + 22x^3 + 21x^2 + 16x + 6$$

RESOLUCIÓN:



*Se tiene en el aspa mayor :

$$(5x^2)(2)+(x^2)(3)=10x^2 + 3x^2 = 13x^2$$

* Se debe tener : $21x^2$

*Falta : $21x^2-13x^2=8x^2$ ← ***cantidad a descomponer***

$\Rightarrow P(x) = (5x^2 + 2x + 3)(x^2 + 4x + 2)$

EJEMPLO 2 :

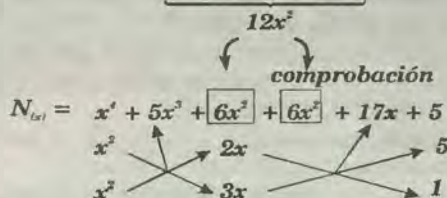
Factorice:

$$N_{(x)} = x^4 + 5x^3 + 12x^2 + 17x + 5$$

RESOLUCIÓN:

Tiene **5** términos, el término central es x^2 y el aspa de comprobación es x^2

⇒Obtengamos el aspa de comprobación con los términos extremos.



Si el aspa de comprobación es $6x^2$; y el polinomio tiene $12x^2$, entonces el término central será

$$12x^2 - 6x^2 = 6x^2$$

$\Rightarrow N_{(x)} = (x^2 + 2x + 5)(x^2 + 3x + 1)$

EJEMPLO 3 :

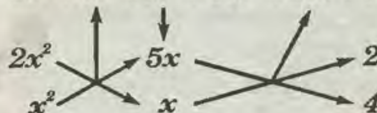
Factorice:

$$Q_{(x)} = 2x^4 + 7x^3 + 15x^2 + 22x + 8$$

RESOLUCIÓN:

Desdoblando el término $15x^2$ como $5x^2 + 10x^2$, se tiene:

$Q(x) = 2x^4 + 7x^3 + 5x^2 + 10x^2 + 22x + 8$



$Q(x) = (2x^2 + 5x + 2)(x^2 + x + 4)$



$\Rightarrow Q(x) = (2x + 1)(x + 2)(x^2 + x + 4)$

EJEMPLO 4 :

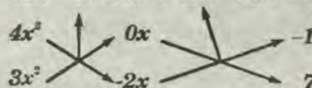
Halle el número de factores primos de:

$$P_{(x)} = 12x^4 - 8x^3 + 25x^2 + 2x - 7$$

RESOLUCIÓN:

Desdoblando el término $25x^2$ como $0x^2 + 25x^2$, se tiene:

$P_{(x)} = 12x^4 - 8x^3 + 0x^2 + 25x^2 + 2x - 7$



$\Rightarrow P_{(x)} = (4x^2 + 0x - 1)(3x^2 - 2x + 7)$

$\Rightarrow P_{(x)} = (2x+1)(2x-1)(3x^2 - 2x + 7)$

Luego, el número de factores primos es **3**.

EJEMPLO 5 :

Factorizar:

$$P(x) = x^4 + 3x^3 + 7x^2 + 7x + 6$$

RESOLUCIÓN:

$x^4 + 3x^3 + 7x^2 + 7x + 6$

x^2	$2x$	3
x^2	x	2
	$2x^2$	

* Se tiene en el aspa mayor :

$$(x^2)(2) + (x^2)(3) = 2x^2 + 3x^2 = 5x^2$$

* Se debe tener : $7x^2$

*Falta: $7x^2 - 5x^2 = 2x^2$ ⟵ ***Cantidad a descomponer***

$$\Rightarrow P(x) = (x^2 + 2x + 3)(x^2 + x + 2)$$

*Como: $(x^2 + 2x + 3)$ y $(x^2 + x + 2)$ son primos , luego ahí queda.

EJEMPLO 6 :

Factorizar: $P(x) = x^4 + x^2 + 1$

RESOLUCIÓN:

*Completando y ordenando :

$P(x) = x^4 + 0x^3 + x^2 + 0x + 1$

x^2	$-x$	1
x^2	$-x$	1
	$-x^2$	$2x^2$

$-x^2$? ? Falta

x^2

$\Rightarrow P(x) = (x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)$

EJEMPLO 7 :

Factorizar:

$$P(x) = x^4 + 5x^3 + 4x^2 - x - 15$$

RESOLUCIÓN:

$x^4 + 5x^3 + 4x^2 - x - 15$

x^2	$3x$	-5
x^2	$2x$	3
		$-2x^2$

$(4x^2) - (-2x^2) = 6x^2$

$\Rightarrow P(x) = (x^2 + 3x - 5)(x^2 + 2x + 3)$

VI) ASPA TRIPLE :

Se emplea para factorizar polinomios que estén en funcion de tres variables y que tengan *10* términos, de la forma :

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dyz + Ez^2 + Fxz + Gx + Hy + Iz + K$$

El procedimiento a seguir es:

1) Se adecùa el polinomio a la forma general, en caso falte un término este se completará con ceros.

2) Se toma al primer trinomio de la expresión y se le aplica una aspa simple para comprobar al término ***Bxy***.

3) Luego se toman a los términos en "y^2". "yz" y «z^2» y se les aspa para comprobar el término ***Dyz***.

4) Otra aspa para los términos en z^2 ; z y el término independiente K para comprobar al termino Iz.

5) Luego tantas aspas simples como términos falten por comprobar , asi para comprobar el término Fxz. se consideran a Ax^2 , Fxz y Ez^2 ; para el término en x , Ax^2, Gx y K ; para el término en y , Cy^2 , Hy y K.

Cumplidos los pasos anteriores los factores serán las sumas horizontales.

EJEMPLO :

Factorizar :

$55x^2 + 7xy - 6y^2 + 7xz - 6z^2 - 12yz + 2x - 14y + -8$

RESOLUCIÓN:

$55x^2 + 7xy - 6y^2 + 7xz - 12yz - 6z^2 + 2x - 14y + -8$

$11x$	$-3y$	$-3z$	-4
$5x$	$+2y$	$+2z$	$+2$

*verificando las expresiones que faltan :

$(11x)(2z) + (5x)(-3z) = 7xz$

$(11x)(2) + (5x)(-4) = 2x$

$(-3y)(2) + (2y)(-4) = -14y$

*entonces la expresión factorizada será:

$(11x - 3y - 3z - 4)(5x + 2y + 2z + 2)$

VII)MÉTODO DE LOS DIVISORES BINÓMICOS:

Se aplica a polinomios de cualquier grado , generalmente con una sola variable , siempre que tenga por lo menos un factor lineal (primer grado). Con este método se busca uno o más factores binomios primos.

TEOREMA DEL FACTOR : un polinomio tiene un factor lineal o de primer grado de la forma $(Ax + B)$ ó $(x \pm a)$ $\Leftrightarrow$ El polinomio se anula con $x = -\dfrac{B}{A}$ ó $x = \pm a; A \neq 0$; donde a aquel factor lineal también se le llama divisor binómico.

Tratamos de buscar divisores binómicos y además:

el T.I. del divisor tiene que ser un divisor del ***T.I.*** del polinomio.

Es decir si:

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x + a_n$$

El posible divisor binómico será: $x \pm a$, donde:

$$a = \frac{\text{Cualquier divisor del término independiente}}{\text{Cualquier divisor del coeficiente principal}}$$

CEROS DE UN POLINOMIO

Son los valores de la variable que anulan el polinomio (valor numérico cero).

EJEMPLO:

sea : $P(x)=2x^3-5x+3$

si $x=1$: $P(1)=2(1)^3-5(1)+3=0$.......se anula , entonces ***1*** es un cero o raíz de $P(x)$

Para obtener los posibles «cero» de un polinomio , se debe tener en cuenta lo siguiente :

CASO I:

Si el coeficiente principal es igual a ***1*** (polinomio mónico) los posibles ceros serán divisores del término independiente con su doble signo.

EJEMPLO:

sea : $P(x)=x^3-75x^2+3x-2$

Entonces sus posibles ceros serán : $2;\pm1;\pm2$

CASO II:

Si el coeficiente principal es diferente de ***1***, entonces los posibles ceros serán :

$$\text{Posibles Ceros} = x_0 = \frac{\text{Divisores T. Indep. de } P(x)}{\text{Divisores Coef. Principal de } P(x)}$$

EJEMPLO:

sea : $P(x)=3x^3+x^2-11x-5$

Entonces sus posibles ceros serán :

$$\pm\frac{1;5}{1;3} = \pm1;\pm5;\pm\frac{1}{3};\pm\frac{1}{5}$$

REGLA PARA FACTORIZAR:

1) Recordando el siguiente teorema:

«Si $P(x_0) = 0$; entonces: $(x - x_0)$ es un factor primo de $P(x)$»

Se calcula los posibles ceros y se comprueba si alguno anula al polinomio.

EJEMPLO:

Si se anula para:

* $x = 1 \rightarrow (x-1)$ ***es factor***
* $x = -2 \rightarrow (x+2)$ ***es factor***
* $x = \frac{1}{5} \rightarrow (5x-1)$ ***es factor***

2) Los demás factores se encuentran al efectuar:

$$\frac{P(x)}{x - x_0}$$

Es decir los otros factores se determinan utilizando la regla de ruffini , que se a de emplear tantas veces como ceros tenga el polinomio , por lo general es conveniente llevarlo hasta un cociente adecuado (cuarto grado , para poder aplicar aspa doble especial o de segundo grado).

EJEMPLO 1:

Factorizar: $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$

RESOLUCIÓN:

Como se trata de un polinomio mónico entonces:

Posibles ceros = ± {1 ; 2 ; 3 ; 6}

*Probando con uno de ellos ; para $x = 1$ por Ruffini.

	1	–6	11	–6
1	↓	1	–5	6
	1	–5	6	0

$R = 0$, lo que significa que $x=1$ es un cero luego un factor es $(x-1)$

*quedando el polinomio así :

$$P(x) = (x-1)(x^2 - 5x + 6)$$

$x \quad -3$

$x \quad -2$

$$\Rightarrow P(x) = (x-1)(x-3)(x\ 2)$$

RESUMEN:

* Calcular posibles ceros.
* Aplicar Ruffini buscando posibles ceros.

EJEMPLO 2 :

Factorice: $S_{(x)} = x^3 + x - 10$

RESOLUCIÓN:

Los posibles divisores binómicos son:

$x \pm 1; x \pm 2; x \pm 5; x \pm 10$, donde ***1; 2; 5*** y ***10*** son divisores del término independiente ***10***.

Probemos con "$x - 2$"

Dividiendo por la Regla de Ruffini:

	1	0	1	-10
(x–2) ⟵ 2	↓	2	4	10
	1	2	5	0
	(x^2+2x+5)			Resto

$\Rightarrow S_{(x)} = (x-2)(x^2+2x+5)$

EJEMPLO 3 :

Factorizar: $P(x) = x^4 - 2x + 1$

RESOLUCIÓN:

$$\begin{matrix}\text{Posible}\\ \text{Ceros}\end{matrix} = \pm\frac{\text{Divisores de } 1}{\text{Divisores de } 1} = \pm\left(\frac{1}{1}\right) = \pm 1$$

* por Ruffini:

Raiz	1	0	0	−2	1
1		1	1	1	−1
	1	1	1	−1	0

$q(x) = x^3 + x^2 + x - 1$

$\Rightarrow P(x) = (x-1)(x^3 + x^2 + x - 1)$

OBSERVACIÓN:

El Ruffini también se puede aplicar en forma sucesiva.

EJEMPLO 3 :

Factorizar: $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$

RESOLUCIÓN:

• $\begin{matrix}\text{Posibles}\\ \text{Ceros}\end{matrix} = \frac{\text{Divisores de } -6}{\text{Divisores de } 1} = \pm\left(\frac{1;2;3;6}{1}\right)$

$\Rightarrow \begin{matrix}\text{Posibles}\\ \text{Ceros}\end{matrix} = \pm(1;2;3;6)$

* luego por Ruffini:

	1	−6	11	−6
Raíces → 2	↓	2	−8	6
Raíces → 3	1	−4	3	0
	↓	3	−3	
	1	−1	0	

$q(x) = x - 1$

$\Rightarrow P(x) = (x-2)(x-3)(x-1)$

EJEMPLO 4 :

Factorice: $F(x) = x^3 + 6x^2 + 15x + 14$

OBSERVACIÓN:

Cuando los términos del polinomio son positivos, solamente probaremos los valores negativos para x.

I) $\begin{matrix}\text{Posibles}\\ \text{Ceros}\end{matrix} = \pm(1;2;7;14)$

$\begin{matrix}\text{Posibles}\\ \text{Ceros}\end{matrix} = -1;-2;-7;-14$

$x = -2$

$F(-2) = (-2)^3 + 6(-2)^2 + 15(-2) + 14 = 0$

$\Rightarrow$ ***"−2" es un cero.***

II) Por la teoría dada se deduce que:

$(x+2)$ es factor de $F(x) \Rightarrow F(x) = (x+2)G(x)$

III) Calculamos $G(x)$ aplicando Ruffini :

	1	6	15	14
−2		−2	−8	−14
	1	4	7	0

$G(x) = x^3 + 4x + 7$

$\Rightarrow P(x) = (x+2)(x^2 + 4x + 7)$

EJEMPLO 5 :

Hallar el factor primo cuadrático de

$$U_{(x)} = x^3 + 2x^2 - x - 42$$

RESOLUCIÓN:

Los posibles divisores binómicos son:

$x \pm 1; x \pm 2; x \pm 3; x \pm 6; x \pm 7; x \pm 21; x \pm 42$

Probemos con: $x - 3$

Por Ruffini:

	1	2	−1	−42
$(x-3) \leftarrow x=3$	↓	3	15	42
	1	5	14	0

$\Rightarrow U_{(x)} = (x-3)(x^2 + 5x + 14)$

Luego, el factor primo cuadrático es: $x^2 + 5x + 14$

EJEMPLO 6 :

Factorice : $T_{(x)} = 2x^4 + 3x^3 + 2x^2 + 9x + 9$

RESOLUCIÓN:

Como el primer coeficiente es "2"; los posibles números de prueba son:

$a = \pm\frac{\text{divisores de } 9}{\text{divisores de } 2}$ *es decir.* $a = \pm 1, \pm 3, \pm 9, \pm\frac{3}{2}; \pm\frac{9}{2}$

Luego: escogemos $-\frac{3}{2}$

	2	3	2	9	9
$(x+\frac{3}{2}) \leftarrow -\frac{3}{2}$	↓	−3	0	−3	−9
	2	0	2	6	0

$2x^3 + 0x^2 + 2x + 6$

$\Rightarrow T_{(x)}=\left(x+\frac{3}{2}\right)(2x^3+2x+6)=\left(\frac{2x+3}{2}\right)(2)(x^3+x+3)$

$\Rightarrow T_{(x)}=(2x+3)(x^3+x+3)$

EJEMPLO 7 :

Factorice : $H(x)=x^3-x^2-17x+33$

RESOLUCIÓN:

$\Rightarrow$ Posibles ceros racionales = $\pm\{1;3;11;33\}$

* Aplicando Ruffini:

	1	−1	−17	33
↓ x = 3		3	6	−33
	1	2	−11	0

$\underbrace{1 \quad 2 \quad -11}_{q(x)}$

$\Rightarrow H(x)=(x-3)(x^2+2x-11)$

ARTIFICIOS DIVERSOS

Para facilitar la factorización se puede hacer uso de los siguientes artificios:

VII)CAMBIO DE VARIABLE :

Cuando se repite una misma expresión en el polinomio, se usa el cambio de variable.

EJEMPLO 1 :

Factorice el polimonio

$V_{(x)}=(x^2+x+2)^2-5(x^2+x+2)+6$

RESOLUCIÓN:

Haciendo el cambio de variable: $x^2+x+2=a$

Con lo cual, el polinomio quedará así:

$V=a^2-5a+6=(a-3)(a-2)$

Como $a=x^2+x+2$

Entonces reponiendo:

$V_{(x)}=(x^2+x+2-3)(x^2+x+2-2)$

Luego:

$V_{(x)}=(x^2+x-1)(x^2+x)=x(x+1)(x^2+x-1)$

EJEMPLO 2 :

Factorice el polinomio:

$A_{(x)}=(x^2+3x+1)^2-6(x^2+3x+1)+5$

RESOLUCIÓN:

Haciendo cambio de variable: $a=x^2+3x+1$, entonces:

$A=a^2-6a+5=(a-1)(a-5)$

Luego, restituyendo:

$A_{(x)}=(x^2+3x+1-1)(x^2+3x+1-5)$

$=(x^2+3x)(x^2+3x-4)$

$\Rightarrow A(x)=x(x+3)(x+4)(x-1)$

VIII) AGRUPACIÓN ADECUADA :

Aplicando la propiedad asociativa de la multiplicación y en forma adecuada para luego hacer un cambio de variable, se simplifica el proceso operativo.

EJEMPLO 1 :

Factorice: $B_{(x)}=(x+2)(x+3)(x+5)(x+6)-40$

RESOLUCIÓN:

Agrupemos los factores de 2 en 2 tal que resulta una expresión repetida; para ello la suma de términos independientes en cada grupo debe ser una misma cantidad.

$B_{(x)}=[(x+2)(x+6)][(x+3)(x+5)]-40$

$B_{(x)}=(\underbrace{x^2+8x}_{a}+12)(\underbrace{x^2+8x}_{a}+15)-40$

$B_{(x)}=(a+12)(a+15)-40 \Rightarrow B_{(x)}=a^2+27a+180-40$

$B_{(x)}=a2+27a+140 \qquad \Rightarrow B_{(x)}=(a+20)(a+7)$

a ↗ 20

a ↘ 7

Reponiendo la variable inicial, es decir, reemplazando "*a*":

$B_{(x)}=(x^2+8x+20)(x^2+8x+7)$

$\Rightarrow B_{(x)}=(x^2+8x+20)(x+7)(x+1)$

EJEMPLO 2 :

Halle el número de *F.P.* lineales de:

$C_{(x)}=(x+1)(x+3)(x-2)(x+6)-16$

RESOLUCIÓN:

$C_{(x)}=(\underbrace{x^2+4x}_{a}+3)(\underbrace{x^2+4x}_{a}-12)-16$

$\Rightarrow C_{(x)}=(a+3)(a-12)-16=a^2-9a-36-16$

$\Rightarrow C(x)=a^2-9a-52=(a-13)(a+4)$

$\Rightarrow C_{(x)}=(x^2+4x-13)(x^2+4x+4)$

$\Rightarrow C_{(x)}=(x^2+4x-13)(x+2)^2 \Rightarrow$ El número de factores primos lineales es: *1*

IX) MÉTODO DE SUMAS Y RESTAS (y OTROS ARTIFICIOS)

Se inspecciona el dato , comparándolo con alguna identidad conocida, la mayoría de veces será necesario aumentar algunos términos para construir en forma completa aquella identidad

sugerida por el dato, naturalmente que aquellos términos agregados deben ser quitados también para así no alterar el origen . Este método conduce la mayoría de las veces a una diferencia de cuadrados , suma de cubos o diferencia de cubos.

EJEMPLO:

Factorizar: $x^4 + 4b^4c^8$

RESOLUCIÓN:

*cuando aparecen exponentes pares se tratará de formar trinomios cuadrados perfectos:

tenemos $(x^2)^2+(2b^2c^4)^2$ para formar un trinomio cuadrado perfecto hace falta $2(x^2)(2b^2c^4)=4x^2b^2c^4 \rightarrow$ sumamos y restamos $4x^2b^2c^4$, resultando:

$$\underbrace{(x^2)^2+4x^2b^2c^4+(2b^2c^4)^2}_{\text{un binomio al cuadrado}} - 4x^2b^2c^4$$

$$= \left(x^2+2b^2c^4\right)^2-(2xbc^2)^2$$

$$=\underbrace{\left(x^2+2b^2c^4+2xbc^2\right)\left(x^2+2b^2c^4-2xbc^2\right)}_{\text{ya factorizado}}$$

EJEMPLO 2:

Factorizar : $x^4 + 64y^4$

RESOLUCIÓN:

*Sumando y restando: $16x^2y^2$

$\Rightarrow x^4 + 64y^4 + 16x^2y^2 - 16x^2y^2$

$x^4 + 16x^2y^2 + 64y^4 - 16x^2y^2$

$\Rightarrow (x^2 + 8y^2)^2 - (4xy)^2$

*de donde : $(x^2 + 8y^2 + 4xy)(x^2 + 8y^2 - 4xy)$

EJEMPLO 3 :

Factorizar : $P(x) = x^4 + 4a^2$

RESOLUCIÓN:

$$\Rightarrow P(x) =(x^2)^2 + (2a^2)^2 + 2(x^2)(2a^2) - 2(x^2)(2a^2)$$

$$= (x^2 + 2a^2)^2 - (2ax)^2$$

$$= (x^2 + 2a^2 + 2ax)(x^2 + 2a^2 - 2ax)$$

EJEMPLO 4 :

Factorizar :

$$(a+b+c-2)^2+(a+b+c-1)^2-5(a+b+c+1)^2$$

RESOLUCIÓN

*Si dos o mas terminos se repiten constantemente, se sugiere hacer cambio de variable.

Haciendo : $x=a+b+c$

Entonces al reemplazar resulta: $(x-2)^2 + (x-1)^2 - 5(x + 1)$

$=x^2-4x +4+x^2-2x+1-5x-5=2x^2-11x=x(2x-11)$

Pero como : $x = a+b+c$

Entonces la factorización pedida será :

$(a+b+c) [2(a+b+c)-11]$

EJEMPLO 5 :

Factorice: $D_{(x)} = x^4 + 15x^2 + 64$

RESOLUCIÓN:

Cuando el polinomio es de grado par se busca un trinomio cuadrado perfecto y , como consecuencia resulta una diferencia de cuadrados a la vez. En nuestro caso sumando y restando x^2 :

$D_{(x)}=x^4+ \underline{15x^2+x^2} +64 - x^2$

$x^2 \quad 8$

$x^2 \quad 8$

Luego: $D_{(x)}=(x^2+8)^2-x^2$ por diferencia de cuadrados:

$D(x) = (x^2 + 8 + x)(x^2 + 8 - x)$, entonces:

$D_{(x)} = (x^2 + x + 8)(x^2 - x + 8)$

EJEMPLO 6 :

Factorice: $E_{(x)} = x^5 + x + 1$

RESOLUCIÓN:

Cuando el polinomio es de grado impar, se busca generalmente una suma o diferencia de cubos. En nuestro caso le sumamos y restamos x^2

$E_{(x)} = x^5 - x^2 + x^2 + x + 1$, agrupando

$\Rightarrow E_{(x)}= (x^5 - x^2) + (x^2 + x + 1)$

$\Rightarrow E_{(x)}= x^2(x^3 - 1) + (x^2 + x + 1)$

$\Rightarrow E_{(x)}= x^2(x-1)(x^2+x+1) + (x^2+ x +1)$

$\Rightarrow E_{(x)}=(x^3 - x^2)(x^2 + x + 1) + (x^2 + x +1)$

$\Rightarrow E_{(x)}= (x^2+x+1)(x^3 - x^2+ 1)$

EJEMPLO 7 :

Factorizar : $P(x) = x^7 + 2x^4 - 1$

RESOLUCIÓN:

* Sumamos y restamos : (x^3)

$P(x) = x^7 + 2x^4 + x^3- x^3-1= x^7+2x^4 + x^3 - (x^3- 1)$

$x^3 \qquad -(x-1)=-x^5 + x^4$

$x^4 \qquad (x^2+x+1)= \underline{x^6+x^4+x^3}$

$2x^4+x^3$

$\Rightarrow P(x) = (x^3 - x + 1)(x^4 + x^2 + x + 1)$

EJEMPLO 8 :

Factorizar : $P(x;y) = x^5+ x^4y+y^5$

RESOLUCIÓN:

*sumamos y restamos : x^2y^3

$x^5+x^4y+y^5+x^2y^3-x^2y^3$

*agrupando adecuadamente :

$x^5-x^2y^3+x^4y+x^2y^3+y^5=x^2(x^3-y^3)+y(x^4+x^2y^2+y^4)$

$=x^2(x-y)(x^2+xy+y^2)+y(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$

*extrayendo el factor común:

$$(x^2+xy+y^2)[x^2(x-y)+y(x^2+xy+y^2)]$$

$$=(x^2+xy+y^2)(x^3-xy^2+y^3)$$

X)FACTORIZACIÓN PARA POLINOMIOS RECIPROCOS O RECURRENTES

Las expresiones recíprocas se caracterizan por que los términos de los términos equidistantes de los extremos son iguales.

EJEMPLO :

* $P_{(x)}=ax^3+bx^2+bx+a$ ... es un polinomio recíproco de tercer grado .

* $P_{(x)}=ax^4+bx^3+cx^2+bx+a$ .... es un polinomio recíproco de cuarto grado .

Debemos tener en cuenta lo siguiente:

*I)*Si la expresión recíproca de grado impar , uno de sus factores es $(x+1)$ y ese factor estará multiplicado por una expresión recíproca de grado par.

*II)*Si la expresión es recíproca de grado par los coeficientes equidistantes de los extremos son iguales y el último término es positivo.

PROCEDIMIENTOS PARA FACTORIZAR POLINOMIOS RECÍPROCOS DE GRADO PAR:

i) Se extrae la parte literal del término central dando lugar a expresiones de la forma:

$$x+\frac{1}{x},\ x^2+\frac{1}{x^2},\ ....$$

*ii)*Se hace el cambio de variable $x+\frac{1}{x}$ con lo cual se logra disminuir el grado del polinomio en la mitad.

OBSERVACIONES :

$$*\ si:\ x+\frac{1}{x}=n\rightarrow\begin{cases}x^2+\dfrac{1}{x^2}=n^2-2\\ x^3+\dfrac{1}{x^3}=n^3-3n\\ x^4+\dfrac{1}{x^4}=n^4-4n^2+2\end{cases}$$

$$*\ si:\ x-\frac{1}{x}=n\rightarrow\begin{cases}x^2+\dfrac{1}{x^2}=n^2+2\\ x^3+\dfrac{1}{x^3}=n^3+3n\\ x^4+\dfrac{1}{x^4}=n^4+4n^2+2\end{cases}$$

PROCEDIMIENTOS PARA FACTORIZAR POLINOMIOS RECÍPROCOS DE GRADO IMPAR

estos polinomios tienen la característica de anularse para $x=1$ ó $x=-1$ por lo tanto admiten un factor $(x-1)$ ó $(x+1)$ necesariaramente.

*por ruffini se deduce el otro factor que será también un polinomio recíproco de grado par.

EJEMPLO 1 :

Factorizar:

$$P_{(x)}=6x^4+35x^3+62x^2+35x+6$$

RESOLUCIÓN:

* Dado que el grado de $P(x)$ es 4 , factorizamos x^2 ; obteniendo :

$$P_{(x)}=x^2\left[6x^2+35x+62+\frac{35}{x}+\frac{6}{x^2}\right]$$

* Agrupando los términos equidistantes de los extremos:

$$P_{(x)}=x^2\left[6\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+35\left(x+\frac{1}{x}\right)+62\right]$$

* Haciendo :

$$x+\frac{1}{x}=n\rightarrow x^2+\frac{1}{x^2}=n^2-2$$

* Con lo cual:

$$P_{(x)}=x^2[6(n^2-2)+35n+62]$$

$$\rightarrow P_{(x)}=x^2[6a^2+35a+50]$$

* Por aspa:

$3n \quad 10 \rightarrow 20n$

$2n \quad 5 \rightarrow 15n$ } +

$35n$

$$\rightarrow P_{(x)}=x^2[3a+10][2a+5]$$

* Como: $x+\frac{1}{x}=n$; se tendría:

$$P_{(x)}=x^2\left[3\left(x+\frac{1}{x}\right)+10\right]\left[2\left(x+\frac{1}{x}\right)+5\right]$$

$$\rightarrow P_{(x)}=(3x^2+10x+3)(2x^2+5x+2)$$

* Nuevamente por aspa simple:

$$P_{(x)}=(3x+1)(x+3)(2x+1)(x+2)$$

EJEMPLO 2 :

Factorizar: $P_{(x)}=x^4+6x^3+7x^2+6x+1$

RESOLUCIÓN:

*Se factoriza la parte literal del término central:

$$P_{(x)}=x^2\left[x^2+6x+7+\frac{6}{x}+\frac{1}{x^2}\right]$$

$$\rightarrow P_{(x)}=x^2\left[\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+6\left(x+\frac{1}{x}\right)+7\right]$$

*Hacemos: $x+\frac{1}{x}=z$

$$\rightarrow x^2+\frac{1}{x^2}=z^2-2$$

$$\rightarrow P_{(x,z)}=x^2(x^2-2+6z+7)=x^2(z^2+6z+5)$$

$$=x^2(z+1)(z+5)\Rightarrow P_{(x,z)}=x^2(z+5)(z+1)$$

*Reponiendo z:

$$P_{(x)}=x^2\left(x+\frac{1}{x}+5\right)\left(x+\frac{1}{x}+1\right)$$

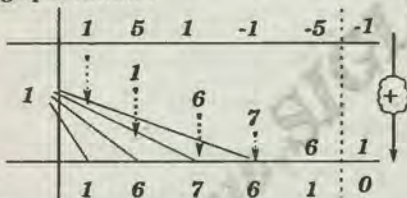
$$\rightarrow P_{(x)}=(x^2+5x+1)(x^2+x+1)$$

EJEMPLO 3 :

Factorizar: $P_{(x)}=x^5+5x^4+x^3-x^2-5x-1$

RESOLUCIÓN:

*como el grado es impar del polinomio recíproco , entonces se deberá verificar que para $x=1$ se anula, luego por ruffini :



	1	5	1	-1	-5	-1
1		1	6	7	6	1
	1	6	7	6	1	0

*luego el polinomio resultará :

$$P_{(x)}=(x+1)(x^4+6x^3+7x^2+6x+1)$$

*pero el polinomio $x^4+6x^3+7x^2+6x+1$ ya fue factorizado en el ejemplo anterior , por lo tanto la factorización pedida será:

$$P_{(x)}=(x+1)(x^2+5x+1)(x^2+x+1)$$

XI) FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS SIMÉTRICOS :

los polinomios simétricos son aquellos que no se altera al hacer un intercambio ***simultáneo de cualquier*** pareja de ***variables***.

EJEMPLO:

Sea; $P(x{:}y{:}z)=x^2+y^2+z^2+xyz$

Si hacemos un intercambio de «x» por «y» y viceversa, se obtendrá:

$$Q(x{:}y{:}z)=y^2+x^2+z^2+yxz$$

*de donde se puede apreciar que :

$P(x{:}y{:}z)=Q(x{:}y{:}z)$, entonces $P(x{:}y{:}z)$ es un polinomio simétrico.

NOTA:

Podría haberse escogido otra pareja, por ejemplo «x» con «z» ó «y» con «z», y tampoco se alterará el polinomio.

REPRESENTACIÓN DE LOS POLINOMIOS SIMÉTRICOS

*1er grado 2 variables : $A(x+y)$

*1er grado 3 variables : $A(x+y+z)$

*2do grado 2 variables : $A(x^2+y^2)+Bxy$

*2do grado 3 variables :

$$A(x^2+y^2+z^2)+B(xy+xz+yz)$$

*3er grado 2 variables : $A(x^3+y^3)+B(x^2y+xy^2)$

*3er grado 3 variables :

$$A(x^3+y^3+z^3)+B(x^2y+x^2z+y^2x+y^2z+z^2x+z^2y)+Cxyz$$

POLINOMIO ALTERNADO

Es Aquel que se caracteriza cuando al hacer un cambio simultáneo de cualquier par de sus variables, sólo cambia de signo.

EJEMPLO:

Sea : $P(x;y;z)=x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(y-x)$

Si intercambiamos simultáneamente «x» y «y» se tendrá:

$$Q(x;y;z)=y^2(x-z)+x^2(z-y)+z^2(x-y)$$

$$Q(x;y;z)=-[x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(y-x)]$$

*de donde se puede apreciar que :

$P(x;y;z)=-Q(x;y;z)$, dando a entender que $P(x;y;z)$ solo a cambiado de signo , es decir es un polinomio alternado.

REGLAS :

*La suma , el producto y el cociente de dos expresiones simétricas cualesquiera es simétrica.

**El producto de un polinomio simétrico por otro alternado da otro polinomlo alternado.*

**Si un* polinomio simétrico se anula para una de *sus* variables se anulará para todas las demás.

**Si el polinomio simétrico se anulará para una variable igual a otra o su negativo , entonces se anulará para todas las combinaciones de ellas, es decir :*

-*Si el polinomio simétrico tiene* **3** variables y se anula para $x=y$ entonces un *factor* del polinomio sera $(x-y)$ y los otros factores se determinan de *acuerdo a* la siguiente forma circular o cíclica:



De acuerdo a este esquema ***lease*** los ***factores en*** sentido horario; o ***sea ellos*** serán:

$(x-y)$, $(y-z)$ $\wedge$ $(z-x)$

PASOS A SEGUIR EN LA FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS SIMÉTRICOS

*Se comprueba Si el polinomio es simérico o alternado.

*Se buscan factores monomios haciendo cualquier variable a cero.

*Se buscan factores binomios haciendo una de las variables igual a cualquiera de las otras o su respectivo negativo.

*Se analiza el grado de la expresión para ubicar los factores que falten.

*Se hace la equivalencia de polinomios y se utilizan los principios de identidad para reducir el valor de algunos coeficientes desconocidos.

EJEMPLO 1 :

Factorizar : $(a+b+c)^5-a^5-b^5-c^5$

RESOLUCIÓN:

* al hacerce el intercambio simultáneo de dos de sus variables se deduce que es simétrico.

*se deduce que se anula para $a=-b$, entonces : $(a+b)$; $(b+c)$ y $(c+a)$ son factores.

*pero como la expresión a factorizar es de quinto grado , luego tomará la siguiente forma:

$$\underbrace{(a+b)(b+c)(c+a)}_{\text{tercer grado}}\underbrace{[m(a^2+b^2+c^2)+n(ab+ac+bc)]}_{2^{do}\text{ grado}}$$

*que tabulando para $a=1$; $b=1$ y $c=0$ ***se obtendrá:***

$2m+n=15$...(I)

* ***y para*** $a=2$; $b=-1$ y $c=0$ ***se obtiene :***

$5m-2n=15$...(II)

* que al resolver el sistema de ***(I)*** y de ***(II)*** se deduce que: $m=5$ y $n=5$

Cosa que la expresión ya factorizada será:

$$5(a+b)(b+c)(c+a)(a^2+b^2+c^2+ab+ac+bc)$$

EJEMPLO 1 :

Factorizar : $(m+n)^5-m^5-n^5$

RESOLUCIÓN:

Al hacerce el intercambio simultaneo de dos de sus variables se deduce que es simétrico.

Se deduce que se anula para $m=-n$; $m=0$ y $n=0$, entonces : $(m+n)$; m y n son factores.

Pero como la expresión a factorizar es de quinto grado , luego tomará la siguiente forma:

$$\underbrace{mn(m+n)}_{\text{tecer grado}}\underbrace{[K(m^2+n^2)+Pmn]}_{2^{do}\text{ grado}}$$

Que tabulando para $m=1$ y $m=1$ ***se obtendrá :***

$2K+P=15$...(I)

* y para $m=2$ y $n=-1$ se obtiene :

$5K-2P=15$...(II)

* que al resolver el sistema de ***(I)*** y de ***(II)***se deduce que: $K=5$ y $P=5$

Cosa que la expresión ya factorizada será:

$$(m+n)^5-m^5-n^5=5mn(m+n)(m^2+mn+n^2)$$

EJERCICIOS I

1) Factorizar lo indicado en cada ejercicio aplicando "FACTOR COMÚN".

1	$7m+7n=$
2	$ax+ay=$
3	$12x+4=$
4	$15m+5=$
5	$x^2+3x^5=$
6	$7x^5-2x^3=$
7	$6x+6y+6=$
8	$a^2x+a^3y+a^4=$
9	$-3x^2a-6x^5a=$
10	$-24xy^4-3xy^6=$
11	$-5x^2y+10x^7y=$
12	$6xa^4-9xa^6=$
13	$8x^2+4x=$
14	$24x^3-16x^2+8x=$
15	$5x^{n+5}+10x^{n+8}-15x^{n+4}=$
16	$a^{n-1}b^{n+5}-2a^{n-8}b^n=$
17	$2(a+b)+x(a+b)=$
18	$x^2(a-b)+7(a-b)=$

II) Factorizar en cada caso:

1	$xz+yx+x+y=$
2	$ab+ac+b^2+bc=$
3	$ab+bx-ay-xy=$
4	$6x+6y+6=$
5	$mx+nx+x=$
6	$5x^{n+5}+10x^{n+8}-15x^{n+4}=$
7	$x^2+y^2-5y\left(x^2+y^2\right)=$
8	$xy(3+5a)-2(3+5a)=$
9	$2p^2+3ap+4p+6a=$
10	$a^2x^2+b^2x^2+a^2y^2+b^2y^2=$
11	$x^3+x-x^2-1=$

* Factorizar en cda caso:

1	$x(m+n)-m-n=$
2	$x(a+1)-a-1=$
3	$5x\left(a^2+1\right)+(x+1)\left(a^2+1\right)=$
4	$(x+m)(x+1)-(x+1)(x-n)=$
5	$(x-3)(x-4)+(x-3)(x+4)=$
6	$am-bm+an-bn=$
7	$a^2+ab+ax+bx=$
8	$ay+ax+my+mx=$
9	$2xy+2my+3x+3m=$
10	$3ab+3b+1+a=$
11	$14x^2y^2-35x^3+63x^4=$
12	$x^2+xy+xm+ym=$
13	$(x+1)(x+2)+(x+1)(x+3)=$
14	$-2(x-y)-x(x-y)=$
15	$2a^2x+2a^2y+8a^3x+16a^2x=$
16	$x(a+b)-a-b=$

EJERCICIOS II

01 Factorizar los siguientes polinomios:

- $5x^2(a-b)+3(b-a)=$
- $x(a+b-c)-y(c-a-b)=$
- $4x^7(a-b)-8x^3(b-a)=$

02 Factorizar las siguientes expresiones:

- $(2x+3)(a+b)+(x-7)(a+b)=$
- $(x-1)(a-b)+(2x-5)(a-b)=$
- $(3x-5)(a-b)-(2x+7)(b-a)=$

03 Factorizar lo siguiente:

- $xy+xz+y+z=$
- $ab+ac+b^2+bc=$
- $ab+bx-ay-xy=$

04 Factorizar:

- $2p^2+3ap+4p+6a=$
- $xy+2ay-2bx-4ab=$
- $a^2x^2+b^2x^2+a^2y^2+b^2y^2=$

05 Factorizar en todos los casos:

1	$a^2-25=$
2	$36-x^2=$
3	$n^4-16=$
4	$x^2+3x-10=$
5	$a^6-9=$
6	$y^2+5y-14=$
7	$x^2+21+20=$
8	$x^4y^8-81=$
9	$x^2-5x-36=$
10	$x^2-15x+54=$
11	$x^{10}-36=$
12	$x^2+6x-27=$
13	$x^2-6x-16=$
14	$x^2+9x+20=$
15	$a^2+12a+32=$
16	$x^2+7x+10=$

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1:

Factorizar en todos los casos:

A) $32x^2 + 8xy + 24x =$
B) $4a^2bc + 3ab^2c - 2abc^2 =$
C) $6x^5 - 8x^4 + 10x^3 =$
D) $ax + by + ay + by =$
E) $a^2 + ab + a + b =$
F) $x^2 - 4 =$
G) $9 - 4a^2 =$
H) $25x^2 - 16 =$

RESOLUCIÓN :

A) $32x^2 + 8xy + 24x = 8x(4x + y + 3)$

B) $4a^2bc + 3ab^2c - 2abc^2 = abc(4a + 3b - 2c)$

C) $6x^5 - 8x^4 + 10x^3 = 2x^3(3x^2 - 4x + 5)$

D) $\underline{ax} + \underline{bx} + \underline{\underline{ay}} + \underline{\underline{by}} = (ax + bx) + (ay + by)$

$= x(\underline{a+b}) + y(\underline{a+b}) = (a+b)(x+y)$

E) $\underline{\underline{a^2}} + \underline{\underline{ab}} + \underline{a} + \underline{b} = (a^2 + a)(ab + b)$

$= a(\underline{a+1}) + b(\underline{a+1}) = (a+1)(a+b)$

F) $x^2 - 4 = x^2 - 2^2 = (x + 2)(x - 2)$

G) $9 - 4a^2 = 3^2 - 2^2a^2 = 3^2 - (2a)^2 = (3 + 2a)(3 - 2a)$

H) $25x^2 - 16 = 5^2x^2 - 4^2 = (5x)^2 - 4^2 = (5x + 4)(5x - 4)$

PROBLEMA 2 :

Factorizar en todos los casos:

A) $x^2 + 3x + 2$ B) $x^2 + x - 6$ C) $x^2 - 7x + 10$
D) $x^2 - 5x - 14$ E) $2x^2 + 3x - 20$
F) $3x^2 - x - 2$

RESOLUCIÓN:

A) $x^2 + (3x) + 2$

x → 2 → $2x$
x → 1 → x } +
$(3x)$ → Término central

* Luego: $x^2 + 3x + 2 = (x + 2)(x + 1)$

B) $x^2 + (x) - 6$

x → 3 → $3x$
x → -2 → $-2x$ } +
(x) → Término central

* Luego: $x^2 + x - 6 = (x + 3)(x - 2)$

C) $x^2 (-7x) + 10$

x → -5 → $-5x$
x → -2 → $-2x$ } +
$(-7x)$ → Término central

* Luego: $x^2 + 7x + 10 = (x - 5)(x - 2)$

D) $x^2 - 5x - 14$

x → -7 → $-7x$
x → $+2$ → $+2x$ } +
$(-5x)$ → Término central

* Luego: $x^2 - 5x - 14 = (x - 7)(x + 2)$

E) $2x^2 + 3x - 20$

$2x$ → -5 → $-5x$
x → 4 → $8x$ } +
$(3x)$ → Término central

* Luego: $2x^2 + 3x - 20 = (2x - 5)(x + 4)$

F) $3x^2 - x - 2$

$3x$ → 2 → $2x$
x → -1 → $-3x$ } +
$(-x)$ → Término central

* Luego: $3x^2 - x - 2 = (3x + 2)(x - 1)$

PROBLEMA 3:

Halle el número de factores primos de:

$$A_{(x)} = x^3 - 9x^2 + 9x - 81$$

RESOLUCIÓN:

Por agrupación de términos:

$A_{(x)} = (x^3 - 9x^2) + (9x - 81)$

$\Rightarrow A_{(x)} = x^2 \underline{(x - 9)} + 9 \underline{(x - 9)}$

factor común

$A_{(x)} = (x - 9)(x^2 + 9) \Rightarrow$ el número de factores primos es 2.

PROBLRMA 4:

Factorice e indique el número de factores primos lineales del polinomio: $C(x) = x^4 - 16$

RESOLUCIÓN:

Por diferencia de cuadrados :

$C_{(x)} = (x^2)^2 - (4)^2 = [x^2 + 4]\,\underline{[x^2y - 4]}$

Diferencia de cuadrados

$\Rightarrow C_{(x)} = (x^2 + 4)(x + 2)(x - 2)$

$\Rightarrow$ el número de factores primos lineales es: 2.

PROBLEMA 5 :

Cuántos factores primos tiene:

$$E = ab^2 + ac^2 + bc^2 + a^2b$$

A) 1 B) 2 C) 4 D) 3 E) 6

RESOLUCIÓN:

* Agrupando en forma conveniente:

$$E=(ab^2+a^2b)+(ac^2+bc^2)$$

$\rightarrow E=ab(\underline{b+a})+c^2(\underline{b+a})=(a+b)\left(ab+c^2\right)$

→ «E» tiene 2 factores primos :

$(a+b)$ y $(ab+c^2)$

RPTA: "B"

PROBLEMA 6 :

Factorizar: $E=a^2+b^2-c^2+2ab$

RESOLUCIÓN:

$E=a^2+2ab+b^2+c$

$\rightarrow E=(a+b)^2-c^2$ → diferencia de cuadrados

$\rightarrow E=(a+b+c)(a+b-c)$

PROBLEMA 7 :

La suma de los factores primos *(F.P.)* de:

$E=x^2+xy+3x+2y+2$; es:

RESOLUCIÓN:

* Agrupación convenientemente:

$$E=(x^2+3x+2)+(xy+2y)$$

x ╲╱ 2
x ╱╲ 1

$\rightarrow E=(\underline{x+2})(x+1)+y(\underline{x+2})=(x+2)(x+1+y)$

$\rightarrow E=(x+2)(x+1+y)$

→ La suma de sus *F.P.* es:

$$x+2+x\,y+1=2x+y+3$$

PROBLEMA 8 :

Factorizar: x^4+x^2-6

RESOLUCIÓN:

* Se observa que dos de los términos son potencias de x^2, así tenemos: $x^4=(x^2)^2$ y $x^2=(x^2)^1$

* Luego hacemos un cambio de variable : $y=x^2$

$x^4+x^2-6=(x^2)^2+x^2-6=y^2+y-6$

* Ahora, factorizamos y^2+y-6 por aspa simple:

$y^2 \quad +y \quad -6$

y ╲╱ +3 → 3y
y ╱╲ −2 → −2y
suma: y

* Por lo tanto : $y^2+y-6=(y+3)(y-2)$

* Pero como $y=x^2$ entonces tenemos:

$x^4+x^2-6=y^2+y-6=(y+3)(y-2)=(x^2+3)(x^2-2)$

* Luego : $x^4+x^2-6=(x^2+3)(x^2-2)$

PROBLEMA 9 :

Factorizar : $(a+b)^2+2(a+b)-3$

RESOLUCIÓN:

* Observamos que $(a+b)$ se repiten en dos de los términos del trinomio.

* Luego hacemos un cambio de variable : $x=a+b$

*Entonces:

$$(a+b)^2+2(a+b)-3=(x^2)+2(x)-3$$

* Ahora factorizamos x^2+2x-3 por aspa simple

$x^2 \ + \ 2x \ - \ 3$

x ╲╱ +3 → 3x
x ╱╲ −1 → −1x
suma: +2x

* Por lo tanto : $x^2+2x-3=(x+3)(x-1)$

*Pero como $x=a+b$ entonces tenemos:

$(a+b)^2+2(a+b)-3=x^2+2x-3=(a+b+3)(a+b-1)$

* Luego:

$$(a+b)^2+2(a+b)-3=(a+b+3)(a+b-1)$$

PROBLEMA 10 :

Factorice y obtenga el factor primo de mayor coeficiente lineal de: $E_{(x)}=x^6-4x^3-32$

RESOLUCIÓN:

Por el aspa simple

$$E(x)=x^6-4x^3-32=(x^3-8)(x^3+4)$$

x^3 ╲╱ −8
x^3 ╱╲ 4

$E_{(x)}=(x-2)(x^2+2x+4)(x^3+4)$

⇒ el factor primo de mayor coeficiente lineal es:

x^2+2x+4

PROBLRMA 11 :

Calcule la suma de los términos lineales de los factores primos del polinomio:

$$G_{(x)}=6x^4+33x^3+19x^2+22x+10$$

RESOLUCIÓN:

Por el aspa doble especial :

$$G_{(x)}=6x^4+33x^3+\boxed{0x^2}+\boxed{19x^2}+22x+10$$

$2x^2$ ╲╱ 11x ╲╱ 5
$3x^2$ ╱╲ 0x ╱╲ 2

$G_{(x)}=(2x^2+11x+5)(3x^2+2)\Rightarrow G_{(x)}=(2x+1)(x+5)(3x^2+2)$

2x ╲╱ 1
x ╱╲ 5

⇒La suma de términos lineales: $2x+x=3x$

PROBLEMA 12 :

Factorizar: x^4+x^2-2

RESOLUCIÓN:

* Se observa que:

$x^4 + x^2 - 2 = (x^2)^2 + (x^2) - 2$

*Ahora hacemos un cambio de variable : $y = x^2$

* Entonces : $x^4 + x^2 - 2 = y^2 + y - 2$

* Ahora factorizamos $y^2 + y - 2$ por aspa simple

$y^2 \quad +y \quad -2$

$y \quad +2 \longrightarrow 2y$

$y \quad -1 \longrightarrow -1y$ } +

y

* Por lo tanto: $y^2 + y - 2 = (y + 2)(y - 1)$

* Pero como $y = x^2$ entonces tenemos:

$x^4 + x^2 - 2 = y^2 + y - 2 = (y + 2)(y - 1) = (x^2 + 2)(x^2 - 1)$

$= (x^2 + 2)(x + 1)(x - 1)$

* Luego: $x^4 + x^2 - 2 = (x^2 + 2)(x + 1)(x - 1)$

PROBLEMA 13 :

Factorizar : $M = x^{2m+4} + 5x^{m+4} - 50x^4$

RESOLUCIÓN:

* Aplicando aspa simple, previamente, extrayendo factor común:

$M = x^{2m+4} + 5x^{m+4} - 50x^4$

$\rightarrow M = x^4(x^{2m} + 5^m - 50)$

$x^m \quad 10$

$x^m \quad -5$

$\rightarrow M = x^4(x^m + 10)(x^m - 5)$

PROBLEMA 14 :

Factorizar y luego digan cuántos F.P. tiene:

$E = (a^2 - b^2)(x^2 + 1) + 2(a^2 + b^2)x$

RESOLUCIÓN:

*Por aspa simple :

$E = (a^2 - b^2)x^2 + (a^2 - b^2) + 2(a^2 + b^2)x$

$\rightarrow E = (a^2 - b^2)x^2 + 2(a^2 + b^2)x + (a^2 - b^2)$

$(a+b)x \quad (a-b)$

$(a-b)x \quad (a+b)$

Donde:

Término central:

$[(a+b)^2 + (a-b)^2]x = 2(a^2+b^2)x$

$\rightarrow E = [(a + b)x + (a - b)][(a - b)x + (a + b)]$

* Entonces tiene 2 Factores Primos

PROBLEMA 15 :

Factorizar : $a^4 - b^4$

Indicando un factor.

A) $a + 1$ B) $b + 1$ C) $a^2 + b$ D) $a - b$ E) $a - b^2$

RESOLUCIÓN:

• Por diferencia de cuadrados:

$(a^2)^2 - (b^2)^2 = (a^2 + b^2)\underbrace{(a^2 - b^2)}_{\text{Diferente de Cuadrados}}$

$= (a^2 + b^2)(a + b)(a - b)$

• Luego un factor primo será : $a - b$

RPTA: "D"

PROBLEMA 16 :

Factorizar : $a^3 + 1$

e indicar la suma de sus factores primos.

A) $a^2 + 1$ B) $a + 2$ C) $a^2 + 2$ D) $a^2 - 2$ E) $a - 1$

RESOLUCIÓN:

•Utilizando:

$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

$\Rightarrow a^3 + 1^3 = (a + 1)(a^2 - a(1) + 1^2)$

$\Rightarrow a^3 + 1 = (a + 1)(a^2 - a + 1)$

• Piden : $a + 1 + a^2 - a + 1 = a^2 + 2$

RPTA: "C"

PROBLEMA 17 :

Factorizar : $m^2 - 4 + 2mn + n^2$; e indicar un factor primo.

A) $m + n - 4$ B) $m - n + 2$ C) $m + n - 2$
D) $m - 2$ E) $n + 2$

RESOLUCIÓN:

•Acomodando adecuadamente:

$m^2 + 2mn + n^2 - 4$

(Trinomio cuadrado Perfecto)

$= (m + n)^2 - 2^2$

(Diferencia de cuadrados) $= (m + n + 2)(m + n - 2)$

$\Rightarrow$ Un factor primo será : $m + n - 2$

RPTA:"C"

PROBLEMA 18 :

Indicar el número de factores irreductibles de:

$P(x;y;z) = x^4y^2z^7 + xy^2z^7 + 3x^2y^2z^7 + 3x^3y^2z^7$

A) 2 B) 3 C) 5 D) 4 E) 1

RESOLUCIÓN:

*Extraemos factor común monomio $xy^2 z^7$

$\Rightarrow P(x;y;z) = xy^2 z^7 \underbrace{(x^3 + 1 + 3x + 3x^2)}_{\text{Cubo perfecto}}$

$P(x;y;z) = xy^2 z^7 (x + 1)^3$

$\Rightarrow$ Número de factores irreductibles: 4

RPTA:"D"

PROBLEMA 19 :

Señalar un factor primo de:

$H(x)= (2x^2 + x - 1)^2 - (x^2 - 3x - 5)^2$

A) $x - 2$ B) $x^2 + x + 1$ C) $x + 2$
D) $x^2 - x + 1$ E) $x^2 + 2$

RESOLUCIÓN:

* Directamente por diferencia de cuadrados:

$$H(x)=\underbrace{(3x^2 - 2x - 6)}_{Primero}\underbrace{(x^2 + 4x + 4)}_{TCP}$$

$\Rightarrow H(x) = (3x^2 - 2x - 6)(x + 2)^2$

* Luego un factor primo será : $x + 2$

RPTA:"C"

PROBLEMA 20 :

Señalar un factor primo, luego de factorizar.

$P(x) = x^2 + (b + c + 2d)x + d^2 + (b + c)d + bc$

A) $x + a + b$ B) $x + d + b$ C) $x + b + 1$
D) $x + c + d$ E) "B" ó "D"

RESOLUCIÓN:

*Apliquemos aspa simple como se muestra:

$P(x) = x^2 +(b + c + 2d)x+ d^2 + (b + c)d + bc$



$P(x) = x^2 + (b + c + 2d)x + (d + b)(d + c)$

$P(x) = (x + d + b)(x + d + c)$

$\Rightarrow$ un factor primo es: $(x + b + d)$ ó $(x + c + d)$

RPTA:"E"

PROBLEMA 21 :

Obtenga el factor primo de menor grado de multiplicidad del polinomio:

$$I(x) = x^3 - x^2 - 8x + 12$$

RESOLUCIÓN:

Si es de *3er.* grado, por el criterio de divisores binómicos. Los valores de prueba son: ±1,±2,±3, etc.

Por Ruffini y el teorema del factor:

	1	−1	−8	12
(x−2) ← 2	↓	2	2	−12
	1	1	−6	0
(x−2) ← 2	↓	2	6	
	1	3	0	

$\underbrace{1 \quad 3}_{x+3}$

$I_{(x)} = (x + 3)(x - 2)^2$.

Entonces, el factor primo de menor grado de multiplicidad es: $x + 3$

PROBLEMA 22 :

Halle la suma de los factores primos lineales del polinomio:

$$K_{(x)} = x^5 + 5x^4 - 13x^3 - 56x^2 - 108x - 144$$

RESOLUCIÓN:

Por Ruffini :

	1	5	−13	−56	−108	−144
(x+2) ← −2	↓	−2	−6	38	36	144
	1	3	−19	−18	−72	0
(x−4) ← 4	↓	4	28	36	72	
	1	7	+9	18	0	
(x+6) ← −6	↓	−6	−6	−18		
	1	1	3	0		

$\Rightarrow K_{(x)} = (x + 2)(x - 4)(x + 6)(x^2 + x + 3)$

Luego, la suma de los factores primos lineales es:

$$x + 2 + x - 4 + x + 6 = 3x + 4.$$

PROBLEMA 23 :

Factorice el polinomio:

$O_{(x)} = 7x^5 + 2x^4 - 14x^3 - 4x^2 + 7x + 2$ y señale el número de factores primos.

RESOLUCIÓN:

El polinomio tiene **6** términos y podemos formar grupos de **2** en **2**.

$O_{(x)} = (7x^5 + 2x^4) - (14x^3 + 4x^2) + (7x +2)$

$O_{(x)} = (7x + 2) [x^4 - 2x^2 + 1]$

$O_{(x)} = (7x + 2)(x^2-1)^2=(7x + 2)[(x + 1)(x - 1)]^2$

$= (7x + 2) (x + 1)^2 (x - 1)^2$

El número de factores primos es: **3**.

PROBLEMA 24:

Factorizar:

$P(x;y;z) = [(x - y + z)(x - y - z) + 1]^2 - 4(x - y)^2$

E indicar el número de factores primos.

A) 2 B) 4 C) 5 D) 3 E) 6

RESOLUCIÓN:

$*P(x;y;z) = \underbrace{[(x - y + z)(x - y - z) +1]^2 - 2^2 (x - y)^2}_{diferencia\ de\ cuadrados}$

$[(x - y)^2 - z^2 + 1+2(x - y)][(x - y)^2 - z^2 + 1 - 2(x - y)]$

*En los corchetes hay trinomios cadrados perfectos:

$P(x;y;z) = [(x - y + 1)^2 - z^2][(x - y - 1)^2 - z^2]$

$=(x - y + 1 + z)(x - y + 1 - z)(x - y - 1 + z)(x - y - 1 - z)$

*Luego el número de factores primos serán **4**.

RPTA: "B"

PROBLEMA 25 :

Factorice el polinomio: $Q(x)=x^4+3x^3-10x^2+ax+b$. Si acepta como factores a los binómicos $(x+3) \wedge (x-3)$ e indique la suma de los términos independientes de los factores primos menos ab.

RESOLUCIÓN:

El polinomio es divisible por "$x+3$" $\wedge$ "$x-3$", entonces será divisible por el producto:

$(x+3)(x-3)=x^2-9$

Luego, la división: $\dfrac{x^4+3x^3-10x^2+ax+b}{x^2-9}$ es exacta

Por horner:

1	1	3	−10	a	b
0		0	9		
9			0	27	
				0	−9
	1	3	−1	0	0

x^2+3x-1

$\Rightarrow a=-27 \wedge b=9 \Rightarrow ab=-243$

$Q_{(x)}=(x^2-9)(x^2+3x-1)=(x+3)(x-3)(x^2+3x-1)$

$\Rightarrow$ Suma de términos independientes: -1

Luego: $-1-ab=-1+243=242$.

PROBLEMA 26:

Señale el factor primo de mayor grado.

$$S(x)=x^5+x^4+2x^3+2x^2+2x+1$$

RESOLUCIÓN:

Agrupando :

$S(x)=(x^5+x^4+1)+(2x^3+2x^2+2x)$

$S(x)=\underbrace{(x^5-x^2)}_{\text{Factor común}}+\underbrace{(x^4+x^2+1)}_{\text{Argand}}+\underbrace{(2x^3+2x^2+2x)}_{\text{factorización}}$

$S_{(x)}=x^2\underbrace{(x^3-1)}_{\text{Diferencia de cubos}}+(x^2+x+1)(x^2-x+1)+2x(x^2+x+1)$

$S(x)=x^2(x-1)(x^2+x+1)+(x^2+x+1)(x^2-x+1)$
$+2x(x^2+x+1)$

$S(x)=(x^2+x+1)[x^3-x^2+x^2-x+1+2x]$

$S(x)=(x^2+x+1)(x^3+x+1)$

El factor primo de mayor grado es: x^3+x+1

PROBLEMA 27 :

Señale el factor primo de menor suma de coeficientes del polinomio:

$$P_{(x;y)}=(x^2-xy+y^2)^2-4xy(x+y)^2$$

RESOLUCIÓN:

Desarrollando $(x+y)^2$:

$P_{(x;y)}=(x^2-xy+y^2)^2-4xy(x^2+y^2+2xy)$

Consideremos: $x^2+y^2=a \wedge xy=b$, el polinomio quedará así:

$P=(a-b)^2-4b(a+2b) \Rightarrow P=a^2+b^2-2ab-4ab-8b^2$

$\Rightarrow P=a^2-6ab-7b^2$

$a \qquad -7b$

$a \qquad b$

$\Rightarrow P=(a-7b)(a+b)$

Reponiendo los cambios:

$P_{(x;y)}=(x^2+y^2-7xy)(x^2+y^2+xy)$

$\Rightarrow$ El factor primo de menor suma de coeficientes es: $x^2-7xy+y^2$

PROBLEMA 28 :

Luego de factorizar el polinomio $P_{(x)}=x^7+x^4+4x^3+4$, se obtienen "m" factores primos cuadráticos y "n" factores primos lineales. Determine el valor de m^2+n^2+mn

RESOLUCIÓN:

Agrupando términos: $P_{(x)}=x^4(x^3+1)+4(x^3+1)$

$\Rightarrow P_{(x)}=(x^3+1)(x^4+4)$

Usando la suma de cubos en el primer factor y completando cuadrados en el otro:

$P_{(x)}=(x+1)(x^2-x+1)(x^4+4x^2+4-4x^2)$

$\Rightarrow P_{(x)}=(x+1)(x^2-x+1)[(x^2+2)^2-4x^2]$

$\Rightarrow P_{(x)}=(x+1)(x^2-x+1)(x^2+2+2x)(x^2+2-2x)$

De donde: $m=3$ y $n=1$.

Por lo tanto:

$$m^2+n^2+mn=3^2+1^2+3\times1=13$$

PROBLEMA 29 :

Factorizar: $2a^2+2b^2-(a^2-b^2)^2-1$

e indicar el número de factores primos.

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

RESOLUCIÓN:

1°) Siendo que: $2a^2+2b^2=(a+b)^2+(a-b)^2$

2°) Luego se tendrá:

$(a+b)^2+(a-b)^2-(a^2-b^2)^2-1$

3°) Una orientación de la diferencia de cuadrados será:

$(a+b)^2+(a-b)^2-(a+b)^2(a-b)^2-1$

4°) Asociando:

$=\underbrace{(a+b)^2-1}+\underbrace{(a-b)^2-(a+b)^2(a-b)^2}$

$=(a+b)^2-1-(a-b)^2[(a+b)^2-1]$

5°) Extrayendo $(a+b)^2-1$:

$[(a+b)^2-1]\{1-(a-b)^2\}$

6°) Factorizando las diferencia de cuadrados:

$[(a+b)^2-1][1-(a-b)^2]$

$=(a+b+1)(a+b-1)(1+a-b)(1-a+b)$

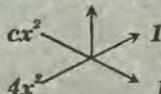
•Luego el número de factores primos será: **4**

RPTA: "C"

PROBLEMA 30 :

Luego de factorizar el polinomio $P(x)$ en los racionales por el criterio del aspa simple se obtuvo.

$$P(x)=8x^4+bx^2-(2+d)$$



Determinar uno de los factores primos:

A) $4x^2-x+3$ B) $2x^2+1$ C) $4x^2+x-1$
D) $2x^2-1$ E) $4x^2+1$

RESOLUCIÓN:

•Del esquema:

•$4c=8 \Rightarrow c=2$

•$1\times1=-(2+d) \Rightarrow d=-1$

• Con esto se tiene:

$P(x)=(2x^2+1)(4x^2-1)$ ó

$P(x)=(2x^2+1)(2x+1)(2x-1)$

$\Rightarrow$ Un factor primo es : $2x^2+1$

RPTA: "B"

PROBLEMA 31 :

Factorizar y dar como respuesta la suma de coeficientes de un factor primo de:

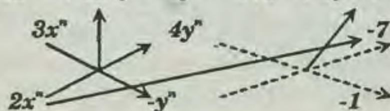
$$P(x;y)=6x^{2n}-4y^{2n}+7+5x^ny^n+3y^n-17x^n$$

A) 7 B) 14 C) 13 D) -1 E) 0

RESOLUCIÓN:

* Ordenemos para aplicar aspa doble:

$6x^{2n}+5x^ny^n-4y^{2n}-17x^n+3y^n+7$



$\Rightarrow P(x;y)=(3x^n+4y^n-7)(2x^n-y^n-1)$

*Luego la suma de coeficientes de cualquier factor primo es «0».

RPTA: "E"

PROBLEMA 32 :

Factorizar:

$P(a;b;c)=a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a-b)^2+8abc$

e indicar un factor primo.

A) $b+c$ B) $a+c$ C) $a+b$
D) $a+b+c$ E) «A» ó «B» ó «C»

RESOLUCIÓN :

•Desarrollando , resulta :

$ab^2-2abc+ac^2+bc^2-2abc+ba^2+ca^2-2abc+cb^2+8abc$

$=\underline{ab^2}+\underline{ac^2+bc^2}+\underline{ab^2}+\underline{\underline{ca^2+cb^2+2abc}}$

•Agrupando lo indicado:

$ab(a+b)+c^2(a+b)++c(a^2+b^2+2ab)$

$=ab\underline{(a+b)}+c^2\underline{(a+b)}+c\underline{(a+b)^2}$

$=(a+b)[ab+c^2+c(a+b)]$

• Ordenando en el corchete:

$P(a;b;c)=(a+b)[c^2+(a+b)c+ab]$



$\Rightarrow P(a;b;c)=(a+b)(c+a)(c+b)$

RPTA:"E"

OTRO METODO: ya que el polinomio es simétrico (verifíquese), entonces sus factores serán : $(a+b)$; $(c+a)$ y $(c+b)$, además siendo de tercer grado , luego será :

$P(a;b;c)=(a+b)(c+a)(c+b)$

PROBLEMA 33 :

Factorizar:

$y[x^2(y+xz)+yz(z+xy)]+xz[z(x+yz)+y(xyz+1)]$

e indicar un factor primo.

A) $xz+y$ B) $xz-y$ C) $xy+1$ D) $xy-1$ E) $xz-1$

RESOLUCIÓN:

$\underline{x^2y^2}+\underline{x^3yz}+\underline{\underline{y^2z^2}}+\underline{\underline{xy^3z}}+\underline{x^2z^2}+xyz^3+x^2y^2z^2+\underline{xyz}$

•Agrupando según lo indicado tenemos:

$xy(xy+z)+x^2z(x+z)+y^2z(z+xy)+xyz^2(z+xy)$

•Por factor común:

$(xy+z)(xy+x^2z+y^2z+xyz^2)$

•Por agrupación:

$(xy+z)[x(y+xz)+yz(y+xz)]$

• Finalmente por factor común se consigue:

$(xy+z)(xz+y)(yz+x)$

RPTA: "A"

PROBLEMA 34 :

Factorizar: $P(x;y;z)=x^3+x^2-x-1$

e indicar la suma de coeficientes de un factor primo.

A) 1 B) 3 C) -1 D) 0 E) -3

RESOLUCIÓN :

Agrupando según lo indicado tenemos:

$P(x) \equiv x^3 + x^2 - x - 1 \equiv x^2(x + 1) - (x + 1)$

- Por factor común: $P(x) \equiv (x + 1)(x^2 - 1)$
- Por equivalencia. $P(x) \equiv (x + 1)(x + 1)(x - 1)$
- Finalmente tenemos: $P(x) \equiv (x + 1)^2 (x - 1)$
- Se pide: $1 + 1 = 2$ ó $1 - 1 = 0$

RPTA: "D"

PROBLEMA 35 :

Factorizar :

$$P(x) = x^5 + 4x^4 - 10x^2 - x + 6$$

e indica el número de factores primos

A) 4 B) 2 C) 3 D) 5 E) 7

RESOLUCIÓN:

*Una rápida inspección permite observar que si :

$x = 1 \longrightarrow P(x) = 0$

*luego factor de $P(x)$ es $(x - 1)$ y según Ruffini tenemos:

	1	4	0	−10	−1	6
1	↓	1	5	5	−5	−6
	1	5	5	−5	−6	0

$P(x) \equiv (x - 1)\underline{(x^4 + 5x^3 + 5x^2 - 5x - 6)}$

* Factorizando la expresión señalada por el método del Aspa Doble Especial conseguimos:

$P(x) \equiv (x - 1)(x^2 - 1)(x^2 + 5x + 6)$

*Dando uso de la Equivalencia y el Aspa Simple tenemos:

$P(x) = (x - 1)(x - 1)(x + 1)(x + 2)(x + 3)$

$\Rightarrow P(x) = (x - 1)^2 (x + 1)(x + 2)(x + 3)$

RPTA: "A"

PROBLEMA 36 :

Factorizar : $P(x) \equiv x^5 - x - 1$

RESOLUCIÓN:

*Una rápida inspección nos permite asegurar que el trinomio dado no admite ser factorizado por Divisiones Binómicos.

* Por artificio (Sumas y Restas especiales), se tendrá en cuenta que :

$$a^3 + 1 = (a + 1)(a^2 - a + 1)$$

* Sumando y restando x^2 se tiene :

$P(x) = \underline{\underline{x^5}} + \underline{\underline{x^2}} - x^2 + x - 1$

$P(x) = x^2(\underline{x^3 + 1}) - (x^2 - x + 1)$

* Por equivalencia :

$P(x) = x^2 (x + 1)(x^2 - x + 1) - (x^2 - x + 1)$

$P(x) = (x^2 - x + 1)[x^2(x + 1) - 1]$

$= (x^2 - x + 1)(x^3 + x^2 - 1)$

PROBLEMA 37 :

Uno de los factores de :

$E = zx^4 + 4x^2y^2 - 4x^2y^2z + 4y^4z - x^4 - 4y^4$ es:

A) $1 + z$ B) $2 - z$ C) $z - 1$ D) $x - 2y$ E) $x + 2y$

RESOLUCIÓN:

* Factorizando la expresión propuesta :

$E = zx^4 - x^4 - 4x^2y^2z + 4x^2y^2 + 4y^4z - 4y^4$

$\rightarrow E = x^4(z - 1) - 4x^2y^2(z - 1) + 4y^4(z - 1)$

$\rightarrow E = (z - 1)(x^2 - 4x^2y^2 + 4y^4)$

$\rightarrow E = (z - 1)(x^2 - 2y^2)^2$

RPTA: "C"

PROBLEMA 38 :

Factorizar sobre Q : $P_{(x)} = x^3 + 28y^3 + 3xy(x + y)$

e indicar la suma de los coeficientes de uno de sus factores primos.

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

RESOLUCIÓN:

* Desdoblando términos para formar desarrollo de un binomio al cubo:

$P_{(x;y)} = x^3 + y^3 + 3xy(x + y) + 27y^3$

$\rightarrow P_{(x;y)} = (x + y)^3 + (3y)^3$: suma de cubos

$P_{(x;y)} = (x + y + 3y)\left[(x + y)^2 - (x + y)(3y) + (3y)^2\right]$

$\rightarrow P_{(x;y)} = (x + 4y)(x^2 - xy + 7y^2)$: factores

*Suma de coeficientes de $(x + 4y)$ es 5

*Suma de coeficientes de $(x^2 - xy + 7y^2)$ es 7

RPTA: "E"

PROBLEMA 39 :

Factorice sobre Q :

$P_{(x)} = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) + 7x^2 - 385$

e indicar la suma de sus factores primos lineales

A) x B) $2x$ C) $3x$ D) $4x$ E) $5x$

RESOLUCIÓN:

* Efectuando:

$P_{(x)} = (x^4 + x^2 + 1) + 7x^2 - 385$

$\rightarrow P_{(x)} = x^4 + 8x^2 - 384$, factorizando por aspa simple

$x^2 \quad +24$

$x^2 \quad -16$

$P_{(x)} = (x^2 + 24)(x^2 - 16) \rightarrow P_{(x)} = (x^2 + 24)(x + 4)(x - 4)$

* Nos piden: $(x+4)+(x-4)=2x$

RPTA: "B"

PROBLEMA 40 :

Factorizar:

$$E=(a-b)^2(c-d)^2+2ab(c-d)^2+2cd(a^2+b^2)$$

e indicar la suma de factores.

A) $a^2+b^2+c^2+d^2$ B) $a+2b+c+2d$

C) $a+b^2+c+d$ D) $a^2-b^2+c^2-d^2$

RESOLUCIÓN:

* Agrupando términos convenientemente en la expresión propuesta:

$$E=(c-d)^2\left[(a-b)^2+2ab\right]+2cd\left(a^2+b^2\right)$$

$$\rightarrow E=(c-d)^2\left(a^2+b^2\right)+2cd\left(a^2+b^2\right)$$

$$\rightarrow E=\left(a^2+b^2\right)\left[(c-d)^2+2cd\right]$$

$$\rightarrow E=\left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right)$$

* La suma de los factores resulta :

$$a^2+b^2+c^2+d^2$$

RPTA: "A"

PROBLEMA 41 :

Al factorizar : $(3x-1)^2-9x-7$. ¿Uno de los factores es?:

A) $x+2$ B) $3x-1$ C) $3x+1$ D) $x+3$

RESOLUCIÓN:

* Efectuando:

$$E=\left(9x^2-6x+1\right)-9x-7$$

$$\rightarrow E=9x^2-15x-6$$

$$\rightarrow E=3\left(3x^2-5x-2\right)$$

3x ⟶ +1

x ⟶ - 2

$$\rightarrow E=(3x+1)(x-2)$$

*Los factores algebraicos son: $(3x+1)$ y $(x-2)$

RPTA: "C"

PROBLEMA 42 :

Hallar el número de factores: $64a^7b-ab^7$

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

RESOLUCIÓN:

* Extrayendo el factor común:

$$64a^7b-ab^7=ab\left(64a^6-b^6\right)=ab\left[\left(8a^3\right)^2-\left(b^3\right)^2\right]$$

$$=ab\left[8a^3+b^3\right]\left[8a^3-b^3\right]=ab\left[(2a)^3+b^3\right]\left[(2a)^3-b^3\right]$$

$$=ab(2a+b)\left(4a^2-2ab+b^2\right)(2a-b)\left(4a^2+2ab+b^2\right)$$

* Se observa que tiene **6** factores

RPTA: "D"

PROBLEMA 43 :

Extraer la raíz cuadrada de:

$$\left(a^2+ab+bc+ca\right)\left(bc+ca+ab+b^2\right)\left(bc+ca+ab+c^2\right)$$

A) $(b-c)(a-b)(a+c)$ B) $(a+c)(b+c)(a+b)$

C) $(b+c)(a-b)(a-c)$ D) $(a+b+c)(a-b-c)$

RESOLUCIÓN :

* Factorizando cada uno de los paréntesis:

$$\left(a^2+ab+bc+ca\right)\left(bc+ca+ab+b^2\right)\left(bc+ca+ab+c^2\right)$$

$$\rightarrow \left[a(a+b)+c(a+b)\right]\left[c(a+b)+b(a+b)\right]\left[c(b+c)+a(b+c)\right]$$

$$\rightarrow (a+b)(a+c)(a+b)(b+c)(b+c)(a+c)$$

$$=(a+c)^2(b+c)^2(a+b)^2$$

* Extrayendo la raíz cuadrada pedida, resulta:

$$(a+c)(b+c)(a+b)$$

RPTA: "B"

PROBLEMA 44 :

Descomponer en dos factores:

$$(x+y)^3+3xy(1-x-y)-1$$

A) $(x+y+1)\left(x^2+2xy+y^2+x+y+1\right)$

B) $(x+y-1)\left(x^2+2xy+y^2-x-y+1\right)$

C) $(x+y-1)\left(x^2-xy+y^2+x+y+1\right)$

RESOLUCIÓN:

* Agrupando en la forma indicada:

$$\underbrace{(x+y)^3-1}-3xy(x+y+1)$$

$$=(x+y-1)\left[(x+y)^2+x+y+1\right]-3xy(x+y-1)$$

$$=(x+y-1)\left[x^2+y^2+2xy+x+y+1-3xy\right]$$

$$=(x+y-1)\left(x^2-xy+y^2+x+y+1\right)$$

RPTA: "C"

PROBLEMA 45 :

Uno de los factores de: x^4+2x^2+9 es:

A) x^2-3 B) x^2-2x+3 C) $x+1$ D) x^2+3

RESOLUCIÓN:

*Sumando y restando $4x^2$ se tendrá

$$\underbrace{x^4+6x^2+9}-4x^2=\left(x^2+3\right)^2-(2x)^2$$

*desdoblando esta diferencia de cuadrados ,resulta:

$$=\left(x^2+2x+3\right)\left(x^2-2x+3\right)$$

RPTA: "B"

PROBLEMA 46 :

Descomponer en factores:

$$x^3y+x^2y^2-x^2yz+yz^3-xyz^2+xz^3-y^2z^2-x^3z$$

A) $(x-z)(z-y)(x+y)(x+z)$
B) $(x-z)(x+z)(x+y)(y-z)$
C) $(x+z)(x+y)(y-x)(z-y)$

RESOLUCIÓN :

*Agrupando en la forma indicada :

$$x^3y+x^2y^2-x^2yz+yz^3-xyz^2+xz^3-y^2z^2-x^3z$$

$$=x^3(y-z)+x^2y(y-z)-z^2y(y-z)-z^2x(y-z)$$

* Extrayendo factor común $(y-z)$:

$$(y-z)\left[x^3+x^2y-z^2y-z^2x\right]$$

$$=(y-z)\left[x^2(x+y)-z^2(x+y)\right]$$

$$=(y-z)(x+y)\left(x^2-z^2\right)$$

$$=(y-z)(x+y)(x+z)(x-z)$$

RPTA: "B"

PROBLEMA 47 :

Indicar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

p : Si $P_{(x)}=6x^2+19x+10$ es un polinomio factorizable, entonces un factor primo es $(2x+5)$.

q : Si $Q_{(x)}=a(b-c)x^2+b(c-a)x+(a-b)$ es un polinomio factorizable, entonces un factor primo es $(bx+c)$

r : Si $R_{(x)}=\left(x^2-6x-3\right)^2-\left(x^2-6x-3\right)-12$ es un polinomio factorizable, entonces un factor primo es x.

A)VVV B)VFF C)VVF D)FFV E)VFV

RESOLUCIÓN:

I) $P_{(x)}=6x^2+19x+10=(3x+2)(2x+5)$

$3x \quad 2$
$2x \quad 5$

$\rightarrow$ $(2x+5)$ es un factor primo de $P(x)$

* Luego, p es .... VERDADERA

II) $Q_{(x)}=a(b-c)x^2+b(c-a)x+c(a-b)$

$a(b-9x)x \quad c(a-b)$
$x \quad -1$

$\rightarrow Q_{(x)}=\left[a(b-c)x-c(a-b)\right](x-1)$

$\rightarrow$ $(bx+c)$ no es factor primo de $Q_{(x)}$

* Luego, q es...FALSA

III) $R_{(x)}=\left(x^2-6x-3\right)^2-\left(x^2-6x-3\right)-12$

$x^2-6x-3 \quad -4$
$x^2-6x-3 \quad 3$

$\rightarrow R_{(x)}=\left(x^2-6x-7\right)\left(x^2-6x\right)$

$\rightarrow R_{(x)}=(x-7)(x+1)x(x-6)$

$\rightarrow$ x es un factor primo de $R_{(x)}$

* Luego, r es.................................... VERDADERA

RPTA: "E"

PROBLEMA 48 :

Considere el polinomio

$$P_{(x)}=8x^4+4x^3+2x^2+3x+1$$

indicar el valor de verdad de las siguientes proposiciones.

I) $P_{(x)}$ es primo en el campo Q.

II) $P_{(x)}$ tiene 2 factores primos en Q.

III) $P_{(x)}$ carece de raíces racionales.

A)VFF B)VVV C)FFV D)FFF E)FVF

RESOLUCIÓN:

* Usando aspa doble especial:

$$8x^4+4x^3+2x^2+3x+1$$

$4x^2 \quad 4x \quad 1$
$2x^2 \quad -x \quad 1$

$$2x^2-6x^2=-4x^2$$

$$P_{(x)}=\left(4x^2+4x+1\right)\left(2x^2-x+1\right)$$

$$\rightarrow P_{(x)}=(2x+1)^2\left(2x^2-x+1\right)$$

*Ahora, podemos decir que:

I) No es primo en Q ....(FALSO)

II) Tiene dos factores primos en Q ....(VERDADERO)

III) $P_{(x)}$ se anula para $x=-1/2$ ....(FALSO)

RPTA: "E"

PROBLEMA 49 :

Si P es un polinomio factorizable definido por $P_{(x)}=x^{n+2}+x^n+x^3+x-x^2-1$; entonces un factor primo es:

A) x^n+x+1 B) x^n+x-1 C) x^n-x-1 D) x^n+1

RESOLUCIÓN:

* Agrupando:

$$P_{(x)}=\left(x^{n+2}+x^n\right)+\left(x^3+x\right)-\left(x^2+1\right)$$

$$\rightarrow P_{(x)}=x^n\left(x^2+1\right)+x\left(x^2+1\right)-\left(x^2+1\right)$$

$$\rightarrow P_{(x)}=\left(x^2+1\right)\left(x^n+x-1\right)$$

RPTA: "B"

PROBLEMA 50 :

Si $P_{(x;y)} = x^3 + 28y^3 + 3xy(x+y)$ es un polinomio factorizable, entonces la suma de coeficientes de uno de sus factores primos.

A)5 B)3 C)6 D)9 E)10

RESOLUCIÓN:

* Desdoblando adecuadamente :

$$P_{(x;y)} = x^3 + y^3 + 3xy(x+y) + 27y^3$$

$\rightarrow P_{(x;y)} = (x+y)^3 + (3y)^3$ ....(por suma de cubos).

$$\rightarrow P_{(x;y)} = (x+4y)\left[(x+y)^2 - 3y(x+y) + 9y^2\right]$$

$$\rightarrow P_{(x;y)} = (x+4y)(x^2 - xy + 7y^2)$$

$$\rightarrow P_{(x;y)} = (x+4y)(x^2 - xy + 7y^2)$$

$\rightarrow$ La suma de coeficientes de un factor primo es **5** ó **7**

RPTA: "A"

PROBLEMA 51 :

Si $P_{(x)} = x^4 + 4x^5 - (x^6 - 1)^2$ es un polinomio factorizable, entonces un factor primo es:

A)x^3+x+1 B)x^3+x-1 C)$x+1$
D)x^2+x+1 E)x^2-x+1

RESOLUCIÓN:

* Aumentado y quitando $4x^6$, así:

$$P_{(x)} = x^4 + 4x^5 + 4x^6 \underline{-4x^6 - (x^6-1)^2}$$

$$\rightarrow P_{(x)} = (x^2 + 2x^3)^2 - \left[(x^6-1)^2 + 4x^6\right]$$

$$\rightarrow P_{(x)} = (x^2 + 2x^3)^2 - (x^6+1)^2$$

* Recuerde que: $(a-b)^2 + 4ab = (a+b)^2$

$$\rightarrow P_{(x)} = (x^2 + 2x^3 + x^6 + 1)(x^2 + 2x^3 - x^6 - 1)$$

$$\rightarrow P_{(x)} = (x^6 + 2x^3 + x^2 + 1)\left[x^2 - (x^6 - 2x^3 + 1)\right]$$

$$\rightarrow P_{(x)} = (x^6 + 2x^3 + x^2 + 1)\left[x^2 - (x^3-1)^2\right]$$

$$\rightarrow P_{(x)} = (x^6 + 2x^3 + x^2 + 1)(x + x^3 - 1)(x - x^3 + 1)$$

* Luego, un factor primo de $P_{(x)}$ es: $x^3 + x - 1$

RPTA: "B"

PROBLEMA 52 :

Si $P_{(x;y)} = (x^2+y^2-6xy)^2 - 4xy(x+y)^2$ es un polinomio factorizable, entonces un factor primo es:

A)$x+y$ B)$x^2-14xy+y^2$ C)$x-y$
D)$x^2+3xy-y^2$ E)$x+2y$

RESOLUCIÓN:

* Desarrollando el *2do* sumando:

$$P_{(x;y)} = (x^2+y^2-6xy)^2 - 4xy(x^2+y^2+2xy)$$

* Haciendo: $x^2 + y^2 = a \wedge xy = b$

$$P = (a-6b)^2 - 4b(a+2b)$$

$$\rightarrow P = a^2 - 16ab + 28b^2 = (a-14b)(a-2b)$$

$a \qquad -14b$
$a \qquad -2b$

* Restituyendo:

$$P_{(x;y)} = (x^2 + y^2 - 14xy)(x^2 + y^2 - 2xy)$$

$$\rightarrow P_{(x;y)} = (x^2 + y^2 - 14xy)(x-y)^2$$

* Un factor primo es: $x - y$

RPTA: "C"

PROBLEMA 53 :

Al factorizar:

$$M_{(x)} = 32x^5 + (x+1)^2 - x^2$$

la suma de coeficientes de uno de sus factores primos es:

A)2 B)3 C)6 D)7 E)9

RESOLUCIÓN:

* Desarrollando:

$$M_{(x)} = 32x^5 + x^2 + 2x + 1 - x^2$$

$$\rightarrow M_{(x)} = 32x^5 + 2x + 1 = (2x)^5 + (2x) + 1$$

* Sea: $2x = a \rightarrow M = a^5 + a + 1 + a^2 - a^2$

* Agrupando:

$$M = a^2(a^3-1) + (a^2+a+1)$$

$$\rightarrow M = a^2(a-1)(a^2+a+1) + (a^2+a+1)$$

$$\rightarrow M = (a^2+a+1) + (a^3-a^2+1)$$

* Reponiendo variables:

$$M_{(x)} = (4x^2+2x+1)(8x^3-4x^2+1)$$

$\sum coef\,de(4x^2+2x+1)$ **es 7**

$\sum coef(8x^3-4x+1)$ **es 5**

RPTA: "D"

PROBLEMA 54 :

Indicar el número de factores primos en:

$$(x^2+7x+5)^2 + 3(x^2+1) + 21x + 2$$

A)1 B)2 C)3 D)4 E)5

RESOLUCIÓN:

* Agrupando $(x^2+7x+5)^2 + 3(x^2+7x+5) - 10$

* Sea $x^2 + 7x + 5 = a$

$a^2 + 3a - 10$ por aspa simple

$a \qquad 5$
$a \qquad -2$

$(a+5)(a-2)$ reponiendo variable

$\rightarrow (x^2+7x+10)(x^2+7x+3)$

x 5
x 2

$(x+5)(x+2)(x^2+7x+3)$

* Tenemos 3 factores primos

RPTA: "C"

PROBLEMA 55 :

Factorice

$P_{(x)}=(a^2+2ab)x^2+b(a-4b)x+(b-a)(a-2b)$

e indicar uno de sus factores primos.

A) $ax+a-2b$ B) $ax+a$ C) $ax-2b$ D) $ax+1$

RESOLUCIÓN:

* Aplicando aspa simple :

$P_{(x)}=a(a+2b)x^2+b(a-4b)x+(b-a)(a-2b)$

ax ⟶ $(a-2b)=(a^2-4b^2)x$

$(a+2b)x$ ⟶ $(b-a)=\underline{(ab-a^2)x}$

$b(a-4b)x$

$\rightarrow P_{(x)}=(ax+a-2b)[(a+2b)x+b-a]$

* Un factor es: $ax+a-2b$

RPTA: "A"

PROBLEMA 56 :

Si $P_{(x)}=(3x+2)(4x-3)(x-1)(12x+11)-14$ es un polinomio factorizable en los racionales, entonces un factor primo es:

A) $x-1$ B) $12x^2-4x-3$ C) $13x+12$ D) $12x-13$

RESOLUCIÓN:

$P_{(x)}=\underbrace{(3x+2)(4x-3)}\underbrace{(x-1)(12x+11)}-14$

$\rightarrow P_{(x)}=(12x^2-x-6)(12x^2-x-11)-14$

* Haciendo: $12x^2-x-6=a$

$\rightarrow P=a(a-5)-14=a^2-5a-14$

$\rightarrow P=(a-7)(a+2)$, restituyendo:

$P_{(x)}=(12x^2-x-13)(12x^2-x-4)$

12x −13
x 1

$\rightarrow P_{(x)}=(12x-3)(x+1)(12x^2-x-4)$

* Un factor primo es: $12x-13$

RPTA: "D"

PROBLEMA 57 :

Si $(x+1)$ y $(2x^2-3x-2)$ son dos factores primos del polinomio $P_{(x)}=ax^4+cx^3-bx^2-cx+2$, entonces el otro factor primo es:

A) $x+7$ B) $x-3$ C) $2x+1$ D) $x-1$

RESOLUCIÓN:

* De: $P_{(x)}=ax^4+cx^3-bx^2-cx+2$

* Además: $P_{(x)}=(x+1)(2x^2-3x-2)q_{(x)}$

$\rightarrow P_{(x)}=(2x^2-3x-2)(x+1)\left(\frac{a}{2}x-1\right)$

$\rightarrow P_{(x)}=(2x^2-3x-2)\left[\frac{a}{2}x^2+\left(\frac{a}{2}-1\right)x-1\right]$

* Luego: $ax^4+cx^3-bx^2-cx+2$

$2x^2$ $-3x$ -2

$\frac{a}{2}x^2$ $\left(\frac{a}{2}-1\right)x$ -1

$2\left(\frac{a}{2}-1\right)-\frac{3a}{2}=c \wedge 3-2\left(\frac{a}{2}-1\right)=-c$

$\rightarrow 2\left(\frac{a}{2}-1\right)-\frac{3a}{2}=-3+2\left(\frac{a}{2}-1\right)\rightarrow a=2$

* Con lo cual, se tiene:

$P_{(x)}=(2x^2-3x-2)(x+1)(x-1)$

* El otro factor (primo) es $x-1$

RPTA: "D"

PROBLEMA 58 :

Si $P_{(x)}=x^5+x^4+2x^2-1$ es un polinomio factorizable, entonces la suma de coeficientes del factor primo de grado 3 es:

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

RESOLUCIÓN:

* Acomodando, así:

$\rightarrow P_{(x)}=x^5+\underline{x^4+x^2}+\underline{x^2-1}$

x^3 $x+1$
x^2 $x-1$

$\rightarrow P_{(x)}=(x^3+x+1)(x^2+x-1)$

* En el factor primo: x^3+x+1, la suma de coeficientes es 3.

RPTA: "D"

PROBLEMA 59 :

Si $Q_{(x;y)}=2x^2+1-(4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4)$ es un polinomio factorizable, entonces un factor primo es:

A) $3xy-y+1$ B) $2xy-2$ C) $x+y-y^2$ D) $1-2xy-y^2$

RESOLUCIÓN:

* De: $Q_{(x;y)}=2x^2+1-(4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4)$

$\rightarrow Q_{(x;y)}=x^4+2x^2+1-\left(x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4\right)$

$\rightarrow Q_{(x;y)}=\left(x^2+1\right)^2-(x+y)^4$

$\rightarrow Q_{(x;y)}=\left[x^2+1+(x+y)^2\right]\left[x^2+1-(x+y)^2\right]$

$\rightarrow Q_{(x;y)}=\left[2x^2+2xy+y^2+1\right]\left[1-2xy-y^2\right]$

* Luego, un factor primo es: $1-2xy-y^2$

RPTA: "D"

PROBLEMA 60 :

Si $P_{(x)}=5x-15+x^3+2x^2+x^4$ es un polinomio factorizable, entonces un factor primo es:

A) $3x-1$ B) $x+5$ C) $2x-4$
D) x^2+1 E) x^2+x-3

RESOLUCIÓN:

* Factorizando por aspa doble especial:

$P_{(x)}=x^4+x^3+2x^2+5x-15$

x^2 $0x$ 5
x^2 x -3

$\rightarrow P_{(x)}=\left(x^2+5\right)\left(x^2+x-3\right)$

* Luego, un factor primo es: x^2+x-3

RPTA: "E"

PROBLEMA 61:

Si P es un polinomio factorizable definido por:

$$P_{(x)}=x^{10}+2x^6+x^2-1$$

Entonces el número de factores primos en Q es:

A) 2 B) 3 C) 4 D) 6 E) 8

RESOLUCIÓN:

* Agrupando adecuadamente:

$P_{(x)}=\left(x^{10}+2x^6+x^2\right)-1=\left(x^5+x\right)^2-1$

* Usando diferencia de cuadrados:

$P_{(x)}=(x^5+x+1)(x^5+x-1)$

$\rightarrow P_{(x)}=(x^5-x^2+x^2+x+1)(x^5+x^2-x^2+x-1)$

$\rightarrow P_{(x)}=[x^2(x^3-1)+(x^2+x+1)][x^2(x^3+1)-(x^2-x+1)]$

$\rightarrow P_{(x)}=[x^2(x-1)(x^2+x+1)+(x^2+x+1)]$
$[x^2(x+1)(x^2-x+1)-(x^2-x+1)]$

* Finalmente:

$P_{(x)}=(x^2+x+1)(x^3-x^2+1)(x^2-x+1)(x^3+x^2-1)$

*Luego el número de factores primos será 4.

RPTA: "C"

PROBLEMA 62 :

Al factorizar el polinomio:

$$P_{(x)}=x^5+(x+1)^2x^2+(x+1)^2$$

con $x\in Q$. Indicar el valor de verdad las afirmaciones siguientes:

I) Se obtiene un factor de primer grado y dos factores de segundo grado.

II) El factor de tercer grado es tal que la suma de sus coeficientes es 8.

III) Hay dos factores primos cuya suma de coeficientes es común e igual a 3.

A) FFV B) FVV C) VFV D) VVV E) FFF

RESOLUCIÓN:

*De: $P_{(x)}=x^5+(x+1)^2x^2+(x+1)^2$

$P_{(x)}=x^5+x^4+2x^3+x^2+(x+1)^2$

x^3 $x+1$
x^2 $x+1$

* En donde: $x^3(x+1)+x^2(x+1)=x^4+2x^3+x^2$

$\rightarrow P_{(x)}=\left(x^3+x+1\right)\left(x^2+x+1\right)$

I) No hay factores de primer grado... (FALSA)

II) En el factor de grado 3 : x^3+x+1, la suma de coeficientes es 3 ....(FALSA)

III) En ambos factores primos, la suma de coeficientes es 3.....................................(VERDADERO)

RPTA: "A"

PROBLEMA 63 :

Si: $P_{(x)}=x^5+2x^3-x^2-2x+1+x^7$ es un polinomio factorizable, entonces la suma de coeficientes de un factor primo es:

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

RESOLUCIÓN:

* Acomodando:

$P_{(x)}=x^7+x^5+2x^3-x^2-2x+1$

$P_{(x)}=x^7+2x^5-x^3-\underline{x^5+3x^3-x^2-2x+1}$

$P_{(x)}=x^7+\underline{2x^5-x^3}-\left(x^2+x-1\right)\left(x^3-x^2-x+1\right)$

x^3 x^2+x-1
x^4 (x^3-x^2-x+1)

* En donde:

$-x^3\left(x^3-x^2-x+1\right)+x^4\left(x^2+x-1\right)=2x^5-x^3$

$\rightarrow P_{(x)}=\left(x^3+x^2+x-1\right)\left(x^4-x^3+x^2+x-1\right)$

*La suma de coeficientes de un factor primo es: 2 ó 1

RPTA: "A"

PROBLEMA 64 :

Si el polinomio

$$P_{(x)}=x^9+x^8+x^7+x^6+x^5+2x^4+x^2+1$$

es factorizable en los racionales, entonces indicar el valor de verdad de las siguientes afirmaciones:

I) Tiene un factor primo de primer grado

II) Un factor primo es x^2-x-1

III) El factor primo de mayor grado tiene como producto de sus términos a $-x^4$

A)FFF *B)VVV* *C)VVF* *D)FFV* *E)VFV*

RESOLUCIÓN:

*Acomodando adecuadamente:

$$P_{(x)}=\underbrace{x^9+x^8+x^7}+\underbrace{x^6+x^5+x^4}+\underbrace{x^4+x^2+1}$$

$$\to P_{(x)}=x^7(x^2+x+1)+x^4(x^2+x+1)+(x^2+x+1)(x^2-x+1)$$

$$\to P_{(x)}=(x^2+x+1)(x^7+x^4+x^2-x+1)$$

$$\to P_{(x)}=(x^2+x+1)\left[x^4\underbrace{(x^3+1)}+(x^2-x+1)\right](x+1)(x^2-x+1)$$

$$\to P_{(x)}=(x^2+x+1)(x^2-x+1)(x^5+x^4+1)$$

*Pero: $x^5+x^4+1=(x^2-x+1)(x^3-x+1)$

$$\to P_{(x)}=(x^2+x+1)^2(x^2-x+1)(x^3-x+1)$$

I) $P_{(x)}$ no tiene factores primos lineales ...(*FALSA*)

II) x^2-x-1 no es factor primo de $P_{(x)}$ ....(*FALSA*)

III) En el factor primo de mayor grado x^3-x+1, el producto de sus términos es $-x^4$ ...(*VERDADERO*)

RPTA: "D"

PROBLEMA 65 :

Factorizar sobre $\mathbb{Q}$ el polinomio:

$P_{(x)}=(x+2)(x-1)(x-3)(x-6)+7x^2-28x+1$

indicar un factor primo.

A) $2x^2-3$ *B)* $x-1$ *C)* x^2+1 *D)* $3x^2+1$ *E)* x^2-4x+5

RESOLUCIÓN:

* Multiplicando convenientemente:

$$P_{(x)}=(x+2)(x-6)(x-1)(x-3)+7(x^2-4x)+1$$

$$\to P_{(x)}=(x^2-4x-12)(x^2-4x+3)+7(x^2-4x)+1$$

* Haciendo:

$x^2-4x=a$

$\to P=(a-12)(a+3)+7a+1$

$\to P=a^2-2a-35$

$P=(a-7)(a+5)$ reponiendo variables.

$P_{(x)}=(x^2-4x-7)(x^2-4x+5)$

* Buscando un factor primo es: x^2-4x+5

RPTA: "E"

PROBLEMA 66 :

Los polinomios:

$P_{(x)}=x^4+2x^3-x-2$

$Q_{(x)}=x^3+6x^2+11x+6$

tienen un factor común. Indicar la suma de coeficientes de dicho factor común

A)-1 *B)0* *C)3* *D)4* *E)5*

RESOLUCIÓN:

* Factorizando cada polinomio para encontrar el factor común:

$P_{(x)}=x^4+2x^3-x-2$; agrupando:

$\to P_{(x)}=x^3(x+2)-(x+2)\to P_{(x)}=(x+2)(x^3-1)$

$\to P_{(x)}=(x+2)(x-1)(x^2+x+1)$

$Q_{(x)}=x^3+6x^2+11x+6$

* Por divisores binómicos:

	1	6	11	6
-1		-1	-5	-6
	1	5	6	0

($1\ 5\ 6$: $q_{(x)}$)

$\to Q_{(x)}=(x+1)q_{(x)}$

$Q_{(x)}=(x+1)(x^2+5x+6)$

x 3
x 2

$\to Q_{(x)}=(x+1)(x+3)(x+2)$

* De aqui observamos que el factor común a $P_{(x)}$ y $Q_{(x)}$ es $(x+2)$, siendo 3 la suma de sus coeficientes

RPTA: "C"

PRIMERA PRACTICA DIRIGIDA

01 Factorizar : $P(x)=-2x^3+3x^4-4x^5+5x^6$

Indicar uno de sus factores.

A) x^4 *B)2* *C)* x^6 *D)* x^3 *E)4*

02 Factorizar :

$$P(x,y)=x^4+y^4+x^2+y^4x^2$$

Indicar uno de sus factores.

A) x^2+y^4 *B)* $x+y$ *C)* $x-y$ *D)* x^2-1 *E)* x^2

03 Factorizar : $P(x,y)=25x^2y+15xy^2+20xy$

Indicar uno de sus factores.

A) x *B)* y^2 *C)* $5x+4y+3$ *D)* x^2 *E)5*

04 Factorizar: $P(x)=14x^7+12x^6-10x^5$

Indicar uno de sus factores.

A) x^6 *B)* x^8 *C)* x^5 *D)2* *E)* x^9

05 Factorizar : $P(x,y)=ax-bx+ay-by$

Indicar uno de sus factores.

A) a B) $x-y$ C) x D) y E) $x+y$

06 Factorizar: $P(x)=4x^2-25$

Indicar uno de sus factores.

A) $2x$ B) $2x-25$ C) $2x-5$ D) $2x+3$ E) 5

07 Factorizar: $P(x)=x^2-14x+49$

Indicar uno de sus factores.

A) $x-7$ B) $+7$ C) $x-49$ D) x E) $x+49$

08 Factorizar : $P(x,y)=36x^2-48xy^2-144xy$

Indicar uno de sus factores.

A) y B) x C) 12 D) xy E) x^2y

09 Factorizar: $P(x,y)=5x^4-9y^4a^2+5a^2x^2-9x^2y^4$

Indicar uno de sus factores.

A) a^2-x^2 B) a^2+x^2 C) x^2 D) a^2y^2 E) $a+x$

10 Factorizar: $P(x,y)=x^2+y^2+x+y^2x$

Indicar uno de sus factores.

A) x B) $x+y$ C) $x+y^2$ D) y E) $x-y$

11 Factorizar : $P(x)=x^{2a+b}+5x^{a+b}+6x^b$

Indicar uno de sus factores.

A) x^a B) x^{2a} C) $5x^b$ D) x^b E) x^{a+b}

12 Factorizar : $P(x)=a(x+1)-b(x+1)-x-1$

Indicar uno de sus factores.

A) a B) b C) $x+1$ D) $x-1$ E) x

13 Factorizar : $x^4-(x^2-1)^2$

Indicar uno de sus factores.

A) $2x^2-1$ B) $2x^2$ C) x^2 D) x E) x^4

14 Factorizar : $P(a,b)=a^2(a^2-b^2)-(2a-1)(a^2-b^2)$

Indicar uno de sus factores.

A) $a-b$ B) a C) $a-b^2$ D) $a+1$ E) b

15 Factorizar : $P(x)=(a^2+y)^2-(a^2-y)^2$

Indicar uno de sus factores.

A) y B) a^2+y C) a^2-y D) $a+y$ E) $a-y$

16 Factorizar : $P(x)=x^a+2x^{a+2b}+3x^{a+3b}$

Indicar uno de sus factores.

A) x^b B) x^{2b} C) x^{3b} D) x^a E) $2x^a$

17 Factorizar : $(x+z)^2-(y-w)^2$

A) $(x+z+y-w)(x+z-y+w)$

B) $(x+z+y+w)(x+y-z-w)$

C) $(x+y)(y+w)$

D) $(x+y+z+w)(x-y+z-w)$

E) $(x+z)^2$

18 Factorizar : $a^2+2ab+b^2-x^2$

Indicar uno de sus factores.

A) $a+b$ B) $a+b-x$ C) $a-b-x$

D) $a-b+x$ E) $(a+b)^2$

19 Factorizar: $P(a,b)=(a-b)^2-(a+b)^2$

Indicar uno de sus factores.

A) 4 B) -4 C) a D) $a+b$ E) $a-b$

20 Factorizar : $P(x,y)=25x^2+70xy+49y^2$

Indicar su factor primo.

A) $5x+49$ B) $5x+7y$ C) $5x-7y$

D) $5x-49y$ E) $25x+7y$

TAREA DOMICILIARIA

01 Factorizar : $P(x)=x^2-64$

Indicar la suma de sus factores primos.

A) x B) $2x$ C) 16 D) 0 E) 8

02 Factorizar : $P(x)=36-x^2$

Indicar la suma de sus factores primos.

A) 12 B) 0 C) $2x$ D) x E) $6+x$

03 Factorizar : $P(x)=x^2-10x+25$

Indicar su factor primo.

A) $x+5$ B) $x-5$ C) x D) $x+2$ E) $x-2$

04 Factorizar:

$P(m,n)=12m^2n+24m^2n^2-36m^4n^3+48m^5n^4$

Indicar uno de sus factores.

A) 12 B) m^2 C) m^2n D) mn^2 E) m^4n^3

05 Factorizar : $P(x,y)=3x^2-7y^2a+3ax-7xy^2$

Indicar uno de sus factores.

A) $a+x$ B) $3x+7$ C) x D) y E) $x+7y^2$

SEGUNDA PRACTICA DIRIGIDA

01 Factorizar : $x^2-18x+65$

Indicar uno de sus factores.

A) $x+5$ B) $x+13$ C) $x-13$ D) $x+8$ E) $x-6$

02 Factorizar: $x^2+4x-32$

Indicar uno de sus factores.

A) $x+4$ B) $x-8$ C) $x+8$ D) $x+6$ E) $x-6$

03 Factorizar : x^2-9x+8

Indicar uno de sus factores.

A) $x-8$ B) $x-9$ C) $x+8$ D) $x+1$ E) $x-7$

04 Factorizar : $x^2+7x+12$

Indicar uno de sus factores.

A) $x-3$ B) $x+7$ C) $x+4$ D) $x+12$ E) $x-4$

05 Factorizar : $x^2+15x+54$

Indicar uno de sus factores.

A) $x-6$ B) $x-9$ C) $x+9$ D) $x+27$ E) $x+18$

06 Factorizar : $x^2-8x-48$

Indicar su factor primo.

A) $x-4$ B) $x+12$ C) $x-16$ D) $x+24$ E) $x-12$

07 Factorizar : $8x^2-2x-15$

Indicar uno de sus factores.

A) $2x+5$ B) $4x-3$ C) $3x-2$ D) $5x+4$ E) $2x-3$

08 Factorizar : $24x^2+2x-15$

Indicar uno de sus factores.

A) $4x-3$ B) $6x-3$ C) $4x+5$ D) $4x+3$ E) $6x-5$

09 Factorizar : $(a+b)^2-6(a+b)-7$

A) $(a+b-7)(a+b+1)$ B) $(a+b+7)(a+b-1)$

C) $(ab-7)(ab+1)$ D) $(a-b-7)(a+b+1)$

E) $(a+b-7)(a+b-1)$

10 Factorizar : $4a^2+15a+9$

A) $(2a+3)(a+3)$ B) $(2a+9)(a+1)$

C) $(4a+3)(a+3)$ D) $(2a+1)(a+9)$

11 Factorizar : $21x^2+11x-2$

A) $(7x+1)(3x-2)$ B) $(7x-1)(3x+2)$

C) $(9x+2)(x+2)$ D) $(9x+2)(x+4)$

E) $(7x+2)(3x-1)$

12 Factorizar : $2x^2+29x+90$

A) $(2x+10)(x+9)$ B) $(2x+9)(x+10)$

C) $(2x+30)(x+3)$ D) $(2x+45)(x+2)$

E) $(2x+18)(x+5)$

13 Factorizar : $R_{(x,y)}=8x^2+10xy+3y^2+y-2$

Indicar uno de sus factores primos.

A) $4x+3y-2$ B) $2x-y-1$ C) $2x-y+1$

D) $4x+3y+2$ E) $4x-3y+2$

14 Factorizar : $P_{(x)}=x^7+x^5-x^3+x^2-2x+1$

Indicar un factor primo.

A) x^4+x^2-1 B) x^4+x-1 C) x^3-x+4

D) $x-1$ E) x^3-x^2+1

15 Factorizar :

$$P_{(a,b,c)}=(3a)^2+3a-4b^2+2b-c^2+c+4bc$$

Indicar un factor.

A) $3a+2b-c$ B) $3a+2b$ C) $3a$ D) $2b-c$ E) $2a-b$

16 Factorizar : $P_{(x)}=x^4-20x^2+64$

Indicar un factor.

A) $x+2$ B) $x-3$ C) $x+5$ D) $x+7$ E) $x-18$

17 Factorizar :

$$3(ac^2+b^2c+a^2b)+9(a^2c+c^2b+b^2a)+28abc$$

Indicar un factor.

A) $c+2a$ B) $c+3a$ C) $c+5a$ D) $c+7a$ E) $c+11a$

18 Factorizar :

$$P_{(x)}=3x^4+4x^3+15x^2+12x+18$$

Indique el coeficiente del término lineal de uno de sus factores primos.

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

19 Factorizar : $P_{(x)}=x^3+x^2-5x+3$

Indicando el número de factores primos.

A) 3 B) 5 C) 2 D) 9 E) 11

20 Factorizar : $F_{(x)}=16x^3-20x^2-8x+3$

Indicar el factor cuadrático de mayor suma de coeficientes.

A) $8x^2+2x-1$ B) $4x^2-4x-3$ C) $8x^2-14x+3$

D) $8x^2+2x+3$ E) $16x^2$

21 Factorizar : $P_{(x)}=2x^4+4x^3+3x^2+x-3$

Dar como respuesta la suma de coeficientes de uno de sus factores primos.

A) 0 B) 2 C) 7 D) 3 E) 12

22 Factorizar : $P_{(x)}=x^4+2x^2+9$

Proporcionar un factor.

A) $x^2+2x+11$ B) x^2+2x+2 C) x^2+2x+3

D) x^2+2x+4 E) x^2+2x+6

23 Factorizar : $P_{(x)}=x^4+7x^3+17x^2+26x+12$

Indicando la suma de coeficientes de un factor primo.

A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

24 Luego de factorizar : $P_{(x)}=x^4+2x^3+x^2-4$

Indicar verdadero *(V)* o falso *(F)*

I) Tiene *4* factores primos.

II) Tiene 2 factores primos lineales.

III) La suma de coeficientes de un factor primo es *4*.

A) VVV B) VFV C) FVV D) FFV E) FVF

25 Luego de factorizar : $P_{(x)} = 12x^4 - 8x^3 - 7x^2 + 2x + 1$

Indicar lo correcto:

I) Tiene *4* factores lineales.

II) Tiene 2 factores primos monómicos.

III) La suma de coeficientes de un factor es 4.

A)Todas *B)Sólo I* *C)Sólo II* *D)I y II* *E)I y III*

26 Indicar el número de factores primos al factorizar : $P_{(x)} = 2x^5 - 3x^4 + 3x^3 - x^2 - 2x + 1$

A)2 *B)3* *C)4* *D)5* *E)No es factorizable.*

27 Luego de factorizar : $E_{(x)} = 2x^3 + 5x^2 - 7x + 2$

Indicar lo verdadero o falso:

I) Indicar *3* factores primos.

II) Tiene un factor primo mónico.

III) Un factor primo es $x^2 + 2x + 3$.

A)FVF *B)FFF* *C)VFF* *D)VVF* *E)VVV*

28 Luego de factorizar: $H_{(x)} = x^8 + x^6 - x^4 - 5x^2 + 4$

Indicar la suma de coeficientes de sus factores primos.

A)10 *B)2* *C)4* *D)6* *E)8*

29 Indicar la suma de términos lineales de los factores primos de : $F_{(x)} = 2x^4 + x^3 + x^2 - 3x + 1$

A)x *B)2x* *C)3x* *D)4x* *E)5x*

30 Luego de factorizar : $A_{(x)} = 6x^3 + x^2 - 4x$

Indicar lo correcto:

I) Tiene *3* factores primos.

II) Tiene *2* factores primos mónicos.

III) La suma de sus factores primos es $6x - 1$.

A)Todas *B)Sólo I* *C)Sólo II* *D)I y II* *E)I y III*

TAREA DOMICILIARIA

01 Factorizar : $(m+n)^2 - 15(m+n) + 56$

Indicar uno de sus factores.

A) $m+n+7$ *B)* $m+n-8$ *C)* $m-n-8$

D) $m-n-7$ *E)* $m+n+8$

02 Factorizar : $P_{(x)} = x^4 + x^3 - x^2 + 5x - 2$

Indique la suma de factores primos.

A) $2x^2+1$ *B)* $2x^2-1$ *C)* $2x^2-x+1$

D) $2x^2+x+1$ *E)* $2x^2+x+2$

03 Indique la suma de los términos independientes de los factores primos de:

$$P_{(x)} = x^4 + 3x^3 + 12x^2 + 13x + 21$$

A)10 *B)12* *C)22* *D)24* *E)15*

04 Factorizar : $M_{(x)} = x^3 + x^2 + x - 3$

Dar la suma de coeficientes de un factor primo.

A)5 *B)6* *C)3* *D)4* *E)2*

05 Factorizar :

$$P_{(x)} = x^5 - 21x^3 + 16x^2 + 108x - 144$$

E indicar el factor primo repetido.

A) $x-4$ *B)* $x-3$ *C)* $x+3$ *D)* $x-2$ *E)* $x+1$

TERCERA PRACTICA DIRIGIDA

01 Dar la tabla de verdad en:

$$P(x) = (2x+1)(x+5)(x+2)$$

( ) Hay tres factores primos.

( ) $4x + 8$ es la suma de los factores primos.

( ) *6* es la suma de coeficientes de un factor primo

A)VVV *B)VFV* *C)VVF* *D)FVV* *E)VFF*

02 Indicar correcto *(c)* o incorrecto *(i)* en:

$$P(x) = x^2(x^2+1)(x+3)(x+4)^2$$

( ) Hay *4* factores primos.

( ) $(x + 4)$ es un factor primo repetido.

( ) Hay *3* factores lineales.

03 Factorizar:

$$F(x;y;z) = x^2y^3z^4 + x^2y^3z^3 + xy^2z^4 + xy^2z^3$$

indicando el número de factores primos.

A) 4 *B) 5* *C) 6* *D) 3* *E) 7*

04 Factorizar:

$$H(m;n) = x^6n^2 + m^5n^5 + m^4n^3 + m^3n^6$$

A) m^3 *B)* m^2+n^3 *C)* m^3+n^2 *D)* $m+n^2$ *E)* $m+n^3$

05 Factorizar:

$$H(x;y) = x^4y - 5x^3y^2 - 4x^2y^3 + 20xy^4$$

indicando un factor primo.

A) $x+5y$ *B)* $5x-y$ *C)* $x-2y$ *D)* xy *E)* $x+y$

06 Factorizar:

$$F(m;n) = m^2(m^2+3n^2) - n^2(n^2+3m^2)$$

indicando la suma de coeficientes de un factor primo.

A) 1 *B) 2* *C) 3* *D) 4* *E) 5*

07 Factorizar:

$$H(x) = x^2 + 6x + 9 - a^2 - 2ab - b^2$$

indicando un factor primo.

A) $x-a+b-3$ *B)* $x+a-b+3$ *C)* $x-a-b+3$

D) $x + a + b - 3$ E) $x - a - b - 3$

08 Factorizar:

$$T(x) = (x^2 + 5x + 5)^2 - 1$$

Indicar un factor que no le pertenece.

A) $x + 1$ B) $x + 2$ C) $x + 3$
D) $x + 4$ E) $x + 5$

09 Factorizar:

$$G(a; b) = (a + b)^2 + (a - b)^2 + 5ab$$

indicando la media aritmética de sus factores primos.

A) $0,5(a + b)$ B) $1,5(a + b)$ C) $2,5(a + b)$
D) $2(a + b)$ E) $(a + b)$

10 Factorizar los polinomios:

$$P(x) = 6x^2 - 7x - 3;\ Q(x) = 4x^2 + 4x - 15$$

indicando la suma de los factores primos no comunes.

A) $6x + 5$ B) $5x + 4$ C) $4x + 3$ D) $5x + 6$ E) $4x + 5$

11 $(2x + 3)$ es el factor común de los polinomios:

$$P(x) = ax^2 + 17x + 12;\ F(x) = 10x^2 + bx + 9$$

Calcular: $\sqrt{1-a+b}$

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

12 Indicar la suma de coeficientes de un factor primo de:

$$F(x; y) = (x+y+5)^2 + 6(x+y)+23$$

A) 14 B) 12 C) 15 D) 13 E) 16

13 Factorizar:

$$F(u) = u^3 + u^2 + u - 3$$

indicando un factor primo de la suma de sus factores primos.

A) $u-1$ B) $u+3$ C) $u-2$ D) $u+2$ E) $u-3$

14 Un factor primo de: $F(x) = x^3 - 7x + 6$ es de la forma $(x + a)$, $a < -1$.

Calcular a^a.

A) -4 B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{-1}{4}$ D) $\frac{1}{16}$ E) 4

15 Factorizar: $P(x) = x^3 + 10x^2 + 29x + 20$

indicando la suma de los *T.I.* de todos los factores primos.

A) 12 B) 10 C) 9 D) 15 E) 8

16 Factorizar:

$$H(x)=x^3+19x^2+71x-91$$

indicando la suma de coeficientes de un factor primo

A) 2 B) 4 C) 10 D) 6 E) 10

17 Factorizar :

$$G(x) = (3x^2 - 4x)^2 - 19(3x^2 - 4x) + 60$$

indicando la suma de los factores primos no mónicos.

A) $6x+7$ B) $4x+9$ C) $5x+8$
D) $6x+5$ E) $5x + 6$

18 Factorizar:

$T(a;b;c)= a(bc+b^2+c^2)+b(ab+bc+c^2)$ e indicar un factor primo

A) $a+c$ B) $ac + bc+b^2$ C) $b+c$
D) $ab+bc+c^2$ E) $ab+c$

19 Factorizar:

$$G(x)= m^2nx^4+(m^3 - n^3)x^2 - mn^2$$

e Indicando un factor primo

A) mx^2+n B) $nx+m$ C) nx^2-m D) $mx-n$ E) $x+mn$

20 Factorizar:

$$P(t) = (t + 1)(t + 2)(t + 5)(t + 6)- 12$$

indicando la suma de sus factores primos lineales.

A) $2t+3$ B) $4t$ C) $2t+7$ D) $2t+5$ E) $4t-1$

CUARTA PRACTICA DIRIGIDA

01 Factorizar el polinomio:

$$A(x; y)=15x^2+11xy+2y^2+16x+6y+4$$

A) $(5x + y + 2)(3x + 2y + 2)$
B) $(5x + 2y + 2)(3x + y + 2)$
C) $(3x + y + 2)(5x + y + 2)$
D) $(3x + 2y + 1)(5x + y + 4)$
E) $(5x + y + 1)(3x + 2y+ 4)$

02 Factorizar el polinomio:

$$E(m; n) = 2m^2-15n^2 + 7mn + 22n- 6m-8$$

indicando uno de sus factores primos.

A) $2m + 3n + 4$ B) $m - 5n + 2$ C) $2m - 3n + 2$
D) $m + 5n + 4$ E) $2m + 5n - 2$

03 A continuación se muestra el proceso de factorizar un polinomio mediante el aspa doble especial: $x^4 + 7x^3 + 14x^2 + 7x + 1$



Calcular: m^n

A) 16 B) 64 C) 36 D) 81 E) Hay 2 correctas

04 Si un factor primo del Polinomio:

$$L(x) = x^4 + 3x^3 + 7x^2 + 7x + 6$$

tiene la forma: $ax^2 + bx + c$, calcular $a.b.c$, siendo «c» par.

A) 2 B) 6 C) 4 D) 8 E) 12

05 Qué se puede afirmar acerca de las raíces del polinomio: $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$

A) Son pares
B) Son impares
C) Son negativas
D) Algunas son positivas y otras negativas
E) Son consecutivas

06 Encontrar un cero del polinomio:

$$S(n) = 7n^3 - 57n^2 + 57n - 7$$

A) -1 B) -1/7 C) -7 D) 7 E) 49

07 Proporcionar el término independiente de uno de los factores primos de:

$$P(x) = 6x^2 + 19xy + 15y^2 - 11x - 17y + 4$$

A) -4 B) 1 C) 4 D) 5y - 4 E) 3y + 1

08 Señalar un factor primo trinomio del polinomio:

$$L(x; y) = 24x^3y^2 + 60x^2y^2 - 6xy^4 + 6xy^3 + 36xy^2$$

A) 2x + 2y + 1 B) 2x - y + 2 C) 2x + y + 3
D) 2x + y - 2 E) 2x - y + 3

09 Un factor primo del polinomio:

$$E(x; y) = 2x^2 - 5xy - 12y^2 + 14x + 21y$$

es de la forma: $px + qy$. Calcular: $p^2q + pq^2$

A) 15 B) 20 C) 25 D) 30 E) 35

10 Mostrar el resultado de factorizar:

$$P(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1$$

A) $(x+1)^2(x^2-x+1)$ *B)* $(x-1)^2(x^2+x+1)$
C) $(x+1)^2(x^2+x-1)$ *D)* $(x-1)^2(x^2-x-1)$ *E)* $(x-1)^4$

11 Después de factorizar el polinomio:

$$G(x) = x^4 + 2x^3 + 5x + 2$$

mostrar la diferencia de sus factores primos.

A) 4x B) - 4x C) 4x - 1
D) - 4x + 1 E) Dos son correctas

12 Indicar el factor primo que se repite en:

$$A(a) = a^3 - 5a^2 + 3a + 9$$

A) a + 1 B) a - 1 C) a + 3 D) a - 3 E) a + 9

13 Si el factor primo cuadrático del polinomio:

$$x^3 - 3x^2 + 4x - 2$$

adopta la forma: $x^2 + mx + n$. marcar la alternativa correcta.

A) $m = n$ *B)* $m+n=0$ *C)* $m.n = 4$ *D)* $m^n = -4$ *E)* $\frac{m}{n} = -2$

14 Calcular el valor numérico de un factor primo de la expresión:

$$6x^2 - 25y^2 + 20z^2 - 5xy - 5yz - 23xz$$

para: $x = 0; y = 1; z = 2$

A) -1 B) 5 C) -15 D) 3 E) 0

15 Mencionar el término cuadrático de uno de los factores primos de:

$$S(x) = 6x^6 - 5x^5 - 6x^4 - 13x^2 - 6$$

A) $2x^2$ *B)* $-2x^2$ *C)* $3x^2$ *D)* $-x^2$ *E)* x^2

16 Factorizar el polinomio:

$$D(x) = 2x^4 + x^3 - 16x^2 + 8x - 1$$

Dar como respuesta la factorización de la suma de sus factores primos.

A) x(2x-1) B) 2x(x-3) C) x(2x-3)
D) 2x(3x-1) E) x(3x-2)

17 Señalar el término lineal de uno de los factores primos de:

$$Q(m) = m^4 + 6m^2 + 25$$

A) 2m B) m C) -m
D) 3m E) Más de una es correcta

18 Factorizar al polinomio:

$$N(a; b) = 6a^4 + 6b^8 + 4ab^6 + 11a^2b^4 + a^3b^2$$

indicando el resultado.

A) $(2a^2+ab^2+3b^4)(3a^2+2ab^2+2b^4)$
B) $(2a^2-ab^2+3b^4)(3a^2+2ab^2+2b^4)$
C) $(2a^2+ab^2+3b^4)(3a^2-2ab^2+2b^4)$
D) $(2a^2+ab^2-3b^4)(3a^2+2ab^2-2b^4)$
E) $(2a^2-ab^2-3b^4)(3a^2-2ab^2-2b^4)$

19 Si un factor primo de la expresión:

$$x^4 - (a+1)x^2 + (a-2a^2)x + a^3(1-a)$$

se iguala a cero se obtiene:

A) $x^2 + x = a^2$ *B)* $x^2 - x = -a^2$ *C)* $x^2 + x = a^2 - a$
D) $x^2 - x = a - a^2$ *E)* $x^2 + x = a - a^2$

20 Transformar al polinomio:

$$4n^5 - 29n^3 - 24n^2 + 7n + 6$$

en una multiplicación indicada de factores primos.

A) $(n-1)(n+2)(n+3)(2n+1)(2n-1)$
B) $(n+1)(n+2)(n-3)(2n+1)(2n-1)$
C) $(n-1)(n+2)(n+3)(2n+1)^2$
D) $(n+1)(n-2)(n+3)(2n-1)^2$
E) $(n+1)(n+2)(n-3)(2n+1)^2$

QUINTA PRACTICA DIRIGIDA

01 ¿Cuántos valores admite "n" para que el polinomio:

$$P(x) = (x-n)(x-6)^{n-5}(2x-3)^{12-n}$$

admite dos factores primos repetidos?

A)6 B)7 C)5 D)4 E)8

02 Luego de factorizar:

$$P(x;y) = x^2y^3(x^2+xy) - x^2y^3(xy+yz)$$

dar como respuesta la suma de sus factores primos.

A) $3x+2y+z$ B) $3x+2y-z$ C) $2x+y-z$
D) $2x+y+z$ E) $x+y+z$

03 Calcule la suma de coeficientes de un factor primo de:

$$Q(x;y) = x^2 - 25z^2 + 6xy + 9y^2$$

A)4 B) 9 C) $4+5z$ D) $4-5z$ E) Hay dos correctas

04 Factorizar:

$$M(a;b;c) = a^2 - b^2 - c^2 + 2(a+b-c+bc)$$

y dar como respuesta la suma de sus factores primos.

A) $2a$ B) $2b+c$ C) $2a+2$ D) $3a+c$ E) $2a+b+1$

05 Cuántos factores lineales admite la expresión:

$$J(x;y) = x^7 - x^3y^4 + x^4y^3 - y^7$$

A) 1 B)2 C) 3 D)4 E)5

06 Un factor primo del siguiente polinomio:

$$R(x;y;z) = \frac{1}{3}[8(x+y+z)^3 - (x+y)^3 - (y+z)^3 - (z+x)^3]$$

A) $x+y$ B) xyz C) $x^3+y^3+z^3$ D) $x+y+z$ E) $xy+2z$

07 Un factor primo del siguiente polinomio:

$[(x-y+z)(x-y-z)+1]^2 - 4(x-y)^2$ es:

A) $x+y+z+1$ B) $x-y+z+1$ C) $x-y+z$
D) $x-y+z+2$ E) $z+y-x+2$

08 Sabiendo que: x^2+2x+3, es un factor de:

$$P(x) = x^4 + x^3 + 6x^2 + mx + n$$

entonces es verdad que:

A) $m+n=21$ B) $mn<0$ C) $m<0$
D) n es par E) $n-2m=1$

09 Calcule el número de factores cuadráticos de: $P(x) = 4x^4 - 37x^2 + 9$

A)2 B)3 C)4 D)5 E)6

10 Siendo "n" el valor que debe admitir "x" para que los factores de primer grado de:
$T(x) = 2x^2 + 7x + 6$, tengan el mismo valor numérico, señale un factor de:

$$E(a;b;c) = a(a+c) + nb(b+c)$$

A) $a+b$ B) $b+c$ C) $c+a$
D) $a+b+c$ E) $a+b-c$

11 Indique un factor de:

$$R(x) = 2(x+21)^2 + (x+20)^2 - (x+19)^2 - 1$$

A) $2x+46$ B) $x-20$ C) $2x-46$ D) $x-23$ E) $x+9$

12 Diga usted cuál es el factor común de las expresiones:

$A(x) = x^4 - 8x^2 + 16$ $B(x) = (x+1)(x^2-3) - x - 1$
$C(x) = 2x^4 + 16x$

A) $x-2$ B) $x+2$ C) $x+1$ D) $x-1$ E) $x-3$

13 Luego de factorizar:

$T(x) = (x-1)^6 - (x-1)^3 - 2$ señale un factor.

A) $x+1$ B) $x+2$ C) $x+3$ D) x E) $x-3$

14 Sea el polinomio:

$$Q(n) = (n^2+3n-9)^2 + n^2 + 3n - 11$$

Dar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

( ) $(n-5)$ es un factor primo.
( ) (n^2+3n-7) es un factor primo.
( ) Presenta dos factores primos lineales.

A)FFV B)FVV C)FVF D)VVF E)VFF

15 Si a uno de los factores primos de:

$$P(x) = (x+4)(x+5)(x-3)(x-2) + 6$$

se le suma "$3x$", se obtienen dos factores primos lineales. Entonces la suma de ellos es:

A) $2x+5$ B) $2x-5$ C) $2x-3$ D) $2x+3$ E) $2x$

16 Si: $P(x;y;z) = (ax+by+cz)(mx+ny+pz)$, $P \in \mathbb{Z}$, representa al polinomio:

$P(x;y;z) =$
$2[(x+y+z)^2 + (x+y-z)^2] + 5(x^2+y^2-z^2+2xy)$

luego de haber sido factorizado, calcular el valor de:

$$E = \frac{a+b+c}{m-n+p}$$

A) 1/9 B)3/7 C) 5/7 D) 7/5 E) 9/5

17 Si: $P(x;y;z) = (x+2y+3z)(x+3y+5z) + 2yz$ es un polinomio factorizable, entonces un factor primo es:

A) $x+y+2z$ B) $x+y+z$ C) $x+y+3z$
D) $x+2y+5z$ E) $x+2y+z$

18 Un factor del siguiente polinomio:

$(x+y)^2(x^2+3xy+y^2)-6xy(x^2+xy+y^2)$ es:

A) $x+y$ B) $x-y$ C) x^2+xy+y^2
D) x^2-xy+y^2 E) $x+xy+y$

19 Si: $P(x;y)=x^3+28y^3+3xy(x+y)$

es un polinomio factorizable, entonces indique la suma de coeficientes de uno de sus factores primos.

A) 3 B) 5 C) 6 D) 9 E) 10

20 Si: $P(x)=(3x+2)(4x-3)(x-1)(12x+11)-14$

es un polinomio factorizable en los racionales, entonces un factor primo es:

A) $x-1$ B) $12x^2-4x-3$ C) $13x+12$
D) $12x-13$ E) $2x-1$

SEXTA PRACTICA DIRIGIDA

01 La suma de los factores primos del siguiente polinomio:

$H(x;y)=15x^2+7xy-2y^2-6x-17y-21$ es:

A) $8x+y+4$ B) $8x-y-4$ C) $8x+y-4$
D) $8x-y+4$ E) $8x+4y+1$

02 Luego de factorizar:

$$N(x;y)=6x^2+19xy+15y^2-11x+4-17y$$

indicar un factor.

A) $2x+3y-1$ C) $3x-5y+4$ E) $3x+5y+4$
B) $2x-3y+1$ D) $3x+y+4$

03 En el siguiente esquema:

$3x^2-2xy-8y^2+22x+6y+35$

ax by $+7$
x $-2y$ $+c$

se observa el procedimiento de factorización por el criterio de aspa doble. Entonces el valor de $ab+c$ es:

A) 14 B) 15 C) 17 D) 18 E) 20

04 Calcular el valor numérico del factor primo de mayor grado respecto de "y" que se obtiene al factorizar:

$$P(x;y)=3x^4-2x^2y^2-7x^2+8y^2-20$$

para: $x=1 \wedge y=0$

A) -8 B) 6 C) -6 D) 8 E) 12

05 Un factor primo del siguiente polinomio:

$P(x;y;z)=x^4-x^2y+5yz^2-x^2z^2-2y^2-2z^4$ es:

A) x^2-y+3z^2 B) x^2+y+6z^2 C) x^2-y+4z^2
D) x^2+y-2z^2 E) $x+y+z$

06 Calcular el número de factores primos del siguiente polinomio:

$$P(x)=x^4-2x^3+2x^2-7x+6$$

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

07 Factorizar:

$$F(x)=x^4-4x^3+11x^2-14x+10$$

y dar como respuesta el mayor *T.I.* de uno de sus factores primos.

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

08 Cuántos factores cuadráticos admite:

$$F(x)=25x^4+5x^3-x-1$$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

09 Si luego de factorizar:

$$M(x)=2x^4-3x^3-1$$

un factor se evalúa para $x=\sqrt{2}$ se obtiene:

A) $2-\sqrt{2}$ B) $1-\sqrt{2}$ C) $5+\sqrt{2}$
D) $1+\sqrt{2}$ E) $3+\sqrt{2}$

10 Si la suma de los factores primos de:

$M(x;y)=x^4-2x^3y-39x^2y^2+8xy^3+140y^4$

es: $ax+by$, entonces podemos afirmar que:

A) $\sqrt[3]{ab}=2$ B) $a+b=-2$ C) $a-b=2$
D) $b^a=16$ E) $a^b=16$

11 Si la suma de los factores primos de:

$P(x)=x^3-5x-2$, tiene la forma: mx^2+nx+p, calcular el valor de:

$$R=(m-n+p)^{p-n}$$

A) -1 B) 0 C) 1 D) 3 E) 9

12 Sea el polinomio: $P(x)=6x^3-x^2-5x+m$. Si: $P(0;5)=0$, entonces un factor primo de dicho polinomio es:

A) $2x+1$ B) $x+2$ C) $3x-1$ D) $5x-1$ E) $3x-2$

13 Al factorizar el polinomio:

$$P(x)=3x^3-21x+18$$

se obtiene: $a(x-b)(x-c)(x-d)$, con a, b, c y d constantes enteras, tal que: $b<c<d$. Calcular el valor de:

$$a-b+c-d$$

A) -7 B) 3 C) 5 D) 6 E) 9

14 Luego de factorizar el polinomio:

$$A(x) = 3x^3 - 2x^2 - 19x - 6$$

dar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

( ) Tiene dos factores primos mónicos.

( ) La suma de sus factores primos es $5x$.

( ) Todos sus factores primos son lineales.

A)VVF B)FVF C)VVV D)FFV E)FVV

15 Luego de factorizar:

$$M(x) = x^5 + x^4 - 2x^3 - 2x^2 + x + 1$$

se obtiene: $(x-1)^{m-2}(x+1)^{n+1}$. Entonces el valor de "mn" es:

A) 3 B) 6 C) 8 D) 12 E) 15

16 Señale un factor de:

$$P(x) = 6x^5 + 41x^4 + 97x^3 + 97x^2 + 41x + 6$$

A) $x-1$ B) $x-2$ C) $2x+1$ D) $3x^2+7x+2$ E) $3x+1$

17 Si $(a+1)x^2 + (b-3)y^2$, representa a la suma de los factores primos de:

$P(x;y) = 64x^4 + y^4$ calcular el valor de: ab^{-1}

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

18 Un factor primo del siguiente polinomio:

$P(x) = x^5 + 81x + 243$ es:

A) x^2+3x+9 B) x^2-3x+9 C) x^3+3x^2+27
D) x^2-x+1 E) x^3-3x^2+9

19 Siendo $(b+1) \wedge (a-1)$ cuadrados perfectos, factorizar:

$$M(x) = x^6 - (a+b+1)x^4 + (ab+2a-1)x^2 - a + b - ab + 1$$

y señale aquel que no es factor de $M(x)$.

A) $x+\sqrt{b+1}$ B) $x-\sqrt{a+1}$ C) $x-\sqrt{b-1}$

D) x^2-1 E) x^2+1-a

20 Indicar un factor de:

$$S(x) = (x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)^2 - x^5$$

A) $x^4+x^3+x^2+x+1$ B) x^9+1 C) x^5+1
D) x^3+x^2+x+1 E) x^4+1

CLAVES

FACTORIZACIÓN PRIMERA PRÁCTICA				
01) D	02) A	03) A	04) C	05) E
06) C	07) A	08) B	09) B	10) C
11) D	12) C	13) A	14) A	15) A
16) D	17) A	18) B	19) C	20) B
01) B	02) A	03) B	04) C	05) A

SEGUNDA PRACTICA				
01) C	02) E	03) A	04) C	05) C
06) E	07) C	08) A	09) A	10) E
11) B	12) B	13) A	14) B	15) A
16) A	17) B	18) C	19) C	20) A
21) C	22) C	23) D	24) C	25) D
26) B	27) C	28) D	29) C	30) B
01) B	02) D	03) A	04) B	05) D

CLAVES DE LA TERCERA PRACTICA									
1)A	2)A	3)B	4)E	5)C	6)B	7)C	8)E	9)B	10)D
11)C	12)A	13)D	14)B	15)B	16)D	17)A	18)D	19)D	20)C

CLAVES DE LA CUARTA PRACTICA									
1)B	2)C	3)E	4)A	5)E	6)D	7)D	8)E	9)D	10)E
11)E	12)D	13)B	14)C	15)A	16)E	17)A	18)B	19)E	20)B

CLAVES DE LA QUINTA PRACTICA									
1)C	2)B	3)E	4)C	5)B	6)D	7)B	8)E	9)E	10)D
11)A	12)B	13)D	14)B	15)A	16)C	17)D	18)D	19)B	20)D

CLAVES DE LA SEXTA PRACTICA									
1)C	2)A	3)C	4)D	5)D	6)D	7)E	8)B	9)B	10)D
11)E	12)E	13)C	14)C	15)C	16)E	17)C	18)A	19)C	20)A

PROBLEMA RECREATIVO 1

El dueño de la tienda de mascotas trata de persuadir a dos madres y dos hijas, que han entrado juntas, para que compren los tres gatitos que se pueden ver en el escaparate. Al final logra realizar la venta y cada cliente sale de la tienda con su pequeño gatito. Ningún cliente comparte un gatito y no había más gatitos en la tienda que los tres mostrados.

¿Cómo es que tres gatitos pueden ser repartidos entre dos madres y dos hijas de manera que cada una tenga su propia mascota individual?



PROBLEMA RECREATIVO 2

Sustituya cada figura geométrica por un número de tal manera que no haya contradicción en las operaciones realizadas y que cada figura tenga un único número.

□ + 8 = ○

○ ÷ 5 = ◺

◺ × 7 = ⏢

⏢ − 10 = 11



OBJETIVOS :

Aprender a calcular el *M.C.D.* y el *M.C.M.* de dos o más polinomios.

INTRODUCCIÓN

Todo factor es divisor de un producto así:

* x es factor de $3x$, entonces x es divisor de $3x$ ya que $(3x)\div(x)=3$

* b^2 es factor de $5ab^2$, entonces b^2 es divisor de $5ab^2$,dado que $(5ab^2)\div(b^2)=5a$

«Así el máximo común divisor(MCD) como su nombre lo indica es el mayor de los factores comunes»

Un múltiplo es un número que contiene exactamente a otro . Así **18** es múltiplo de **6** porque $18\div6=3$; y **18** es múltiplo de **3** porque $18\div3=6$; De la misma forma , una expresión algebraica será múltiplo de otra, cuando la contiene exactamente . Así $10x^2y$ es múltiplo de $5xy$ porque $10x^2y\div5xy = 2x$; o también , $10x^2y$ es múltiplo de $2x$ porque $10x^2y\div2x=5xy$.

«Así el mínimo común múltiplo(MCM) como su nombre lo indica es el menor número que contiene exactamente a otros»

EL MÁXIMO COMUN DIVISOR (M.C.D)

El máximo común divisor de dos o más polinomios es el polinomio de menor grado y menor coeficiente numérico (prescindiendo de los signos) que es factor (o divisor) de los polinomios dados).

* Para hallar el *M.C.D.* de varios polinomios se procede de la forma siguiente:

I)Se descompone cada polinomio en el producto de sus factores primos(se factoriza).

II) El M.C.D. es el producto obtenido al tomar todos los factores comunes elevados a la menor potencia con la que entran a formar parte en cada uno de los polinomios.

EJEMPLOS:

* Dados los monomios :

$$A=24a^5b^2c^6 ; B=18a^3b^4c^5$$

* Como : $A=2^3\times3a^5b^2c^6 ; B=2\times3^3a^3b^4c^5$

* Luego : $MCD(A,B)=2\times3a^3b^2c^5$

* Finalmente : $MCD(A,B)=6a^3b^2c^5$

* El cual, es la expresión de mayor **G.A.** que está contenida en **A** y **B** simultáneamente.

EJEMPLO 2 :

* El *M.C.D.* de:

$A=2^33^2(x-y)^3(x+2y)^2$

$B=2^23^3(x-y)^2(x+2y)^3$

$C=3^2(x-y)^2(x+2y)$

es: $MCD(A;B;C)=3^2(x-y)^2(x+2y)$

EJEMPLO 3 :

Determinar El *M.C.D.* de:

$A=2x^2+2xy \wedge B=4x^2-4ay$

RESOLUCIÓN:

*factorizando : $A=2x(x+y)$

$B=2^2x(x-y)$

$\rightarrow MCD(A;B)=2x$

OBSERVACIÓN :

Dos o más polinomios son primos entre sí, si su *M.C.D.* es la unidad ±1.

EJEMPLOS:

* Se tienen los polinomios :

$P=4x(x+1)^5(2x-1)(x^2+x-1)^4$

$Q=5x^2(x+1)^3(2x+1)(x^2+x-1)^6$

* Resulta: $M.C.D.(P,Q)=x(x+1)^3(x^2+x-1)^4$

* Siendo este polinomio, el de mayor **G.A.** que está contenida en las expresiones **P** y **Q**.

EJERCICIO :

Hallar el *MCD* de: $A=a^3+a^2-a-1$

$B=a^3-a^2-a+1$

$C=3a^2+5a+2$

RESOLUCIÓN:

Factorizando los polinomios, se obtiene:

$A=(a-1)(a+1)^2$

$B=(a+1)(a-1)^2$

$C=(3a+2)(a+1)$

$\Rightarrow$ El *MCD* de los polinomios es $(a+1)$

EL MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO (M.C.M)

En dos o más polinomios, es el polinomio de mayor grado y mayor coeficiente (prescindiendo de los signos) del cual es factor (o divisor) cada uno de los polinomios dados.

*Para hallar el *M.C.M.* de varios polinomios se procede de la forma siguiente:

I)Se descompone cada polinomio en el producto de sus factores primos(se factoriza).

II)El M.C.M. es el producto obtenido al tomar todos los factores, comunes y no comunes, elevados a la mayor potencia con la que entran a formar parte en cada uno de los polinomios.

EJEMPLO 1:

*Dado los monomios:

$A=160x^7y^3z^2;B=192x^4y^6w$

*Como: $A=2^5\times 5x^7y^3z^2;B=2^6\times 3x^4y^6w$

*Luego: $MCM(A,B)=2^6\times 3\times 5x^7y^6z^2w$

* Finalmente: $MCM(A,B)=960x^7y^6z^2w$

* El cual, es la expresión de menor *G.A.* que contiene exactamente a *A* y *B* simultáneamente.

EJEMPLO 2 :

* Se tienen los polinomios:

$P=5x^3(x+1)^2(3x+1)(x^2-x+1)^7$

$Q=3x^2(x+1)^4(3x-1)(x^2-x+1)^5$

* Se obtiene:

$MCM(P,Q)=15x^3(x+1)^4(3x+1)(3x-1)(x^2-x+1)^7$

* Siendo este polinomio, el de menor grado absoluto que contiene a las expresiones *P* y *Q*.

EJEMPLO 3:

* El *M.C.M.* de: $A=2^3 3^2(x-y)^3(x+2y)^2$

$B=2^2 3^3(x-y)^2(x+2y)^3$ y $C=3^2(x-y)^2(x+2y)$

* es: $2^3 3^3(x-y)^3(x+2y)^3$

EJEMPLO 4:

Hallar el *MCD* y *MCM* de:

$P(x)=x^3-5x^2-x+5 \wedge Q(x)=x^4+4x^3-4x-1$

RESOLUCIÓN:

$P(x)=x^3-x-5x^2+5$	$Q(x)=x^4-1+4x^3-4x$
$P(x)=x(x^2-1)-5(x^2-1)$	$Q(x)=(x^2+1)(x^2 1)+4x(x^2-1)$
$P(x)=(x^2-1)(x-5)$	$Q(x)=(x^2-1)(x^2+1+4x)$
$P(x)=(x+1)(x-1)(x-5)$	$Q(x)=(x+1)(x-1)(x^2+4x+1)$
$MCD=(x+1)(x-1)=x^2-1$	$MCM=(x+1)(x-1)(x-5)(x^2+4x+1)$

PROPIEDAD :

Dados dos polinomios cualesquiera *P* y *Q*, se cumple la siguiente identidad polinómica:

$$P_{(x)}\times Q_{(x)}\equiv MCD(P,Q)\times MCM(P,Q)$$

EJEMPLO:

* Dados dos polinomios *P* y *Q*, tales que:

$MCD(P,Q).MCM(P,Q)\equiv(x^2-4)^5(x^2-1)^3$

Si uno de ellos es $(x+2)^2(x-2)^4(x-1)^3$.

Hallar a que es equivalente el otro.

RESOLUCIÓN:

* Por propiedad, se obtendrá:

$P(x)\times Q(x)\equiv(x^2-4)^5(x^2-1)^3$

*Reemplazando el dato para Q, resulta:

$P(x)\times(x+2)^2(x-2)^4(x-1)^3\equiv(x+2)^5(x-2)^5(x+1)^3(x-1)^3$

* Simplificando se tiene:

$P(x)=(x+2)^3(x-2)(x+1)^3$

MÉTODO DE LAS DIVISIONES SUCESIVAS PARA DETERMINAR EL M.C.D.

Dado dos polinomios *P(x)* y *Q(x)* de tal manera que el grado del primer polinomio *P(x)* sea mayor o igual que el grado del segundo polinomio*Q(x)* ordenado en *x*. Se efectuará la división de ***P(x) entre Q(x)*** . si es exacta entonces es el *M.C.D.*

Si la división es inexacta ; se divide el divisor entre el primer residuo , esto entre el segundo residuo y así sucesivamente , hasta obtener un resto nulo , ocurrido esto el *MCD* será el último divisor utilizado, es decir :

$P(x)$	$\underline{\vert Q(x)}$	$\rightarrow$	$Q(x)$	$\underline{\vert r_1(x)}$	$\rightarrow$	$r_1(x)$	$\underline{\vert r_2(x)}$
$r_1(x)$	$C_1(x)$		$r_2(x)$	$C_2(x)$		0	$C_3(x)$

* Luego : $MCD[P(x);Q(x)]=r_2(x)$

EJEMPLO :

Determinar El *M.C.D.* de:

$P(x)=x^5+2x^3+x^2+x+1 \wedge Q(x)=x^4+x^3+x^2+2x+1$

RESOLUCIÓN:

$x^5+2x^3+x^2+x+1 \ \underline{\vert x^4+x^3+x^2+2x+1}$

$\underline{-x^5-x^4-x^3-2x^2-x} \quad \downarrow \quad x-1$

$-x^4+x^3-x^2+1$

$\underline{x^4+x^3+x^2+2x+1}$

$2x^3+2x+2 <> 2(x^3+x+1)$

*luego:

$$\begin{array}{l|l} x^4+x^3+x^2+2x+1 & x^3+x+1 \\ \underline{-x^4 \quad -x^2 \quad -x} \downarrow & x+1 \\ \quad x^3 \quad +x \quad +1 & \\ \quad \underline{-x^3 \quad -x \quad -1} & \\ \qquad 0 & \end{array}$$

$MCD[P(x); Q(x)] = x^3+x+1$

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1:

Extraer el *M.C.D.* de:

$P_{(x,y,z)} = x^3y^2z^4 \; ; \; Q_{(x,y,z)} = x^2y^5z^6$

A) xyz B) x^5yz C) x^2yz^2 D) $x^2y^2z^4$

RESOLUCIÓN:

*El **M.C.D.** son los factores repetidos con menor exponente :

$\Rightarrow M.C.D.\left[P_{(x,y,z)}; Q_{(x,y,z)}\right] = x^2y^2z^4$

RPTA: "D"

PROBLEMA 2:

Del problema anterior extraer el *M.C.M.*

A) $x^2y^2z^4$ B) $x^5y^2z^6$ C) $x^3y^5z^6$ D) $x^5y^3z^6$

RESOLUCIÓN:

*El *M.C.M.* son los factores repetidos y no repetidos con el mayor exponente.

$\Rightarrow M.C.M.\left[P_{(x,y,z)}; Q_{(x,y,z)}\right] = x^3y^5z^6$

RPTA: "C"

PROBLEMA 3:

Sacar el *M.C.D.* de:

$P_{(x)} = (x+1)^2(x-3)^2 \; ; \; Q_{(x)} = (x-3)(x-1)(x+5)$

A) $x+3$ B) $x-3$ C) $x-2$ D) $x-1$ E) $x+5$

RESOLUCIÓN:

* Analizando se obtendrá que:

$M.C.D.\left[P_{(x,)}; Q_{(x)}\right] = (x-3)$

RPTA: "B"

PROBLEMA 4 :

Obtener el *M.C.M.* de:

$P_{(x)} = (x-2)^2(x-3)^2 \; ; \; Q_{(x)} = (x+2)(x-3)$

A) $(x-2)^3$ B) $(x-3)$ C) $(x-2)^2(x-3)^2(x+2)$

RESOLUCIÓN:

* El **M.C.M.** será:

$M.C.M.\left[P_{(x,)}; Q_{(x)}\right] = (x-2)^2(x-3)^2(x+2)$

RPTA: "C"

PROBLEMA5 :

Obtener el *M.C.D.* de:

$P_{(x)} = x^2+2x+1 ; Q_{(x)} = x^2-1$

A) $x-1$ B) $x+1$ C) x^2+1 D) $(x+1)^3(x-1)$

RESOLUCIÓN:

*Factorizando primero cada polinomio.

$P_{(x)} = (x+1)^2 \; ; \; Q_{(x)} = (x+1)(x-1)$

*El *M.C.D.* será: $M.C.D.\left[P_{(x,)}; Q_{(x)}\right] = (x+1)$

RPTA: "B"

PROBLEMA 6 :

Encontrar el *M.C.D.* de:

$kx^2+(k+1)^2x+k+2 \; ; \; (x+k)(x-k)-4(k+1)$

A) $x+k+1$ B) $x+k-1$ C) $x+k+2$ D) $x+k$

RESOLUCIÓN:

*Factorizando ambas expresiones:

I) $kx^2+(k+1)^2x+k+2$

$kx \quad\quad 1$

$1x \quad\quad (k+2)$

$\rightarrow (kx+1)(x+k+2)$

II) $\underline{(x+k)}\underline{(x-k)}-4(k+1)$

* Operando : x^2-k^2-4k-4

* Agrupando un trinomio cuadrado perfecto:

$x^2-(k^2+4k+4) = x^2-(k+2)^2$

* Diferencia de cuadrados:

$[x+(k+2)[x-(k+2)]]$

$\rightarrow (x+k+2)(x-k-2)$

$\rightarrow$ ***Luego:*** $M.C.D = x+k+2$

RPTA: "C"

PROBLEMA 7 :

El *M.C.D.* de los siguientes polinomios:

$E = m^3-n^2-4m+4 ; F = m^5-2m^3+2m^2-2m+1$

A) $m+1$ B) $m-1$ C) $2m-1$ D) $2m+1$

RESOLUCIÓN:

*Factorizando cada polinomio:

I) $E = m^3-m^2-4m+4$

*Agrupando :

$E = (m^3-m^2)-(4m-4)$

$\rightarrow E = m^2(m-1)-4(m-1)$

$\rightarrow E = (m-1)(m^2-4)$

$\rightarrow E = (m-1)(m+2)(m-2)$

II) $F = m^5-2m^3+2m^2-2m+1$

*Por divisores binómicos:

*Para: $m=1$

$\rightarrow F(1)=1-2+2-2+1=0$

*Un factor es $(m-1)$ y el otro lo obtenemos dividiendo por Ruffini, Así:

$m-1=0$	1	0	−2	2	−2	1
$m=1$	↓	1	1	−1	1	−1
	1	1	−1	1	−1	0

$\rightarrow F=(m-1)(m^4+m^3-m^2+m-1)$

$\rightarrow El\ M.C.D(E,F)=(m-1)$

RPTA: "B"

PROBLEMA 8 :

Sea:

$P_1(x)=Ax^2+2x-B;P_2(x)=Ax^2-4x+B$

Si $(x-)$ es el MCD de $P_1 \wedge P_2$. Hallar $\frac{B}{A}$

A)1 B)2 C)3 D)4 E)6

RESOLUCIÓN:

*$(x-1)$ deberá ser divisor de $P_1(x)$ y $P_2(x)$

* Entonces: $P_1(1)=0 \wedge P_2(1)=0$

* Recordando en el teorema del resto:

$P_1(1)=A+2-B=0$ ....(α)

$P_2(1)=A-4+B=0$ ....(β)

* Resolviendo el sistema:

$$A-B=-2$$
$$A+B=4$$
$$\rightarrow A=1\ ;\ B=3$$

* Piden: $\frac{B}{A}=\frac{3}{1}=3$

RPTA: "C"

PROBLEMA 9:

El $M.C.D.$ y $M.C.M.$ de dos polinomios son respectivamente:

$MCD(A;B)=(x+2)(x+1)$

$MCM(A;B)=(x+5)(x+1)(x+2)(x+3)$

Si uno de los polinomios es: $(x+1)(x+2)(x+3)$ hallar el otro polinomio.

A)$(x+1)(x+2)(x+3)$ B)$(x+1)(x+2)(x+4)$

C)$(x+1)(x+2)(x+5)$ D)1

RESOLUCIÓN:

*Sean los polinomios $A(x)$, $B(x)$. Por propiedad :

$MCD(A;B)\times MCM(A;B)=A(x)\times B(x)$

*Por el dato del problema y adecuando la igualdad tenemos:

$$B(x)=\frac{(MCD)(MCM)}{A(x)}$$

*Reemplazando valores:

$$B(x)=\frac{(x+2)(x+1)(x+5)(x+1)(x+2)(x+3)}{(x+1)(x+2)(x+3)}$$

$\rightarrow B(x)=(x+1)(x+2)(x+5)$

RPTA: "C"

PROBLEMA 10 :

Hallar el MCM/MCD de las siguientes expresiones:

$a^{-1}\ x^{n-1}\ ;\ b^{-1}\ x^{n-2}\ ;\ c^{-1}x^{n-3}$

A)1 B)2 C)x D)$\frac{ab}{x}$ E)$\frac{x^2}{abc}$

RESOLUCIÓN:

* $MCD=x^{n-3}$

$MCM=a^{-1}b^{-1}c^{-1}x^{n-1}$

* Piden:

$$\frac{MCM}{MCD}=\frac{a^{-1}\ b^{-1}\ c^{-1}\ x^{n-1}}{x^{n-3}}=\frac{x^2}{abc}$$

RPTA: "E"

PROBLEMA 11:

Si el MCD de los polinomios:

$H(a)=a^4-9a^2+ma+n;G(a)=a^4+2a^3-7a^2+pa+q$

es $(a-2(a-3)$. Calcular el MCM de dichos polinomios.

RESOLUCIÓN:

*Dividiendo por el método de Horner en ambos polinomios , así:

a) $H(a)\div(a-2)(a-3)$

1	1	0	−9	m	n
5		5	−6		
−6			25	−30	
				50	−60
	1	5	10	0	0

q(a)

* Luego : $H(a)=(a-2)(a-3)q(a)$

$\rightarrow H(a)=(a-2)(a-3)(a^2+5a+10)$

b) $G(a)\div(a-2)(a-3)$

1	1	2	−7	p	q
5		5	−6		
−6			35	−42	
				110	−132
	1	7	22	0	0

q(a)

* Luego: $G(a)=(a-2)(a-3)q(a)$

$\rightarrow G(a)=(a-2)(a-3)(a^2+7a+22)$

* Finalmente , $MCM(H;G)$:

$(a-2)(a-3)(a^2+5a+10)(a^2+7a+22)$

PROBLEMA 12:

Hallar el *MCM* de: $x^2-4x+3;\ x^2+4x+3$
$x^4-10x^2+9;\ x^3-9x+x^2-9$

A) $(x^2-3)(x+1)$ B) $(x^2-9)(x-1)$
C) $(x^2-2)(x^2+1)$ D) $(x^2-9)(x^2-1)$

RESOLUCIÓN:

*Factorizando :

I) $x^2-4x+3=(x-3)(x-1)$ .... (α)

II) $x^2+4x+3=(x+3)(x+1)$ .... (β)

III) $x^4-10x^2+9=(x^2-9)(x^2-1)$
$=(x+3)(x+3)(x+1)(x-1)$ .... (θ)

IV) $x^3-9x+x^2-9=x(x^2-9)+(x^2-9)$
$=(x^2-9)(x+1)$
$=(x+3)(x-3)(x+1)$ .... (γ)

De (α), (β), (θ) y (γ) se tiene:

$MCM=(x+3)(x-3)(x+1)(x-1)=(x^2-9)(x^2-1)$

RPTA: "D"

PROBLEMA 13:

Si el *MCD* de :
$x(x+1)(x-2)(x-1)-24$ y x^3-3x+2 se iguala a cero, entonces "x" es igual a:

A) 1 B) 2 C) 3 D) 0 E) -2

RESOLUCIÓN:

* Factorizando cada expresión:

I) $x(x+1)(x-2)(x-1)-24$

* Multiplicando en la forma indicada:
$(x^2-x)\ (x^2-x-2)-24$

* Efectuando:

$(x^2-x)^2-2(x^2-x)-24$

x^2-x ╲╱ -6
x^2-x ╱╲ 4

$=(x^2-x-6)(x^2-x+4)$

$\rightarrow (x-3)(x+2)(x^2-x+4)$

II) x^3-3x+2

	1	0	-3	2
1	↓	1	1	-2
	1	1	-2	0

$\rightarrow (x-1)(x^2+x-2)$

x ╲╱ 2
x ╱╲ -1

$\rightarrow (x-1)^2(x+2)$

$\rightarrow MCD=x+2 \rightarrow x+2=0 \rightarrow x=-2$

RPTA: "E"

PROBLEMA 14:

El producto que resulta de multiplicar dos polinomios de variable libre "x" es $(x^6+1)^2-4x^6$, y el cociente de dividir el *MCM* y *MCD* de dichos polinomios es $(x^2+1)^2-4x^2$. Señale a que es equivalente el *MCD.*

A) x^2-2x-1 B) x^4+x+1
C) x^4-2x^2-21 D) x^2-2

RESOLUCIÓN:

*Sean $P(x)$ y $Q(x)$ los polinomios, luego por propiedad :

$\underbrace{P_{(x)}\times Q_{(x)}}_{DATO}=MCD(P,Q)\times MCM(P,Q)$

$MCD(P,Q)\times MCM(P,Q)=(x^6+1)^2-4x^6$ ...... (α)

*Por el 2do dato :

$\dfrac{MCM(P,Q)}{MCD(P,Q)}=(x^2+a)^2-4x^2$ .... (β)

*Como se quiere despejar el *MCD*, dividamos (α) entre (β), así:

$$\frac{MCM(P,Q)\times MCM(P,Q)}{\dfrac{MCM(P,Q)}{MCD(P,Q)}}=\frac{(x^6+1)^2-4x^6}{(x^2+1)^2-4x^2}$$

* Luego:
$$[MCD(P,Q)]^2=\frac{(x^6-1)^2}{(x^2-1)^2}=\frac{(x^2-1)^2(x^4+x^2+1)^2}{(x^2-1)^2}$$

$\rightarrow [MCD(P,Q)]^2=(x^4+x^2+1)^2$

* Finalmente: $MCD(P,Q)=x^4+x^2+1$

RPTA: "B"

PROBLEMA 15 :

Si P y Q son dos polinomios factorizables definidos por: $P_{(x)}=2x^4-x^3-3x^2+3x-9$
$Q_{(x)}=10x^3-9x^2+17x-6$

Entonces el *MCD (P, Q)* es:

A) $3x^2+2x-1$ B) $2x^2-x+3$
C) $3x^2-x+3$ D) x^2-x+1

RESOLUCIÓN:

*Factorizando cada polnomio:

I) $P_{(x)}=2x^4-x^3-3x^2+3x-9$

$2x^2$ ╲╱ $-x$ ╲╱ 3
x^2 ╱╲ $0x$ ╱╲ -3

$\rightarrow P_{(x)}=(2x^2-x+3)(x^2-3)$

II) $Q_{(x)}=10x^3-9x^2+17x-6$

	10	-9	17	-6
$\frac{2}{5}$	-	4	-2	6
	10	-5	15	0
+5	2	-1	3	

$\rightarrow Q_{(x)}=(5x-2)(2x^2-x+3)$

*Luego: $MCD_{(P,Q)}=2x^2-x+3$

RPTA: "B"

PROBLEMA 16:

Si P, Q y R son tres polinomios factorizables por:

$P_{(x;y)}=x^4+3x^3y+3x^2y^2+xy^3$

$Q_{(x;y)}=3x^3+5x^2y+xy^2-y^3$

$R_{(x;y)}=x^4+xy^3+x^3y+y^4$

Entonces el *MCD (P, Q, R)* es:

A) $x-2y$ B) x^2+y C) $x-y$ D) $(x+y)^2$ E) xy

RESOLUCIÓN:

* Factorizando cada polinomio:

I) $P=x^4+3x^3y+3x^2y^2+xy^3$

$\rightarrow P=x\left(x^3+3x^2y+3xy^2+y^3\right)=x(x+y)^3$

II) $Q=3x^3+5x^2y+xy^2-y^3Q=3x^3+5x^2y+xy^2-y^3$

	3	5y	y^2	$-y^3$
$-y$	–	$-3y$	$-2y^2$	y^3
	3	2y	$-y^2$	0

$\rightarrow Q=(x+y)(3x^2+2xy-y^2)\rightarrow Q=(x+y)^2(3x-y)$

III) $R=x^4+xy^3+x^3y+y^4$

$\rightarrow R=x\left(x^3+y^3\right)+y\left(x^3+y^3\right)$

$\rightarrow R=(x+y)\left(x^3+y^3\right)$

$\rightarrow R=(x+y)^2\left(x^2-xy+y^2\right)$

* Luego : $MCD_{(P,Q,R)}=(x+y)^2$

RPTA: "D"

PROBLEMA 17 :

Si P y Q son polinomios factorizables definidos por:

$P_{(x)}=x^3-3x^2-x+3$

$Q_{(x)}=x^3-x^2-5x-3$

Entonces el término independiente del *M.C.D (P, Q)*, es:

A) –3 B) –6 C) –1 D) 1 E) 3

RESOLUCIÓN:

* Factorizando cada polinomio:

I) $P_{(x)}=\underline{x^3-3x^2}-\underline{x+3}$

$\rightarrow P_{(x)}=x^2(x-3)-(x-3)=(x-3)\left(x^2-1\right)$

$\rightarrow P_{(x)}=x^2(x-3)-(x-3)=(x-3)\left(x^2-1\right)$

II) $Q_{(x)}=x^3-x^2-5x-3$

	1	–1	–5	–3
$x=-1$	–	–1	2	3
	1	–2	–3	0

$\rightarrow Q_{(x)}=(x+1)\left(x^2-2x-3\right)$

x ╳ –3
x 1

$\rightarrow Q_{(x)}=(x+1)^2(x-3)$

* Luego : $MCD_{(x)}=(x+1)(x-3)$

$TI_{(MCD)}=MCD_{(0)}=-3$

RPTA: "A"

PROBLEMA 18 :

Si P y Q son dos polinomios de variable x, tales que:

$$P_{(x)}\times Q_{(x)}=(2x+3)^3(x-2)^3(x+2)^5$$

$$MCM\left(P_{(x)},Q_{(x)}\right)=(2x+3)^2(x+2)^3(x-2)^3$$

Entonces, el número de factores primos distintos del *MCD (P, Q)* es:

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

RESOLUCIÓN:

*Por propiedad, se sabe que para dos polinomios $P_{(x)}$ y $Q_{(x)}$ se cumple que: $MCD_{(P,Q)}\times MCM_{(P,Q)}=P_{(x)}\times Q_{(x)}$

*Reemplazando:

$MCD_{(P,Q)}(2x+3)^2(x+2)^3(x-2)^3$

$=(2x+3)^3(x-2)^3(x+2)^5$

$\rightarrow MCD_{(P,Q)}=(2x+3)(x+2)^2$

*Luego, el número de factores primos del *MCD* es 2.

RPTA: "B"

PROBLEMA 19 :

Si el producto de dos polinomios es: x^4-18x^2+81 y el cociente de su *MCM* y *MCD* es x^2-6x+9, entonces el *MCD* de dichos polinomios es:

A) x+1 B) x+2 C) x+3 D) x+4 E) x+5

RESOLUCIÓN:

* Por dato: $P_{(x)}\times Q_{(x)}=x^4-18x^2+81$

$$\frac{MCM}{MCD}=x^2-6x+9=(x-3)^2$$

* Propiedad: para P y Q:

$P_{(x)}\times Q_{(x)}=MCD\times MCM$

$\rightarrow MCD\times MCM=x^4-18x^2+81$

$\rightarrow MCD\times MCM=(x+3)^2(x-3)^2$

* Pero: $MCM=(x-3)^2\times MCD$

* Reemplazando:

$MCD\times(x-3)^2\times MCD=(x+3)^2(x-3)^2$

$\rightarrow(MCD)^2=(x+3)^2\rightarrow MCD=x+3$

RPTA: "C"

PROBLEMA 20 :

Si p y Q son dos polinomios factorizables definidos por:

$$P_{(x)} = x^4 + 5x^3 + 12x^2 + 14x + 8$$

$$Q_{(x)} = x^4 + 6x^3 + 16x^2 + 21x + 12$$

Entonces la suma de los coeficientes del ***MCD (P, Q)***, es:

A)4 *B)5* *C)6* *D)7* *E)8*

RESOLUCIÓN:

*Factorizando cada polinomio (por aspa doble especial):

$$P_{(x)} = x^4 + 5x^3 + 12x^2 + 14x + 8$$

x^2	$3x$	4
x^2	$2x$	2

$$\rightarrow P_{(x)} = \left(x^2 + 3x + 4\right)\left(x^2 + 2x + 2\right)$$

$$Q_{(x)} = x^4 + 6x^3 + 16x^2 + 21x + 12$$

x^2	$3x$	4
x^2	$3x$	3

$$Q_{(x)} = \left(x^2 + 3x + 4\right)\left(x^2 + 3x + 3\right)$$

* Luego: $MCD_{(x)} = x^2 + 3x + 4$

$\rightarrow$ ***suma de coeficientes***$_{MCD} = 8$

RPTA: "E"

PROBLEMA 21 :

Sean P y Q dos polinomios factorizables definidos por :

$$P_{(x)} = x^3 + 4x^2 + ax + b$$

$$Q_{(x)} = x^3 + cx + d$$

Si el ***MCD (P, Q)*** es $(x-1)(x+1)$, entonces el ***MCM (P,Q)*** es:

A)(x–1)(x+3)(x+2) *B)(x–1)(x+2)(x–2)*
C)(x–1)(x+3)(x+2) *D)x+1)(x+3)(x+2)*
E)(x–1)(x–2)(x+2)(x+3)

RESOLUCIÓN:

* De: $MCD_{(P,Q)} = (x-1)(x+3) = x^2 + 2x - 3$

$\rightarrow P_{(x)} \wedge Q_{(x)}$ son divisibles entre $x^2 + 2x - 3$.

Entonces, por Horner :

1	1	4	a	b
–2		–2	3	
3			–4	6
	1	2	0	0

$$\rightarrow P_{(x)} = (x-1)(x+3)(x+2)$$

1	1	0	c	d
–2		–2	3	
3			4	–6
	1	–2	0	0

$$\rightarrow Q_{(x)} = (x-1)(x+3)(x-2)$$

*Luego: $MCM_{(P,Q)} = (x-1)(x+3)(x+2)(x-2)$

RPTA: "E"

PROBLEMA 22 :

Si $P_{(x}$ y $Q_{(x}$ son dos polinomios, entonces determine el valor de verdad de cada una de las siguiente proposiciones:

p : Si $P_{(x)} = (x+1)Q_{(x)}$, entonces $(x+1)$ es un factor del ***MCM (P,Q)***

q : Si $Q_{(x)} = (x+4)P_{(x)}$, entonces $(x+4)$ es un factor del ***MCD (P, Q)***

r: Si $P_{(x)} = Q_{(x)} - 3$ y $Q_{(2)} = 3$, entonces $(x-2)$ es un factor del ***MCM (P,Q).***

A)VFV *B)VVV* *C)FVV* *D)VFF* *E)FVF*

RESOLUCIÓN:

I) Recuerde que $MCM_{(P,Q)}$ es divisible entre $P_{(x)}$ y entre $Q_{(x)}$; es decir: $P_{(x)}$ y $Q_{(x)}$ son factores del $MCM_{(P,Q)}$

$\rightarrow P_{(x)} = (x+1)Q_{(x)}$ es factor del $MCM_{(P,Q)}$

$\rightarrow (x+1)$ es factor del $MCM_{(P,Q)}$

* Luego: p es ***VERDADERO***

II) El $MCD_{(P,Q)}$ sólo contiene factores primos comunes de $P_{(x)}$ y $Q_{(x)}$; $x+4$ es factor de $Q_{(x)}$ pero no se sabe si es factor de $P_{(x)}$; por lo que $x+4$ no necesariamente es factor del $MCD_{(P,Q)}$

* Luego , q es ***FALSA***

III) $P_{(x)} = Q_{(x)} - 3 \wedge Q_{(x)} = 3 \rightarrow P_{(2)} = Q_{(2)} - 3 = 3 - 3 = 0$

$\rightarrow$ Por el Teorema del factor $(x-2)$ es un factor de $P_{(x)} \rightarrow P_{(x)} = (x-2)R_{(x)}$

$\rightarrow$ Por lo señalado en ***(I)***: $(x-2)$ es un factor del $MCM_{(P,Q)}$

* Luego, r es ***VERDADERA***

RPTA: "A"

PROBLEMA 23 :

Si P_1 y P_2 son dos polinomios factorizables definidos por:

$$P_{1(x)} = ax^2 + 2x - b \qquad P_{2(x)} = ax^2 - 4x + b$$

Tal que a y b son enteros positivos y $MCM_{(P_1,P_2)} = x^3 - x^2 - 9x + 9$, entonces el valor de $T = b^2 - a$, es :

A)18 B)24 C)8 D)15 E)21

RESOLUCIÓN:

* De: $\rightarrow MCM_{(P_1,P_2)} = (x-1)(x+3)(x-3)$

$\rightarrow MCM_{(P_1,P_2)} = (x-1)(x+3)(x-3)$

* Como: $\underbrace{P_1 \cdot P_2}_{4} = MCD.\ \underbrace{MCM}_{3}$

$\rightarrow$ MCD es de grado 1.

$\rightarrow$ P_1 y P_2 tienen un factor común de grado $1 \rightarrow P_1 - P_2$ contiene a este

$$P_{1(x)} - P_{2(x)} = 6x - 2b = 6\left(x - \frac{b}{3}\right)$$

* Como $b \in Z^+$, entonces:

$x - \frac{b}{3} = x - 1 \vee x - \frac{b}{3} = x - 3$

$\rightarrow b = 3 \vee b = 9$

* Luego si:

$b=3: P_{1(x)} = ax^2 + 2x - 3$

$P_{2(x)} = ax^2 - 4x + 3$

* Contienen al factor $(x-1)$: $\rightarrow a = 1$

$b=9: P_{1(x)} = ax^2 + 2x - 9$

$P_{2(x)} = ax^2 - 4x + 9$

* Contienen al fator $(x-3)$; pero esto no es posible, pues:

$P_{1(3)} = 9a + 6 - 9 = 0 \rightarrow a = \frac{1}{3} a \notin Z^+$

* Entonces : $T = 3^2 - 1 = 8$

RPTA: "C"

PRIMERA PRACTICA DIRIGIDA

01 Hallar el ***M.C.M.*** de:

$P(x,y,z) = x^4y^5z$

$Q(x,y,w) = x^2y^2w$

A) x^4y^5zw B) x^2y^2z C) xy D) x^2y^2 E) $xyzw$

02 Hallar el ***M.C.D.*** de:

$P(x,y,z) = x^6y^5z^2$

$Q(x,y,w) = x^4y^4w^2$

A) x^4y B) xy^4 C) $xyzw$ D) x^4y^4 E) x^6y^5zw

03 Hallar el grado del ***M.C.M.*** de:

$P(x) = (x-1)^2(x-3)$ y $Q(x) = x^3 - 1$

A)1 B)2 C)3 D)4 E)5

04 Hallar el ***M.C.D.*** de:

$P = 20x^4 + x^2 - 1$

$Q = 25x^4 + 5x^3 - x - 1$

$R = 25x^4 - 10x^2 + 1$

A) $5x^2-1$ B) $4x^2-1$ C) $3x^2-1$ D) $2x^2-1$ E) x^2+1

05 Hallar el ***M.C.M.*** de:

$P = x^2 - 2x - 15$

$Q = x^2 - 25$

$R = 4ax^2 + 40ax + 100a$

A) $(x+3)(x-5)$ B) $4a(x+3)(x-5)(x+5)^2$
C) $4a(x+3)(x+5)$ D) $(x+3)(x-5)(x+5)$
E) $4(x+3)(x+5)(x-5)$

06 Hallar el ***M.C.D.*** de los polinomios:

$P(x) = x^3 - 5x^2 - x + 5$

$Q(x) = x^4 + 2x^3 - 2x - 1$

A) (x^2+2) B) (x^2+3) C) (x^2-1) (x^2+4) E) (x^2+8)

07 El grado del polinomio que se obtiene al multiplicar el ***M.C.D.*** por el ***M.C.M.*** de los polinomios es:

$P(x,y) = x^2 - x^3y^2 + x^2y^3 - y^2$

$Q(x,y) = x^3 - 2x^2y + 2xy^2 - y^3$

$R(x,y) = x^2 + x^3y^2 - x^2y^3 - y^2$

A)9 B)10 C)11 D)12 E)13

08 Hallar el ***M.C.D.*** y ***M.C.M.*** de:

$P = 3x^3 + x^2 - 8x + 4$

$Q = 3x^3 + 7x^2 - 4$

e indicar el producto de sus factores no comunes.

A) $3x-2$ B) $2x-1$ C) $2x+1$ D) x^2-1 E) x^2+1

09 Hallar la suma de coeficientes del ***M.C.M.*** de:

$P(x) = x^4 - 11x^2 - 18x - 8$

$Q(x) = x^4 - 1$

$R(x) = x^3 - 6x^2 + 32$

A)16 B)17 C)18 D)15 E)0

10 El producto de dos polinomios es: $(x^6 - 2x^3 + 1)$ y el cociente de su ***M.C.M.*** y su ***M.C.D.*** es $(x-1)^2$. Hallar el ***M.C.D.***

A) x^2-x+1 B) x^2+x-1 C) x^2+x+1
D) $-x^2-x+1$ E) $-x^2+x+1$

11 Hallar la suma de los términos del ***M.C.D.*** de los polinomios:

$P(x,y) = x^3 - xy^2 + x^2y - y^3$

$Q(x,y) = x^3 - xy^2 - x^2y + y^3$

$R(x,y) = x^4 - 2x^2y^2 + y^4$

A) $2x$ B) $2y$ C) x^2-y^2 D) $(x+y)^2$ E) $(x-y)^2$

12 Si : $A(x,y) = 12x^{n-1}y^{m+1}$ $B(x,y) = 16x^{n+1}y^{m-1}$

cumplen : $M.C.M. = \alpha\, x^a y^4$

$M.C.D. = \beta\, x^5 y^b$

Calcular: $R = \dfrac{\beta + b - n}{\alpha + a - m}$

A)1 B)-1 C)0 D)2 E)4

13 Hallar el *M.C.D.* de los polinomios:

$$P(x) = x^3+x^2-4x-4$$

$$Q(x) = x^3+3x^2+2x$$

A) $x-1$ B) $x+1$ C) $x-2$ D) $x-5$ E) $x+5$

14 Hallar el *M.C.D.* de las siguientes expresiones:

$$a^{-1}x^{n-1}\ ;\ b^{-1}x^{n-2}\ ;\ c^{-1}x^{n-3}$$

A) $abcxn$ B) $\frac{x^n}{abc}$ C) $xn-3$ D) $xn-2$ E) $xn-1$

15 Dados los monomios :

$$A(x,y,z)=x^{a-3}\,y^{b+1}\,z^{c-1}$$

$$B(x,y,z)=x^{a-1}\,y^{b+3}\,z^{c-4}$$

$$C(x,y,z)=x^{a-2}\,y^{b+2}\,z^{c+2}$$

si el *M.C.D.* $(A,B,C)=x^6y^8$

Indique el *M.C.M.* (A,B,C)

A) $x^{10}y^8$ B $x^8y^9z^6$ C) $x^8y^{10}z^6$ D) $x^7y^6z^5$ E) $x^8y^6z^9$

16 Siendo:

$$A(x)=x^2+3x-10$$

$$B(x)=x^4-25x^2$$

$$C(x)=x^3+4x^2-5x$$

Halle el *M.C.D.* $(A;B;C)$

A) $x-2$ B) $x-1$ C) $x+5$ D) x E) $x(x-2)$

17 Encontrar el *M.C.D.* de los polinomios:

I) x^4-5x^2+4

II) x^3+x^2-4x-4

III) x^3-2x^2-x+2

A) x^2-x-1 B) x^2+x-1 C) x^2-x-2 D) x^2+x+2 E) $x-1$

18 Halle el valor numérico del *M.C.D.* para $x=3$ de los polinomios:

$$A(x)=x^4+2x^2-3$$

$$B(x)=x^4+x^3-x^2-x$$

$$C(x)=x^3-7x-6$$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

19 Hallar el *M.C.D.* de los siguientes polinomios:

$$P(x,y)=x^4+xy^3+x^3y+y^4$$

$$Q(x,y)=3x^3+5x^2y+xy^2-y^3$$

$$R(x,y)=x^4+3x^3y+3x^2y^2+xy^3.$$

A) $(x-y)^2$ B) $x-y$ C) $x+y$ D) $(x+y)^2$ E) $x(x+y)(3x-y)$

20 Sabiendo que el *M.C.D.* de los polinomios:

$P(x)=2x^3-x^2+3x+m$

$Q(x)=x^3+x^2+n$ es (x^2-x+2)

Calcular el valor de : $\dfrac{2n-m}{3}$

A) 1 B) 21 C) 31 D) 41 E) 5

TAREA DOMICILIARIA

01 ¿De qué grado es el *MCM* de *P* y *Q*?

$P=x^2+y^2+x(y+1)+y(x+1)$

$Q=x^2+y^2-1+2xy$

A) 4 B) 3 C) 6 D) 7 E) 5

02 Encontrar el *MCD* de los polinomios:

$A(x)=x^4-3x^2+2$; $B(x)=x^4+x^3-x-1$

A) x^2-1 B) x^2+1 C) $x+1$
D) $x-1$ E) x^2+x-1

03 Hallar el *MCD* de los polinomios:

$A(x)=x^3+2x^2+2x+1$

$B(x)=x^4-1$

$C(x)=x^2+4x+3$

A) $x+1$ B) $x+2$ C) $x+3$ D) $x+4$ E) $x+8$

04 Hallar el valor numérico del *MCD* para $x=3$ de los polinomios:

$P(x)=x^4+2x^2-3$

$Q(x)=x^4+x^3-x^2-x$

$R(x)=x^3-7x-6$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

05 Si el *M.C.D.* de los polinomios

$A(x)=x^3+4x^2+ax+b$

$B(x)=x^2+cx+d$

es: $(x-1)(x+3)$, hallar el término independiente de su *M.C.M.*

A) −6 B) 6 C) −12 D) 12 E) 15

CLAVES DE MCD Y MCM				
01) A	02) D	03) E	04) A	05) B
06) C	07) D	08) D	09) C	10) C
11) A	12) C	13) A	14) C	15) C
16) C	17) C	18) D	19) C	20) B
01) A	02) A	03) A	04) D	05) A





FRACCIONES ALGEBRAICAS

09

OBJETIVOS :

* Definir una fracción algebraica , como las operaciones que se pueden realizar con ellas.
* Reconocer una fracción algebraica racional .
* Operar con fracciones algebraicas racionales.
* Descomponer una fracción racional propia en la suma de fracciones parciales.

INTRODUCCIÓN:

Una operación curiosa la que denominamos "multiplicación a la Rusa" y que más probablemente es un procedimiento sumamente antiguo, que debió nacer en un cerebro de un hombre primitivo sencillo y claro. Para efectuar esta multiplicación es suficiente conocer la suma ordinaria, la multiplicación por *2* y saber hallar la mitad de un número par. Imaginemos; por ejemplo que hemos de multiplicar ***57*** por ***16***, la disposición será de este modo :

Duplicamos ↓	*29* ×	*8*	**Tomamos la mitad** ↓
	58	*4*	
	116	*2*	
	232	*1*	

$$29 \times 8 = 232$$

El origen de las fracciones comunes o quebradas es muy remota. Los babilónicos, egipcios y griegos han dejado pruebas de que conocían las fracciones. Cuando Juan de Luna tradujo al latín, en el siglo ***XII***, la Aritmética de Al-Juarizmi, empleo la palabra "fractio" para traducir del árabe "al-kasr" que significa quebrar, romper. Este uso se generalizó junto con la forma ruptus, que prefería Leonardo de Pisa.

En las numerosas inscripciones egipcias descifradas, se encuentran variadísimos problemas con números fraccionarios. Con su peculiar sistema de fracciones con la unidad como numerador, resolvían los problemas de la vida diaria, tales como la distribución del pan, las medidas de la tierra, la construcción de las pirámides, etc. Algunos de los problemas presentados en el papiro de Ahmes tienen todavía vigencia.

FRACCIÓN ALGEBRAICA

Una fracción algebraica racional es toda aquella división indicada de dos polinomios denominados Numerador y Denominador donde el grado del denominador es mayor o igual a uno.

$$\boxed{F_{(x)}=\frac{N(x)}{D(x)}}\ ;\ D(x)\neq cte.$$

Donde:

* $N(x)$: Numerador
* $D(x)$: Denominador

EJEMPLOS:

$$\underbrace{\frac{41}{2x-7}\ ;\ \frac{ax+b}{x^2-a}\ ;\ \frac{ax^3-by}{2xy-a}}_{\text{Son Fracciones Algebraicas}}\ ;\ \underbrace{\frac{2x-7}{9}}_{\text{No es Fracción Algebraica}}$$

CLASIFICACIÓN DE FRACCIONES

1) SEGÚN EL GRADO DE SUS TÉRMINOS

A) FRACCIÓN ALGEBRAICA PROPIA:

Es cuando el grado del numerador es menor que el grado del denominador :

$$\boxed{{}^{o}[N(x)]<{}^{o}[D(x)]}$$

EJEMPLOS:

$$\frac{ax}{x^2+1};\ \frac{3}{xy};\ \frac{x+y}{xy}$$

B) FRACCIÓN ALGEBRAICA IMPROPIA:

Es cuando el grado del numerador es mayor o igual que el grado del denominador.

$$\boxed{{}^{o}[N(x)]\geq{}^{o}[D(x)]}$$

EJEMPLOS:

$$\frac{x^3+3}{x^2+5};\ \frac{x^4y-y^2}{x^2-y};\ \frac{x^6+4}{xy}$$

2) DE ACUERDO A SU DENOMINADOR :

A) FRACCIÓN HOMOGÉNEAS:

Son aquellas cuyos denominadores son polinomios idénticos.

EJEMPLOS:

$$\frac{x^3+2}{x^2+1};\ \frac{xy-3}{x^2+1};\ \frac{x+y^2}{x^2+1}$$

B) FRACCIÓN HETEROGÉNEAS:

Son aquéllas cuyos denominadores no son polinomios idénticos.

EJEMPLOS:

$$\frac{x^2+x+2}{x^2 1};\ \frac{x+3}{x-2};\ \frac{x+y^2}{x^2+10}$$

RELACIÓN ENTRE FRACCIONES

FRACCIONES EQUIVALENTES :

Dos o más fracciones algebraicas son equivalentes si tienen el mismo valor numérico para valores arbitrarios atribuidos a sus "Letras".

EJEMPLO:

* $\dfrac{x^3-2x^2-9x+18}{x^4-81} <> \dfrac{x-2}{x^2+9}$
* $\dfrac{x^2-4}{(x-2)(x+1)} <> \dfrac{x+2}{x+1}$

FRACCIONES ALGEBRAICA IRREDUCTIBLE

Una fracción algebraica es irreductible si sus términos son polinomios primos entre sí *(P.E.S.I.)*

EJEMPLOS:

$$\frac{x+1}{x^2+3};\ \frac{xy-1}{yx};\ \frac{x^2+y^3}{x-y}$$

SIMPLIFICACIÓN DE UNA FRACCIÓN

Simplificar una fracción es transformarla en otra equivalente cuyo numerador y denominador no tengan más factores comunes que la unidad , ± 1. La fracción que resulta es irreductible. Esta reducción se lleva a cabo descomponiendo en factores el numerador y el denominador, simplificando, seguidamente, los factores comunes siempre que sean distintos de cero.

EJEMPLO:

$$\frac{a^2-4ab+3b^2}{a^2-b^2}=\frac{(a-3b)\cancel{(a-b)}}{(a+b)\cancel{(a-b)}}=\frac{a-3b}{a+b}$$

* Siempre que $a-b\neq 0$

REGLA DE SIGNOS EN UNA FRACCIÓN ALGEBRAICA

Tres signos están asociados a una fracción:

el correspondiente al numerador , el del denominador y el de la fracción. Se pueden alterar dos cualesquiera de ellos, simultáneamente, sin que varíe el valor de la fracción. Si a una fracción no se le antepone signo alguno, se sobre entiende que este es positivo (más)

EJEMPLO:

* $\dfrac{-a}{b}=\dfrac{a}{-b}=-\dfrac{a}{b}$; además : $\dfrac{-a}{-b}=\dfrac{a}{b}$; $-\left(\dfrac{-a}{-b}\right)=-\dfrac{a}{b}$

OBSERVACIÓN:

Muchas veces la simplificación consiste en un cambio de signo .

EJEMPLO 1:

$$\frac{x^2-3x+2}{2-x}=\frac{(x-2)(x-1)}{2-x}=\frac{(x-2)(x-1)}{-(x-2)}=\frac{x-1}{-1}=1-x$$

EJEMPLO 2:

$$E=-\frac{3x+2y}{x-y}+\frac{-4x+y}{y-x}+\frac{x-5y}{-x+y}$$

RESOLUCIÓN:

* Llevándolo a una suma de fracciones homogéneas:

$$E=\frac{-(3x+2y)}{x-y}+\frac{-(4x-y)}{-(x-y)}+\frac{-(4x-y)}{-(x-y)}+\frac{x-5y}{-(x-y)}$$

$$\rightarrow E=\frac{-3x-2y}{x-y}+\frac{4x-y}{x-y}+\frac{-(x-5y)}{x-y}$$

* Efectuando directamente los numeradores:

$$E=\frac{-3x-2y+4x-y-x+5y}{x-y}=\frac{2y}{x-y}$$

OPERACIONES CON FRACCIONES ALGEBRAICAS

Para reducir fracciones, debemos efectuar operaciones entre ellas. Para lo cual estableceremos los siguientes algoritmos:

I) SUMA ALGEBRAICA DE FRACCIONES:

Que tienen el mismo denominador es otra fracción cuyo numerador es la suma algebraica de los numeradores de las fracciones dadas, y cuyo denominador es el denominador común.

EJEMPLOS:

* $\dfrac{3}{5}-\dfrac{4}{5}-\dfrac{2}{5}+\dfrac{1}{5}=\dfrac{3-4-2+1}{5}=\dfrac{-2}{5}=-\dfrac{2}{5}$
* $\dfrac{2}{x-3}-\dfrac{3x+4}{x-3}+\dfrac{x^2+5}{x-3}=\dfrac{2-(3x+4)+(x^2+5)}{x-3}=\dfrac{x^2-3x+3}{x-3}$

II)PARA SUMAR Y RESTAR FRACCIONES:

De distinto denominador, se transforman éstas en otras equivalentes que tengan un denominador

común. El denominador común mínimo *(D.C.M.)* de varias fracciones es el mínimo común múltiplo *(M.C.M.)* de sus denominadores.

EJEMPLO 1 :

* El *D.C.M.* de $\frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{7}{10}$; es el *M.C.M.* de *4; 5; 10*

que es *20* y el *D.C.M.* de $\frac{2}{x^2}, \frac{3}{2x}, \frac{x}{7}$; es $14x^2$

EJEMPLO 2 :

Reducir : $F = \frac{x+1}{x+3} + \frac{x+2}{x+4}$

RESOLUCIÓN:

* $F = \frac{(x+1)(x+4)+(x+2)(x+3)}{(x+3)(x+4)}$

* Efectuando operaciones básicas:

$$F = \frac{(x^2+5x+4)+(x^2+5x+6)}{x^2+7x+12} = \frac{2x^2+10+10}{x^2+7x+12}$$

OBSERVACIÓN:

Hemos aplicado el método del aspa, así:

$$\boxed{\frac{N_1}{D_1} \pm \frac{N_2}{D_2} = \frac{N_1 \times D_2 \pm N_2 \times D_1}{D_1 \times D_2}}$$

EJEMPLO :

Reducir : $R = \frac{x+1}{x^2+x+1} - \frac{x-1}{x^2-x+1}$

RESOLUCIÓN:

* $R = \frac{(x+1)(x^2-x+1)-(x-1)(x^2+x+1)}{(x^2+x+1)(x^2-x+1)}$

* Aplicando productos notables, se tiene:

$$R = \frac{(x^3+1)-(x^3-1)}{x^4+x^2+1} = \frac{2}{x^4+x^2+1}$$

III) MULTIPLICACIÓN ALGEBRAICA DE FRACCIONES :

La operación se efectúa multiplicando numeradores y denominadores entre sí.

$$\boxed{\frac{N_1}{D_1} \times \frac{N_2}{D_2} = \frac{N_1 \times N_2}{D_1 \times D_2}}$$

EJEMPLO 1:

* $\frac{2}{3} \times \frac{5}{4} = \frac{2 \times 5}{3 \times 4} = \frac{5}{3 \times 2} = \frac{5}{6}$

* $\left(\frac{x-1}{x+2}\right)\left(\frac{x+1}{x+2}\right) = \frac{(x-1)(x+1)}{(x+2)(x+2)} = \frac{x^2-1}{(x+2)^2}$

EJEMPLO 2:

Reducir: $P = \left(\frac{3x^2+4x}{x^2-2}\right)\left(\frac{5}{x}\right)\left(\frac{4x^2-8}{3x+4}\right)$

RESOLUCIÓN:

$$P = \frac{(3x^2+4x) \times (5) \times (4x^2-8)}{(x^2-2) \times (x) \times (3x+4)}$$

* Factorizando en el numerador, resulta:

$$P = \frac{x(3x+4) \times 5 \times 4(x^2-2)}{(x^2-2) \times x \times (3x+4)} = 20$$

EJEMPLO 3:

Efectuar:

$$F = \frac{4x}{(x-1)} \times \frac{x+1}{(x^2+x+1)} \times \frac{x^3-1}{(x+x^2)}$$

RESOLUCIÓN:

$$F = \frac{(4x)(x+1)(x^3-1)}{(x^3-1)\,x(1+x)} = 4$$

IV) DIVISIÓN DE FRACCIONES ALGEBRAICAS :

La operación se efectúa invirtiendo la fracción que hace de divisor y luego se procede como en el caso de la multiplicación:

$$\boxed{\frac{N_1}{D_1} \div \frac{N_2}{D_2} = \frac{N_1}{D_1} \times \frac{D_2}{N_2} = \frac{N_1 \times D_2}{D_1 \times N_2}}$$

EJEMPLO 1:

Reducir: $G = \frac{6x^2+x-2}{x+3} \div \frac{2x^2-7x+3}{x^2-9}$

RESOLUCIÓN:

* Luego de invertir el divisor, resulta:

$$G = \frac{6x^2+x-2}{x+3} \times \frac{x^2-9}{2x^2-7x+3}$$

* Factorizando:

$$G = \frac{(2x-1)(3x+2)}{(x+3)} \times \frac{(x-3)(x+3)}{(2x-1)(x-3)} \rightarrow G = 3x+2$$

EJEMPLO 2:

Reducir:

$$E = \left(\frac{x^3+2x^2+4x}{x-3}\right) \div \left(\frac{x^3-8}{x^2-9}\right)$$ ← *Se invierte*

RESOLUCIÓN:

$$E = \frac{x(x^2+2x+4)}{x-3} \times \frac{(x+3)(x-3)}{(x-2)(x^2+2x+4)} = \frac{x(x+3)}{x-2}$$

V) UNA FRACCIÓN COMPUESTA:

Es aquella que tiene una o más fracciones en el numerador o en el denominador. Para simplificarla:

I) Se reducen el numerador y denominador a fracciones simples.

II) Se dividen las dos fracciones que resultan.

EJEMPLO:

$$\frac{x-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}=\frac{\frac{x^2-1}{x}}{\frac{x+1}{x}}=\frac{x^2-1}{x}\times\frac{x}{x+1}=\frac{x^2-1}{x+1}=x-1$$

PROPIEDAD:

Si la fracción: $F(x;y)=\dfrac{ax^2+bxy+cy^2}{nx^2+mxy+py^2}$

es independiente de "x" e "y" ó tiene un valor constante para todos los valores reales de "x" e "y".

Entonces :

$$\boxed{\frac{a}{n}=\frac{b}{m}=\frac{c}{p}}$$

EJEMPLO 1:

Si la fracción algebraica:

$$F_{(x,y)}=\frac{(m-4)x^2+(m+2n)xy+(5p+7)y^2}{3x^2+5xy+4y^2}$$

Asume el valor numérico de 3, para cualquier universo de valores reales para "x" e "y". De acuerdo a esto, calcular el valor de $(m+n+p)$

RESOLUCIÓN:

* De acuerdo a la premisa:

$$\frac{(m-4)x^2+(m+2n)xy+(5p+7)y^2}{3x^2+5xy+4y^2}=3$$

* Luego, por la propiedad, se tiene:

$$\frac{m-4}{3}=\frac{m+2n}{5}=\frac{5p+7}{4}=3$$

* Resolviendo las ecuaciones: $m=13,\ n=1,\ p=1$
* Por lo tanto: $m+n+p=15$

FRACCIONES PARCIALES

Es una operación de descomposición inversa a la adición de fracciones , permite expresar una fracción propia como la adición de fracciones simples.

PRIMER CASO:

Si el denominador de la fracción a descomponerse presenta factores de primer grado "No Repetidos", entonces tendrá cada factor de la forma: $\boxed{\dfrac{N}{ax\pm b}}$

EJEMPLO 1:

Expresar: $\dfrac{5x+1}{x^2+x-2}$ como adición de fracciones.

RESOLUCIÓN:

* $\dfrac{5x+1}{x^2+x-2}=\dfrac{5x+1}{(x-1)(x+2)}=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{x+2}$

$$\rightarrow\frac{5x+1}{(x-1)(x+2)}=\frac{A(x+2)+B(x-1)}{(x-1)(x+2)}$$

* Entonces: $5x+1=(A+B)x+(2A-B)$
* Luego: $A+B=5;\ 2A-B=1$
* Resolviendo el sistema, resulta: $A=2$ y $B=3$
* Luego se obtendrá: $\dfrac{5x+1}{x^2+x-2}=\dfrac{2}{x-1}+\dfrac{3}{x+2}$

SEGUNDO CASO:

Si el denominador de la fracción a descomponer presenta factores repetidos de primer grado; entonces se escriben tantas fracciones como factores repetidos existen.

Si el denominador de la fracción "F" es de la forma:

$$(ax\pm b)^n$$

* Entonces:

$$\frac{N}{(ax\pm b)^n}=\frac{N_1}{(ax\pm b)}+\frac{N_2}{(ax\pm b)^2}+\frac{N_3}{(ax\pm b)^3}+\ldots+\frac{N_n}{(ax\pm b)^n}$$

EJEMPLO 1:

Expresar: $\dfrac{2x^2-5}{(x-2)^3}$ como adición de fracciones.

RESOLUCIÓN:

* $\dfrac{2x^2-5}{(x-2)^3}=\dfrac{A}{(x-2)}+\dfrac{B}{(x-2)^2}+\dfrac{C}{(x-2)^3}$

$$\rightarrow\frac{2x^2-5}{(x-2)^3}=\frac{Ax^2+(B-4A)x+(4A-2B+C)}{(x-2)^3}$$

* Entonces:

$$2x^2-5=Ax^2+(B-4A)x+(4A-2B+C)$$

* Donde:

$$A=2;\ B-4A=0;\ 4A-2B+C=-5$$

* Resolviendo: $A=2\ ;\ B=8\ ;\ C=3$
* Luego, se tiene que:

$$\frac{2x^2-5}{(x-2)^3}=\frac{2}{(x-2)}+\frac{8}{(x-2)^2}+\frac{3}{(x-2)^3}$$

OBSERVACIÓN:

Si el denominador contiene factores cuadráticos no repetidos de la forma : $x^2 + bx + c$; deberá asumirse «n» fracciones parciales de la forma:

$$\frac{A_1x+B_1}{x^2+bx+c};\frac{A_2x+B_2}{(x^2+bx+c)^2};\frac{A_3x+B_3}{(x^2+bx+c)^3};\ldots\ldots;\frac{A_nx+B_n}{(x^2+bx+c)^n}$$

Donde $A_1, A_2, A_3, \ldots\ldots, A_n; B_1, B_2, B_3, \ldots\ldots, B_n$ son expresiones numéricas o coeficientes que se calculan utilizando los criterios de polinomios idénticos (dando valores a sus variables)

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1:

Simplificar: $F=\frac{x^3+8}{x^2-4}-\frac{x^2}{x-2}$

A) 3 B) 0 C) -2 D) 5

RESOLUCIÓN:

* La fracción propuesta es reductible, ya que acepta el factor común $(x+2)$, tanto en el numerador como en el denominador. Veamos:

$F=\frac{(x+2)(x^2-2x+4)}{(x+2)(x-2)}-\frac{x^2}{x-2}$; luego la fracción irreductible será : $F=\frac{x^2-2x+4}{x-2}-\frac{x^2}{x-2}=\frac{-2(x-2)}{x-2}=-2$

RPTA: "C"

PROBLEMA 2 :

Reducir la suma mostrada:

$$A=\frac{x^2+x+1}{2x^2+x}-\frac{x^2+2}{2x^2-x-1}+\frac{2x-1}{x^2-x}$$

A) $\frac{1}{x}$ B) $\frac{2}{x}$ C) $\frac{3}{x}$ D) $\frac{4}{x}$ E) $\frac{5}{x}$

RESOLUCIÓN:

* Factorizando los denominadores, resulta:

$$A=\frac{x^2+x+1}{x(2x+1)}-\frac{x^2+2}{(2x+1)(x-1)}+\frac{2x-1}{x(x-1)}$$

* Se obtiene como $MCM = x(2x+1)(x-1)$

$$A=\frac{(x-1)(x^2+x+1)-x(x^2+2)+(2x+1)(2x-1)}{x(2x+1)(x-1)}$$

* Efectuando operaciones y reduciendo:

$$A=\frac{x^3-1-x^3-2x+4x^2-1}{x(2x+1)(x-1)}$$

$$\rightarrow A=\frac{4x^2-2x-2}{x(2x+1)(x-1)}=\frac{2(2x^2-x-1)}{x(2x^2-x-1)}=\frac{2}{x}$$

RPTA: "B"

PROBLEMA 3 :

Si la fracción : $\frac{2x^2+(m+1)xy+10y^2}{3x^2+6xy+(n-5)y^2}$ es independiente de "x" e "y". Calcular "m – n".

A) 0 B) 16 C) -17 D) 4 E) 8

RESOLUCIÓN:

* Utilizando el teorema se tiene:

$$\underbrace{\frac{2}{3}}_{I}=\underbrace{\frac{m+1}{6}}_{II}=\underbrace{\frac{10}{n-5}}_{III}$$

* De I y II: $\frac{2}{3}=\frac{m+1}{6}\rightarrow m=3$

* De I y III: $\frac{2}{3}=\frac{10}{n-5}\rightarrow n=20$

* Piden calcular: $m-n=-17$

RPTA: "C"

PROBLEMA 4 :

Simplificar la fracción : $F=\frac{1-a^2}{(1+ax)^2-(a+x)^2}$

A) $\frac{2}{1+x}$ B) $\frac{1}{1-x}$ C) $\frac{1}{x+2}$ D) $\frac{1}{1-x^2}$ E) $\frac{1}{x^2+2}$

RESOLUCIÓN:

* Factorizando los dos términos de la fracción se tiene:

Numerador: $(1+a)(1-a)$

Denominador:

$(1+ax+a+x)(1+ax-a-x)=[(1+x)+a(1+x)][(1-x)-a(1-x)]$
$=(1+x)(1+a)(1-x)(1-a)$

* La fracción equivale a esta otra:

$$F=\frac{(1+a)(1-a)}{(1+x)(1+a)(1-x)(1-a)}$$

* Cancelando los factores comunes, queda:

$$F=\frac{1}{(1+x)(1-x)}=\frac{1}{1-x^2}$$

RPTA: "D"

PROBLEMA 5 :

Simplificar la fracción:

$$F=\frac{ab(x^2+y^2)+xy(a^2+b^2)}{ab(x^2-y^2)+xy(a^2-b^2)}$$

A) 1 B) $\frac{a}{b}$ C) $\frac{ax+by}{ax-by}$ D) $\frac{x}{y}$ E) $\frac{a-b}{x+y}$

RESOLUCIÓN:

* Efectuando las operaciones indicadas en el numerador y denominador, se tiene:

$$F=\frac{abx^2+aby^2+xya^2+xyb^2}{abx^2-aby^2+xya^2-xyb^2}$$

* Reagrupando para factorizar:

$$F=\frac{\left(abx^2+a^2yx\right)+\left(aby^2+b^2xy\right)}{\left(abx^2+a^2xy\right)-\left(aby^2+b^2xy\right)}$$

$$\to F=\frac{ax(ay+bx)+by(ay+bx)}{ax(ay+bx)-by(ay+bx)}$$

$$\to F=\frac{(ay+bx)(ax+by)}{(ay+bx)(ax-by)}=\frac{ax+by}{ax-by}$$

RPTA: "C"

PROBLEMA 6 :

Efectuar: $M=\frac{2y^2-13y+15}{y^2-25}\div\frac{y}{y+5}$

A) 1 B) $\frac{y}{2}$ C) $\frac{2y-3}{y}$ D) $\frac{2y+3}{y}$ E) 2

RESOLUCIÓN:

*
$$\begin{matrix}2y & \times & -3\\ y & & -5\end{matrix}$$

$$\to M=\frac{2y^2-13y+15}{(y+5)(y-5)}\div\frac{y}{y+5}$$

$$\to M=\frac{(2y-3)(y-5)}{(y+5)(y-5)}\div\frac{y}{y+5}$$

* Simplificando queda:

$$\to M=\frac{2y-3}{y+5}\div\frac{y}{y+5}$$

$$\to M=\frac{\frac{2y-3}{y+5}}{\frac{y}{y+5}}\to\frac{(2y-3)(y+5)}{(y+5)y}$$

* Finalmente queda : $\frac{2y-3}{y}$

RPTA: "C"

PROBLEMA 7 :

Obtener la suma de las fracciones:

$$R=\frac{2x+4}{x^2+2x-3}+\frac{1}{x^2+4x+3}+\frac{x+2}{x^2-1}$$

A) $\frac{3}{x-2}$ B) $\frac{3}{x-1}$ C) $\frac{3}{x-3}$ D) $\frac{2}{x-1}$ E) $\frac{3}{x-4}$

RESOLUCIÓN:

* Factorizando y buscando el ***MCM*** de los denominadores:

$$R=\frac{2x+4}{(x+3)(x-1)}+\frac{1}{(x+1)(x+3)}+\frac{x+2}{(x+1)(x-1)}$$

$$\to R=\frac{(x+1)(2x+4)+(x-1)+(x+3)(x+2)}{(x+3)(x+1)(x-1)}$$

$$\to R=\frac{2x^2+6x+4+x-1+x^2+5x+6}{(x+3)(x+1)(x-1)}$$

$$\to R=\frac{3x^2+12x+9}{(x+3)(x+1)(x-1)}=\frac{3(x+1)(x+3)}{(x+3)(x+1)(x-1)}$$

* Finalmente: $R=\frac{3}{x-1}$

RPTA: "B"

PROBLEMA 8 :

Simplificar: $F(x)=\frac{x^3+x^2+x}{x^3-x^2-x-2}$

RESOLUCIÓN:

Factorizando el denominador:

	1	-1	-1	-2
x=2	2	2	2	2
	1	1	1	0

$$x^2+x+1$$

$$F(x)=\frac{x\left(x^2+x+1\right)}{(x-2)\left(x^2+x+1\right)}=\frac{x}{x-2}$$

PROBLEMA 9 :

Simplificar:

$$F(x)=\frac{7}{x^2+x+1}-\frac{2}{x-1}-\frac{8-x^2}{x^2+x+1}+\frac{x+1}{x-1}+\frac{x+2}{x^2+x+1}$$

RESOLUCIÓN:

$$F(x)=\frac{7-8+x^2+x+2}{x^2+x+1}+\frac{x+1-2}{x-1}=\frac{x^2+x+1}{x^2+x+1}+\frac{x-1}{x-1}=1+1=2$$

PROBLEMA 10 :

Simplificar:

$$F_{(x;y;z)}=\frac{1}{(x-y)(x-z)}-\frac{1}{(x-y)(y-z)}+\frac{1}{(y-z)(x-z)}$$

RESOLUCIÓN:

$$F(x,y,z)=\frac{y-z-x+z+x-y}{(x-y)(x-z)(y-z)}=\frac{0}{(x-y)(x-z)(y-z)}=0$$

PROBLEMA 11 :

Descomponer en fracciones parciales: $\frac{5x^3+x+2}{x^4-1}$

RESOLUCIÓN:

$$\frac{5x^3x+2}{(x+1)(x-1)(x^2+1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-1}+\frac{Cx+D}{x^2+1}$$

$5x^3+x+2$

$=A(x-1)(x^2+1)+B(x+1)(x^2+1)+(Cx+D)(x+1)(x-1)$

$\begin{cases} x=-1\Rightarrow -5-1+2=A(-2)(2) \\ \Rightarrow -4=-4A\Rightarrow A=1 \end{cases}$

$\begin{cases} x=1\Rightarrow 5+1+2=B(2)(2) \\ \Rightarrow 8=4B\Rightarrow B=2 \end{cases}$

$\begin{cases} 5x^3+x+2=(x-1)(x^2+1)+2(x+1)(x^2+1)+(Cx+D)(x^2-1) \\ x=2\ \Rightarrow\ 40+2+2=(1)(5)+2(3)(5)+(2C+D)(3) \end{cases}$

$44=35+3(2C+D)\to 2C+D+=3$..............................(α)

$x=-2\to -40-2+2=(-3)(5)+2(-1)(5)+(2C+D)(3)$

$-40=-5+3(-2C+D)\Rightarrow -2C+D=-5$..............$(\beta)$

*De$(\alpha)+(\beta)$: $2D=-2\Rightarrow D=-1$

*En (α):$C=2$

Luego : $\frac{5x^3+x+2}{x^4-1}=\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x-1}+\frac{2x-1}{x^2+1}$

PROBLEMA 12 :

Simplificar:

$$E=\frac{(2x+3)^2+2(4x^2-9)+(2x-3)^2}{(2x3)^2+2(9-4x^2)+(2x-3)^2};x\in R$$

RESOLUCIÓN:

Haciendo dos cambios de variable:

$a=2x+3$ y $b=2x-3\Rightarrow ab=4x^2-9$

Con lo cual la fracción queda así:

$$E=\frac{a^2+2ab+b^2}{a^2-2ab+b^2}\Rightarrow E=\frac{(a+b)^2}{(a-b)^2}$$

Pero: $a+b=4x\wedge a-b=6$, reemplazando:

$$E=\frac{(4x)^2}{(6)^2}=\frac{16x^2}{36}=\frac{4x^2}{9}$$

PROBLEMA 13 :

Calcular A y B para que se obtenga la fracción $\frac{1}{n^2-1}$ luego de sumar las fracciones: $\frac{A}{n+1}$ y $\frac{B}{n-1}$

RESOLUCIÓN:

$0n+1=A(n-1)+B(n+1)$

$\Rightarrow 0n+1=(A+B)n+B-A$

$\Rightarrow A+B=0\ \wedge\ B-A=1$

$\Rightarrow A=-\frac{1}{2}\ \wedge\ B=\frac{1}{2}$

PROBLEMA 14 :

Hallar el verdadero valor de:

$$E_{(x)}=\frac{(4x^2-1)(2x^2+3x+1)}{(x+2)(4x^2+4x+1)},\text{para } x=-\frac{1}{2}$$

RESOLUCIÓN:

$$E_{(x)}=\frac{(2x+1)(2x-1)(2x+1)(x+1)}{(x+2)(2x+1)^2}=\frac{(2x-1)(x+1)}{(x+2)}$$

$$E_{\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{(-1-1)\left(-\frac{1}{2}+1\right)}{-\frac{1}{2}+2}=\frac{(-2)\left(\frac{1}{2}\right)}{\frac{3}{2}}=\frac{-1}{\frac{3}{2}}$$

$$\Rightarrow E_{\left(-\frac{1}{2}\right)}=-\frac{2}{3}$$

PROBLEMA 15 :

Al término de la simplificación de la fracción:

$$T=\frac{(x+1)(x^2-9)(x-5)+27}{(x+2)(x^2-16)(x-6)+48}$$

Dar la diferencia del numerador menos el denominador.

A) 12 B) 13 C) 14 D) 15 E) 16

RESOLUCIÓN:

* Descomponiendo : (x^2-9) y (x^2-16), y multiplicando convenientemente por la regla de Stevin:

$$T=\frac{(x+1)(x+3)(x-3)(x-5)+27}{(x+2)(x+4)(x-4)(x-6)+48}$$

$$\to T=\frac{(x^2-2x-3)(x^2-2x-15)+27}{(x^2-2x-8)(x^2-2x-24)+48}$$

* Sustituyendo : $x^2-2x=m$

* Resulta : $T=\dfrac{(m-3)(m-15)+27}{(m-8)(m-24)+48}$

* Efectuando : $T=\dfrac{\left(m^2-18m+45\right)+27}{\left(m^2-32m+192\right)+48}$

$$\to T=\frac{m^2-18m+72}{m^2-32m+240}=\frac{(m-12)(m-6)}{(m-12)(m-20)}$$

* Finalmente: $T=\dfrac{m-6}{m-20}$

* Nos piden: $(m-6)-(m-20)=14$

RPTA: "C"

PROBLEMA 16 :

Simplificar: $F=\dfrac{m^6-1}{\left(m^2+2\right)^2-9m^2}$

A) $\dfrac{m^4+m-1}{m+2}$ B) $\dfrac{m^4+m^2+1}{m^2-4}$ C) $\dfrac{m^2-1}{m+2}$ D) 1 E) 0

RESOLUCIÓN:

* Transformando el numerador y denominador, se tiene : $F=\dfrac{(m^2-1)(m^4+m^2+1)}{(m^2+2+3m)(m^2+2-3m)}$

* Ordenando : $F=\dfrac{\left(m^2-1\right)\left(m^4+m^2+1\right)}{\left(m^2+3m+2\right)\left(m^2-3m+2\right)}$

* Por productos notables, resulta:

$$F=\frac{(m+1)(m-1)\left(m^4+m^2+1\right)}{(m+1)(m+2)(m-1)(m-2)}$$

* Luego, el equivalente irreductible será:

$$F_{eq}=\frac{m^4+m^2+1}{m^2-4}$$

RPTA: "B"

PROBLEMA 17 :

Efectuar: $F=\dfrac{3}{2x-4}-\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{x+10}{2x^2-8}$

A) 1 B) 2 C) -2 D) 0 E) 10

RESOLUCIÓN:

* La expresión dada se puede escribir en la forma :

$$F=\frac{3}{2(x-2)}-\frac{1}{x+2}-\frac{x+10}{2(x-2)(x+2)}$$

* El *MCM* es pues: $2(x-2)(x-2)$, de modo que se puede escribir :

$$F=\frac{3(x+2)-2(x-2)-(x+10)}{2(x-2)(x+2)}$$

* Efectuando las operaciones indicadas en el numerador :

$$F=\frac{3x+6-2x+4-x-10}{2(x-2)(x+2)}\to F=\frac{0}{2(x-2)(x+2)}=0$$

*Luego la fracción es nula, es decir "0".

RPTA: "D"

PROBLEMA 18 :

Realizar la siguiente operación:

$$\frac{1}{1+\dfrac{1}{a+\dfrac{1}{b}}}-\frac{2ab+ac(1+ab)+1}{1+(a+1)b}$$

A) 1 B) a C) b D) –b E) –a

RESOLUCIÓN:

* Transformando la fracción compleja, la operación se reduce a:

$$\frac{ab+1}{ab+b+1}-\frac{2ab+a(1+ab)+1}{1+(a+1)b}$$

* De la cual resulta : $-\dfrac{a(ab+b+1)}{ab+b+1}=-a$

* Simplificando queda : $-a$

RPTA: "E"

PROBLEMA 19 :

Hallar el resultado de:

$$\frac{x+2}{3x-1}+\frac{x+1}{3-2x}+\frac{4x^2+6x+3}{6x^2-11x+3}$$

A) –1 B) 0 C) $\dfrac{x}{x-1}$ D) $\dfrac{x+2}{2x-3}$ E) $-x$

RESOLUCIÓN:

* La operación propuesta equivale a esta otra:

$$\frac{x+2}{3x-1}-\frac{x+1}{2x-3}+\frac{4x^2+6x+3}{(2x-3)(3x-1)}$$

* Dando un común denominador, se tiene:

$$\frac{(x+2)(2x-3)-(x+1)(3x-1)+4x^2+6x+3}{(2x-3)(3x-1)}$$

* Efectuando y reduciendo: $\dfrac{3x^2+5x-2}{(2x-3)(3x-1)}$

* Factorizando el numerador: $\dfrac{(3x-1)(x+2)}{(2x-3)(3x-1)}$

* Simplificada se convierte en: $\dfrac{x+2}{2x-3}$

RPTA: "D"

PROBLEMA 20 :

Si **a, b y c,** son números enteros que cumplen la

relación $a+b+c=0$, dar el valor de la fracción:

$$E=\left(\frac{a^3+b^3+c^3+3abc}{abc}\right)^2$$

RESOLUCIÓN:

$a+b+c=0 \Rightarrow (a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+3(a+b+c)(ab+ac+bc)-3abc$

de donde: $0=a^3+b^3+c^3-3abc \Rightarrow a^3+b^3+c^3=3abc$

$\Rightarrow E=\left[\frac{3abc+3abc}{abc}\right]^2=\left(\frac{6abc}{abc}\right)^2=36$

PROBLEMA 21 :

Muestre el producto resultante de:

$$P=\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x+1}\right)\left(1+\frac{1}{x+2}\right)....\left(1+\frac{1}{x+n}\right)$$

A) $\frac{x+n+2}{x}$ B) $\frac{x+n+3}{x}$ C) $\frac{x+n+1}{x}$ D) $\frac{x+n+4}{x}$

RESOLUCIÓN:

* Efectuando operaciones en cada factor:

$$P=\left(\frac{x+1}{x}\right)\left(\frac{x+2}{x+1}\right)\left(\frac{x+3}{x+2}\right)....\left(\frac{x+n}{x+n-1}\right)\left(\frac{x+n+1}{x+n}\right)$$

* Por lo tanto : $P=\frac{x+n+1}{x}$

RPTA: "C"

PROBLEMA 22 :

Calcular la suma de la serie Stirling:

$$S=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+....+\frac{1}{n^2+n}$$

A) $\frac{n}{n+1}$ B) $\frac{n}{n+2}$ C) $\frac{n}{n+3}$ D) $\frac{n}{n+4}$ E) $\frac{n}{n+5}$

RESOLUCIÓN:

* Expresando la serie finita del siguiente modo:

$$S=\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+....+\frac{1}{n(n+1)}$$

* De los numeradores, se deduce que:

$$S=\frac{2-1}{1\times2}+\frac{3-2}{2\times3}+\frac{4-3}{3\times4}+....+\frac{(n+1)-n}{n(n+1)}$$

* Desdoblando cada fracción, se tiene:

$$S=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-....-\frac{1}{n}+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$

* Luego: $S=1-\frac{1}{n+1} \rightarrow S=\frac{n}{n+1}$

RPTA: "A"

PROBLEMA 23 :

Señale la fracción irreductible:

$$R=\frac{x^3+(2a+b)x^2+a(a+2b)x+a^2b}{x^3+(a+2b)x^2+b(b+2a)x+ab^2}$$

A) $\frac{x+b}{x+a}$ B) $\frac{x+a}{x+c}$ C) $\frac{x+b}{x+c}$ D) $\frac{x+c}{x+a}$ E) $\frac{x+a}{x+b}$

RESOLUCIÓN:

* Efectuando operaciones y factorizando:

$$R=\frac{x^3+2ax^2+bx^2+a^2x+2abx+a^2b}{x^3+ax^2+2bx^2+b^2x+2abx+ab^2}$$

$$\rightarrow R=\frac{x^2(x+b)+2ax(x+b)+a^2(x+b)}{x^2(x+a)+2bc(x+a)+b^2(x+a)}$$

$$\rightarrow R=\frac{(x+b)(x^2+2ax+a^2)}{(x+a)(x^2+2bc+b^2)}=\frac{(x+b)(x+a)^2}{(x+a)(x+b)}$$

* Finalmente: $R=\frac{x+a}{x+b}$

RPTA: "E"

PROBLEMA 24 :

Reducir la expresión:

$$T=\frac{a^2+ab+b^2}{(c-a)(c-b)}+\frac{b^2+bc+c^2}{(a-b)(a-c)}+\frac{c^2+ca+a^2}{(b-a)(b-c)}$$

A) 1 B) 2 C) 4 D) 0 E) 3

RESOLUCIÓN:

* Cambiando de signo a las fracciones:

$$T=-\frac{a^2+ab+b^2}{(c-a)(b-c)}-\frac{b^2+bc+c^2}{(a-b)(c-a)}-\frac{c^2+ca+a^2}{(a-b)(b-c)}$$

* Como el $MCM=(a-b)(b-c)(c-a)$, se tiene:

$$T=\frac{(a-b)(a^2+ab+b^2)+(b-c)(b^2+bc+c^2)+(c-a)(c^2+ca+a^2)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$$

* Por diferencia de cubos, resulta:

$$T=-\frac{a^3-b^3+b^3-c^3+c^3-a^3}{(a-b)(b-c)(c-a)}=0$$

RPTA: "D"

PROBLEMA 25 :

Dados:

$$P=\frac{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}{(a-b)(b-c)(c-a)};\ Q=\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}+\frac{1}{c-a}$$

Determine la suma de $(P+2Q)$

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

RESOLUCIÓN:

* Haciendo: $\left.\begin{array}{l}a-b=x\\ b-c=y\\ c-a=z\end{array}\right\}(+)\ \boxed{x+y+z=0}$

* Se obtienen : $P=\frac{x^2+y^2+z^2}{xyz};\ Q=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$

* Nos piden : $P+2Q=\frac{x^2+y^2+z^2}{xyz}+2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$

$$\rightarrow P+2Q=\frac{x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)}{xyz}$$

$$\rightarrow P+2Q=\frac{(x+y+z)^2}{xyz}=\frac{(0)^2}{xyz}=0$$

RPTA: "A"

PROBLEMA 26 :

Si la fracción racional:

$$\frac{(a+b-1)x^2+3cxy+(b-2a)y^2}{4x^2+2cxy+3y^2}$$

es independiente de sus variables. Calcular el valor de $(b-a)$

A) $\frac{15}{3}$ B) $\frac{16}{3}$ C) $\frac{17}{3}$ D) $\frac{18}{3}$ E) $\frac{19}{3}$

RESOLUCIÓN:

* Aplicando la propiedad se tiene:

$$\underbrace{\frac{a+b-1}{4}}_{(I)}=\underbrace{\frac{3}{2}}_{(II)}=\underbrace{\frac{b-2a}{3}}_{(III)}$$

* De *(I)* y *(II)* : $a+b=7 \ldots.(\alpha)$

* De *(II)* y *(III)* : $b-2=\frac{9}{2} \ldots.(\beta)$

* De $(\alpha)-(\beta)$: $a=\frac{5}{6}$ y $b=\frac{37}{6}$

* Nos piden : $b-a=\frac{16}{3}$

RPTA: "B"

PROBLEMA 27 :

De la descomposición parcial mostrada:

$$\frac{8x-11}{2x^2+5x-3}=\frac{A}{x+3}+\frac{B}{2x-1}$$

Calcular el valor de $(A+B)$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

RESOLUCIÓN:

* Efectuando operaciones e identificando:

$$8x-11 \equiv A(2x-1)+B(x+3)$$

* Tomando valor numérico en ambos miembros:

$$x=\frac{1}{2} : -7=B\left(\frac{7}{2}\right) \rightarrow B=-2$$

$$x=-3 : -35=A(-7) \rightarrow A=5$$

* Por lo tanto: $A+B=3$

RPTA: "C"

PROBLEMA 28 :

Reducir:
$$\frac{\frac{-1}{a^2-1}}{1-\frac{a+1}{a-\frac{1}{a}}}$$

A) $\frac{a}{a+1}$ B) $\frac{1}{a-1}$ C) $\frac{1}{a+1}$

RESOLUCIÓN:

* Efectuando:

$$\frac{\frac{-1}{a^2-1}}{1-\frac{a+1}{\frac{a^2-1}{a}}}=\frac{\frac{-1}{a^2-1}}{1-\frac{a(a+1)}{a^2-1}}=\frac{\frac{-1}{a^2-1}}{\frac{a^2-1-a(a+1)}{a^2-1}}$$

$$=\frac{\frac{-1}{\cancel{a^2-1}}}{\frac{a^2-1-a^2-a}{\cancel{a^2-1}}}=\frac{-1}{-1-a}=\frac{1}{a+1}$$

RPTA: "C"

PROBLEMA 29 :

La expresión :
$$1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{m}}}$$

equivale a:

A) $\frac{m+2}{m+1}$ B) $\frac{m+1}{m+2}$ C) $\frac{3m+2}{2m+1}$

RESOLUCIÓN:

* Reduciendo la fracción de abajo hacia arriba:

$$1+\frac{1}{1+\frac{m}{m+1}}=1+\frac{1}{2m+1}=\frac{3m+2}{2m+1}$$

RPTA: "C"

PROBLEMA 30 :

Efectuando el producto :

$$\left(\frac{1+x}{1-x}-\frac{1-x}{1+x}\right)\left(\frac{3}{4x}+\frac{x}{4}-x\right)$$

resulta:

A) 0 B) $\frac{3-16x}{4}$ C) 3 D) $\frac{1}{x}$

RESOLUCIÓN:

* Operando en cada uno de los paréntesis :

$$\left[\frac{(1+x)^2-(1-x)^2}{1-x^2}\right]\left[\frac{3+x^2-4x^2}{4x}\right]$$

$$=\left[\frac{4x}{1-x^2}\right]\left[\frac{3-3x^2}{4x}\right]=\frac{3\left[1-x^2\right]}{1-x^2}=3$$

RPTA: "C"

PROBLEMA 31 :

Si se simplifica la expresión : $\left(x^{-1}+y^{-1}\right)^{-1}$; se obtiene:

A) xy B) $x+y$ C) $\frac{xy}{x+y}$

RESOLUCIÓN:

* Haciendo transformaciones dentro del paréntesis:

$$\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)^{-1}=\left(\frac{y+x}{xy}\right)^{-1}=\frac{xy}{x+y}$$

RPTA: "C"

PROBLEMA 32 :

Simplificar: $\frac{1}{2x-4}-\frac{x+10}{2x^2-8}-\frac{1}{x+2}$

A) $\frac{1}{x-2}$ B) $\frac{2}{x-2}$ C) $\frac{x}{2-x}$ D) $\frac{1}{2-x}$

RESOLUCIÓN:

* Transformando denominadores:

$$\frac{1}{2(x-2)}-\frac{x+10}{2(x+2)(x-2)}-\frac{1}{x+2}$$

* Dando común denominador:

$$\frac{(x+2)-(x+10)-2(x-2)}{2(x-2)(x+2)}=\frac{-2x-4}{2(x-2)(x+2)}$$

$$=\frac{-2(x+2)}{2(x-2)(x+2)}=\frac{-1}{x-2}=\frac{1}{2-x}$$

RPTA: "D"

PROBLEMA 33 :

Si: $\frac{1}{n^2-1}=\frac{A}{n+1}+\frac{B}{n-1}$, entonces:

A) $A+B=0$ y $B-A=1$ B) $A+B=0$ y $A-B=1$
C) $A+B=1$ y $B-A=0$

RESOLUCIÓN:

* Efectuando en el segundo miembro y transformando en el primero, se tendrá:

$$\frac{1}{(n+1)(n-1)}=\frac{A(n-1)+B(n+1)}{(n+1)(n-1)};n\neq-1,1$$

* Entonces: $A(n-1)+B(n+1)<>1$

* Dando valores adecuados:

* para $n=1$, $B=\frac{1}{2}$

* para $n=-1$, $A=-\frac{1}{2}$

* Luego: $A+B=0 \wedge B-A=1$

RPTA: "A"

PROBLEMA 34 :

El valor de la expresión:

$$E=\frac{\left(x^2-y^{-2}\right)^x\left(x-y^{-1}\right)^{-2x}}{\left(y^2-x^{-2}\right)^{-x}\left(y+z^{-1}\right)^{2x}}$$

A) Es 0 B) Es 1 C) Depende de «x» e «y»

RESOLUCIÓN:

* Haciendo transfomaciones tanto en el numerador como en el denominador:

$$E=\frac{\left(x^2-\frac{1}{y^2}\right)^x\left(x-\frac{1}{y}\right)^{-2x}}{\left(y^2-\frac{1}{x^2}\right)^{-x}\left(y+\frac{1}{x}\right)^{2x}}\rightarrow E=\frac{\left(\frac{x^2y^2-1}{x^2}\right)^x\left(\frac{xy-1}{y}\right)^{-x}}{\left(\frac{x^2y^2-1}{x^2}\right)^{-x}\left(y+\frac{1}{x}\right)^{2x}}$$

$$\rightarrow E=\frac{\left(\frac{x^2y^2-1}{y^2}\right)^x\left(\frac{y}{xy-1}\right)^{2x}}{\left(\frac{x^2}{x^2y^2-1}\right)^x\left(\frac{xy+1}{x}\right)^{2x}}\rightarrow E=\frac{\left(x^2y^2-1\right)^{2x}(xy)^{2x}}{(xy)^{2x}\left(x^2y^2-1\right)^{2x}}=1$$

RPTA: "B"

PROBLEMA 35 :

La fracción : $\frac{5x-11}{2x^2+x-6}$

se obtuvo sumando las fracciones:

$$\frac{A}{x+2} \text{ y } \frac{B}{2x-3}$$

Los valores de A y B son:

A) $5x;-11$ B) $-11;-5x$ C) $-1;3$ D) $3;-1$

RESOLUCIÓN:

* Del enunciado se deduce que:

$$\frac{5x-11}{2x^2+x-6}<>\frac{A}{x+2}+\frac{B}{2x-3}, \text{de donde :}$$

$$\frac{5x-11}{2x^2+x-6}<>\frac{A(2x-3)+B(x+2)}{(x+2)(2x-3)}=\frac{A(2x-3)+B(x+2)}{2x^2+x-6}$$

* De aquí se tendrá:

$$5x-11<>A(2x-3)+B(x+2)$$

* Dando los valores convenientes:

* para: $x=\frac{3}{2}:5\left(\frac{3}{2}\right)-11=B\left(\frac{3}{2}+2\right)\rightarrow B=-1$

* para: $x=-2: 5(-2)-11=A(-4-3) \rightarrow A=3$

RPTA: "D"

PROBLEMA 36 :

Al simplifcar la fracción : $\dfrac{x^3-x^2y+xy^2}{7x^4+7xy^3}$

La suma del numerador y denominador de la fracción resultante es:

A) $7x+7y$ B) $7x+7y+1$ C) $7x^2+7xy+1$ D) $7x^2+7xy$

RESOLUCIÓN:

* Factorizando numerador y denominador:

$$\frac{x\left(x^2-xy+y^2\right)}{7x\left(x^3+y^3\right)}=\frac{x^2-xy+y^2}{7(x+y)\left(x^2-xy+y^2\right)}=\frac{1}{7(x+y)}$$

se pide: $1+7x+7y$

RPTA: "B"

PROBLEMA 37 :

Si: $\dfrac{m}{x}=\dfrac{n}{y}=\dfrac{p}{z}$ y $\dfrac{x^3}{a^3}+\dfrac{y^3}{b^3}+\dfrac{z^3}{c^3}=1$

entonces: $\dfrac{m^3}{a^3}+\dfrac{n^3}{b^3}+\dfrac{p^3}{c^3}$ es igual a:

A) $\dfrac{m^3+n^3+p^3}{x^3+y^3+z^3}$ B) $\dfrac{m+n+p}{a^3+b^3+c^3}$ C) $\dfrac{m^3+n^3+p^3}{m+n+p}$

RESOLUCIÓN:

* Haciendo: $\dfrac{m}{x}=\dfrac{n}{y}=\dfrac{p}{z}=t$; entonces

$m=xt;\ n=yt;\ p=zt$

* En la expresión pedida:

$$\frac{t^3x^3}{a^3}+\frac{t^3y^3}{b^3}+\frac{t^3z^3}{c^3}=t^3\underbrace{\left(\frac{x^3}{a^3}+\frac{y^3}{b^3}+\frac{z^3}{c^3}\right)}_{1}=t^3$$

* Pero: $\dfrac{m^3+n^3+p^3}{x^3+y^3+z^3}=t^3\left(\dfrac{m^3+n^3+p^3}{m^3+n^3+p^3}\right)=t^3$

RPTA: "A"

PROBLEMA 38 :

Si $x-y=2$, entonces calcular el valor de E:

$$E=\frac{1}{x^2-xy+y^2}-\frac{y-x}{x^2-y^2}-\frac{3x+xy-y}{x^3+y^3}$$

A) 0 B) 1 C) -1 D) x E) $x-y$

RESOLUCIÓN:

* Transformando y reduciendo la segunda fracción tendremos: $E=\dfrac{x+y}{x^3+y^3}+\dfrac{1}{x+y}-\dfrac{3x+xy-y}{x^3+y^3}$

* Dando común denominador:

$$E=\frac{x+y+x^2-xy+y^2-3x-xy+y}{x^3+y^3}$$

$$\rightarrow E=\frac{(x-y)^2-2(x-y)}{x^3+y^3}=\frac{4-4}{x^3+y^3}=0$$

RPTA: "A"

PROBLEMA 39 :

Efectuar la siguiente operación:

$$\frac{1}{c(c-a)(c-b)}+\frac{1}{a(a-b)(a-c)}+\frac{1}{b(b-c)(b-a)}$$

Siendo a, b y c números distintos entre sí y distintos de cero.

A) $\dfrac{1}{ab}$ B) $\dfrac{1}{ac}$ C) $\dfrac{1}{bc}$ D) $\dfrac{1}{abc}$ E) abc

RESOLUCIÓN:

* Haciendo denominadores con términos iguales:

$$\frac{1}{c(a-c)(b-c)}+\frac{1}{a(a-b)(a-c)}+\frac{1}{b(b-c)(a-b)}$$

* Operando y simplificando:

$$\frac{ab(a-b)+bc(b-c)-ac(a-c)}{abc(a-b)(a-c)(b-c)}$$

$$=\frac{a^2b-ab^2+b^2c-bc^2-a^2c+ac^2}{abc(a-b)(a-c)(b-c)}$$

$$=\frac{a^2b-ab^2+b^2c-abc-a^2c-bc^2+ac^2+abc}{abc(a-b)(a-c)(b-c)}$$

$$=\frac{b\left(a^2-ab+bc-ac\right)-c\left(a^2+bc-ac-ab\right)}{abc(a-b)(a-c)(b-c)}$$

$$=\frac{(b-c)\left(a^2-ab+bc-ac\right)}{abc(a-b)(a-c)(b-c)}=\frac{(b-c)[a(a-b)-c(a-b)]}{abc(a-b)(a-c)(b-c)}$$

$$=\frac{(b-c)(a-b)(a-c)}{abc(a-b)(a-c)(b-c)}=\frac{1}{abc}$$

RPTA: "D"

PROBLEMA 40 :

Si x, y, z son tres números que cumplen:

$\dfrac{x^2-yz}{x}+\dfrac{y^2-zx}{y}+\dfrac{z^2-xy}{z}=0$, entonces el valor de

la expresión $M=\dfrac{\dfrac{1}{xy}+\dfrac{1}{yz}+\dfrac{1}{zx}}{\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\right)^2}$ es:

A) 1 B) 3 C) $\dfrac{1}{3}$ D) 2 E) $\dfrac{3}{2}$

RESOLUCIÓN:

* De la igualdad a cero, se obtiene:

$$2x^2yz-2y^2z^2+2xy^2z-2x^2z^2+2xyz^2-2x^2y^2=0$$

* Por *(–1)* y descomponiendo:

$$\underline{x^2y^2-2x^2yz+x^2z^2}+\underline{y^2z^2-2xy^2z+x^2y^2}+\underline{x^2z^2-2xyz^2+y^2z^2}=0$$

$$\rightarrow (xy-xz)^2+(yz-xy)^2+(xz-yz)^2=0$$

$$\rightarrow xy-xz=0 \wedge yz-xy=0 \wedge xz-yz=0 \rightarrow x=y=z$$

* Luego :

$$M=\frac{\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}}{\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)^2}=\frac{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^2}}{\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x}+\frac{1}{x}\right)^2}\rightarrow M=\frac{1}{3}$$

RPTA: "C"

PROBLEMA 41 :

Si x, y, z son números que cumplen la condición:

$$x+y+z=0$$
$$x^3+y^3+z^3=21$$

Entonces el valor de la expresión

$$E=\frac{7x}{xy+7x+7}+\frac{y}{yz+y+7}+\frac{z}{xz+z+1}$$ es:

A) 1 B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{3}$ D) $\frac{1}{7}$ E) $\frac{3}{7}$

RESOLUCIÓN:

* Si: $x+y+z=0 \rightarrow x^3+y^3+z^3=3xyz$

* Pero: $x^3+y^3+z^3=21 \rightarrow xyz=7$

* Entonces:

$$E=\frac{7x}{xy+7x+7}+\frac{y}{yz+y+7}+\frac{z}{xz+z+1}$$

$$\rightarrow E=\frac{7x}{xy+7x+7}+\frac{xy}{x(yz+y+7)}+\frac{xzy}{xy(xz+z+1)}$$

$$\rightarrow E=\frac{7x}{xy+7x+7}+\frac{xy}{xyz+xy+7x}+\frac{xyz}{xyzx+xyz+xy}$$

* Reemplazando xyz por 7:

$$E=\frac{7x}{xy+7x+7}+\frac{xy}{7+xy+7x}+\frac{7}{7x+7+xy}\rightarrow E=\frac{7x+xy+7}{xy+7x+7}=1$$

RPTA: "A"

PROBLEMA 42 :

$a\neq b\neq c\neq 0$, entonces al simplificar la siguiente expresión:

$$S=\frac{a^2}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^2}{(b-c)(b-a)}+\frac{c^2}{(c-a)(c-b)}$$

se obtiene:

A) 1 B) $\frac{1}{2}$ C) abc D) $a+b+c$

RESOLUCIÓN:

* Transformando a:

$$S=\frac{-a^2}{(a-b)(c-a)}+\frac{-b^2}{(b-c)(a-b)}+\frac{-c^2}{(c-a)(b-c)}$$

$$\rightarrow S=\frac{-a^2(b-c)-b^2(c-a)-c^2(a-b)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$$

* Luego de factorizar el numerador:

$$S=\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)}=1$$

RPTA: "A"

EJERCICIOS

01 Simplificar: $\frac{x^2+x}{x+1}$

A) 1 B) 2 C) x D) $x+1$ E) $\frac{1}{x+1}$

02 Simplificar: $\frac{2x^2+2x}{x+1}$

A) $2x$ B) 2 C) 4
D) $x+1$ E) $2x+1$

03 Efectuar: $\frac{3x^2+3}{x^2+1}$

A) 3 B) x C) x^2
D) 1 E) $x+1$

04 Simplificar: $\frac{x^2y+xy^2}{x(x+y)}$

A) 1 B) x C) y D) xy E) $x+y$

05 Simplificar: $\frac{4x+2y}{y+2x}$

A) 4 B) $2x$ C) $2y$ D) 2 E) $\frac{1}{2}$

06 Efectuar: $\frac{x^2+3x+2}{(x+1)(x+3)}$

A) $\frac{x+2}{x+3}$ B) $\frac{x+1}{x+2}$ C) $\frac{x-1}{x+2}$ D) $\frac{x+2}{x+1}$ E) $\frac{x-2}{x+3}$

07 Simplificar: $\frac{x^2-4}{x+2}$

A) 2 B) 1 C) $x+2$
D) $x+4$ E) $x-2$

08 Simplificar: $\dfrac{x^2-16}{x-4}$

A) $x+4$ B) $x+8$ C) $x-4$ D) $x-8$ E) $x+2$

09 Efectuar: $\dfrac{x^2-(x-2)^2}{(2x-2)}$

A) x B) $2x$ C) 2 D) $x+1$ E) -2

10 Simplificar: $\dfrac{4x^2-y^2}{2x-y}$

A) 1 B) $2x-y$ C) $2x+y$ D) $x+y$ E) 2

11 Simplificar: $\dfrac{x^2-5x+4}{x^2-3x-4}$

A) $\frac{x+1}{x-1}$ B) $\frac{x-2}{x-4}$ C) $\frac{x-1}{x+1}$ D) 1 E) $\frac{x-4}{x-2}$

12 Simplificar: $\left(\dfrac{x+2}{x^2}\right)\left(\dfrac{x^2+x}{2x+4}\right)\div\left(\dfrac{x+1}{4x}\right)$

A) 1 B) 2 C) 4 D) 8 E) $2x$

13 Simplificar: $\dfrac{x^3y-y^3x}{x^2y-xy^2}$

A) $x-y$ B) $\frac{x+y}{x-y}$ C) $\frac{x-y}{x+y}$ D) $x+y$ E) 1

14 Simplificar: $\dfrac{x^2-4xy+3y^2}{y^2-x^2}$

A) $\frac{x-3y}{x+y}$ B) $\frac{3y-x}{x+y}$ C) $\frac{3x-y}{x-y}$ D) $\frac{3x-y}{x+y}$ E) $\frac{x+3y}{x-y}$

15 Simplificar: $\dfrac{6x^2y-3xy^2}{2xy^2-4x^2y}$

A) $\frac{3}{2}$ B) $\frac{3y}{2}$ C) $-\frac{3}{2y}$ D) $-\frac{3y}{2}$ E) $-\frac{3}{2}$

16 Simplificar: $\dfrac{r^3s+3r^2s+9rs}{r^3-27}$

A) $\frac{rs}{r-3}$ B) $\frac{r}{r-3}$ C) $\frac{s}{r-3}$ D) $\frac{r-3}{s}$ E) $\frac{s-3}{r}$

17 Simplificar:

$$\frac{9}{3x+3}\times\frac{x^2-1}{6}\div\frac{x-1}{2}$$

A) $\frac{x-1}{2}$ B) 2 C) 1 D) $\frac{x}{2}$ E) $\frac{x-1}{3}$

18 Simplificar:

$$(2x^2-5x+2)\div\left(\frac{2x-1}{3}\right)$$

A) 3 B) $x-2$ C) $\frac{x-2}{3}$ D) $\frac{x-1}{2}$ E) $\frac{x+2}{3}$

19 Simplificar:

$$\left(\frac{x^2-5x+6}{x^2+7x-8}\right)\div\left(\frac{9-x^2}{64-x^2}\right)\times\frac{(x+3)}{(8-x)}$$

A) $-\frac{(x-2)}{(x-1)}$ B) $\frac{x+2}{x+1}$ C) $\frac{x-2}{x-1}$ D) $\frac{x+2}{x-1}$ E) $-\frac{(x+2)}{x+1}$

20 Simplificar:

$$\frac{x^2+3x}{4x^2-4}\times\frac{2x^2+2x}{x^2-9}\times\frac{x^2-4x+3}{x^2}$$

A) 2 B) 1 C) x D) $\frac{x}{y}$ E) $\frac{1}{2}$

21 Simplificar: $\dfrac{x^2+7x+12}{x^2+3x-4}$

A) $\frac{x+1}{x+3}$ B) $\frac{x+3}{x-1}$ C) $\frac{x+4}{x-1}$ D) $\frac{x+4}{x-4}$ E) 1

22 Simplificar: $\dfrac{x^2-2x-35}{x^2-11x+28}$

A) $\frac{x+5}{x-4}$ B) $\frac{x+5}{x+4}$ C) $\frac{x-7}{x-4}$ D) $\frac{x-4}{x-7}$ E) $\frac{x-7}{x+4}$

23 Simplificar: $\dfrac{x^2-7x+12}{x^2-2x-8}$

A) $\frac{x+3}{x-2}$ B) $\frac{x+2}{x-3}$ C) $\frac{x+2}{x+3}$ D) $\frac{x-3}{x+2}$ E) 2

24 Simplificar:

$$\frac{x^2+4ax+3a^2}{x^2+(a+b)x+ab}$$

A) $x+3a$ B) $x+b$ C) $\frac{x+3a}{x+b}$ D) $\frac{x+a}{x+b}$ E) $\frac{x+a}{x-a}$

25 Luego de simplificar:

$$\frac{x^2+4x-21}{x^2-12x+27}$$

Sumar el numerador y denominador simplificado.

A) 2 B) -2 C) $2x+2$ D) $2x-9$ E) $2x$

26 Efectuar:

$$\frac{x^2+3x+2}{x^2+5x+6}+\frac{x+5}{x+3}$$

A) $\frac{x+1}{x+3}$ B) 2 C) $\frac{x+1}{x-3}$ D) $\frac{2x+5}{x-3}$ E) $\frac{x+5}{x+3}$

27 Efectuar:

$$\frac{x^2+2x}{x+2}+\frac{x^2+2x-8}{x^2-4}$$

A) x B) $x+2$ C) $2x+4$ D) 2 E) $\frac{x+2}{x-2}$

28 Efectuar:

$$\frac{x^2+x}{2x(x+1)}\div\frac{x+1}{2x}+\frac{x+2}{x+1}$$

A) 1 B) 2 C) -1 D) -2 E) 4

29 Simplificar:

$$\frac{\dfrac{m^2+m}{m+2}}{\dfrac{m}{m+2}}$$

A) 1 B) m C) $m+1$ D) $m+2$ E) $\frac{m+1}{m}$

30 Simplificar:

$$\frac{\dfrac{m^2+3m+2}{m^2+5m+6}}{\dfrac{m^2-1}{m^2+2m-3}}$$

A) 1 B) 0 C) $m+1$

D) $m+2$ E) $m-1$

31 Simplificar: $\dfrac{m+1}{m-2}+\dfrac{m-5}{m-2}+\dfrac{m+4}{m+3}+\dfrac{2m+5}{m+3}$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

32 Simplificar: $\dfrac{x+3}{x+1}+\dfrac{x+5}{x-3}+\dfrac{3x+1}{x+1}+\dfrac{x-11}{x-3}$

A) 4 B) 6 C) 8 D) 3 E) 1

33 Calcular el numerador simplificado de:

$$\left(\frac{x^2+2x}{x^2+3x}\right)\times\left(\frac{x^2+8x+15}{x^2+3x+2}\right)$$

A) $x+2$ B) $x+3$ C) $x+5$ D) $x+1$ E) x

34 Luego de simplificar:

$$\frac{x^2-1}{x^2+4x+3}\times\frac{x^2+5x+6}{x^2+7x+10}\div\frac{x-1}{x+5}$$

indique la suma del numerador y denominador simplificado.

A) 1 B) 2 C) 0 D) $x+2$ E) $2x+6$

PRIMERA PRACTICA DIRIGIDA

01 Al efectuar: $(a^{-1}+b^{-1})(a+b)^{-1}$

se obtiene:

A) ab B) $a^{-1}b^{-1}$ C) 1 D) a/b E) b/a

02 Simplificar la expresión:

$$\frac{a^2-4}{6a^2+12a};a\neq-2$$

A) $\dfrac{a-2}{6}$ B) $\dfrac{a+2}{6}$ C) $\dfrac{a-2}{6a}$ D) $\dfrac{a+2}{6a}$ E) $\dfrac{1}{6a}$

03 Simplificar: $\dfrac{x^2-x-12}{x^2+4x+3}$

e identificar el numerador

A) $x-4$ B) $x+3$ C) $x+1$ D) $x-3$ E) $x+4$

04 Si:

$$x=1-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{2}}}\ \wedge\ z=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}}$$

entonces xz es:

A) 1/4 B) 8/5 C) 16/5 D) 5/4 E) 5/8

05 Dar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

( ) $\dfrac{w}{x}+\dfrac{y}{z}=\dfrac{wz+xy}{xz}$

( ) $\dfrac{w}{x}+\dfrac{y}{z}=\dfrac{wz}{xy}$

( ) $x+\dfrac{y}{z}=\dfrac{xz+y}{z}$

A) VVV B) VFV C) VVF D) FFV E) FVF

06 El equivalente de:

$$\frac{\left[\dfrac{4}{x^2}+\dfrac{2}{x}+1\right]\left[\dfrac{x}{x^3-8}\right]}{\dfrac{1}{x^2-2x}}$$

es:

A) x B) $\dfrac{1}{x}$ C) 1 D) $x-2$ E) $\dfrac{1}{x-2}$

07 Reducir: $n+1-\dfrac{n^3+5n^2-18}{n^2+5n+6}$

A) $\dfrac{n+3}{n+2}$ B) $\dfrac{n+8}{n+3}$ C) $\dfrac{n+8}{n+2}$ D) $\dfrac{n+2}{n+3}$ E) 1

08 Efectuar:

$$\left[x-3+\frac{5x}{2x-6}\right]\div\left[2x-1+\frac{15}{x-3}\right]$$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 1/2 E) 1/3

09 Reducir a su mínima expresión:

$$\left[\frac{x^2-(m+n)x+mn}{x^2-n^2}\right]\left[\frac{x^2-p^2}{x^2-(m+p)x+mp}\right]$$

A) $\dfrac{x-m}{x-n}$ B) $\dfrac{x+p}{x+n}$ C) $\dfrac{x-n}{x-p}$ D) $\dfrac{x-p}{x-m}$ E) $\dfrac{x-m}{x+n}$

10 Si se verifica la identidad:

$$\frac{3x+4}{x^2+3x+2}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+2}$$

calcular: A^2+B^3

A) 0 B) 2 C) 9 D) 5 E) 4

11 Simplificar la fracción:

$$\frac{\left(\dfrac{x+2a}{x+a}\right)^2-\left(\dfrac{x+2a}{x+a}\right)-2}{\dfrac{x+2a}{x+a}-2}$$

Dar como respuesta la suma del numerador y denominador.

A) $2x+3a$ B) $2x$ C) $2x+4a$ D) $2x-a$ E) $3x+4a$

12 Efectuar:

$$\left[\frac{b}{c}+1\right]-\left[1+\cfrac{\dfrac{a+b}{c}+1}{\dfrac{a+c}{b}+1}\right]$$

A)a *B)-b* *C)1/c* *D)1* *E)0*

13 Calcular a^2+b^2, si la fracción:

$$\frac{(a+b)x+(a-b)y+1}{4x+2y+1}$$

tiene siempre un valor constante sin importar el valor que tome x e y.

A)8 *B)9* *C)10* *D)13* *E)5*

14 Dado:

$$E(x)=\frac{nx+1}{x-4}$$

Proporcionar «n», si $E(E(x))$ es independiente de «x».

A) $\frac{1}{2}$ B) $-\frac{1}{2}$ C) 4 D) $\frac{1}{4}$ E) $-\frac{1}{4}$

15 Señalar el denominador luego de simplificar:

$$\left[\left(\frac{m^2-3mn+2n^2}{m+n-mn-n^2}\right)\left(\frac{m^2+3mn+2n^2}{m-n+mn-n^2}\right)\right]+\frac{m^2-4n^2}{(1-n)^2}$$

A)n+1 *B)n–1* *C)1 – n* *D)m+n* *E)n – m*

16 Dada la expresión:

$$E=\left[\frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{y+z}}{\frac{1}{x}-\frac{1}{y+z}}\right]\left[1+\frac{y^2+z^2-x^2}{2yz}\right]$$

hallar: $\sqrt{2yzE}$, siendo $x, y, z \in R^+$

A)xyz *B)x+y+z* *C)1+xyz* *D)1+x+y+z* *E)1*

17 Si se verifica:

$$\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1+x}-\frac{2x}{1+x^2}-\frac{4x^3}{1+x^4}-\frac{8x^7}{1+x^8}\equiv\frac{ax^b}{1-x^{16}}$$

calcular: $a+b$

A)29 *B)30* *C)31* *D)32* *E)33*

18 Qué valor asume la expresión:

$$\frac{a^n}{2na^n-2nx}+\frac{b^n}{2nb^n-2nx}$$

cuando se sustituye «x» por :

$$\frac{a^n+b^n}{2}$$

A) 1 B) $\frac{1}{n}$ C) $\frac{n}{n+1}$ D) $\frac{n}{n-1}$ E) n

19 Simplificar:

$$\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}+\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+\frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}$$

A)x *B)3x* *C)1* *D)3* *E)0*

20 Hallar la suma:

$$S=\frac{1}{x^2+x}+\frac{1}{x^2+3x+2}+\frac{1}{x^2+5x+6}+...+\frac{1}{x^2+(2k-1)x+k^2-k}$$

A) $\frac{k-x}{kx}$ B) $\frac{1}{k(x+k)}$ C) $\frac{x}{k(x+k)}$ D) $\frac{1}{x(x+k)}$ E) $\frac{k}{x(x+k)}$

SEGUNDA PRACTICA DIRIGIDA

01 Simplificar : $\frac{(x^2-3x-4)(x^2-5x+6)}{(x^2-6x+8)(x^2-2x-3)}$

A) $\frac{x+2}{x-1}$ B) $\frac{x-2}{x+1}$ C) $\frac{x-2}{x-1}$ D) $\frac{x+2}{x+1}$ E) 1

02 Simplificar : $(x^2-x-20)(x^2-7x+10)^{-1}$

A) 1 B) $\frac{x-4}{x-2}$ C) $\frac{x+4}{x+2}$ D) $\frac{x+4}{x-2}$ E) $\frac{x-4}{x+2}$

03 Efectuar y dar su forma más simple:

$$\frac{3n^2-4n-15}{n^2-5n+6}$$

y dar como respuesta el numerador de la fracción reducida:

A) 3n – 5 *B) 3n + 5* *C) 3n + 1* *D) n – 2* *E) 4n – 3*

04 Simplificar : $\frac{1+4a+4a^2}{1-4a^2}$

y proporcione la suma del numerador y denominador de la fracción reducida

A) 0 *B) 4a* *C) 2* *D) 1+a* *E) 2a+1*

05 Simplificar : $\dfrac{\frac{2x-2a}{x^2+2ax+a^2}}{\frac{x-a}{x+a}}$

A) $\frac{1}{x-a}$ B) $\frac{2}{x+a}$ C) $\frac{2}{x-a}$ D) $\frac{1}{x+a}$ E) $\frac{x-a}{x+a}$

06 Simplificar: $\frac{a(a+c)+b(c-b)}{c(a+c)+b(a-b)}$

A) $\frac{a+b}{b+c}$ B) $\frac{a-b}{b+c}$ C) $\frac{a+b}{a-c}$ D) $\frac{a-c}{a-b}$ E) 1

07 Efectuar: $R=\frac{x^2-5x+6}{x^2-x-2}+\frac{x^2+x-20}{x^2-3x-4}$

A) $\frac{2}{x+1}$ B) $\frac{3}{x-2}$ C) $\frac{x-2}{x-1}$ D) 3 E) 2

08 Reducir:

$$A=\left\{\frac{x^2-5x+6}{x^2-9x+20}\right\}\div\left\{\frac{x^2-9x+18}{x^2-11x+30}\times\frac{x^2-2x}{x^3-4x^2}\right\}$$

A) $x+1$ B) $x-2$ C) x D) $2x$ E) $3x$

09 Simplificar: $M=\dfrac{x^5+x^4+x^3+x^2+x+1}{x^4+x^2+1}$

A) $x+2$ B) $x-1$ C) $x+1$ D) x^2-2 E) x^2+2

10 Efectuar: $\dfrac{x^2+y^2}{x^1+y^{-1}}$

A) $\dfrac{(x^2+y^2)xy}{x+y}$ B) $\dfrac{x^2+y^2}{xy(x+y)}$ C) $\dfrac{x^2+y^2}{x^2y^2(x+y)}$ D) $\dfrac{x+y}{xy(x^2+y^2)}$

11 Efectuar : $R=\dfrac{1}{3x-9}+\dfrac{5x-3}{3x^2-27}-\dfrac{1}{x+3}$

A) $\dfrac{1}{x-3}$ B) $\dfrac{1}{x+3}$ C) $\dfrac{2}{x-3}$ D) $\dfrac{2}{x+3}$ E) $\dfrac{2x}{x^2-9}$

12 Reducir : $\left(\dfrac{1-a^{-1}}{a}\right)^{-1}-\left(1-a^{-1}\right)^{-1}$; $(a\neq 0)$

A) $a+1$ B) $a-1$ C) a D) $\dfrac{2}{a}$ E) $\dfrac{a}{2}$

13 Al simplificar la fracción: $\dfrac{a^2+b^2-c^2+2ab}{a^2+c^2-b^2+2ac}$

dar como respuesta la suma del numerador y del denominador de la fracción simplificada

A) $2c$ B) $2b$ C) $2a$ D) $a-b$ E) $2(a+b+c)$

14 Hallar el equivalente de : $\dfrac{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b-a}}{\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{a-b}}$; $a\neq b$

A) $-b/a$ B) $-a/b$ C) $-a^2/b^2$ D) $-b^2/a^2$ E) $1/ab$

15 Simplificar: $\dfrac{a^2(a-b)+ab(a-b)}{a^2(a^2-b^2)}$

A) 1 B) $1/b$ C) $1/a$ D) a/b E) b/a

16 Al descomponer en fracciones parciales se obtiene: $\dfrac{2x+8}{x^2+2x-3}=\dfrac{A}{x+3}+\dfrac{B}{x-1}$

Calcular el valor de A y B .

A) A=1, B=2 B) A=1/2, B=2 C) A=−1/2, B=5/2 D) A=B=1, B=1 E) A=0, B=5/2

17 Simplificar: $\dfrac{a-\dfrac{b}{1-\dfrac{a}{a+b}}}{1+\dfrac{b}{a-b}}$

y dar el denominador de la fracción simplificada:

A) a B) b C) ab D) $a+b$ E) $a-b$

18 Efectuar:

$$\frac{3}{2x-4}-\frac{1}{x+2}-\frac{x+10}{2x^2-8}$$

A) 1 B) $\dfrac{3x}{x-1}$ C) $\dfrac{x}{x^2-4}$ D) 0 E) $\dfrac{x-1}{x-3}$

19 Efectuar: $\dfrac{x^2-1}{x^2+x-2}+\dfrac{x^2+5x+4}{x^2+3x+2}$

indicar la diferencia del numerador y denominador

A) $x+3$ B) $2x+3$ C) $2x+5$ D) $2x-3$ E) $2x+1$

20 Luego de efectuar :

$$R=\frac{\left(\dfrac{b^2}{a^2}+\dfrac{b}{a}+1\right)\left(\dfrac{a}{a^3-b^3}\right)}{\dfrac{1}{a^2-ab}}$$

A) 1 B) b C) ab D) a/b E) a^2b

21 Simplificar: $\dfrac{\dfrac{a+b}{a-b}+\dfrac{a-b}{a+b}}{\dfrac{a+b}{a-b}-\dfrac{a-b}{a+b}}$

A) 1 B) ab C) $\dfrac{a^2+b^2}{2ab}$ D) $\dfrac{a}{b}$ E) a^2+b^2

22 Simplificar: $\dfrac{(1+xy)^2-(x+y)^2}{(1-x^2)(1+y)}$

A) $1+x$ B) $1+y$ C) $1-x$ D) $1-y$

23 Reducir:

$$N=\frac{a+2}{a-b-1}+\frac{b+2}{b-c-1}+\frac{c+2}{c-a-1}-\frac{b+3}{a-b-1}-\frac{c+3}{b-c-1}-\frac{a+3}{c-a-1}$$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

CLAVES DE LA PRIMERA PRACTICA									
1)B	2)C	3)A	4)C	5)A	6)C	7)C	8)D	9)B	10)C
11)E	12)E	13)C	14)E	15)A	16)B	17)C	18)B	19)C	20)E

CLAVES DE LA SEGUNDA PRACTICA									
1)E	2)D	3)B	4)C	5)B	6)A	7)E	8)C	9)C	10)A
11)A	12)C	13)C	14)D	15)C	16)C	17)A	18)D	19)A	20)A
21)C	22)D	23)C							



RADICACION 10

OBJETIVO:

Conocer el procedimiento para extraer la raíz cuadrada de polinomios, así como manipular la simplificación de radicales.

INTRODUCCIÓN:

La Radicación , se expresa con el símbolo $\sqrt{\ }$. No todos conocen que este signo (símbolo) es una variante de la letra latina «*r*» primera de la palabra latina «*radix*» que significa raíz. En otros tiempos (en el siglo *XVI*), el símbolo de la raíz , no era la «*r*» minúscula, sino la mayúscula, la *R* y junto a ella se escribía la primera letra de las palabras latinas «*quadratus*», la *q* o la primera «*cubus*», la *c*, señalando con ello que la raíz a extraer era cuadrada o cúbica , escribían por ejemplo : ***R.q.4352*** en lugar de la moderna expresión $\sqrt{4352}$

RAÍZ CUADRADA DE POLINOMIOS

Dado un polinomio $P_{(x)}$ de grado PAR, determinar su raíz cuadrada consiste en hallar otros dos polinomios llamados raíz cuadrada y residuo, denotados por $r_{(x)}$ y $R_{(x)}$ respectivamente. De tal manera que estos verifiquen la identidad fundamental de la radicación.

$$P_{(x)} \equiv r^2_{(x)} + R_{(x)}$$

* Los cuales resultan del algoritmo :

$$\begin{array}{l|l} \sqrt{P_{(x)}} & r_{(x)} \\ \hline R_{(x)} & \end{array}$$

* Donde: $P_{(x}$ = Polinomio radicando

$r_{(x)}$ = Polinomio raíz

$R_{(x)}$ = Polinomio residuo

CLASIFICACIÓN:

1°) Una raíz cuadrada será EXACTA, si su residuo es un polinomio identicamente nulo. Es decir :

$$P(x) \equiv r^2(x) \text{ ; ya que } R_{(x)} \equiv 0$$

EJEMPLO :

$$\sqrt{4x^2 - 12x + 9} \equiv 2x - 3 \Leftrightarrow 4x^2 - 12x + 9 \equiv (2x-3)^2$$

2°) Una raíz cuadrada será *INEXACTA* , si su residuo *NO* es un polinomio identicamente nulo. Es decir :

$$P(x) \equiv r^2(x) + R(x);\ \text{siendo}\ R(x) \neq 0$$

EJEMPLO:

$\sqrt{16x^2 - 8x + 5}$ no es exacto, debido a que:

$16x^2 - 8x + 5 \equiv (4x-1)^2 + 4$; siendo:

$r_{(x)} = 4x - 1$ y $R_{(x)} = 4$

PROPIEDADES DE GRADO

$$1°)\ 0 \leq °|R(x)| < °|r(x)|$$

$$2°)\ °|r(x)| = \frac{°|P(x)|}{2} = n \in N^*; n \geq 1$$

PROCEDIMIENTO PARA EXTRAER LA RAÍZ CUADRADA DE UN POLINOMIO

Considerando que el polinomio es de grado PAR, se siguen los siguientes pasos:

1°) *El polinomio radicando debe estar ordenado , generalmente en forma decreciente y no necesariamente ser completo.*

2°) *Se extrae la raíz cuadrada al primer término del polinomio , el cual será el primero de la raíz . Luego, este se eleva al cuadrado y el resultado se resta del polonomio.*

3°) *Se bajan los dos términos siguientes del radicando, y paralelamente se duplica la raíz encontrada. Se divide el 1° término bajado entre la expresión duplicada, obteniéndose el segundo término de la raíz.*

4°) *Este término obtenido se le adiciona a la raíz duplicada , obteniéndose un resultado. Este resultado se multiplica por el segundo término de la raíz , para luego restarlo de los términos bajados del polinomio.*

5°) *Se bajan los dos términos subsiguientes y se repite el paso anterior , tantas veces hasta que el residuo sea de grado menor que el de la raíz o dicho resto sea un polinomio idénticamente nulo.*

EJEMPLO 1:

Extraer la raíz cuadrada del polinomio :

$$P(x) = x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 11x + 23$$

RESOLUCIÓN:

$\sqrt{x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 11x + 23}$	$x^2 - 4x + 4$
$-x^4$	$(2x^2 - 4x)(-4x) = -8x^3 + 16x^2$
$0 - 8x^3 + 24x^2$	
$8x^3 - 16x^2$	$(2x^2 - 8x + 4)4 = 8x^2 - 32x + 16$
$8x^2 - 11x + 23$	
$-8x^2 + 32x - 16$	
$21x + 7$ ....residuo	

EXPLICACIÓN :

* Hallamos primero la raíz cuadrada de x^4 que es x^2, y que viene a primer termino de la raíz del polinomio , a x^2 elevamos al cuadrado que da x^4 este cuadrado se resta del primer termino del polinomio.

* Luego bajamos los dos términos siguientes $-8x^3 + 24x^2$, hallamos el duplo de la raíz hallada de x^2 es decir $2x^2$, dividimos $-8x^3 \div 2x^2 = -4x$ este es el segundo término de la raíz, escribimos $-4x$ al lado de $2x^2$ y se forma el binomio $2x^2 - 4x$, este binomio se multiplica por $-4x$ y da: $(2x^2-4x)(-4x) = -8x^3 + 16x^2$, este producto lo restamos (o cambiándole de signo)de $-8x^3 + 24x^2$, la diferencia es $8x^2$.

Bajamos los dos términos siguientes y tenemos $8x^2 - 11x + 23$ se duplica la parte de la raíz hallada $2(x^2 - 4x) = 2x^2 - 8x$, dividimos $8x^2 \div 2x^2 = 4$ es el tercer término de la raíz, el resultado 4 se escribe al lado $2x^2 - 8x$ y se forma el trinomio $2x^2 - 8x + 4$ y se multiplica por 4 , es decir : $(2x^2 - 8x + 4)4 = 8x^2 - 32x + 16$, este producto se resta (cambiándole de signo) de $8x^2 - 11x + 23$ y nos da $21x + 7$ que es el residuo de la raíz cuadrada de $P(x)$.

EJEMPLO 2:

Determinar «a» y «b» si el polinomio $P(x) = 4x^4 + ax^3 + bx^2 + 24x + 16$, tiene raíz cuadrada exacta.

RESOLUCIÓN:

* El polinomio raíz es de segundo grado por lo tanto asumo un polinomio convenientemente:

$$4x^4 + ax^3 + bx^2 + 24x + 16 \equiv (2x^2 + nx + 4)^2$$

* Efectuando :

$$4x^4 + ax^3 + bx^2 + 24x + 16 \equiv 4x^4 + 4nx^3 + (n^2 + 16)x^2 + 8nx + 16$$

* Por identidad de polinomios:

$$a = 4p; \quad b = n^2 + 16; \quad 8n = 24$$

* Por lo tanto:

$$n = 3 \ ; \ b = 25 \wedge a = 12$$

EJEMPLO 3 :

Extraer la raíz cuadrada del polinomio:

$$P_{(x)} = 4x^4 - 12x^3 + 13x^2 - 6x + 1$$

RESOLUCIÓN:

$\sqrt{4x^4 - 12x^3 + 13x^2 - 6x + 1}$	$2x^2 - 3x + 1$	
$-4x^4$	$\frac{-12x^3}{2(2x^2)} = -3x$	$(4x^2 - 3x)(3x)$
$-12x^3 + 13x^2$		
$12x^3 - 9x^2$	$\frac{4x^2}{2(2x^2)} = 1$	$(4x^2 - 6x + 1)(-1)$
$4x^2 - 6x + 1$		
$-4x^2 + 6x - 1$		
0		

* De donde:

Raíz : $r_{(x)} = 2x^2 - 3x + 1$

Residuo : $R_{(x)} = 0$

EJEMPLO 4 :

Determinar la raíz cuadrada del polinomio:

$$P_{(x)} = 16x^{10} + 24x^7 - 8x^5 + 9x^4 - 7x^2 + 4$$

RESOLUCIÓN:

$\sqrt{16x^{10} + 24x^7 - 8x^5 + 9x^4 - 7x^2 + 4}$	$4x^5 + 3x^2 - 1$	
$-16x^{10}$	$\frac{24x^7}{2(4x^5)} = 3x^2$	$(8x^5 + 3x^2)(-3x^2)$
$24x^7 - 8x^5 + 9x^4$		
$-24x^7 \quad -9x^4$	$\frac{-8x^5}{2(4x^5)} = -1$	$(8x^5 + 6x^2 - 1)(1)$
$-8x^5 \quad -7x^2 + 4$		
$8x^5 \quad +6x^2 - 1$		
$-x^2 + 3$		

* De donde:

Raíz : $r_{(x)} = 4x^5 + 3x^2 - 1$

Residuo: $R_{(x)} = -x^2 + 3$

RAÍZ CÚBICA DE POLINOMIOS

Para extraer la raíz cúbica de un polinomio se sigue el siguiente procedimiento :

I) Se ordena el polinomio y Se extrae la raíz cúbica de su primer término , que será el primer término de la raíz , este término se eleva al cubo y se resta del polinomio.

II) Se bajan los tres términos siguientes del polinomio y se divide el primero de ellos por el triple del cuadrado del término ya hallado de la raíz ; el cociente de esta division es el segundo término de la raíz.

III) Se forman tres productos:

* *Triple del cuadrado del primer término de la raíz por el segundo término.*
* *Triple del primer término por el cuadrado del segundo.*

** Cubo del segundo término de la raíz.*

Estos productos se restan (cambiandoles los signos) de los tres términos que se había bajado.

IV) Se bajan los términos que faltan del polinomio y se divide el primer término del residuo por el triple del cuadrado de la parte ya hallada de la raíz . El cociente es el tercer término de la raíz.

Se forman tres productos:

* Triple del cuadrado del binomio que forman **1°** y **2°** término de la raíz por el **3°** término.

* Triple de dicho binomio por el cuadrado del tercer término.

* Cubo del tercer término de la raíz.

Estos productos se restan (reduciendo antes términos semejantes si las hay) del residuo del polinomio. Si la diferencia es cero, la operación ha terminado si aún quedan términos en el residuo , se continúa el procedimiento anterior.

EJEMPLO:

Determinar la raíz cúbica de :

$$x^6 - 9x^5 + 33x^4 - 63x^3 + 66x^2 - 36x + 9$$

RESOLUCIÓN:

$$\sqrt[3]{x^6 \underbrace{-9x^5+33x^4-63x^3}_{\downarrow}+66x^2-36x+9} \quad \underline{x^2-3x+2}$$

$$\underline{-x^6} \qquad\qquad 3(x^2)^2 = 3x^4$$

$$-9x^5+33x^4-63x^3$$

$$\underline{9x^5-27x^4+27x^3} \qquad\qquad 3(x^2)^2(-3x) = -9x^5$$

$$6x^4-36x^3+66x^2-36x+9 \qquad\qquad 3(x^2)(-3x)^2 = 27x^4$$

$$\underline{-6x^4+36x^3-66x^2+36x-8} \qquad\qquad (-3x)^3 = -27x^3$$

$$1 \ldots\ldots \text{residuo}$$

$$3(x^2-3x)^2 = 3x^4-18x^3+27x^2$$

$$3(x^2-3x)^2(2) = 6x^4-36x^3+54x^2$$

$$3(x^2-3x)(2)^2 = 12x^2-36x$$

$$2^3 = 8$$

EXPLICACIÓN:

* Hallamos primero la raíz cúbica de x^6 que es x^2 ; este es el primer término de la raíz x^2 se eleva al cubo y se resta x^6.

* Bajamos los tres términos siguientes del polinomio; se halla el triple del cuadrado de x^2 que es $3x^4$ y se divide $-9x^5 \div 3x^4 = -3x$. Este es el segundo término de la raíz.

Se forma tres productos:

* Triple del cuadrado de x^2 por $-3x$ que da $-9x^5$.

* Triple de x^2 por $(-3x)^2$ que da $27x^4$.

* Cubo de $-3x$ que da $-27x^3$.

Estos productos se restan (cambiandoles los signos) de $-9x^5 + 33x^4 - 63x^3$; nos queda $6x^4 - 35x^3$ y bajamos los términos que faltan del polinomio.

* Se halla el triple del cuadrado de la parte ya hallada de la raíz que es el binomio $x^2 - 3x$ y según se detalla arriba el triple del cuadrado de este binomio nos da el trinomio $3x - 18x^3 + 27x^2$.

* Dividimos el primer término del residuo $6x^4$ entre el primer término de este trinomio y tenemos $6x^4 \div 3x^4 = 2$. Este es el tercer término de la raíz.

Se forman tres productos:

* Triple del cuadrado del binomio $x^2 - 3x$ por **2** que nos da $6x^4 - 36x^3 + 54x^2$.

* Triple del binomio $x^2 - 3x$ por 2^2 que nos da $12x^2 - 36x$

* Cubo de **2** que nos da *8*.

Estos productos se restan, cambiandoles los signos, del residuo del polinomio y nos da uno .

RADICALES DOBLES

Se llaman así a aquellos radicales que dentro de un radical se encuentran otros radicales relacionados mediante adiciones o sustracciones , por lo general son de la forma :

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}}; \ \sqrt[3]{A \pm \sqrt{B}}; \ \sqrt{A \pm \sqrt{B} \pm \sqrt{C} \pm \sqrt{D}}$$

Para transformar radicales dobles a simples, se debe tomar en cuenta lo siguiente:

PRIMERA FORMA ($\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$):

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+C}{2}} \pm \sqrt{\frac{A-C}{2}}$$

* Donde $C = \sqrt{A^2 - B}$

* Además «$A^2 - B$» debe ser cuadrado perfecto

OBSERVACIÓN:

Para la demostración asumiremos el siguiente sistema:

$$\sqrt{A + \sqrt{B}} = \sqrt{m} + \sqrt{n} \ldots\ldots\ldots\ldots (I)$$

$$\sqrt{A - \sqrt{B}} = \sqrt{m} - \sqrt{n} \ldots\ldots\ldots\ldots (II)$$

que al resolverlo adecuadamente , resulta:

$$m = \frac{A+C}{2}; \ n = \frac{A-C}{2}$$

donde $C = A^2 - B$

EJEMPLO 1:

Descomponer : $\sqrt{7 + \sqrt{40}}$

RESOLUCIÓN:

* En este caso : $A = 7$ y $B = 40$

* Luego : $C=\sqrt{7^2-40}=\sqrt{9}=3$

* Entonces:

$$\sqrt{7+\sqrt{40}}=\sqrt{\frac{7+3}{2}}+\sqrt{\frac{7-3}{2}} \rightarrow \sqrt{7+\sqrt{40}}=\sqrt{5}+\sqrt{2}$$

EJEMPLO 2:

Descomponer en radicales simples: $\sqrt{2+\sqrt{3}}$

RESOLUCIÓN:

* Aplicando la fórmula:

$$\sqrt{2+\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{2+C}{2}}+\sqrt{\frac{2-C}{2}}\ ;\ C=\sqrt{2^2-3}=1$$

* Entonces:

$$\sqrt{2+\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{2+1}{2}}+\sqrt{\frac{2-1}{2}}=\sqrt{\frac{3}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}}$$

EJEMPLO 3:

Descomponer en radicales simples: $\sqrt{5-2\sqrt{6}}$

RESOLUCIÓN:

$$\sqrt{5-2\sqrt{6}}=\sqrt{5-\sqrt{24}} \text{ como}: C=\sqrt{25-24}=1$$

$$\rightarrow \sqrt{5-2\sqrt{6}}=\sqrt{\frac{5+1}{2}}-\sqrt{\frac{5-1}{2}}=\sqrt{3}-\sqrt{2}$$

EJEMPLO 4:

Transformar : $\sqrt{12-\sqrt{108}}$

RESOLUCIÓN:

* Identificando : $A = 12$ y $B = 108$

* Luego: $C=\sqrt{12^2-108}=\sqrt{36}=6$

$$\rightarrow \sqrt{12-\sqrt{108}}=\sqrt{\frac{12+6}{2}}-\sqrt{\frac{12-6}{2}}$$

$$\rightarrow \sqrt{12-\sqrt{108}}=\sqrt{9}-\sqrt{3}=3-\sqrt{3}$$

OTRO MÉTODO (REGLA PRACTICA)

$$\boxed{\sqrt{A\pm 2\sqrt{B}}=\sqrt{x+y\pm 2\sqrt{xy}}=\sqrt{x}\pm\sqrt{y}}$$

* Donde: $x > y > 0$

* Es decir:

$$\boxed{\begin{array}{c}\sqrt{A\pm 2\sqrt{B}}=\sqrt{x}\pm\sqrt{y}\\ \text{* Donde}: x+y=A\ ;\ xy=B\end{array}}\quad x>y$$

EJEMPLOS:

* $\sqrt{10+\sqrt{84}}=\sqrt{10+2\sqrt{21}}=\sqrt{10+2\sqrt{21}}=\sqrt{7}+\sqrt{3}$

$7+3 \quad 7\times 3$

se deben deducir mentalmente

Siempre el radical interior debe estar multiplicado por 2, si no lo está, se busca dicha multiplicación, descomponiendo el número del radical interior.

Luego, se busca dos números que sumados den *13* y multiplicados den *12* y se simplifica.

* $\sqrt{21-\sqrt{432}}=\sqrt{21-\sqrt{4\times 108}}=\sqrt{21-2\sqrt{108}}=\sqrt{12}-\sqrt{9}=2\sqrt{3}-3$

$12+9 \quad 12\times 9$

* $\sqrt{5-2\sqrt{6}}=\sqrt{3+2-2\sqrt{3\times 2}}=\sqrt{3}-\sqrt{2}$

* $\sqrt{2+\sqrt{3}}=\sqrt{2+\frac{2}{2}\sqrt{3}}=\sqrt{2+2\sqrt{\frac{3}{4}}}=\sqrt{\frac{3}{2}+\frac{1}{2}+2\sqrt{\frac{3}{2}\times\frac{1}{2}}}=\sqrt{\frac{3}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}}$

SEGUNDA FORMA:

Generalmente toman la siguiente forma:

$$\boxed{\begin{array}{ll}\sqrt{A+\sqrt{B}+\sqrt{C}+\sqrt{D}} & ....(I)\\ \sqrt{A+\sqrt{B}-\sqrt{C}-\sqrt{D}} & ....(II)\end{array}}$$

* Si *(I)* y *(II)* se puede expresar en las formas:

$$\sqrt{A+2\sqrt{xy}+2\sqrt{xz}+2\sqrt{yz}}$$

$$\sqrt{A+2\sqrt{xy}-2\sqrt{xz}+2\sqrt{yz}}$$

* donde: $A = x + y + z$

* entonces se tendría que:

$$\boxed{\begin{array}{c}\sqrt{A+\sqrt{B}+\sqrt{C}+\sqrt{D}}=\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\\ \sqrt{A+\sqrt{B}-\sqrt{C}-\sqrt{D}}=\sqrt{x}-\sqrt{y}-\sqrt{z}\end{array}}$$

EJEMPLO :

Expresar en radicales simples:

$$S=\sqrt{15+\sqrt{60}+\sqrt{84}+\sqrt{140}}$$

RESOLUCIÓN:

* Como : $60 = 4\times 15;\quad 84 = 4\times 21;\quad 140 = 4\times 35$

$$\rightarrow S=\sqrt{15+2\sqrt{15}+2\sqrt{21}+2\sqrt{35}}$$

* ó también:

$$S=\sqrt{15+2\sqrt{3(5)}+2\sqrt{3(7)}+2\sqrt{5(7)}} \rightarrow S=\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7}$$

TERCERA FORMA:

Generalmente toman la siguiente forma:

$$\sqrt[3]{A \pm \sqrt{B}}$$

* La transfromación se puede expresar en las formas:

$$\begin{cases} \sqrt[3]{A+\sqrt{B}} = x+\sqrt{y} \ \ldots\ldots\ldots\ldots(I) \\ \sqrt[3]{A-\sqrt{B}} = x-\sqrt{y} \ \ldots\ldots\ldots\ldots(II) \end{cases}$$

* Para determinar «x» e «y» utilizamos las relaciones

$$C = \sqrt[3]{A^2 - \sqrt{B}} \ \ldots\ldots\ldots\ldots(\alpha)$$

$$A = 4x^3 - 3xC \ \ldots\ldots\ldots\ldots(\beta)$$

$$y = x^2 - C \ \ldots\ldots\ldots\ldots(\lambda)$$

C, se obtiene directamente en *(α)* y se reemplaza en *(β)*

* En *(β)* se forma la ecuación cúbica en «x», la cual se resuelve por tanteos, luego el valor de «x» se reemplaza en *(λ)* y se obtiene el valor de «y»

EJEMPLO:

Hallar la raíz cúbica de: $10+6\sqrt{3}$

RESOLUCIÓN:

* Expresando bajo el radical cúbico, se tendría:

$$S = \sqrt[3]{10+6\sqrt{3}} = \sqrt[3]{10+\sqrt{108}} = x+\sqrt{y}$$

$$A = 10 \ \ y \ \ B = 108 \rightarrow C = \sqrt[3]{10^2 - 108} \rightarrow C = -2$$

* Reemplazando en:

$$A = 4x^3 - 3xC \rightarrow 10 = 4x^3 - 3x(-2)$$

* Tenemos la ecuación: $2x^3 + 3x = 5$

* Por simple inspección: $x = 1$

* Luego: $y = x^2 - C \rightarrow y = 1-(-2) = 3$

* Finalmente: $\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}} = 1+\sqrt{3}$

RACIONALIZACIÓN

Es una operación que consiste en transformar una expresión (con denominador irracional) en otra equivalente parcialmente racional (con denominador racional).

FACTOR RACIONALIZANTE (F.R) :

Es la expresión por la que hay que multiplicar a una cantidad irracional para convertirla en racional.

EJEMPLO :

Racionalizar: $\dfrac{7}{\sqrt{2}}$

RESOLUCIÓN :

* Para racionalizar el denominador multiplicamos y dividimos simultáneamente el numerador y denominador por $\sqrt{2}$, siendo este último el factor racionalizante :

$$\frac{7}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{7\sqrt{2}}{2}$$

PRINCIPALES CASOS QUE SE PRESENTAN

Denominador Irracional	Factor Racionalizante	Denominador Racionalizado
$\sqrt[n]{a^m}$	$\sqrt[n]{a^{n-m}}$	a
$\sqrt{a}+\sqrt{b}$	$\sqrt{a}-\sqrt{b}$	$a-b$
$\sqrt{a}-\sqrt{b}$	$\sqrt{a}+\sqrt{b}$	$a-b$
$\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}$	$\sqrt[3]{a}^2-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b}^2$	$a+b$
$\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}$	$\sqrt[3]{a}^2+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b}^2$	$a-b$

* además : $\sqrt[n]{a} \pm \sqrt[n]{b}$

$$\sqrt[n]{a^{n-1}} - \sqrt[n]{a^{n-2}b} + \ldots\ldots - \sqrt[n]{b^{n-1}}$$

* Debemos recordar:

1) PARA TODO VALOR DE n:

$$(\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{b})(\sqrt[n]{a^{n-1}}+\sqrt[n]{a^{n-2}b}+\ldots\ldots+\sqrt[n]{b^{n-1}}) = a-b$$

2) PARA n IMPAR:

$$(\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b})(\sqrt[n]{a^{n-1}}-\sqrt[n]{a^{n-2}b}+\ldots\ldots+\sqrt[n]{b^{n-1}}) = a+b$$

3) PARA n PAR:

$$(\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b})(\sqrt[n]{a^{n-1}}-\sqrt[n]{a^{n-2}b}+\ldots\ldots-\sqrt[n]{b^{n-1}}) = a-b$$

Uno de los factores es el factor racionalizante del otro.

I) RACIONALIZACIÓN DE MONOMIOS :

En este caso el factor racionalizante *(F.R.)* será un radical homogéneo a la expresión por racionalizar, en donde los exponentes de sus letras serán cantidades que le faltan a los exponentes de la expresión inicial para ser iguales al índice del radical o a uno de sus múltiplos:

EJEMPLOS:

* ***Racionalizar en todos los casos:***

$$1)\ E = \frac{1}{\sqrt[7]{a^2b^3}} \rightarrow F.R. = \sqrt[7]{a^5b^4}$$

$$\Rightarrow E = \frac{1}{\sqrt[7]{a^2b^3}} \times \frac{\sqrt[7]{a^5b^4}}{\sqrt[7]{a^5b^4}} \Rightarrow E = \frac{\sqrt[7]{a^5b^4}}{\sqrt[7]{a^7b^7}} = \frac{\sqrt[7]{a^5b^4}}{ab}$$

2) $E=\dfrac{1}{\sqrt[5]{a^4b}} \to F.R.=\sqrt[5]{ab^4}$

$$\to\ E=\frac{1}{\sqrt[5]{a^4b}} \to E=\frac{\sqrt[5]{ab^4}}{\sqrt[5]{ab^4}}=\frac{\sqrt[5]{ab^4}}{\sqrt[5]{a^5b^5}}=\frac{\sqrt[5]{ab^4}}{ab}$$

3) $E=\dfrac{1}{\sqrt[4]{a^{27}b^{13}}} \to F.R.=\sqrt[4]{ab^3}$

$$\to\ E=\frac{1}{\sqrt[4]{a^{27}b^{13}}}\times\underbrace{\frac{\sqrt[4]{ab^3}}{\sqrt[4]{ab^3}}}_{F.R.}=\frac{\sqrt[4]{ab^3}}{\sqrt[4]{a^{28}b^{16}}}=\frac{\sqrt[4]{ab^3}}{a^7b^4}$$

4) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\times\underbrace{\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}}_{F.R.}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

5) $\dfrac{4}{\sqrt{3}}=\dfrac{4}{\sqrt{3}}\times\underbrace{\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}}_{F.R.}=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$

6) $\dfrac{3}{\sqrt[3]{2}}=\dfrac{3}{\sqrt[3]{2}}\times\dfrac{\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^2}}=\dfrac{3\sqrt[3]{4}}{2}$

II) SEGUNDO CASO :

Cuando el denominador irracional es un binomio de índice dos, de la forma:

$\dfrac{N}{\sqrt{a}\pm\sqrt{b}}$; en este caso se multiplicará por la conjugada del dominador según sea el caso.

$$\boxed{\frac{N}{\sqrt{a}\pm\sqrt{b}}}\quad FR=\sqrt{a}\mp\sqrt{b}$$

* Es decir:

1) La conjugada de: $\sqrt{5}+\sqrt{3}$ es; $\sqrt{5}-\sqrt{3}$.

* Entonces:

$$(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})=\sqrt{5}^2-\sqrt{3}^2=5-3=2$$

2) La conjugada de: $3-\sqrt{2}$ es; $3+\sqrt{2}$.

* Entonces:

$$(3-\sqrt{2})(3+\sqrt{2})=3^2-\sqrt{2}^2=9-2=7$$

3) La conjugada de: $\sqrt{7}+5$ es; $\sqrt{7}-5$.

* Entonces:

$$(\sqrt{7}+5)(\sqrt{7}-5)=\sqrt{7}^2-5^2=7-25=-18$$

EJEMPLOS:

* $\dfrac{3}{\sqrt{7}+2}=\dfrac{3}{\sqrt{7}+2}\times\underbrace{\dfrac{\sqrt{7}-2}{\sqrt{7}-2}}_{F.R}=\dfrac{3(\sqrt{7}-2)}{7-4}=\sqrt{7}-2$

* $\dfrac{4+\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}=\dfrac{4+\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}\times\underbrace{\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}}_{F.R}=\dfrac{4\sqrt{5}+4\sqrt{2}+\sqrt{10}+2}{3}$

* $\dfrac{4}{3-\sqrt{2}}=\dfrac{4}{3-\sqrt{2}}\times\boxed{\dfrac{3+\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}}}=\dfrac{4(3+\sqrt{2})}{9-2}=\dfrac{4}{7}(3+\sqrt{2})$

* $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\times\boxed{\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}}=\dfrac{3+2\sqrt{3}\sqrt{2}+2}{(\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2}=5+2\sqrt{6}$

* $\dfrac{5}{\sqrt{7}-\sqrt{2}}\ \dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{2}}{\sqrt{7}+\sqrt{2}}=\dfrac{5(\sqrt{7}+\sqrt{2})}{7-2}=\sqrt{7}+\sqrt{2}$, donde el denominador es $\sqrt{7}^2-\sqrt{2}^2$

* $\dfrac{2}{\sqrt{6}+2}\cdot\dfrac{\sqrt{6}-2}{\sqrt{6}-2}=\dfrac{2(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{6-4}=\sqrt{6}-2$, donde el denominador es $\sqrt{6}^2-2^2$

III) RACIONALIZACIÓN DE RADICALES QUE SE ESTÁN SUMANDO O RESTANDO Y EN DONDE EL ÍNDICE ES 3 O MÚLTIPLOS DE 3

En este caso para racionalizar se utiliza la suma o difererencia de cubos.

Así:

* $\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}\right)\left(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}\right)=x+y$

* $\left(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}\right)\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}\right)=x-y$

EJEMPLO:

Racionalizar

$E=\dfrac{2}{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}} \to F.R.=\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{8}+\sqrt[3]{4}$

$$\to E=\frac{2}{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}}\times\frac{\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{8}+\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{4^2}+\sqrt[3]{4\times 2}+\sqrt[3]{2^2}}=\frac{2(\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{8}+\sqrt[3]{4})}{(\sqrt[3]{4})^3-(\sqrt[3]{2})^3}$$

$$=\frac{2(\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{8}+\sqrt[3]{4})}{\underbrace{4-2}_{2}}=\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{8}+\sqrt[3]{4}$$

IV) CUANDO EL DENOMINADOR ES UN BINOMIO O POLINOMIO DE LAS FORMAS

$$\sqrt[n]{a}\pm\sqrt[n]{b}$$

$$\sqrt[n]{a^{n-1}}+\sqrt[n]{a^{n-2}b}+\ldots\ldots+\sqrt[n]{b^{n-1}}$$

* Debemos recordar:

1) PARA TODO VALOR DE n:

$$(\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{b})(\sqrt[n]{a^{n-1}}+\sqrt[n]{a^{n-2}b}+.....+\sqrt[n]{b^{n-1}})=a-b$$

2) PARA n IMPAR:

$$(\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b})(\sqrt[n]{a^{n-1}}-\sqrt[n]{a^{n-2}b}+.....+\sqrt[n]{b^{n-1}})=a+b$$

3) PARA n PAR:

$$(\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b})(\sqrt[n]{a^{n-1}}-\sqrt[n]{a^{n-2}b}+.....-\sqrt[n]{b^{n-1}})=a-b$$

Uno de los factores es el factor racionalizante del otro.

EJEMPLO:

Racionalizar: $F=\dfrac{1}{\sqrt[5]{2}-1}$

RESOLUCIÓN:

* Multiplicando el numerador, denominador por el factor racionalizante, obtenemos:

$$F=\left(\frac{1}{\sqrt[5]{2}-1}\right)\left(\frac{\sqrt[5]{2^4}+\sqrt[5]{2^3}+\sqrt[5]{2^2}+\sqrt[5]{2}+1}{\sqrt[5]{2^4}+\sqrt[5]{2^3}+\sqrt[5]{2^2}+\sqrt[5]{2}+1}\right)$$

$$\to F=\frac{\sqrt[5]{16}+\sqrt[5]{8}+\sqrt[5]{4}+\sqrt[5]{2}+1}{\sqrt[5]{2}^5-1^5}=\sqrt[5]{16}+\sqrt[5]{8}+\sqrt[5]{4}+\sqrt[5]{2}+1$$

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1:

Descomponer en radicales simples:

$$A=\sqrt{10+2\sqrt{21}}$$

A) $\sqrt{3}-2\sqrt{7}$ B) $\sqrt{7}+\sqrt{3}$ C) $\sqrt{5}-1$
D) $2\sqrt{2}+1$ E) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$

RESOLUCIÓN:

* Buscamos dos números «a» y «b» cuyas suma sea **10** y producto sea **21**.
Estos números son **7** y **3**, es decir: $a=7$ y $b=3$, con lo cual se tendría:

$$A=\sqrt{10+2\sqrt{21}}=\sqrt{7}+\sqrt{3}$$

RPTA: "B"

PROBLEMA 2:

Reducir y dar el valor de:

$$R=\sqrt{\sqrt{41+12\sqrt{5}}+\sqrt{14-6\sqrt{5}}}$$

A) 3 B) 5 C) –5 D) –3 E) 2

RESOLUCIÓN:

* Descomponiendo por separado:

* $\sqrt{41+12\sqrt{5}}=\sqrt{41+2\times 6\sqrt{5}}=\sqrt{41+2\sqrt{36\times 5}}$

$\downarrow$ $36+5$

$$\to \sqrt{41+12\sqrt{5}}=\sqrt{36}+\sqrt{5}=6+\sqrt{5}$$

* $\sqrt{14-6\sqrt{5}}=\sqrt{14-2\times 3\sqrt{5}}=\sqrt{14-2\sqrt{9\times 5}}$

$\downarrow$ $9+5$

$$\to \sqrt{14-6\sqrt{5}}=\sqrt{9}-\sqrt{5}=3-\sqrt{5}$$

* Reemplazando se tiene:

$$R=\sqrt{6+\sqrt{5}+3-\sqrt{5}}=\sqrt{9}=3$$

RPTA: "A"

PROBLEMA 3:

Reducir: $T=\sqrt{\sqrt{38+12\sqrt{2}}+\sqrt{26-8\sqrt{3}}+1}$

A) $\sqrt{2}-1$ B) $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ C) $\sqrt{6}-1$ D) $\sqrt{6}+1$

RESOLUCIÓN:

* Analizando por separado los radicales dobles:

$$\sqrt{38+12\sqrt{2}}=\sqrt{38+2\sqrt{72}}=\sqrt{36}+\sqrt{2}=6+\sqrt{2}$$
$$\sqrt{26-8\sqrt{3}}=\sqrt{26-2\sqrt{48}}=\sqrt{24}-\sqrt{2}=2\sqrt{6}-\sqrt{2}$$

* Reemplazando se tiene:

$$T=\sqrt{(6+\sqrt{2})+(2\sqrt{6}-\sqrt{2})+1}$$
$$\to T=\sqrt{7+2\sqrt{6}}=\sqrt{6}+\sqrt{1}=\sqrt{6}+1$$

RPTA: "D"

PROBLEMA 4:

Simplificar el radical de cuatro escalones:

$$R=\sqrt{9+2\sqrt{7+6\sqrt{6+4\sqrt{2}}}}$$

A) $2-\sqrt{2}$ B) $3+\sqrt{2}$ C) $3-\sqrt{2}$
D) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ E) $1+\sqrt{3}$

RESOLUCIÓN:

* Transformando adecuadamente :

$$R=\sqrt{9+2\sqrt{7+6\sqrt{6+2\sqrt{8}}}}\to R=\sqrt{9+2\sqrt{7+6(2+\sqrt{2})}}$$
$$\to R=\sqrt{9+2\sqrt{19+6\sqrt{2}}}=\sqrt{9+2\sqrt{19+2\sqrt{18}}}$$
$$\to R=\sqrt{9+2(\sqrt{18}+1)}=\sqrt{11+2\sqrt{18}}$$
$$\to R=\sqrt{9}+\sqrt{2}=3+\sqrt{2}$$

RPTA: "B"

PROBLEMA 5 :

Reducir: $E=\sqrt{6+2\sqrt{10+2\sqrt{8-2\sqrt{7}}}}$

A) $\sqrt{3}-1$ B) $\sqrt{2}-1$ C) $\sqrt{2}+1$ D) $\sqrt{7}+1$ E) $\sqrt{3}-2$

RESOLUCIÓN:

* Como : $\sqrt{8-2\sqrt{7}}=\sqrt{7+1-2\sqrt{7\times 1}}=\sqrt{7}-1$

* entonces :

$$E=\sqrt{6+2\sqrt{10+2\left(\sqrt{7}-1\right)}}=\sqrt{6+2\sqrt{10+2\sqrt{7}-2}}$$

$$\rightarrow E=\sqrt{6+\underbrace{2\sqrt{8+2\sqrt{7}}}_{\sqrt{7}+1}}=\sqrt{6+2\left(\sqrt{7}+1\right)}\rightarrow E=\sqrt{8+2\sqrt{7}}=\sqrt{7}+1$$

RPTA: "D"

PROBLEMA 6 :

Descomponer en radicales simples:

$$E=\sqrt{3x-1+2\sqrt{2x^2+x-6}}$$

A) $\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}$ B) $\sqrt{2x-1}-1$

C) $\sqrt{2x-3}+\sqrt{x+2}$ D) $1+\sqrt{3x-1}$

RESOLUCIÓN:

* De: $2x^2+x-6=(2x-3)(x+2)$

$$\begin{matrix} 2x & -3 \\ x & 2 \end{matrix}$$

* la suma de estos factores es:

$$(2x-3)+(x+2)=3x-1$$

* Entonces:

$$E=\sqrt{(2x-3)+(x+2)+2\sqrt{(2x-3)(x+2)}}$$

$$\rightarrow E=\sqrt{2x-3}+\sqrt{x+2}$$

RPTA: "C"

PROBLEMA 7 :

Reducir: $E=\sqrt[4]{17+12\sqrt{2}}-\sqrt[4]{17-12\sqrt{2}}$

A) 1 B) 0 C) 2 D) 4 E) 5

RESOLUCIÓN:

$$E=\sqrt{\sqrt{17+2\times 6\sqrt{2}}}-\sqrt{\sqrt{17-2\times 6\sqrt{2}}}$$

$$\rightarrow E=\sqrt{\sqrt{17+2\sqrt{72}}}-\sqrt{\sqrt{17-2\sqrt{72}}}$$

$$\rightarrow E=\sqrt{\sqrt{9+8+2\sqrt{9\times 8}}}-\sqrt{\sqrt{9+8-2\sqrt{9\times 8}}}$$

$$\rightarrow E=\sqrt{\sqrt{9}+\sqrt{8}}-\sqrt{\sqrt{9}-\sqrt{8}}\rightarrow E=\sqrt{3+2\sqrt{2}}-\sqrt{3-2\sqrt{2}}$$

$$\rightarrow E=\sqrt{2}+1-\left(\sqrt{2}-1\right)=2$$

RPTA: "C"

PROBLEMA 8 :

Transformar a radicales simples: $\sqrt{4+3\sqrt{2}}$

A) $\sqrt{2}-1$ B) $\sqrt{3}+1$ C) $\sqrt[4]{8}+\sqrt[4]{2}$

D) $1+\sqrt[4]{2}$ E) $1-\sqrt[3]{2}$

RESOLUCIÓN:

* Demos forma, para aplicar la fórmula:

$$\sqrt{4+3\sqrt{2}}=\sqrt{4+\sqrt{9(2)}}=\sqrt{4+\sqrt{18}}$$

* Ahora apliquemos fórmula:

$$\sqrt{4+\sqrt{18}}=\sqrt{\frac{4+C}{2}}+\sqrt{\frac{4-C}{2}}$$

$$C=\sqrt{4^2-18}\rightarrow C=\sqrt{-2}\notin R$$

* Parece que no puede transformarse a radicales simples, ¡pero un momento!

$$\sqrt{4+3\sqrt{2}}=\sqrt{3\sqrt{2}+4}=\sqrt{3\sqrt{2}+2(2)}$$

$$\sqrt{3\sqrt{2}+2\sqrt{2}\sqrt{2}}=\sqrt{\sqrt{2}\left(3+2\sqrt{2}\right)}=\sqrt[4]{2}\times\sqrt{3+2\sqrt{2}}$$

* En el segundo factor podemos aplicar la regla práctica:

$$\sqrt{3+2\sqrt{2}}=\sqrt{x}+\sqrt{y}\ \ ;\ \ (x>y)$$

$x+y=3$, $x\times y=2$ — De donde: $x=2;\ y=1;\ (x>y)$

* Reemplazando:

$$\sqrt{4+3\sqrt{2}}=\sqrt[4]{2}\times\sqrt{3+2\sqrt{2}}=\sqrt[4]{2}\times\left(\sqrt{2}+1\right)=\underbrace{\sqrt[4]{8}+\sqrt[4]{2}}_{\text{radicales simples}}$$

RPTA: "C"

PROBLEMA 9 :

Calcular: $E=\sqrt{3+\sqrt{7}}\left(\sqrt{13-\sqrt{7}}-\sqrt{5-\sqrt{7}}\right)$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

RESOLUCIÓN:

$$E=\sqrt{3+\sqrt{7}}\times\sqrt{13-\sqrt{7}}-\sqrt{3+\sqrt{7}}\times\sqrt{5-\sqrt{7}}$$

$$\rightarrow E=\sqrt{\left(3+\sqrt{7}\right)\left(13-\sqrt{7}\right)}-\sqrt{\left(3+\sqrt{7}\right)\left(5-\sqrt{7}\right)}$$

$$\rightarrow E=\sqrt{39-3\sqrt{7}+13\sqrt{7}-7}-\sqrt{15-3\sqrt{7}+5\sqrt{7}-7}$$

$$\rightarrow E=\sqrt{32+10\sqrt{7}}-\sqrt{8+2\sqrt{7}}$$

$$\rightarrow E=\sqrt{32+2\sqrt{25\times 7}}-\sqrt{8+2\sqrt{7\times 1}}$$

$$\rightarrow E=\sqrt{25}+\sqrt{7}-\left(\sqrt{7}+\sqrt{1}\right)\rightarrow E=5+\sqrt{7}-\sqrt{7}-1=4$$

RPTA: "D"

PROBLEMA 10 :

Descomponer en radicales sencillos:

$$P=\sqrt{2a-\sqrt{(2a)^2-4(b+c)^2}}\ ;a>b+c>0$$

RESOLUCIÓN:

* Como: $(a+1)+(b+1)=a+b+2$; se tiene

$$T=\frac{\sqrt{a+1}-\sqrt{b+1}}{\sqrt{2}}=\sqrt{\frac{a+1}{2}}-\sqrt{\frac{b+1}{2}}$$

PROBLEMA 11:

Racionalizar: $F=\dfrac{5}{\sqrt[8]{a^5b^3c^2}}$

RESOLUCIÓN:

* El factor racionalizante es: $F.R.=\sqrt[8]{a^3b^5c^6}$

* Con lo cual:

$$F=\frac{5}{\sqrt[8]{a^5b^3c^2}}\times\frac{\sqrt[8]{a^5b^3c^2}}{\sqrt[8]{a^5b^3c^2}}\rightarrow F=\frac{5\sqrt[8]{a^5b^3c^2}}{abc}$$

PROBLEMA 12 :

Racionalizar el denominador de $\dfrac{10}{\sqrt{5\sqrt[5]{3^3}}}$

RESOLUCIÓN:

* Descomponiendo en el radicando : $\dfrac{10}{\sqrt{5}\times\sqrt[10]{3^3}}$

* Cuyo factor racionalizante es $\left(\sqrt{5}\times\sqrt[10]{3^7}\right)$

* Luego :

$$\frac{10}{\sqrt{5}\times\sqrt[10]{3^3}}=\frac{10}{\sqrt{5}\times\sqrt[10]{3^3}}\times\frac{\sqrt{5}\times\sqrt[10]{3^7}}{\sqrt{5}\times\sqrt[10]{3^7}}=\frac{\not{10}\sqrt{5}\sqrt[10]{3^7}}{\not{5}\times3}=\frac{2\sqrt{5}\sqrt[10]{3^7}}{3}$$

PROBLEMA 13 :

Racionalizar el denominador de $\dfrac{5}{\sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

RESOLUCIÓN:

* Agrupando convenientemente :

$$\frac{5}{\sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{5}-(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{\sqrt{5}-(\sqrt{3}-\sqrt{2})}=\frac{5(\sqrt{5}-\sqrt{3}+\sqrt{2})}{5-(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}$$

$$=\frac{5(\sqrt{5}-\sqrt{3}+\sqrt{2})}{\not{5}-\not{5}+2\sqrt{6}}\times\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}}=\frac{5\sqrt{6}(\sqrt{5}-\sqrt{3}+\sqrt{2})}{12}$$

PROBLEMA 14 :

Racionalizar: $N=\dfrac{4}{\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{6}}$

RESOLUCIÓN:

* Agrupando convenientemente para aplicar una diferencia de cuadrados:

$$N=\frac{4}{\left[\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)+\sqrt{6}\right]}\times\frac{\left[\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)-\sqrt{6}\right]}{\left[\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)-\sqrt{6}\right]}$$

$$\rightarrow N=\frac{4\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{6}\right)}{\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)^2-\sqrt{6}^2}=\frac{4\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{6}\right)}{8+2\sqrt{15}-6}$$

$$\Rightarrow N=\frac{4\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{6}\right)}{2\left(\sqrt{15}+1\right)}\times\frac{\left(\sqrt{15}-1\right)}{\left(\sqrt{15}-1\right)}$$

$$\Rightarrow N=\frac{2\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{6}\right)\left(\sqrt{15}-1\right)}{\sqrt{15}^2-1^2}$$

* Finalmente: $N=\dfrac{\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{6}\right)\left(\sqrt{15}-1\right)}{7}$

PROBLEMA 15 :

Racionalizar : $f=\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}-1}$

RESOLUCIÓN:

* Multiplicando por el factor racionalizante el numerador y denominador, se tendría:

$$f=\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}-1}\right)\left(\frac{\sqrt[3]{2^2}+\sqrt[3]{2}+1}{\sqrt[3]{2^2}+\sqrt[3]{2}+1}\right)\rightarrow f=\frac{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1}{\left(\sqrt[3]{2}\right)^3-1}=\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1$$

PROBLEMA 16 :

Racionalizar : $E=\dfrac{2}{\sqrt[3]{5}-1}$

RESOLUCIÓN:

$$E=\frac{2}{\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{1}}\times\frac{\sqrt[3]{5^2}+\sqrt[3]{5}\times\sqrt[3]{1}+\sqrt[3]{1^2}}{\sqrt[3]{5^2}+\sqrt[3]{5}\times\sqrt[3]{1}+\sqrt[3]{1^2}}=\frac{2\left(\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{5}+1\right)}{\left(\sqrt[3]{5}\right)^3-\left(\sqrt[3]{1}\right)^3}$$

$$\rightarrow E=\frac{2\left(\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{5}+1\right)}{4}=\frac{\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{5}+1}{2}$$

PROBLEMA 17 :

Racionalizar: $E=\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1}$

RESOLUCIÓN:

$$E=\frac{1}{\sqrt[3]{2^2}+\sqrt[3]{2}\times\sqrt[3]{1}+\sqrt[3]{1^2}}\times\frac{\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{1}}{\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{1}}=\frac{\sqrt[3]{2}-1}{\left(\sqrt[3]{2}\right)^3-\left(\sqrt[3]{1}\right)^3}$$

$$\rightarrow E=\frac{\sqrt[3]{2}-1}{1}=\sqrt[3]{2}-1$$

PROBLEMA 18 :

Racionalizar : $E=\dfrac{6N}{\sqrt[9]{1000}+\sqrt[9]{8}}$

RESOLUCIÓN:

$$E=\frac{6N}{\sqrt[9]{10^3}+\sqrt[9]{2^3}}=\frac{6N}{\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{2}}$$

* Multiplicando el numerador y denominador por el *F.R.* para formar en este último, una suma de

cubos, así:

$$E=\frac{6N}{\left(\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{2}\right)}\times\frac{\left(\sqrt[3]{10}^2-\sqrt[3]{10}\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{2}^2\right)}{\left(\sqrt[3]{10}^2-\sqrt[3]{10}\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{2}^2\right)}$$

$$\rightarrow E=\frac{6N\left(\sqrt[3]{100}-\sqrt[3]{20}+\sqrt[3]{4}\right)}{\sqrt[3]{10}^3+\sqrt[3]{2}^3}$$

* Efectuando, el denominador resulta *12*, luego:

$$E=\frac{N\left(\sqrt[3]{100}-\sqrt[3]{20}+\sqrt[3]{4}\right)}{2}$$

* Racionalizar: $R=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{36}+2\sqrt[3]{2}}$

* Introduciendo factores dentro del radical:

$$\bullet\ 3\sqrt[3]{3}=\sqrt[3]{3^4}=\sqrt[3]{81}=\sqrt[3]{9^2}=\sqrt[3]{9^2}$$

$$\bullet\ 2\sqrt[3]{2}=\sqrt[3]{2^4}=\sqrt[3]{16}=\sqrt[3]{4^2}=\sqrt[3]{4^2}$$

* Dándole forma y racionalizando:

$$R=\frac{1}{\left(\sqrt[3]{9}^2+\sqrt[3]{9}\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{4}^2\right)}\times\frac{\left(\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{4}\right)}{\left(\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{4}\right)}=\frac{\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{9}^3-\sqrt[3]{4}^3}$$

$$\rightarrow R=\frac{\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{4}}{5}$$

PROBLEMA 19 :

Racionalizar: $P=\dfrac{A}{\sqrt[6]{72}+\sqrt[4]{4}}$

RESOLUCIÓN:

$$\bullet\ \sqrt[6]{72}=\sqrt[6]{8\times 9}=\sqrt[6]{2^3}\times\sqrt[6]{3^2}=\sqrt{2}\times\sqrt[3]{3}$$

$$\bullet\ \sqrt[4]{4}=\sqrt[4]{2^2}=\sqrt{2}$$

$$\rightarrow P=\frac{A}{\sqrt{2}(\sqrt[3]{3}+1)}\times\frac{(\sqrt[3]{3}^2-\sqrt[3]{3}+1)}{(\sqrt[3]{3}^2-\sqrt[3]{3}+1)}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{A\sqrt{2}(\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{3}+1)}{8}$$

④

②

PROBLEMA 20 :

Hallar la raiz cuadrada del polinomio:

$$P_{(x)}=9x^6+24x^5-14x^4-28x^3+33x^2-18x+5$$

e indicar la suma de coeficientes del residuo

A) 0 B) 2 C) –3 D) 4 E) –5

RESOLUCIÓN:

$$\begin{array}{r|l|l}
\sqrt{9x^6+24x^5-14x^4-28x^3+33x^2-18x+5} & 3x^3+4x^2-5x+2 & \\
\hline
-9x^6 \qquad\qquad\qquad & \dfrac{24x^5}{2(3x^3)}=4x^2 & (6x^3+4x^2)(-4x^2) \\
24x^5-14x^4 \qquad\qquad & & \\
\hline
-24x^5-16x^4 \qquad\qquad & \dfrac{-30x^4}{3(3x^3)}=5x & (6x^3+8x^2-5x)\ (5x) \\
-30x^4-28x^3+33x^2 \qquad & & \\
\hline
30x^4+40x^3-25x^2 \qquad & \dfrac{12x^3}{2(3x^3)}=2 & (6x^3+8x^2-10x+2\ )(-2) \\
12x^3+8x^2-18x+5 & & \\
\hline
-12x^3-16x^2+20x-4 & & \\
-8x^2+2x+1 & &
\end{array}$$

* De donde:

Raíz : $r_{(x)}=3x^3+4x^2-5x+2$

Residuo: $R_{(x)}=-8x^2+2x+1$

* Se pide : $-8+2+1=-5$

RPTA: "E"

PROBLEMA 21

Hallar la raíz cuadrada de

$$P_{(x)}=12x^3+4x^4+13x^2+5$$

A) $2x^2+x-1$ B) $2x^2-x+1$ C) $2x^2+3x+1$

D) x^2-1 E) x^2+2x-1

RESOLUCIÓN:

$$\begin{array}{r|l}
\sqrt{4x^4+12x^3+13x^2+0x+5} & 2x^2+3+1 \\
\hline
-12x^3-9x^2 \qquad\qquad & (4x^2+3x)3x \\
\hline
4x^2+0x+5 & (4x^2+6x+1)1 \\
\hline
-4x^2-6x-1 & \\
-6x+4 &
\end{array}$$

* De donde: $q_{(x)}=2x^2+3x+1;\ R_{(x)}=-6x+4$

RPTA: "C"

PROBLEMA 22 :

Calcular los valores de «*a*» y «*b*», si el polinomio mostrado:

$$P_{(x)}=81x^4+216x^3+216x^2+ax+b$$

tiene raíz cuadrada exacta

A) 12 y 84 B) 96 y 16 C) 12 y 72 D) 48 y 80

RESOLUCIÓN:

$$\begin{array}{r|l|l}
\sqrt{81x^4+216x^3+216x^2+ax+b} & 9x^2+12x+4 & \\
\hline
-81x^4 \qquad\qquad\qquad & \dfrac{216x^3}{2(9x^2)}=12x & (18x^2+12x)(-12x) \\
216x^3+216x^2 \qquad & & \\
\hline
-216x^3-144x^2 \qquad & \dfrac{72x^2}{2(9x^2)}=4 & (18x^2+24x+4)(-4) \\
72x^2+ax+b & & \\
\hline
-72x^2-96x-16 & & \\
(a-96)x+(b-16) & &
\end{array}$$

* Como es exacta :

$$R_{(x)}=(a-96)x+(b-16)\equiv 0x+0$$

* Se cumplen:

$$a-96=0\rightarrow a=96$$

$$b-16=0\rightarrow b=16$$

RPTA: "B"

PROBLEMA 23 :

Calcular : $\sqrt{64x^4-80x^3+73x^2-28x+14}$

e indicar el residuo

A) $2x+5$ B) $2x+4$ C) $3x+3$ D) $2x+2$ E) $2x+1$

RESOLUCIÓN:

$\sqrt{64x^4-80x^3+73x^2-28x+14}$ | $8x^2-5x+3$

$-64x^4$

$-80x^3+73x^2$; $\frac{-80x^3}{2(8x^2)}=-5x$; $(16x^2-5x)(5x)$

$80x^3-25x^2$

$48x^2-28x+14$; $\frac{48x^2}{2(8x^2)}=3$; $(16x^2-10x+3)(-3)$

$-48x^2+30x-9$

$2x+5$

* Raíz : $r_{(x)} = 8x^2 - 5x + 3$

* Residuo : $R_{(x)} = 2x + 5$

RPTA: "A"

PROBLEMA 24 :

Hallar la raíz cuadrada de :

$$P_{(x)} = x^4 - 2x^3y - 3x^2y^2 + 4xy^3 + 4y^4$$

A) $x + y$ B) 0 C) $x^2-xy-2y^2$ D) $2x^2 - y^2$

RESOLUCIÓN:

$\sqrt{x^4-2x^3y-3x^2y^2+4xy^3+4y^4}$ | $x^2-xy-2y^2$

$-x^4$; $(2x^2-xy)(-xy)$

$-2x^3y-3x^2y^2$; $-2x^3y+x^2y^2$

$2x^3y-x^2y^2$; $(2x^2-2xy-2y^2)(-2y^2)$

$-4x^2y^2+4xy^3+4y^4$; $-4x^2y^2+4xy^3+4y^4$

$4x^2y^2-4xy^3-4y^4$

$0 \quad 0 \quad 0$

RPTA: "C"

PROBLEMA 25 :

Calcular los valores de «m» y «p», si al extraer la raíz cuadrada del polinomio:

$$F_{(x)} = 4x^{30} - 4x^{18} + 12x^{15} + x^6 + mx^3 + p$$

Se obtiene como residuo $(9x^3 + 4)$

A) 3; 13 B) 4; 14 C) 5; 15 D) 6; 16 E) 7;17

RESOLUCIÓN:

$\sqrt{4x^{30}-4x^{18}+12x^{15}+x^6+mx^3+p}$ | $2x^{15}-x^3+3$

$-4x^{30}$

$-4x^{18}+12x^{15}+x^6$; $\frac{-4x^{18}}{2(2x^{15})}=-x^3$; $(4x^{15}-x^3)(x^3)$

$x^{18} \quad -x^6$

$+12x^{15} \quad +mx^3+p$; $\frac{12x^{15}}{2(2x^{15})}=3$; $(4x^{15}-2x^3+3)(-3)$

$-12x^{15} \quad +6x^3-9$

$9x^3+4$

* Residuo :
 - $m + 6 = 9 \rightarrow m = 3$
 - $p - q = 4 \rightarrow p = 13$

RPTA: "A"

PROBLEMA 26 :

Si la raíz cuadrada del polinomio:

$$P_{(x)} = 9x^4 - ax^3 + bx^2 - 67x + 54$$

posee coeficiente principal y término independiente positivos. Calcular el valor de $(b - a)$, si el resto de la extracción es igual a $(3x + 5)$.

A) 3 B) 32 C) –1 D) 97 E) 104

RESOLUCIÓN:

* Aplicando la siguiente propiedad:

Radicación Inexacta ➡ **Radicación Exacta**

$\sqrt{P_{(x)}}$ | $r_{(x)}$; $R_{(x)}$ $\qquad$ $\sqrt{P_{(x)} - R_{(x)}}$ | $r_{(x)}$; 0

* Por el criterio mencionado :

$$F_{(x)} = P_{(x)} - (3x + 5)$$

* El nuevo polinomio:

$$F_{(x)} = 9x^4 + ax^3 + bx^2 - 70x + 49$$

tendrá la raíz cudrada exacta.

* Utilizando la identidad de la radicación exacta

Se tiene: $F_{(x)} = \left[r_{(x)}\right]^2$

$$9x^4 + ax^3 + bx^2 - 70x + 49 \equiv (3x^2 + nx + 7)^2$$

* Identificando, luego de desarrollar el 2do. miembro , resultan las relaciones :

$$a = 6n \; ; \; b = n^2 + 42 \; ; \; 14n = -70$$

* Luego: $n = 5$ por lo tanto : $a = -30$ y $b = 67$ finalmente $b - a = 97$

RPTA: "D"

PROBLEMA 27:

Calcular $(m+n)$, si la raíz cuadrada de:

$P_{(x)} = 4x^{2n} - 12x^{n+1} + mnx^n + 9x^2 - 6nx + \frac{m^2n^2}{16}$ es exacta ; Además el término independiente de la raíz es 18.

A) 20 B) 21 C) 22 D) 23 E) 24

RESOLUCIÓN:

* Residuo : $-6n + \frac{3mn}{2} = 0 \rightarrow \boxed{m = 4}$

* $T.I.\left[r_{(x)}\right] = \frac{mn}{4} = 18 \rightarrow \boxed{n = 18}$

* Por lo tanto : $m + n = 22$

RPTA: "C"

PROBLEMA 28 :

Calcular $(m+p)$, si la raíz cuadrada de :

$F_{(x)} = 9x^4 - 12x^3 + mx^2 + (p - 5)x + 25$ es exacta.

A) 18 B) 19 C) 20 D) 21 E) 22

RESOLUCIÓN:

* Residuo :

 - $25 - \left(\frac{m-4}{6}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \frac{m-4}{6} = 5 \Rightarrow \boxed{m = 34}$

• $p-5+\frac{2}{3}(m-4)=0 \Leftrightarrow p-5+20=0.$

$\Rightarrow \boxed{p=-15}$

* Por lo tanto : $m+p=19$

RPTA: "B"

PROBLEMA 29 :

Al transformar a radicales simples la siguiente expresión:

$$T=\sqrt{3+\sqrt{5+2\sqrt{3}}}+\sqrt{3-\sqrt{5+2\sqrt{3}}}-1$$

se obtiene:

A) $\sqrt{3}-1$ B) 1 C) $\sqrt{3}$ D) $\sqrt{3}+1$ E) $2\sqrt{3}$

RESOLUCIÓN:

* Haciendo :

$$\left.\begin{array}{l} a=\sqrt{3+\sqrt{5+2\sqrt{3}}} \\ b=\sqrt{3-\sqrt{5-2\sqrt{3}}} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \rightarrow a^2+b^2=6 \\ \rightarrow ab=\sqrt{\underset{3+1}{4}-2\sqrt{\underset{3\times 1}{3}}}=\sqrt{3}-1 \end{array}$$

* Se pide : $T=a+b-1$

$\rightarrow T=\sqrt{(a+b)^2}-1 \rightarrow T=\sqrt{a^2+b^2+2ab}-1$

$\rightarrow T=\sqrt{6+2\left(\sqrt{3}-1\right)}-1 \rightarrow T=\sqrt{\underset{3+1}{4}+2\sqrt{\underset{3\times 1}{3}}}-1$

$\rightarrow T=\sqrt{3}+1-1 \rightarrow T=\sqrt{3}$

RPTA: "C"

PROBLEMA 30 :

Si: $\sqrt{a+6\sqrt{11-6\sqrt{2}}}+\sqrt{x}=\sqrt{6}$, entonces el valor de la expresión: $M=a^2+x^2$ es:

A) 25 B) 61 C) 65 D) 74 E) 90

RESOLUCIÓN:

* Transformando adecuadamente :

$$\sqrt{a+6\sqrt{11-2\sqrt{9\times 2}}}=\sqrt{6}-\sqrt{x}$$

$\Rightarrow a+6\left(3-\sqrt{2}\right)=\left(\sqrt{6}-\sqrt{x}\right)^2 \Rightarrow a+18-6\sqrt{2}=6+x-2\sqrt{6x}$

* De donde :

$$6\sqrt{2}=2\sqrt{6x} \wedge a+18=6+x$$

$\rightarrow \left(6\sqrt{2}\right)^2=\left(2\sqrt{6x}\right)^2 \wedge a+18=6+x$

$\rightarrow x=3 \wedge a+18=6+3 \rightarrow a=-9$

* Luego : $M=(-9)^2+3^2=90$

RPTA: "E"

PROBLEMA 31:

Al simplificar la expresión:

$$S=\frac{\left(\sqrt[4]{57+28\sqrt{2}}+\sqrt{6+\sqrt{2}}\right)^2+\left(\sqrt{7+\sqrt{8}}-\sqrt[4]{38+12\sqrt{2}}\right)^2}{13+\sqrt{18}}$$

se obtiene:

A) $\frac{1}{2}$ B) 1 C) 2 D) 4 E) $\frac{1}{4}$

RESOLUCIÓN:

De:

• $\sqrt[4]{57+28\sqrt{2}}=\sqrt{\sqrt{\underset{49+8}{57}+2\sqrt{\underset{49\times 8}{14^2\times 2}}}}=\sqrt{\sqrt{49}+\sqrt{8}}=\sqrt{7+\sqrt{8}}$

• $\sqrt[4]{38+12\sqrt{2}}=\sqrt{\sqrt{\underset{36+2}{38}+2\sqrt{\underset{36\times 2}{6^2\times 2}}}}=\sqrt{\sqrt{36}+\sqrt{2}}=\sqrt{6+\sqrt{2}}$

* Luego la expresión S quedará así:

$$S=\frac{\left(\sqrt{7+\sqrt{8}}+\sqrt{6+\sqrt{2}}\right)^2+\left(\sqrt{7+\sqrt{8}}-\sqrt{6+\sqrt{2}}\right)^2}{13\sqrt{18}}$$

* Por la identidad de Legendre :

$$S=\frac{2\left(7+\sqrt{8}+6+\sqrt{2}\right)}{13+3\sqrt{2}}=\frac{2\left(13+3\sqrt{2}\right)}{13+3\sqrt{2}}=2$$

RPTA: "C"

PROBLEMA 32 :

Al transformar el siguiente radical $\sqrt{10+2\sqrt{6}+2\sqrt{10}+2\sqrt{15}}$ en la suma de radicale simples se obtiene:

A) $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$ B) $\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5}$

C) $\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{5}$ D) $\sqrt{2}+\sqrt{7}+\sqrt{3}$

RESOLUCIÓN:

* Dando una forma conocida, así:

$$T=\sqrt{2+3+5+2\sqrt{2}\sqrt{3}+2\sqrt{2}\sqrt{5}+2\sqrt{3}\sqrt{5}}$$

$\rightarrow T=\sqrt{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)^2}=\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$

RPTA: "A"

PROBLEMA 33 :

Al simplificar la siguiente expresión:

$$T=\frac{\sqrt{3+\sqrt{3}}-\sqrt{3-\sqrt{3}}}{\sqrt{3-\sqrt{6}}}$$

se obtiene:

A) 1 B) 2 C) $\sqrt{2}$ D) 3

RESOLUCIÓN:

* Elevando al cuadrado , resulta :

$$T^2=\frac{3+\sqrt{3}+3-\sqrt{3}-2\sqrt{3^2-\sqrt{3}^2}}{3-\sqrt{6}}$$

$\rightarrow T^2=\frac{2\left(3-\sqrt{6}\right)}{3-\sqrt{6}} \rightarrow T^2=2 \rightarrow T=\sqrt{2}$

RPTA: "C"

PROBLEMA 34 :

Si P es un polinomio definido por: $P_{(x)}=4x^6-16x^4+28x^3+16x^2-56x+49$ tal que la raíz cuadrada de P es exacta, entonces la suma de coeficientes de dicha raíz es:

A) 12 B) 10 C) 5 D) –3 E) –2

RESOLUCIÓN:

* Extrayendo la raíz cuadrada:

$$\begin{array}{l|l} \sqrt{4x^6-16x^4+28x^3+16x^2-56x+49} & 2x^3-4x+7 \\ \underline{-4x^6} & (4x^3-4x)(-4x) \\ 0 & (4x^3-8x+7)(7) \\ \quad \underline{16x^4 \qquad -16x^2} & \\ \quad 0 \quad 28x^3 \qquad -56x+49 & \\ \quad \underline{\quad -28x^3 \qquad +56x-49} & \\ \qquad\quad 0 \qquad\quad 0 \quad 0 & \end{array}$$

* Luego , la raíz es : $q_{(x)}=2x^3-4x+7$

$\rightarrow \sum coef\,(q)=5$

RPTA: "C"

PROBLEMA 35 :

Si P es un polinomio definido por:

$P_{(x)}=x^4-5+6x^2+4x^3-12x$, tal que al extraer la raíz cuadrada de P, se obtiene un residuo igual a: $ax+b$, entonces el valor de $T=a-b$, es:

A) –10 B) –8 C) –5 D) 7 E) 9

RESOLUCIÓN:

* Extrayendo la raíz cuadrada:

$$\begin{array}{l|l} \sqrt{x^4+4x^3+6x^2-12x-5} & x^2+2x+1 \\ \underline{-x^4} & (2x^2+2x)(2x) \\ 0 & (2x^2+4x+1)(1) \\ \quad \underline{-4x^3-4x^2} & \\ \qquad 2x^2-12x-5 & \\ \qquad \underline{-2x^2-4x-1} & \\ \qquad\quad -16x-6 & \end{array}$$

* Como : $R_{(x)}=ax+b=-16x-6$

$\rightarrow a=-16 \wedge b=-6$

* Luego : $T=a-b=-10$

RPTA: "A"

PROBLEMA36 :

Si $A>0$ y P es un polinomio definido por :

$$P_{(x)}=9x^4-12x^3+Ax^2+(B-5)x+25$$

tal que al extraer la raíz cuadrada este es exacto, entonces el valor de $T=A+B$; es:

A) 8 B) 14 C) 16 D) 19 E) 23

RESOLUCIÓN:

*Como: $P_{(x)}=9x^4-12x^3+Ax^2+(B-5)x+25$ tiene una sola raíz cuadrada exacta, esta debe ser:

$$q_{(x)}=3x^2-2x+5$$

* Luego :

$$9x^4-12x^3+Ax^2+(B-5)x+25=(3x^2-2x+5)^2$$

* para $x=1$:

$$9-12+A+B-5+25=(3-2+5)^2$$

$\rightarrow A+B+17=36 \;\rightarrow\; A+B=19$

RPTA: "D"

PROBLEMA37 :

Si $a\in\mathbb{N}$ y al extraer la raíz cuadrada del polinomio:

$$P_{(x)}=ax^4+(3a-5)x^3+(4a+3b)x^2+94x+43$$

se obtiene como resto $10x+7$, entonces el valor de $M=a+b$ es:

A) 12 B) 28 C) 48 D) 75 E) 108

RESOLUCIÓN:

* Para la radicación (con índice 2) inexacta se sabe que: $P_{(x)}=\left[q_{(x)}\right]^2+R_{(x)}$

* Donde $P_{(x)}$ es el radicando; $q_{(x)}$ es la raíz cuadrada; $R_{(x)}$ es el resto o residuo

$$ax^4+(3a-5)x^3+(4a+3b)x^2+94x+43=\left[q_{(x)}\right]^2+10x+7$$

$$ax^4+(3a-5)x^3+(4a+3b)x^2+84x+36=\left[q_{(x)}\right]^2$$

* Reconociendo la forma de $q_{(x)}$, se tiene:

$$ax^4+(3a-5)x^3+(4a+3b)x^2+84x+36=\left(\sqrt{a}x^2+7x+6\right)^2$$

$$=ax^4+14\sqrt{a}x^3+\left(49+12\sqrt{a}\right)x^2+84x+36$$

* De donde: $3a-5=14\sqrt{a} \wedge 4a+3b=49+12\sqrt{a}$

$$3a-14a\sqrt{-5}=0$$

$$\begin{array}{ll} 3\sqrt{a} & 1 \\ \sqrt{a} & -5 \end{array} \rightarrow \sqrt{a}=5 \rightarrow a=25, a\in\mathbb{N}$$

$\rightarrow 4(25)+3b=49+12(5)\rightarrow b=3$

* Luego : $M=a+b=28$

RPTA: "B"

PROBLEMA 38 :

Si el polinomio: $P_{(x)}=ax^8+bx^6+6x^4-4x^2+1$ es un cuadrado perfecto, entonces los valores de a y b son :

A) $a=1;\ b=-2$ B) $a=4;\ b=-8$ C) $a=1;\ b=-4$
D) $a=2;\ b=-4$ E) $a=9;\ b=-6$

RESOLUCIÓN:

* Como : $P_{(x)}=ax^8+bx^6+6x^4-4x^2+1$ es un cuadrado perfecto , entonces :

$$ax^8+bx^6+6x^4-4x^2+1=\left(\sqrt{a}x^4-2x^2+1\right)^2$$

$$=ax^8-4\sqrt{a}x^6+\left(4+2\sqrt{a}\right)x^4-4x^2+1$$

$\rightarrow b=-4\sqrt{a} \wedge 6=4+2\sqrt{a}$

* De donde : $a=1 \wedge b=-4$

RPTA: "C"

PROBLEMA 39 :

Si un polinomio $P_{(x)}$ de sexto grado, tiene raíz cuadrada exacta; es divisible separadamente entre (x^2+1) y $(x+3)$; al dividir $P_{(x)}$ entre $(x+2)$ el resto es 225, entonces el valor de la suma de sus coeficientes es:

A) 576 B) 500 C) 144 D) 81 E) 1

RESOLUCIÓN:

* Como $P_{(x)}$ de sexto grado, tiene raíz cuadrada exacta, es divisible entre (x^2+1) y $(x+3)$, entonces:

$P_{(x)}=\{(x^2+1)(x+3)a\}^2$

$P_{(x)}\div(x+2)$ deja como resto : 225

$\rightarrow$ por el teorema del resto : $P_{(-2)}=225$

$\rightarrow P_{(-2)}=\{(4+1)(-2+3)a\}^2=225 \rightarrow a=3$

* Luego, la suma de coeficientes es:

$$P_{(1)}=\{(2)(4)3\}^2=576$$

RPTA: "A"

PROBLEMA 40 :

Si la raíz cuadrada del polinomio :

$$P_{(x)}=9x^{34}+mx^{12}+49-48x^{23}-nx^{17}-112x^6$$

es exacta, entonces el valor de $T=m+n$, es:

A) -22 B) 22 C) 20 D) 96 E) 106

RESOLUCIÓN:

* Como:

$$P_{(x)}=9x^{34}+mx^{12}+49-48x^{23}-nx^{17}-112x^6$$

tiene raíz cuadrada excata, entonces:

$$9x^{34}-48x^{23}-nx^{17}+mx^{12}-112x^6+49=\left[q_{(x)}\right]^2$$

$$=\left[3x^{17}-8x^6+7\right]^2$$

$$=9x^{34}-48x^{23}+42x^{17}+64x^{12}-112x^6+49$$

* De donde : $m=64 \wedge n=-42$

* Luego : $T=m+n=22$

RPTA: "B"

PROBLEMA 41:

Al racionalizar la expresión : $T=\dfrac{3+4\sqrt{3}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}-\sqrt{5}}$ se obtiene:

A) $\sqrt{6}-\sqrt{5}+\sqrt{2}$ B) $\sqrt{6}-\sqrt{5}-\sqrt{2}$

C) $\sqrt{6}-\sqrt{5}+1$ D) $\sqrt{6}+\sqrt{5}+\sqrt{2}$

RESOLUCIÓN:

* De:

$$T=\frac{3+4\sqrt{3}}{\left[\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)-\sqrt{5}\right]}\frac{\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)}{\left[\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)+\sqrt{5}\right]}$$

$$\rightarrow T=\frac{\left(3+4\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)}{\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)^2-5}=\frac{\left(3+4\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)}{6+2+2\sqrt{12}-5}$$

$$\rightarrow T=\frac{\left(3+4\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)}{3+4\sqrt{3}}\rightarrow T=\sqrt{6}+\sqrt{2}+\sqrt{5}$$

RPTA: "D"

PROBLEMA 42 :

Si M es una expresión definida por:

$$M=\frac{1}{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)^2}$$

Entonces al racionalizar y simplificar M, el denominador resultante es:

A) 48 B) 28 C) 20 D) 15 E) 12

RESOLUCIÓN:

* De: $$M=\frac{1}{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)^2}\cdot\frac{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)^2}{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)^2}$$

$$\rightarrow M=\frac{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)^2}{\left[\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2-\sqrt{5}^2\right]^2}\rightarrow M=\frac{2\left(5+\sqrt{6}-\sqrt{10}-\sqrt{15}\right)}{\left(2+\sqrt{6}\right)^2}$$

$$\rightarrow M=\frac{\left(5+\sqrt{6}-\sqrt{10}-\sqrt{15}\right)^2}{12}$$

RPTA: "E"

PROBLEMA 43:

Si T es una expresión definida por: $T=\dfrac{A}{2+\sqrt{2}-\sqrt[4]{2}}$

Entonces al racionalizar T, el denominador resultante es:

A) 30 B) 25 C) 8 D) 6 E) 3

RESOLUCIÓN:

* De: $$T=\frac{A}{\left(2+\sqrt{2}-\sqrt[4]{2}\right)}\cdot\frac{\left(2+\sqrt{2}+\sqrt[4]{2}\right)}{\left(2+\sqrt{2}+\sqrt[4]{2}\right)}$$

$$\rightarrow T=\frac{A\left(2+\sqrt{2}+\sqrt[4]{2}\right)}{\left(2+\sqrt{2}\right)^2-\sqrt{2}}=\frac{A\left(2+\sqrt{2}+\sqrt[4]{2}\right)}{3\left(2+\sqrt{2}\right)}\cdot\frac{\left(2-\sqrt{2}\right)}{\left(2-\sqrt{2}\right)}$$

$$\rightarrow T=\frac{A\left(2+\sqrt{2}+\sqrt[4]{2}\right)\left(2-\sqrt{2}\right)}{3(2)}=\frac{A\left(2+\sqrt{2}+\sqrt[4]{2}\right)\left(2-\sqrt{2}\right)}{6}$$

RPTA: "D"

PROBLEMA 44 :

Si M es una expresión definida por :

$$M=\frac{1}{\sqrt[3]{49}-\sqrt[3]{7}-6}$$

Entonces al racionalizar y simplificar M, el denominador resultante es:

A) 36 B) 300 C) 216 D) 144 E) 243

RESOLUCIÓN:

* Factorizando el denominador (por aspa simple) :

$$M=\frac{1}{\left(\sqrt[3]{7}-3\right)\left(\sqrt[3]{7}+2\right)}=\frac{-1}{\left(3-\sqrt[3]{7}\right)\left(\sqrt[3]{7}+2\right)}$$

$$\rightarrow M=\frac{(-1)F.R_1\times F.R_2}{\underbrace{\left(3-\sqrt[3]{7}\right)}\underbrace{\left(\sqrt[3]{7}+2\right)}\underbrace{F.R_1}\times\underbrace{F.R_2}}=\frac{-F.R_1\times F.R_2}{\left(3^3-7\right)\left(7+2^3\right)}$$

$$\rightarrow M=\frac{-F.R_1\times F.R_2}{(20)(15)}=\frac{-F.R_1\times F.R_2}{300}$$

RPTA: "B"

PROBLEMA 45 :

Al racionalizar la expresión: $A=\dfrac{32}{\sqrt[3]{25}+2\sqrt[3]{5}-3}$,

el denominador entero simplificado que se obtiene es:

A) 1 B) 2 C) 4 D) 16 E) 32

RESOLUCIÓN:

* Note que el denominador tiene la forma:

$a^2+2a-3=(a+3)(a-1)$, entonces:

$$A=\frac{32}{\left(\sqrt[3]{5}+3\right)\left(\sqrt[3]{5}-1\right)}\cdot\frac{FR_1\times FR_2}{FR_1\times FR_2}$$

* Donde:

$$FR_1=\sqrt[3]{5}^2-3\sqrt[3]{5}+3^2\ \wedge\ FR_2=\sqrt[3]{5}^2+\sqrt[3]{5}+1$$

$$\rightarrow A=\frac{32\times FR_1\times FR_2}{\left(5+3^3\right)(5-1)}=\frac{FR_1\times FR_2}{4}$$

RPTA: "C"

PROBLEMA 46 :

Al racionalizar la expresión:

$$T=\frac{1}{\sqrt{5-\sqrt{6}+\sqrt{10}-\sqrt{15}}}+\frac{1-\sqrt{4-\sqrt{15}}}{\sqrt{6}}$$

se obtiene:

A) $\sqrt{6}$ B) $\sqrt{5}$ C) $\sqrt{3}$ D) $\sqrt{2}$ E) 1

RESOLUCIÓN:

* Multiplicando y dividiendo por $\sqrt{2}$:

$$T=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{10-2\sqrt{6}+2\sqrt{10}-2\sqrt{15}}}+\frac{\sqrt{2}-\sqrt{8-2\sqrt{15}}}{\sqrt{2}\sqrt{6}}$$

$$\rightarrow T=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\left(\sqrt{15}-\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2}}+\frac{\sqrt{2}-\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)}{2\sqrt{3}}$$

$$\rightarrow T=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{2}-\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}$$

$$\rightarrow T=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2\sqrt{6}}\right)+\frac{\sqrt{2}-\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}$$

$$\rightarrow T=\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{2}-\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}=1$$

RPTA: "E"

PRACTICA DE EJERCICIOS #1

01 Reducir: $A=\sqrt[9]{512}+\sqrt[5]{243}+\sqrt[5]{5^5}-\sqrt[3]{-27}$

A)9 B)7 C)13 D)8 E)17

02 Efectuar: $Q=\sqrt[9]{10^8\sqrt[7]{10^6\sqrt[5]{10^4\sqrt[3]{10^2\sqrt{10^2}}}}}$

03 Reducir: $R=\sqrt[26]{5^{\left(\sqrt[5]{5}\right)^5}.5^{21}}$

A)1 B)5 C)5^2 D)5^{26} E)125

04 Efectuar: $A=\sqrt[3]{54}-\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{16}-\sqrt[3]{128}$

A) $\sqrt[3]{2}$ B) $2\sqrt[3]{3}$ C) $\sqrt[3]{3}$

D)0 E)- $\sqrt[3]{2}$

05 Efectuar: $D=\left(\sqrt{x^3}.\sqrt[5]{x^2}\right)^{\frac{10}{19}}$

A) $\sqrt{x}$ B)x C) $\sqrt[10]{x^9}$

D)$2x$ E)x^2

06 Efectuar: $A=\left(\sqrt[3]{3}.\sqrt{2}\right)^6$

A)64 B)54 C)72 D)6 E)108

07 Efectuar: $V=-3\sqrt[3]{8x^7}+2\sqrt[3]{27x^7}-2\sqrt[3]{64x^7}+8\sqrt[3]{x^7}$

A)0 B)–1 C) $\sqrt[3]{x^7}$

D)– $\sqrt[3]{x^7}$ E) $2\sqrt[3]{x^7}$

08 Calcular: $R=3\sqrt[3]{3}^{\sqrt[3]{3}\sqrt[3]{3}\sqrt[3]{3}}$

A)3 B)9 C)27 D)81 E)243

09 Calcular:

$$I=\sqrt{2}\sqrt{2}\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}\sqrt{2}}}$$

A)4 B)8 C)16 D)2 E)64

10 Hallar el valor de:

$$C=\sqrt{2}^{\sqrt{2}\sqrt{4}}\cdot\sqrt[3]{3}^{\sqrt[3]{3}\sqrt[3]{27}}\cdot\sqrt[4]{4}^{4\sqrt[4]{4}\sqrt[4]{4}}$$

A)12 B)18 C)24 D)64 E)48

11 Efectuar:

$$H=\sqrt[5]{-32}+\sqrt[3]{-8}+\sqrt{9}+\sqrt[4]{16}+\sqrt[6]{5^6}$$

A)-10 B)10 C)-8 D)6 E)-6

12 Resolver:

$$A=\frac{2\sqrt{24x^3}}{\sqrt{3x}}-4x\sqrt{2};\ x>0$$

A)0 B)2 C) $\sqrt{2}$ D) $x\sqrt{2}$ E) $2x\sqrt{2}$

13 Efectuar:

$$R=\frac{(3\sqrt{8})(6\sqrt{5})}{9\sqrt{10}}$$

A) $\sqrt{2}$ B)4 C)2 D) $4\sqrt{10}$ E) $2\sqrt{10}$

14 Calcular:

$$4\sqrt{10}\sqrt{2}(\sqrt{2}+\sqrt{18})+2$$

A)8 B)6 C)10 D)12 E)4

15 Calcular:

$$D=(5+\sqrt{2})(5-\sqrt{2})-\left[(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2-(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2\right]$$

A)10 B)23 C)33 D)13 E)17

16 Multiplicar: $\sqrt{5}\times\sqrt[3]{2}$

A) $\sqrt[6]{500}$ B) $\sqrt[3]{10}$ C) $\sqrt[3]{50}$ D) $\sqrt[3]{20}$ E) $\sqrt[3]{500}$

17 Multiplicar: $(\sqrt{2})(\sqrt[4]{3})$

A) $\sqrt[4]{18}$ B) $\sqrt[4]{12}$ C) $\sqrt[4]{36}$ D) $\sqrt[4]{6}$ E) $\sqrt[4]{24}$

18 Multiplicar: $\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[4]{2}$

A) $\sqrt[6]{729}$ B) $\sqrt[3]{30}$ C) $\sqrt[12]{30}$ D) $\sqrt[12]{729\times625\times8}$ E) $\sqrt[12]{729}$

19 Multiplicar:

$$\left(\sqrt{2a}\right)\left(\sqrt[3]{3a^2b}\right)$$

A) $\sqrt[6]{15a^2b^3}$ B) $\sqrt[6]{6a^3b}$ C) $\sqrt[6]{72a^7b^2}$ D) $\sqrt[6]{27a^5b}$ E) $\sqrt[6]{8a^4b^2}$

20 ¿Cuál de los números: $\sqrt{5}$, $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt[6]{5}$, $\sqrt[3]{3}$ es el mayor?

A) $\sqrt{5}$ B) $\sqrt[3]{2}$ C) $\sqrt{7}$ D) $\sqrt[6]{5}$ E) $\sqrt[3]{3}$

21 Reducir:

$$R=3\sqrt{2}+5\sqrt{2}-\sqrt{49\cdot2}$$

A) $\sqrt{2}$ B)0 C) $-\sqrt{2}$ D) $-2\sqrt{2}$ E) $3\sqrt{2}$

22 Reducir:

$$4\sqrt{3}-20\sqrt{3}+19\sqrt{3}$$

A) $-2\sqrt{3}$ B) $-\sqrt{3}$ C) $2\sqrt{3}$ D) $\sqrt{3}$ E) $3\sqrt{3}$

23 Reducir:

$$\sqrt{2}-9\sqrt{2}+30\sqrt{2}-40\sqrt{2}$$

A) $31\sqrt{2}$ B) $28\sqrt{2}$ C) $20\sqrt{2}$ D) $-18\sqrt{2}$ E) $-31\sqrt{2}$

24 Reducir:

$$a\sqrt{b}-3a\sqrt{b}+7a\sqrt{b}$$

A) $-3a\sqrt{b}$ B) $5\sqrt{b}$ C) $5a\sqrt{b}$ D) $a\sqrt{b}$ E) $-a\sqrt{b}$

25 Reducir:

$$3x\sqrt{y}+(a-x)\sqrt{y}-2x\sqrt{y}$$

A) $-\sqrt{y}$ B) $a\sqrt{y}$ C) $-a\sqrt{y}$ D) $3\sqrt{y}$ E) $3x\sqrt{y}$

26 Reducir:

$$(x-1)\sqrt{3}+(x-3)\sqrt{3}+4\sqrt{3}$$

A) $2x\sqrt{3}$ B) $2\sqrt{3}$ C) $x\sqrt{3}$ D)0 E) $3\sqrt{3}$

27 Simplificar:

$$\sqrt{45}-\sqrt{27}-\sqrt{20}-\sqrt{5}$$

A) $-3\sqrt{3}$ B) $\sqrt{27}$ C) $\sqrt{3}$ D) $-\sqrt{3}$ E) $\sqrt{5}-\sqrt{3}$

28 Simplificar:

$$9\sqrt{12}-7\sqrt{48}-3\sqrt{98}+10\sqrt{3}$$

A) $17\sqrt{2}$ B) $-21\sqrt{2}$ C) $9\sqrt{2}$ D) $-10\sqrt{3}$ E) $\sqrt{2}-5\sqrt{3}$

29 Simplificar:

$$\sqrt{175}+\sqrt{243}-\sqrt{63}-2\sqrt{75}$$

A) $\sqrt{7}+3\sqrt{3}$ B) $2\sqrt{7}+3\sqrt{3}$ C) $2\sqrt{7}-\sqrt{3}$ D) $3\sqrt{7}+2\sqrt{3}$ E) $2\sqrt{3}-\sqrt{7}$

30 Simplificar:

$$3\sqrt[3]{2a^3}-b\sqrt[3]{128}+(4b-3a)\sqrt[3]{2}$$

A) $3\sqrt[3]{a}$ B) $\sqrt[3]{a}$ C) $-2\sqrt[3]{a}$ D) $b\sqrt[3]{a}$ E)0

PRACTICA DE EJERCICIOS 2

01 Hallar el denominador racionalizado de: $\dfrac{7}{\sqrt[7]{x^3}}$

A)3 B)1 C) x^3 D)x E) x^7

02 Resolver:

$$\frac{2}{\sqrt{2}}+\frac{3}{\sqrt{3}}+\frac{5}{\sqrt{5}}-\sqrt{3}-\sqrt{5}$$

A) $\sqrt{2}$ B) $\sqrt{3}$ C)0 D) $\sqrt{5}$ E) $\sqrt{15}$

03 Resolver:

$$\frac{m-1}{\sqrt{m}-1}-\sqrt{m}$$

A)1 B) $2\sqrt{m}$ C) $\sqrt{m}$ D)0 E)-1

04 Calcular:

$$\frac{3}{\sqrt{3}}+5-\sqrt{3}+\sqrt{2}-\frac{2}{\sqrt{2}}$$

A)1 B)3 C)5 D)7 E)9

05 Resolver:

$$\frac{\sqrt[3]{8x}}{\sqrt[3]{x}}+\frac{2}{\sqrt{2}}-2$$

A) $\sqrt{2}$ B)2 C)0 D) $\sqrt{x}$ E)2x

06 Calcular:

$$M=\frac{5}{\sqrt{5}}+\frac{4}{3+\sqrt{5}}$$

A)4 B) $\sqrt{5}$ C) $3\sqrt{5}$ D)3 E) $4\sqrt{5}$

07 Resolver:

$$\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{7}{3-\sqrt{2}}-\sqrt{3}$$

A)3 B)–3 C)7 D) $\sqrt{3}$ E) $\sqrt{3}+3$

08 Resolver:

$$3\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)+\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}}-2\sqrt{6}$$

A)0 B) $\sqrt{6}$ C) $3\sqrt{6}$
D) $\sqrt{6}+1$ E) $-\sqrt{6}$

09 Simplificar:

$$\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}-2\sqrt{6}$$

A)6 B) $4\sqrt{6}$ C)0 D)5 E) $5-\sqrt{6}$

10 Calcular:

$$\frac{\sqrt{5}+\sqrt{4}}{\sqrt{5}-\sqrt{4}}-\frac{4}{\sqrt{5}+2}$$

A)6 B)5 C)8 D)10 E)12

11 Resolver:

$$\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{1}{2+\sqrt{3}}+\frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$$

A) $\sqrt{5}+2$ B) $\sqrt{5}-2$ C) $\sqrt{3}+2$
D) $\sqrt{3}$ E)–2

12 Efectuar:

$$R=\frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}+\frac{3}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}-2\sqrt{5}$$

A)0 B)1 C) $\sqrt{7}$ D) $\sqrt{6}$ E) $\sqrt{2}$

13 Efectuar:

$$F=\frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}-\frac{3}{\sqrt{2}+\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$$

A)4 B)3 C)–1 D)2 E)0

14 Efectuar:

$$\frac{3}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}+\frac{4}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}-\frac{5}{\sqrt{7}+\sqrt{2}}-\frac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$$

A)0 B)1 C)2 D)1 E)4

15 Calcular:

$$\frac{7}{\sqrt{2}+3}+\frac{1}{\sqrt{2}-1}$$

A)8 B)10 C)–8 D)–10 E)–7

16 Efectuar:

$$R=\sqrt{7-2\sqrt{12}}+\sqrt{3}$$

A)1 B)2 C)3 D)4 E) $3\sqrt{3}$

17 Efectuar:

$$I=\sqrt{11+2\sqrt{18}}-\sqrt{2}$$

A)1 B)2 C)3 D)5 E)9

18 Calcular:

$$C=\sqrt{3+2\sqrt{2}}+\sqrt{6-2\sqrt{8}}$$

A)3 B)4 C) $\sqrt{3}$
D) $\sqrt{2}+1$ E) $2\sqrt{2}+3$

19 Reducir:

$$H=\sqrt{9+2\sqrt{20}}-\sqrt{6-2\sqrt{5}}$$

A) $\sqrt{5}+1$ B) $\sqrt{5}+2$ C)1
D)3 E)5

20 Efectuar:

$$A=\frac{1}{\sqrt{5+2\sqrt{6}}}+\sqrt{2}$$

A) $\sqrt{2}+1$ B)1 C)2
D) $2\sqrt{2}$ E) $\sqrt{3}$

21 Efectuar:

$$R=\frac{3}{\sqrt{7-2\sqrt{10}}}-\sqrt{5}$$

A) $\sqrt{2}$ B) $\sqrt{3}$ C)2 D) $\sqrt{5}$ E) $2\sqrt{5}$

22 Efectuar:

$$D=\sqrt{4-2\sqrt{3}}+\sqrt{8-2\sqrt{15}}-\sqrt{6-2\sqrt{5}}$$

A) $\sqrt{5}+\sqrt{2}$ B) $\sqrt{3}+2$ C)–1
D)–2 E)0

23 Efectuar:

$$V=\sqrt{6+2\sqrt{8}}+\sqrt{5-2\sqrt{6}}+\sqrt{12-2\sqrt{27}}$$

A)1 B)2 C)3 D)4 E)5

24 Si el siguiente radical doble: $\sqrt{17-2\sqrt{30}}$ se descompone en dos radicales simples de la forma: $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ ¿calcular: $A=a-b^2$?

A)–11 B)11 C)9 D)–9 E)7

25 Si el siguiente radical doble: $\sqrt{13-2\sqrt{42}}$; se descompone en dos radicales simples de la forma: $\sqrt{a}-\sqrt{b}$

¿Calcular $L=a-b$?

A)1 B)2 C)3 D)7 E)5

26 ¿Cuál de los siguientes radicales dobles equivale a: $L=\sqrt{3}-\sqrt{2}$

A) $\sqrt{5-\sqrt{6}}$ B) $\sqrt{6-2\sqrt{5}}$ C) $\sqrt{5-2\sqrt{6}}$
D) $\sqrt{5+\sqrt{6}}$ E) $\sqrt{4+2\sqrt{3}}$

27 ¿Cuál de los siguientes radicales dobles es igual a la expresión:

$$A=\sqrt{5}+2$$

A) $\sqrt{7+2\sqrt{10}}$ B) $\sqrt{9+\sqrt{20}}$
C) $\sqrt{7+\sqrt{10}}$ D) $\sqrt{9+2\sqrt{20}}$
E) $\sqrt{5+2\sqrt{2}}$

28 Efectuar:

$$D=\sqrt{7+4\sqrt{3}}+\left(\frac{2+\sqrt{3}}{2}\right)$$

A)2 B)3 C)1 D) $1/2$ E)0

29 Efectuar:

$$A=\sqrt{7-2\sqrt{6}}+\left(\sqrt{3}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

A)2 B)1 C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D) $\sqrt{2}$ E) $\sqrt{3}$

30 Efectuar:

$$R=\sqrt{7+\sqrt{40}}+\sqrt{8-4\sqrt{3}}$$

A) $\sqrt{6}+\sqrt{6}$ B)1 C) $\sqrt{7}-\sqrt{2}$
D) $\sqrt{2}+\sqrt{5}$ E)0

PRACTICA DE EJERCICIOS #3

01 Efectuar:

$$E=\sqrt{8+\sqrt{60}}+\sqrt{7-\sqrt{48}}-\sqrt{5}$$

A) $\sqrt{6}+2$ B) $\sqrt{3}-2$ C) 4
D) 1 E) 2

02 Resolver:

$$S=\sqrt{x+1+2\sqrt{x}}-\left(\sqrt{x}-\sqrt{4}\right)$$

A) 0 B) $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$ C) 2
D) 3 E) $\sqrt{x-1}-\sqrt{x}$

03 Efectuar:

$$\frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$$

A) 1 B) $\sqrt{5}+\sqrt{2}$ C) $\sqrt{2}-\sqrt{5}$
D) $(\sqrt{5}-\sqrt{2})^2$ E) N.A.

04 Efectuar:

$$\frac{3}{\sqrt{3}}-\sqrt{2}+\frac{2}{\sqrt{2}}$$

A) $\sqrt{3}$ B) $\sqrt{6}$ C) $\sqrt{2}$ D) $-\sqrt{2}$ E) 0

05 Indicar el denominador racionalizado de:

$$\frac{15}{2\sqrt{5}}$$

A) 5 B) 4 C) 3 D) 2 E) 1

06 Resolver:

$$3\sqrt[3]{x^2y}-\frac{\sqrt{9xy}}{\sqrt[3]{xy^2}}$$

A) $\sqrt[3]{x^2y}$ B) $-\sqrt[3]{xy^2}$ C) 0
D) 1 E) -1

07 Efectuar:

$$\frac{4}{\sqrt{2}}+\frac{6}{\sqrt{3}}+\frac{15}{\sqrt{5}}-(\sqrt{8}+\sqrt{12}-\sqrt{5})$$

A) $2\sqrt{5}$ B) $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$ C) $\sqrt{2}-\sqrt{5}$
D) $\sqrt{8}$ E) 0

08 Efectuar:

$$\frac{3}{\sqrt{3}}-(5+\sqrt{3})$$

A) -2 B) -5 C) 2 D) 3 E) 5

09 Efectuar:

$$\frac{6+2\sqrt{8}}{2}-\frac{4}{\sqrt{2}}$$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) $\sqrt{2}$

10 Efectuar:

$$\frac{3}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}-\frac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$$

A) $\sqrt{2}$ B) $2\sqrt{6}$ C) $2\sqrt{3}$ D) 0 E) N.A.

11 Efectuar: $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{5}}{\sqrt{2}+\sqrt{5}}$ é indicar el denominador racionalizado.

A) -3 B) 0 C) 7 D) 1 E) 3

12 Efectuar:

$$\sqrt{15}+\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$$

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

13 Efectuar:

$$\frac{3}{\sqrt{7}+2}-\frac{6}{\sqrt{7}-1}$$

A) -3 B) -2 C) -1 D) 0 E) 2

14 Efectuar:

$$8-2\sqrt{3}+\frac{3}{\sqrt{12}+3}$$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

15 Después de racionalizar el denominador de $\frac{3}{\sqrt{7}-2}$ se obtiene: $\sqrt{a}+b$;
Calcular: $a+b^2$

A) 11 B) 10 C) 9 D) 7 E) 4

16 Después de racionalizar el denominador de $\frac{5}{\sqrt{14}+3}$ se obtiene $\sqrt{m}-n$.
Calcular "$m-n$"

A) 5 B) 11 C) 17 D) 14 E) 18

17 Efectuar:

$$\frac{3}{\sqrt{7+2\sqrt{10}}}+\frac{1}{\sqrt{3-2\sqrt{2}}}-\frac{2}{\sqrt{8+2\sqrt{15}}}$$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) N.A.

18 Efectuar:

$$V=\sqrt{12}+\sqrt{50}-3\sqrt{8}+\sqrt{2}$$

A) $\sqrt{2}$ B) $\sqrt{3}$ C) $2\sqrt{2}$ D) $2\sqrt{3}$ E) 0

19 Multiplicar:

$$A=\sqrt[3]{3}.\sqrt[3]{2}.\sqrt[6]{5}$$

A) $\sqrt[6]{140}$ B) $\sqrt[6]{80}$ C) $\sqrt[6]{240}$
D) $\sqrt[6]{30}$ E) $\sqrt[6]{180}$

20 Racionalizar:

$$\frac{3}{\sqrt{3}}-\frac{5}{\sqrt{2}}+\frac{5}{\sqrt{5}}+\left(\frac{\sqrt{50}}{2}-\sqrt{5}\right)$$

A) 0 B) $\sqrt{3}$ C) $\sqrt{2}$ D) $\sqrt{5}$ E) $\sqrt{10}$

21 Racionalizar:

$$\frac{3}{\sqrt[3]{x^2y27}}-\sqrt[3]{xy^2}$$

A) $\sqrt[3]{xy}$ B) $\sqrt{xy^2}$ C) 0
D) $3\sqrt[3]{x^2y}$ E) 1

22 Racionalizar:

$$\left(\frac{3}{\sqrt{7}+2}+\frac{2}{3+\sqrt{7}}\right)^2$$

A) 1 B) 4 C) 9 D) 16 E) 25

23 Racionalizar:

$$\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}+\frac{7}{3+\sqrt{2}}+\frac{13}{4+\sqrt{3}}$$

A) 0 B) 3 C) 5 D) 7 E) 4

24 Transformar el siguiente radical doble:

$$\sqrt{2x+\sqrt{4x^2-4}}-\sqrt{x-1}\quad(x>3)$$

A) $\sqrt{x+1}$ B) $\sqrt{x-1}$ C) 0
D) $\sqrt{x}$ E) $\sqrt{x-2}$

25 Resolver:

$$\frac{1}{\sqrt{5-\sqrt{24}}}+\frac{7}{\sqrt{11+\sqrt{72}}}+\frac{13}{\sqrt{17+2\sqrt{48}}}+3$$

A) 10 B) 11 C) 13 D) 0 E) $\sqrt{6}$

PRIMERA PRACTICA DIRIGIDA

01 Efectuar: $\sqrt{3+2\sqrt{2}}-\sqrt{17-2\sqrt{72}}-\sqrt{19+2\sqrt{18}}$

A) –3 B) –1 C) 1 D) 3 E) 4

02 Transformar a radicales simples:

$$\sqrt{7+\sqrt{61+4\sqrt{15}}}$$

A) $\sqrt{5}+\sqrt{3}$ B) $\sqrt{5}+\sqrt{2}$ C) $\sqrt{3}+\sqrt{2}$
D) $\sqrt{6}+\sqrt{2}$ E) $\sqrt{6}+\sqrt{3}$

03 Efectuar: $\dfrac{\sqrt{8+\sqrt{60}}-\sqrt{5+\sqrt{24}}+\sqrt{7+\sqrt{40}}}{\sqrt{7-\sqrt{40}}+\sqrt{8-\sqrt{60}}+\sqrt{5+\sqrt{24}}}$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

04 Racionalizar:

$$\frac{2}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}+\frac{4}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}-\frac{1}{3\sqrt{3}+3\sqrt{2}}$$

y dar como respuesta el denominador racionalizado

A) 2 B) 3 C) 4 D) 6 E) 8

05 Hallar el valor equivalente de:

$$\sqrt{\frac{6+\sqrt{12}}{3-\sqrt{3}}}$$

A) $\sqrt{3}-1$ B) $\sqrt{3}+1$ C) $\sqrt{3}+2$
D) $\sqrt{3}-2$ E) $\sqrt{3}+\sqrt{2}$

06 El valor equivalente de $\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}-2\sqrt{2}$ es:

A) 1 B) $\sqrt{6}$ C) $\sqrt{3}$ D) $\sqrt{2}$ E) $\sqrt{2}+1$

07 Simplificar :

$$\sqrt[4]{17+12\sqrt{2}}+\sqrt[4]{17-12\sqrt{2}}$$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

08 Calcular «*n*» si :

$$\sqrt{6+2n\sqrt{10+2\sqrt{8-2\sqrt{7}}}}=\sqrt{7}+1$$

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

09 Indicar el denominador racionalizado de:

$$\frac{A}{2+\sqrt{2}+\sqrt[4]{2}}$$

A) 6 B) 5 C) 4 D) 3 E) 8

10 Expresar como radical doble:

$$2\sqrt{x+2+\sqrt{8x}}-\sqrt{4x+3+\sqrt{48x}},\ x>0$$

A) $\sqrt{10-2\sqrt{21}}$ B) $\sqrt{11-4\sqrt{6}}$ C) $\sqrt{7-3\sqrt{2}}$
D) $\sqrt{3+2\sqrt{2}}$ E) $\sqrt{4+2\sqrt{3}}$

11 Hallar el valor de : $\sqrt{a+2\sqrt{a-1}}+\sqrt{a-2\sqrt{a-1}}$

Si: $a>2$

A) 2 B) –2 C) $2\sqrt{a}$ D) $-2\sqrt{a-2}$ E) $2\sqrt{a-1}$

12 Indicar el valor de uno de los radicales simples al transformar:

$$\sqrt{1+2+3+......+10+10\sqrt{10}}$$

A) $5\sqrt{10}$ B) $10\sqrt{2}$ C) $2\sqrt{5}$ D) $5\sqrt{2}$ E) $\sqrt{10}$

13 Sabiendo que : $M=\dfrac{\sqrt{7+\sqrt{24}}+2}{\sqrt{5+\sqrt{24}}}$ entonces es cierto que:

A) $M>2$ B) M es entero C) $M^2<3$ D) $M^3=3$ E) $M^4=9$

14 Indicar el equivalente de:

$$P=\frac{5}{\sqrt{7+\sqrt{24}}}-\frac{4}{\sqrt{8+\sqrt{48}}}$$

A) 1 B) $\sqrt{3-\sqrt{8}}$ C) $\sqrt{4-\sqrt{12}}$ D) 2 E) –1

15 El denominador racionalizado de :

$P=\dfrac{m-25}{m+7\sqrt{m}+10}$ será

A) $m-4$ B) $m-2$ C) $m+5$ D) $m-5$ E) $m+4$

16 Efectuar :

$$\frac{1}{a^2-1}\left[\frac{a+\sqrt{a^2-1}}{a-\sqrt{a^2-1}}-\frac{a-\sqrt{a^2-1}}{a+\sqrt{a^2-1}}\right];\ a\in Z^+$$

indicar el numerador entero

A) $2a$ B) $4a$ C) a D) a^4 E) a^2

17 Reducir :

$$P=\sqrt{\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{9+\sqrt{72}}}+\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{5+\sqrt{24}}}-\frac{\sqrt{48}}{\sqrt{8+\sqrt{48}}}}$$

A) 0 B) 3 C) 1 D) 4 E) 2

18 Simplificar : $\dfrac{\left(5+\sqrt{24}\right)\left(\sqrt{75}+\sqrt{50}\right)}{\sqrt{75}-\sqrt{50}}$

A) 3 B) 1 C) 5 D) 10 E) –3

19 Después de simplificar:

$$\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}+....+\frac{1}{\sqrt{100}+\sqrt{99}}$$

se obtiene

A) 1 B) 4 C) 9 D) 25 E) 16

20 Dar el denominador luego de racionalizar:

$$\frac{M}{\sqrt{16-2\sqrt{20}-2\sqrt{28}+2\sqrt{35}}}$$

A) 20 B) 76 C) 38 D) 24 E) 3

TAREA DOMICILIARIA

01 Efectuar : $\sqrt{3+\sqrt{8}}+\sqrt{7-\sqrt{40}}-\sqrt{5}$

A) 0 B) 1 C) $\sqrt{2}+\sqrt{5}$ D) $2+\sqrt{5}$ E) $3+\sqrt{2}$

02 Hallar el equivalente de : $\sqrt{17-12\sqrt{2}}$

A) $\sqrt{2}+1$ B) $\sqrt{2}-1$ C) $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ D) $\sqrt{6}-\sqrt{2}$ E) $\sqrt{6}-\sqrt{3}$

03 Simplificar: $\dfrac{1}{\sqrt{x+2+2\sqrt{x+1}}-\sqrt{x+2-2\sqrt{x+1}}}$

A) 2 B) 1/4 C) 1/3 D) 1/2 E) 1

04 Reducir :

$$\sqrt{3-2\sqrt{2}}+\sqrt{5-2\sqrt{6}}+\sqrt{7-2\sqrt{12}}+....+\sqrt{49-2\sqrt{600}}$$

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

05 Simplificar : $\dfrac{2}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}-\dfrac{12}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}$ e indicar el denominador racionalizado:

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

SEGUNDA PRACTICA DIRIGIDA

01 Racionalizar: $\dfrac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{3}}$

A) $\dfrac{\sqrt[3]{9}}{3}$ B) $\dfrac{\sqrt[3]{27}}{2}$ C) $\dfrac{\sqrt[3]{18}}{3}$ D) $\dfrac{\sqrt[3]{16}}{3}$ E) $\dfrac{2\sqrt[3]{6}}{3}$

02 Luego de racionalizar y simplificar : $\dfrac{5}{\sqrt{75}-\sqrt{45}}$; el denominador resulta:

A) 1 B) 3 C) 5 D) 6 E) 15

03 Calcular : $M=\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}-\dfrac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{7}}+\dfrac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}$

A) $\sqrt{3}$ B) $\sqrt{5}$ C) $\sqrt{7}$ D) 1 E) 0

04 Calcular: $M=\dfrac{2}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}-\dfrac{6}{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}-\dfrac{3}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}$

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

05 Luego de racionalizar la expresión: $\dfrac{1}{(a+b)-\sqrt{2ab}}$ indicar su denominador

A) $a-b$ B) $a+b$ C) a^2-b^2 D) a^2+b^2 E) ab

06 Efectuar : $\dfrac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}+\dfrac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}$

A) 0 B) 1 C) 2 D) $\sqrt{3}$ E) $2\sqrt{3}$

07 Simplificar : $R=\sqrt[3]{\dfrac{81}{3}}-\sqrt[3]{\dfrac{1}{72}}+\sqrt[3]{\dfrac{8}{9}}-\dfrac{\sqrt[3]{3}}{2}$

A) 3 B) $\sqrt{2}$ C) $\sqrt{3}$ D) $2\sqrt{3}$ E) $3\sqrt{3}$

08 Simplificar: $\dfrac{2}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}-\dfrac{12}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}$ e indicar el denominador racionalizado:

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

09 El valor equivalente de $\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}-2\sqrt{2}$ es :

A) 1 B) $\sqrt{6}$ C) $\sqrt{3}$ D) $\sqrt{2}$ E) $\sqrt{2}+1$

10 Reducir : $\dfrac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}+\dfrac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$

A) 1 B) 4 C) 7 D) 14 E) 16

11 Racionalizar el denominador de : $\dfrac{2}{1+\sqrt[3]{2}}$ e indique el denominador racionalizado

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

12 Indicar el denominador racionalizado de:

$$\frac{A}{2+\sqrt{2}+\sqrt[4]{2}}$$

A) 6 B) 5 C) 4 D) 3 E) 8

13 La expresión : $\dfrac{n^2}{\sqrt{m^2+n^2}+m}$ es equivalente a:

A) $\sqrt{m}+\sqrt{n}$ B) $\sqrt{mn}+m$ C) $\sqrt{m^2-n^2}+n$ D) $\sqrt{m^2+n^2}-m$ E) $n-\sqrt{m^2-n^2}$

14 El denominador racionalizado de :

$$P=\frac{m-25}{m+7\sqrt{m}+10}$$

será:

A) $m-4$ B) $m-2$ C) $m+5$ D) $m-5$ E) $m+4$

15 Hallar el valor de la siguiente expresión :

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\left(\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}+\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}\right)$$

A) $\sqrt{2}$ B) $-\sqrt{2}$ C) 1 D) $-\sqrt{3}$ E) $\sqrt{3}$

16 Racionalizar: $\dfrac{\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}}$

A) $\sqrt{x^2-1}+1$ B) $\sqrt{x^2+1}-x$ C) $\sqrt{x^2-1}+x$
D) $\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}$ E) $\sqrt{x^2-1}-x$

17 Racionalizar : $\dfrac{2\left(\sqrt{15}-\sqrt{7}\right)}{1+\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7}}$

A) $\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7}-1$ B) $5+\sqrt{7}-\sqrt{3}-1$
C) $1+\sqrt{7}+\sqrt{3}-\sqrt{5}$ D) $\sqrt{3}+\sqrt{7}-\sqrt{5}-1$

18 Hallar el valor equivalente de : $\sqrt{\dfrac{6+\sqrt{12}}{3-\sqrt{3}}}$

A) $\sqrt{3}-1$ B) $\sqrt{3}+1$ C) $\sqrt{3}+2$ D) $\sqrt{3}-2$ E) $\sqrt{3}+\sqrt{2}$

19 Racionalizar: $\dfrac{8}{\sqrt{15}+\sqrt{5}-\sqrt{3}-1}$ y dar como respuesta el denominador racionalizado:

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

20 Señale el denominador racionalizado:

$$\frac{12}{\sqrt{14}+\sqrt{21}+\sqrt{35}}$$

A) 1 B) 2 C) 7 D) 4 E) 14

TAREA DOMICILIARIA

01 Al simplificar : $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{72}-\sqrt{50}-\sqrt{8}}$ se obtiene:

A) 1/3 B) 1/9 C) 2/9 D) 4/9 E) 18/99

02 Racionalizar : $R=\dfrac{1}{\sqrt{8}+\sqrt{18}+\sqrt{32}}$ e indicar el denominador racionalizado

A) 2 B) 3 C) 6 D) 9 E) 18

03 Calcular : $E=\sqrt[3]{\dfrac{2}{3}}+6\sqrt[3]{\dfrac{16}{81}}+8\sqrt[3]{\dfrac{1}{12}}-4\sqrt[3]{\dfrac{9}{4}}-\sqrt[3]{18}$

A) 1 B) 2 C) 0 D) 3 E) 4

04 Después de simplificar :

$$\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}+\ldots\ldots+\frac{1}{\sqrt{100}+\sqrt{99}}$$

se obtiene:

A) 1 B) 4 C) 9 D) 25 E) 16

05 Racionalizar :

$$\frac{2}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}+\frac{4}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}-\frac{1}{3\sqrt{3}+3\sqrt{2}}$$ y dar como respuesta el denominador racionalizado

A) 2 B) 3 C) 4 D) 6 E) 8

TERCERA PRACTICA DIRIGIDA

01 Simplificar:

$$\sqrt{14+3\sqrt{20}}-\sqrt{9-\sqrt{80}}$$

A) 1 B) $2\sqrt{5}$ C) $1+\sqrt{5}$ D) $2\sqrt{5}-1$ E) 5

02 Hallar la raíz cuadrada de:

$$2x-1-2\sqrt{x^2-x-6}$$

A) $\sqrt{x^3-1}+\sqrt{x-2}$ B) $\sqrt{x+2}-\sqrt{x-3}$
C) $\sqrt{x+2}+\sqrt{x-3}$ D) $\sqrt{x+5}-\sqrt{x-5}$
E) $\sqrt{x^2+3}-\sqrt{x-3}$

03 Simplificar:

$$M=\frac{\sqrt{9-4\sqrt{2}}+2\sqrt{3+\sqrt{8}}+\sqrt{12+8\sqrt{2}}}{\sqrt{13+4\sqrt{10}}-\sqrt{11-2\sqrt{10}}+\sqrt{15-10\sqrt{2}}}$$

A) 1 B) 2 C) 5 D) 3 E) 4

04 Si: $\sqrt{2x+21-\sqrt{4x^2+84x}}=\sqrt{x}$

Calcular del valor de : x^2-4x

A) 21 B) 32 C) 60 D) 12 E) 5

05 Descomponer en radicales simples:

$$E=\sqrt{3-\sqrt{3}-\sqrt{4-\sqrt{12}}}$$

A) 2 B) $\sqrt{2}+1$ C) $\sqrt{2}-1$ D) $\sqrt{3}-1$ E) $\sqrt{3}+1$

06 Determinar el valor de a^2+x^2, si se sabe que:

$$\sqrt{a+6\sqrt{11-6\sqrt{2}}}+\sqrt{x}=\sqrt{6}$$

A) 25 B) 74 C) 65 D) 90 E) 61

07 Efectuar:

$$M=\sqrt{\sqrt{2}-1}\left\{\sqrt{112+80\sqrt{2}}+\sqrt{68+52\sqrt{2}}\right\}$$

A) 1 B) 2 C) $\sqrt{2}$ D) 4 E) –4

08 Al racionalizar la expresión:

$$J=\frac{23}{5-\sqrt{11-6\sqrt{2}}+\sqrt{17-12\sqrt{2}}}$$ se obtiene:

A) $3+\sqrt{2}$ B) $4+\sqrt{2}$ C) $4-\sqrt{2}$ D) $5+\sqrt{2}$ E) $5-\sqrt{2}$

09 Racionalizar la expresión:

$$T=\frac{\sqrt{5+2\sqrt{6}}}{2+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}}$$

A) $-\sqrt{2}$ B) $1-\sqrt{2}$ C) $\frac{1}{2}(\sqrt{2}-1)$ D) $\sqrt{2}+1$ E) $\sqrt{2}-1$

10 Calcular «m» de modo que se cumpla:

$$\frac{1}{\sqrt{11-2\sqrt{m}}}=\frac{3}{\sqrt{7-2\sqrt{10}}}+\frac{4}{\sqrt{8+4\sqrt{3}}}$$

A) 20 B) 25 C) 30 D) 35 E) 40

11 Racionalizar:

$$E=\frac{10}{2-\sqrt[3]{12}+\sqrt[3]{18}}$$

A) $\sqrt[3]{5}+2$ B) $\sqrt[3]{9}+1$ C) $\sqrt[3]{9}-1$ D) $\sqrt[3]{12}+2$ E) $\sqrt[3]{12}+1$

12 Calcular el menor valor de «n» para que el denominador de $\frac{n}{1+\sqrt{2}-\sqrt[4]{8}}$ sea igual a $1.(n\in Z')$

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

13 Si $B>C>D>0$ y se cumple:

$$\frac{7}{6-\sqrt{8}+\sqrt{27}-\sqrt{6}}=A+\sqrt{C}-\sqrt{B}-\sqrt{D}$$

entonces el valor de la expresión: $E=A+B+C+D$ es:

A) 49 B) 45 C) 48 D) 46 E) 47

14 Si el radical doble: $\sqrt{ax+by+\sqrt{xy(ab+c)}}$ se desdobla en radicales simples, determinar el valor de: $\left(\frac{ab}{c}\right)$

A) 3 B) 2 C) 1 D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{1}{3}$

15 El equivalente de la expresión:

$$\sqrt{x+1+\sqrt{2x+1}}+\sqrt{1+x-\sqrt{2x+1}}$$

para $-0,5<x<0$ será:

A) $x+\sqrt{2}$ B) $\sqrt{2}-x$ C) $2x$ D) $\sqrt{2}$ E) $2\sqrt{2}$

16 Si: $x=\sqrt[4]{(\sqrt{6+\sqrt{35}}-\sqrt{4+\sqrt{15}})(\sqrt{14}+\sqrt{6})}$

entonces el valor de:

$$E=x^6-x^5+x^4-x^3+x^2-x+1$$

es:

A) $15-7\sqrt{2}$ B) $19+17\sqrt{2}$ C) $17+19\sqrt{2}$

D) $16+7\sqrt{2}$ E) $9-17\sqrt{2}$

17 El valor simplificado de:

$$N=(\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}}+\sqrt{6})^4$$

es:

A) 125 B) 96 C) 100 D) 576 E) 80

18 Si a, b, c son positivos y además $c>b>a$, indicar el denominador racionalizado de:

$$\frac{3abc}{\sqrt{a+b+c+\sqrt{4ac-3b^2+6bc-2ab}}}$$

A) $2(a+2b-c)$ B) $3(a+b-2c)$ C) $2(a-2b-c)$
D) $3(a+2b-2c)$ E) $2(a+2b+3c)$

19 Efectuar:

$$J=\frac{(a^2+b^2)\sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{a^4}-\sqrt[3]{a^2b^2}+\sqrt[3]{b^4}}-\frac{(a^2-b^2)\sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{a^4}+\sqrt[3]{a^2b^2}+\sqrt[3]{b^4}}$$

A) $2b$ B) b C) $2a$ D) a E) $a+b$

20 Luego de racionalizar Z, señale su numerador, si se sabe que:

$$Z^{-1}=\sqrt{a^2+b+a\sqrt{4b}}-\frac{a^2\times\sqrt[4]{b}+b\sqrt{a}}{a^2\times\sqrt[4]{b}+\sqrt{ab}}$$

donde: $a>0\wedge b>0$

A) $\sqrt[4]{ab^3}$ B) $\sqrt[4]{a^2.b^3}$ C) $\sqrt{ab}$ D) $\sqrt[3]{a.b}$ E) $\sqrt[4]{ab^5}$

CLAVES DE LA PRIMERA PRACTICA				
01) A	02) A	03) A	04) B	05) B
06) B	07) B	08) B	09) A	10) B
11) E	12) D	13) E	14) B	15) A
16) B	17) A	18) B	19) C	20) C
01) B	02) B	03) D	04) C	05) A

CLAVES DE LA SEGUNDA PRACTICA				
01) C	02) D	03) E	04) A	05) D
06) D	07) A	08) A	09) B	10) D
11) C	12) A	13) D	14) A	15) A
16) E	17) E	18) B	19) A	20) C
01) B	02) E	03) C	04) C	05) B

CLAVES DE LA TERCERA PRACTICA

1)E	2)B	3)D	4)A	5)D	6)D	7)B	8)D	9)E	10)C
11)D	12)B	13)E	14)E	15)D	16)A	17)D	18)A	19)A	20)B

¡Recuerda!

La racionalización de radicales es un proceso donde se tiene que eliminar el radical o los radicales, que están en el denominador de la fracción.

Racionalizar una fracción con raíces en el denominador, es encontrar otra expresión equivalente que no tenga raíces en el denominador. Para ello se multiplica el numerador y el denominador por la expresión adecuada, de forma que al operar desaparezca la raíz del denominador.



FACTORIAL Y NUMERO COMBINATORIO

11

OBJETIVO :

* Conocer los símbolos convencionales: ***n!* ó $\lfloor\underline{n}$**: Factorial de «*n*». C_k^n y $\binom{n}{k}$: Combinaciones de «*n*» en «*k*» y el coeficiente binomial "*n*" de "*k*".

INTRODUCCIÓN:

Para que posteriormente estudiemos con soltura el análisis combinatorio , previamente veamos algunas herramientas tales como el factorial de un número y los números combinatorios. Adicionalmente veremos el cofactorial de un número.

FACTORIAL DE UN NÚMERO

Llamamos así al producto que resulta de multiplicar todos los números enteros y positivos consecutivamente desde la unidad hasta el número considerado inclusive ; se denota por : ***n!*** ó $\lfloor\underline{n}$ ó $\underline{n}\rfloor$

* Se lee : ***factorial de «n» ó «n» factorial.***

$2! = \underline{2}\rfloor = 1\times2=2$ ó $2!=2\times1$ ...... «2» ***factorial***

$3! = \underline{3}\rfloor = 1\times2\times3=6$ ó $3! = 3\times2\times1$

$4! = \underline{4}\rfloor = 1\times2\times3\times4=24$

$5! = \underline{5}\rfloor = 1\times2\times3\times4\times5=120$

$6! = \underline{6}\rfloor = 1\times2\times3\times4\times5\times6=720$

$7! = \underline{7}\rfloor = 1\times2\times3\times4\times5\times6\times7=5040$

$8! = \underline{8}\rfloor = 1\times2\times3\times4\times5\times6\times7\times8=40320$

$9!= 362\ 880$

$10!=3\ 628\ 800$

$15!=1\ 307\ 674\ 368\ 000$

$20!=24\ 32\ 902\ 008\ 176\ 640\ 000$

$25!=15\ 511\ 210\ 043\ 330\ 985\ 984\ 000\ 000$

$70!=1{,}19785717... \times 10^{100}$

$450!= 1{,}73336873... \times 10^{1\ 000}$

$3\ 249!= 6{,}41233768... \times 10^{10\ 000}$

$25\ 206!= 1{,}205703438... \times 10^{100\ 000}$

$100\ 000!= 2{,}8242294079... \times 10^{456\ 573}$

Por medio de la combinatoria, los factoriales intervienen en el cálculo de las probabilidades. Intervienen también en el ámbito del análisis, en particular a través del desarrollo polinomial de las funciones (fórmula de Taylor). Se generalizan a los reales con la *función gamma*, de gran importancia en el campo de la aritmética.

EN GENERAL:

$$\underline{n}\rfloor = 1\times2\times3\times4\times5...\times(n-3)(n-2)(n-1)n$$

DEFINICIÓN: $\boxed{1!=1}$ .... ***uno factorial***

POR CONVENCIÓN : $\boxed{0!=1}$ ..... ***cero factorial***

PROPIEDAD I :

* Por definición:

$$\lfloor\underline{n} = \underbrace{1\times2\times3...\times(n-1)}_{\lfloor\underline{n-1}}\,n$$

* Ordenando:

$$\boxed{\lfloor\underline{n} = n\lfloor\underline{n-1};\ n\geq2} \quad ó \quad \boxed{n! = n(n-1)!}$$

esta última expresión adquiere importancia cuando se trata de simplificar expresiones , un tanto complicadas que involucran el uso de factoriales ; además n! se puede desarrollar explícitamente según uno lo requiera:

$$\lfloor\underline{n}=(n)(n-1)(n-2)\lfloor\underline{n-3}$$

$$\lfloor\underline{n}=(n)(n-1)(n-2)(n-3)\lfloor\underline{n-4}$$

EJEMPLOS:

* $\lfloor\underline{100} = 100\lfloor\underline{99}$

* $(x+1)! = (x+1)x!$

* $13! = 13\times12\times11!$

* $\lfloor\underline{100} = 100\times99\times98\times...\times55\lfloor\underline{54}$

* $\lfloor\underline{78} = 78\times77\times76\times...\times24\lfloor\underline{23}$

* $\lfloor\underline{x+30} = (x+30)(x+29)(x+28)...(x+1)\lfloor\underline{x}$

* $\lfloor\underline{3n-2} = (3n-2)(3n-3)(3n-4)...(3n-11)\lfloor\underline{(3n-12)}$

* $\lfloor\underline{m^2} = (m^2)(m^2-1)(m^2-2)...(m^2-n)\lfloor\underline{m^2-n-1}$

PROPIEDAD II :

$$\boxed{Si:\ a! = b! \Rightarrow a = b};\ ab\neq0$$

EJEMPLO:

Si : $(x-3)! = 2$

$\Rightarrow (x-3)! = 2! \Rightarrow x-3=2 \Rightarrow x=5$

OBSERVACIÓN :

$$\boxed{Si : x! = 1 \Rightarrow x = 0 \text{ ó } x = 1}$$ ......*excepción*

PROPIEDAD III:

$$\boxed{n\lfloor n = \lfloor n+1 - \lfloor n}$$

EJEMPLO :

* $100\lfloor 100 = \lfloor 101 - \lfloor 100$
* $9(9!) = 10! - 9!$

OBSERVACIÓNES

* $\underline{a \pm b|} \neq \underline{a|} \pm \underline{b|}$
* $\underline{ab|} \neq \underline{a|}\ \underline{b|}$
* $\underline{\frac{a}{b}|} \neq \frac{\lfloor a}{\lfloor b}$

PROPIEDADES AUXILIARES

I) $\forall n \in N,\ n \geq 1$ se cumple:

$$\boxed{\lfloor n + \lfloor n+1 = (n+2)\lfloor n}$$

EJEMPLOS :

* $\lfloor 7 + \lfloor 8 = 9\lfloor 7$
* $\lfloor 111 + \lfloor 112 = 113\lfloor 111$
* $(x-1)! + x! = (x+1)\times(x-1)!$

II) $\forall n \in N,\ n \geq 1$ se cumple:

$$\boxed{\lfloor n + \lfloor n+1 + \lfloor n+2 = (n+2)^2\lfloor n}$$

EJEMPLOS :

* $\lfloor 7 + \lfloor 8 + \lfloor 9 = 9^2\lfloor 7 = 81\lfloor 7$
* $\lfloor 54 + \lfloor 55 + \lfloor 56 = 56^2\lfloor 54$
* $(m-1)! + m! + (m+1)! = (m+1)^2(m-1)!$

III) Descomposición racional de una fracción:

$$\boxed{\frac{n}{\lfloor n+1} = \frac{1}{\lfloor n} - \frac{1}{\lfloor n+1};\ n \neq 1}$$

EJEMPLOS:

Calcular la suma de la serie:

$$S = \frac{1}{\lfloor 2} + \frac{2}{\lfloor 3} + \frac{3}{\lfloor 4} + \frac{4}{\lfloor 5} + \ldots + \frac{100}{\lfloor 101}$$

RESOLUCIÓN:

* Descomponiendo cada una de las fracciones:

$$S = 1 - \frac{1}{\lfloor 2} + \frac{1}{\lfloor 2} - \frac{1}{\lfloor 3} + \frac{1}{\lfloor 3} - \frac{1}{\lfloor 4} + \ldots + \frac{1}{\lfloor 100} - \frac{1}{\lfloor 101}$$

* resulta : $S = 1 - \frac{1}{\lfloor 101}$

SEMIFACTORIAL, COFACTORIAL O CUASIFACTORIAL DE UN NÚMERO NATURAL

La definición de cofactorial de un número entero positivo dependerá de la naturaleza de este , es decir si el número es par o impar

* Simbología: $\lfloor\lfloor n$, $n!!$
* Lectura : «*Semifactorial del número n*»
* Axiomáticamente : $\forall n \in N^+$, se define:

$$\boxed{n!! = \begin{cases} 2\times4\times6\times8\times\ldots\times n\ ;\ si\ n\ es\ PAR \\ 1\times3\times5\times7\times\ldots\times n\ ;\ si\ n\ es\ IMPAR \end{cases}}$$

EJEMPLOS:

* Para números pares , se tienen :

$6!! = 2\times4\times6 = 48$

$10!! = 2\times4\times6\times8\times10 = 3840$

$(2m)!! = 2\times4\times6\times8\ldots(2m-4)(2m-2)(2m)$

$(8p+12)!! = 2\times4\times6\times8\times\ldots\times(8p+8)(8p+10)(8p+12)$

* Para números impares , se muestran :

$5!! = 1\times3\times5 = 15$

$9!! = 1\times3\times5\times7\times9 = 945$

$(2n+1)!! = 1\times3\times5\times7\times\ldots\times(2n-3)(2n-1)(2n+1)$

$(6x-17)!! = 1\times3\times5\times7\times\ldots\times(6x-21)(6x-19)(6x-17)$

* También debemos observar que :

$$\boxed{(n!)! \neq n!!;\ n \in N}$$

FÓRMULAS GENERALES DEL SEMIFACTORIAL

A) Si n es un número par :

$$n!! = 2\times4\times6\times8\times\ldots\times n$$

$$n!! = (2\times1)(2\times2)(2\times3)(2\times4)\ldots\left(2\times\frac{n}{2}\right)$$

$$n!! = \underbrace{2\times2\times2\times\ldots\times2}_{\left(\frac{n}{2}\right) veces}\left(1\times2\times3\times\ldots\times\frac{n}{2}\right)$$

* Por lo tanto: $\boxed{n!! = 2^{\frac{n}{2}}\left\lfloor\frac{n}{2}\right.}$

EJEMPLOS :

$*100!! = 2^{50}\lfloor 50$

$*(2m)!! = 2^{m}\lfloor m$

B) Si «n» es un número ***IMPAR:***

$$n!! = 1\times 3\times 5\times 7...\times n$$

*Multiplicando y dividiendo por $[2\times 4\times 6...(n-1)]$

$$n!! = \frac{1\times 2\times 3\times 4\times 5\times 6...(n-1)(n)}{2\times 4\times 6...(n-1)}$$

$$n!! = \frac{\lfloor n}{(2\times 1)(2\times 2)(2\times 3)...\left[2\left(\frac{n-1}{2}\right)\right]}$$

$$n!! = \frac{\lfloor n}{\underbrace{2\times 2\times 2...\times 2}_{\left(\frac{n-1}{2}\right)veces}\left[1\times 2\times 3...\left(\frac{n-1}{2}\right)\right]}$$

* Por lo tanto :

$$\boxed{n!! = \frac{\lfloor n}{2^{\frac{n-1}{2}}\lfloor \frac{n-1}{2}}}$$

EJEMPLOS:

$* 255!! = \frac{\lfloor 255}{2^{127}\lfloor 127}$ $\qquad * (2m-1)!! = \frac{\lfloor 2m-1}{2^{m-1}\lfloor m-1}$

NÚMERO COMBINATORIO

Se define como el número total de grupos que se pueden formar con «n» elementos tomados de «k» en «k», de modo que los grupos se diferencien por lo menos en un elemento.

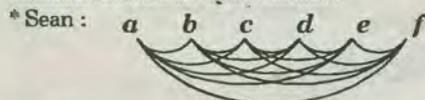
NOTACIÓN : C_k^n

Se lee :
combinación de «n» elementos tomados de k en k, o simplemente combinación de n en k.

EJEMPLO EXPLICATIVO:

De cuántas maneras se pueden agrupar **6** elementos tomados de dos en dos. Veamos.

* Sean : *a b c d e f*



* Se obtienen :

ab ac ad ae af ⟶ 5
bc bd be bf ⟶ 4
cd ce cf ⟶ 3
de df ⟶ 2
ef ⟶ 1

N° total de maneras = 15

EN GENERAL:

se trata de agrupar «n» elementos tomados de «k» en «k». El número de maneras se obtiene a partir de la fórmula matemática:

$$\boxed{C_k^n = \frac{\lfloor n}{\lfloor k\lfloor n-k}} \text{ ó } \boxed{C_k^n = \frac{n!}{(n-k)!k!}}; n\geq k$$

* Donde:

n : Es el índice superior, el cual nos indica el número total de elementos.

k : Es el índice inferior, el cual nos muestra el número de elementos existentes en cada grupo.

* Aplicándolo en el ejemplo anterior:

$$\# \, maneras = C_2^6 = \frac{\lfloor 6}{\lfloor 2\lfloor 6-2} = \frac{6\times 5\times\lfloor 4}{1\times 2\times\lfloor 4} = 15$$

EJEMPLOS:

$* C_2^4 = \frac{\lfloor 4}{\lfloor 2\lfloor 4-2} = \frac{24}{2\times 2} = 6$

$* C_3^7 = \frac{\lfloor 7}{\lfloor 3\times\lfloor 4} = \frac{7\times \not 6\times 5\lfloor\not 4}{\not 6\times\lfloor\not 4} = 35$

$* C_{48}^{50} = \frac{\lfloor 50}{\lfloor 48\times\lfloor 2} = \frac{50\times 49\times\lfloor\not{48}}{\lfloor\not{48}\times 2} = 1225$

$* C_2^9 = \frac{9!}{(9-2)!\times 2!} = \frac{9\times 8\times\not 7!}{\not 7!\times 2} = 36$

$* C_{10}^{10} = \frac{10!}{0!\,0!} = 1$

REGLA PRÁCTICA

En la definición, aplicando la descomposición general :

$$\boxed{C_k^n = \frac{\lfloor n}{\lfloor k\times\lfloor n-k} = \frac{n\overbrace{(n-1)(n-2)...(n-k+1)}^{\text{"k" factores}}\lfloor\not{n-k}}{\underbrace{1\times 2\times 3...k}_{\text{"k" factores}}\lfloor\not{n-k}}}$$

* Por lo tanto :

$$\boxed{C_k^n = \frac{\overbrace{n(n-1)(n-2)...(n-k+1)}^{\text{"k" FACTORES}}}{\underbrace{1\times 2\times 3\times ...\times k}_{\text{"k" FACTORES}}}}$$

EJEMPLOS:

$* C_3^7 = \frac{(7)(6)(5)}{(1)(2)(3)} = 35$

$* C_2^4 = \frac{(4)(3)}{(1)(2)} = 6$

* $C_4^7 = \frac{(7)(6)(5)(4)}{(1)(2)(3)(4)} = 35$

PROPIEDADES:

I) COMBINACIONES COMPLEMENTARIAS

$$\boxed{C_k^n = C_{n-k}^n};\ n \geq k$$

EJEMPLOS:

* $C_7^{11} = C_4^{11} = \frac{11\times10\times9\times8}{1\times2\times3\times4} = 330$
* $C_{97}^{100} = C_3^{100} = \frac{100\times99\times98}{1\times23} = 161700$
* $C_{n-2}^{n+1} = C_3^{n+1} = \frac{(n+1)(n)(n-1)}{1\times2\times3} = \frac{n(n^2-1)}{6}$

Estamos observando que para ciertos números combinatorios, esta propiedad, nos permite reducir sus índices inferiores.

* $C_{x+2}^{x+8} = C_{(x+6)-(x+2)}^{x+8} = C_6^{x+8}$
* $C_{48}^{50} = C_2^{50} = \frac{(50)(49)}{(1)(2)} = 1225$

CONSECUENCIAS:

$$\boxed{C_0^n = C_n^n = 1} \qquad \boxed{C_1^n = C_{n-1}^n = n}$$

EJEMPLOS:

* $C_{14}^{14} = C_0^{14} = 1$ * $C_{2m}^{2m} = C_0^{2m}$

II) PROPIEDAD DE LA IGUALDAD

$$\boxed{Si: C_r^n = C_p^n \Rightarrow r = p \vee r + p = n}$$

Debemos tener en cuenta, que las igualdades resultantes, son relaciones mutuamente excluyentes. Es decir, una de ellas es independiente de la otra.

EJEMPLOS:

$Si: C_x^7 = C_y^7 \Rightarrow x = y \ \vee \ x + y = 7$

Observar que las ecuaciones no forman un sistema, ya que estas igualdades son completamente independientes.

III) SUMA DE COMBINATORIOS :

$$\boxed{C_k^n + C_{k+1}^n = C_{k+1}^{n+1}}$$

EJEMPLOS:

* $C_3^7 + C_4^7 = C_4^8$ * $C_7^{25} + C_6^{25} = C_7^{25}$
* $C_6^{10} + C_7^{10} = C_7^{11}$ * $C_{x+2}^{x+16} + C_{x+1}^{x+16} = C_{x+2}^{x+17}$
* $C_3^{10} + C_4^{10} = C_4^{11}$ * $C_{20}^n + C_{21}^n = C_{21}^{n+1}$
* $C_{x-1}^{m-1} + C_x^{m-1} = C_x^m$

EJERCICIO 1:

Calcular la suma de la serie:

$$P = C_1^4 + C_2^5 + C_3^6 + C_4^7 + C_5^8$$

RESOLUCIÓN:

* Sumando y restando C_0^4, resulta:

$$P = \underbrace{C_0^4 + C_1^4}_{C_1^5} + C_2^5 + C_3^6 + C_4^7 + C_5^8 - C_0^4$$

$C_1^5 + C_2^5 = C_2^6$; $C_2^6 + C_3^6 = C_3^7$; $C_3^7 + C_4^7 = C_4^8$; $C_4^8 + C_5^8$

$\rightarrow P = C_5^9 - C_0^4 = C_5^9 - 1$

EJERCICIO 2:

Calcular:

$$S = C_0^7 + C_1^8 + C_2^9 + C_3^{10} + C_4^{11} + C_5^{12}$$

RESOLUCIÓN:

$$S = \underbrace{C_0^7 + C_1^8}_{} + C_2^9 + C_3^{10} + C_4^{11} + C_5^{12}$$

$C_0^8 + C_1^8$

$C_1^9 + C_2^9$

$C_2^{10} + C_3^{10}$

$C_3^{11} + C_4^{11}$

$C_4^{12} + C_5^{12}$

C_5^{13}

IV) DEGRADACIÓN DE AMBOS ÍNDICES :

$$\boxed{C_k^n = \frac{n}{k} C_{k-1}^{n-1}}$$

EJEMPLOS:

* $C_5^{10} = \frac{10}{5} C_4^9 = 2C_4^9$
* $C_3^{10} = \frac{10}{3} C_2^9 = \frac{10}{3} \times \frac{9}{2} C_1^8$
* $C_{x+2}^{x+5} = \frac{x+5}{x+2} \times C_{x+1}^{x+4}$

V) DEGRADACIÓN DEL ÍNDICE SUPERIOR :

$$\boxed{C_k^n = \frac{n}{n-k} C_k^{n-1}}$$

EJEMPLOS:

* $C_7^{15}=\frac{15}{8}\times C_7^{14}$
* $C_3^{7}=\frac{7}{7-3}\times C_3^{6}=\frac{7}{4}\times C_3^{6}$

VI) DEGRADACIÓN DEL ÍNDICE INFERIOR :

$$C_k^n=\frac{n-k+1}{k}C_{k-1}^n$$

EJEMPLOS:

* $C_3^{12}=\frac{10}{3}C_2^{12}$
* $C_{x+2}^{x+7}=\frac{(x+7)-(x+2)+1}{x+2}\times C_{x+1}^{x+7}=\frac{6}{x+2}C_{x+1}^{x+7}$

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1:

Si: $A=\frac{9!}{7!+8!}\ \wedge\ B=\frac{4!+5!+6!}{2!\times 3!\times 4!}$

Calcular : $\sqrt[B]{A}$

A)2 B)3 C)1 D)20 E)4

RESOLUCIÓN:

* Recordemos que el factorial de un número se puede descomponer como el producto del factorial de un número menor, multiplicado por todo los consecutivos hasta el número de consideración ***(PROPIEDAD DEGRADATIVA)***

$$A=\frac{9\times 8\times 7!}{7!+8\times 7!}=\frac{9\times 8\times 7!}{9\times 7!}=8$$

$$B=\frac{4!+5\times 4!+6\times 5\times 4!}{2\times 6\times 4!}=\frac{36\times 4!}{12\times 4!}=3$$

* Luego: $\sqrt[B]{A}=\sqrt[3]{8}=2$

RPTA: "A"

PROBLEMA 2:

Reducir la siguiente expresión : $R=\left\{\frac{1}{7!+8!}+\frac{1}{9!}\right\}^{-1}$

A)7 B)16 C)7! D)8! E)10!

RESOLUCIÓN

* Dando común denominador : $R=\left\{\frac{9!+7!+8!}{(7!+8!)\times 9!}\right\}^{-1}$

* Invirtiendo : $R=\frac{(7!+8!)\times 9!}{9!+7!+8!}$

* Degradamos $\begin{cases}8!=8\times 7!\\ 9!=9\times 8\times 7!\end{cases}$

* Reemplazando :

$$R=\frac{(7!+8\times 7!)\times 9!}{9\times 8\times 7!+7!+8\times 7!}\Rightarrow R=\frac{7!(1+8)\times 9!}{7!(72+1+8)}=\frac{9\times 9!}{81}=\frac{9!}{9}$$

* Luego : $R=8!$

RPTA: "D"

PROBLEMA 3:

Simplificar : $\left(\frac{83!}{81!+82!}\right)\left(\frac{40!+41!}{42!}\right)$

A)2 B)4 C)6 D) 8 E) 10

RESOLUCIÓN:

* Decomponiendo convenientemente

$$\left(\frac{83\times 82\times 81!}{81!+82\times 81!}\right)\left(\frac{40!+41\times 40!}{42\times 41\times 40!}\right)$$

* Cancelando ***81!*** y ***40!*** en la ***1ra*** y ***2da*** fracción respectivamente , resulta :

$$\left(\frac{83\times 82}{1+82}\right)\left(\frac{1+41}{42\times 41}\right)=82\left(\frac{1}{41}\right)=2$$

RPTA: "A"

PROBLEMA 4 :

Simplificar : $S=\frac{n!+(n+1)!+(n+2)!}{n!+(n+1)!}$

A)n B)n-1 C)n+3 D)n+2 E)2n

RESOLUCIÓN :

* Podemos expresar :

$$(n+2)!=(n+2)\times(n+1)\times n!$$
$$(n+1)!=(n+1)\times n!$$

* Reemplazando en ***"S"*** :

$$S=\frac{n!+(n+1)n!+(n+2)(n+1)n!}{n!+(n+1)!}$$

* Factorizando ***n!*** en el numerador y denominador :

$$S=\frac{n![1+(n+1)+(n+2)(n+1)]}{n![1+(n+1)]}$$

$$\rightarrow S=\frac{n^2+4n+4}{n+2}=\frac{(n+2)^2}{(n+2)}\rightarrow S=n+2$$

RPTA: "D"

PROBLEMA 5:

Simplificar: $S=\frac{(n-5)!+(n-4)!+(n-3)!}{n^4-15n^3+83n^2-201n+180}$

A) $\frac{(n-6)!}{n-4}$ *B)* $n-5$ *C)* $(n-2)!$ *D)1 E)* $\frac{1}{8}$

RESOLUCIÓN:

* Escribiendo convenientemente el numerador y factorizando el denominador :

$$S=\frac{(n-5)!+(n-4)(n-5)!+(n-3)(n-4)(n-5)!}{(n-3)^2(n-5)(n-4)}$$

$$\rightarrow S=\frac{(n-5)![1+(n-4)+(n-3)(n-4)]}{(n-3)^2(n-5)(n-4)}$$

$$\rightarrow S=\frac{(n-5)![n^2-6n+9]}{(n-3)^2(n-5)(n-4)}$$

$$\rightarrow S=\frac{(n-6)!(n-5)}{(n-5)(n-4)}\rightarrow S=\frac{(n-6)!}{(n-4)}$$

RPTA: "A"

PROBLEMA 6:

Calcular : $E=\left(\frac{33!}{31!+32!}\right)\left(\frac{15!+16!}{17!}\right)\left(\frac{9!}{7!+8!}\right)$

A)32 B)16 C)8 D)33 E)17

RESOLUCIÓN:

* Descomponiendo los factoriales en los respectivos paréntesis, hasta **31!** en el primero, hasta **15!** en el **2do.** y hasta **7!** en el tercero se obtiene:

$$E=\left(\frac{33\times32\times31!}{31!+32\times31!}\right)\left(\frac{15!+16\times15!}{17\times16\times15!}\right)\left(\frac{9\times8\times7!}{7!+8\times7!}\right)$$

* Simplificando los factoriales, se obtendrá:

$$E=\left(\frac{33\times32}{1+32}\right)\left(\frac{1+16}{17\times16}\right)\left(\frac{9\times8}{1+8}\right)$$

* Nuevamente simplificando : $E=(32)\frac{1}{16}(8)=16$

RPTA: "B"

PROBLEMA 7:

Calcular «x», en : $\frac{(x+9)!(x+7)!}{(x+8)!+(x+7)!}=14!$

A)2 B)4 C)6 D)8 E)10

RESOLUCIÓN:

* Factorizando el denominador :

$$\frac{(x+9)!(x+7)!}{(x+8)(x+7)!+(x+7)!}=14!\Rightarrow\frac{(x+9)!(x+7)!}{(x+7)![(x+8)+1]}=14!$$

* Cancelando $(n+7)!$:

$$\frac{(x+9)!}{(x+9)}=14!\Rightarrow\frac{(x+9)(x+8)!}{(x+9)}=14!\Rightarrow(x+8)!=14!$$

* Luego : $x+8=14\rightarrow x=6$

RPTA: "C"

PROBLEMA 8:

Resolver : $\frac{(x+1)!}{x-2}=2\times x!$

A)4 B)5 C)3 D)2 E)7

RESOLUCIÓN:

* Tratando de formar $x!$, resulta:

$$\frac{(x+1)}{x-2}x!=2\times x!\Rightarrow\frac{x+1}{x-2}=2$$

$$\Rightarrow x+1=2x-4\Rightarrow x=5$$

RPTA: "B"

PROBLEMA 9 :

Si $n\in N$, entonces al simplificar la expresión E definida por $E=\frac{n!+(n-1)!+(n+1)!}{n!+(n+2)!-n(n+2)(n-1)!}$, se obtiene:

A) n B) $\frac{1}{n}$ C) $\frac{1}{n^2}$ D) $n+2$ E) $n-1$

RESOLUCIÓN:

* Tratemos de representar todo en función de $(n-1)!$, así:

$$E=\frac{n(n-1)!+(n-1)!+(n+1)n(n-1)!}{n(n-1)!+(n+2)(n+1)n(n-1)!-n(n+2)(n-1)!}$$

* Factorizando :

$$E=\frac{(n-1)!\{n+1+(n+1)\times n\}}{(n-1)![n+(n+2)(n+1)n-n(n+2)]}$$

$$\Rightarrow E=\frac{n^2+2n+1}{n+(n+2)(n)(n)}=\frac{n^2+2n+1}{n(1+n^2+2n)}\Rightarrow E=\frac{1}{n}$$

RPTA: "B"

PROBLEMA 10:

Simplificar : $T=\frac{(x+2)^3\times x!}{(x+2)!+(x+1)!+x!}$

A) $x+2$ B) x C)1 D)2 E)4

RESOLUCIÓN:

* Degradamos : $(x+2)!=x!(x+1)(x+2)$

$(x+1)!=x!(x+1)$

* Reemplazando en el denominador:

$$T=\frac{(x+2)^3\times x!}{x!(x+1)(x+2)+x!\times(x+1)+x!}$$

* Factorizando «x!» en el denominador:

$$T=\frac{(x+2)^3\times x!}{x![(x+1)(x+2)+(x+1)+1]}$$

$$\rightarrow T=\frac{(x+2)^3}{x^2+3x+2+x+2}=\frac{(x+2)^3}{(x+2)^2}\rightarrow T=x+2$$

RPTA: "A"

PROBLEMA 11:

Resolver la ecuación : $12x!+5(x+1)!=(x+2)!$

A)4 B)5 C)6 D)7 E)8

RESOLUCIÓN:

* Descomponiendo en función de $x!$; así

$$12x! + 5(x+1)x! = (x+2)(x+1)x!$$

* Cancelando este, se obtiene:

$$12 + 5(x+1) = (x+2)(x+1)$$

* Efectuando, resulta:

$$12 + 5x + 5 = x^2 + 3x + 2 \rightarrow x^2 - 2x - 15 = 0$$

* Factorizando : $(x+3)(x-5) = 0$
* Sólo se toma : $x = 5$

RPTA: "B"

PROBLEMA 12:

Señale el equivalente de :

$$K = 1\times 1! + 2\times 2! + 3\times 3! + 4\times 4! + ... + n\times n!$$

A) $(n+2)!$ B) $(n+1)!$ C) n^2 D) $n(n+1)$ E) $(n+1)!-1$

RESOLUCIÓN:

* Por inducción matemática se tiene:
* Para un sumando : $1\times 1! = 1 = 2! - 1$
* Para dos sumandos : $1\times 1! + 2\times 2! = 1 + 4 = 5 = 3! - 1$
* Para tres sumandos: $1\times 1! + 2\times 2! + 3\times 3! = 23 = 4! - 1$
* Para cuatro sumandos: $1\times 1! + 2\times 2! + 3\times 3! ... = 5! - 1$
* Para «n» sumandos :

$$1\times 1! + 2\times 2! + 3\times 3! + 4\times 4! + ... + n\times n! = (n+1)! - 1$$

RPTA: "E"

PROBLEMA 13:

Calcular la suma de : $P = \underbrace{\frac{0!}{2!} + \frac{1!}{3!} + \frac{2!}{4!} + ...}_{40\ términos}$

A) $\frac{40}{41}$ B) $\frac{41}{41}$ C) $\frac{42}{41}$ D) 1 E) $\frac{2}{3}$

RESOLUCIÓN:

* Efectuando, se tiene como equivalente de la suma:

$$P = \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + ...}_{40\ términos}$$

*Expresando cada fracción de una forma conveniente para deducir el último término, así:

$$P = \frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \frac{1}{3\times 4} + ... + \frac{1}{40\times 41}$$

$$\rightarrow P = \frac{2-1}{1\times 2} + \frac{3-2}{2\times 3} + \frac{4-3}{3\times 4} + ... + \frac{41-40}{40\times 41}$$

* Desdoblando cada fracción:

$$P = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - ... + \frac{1}{40} - \frac{1}{41}$$

* Resulta : $P = 1 - \frac{1}{41} = \frac{40}{41}$

RPTA: "A"

PROBLEMA 14:

En la siguiente ecuación:

$$n^2(n-1)! + (2n^2 - 3n + 1)(n-2)! + (n^2 - 3n + 2)(n-3)! = \frac{(6n-43)!}{n+1}$$

el valor de n es:

A)11 B)10 C)9 D)8 E)7

RESOLUCIÓN:

* Factorizando $(n-1)!$, resultará:

$$(n-1)!\{n^2 + 2n - 1 + 1\} = \frac{(6n-43)!}{n+1}$$

$$\rightarrow (n-1)!n(n+2)(n+1) = (6n-43)!$$

$$\Rightarrow (n+2)! = (6n-43)! \Rightarrow n + 2 = 6n - 43$$

$$\Rightarrow 45 = 5n \Rightarrow n = 9$$

RPTA: "C"

PROBLEMA 15 :

En la siguiente igualdad, el valor de n es:

$$1 + 2(2!) + 3(3!) + ... + n(n!) = 719$$

A)4 B)5 C)6 D) 7 E) 8

RESOLUCIÓN:

* Agregando 1 , en ambos miembros:

$$\underbrace{\underbrace{2}_{2!} + 2\times 2!}_{3\times 2!} + 3\times 3! + 4\times 4! + ... n\times n! = 720$$

$$\rightarrow \underbrace{\underbrace{\underbrace{3! + 3\times 3!}_{4\times 3! = 4!} + 4\times 4!}_{5\times 4! = 5!} + ... + n\times n!}_{(n+1)\times n!} = 720$$

$$(n+1)! = 720 = 6! \rightarrow n = 5$$

RPTA: "B"

PROBLEMA 16 :

Hallar la suma de :

$$\frac{11! - 10!}{9!} + \frac{10! - 9!}{8!} + \frac{9! - 8!}{7!} + ... + \frac{2! - 1!}{0!}$$

A)55 B)77 C)285 D)85 E)385

RESOLUCIÓN :

* Los sumandos son de la forma :

$$\frac{(n+2)! - (n+1)!}{n!}$$

* Simplifiquemos en general :

$$\frac{(n+2)! - (n+1)!}{n!} = \frac{(n+2)(n+1)n! - (n+1)n!}{n!}$$

* Factorizamos $(n+1)n!$; nos quedará que :

$$\frac{(n+2)-(n+1)!}{n!}=(n+1)^2$$

* En nuestro caso particular nos quedará así:

$$\underbrace{10^2+9^2+8^2+...1^2}_{\text{suma de cuadrados de los 10 primeros números naturales}}$$

RECUERDE:

$$1^2+2^2+3^2+...n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

* En nuestro caso : $\frac{(10)(11)(21)}{6}=385$

RPTA: "E"

PROBLEMA 17 :

Si $n\in Z^+$, hallar el valor de «S» que consta de «n» términos siendo:

$$S=\frac{1}{2(1!)}+\frac{3}{2^2(2!)}+\frac{5}{2^3(3!)}+\frac{7}{2^4(4!)}+...+\frac{2n-1}{2^n(n!)}$$

A) $(2^n-1)/n!$ B) $(2^n n!-1)/2^n\cdot n!$

C) $(2n+1)/2^n\cdot n!$ D) $(2n-1)/2^n\cdot n!$

RESOLUCIÓN:

* Un término cualquiera de S puede escribirse:

$$\frac{2n-1}{2^n(n!)}$$

* Transformemos dicho término:

$$\frac{2n-1}{2^n(n!)}=\frac{2n-1}{2^n\times n(n-1)!}=\frac{2n-1}{2^n\times n(n-1)!}-\frac{1}{2^n(n!)}$$

* De aquí:

$$\frac{2n-1}{2^n(n!)}=\frac{1}{2^{n-1}(n-1)!}-\frac{1}{2^n(n!)}$$

* Dando valores a «n» tenemos los términos de S.

$$n=1\to\frac{1}{2(1!)}=\frac{1}{1(0!)}-\frac{1}{2(1!)}$$

$$n=2\to\frac{3}{2^2(2!)}=\frac{1}{2(1!)}-\frac{1}{2^2(2!)}$$

$$n=3\to\frac{5}{2^3(3!)}=\frac{1}{2^2(2!)}-\frac{1}{2^3(3!)}$$

$$n=4\to\frac{7}{2^4(4!)}=\frac{1}{2^3(3!)}-\frac{1}{2^4(4!)}$$

$\vdots$ $\oplus$

$$n=n\to\frac{2n-1}{2^n(n!)}=\frac{1}{2^{n-1}(n-1)!}-\frac{1}{2^n(n!)}$$

* Sumamos: $S=\frac{1}{1(0!)}-\frac{1}{2^n(n!)}=\frac{2^n n!-1}{2^n n!}$

RPTA: "B"

PROBLEMA 18:

Hallar el valor de : $E=\frac{3C_3^7+C_4^7}{4C_3^7}$

A) 2 B) 1 C) 3 D) 0 E) 5

RESOLUCIÓN:

* Notamos que C_4^7 y C_3^7 son complementarios.

* Luego se cumple : C_4^7 y $C_{7-4}^7=C_3^7$

* Reemplazando en «E»;

$$E=\frac{3C_3^7+C_3^7}{4C_3^7}=\frac{4C_3^7}{4C_3^7}=1$$

RPTA: "B"

PROBLEMA 19:

Resolver la ecuación : $C_3^{2n}=44C_2^n$

A) 15 B) 16 C) 17 D) 18 E) 19

RESOLUCIÓN:

* Aplicando la regla práctica :

$$\frac{2n(2n-1)(2n-2)}{1\times2\times3}=44\frac{n(n-1)}{1\times2}$$

$$\to\frac{(2n-1)2(n-1)}{3}=22(n-1)$$

$$\to\frac{2n-1}{3}=11\to n=17$$

RPTA: "C"

PROBLEMA 20:

Calcular «x», en : $C_7^x=C_{2x-7}^x$

A) 6 ó 8 B) 10 ó 12 C) 14 ó 7 D) 8 ó 12

RESOLUCIÓN:

* Se presenta dos posibilidades:

I) $7=2x-17\to24=2x\to x=12$

II) $7+2x-17=x\to2x-10=x\to x=10$

* Si : $x=12\to C_7^{12}=C_7^{12}$

* Si : $x=10\to C_7^{10}=C_3^{10}$

→El problema tiene 2 respuestas: $x=10$; $x=12$

RPTA: "B"

PROBLEMA 21:

Calcular :

$$K=\frac{\left[C_9^{45}\right]^2-\left[C_8^{45}\right]^2}{\left[C_9^{46}+C_8^{45}\right]^2-\left[C_9^{46}-C_8^{45}\right]^2}$$

RESOLUCIÓN:

* El numerador se pasa a una suma por diferencia, en el denominador se aplica Legendre :

$$(a+b)^2-(a-b)^2=4ab$$

$$K=\frac{\left[C_9^{45}+C_8^{45}\right]\left[C_9^{45}-C_8^{45}\right]}{4C_9^{46}C_8^{45}}$$

* Aplicamos la propiedad de suma:

$$C_9^{45}+C_8^{45}=C_9^{46} \text{ .... } (I)$$

* Degradamos la parte inferior de C_9^{45}:

$$C_9^{45}-C_8^{45}=\frac{37}{9}C_8^{45}-C_8^{45}=\frac{28}{9}C_8^{45} \text{ .... } (II)$$

* Reemplazando «*I*» y «*II*» en *K*:

$$K=\frac{\left(C_9^{46}\right)\left[\frac{28}{9}C_8^{45}\right]}{4C_9^{46}C_8^{45}}=\frac{28}{4\times 9}=\frac{7}{9}$$

Reducir la expresión : $\sqrt{24C_4^{n+3}+1}-\sqrt{24C_4^{n}+1}$

A)6n B)7n C)8n D)9n E)10n

RESOLUCIÓN:

$$\sqrt{24\frac{(n+3)(n+2)(n+1)n}{1\times 2\times 3\times 4}+1}-\sqrt{24\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\times 2\times 34}+1}$$

* Simplificando:

$$\sqrt{(n^2+3n)(n^2+3n+2)+1}-\sqrt{(n^2-3n)(n^2-3n+2)+1}$$

* $n^2+3n=x$ * $n^2-3n=y$

$$=\sqrt{x(x+2)+1}-\sqrt{y(y+2)+1}$$

$$=\sqrt{x^2+2x+1}-\sqrt{y^2+2y+1}$$

$$=\sqrt{(x+1)^2}-\sqrt{(y+1)^2}$$

* Considerando que : $x>0$ e $y>0$

$$(x+1)-(y+1)=x-y$$

* Es decir : $(n^2+3n)-(n^2-3n)$
* Finalmente, resulta «$6n$»

RPTA: "A"

PROBLEMA 23 :

Calcular «$m+n$», si:

$$C_5^m+2C_6^m+C_7^m+C_8^{m+2}=C_{n-3}^{10}$$

A)12 ó 14 B)18 ó 12 C)20 ó 16 D)24 ó 20 E)16

RESOLUCIÓN:

* Descomponiendo : $2C_6^m=C_6^m+C_6^m$

*Reemplazando y sumando combinatorios convenientemente:

$$\underbrace{C_5^m+C_6^m}+\underbrace{C_6^m+C_7^m}+C_8^{m+2}=C_{n-3}^{10}$$

$$\underbrace{C_6^{m+1}+C_7^{m+1}}+C_8^{m+2}=C_{n-3}^{10}$$

$$\underbrace{C_7^{m+2}+C_8^{m+2}}=C_{n-3}^{10}$$

$$C_8^{m+3}=C_{n-3}^{10}$$

* Primer caso : $m+3=10 \wedge 8=n-3$

$$m=7 \wedge n=11 \to m+n=18$$

* Segundo caso : $m+3=10 \wedge 8+(n-3)=10$

$$m=7 \wedge n=5 \to m+n=12$$

RPTA: "B"

PROBLEMA 24:

Dada las relaciones : $n!=720$; $C_k^{n+2}=56$

Se pide la suma del valor de «n» y el menor valor de «k»

A)5 B)6 C)7 D)8 E)9

RESOLUCIÓN:

* De la 1ra. ecuación : $n!=6! \to \boxed{n=6}$
* De la 2da. ecuación : $C_k^8=56$
* Por definición:

$$\frac{8!}{k!(8\ \ k)!}=56 \to \frac{8\times 7\times 6!}{k!(8\ \ k)!}=56$$

$$\to k!(8\ \ k)!=6!$$

$$\to k!(8\ \ k)!=6\times 5!$$

$$\to k!(8\ \ k)!=3!\times 5! \to k=3 \text{ ó } k=5$$

* Tomando el menor valor: $k=3$, luego lo que se pide: $n+k=6+3=9$

RPTA: "E"

PROBLEMA 25:

Al simplificar $\dfrac{C_8^{21}+C_{13}^{21}}{C_5^{18}+C_{12}^{18}+C_{12}^{19}+C_8^{20}}$, se obtiene:

A) $-\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{4}$ D)2 E)4

RESOLUCIÓN:

* Por complementarios se tiene:

$$C_8^{21}=C_{13}^{21};\ C_5^{18}=C_{13}^{18};\ C_8^{20}=C_{12}^{20}$$

* Reemplazando se tiene:

$$\frac{C_{13}^{21}+C_{13}^{21}}{\underline{C_{13}^{18}+C_{12}^{18}}+C_{12}^{19}+C_{12}^{20}}=\frac{2C_{13}^{21}}{\underline{C_{13}^{19}+C_{12}^{19}}+C_{12}^{20}}=\frac{2C_{13}^{21}}{\underline{C_{13}^{20}+C_{12}^{20}}}$$

* De aquí : $\dfrac{2C_{13}^{21}}{C_{13}^{21}}=2$

RPTA: "D"

PROBLEMA 26

Reducir : $S=C_0^7+C_1^8+C_2^9+C_3^{10}+C_4^{11}+C_5^{12}$

A) 13 B) 14 C) C_5^{33} D) C_5^{14} E) C_7^{20}

RESOLUCIÓN:

* Transformando : C_0^7 a $C_0^7=C_0^8$

* Reemplazando y sumando de 2 en 2 se tiene:

$S=\underbrace{C_0^8+C_1^8}+C_2^9+C_3^{10}+C_4^{11}+C_5^{12}$

$\to S=\underbrace{C_1^9+C_2^9}+C_3^{10}+C_4^{11}+C_5^{12}$

$\Rightarrow S=\underbrace{C_2^{10}+C_3^{10}}+C_4^{11}+C_5^{12}$

$\Rightarrow S=\underbrace{C_3^{11}+C_4^{11}}+C_5^{12}\Rightarrow S=\underbrace{C_4^{12}+C_5^{12}}=C_5^{13}$

RPTA: "C"

PROBLEMA 27 :

Efectúe :

$E=C_{20}^{100}+C_{20}^{99}+........+C_{20}^{23}+C_{20}^{22}+C_{20}^{21}+C_{20}^{20}$

A) C_2^{100} B) C_{17}^{100} C) C_{21}^{100} D) 100 E) 2000

RESOLUCIÓN:

$E=C_{20}^{100}+C_{20}^{99}+........+C_{20}^{23}+C_{20}^{22}+\underbrace{C_{20}^{21}+C_{21}^{21}}$

$\Rightarrow E=C_{20}^{100}+C_{20}^{99}+........+C_{20}^{23}+\underbrace{C_{20}^{22}+C_{21}^{22}}$

$\Rightarrow E=C_{20}^{100}+C_{20}^{99}+........+\underbrace{C_{20}^{23}+C_{21}^{23}}$

$\Rightarrow E=C_{20}^{100}+C_{20}^{99}+........+C_{21}^{24}\Rightarrow E=C_{21}^{100}$

RPTA: "C"

PROBLEMA 28 :

De la relación mostrada:

$$\underbrace{C_9^{10}+C_9^{11}+C_9^{12}+...+C_9^{n}}_{\text{"n" Sumandos}}=C_p^{29}-1$$

Calcular el valor de $(m+n+p)$

A) 62 B) 63 C) 64 D) 65 E) 66

RESOLUCIÓN:

* Expresando : $1=C_0^{10}$

* La ecuación se puede escribir:

$$\underbrace{C_0^{10}+C_1^{10}}_{C_1^{11}+}+C_2^{11}+C_3^{12}+...+C_{m-9}^{m}=C_p^{29}$$

$C_2^{12}+$

$C_3^{13}+$

*Igualando se tiene : $m+1=29\to m=28$

* Como: $n=m-9\to n=19$

* $p=m-9\to p=19$

Por lo tanto : $m+n+p=66$

RPTA: "E"

PROBLEMA 29:

Calcular el valor de «p», si :

$$\frac{C_{p-1}^{n-1}\times C_{p+1}^{n+1}-C_p^n\times C_{p-1}^{n-1}}{(C_p^n)^2-C_{p+1}^{n+1}\times C_{p-1}^{n-1}}=8$$

A) 6 B) 8 C) 10 D) 4 E) 14

RESOLUCIÓN:

* Para el numerador extraemos el factor; C_{p-1}^{n-1}. En el denominador degradamos superior e inferior.

$*(C_p^n)^2=C_p^n\times C_p^n=\frac{n}{p}C_{p-1}^{n-1}\times C_p^n$

$*C_{p+1}^{n+1}=\frac{n+1}{p+1}C_p^n$

* Reemplazando se tiene:

$$\frac{C_{p-1}^{n-1}\left[C_{p+1}^{n+1}-C_p^n\right]}{\frac{n}{p}\underbrace{C_{p-1}^{n-1}\times C_p^n}-\frac{n+1}{p+1}\underbrace{C_{p-1}^{n-1}\times C_p^n}}\to\frac{C_{p-1}^{n-1}\left[C_{p+1}^{n+1}-C_p^n\right]}{C_{p-1}^{n-1}\times C_p^n\left[\frac{n}{p}-\frac{n+1}{p+1}\right]}=8$$

* Ahora: $C_{p+1}^{n+1}-C_p^n$ es equivalente a C_{p+1}^n. Luego, degradando la parte interior en el numerador :

$$\frac{C_{p+1}^n}{C_p^n\left[\frac{n}{p}-\frac{n+1}{p+1}\right]}=8$$

$$\to\frac{\frac{n-(p+1)+1}{p+1}\times C_p^n}{C_p^n\left[\frac{n-p}{p(p+1)}\right]}=\frac{\frac{n-p}{p+1}}{\frac{n-p}{p(p+1)}}=8$$

* Finalmente reduciendo : $p=8$

RPTA: "B"

PROBLEMA 30 :

Calcular:

$S=1C_1^n+2C_2^n+3C_3^n+.......+nC_n^n$

$P=\frac{C_1^n}{C_0^n}+\frac{2C_2^n}{C_1^n}+\frac{3C_3^n}{C_2^n}+.......+\frac{nC_n^n}{C_{n-1}^n}$

RESOLUCIÓN:

* Primero:

$$S=n\left[\frac{1}{n}C_1^n+\frac{2}{n}C_2^n+\frac{3}{n}C_3^n+...\frac{n}{n}C_n^n\right]$$

* Por propiedad:

$$C_k^n=\frac{n}{k}C_{k-1}^{n-1}\quad;\quad\frac{k}{n}C_k^n=C_{k-1}^{n-1}$$

* Reemplazando:

$$S=n\left[C_0^{n-1}+C_1^{n-1}+C_2^{n-1}+...+C_{n-1}^{n-1}\right]=n\times 2^{n-1}$$

* Luego para «P»:

Se observa que en cada división hay una degradación del índice inferior

$$C_k^n=\frac{n-k+1}{k}C_{k-1}^n\ ;\forall\ k\geq 1$$

* Dando forma quedará : $\frac{kC_k^n}{C_{k-1}^n}=n-k+1$

* Reemplazando

$$=n+(n-1)+(n-2)+......+1=\frac{n(n+1)}{2}$$

PRIMERA PRACTICA DIRIGIDA

01 Simplificar : $S=\frac{40!}{38!}$

A) 40 B) 1 500 C) 1 560 D) 1 460 E) 1 400

02 Reducir : $E=\frac{15!+16!}{15!+14!}$

A) $\frac{255}{14}$ B) $\frac{200}{17}$ C) $\frac{250}{13}$ D) $\frac{255}{7}$ E) $\frac{55}{7}$

03 Calcular : $S=\frac{16!}{14!}$

A) 10 B) 120 C) 140 D) 240 E) 222

04 Simplificar : $P=\frac{9!+11!}{10!+11!}$

A) $\frac{110}{120}$ B) $\frac{111}{121}$ C) $\frac{111}{120}$ D) $\frac{117}{120}$ E) $\frac{118}{124}$

05 Calcular : $S=\frac{18!+19!+20!}{18!+19!}+\frac{(3!)!}{6!}$

A) 20 B) 40 C) 21 D) 22 E) 280

06 Resolver: $(n+1)!=30(n-1)!$. Hallar "n"

A) 4 B) 3 C) 5 D) 6 E) 10

07 Simplificar : $A=\frac{15!+16!+17!}{\lfloor 15+\lfloor 16}+\frac{(31)!}{6!}$

A) 17 B) 18 C) 19 D) 20 E) 1

08 Hallar "x", en : $(x+5)!=720$

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 1

09 Hallar la suma de soluciones de la ecuación: $(4x-3)!=1$

A) $\frac{3}{4}$ B) 1 C) $\frac{7}{4}$ D) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{1}{8}$

10 Calcular : $\frac{\lfloor 400}{\lfloor 399}+\frac{\lfloor 100}{\lfloor 99}+\frac{\lfloor 4}{\lfloor 3}$

A) 400 B) 100 C) 45 D) 504 E) 506

11 Reducir : $\frac{C_4^{31}+C_5^{31}+C_6^{32}+C_7^{33}}{C_8^{34}}$

A) 1 B) 2 C) C_8^{34} D) C_7^{33} E) C_9^{35}

12 Hallar "x" en : $C_{30}^{50}=\frac{(x+5)!}{30!.20!}$

A) 40 B) 30 C) 35 D) 50 E) 45

13 Calcular "x" en : $2C_4^x=5C_5^{x-1}$

A) 10 B) 1 C) 9 D) 8 E) 16

14 Calcular un valor de "$n+p$", en: $C_{p-2}^{2n}=C_{10-p}^{2n}$

A) 4 B) 6 C) 10 D) 14 E) 15

15 Calcular "x", en : $\frac{C_2^x+C_3^{x+1}}{C_4^{x+2}}=\frac{7}{5}$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 10

16 Simplificar : $\frac{C_8^{21}+C_{13}^{21}}{C_5^{18}+C_{12}^{18}+C_{12}^{19}+C_8^{20}}$

A) $-\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{4}$ D) 2 E) 4

17 Sumar :

$$k=\frac{\lfloor 11-\lfloor 10}{\lfloor 9}+\frac{\lfloor 10-\lfloor 9}{\lfloor 8}+\frac{\lfloor 9-\lfloor 8}{\lfloor 7}+...+\frac{\lfloor 2-\lfloor 1}{\lfloor 0}$$

A) 55 B) 77 C) 285 D) 85 E) 385

18 Resolver : $(x^2+x)!=720$

Hallar el número de soluciones.

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

19 Calcular : $C_0^{n-2}+C_1^{n-2}+C_2^{n-2}+...+C_{n-2}^{n-2}$

A) 2^n B) 2^{n+1} C) 2^{n-2} D) 2^{n+2} E) 2^{n-1}

20 Calcular "m", en : $\frac{(m+3)!(m+5)!}{(m+3)!+(m+4)!}=120$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 12

21 Calcular "p", en :

$$C_0^{p-3}+C_1^{p-3}+C_2^{p-3}+...+C_{p-3}^{p-3}=1024$$

A)10 B)11 C)12 D)13 E)14

22 Reducir : $\dfrac{\frac{21}{8}\times\frac{20}{7}\times\frac{19}{6}C_5^{18}}{C_5^{18}+C_{12}^{18}+C_{12}^{19}+C_8^{20}}$

A)1 B)2 C)3 D)4 E)5

23 Hallar "n":

$$C_{20}^{n-2}+C_{22}^{n-1}+C_{21}^{n-2}+C_{21}^{n}-C_{22}^{2n-21}=C_{21}^{2n-21}$$

A)20 B)21 C)28 D)24 E)22

24 Resolver : $x\left[\dfrac{x!+2(x-1)!}{x!+(x+1)!}\right]=x!-23$

A)2 B)3 C)4 D)5 E)6

25 Calcular "$x+y$", si:

$$x^{(y!)^{y!}}.(x-1)!^{(y!)^{y!}}=120^{720}$$

A)6 B)7 C)8 D)9 E)10

TAREA DOMICILIARIA

01 Reducir: $E=\sqrt{\dfrac{(a+1)!+(a+2)!+(a+3)!}{(a+1)!}}$

Si: $a>-2$

A)$a+1$ B)$a+2$ C)$a+3$ D)$a-1$ E)$a-2$

02 Simplificar : $k=\dfrac{C_5^{13}C_{10}^{14}+C_5^{14}C_8^{13}}{C_6^{16}C_4^{12}+C_{10}^{16}C_7^{12}}$

A)$\frac{3}{8}$ B)$\frac{8}{3}$ C)$\frac{2}{3}$ D)$\frac{3}{2}$ E)1

03 Calcular "x" : $x^x=36^{3\underline{|5}}(\underline{|5})^{30\underline{|4}}$

A)24 B)48 C)120 D)240 E)720

04 Resolver : $C_8^{8+n}=C_{n-5}^{2m}$

Indicando luego : $4m-3n$

A)45 B)3 C)-18 D)32 E)42

05 Si:

$$\frac{1}{\underline{|1}\,\underline{|n-1}}+\frac{1}{\underline{|3}\,\underline{|n-3}}+\frac{1}{\underline{|5}\,\underline{|n-6}}+....+\frac{1}{\underline{|n-1}\,\underline{|1}}=\frac{4096}{\underline{|13}}$$

Calcular "n".

A)12 B)13 C)14 D)10 E)11

FACTORIAL (NÚMERO		COMBINATORIO)		
01) C	02) A	03) D	04) C	05) C
06) C	07) B	08) E	09) C	10) D
11) A	12) E	13) A	14) C	15) C
16) D	17) E	18) B	19) C	20) A
21) D	22) A	23) B	24) C	25) C
01) D	02) A	03) E	04) B	05) B

Factorial de un número $\mathbb{Z}^+$

llamamos

Así al producto que resulta de multiplicar todos los números enteros y positivos consecutivos desde la unidad hasta el número considerado inclusive.

$n!$ / $\underline{n|}$ Se lee: Factorial de "n" o "n" factorial

Ejemplos

$2!=\underline{n|}=1\times2=2$
$3!=\underline{n|}=1\times2\times3=6$
$4!=\underline{n|}=1\times2\times3\times4=24$
$5!=\underline{n|}=1\times2\times3\times4\times5=120$
$6!=\underline{n|}=1\times2\times3\times4\times5\times6=720$
$7!=\underline{n|}=1\times2\times3\times4\times5\times6\times7=5040$
...
en general:
$n!=\underline{n|}=1\times2\times3...(n-2)(n-1)n$

Está definido el factorial para números enteros y positivos

Ejemplos

8! si existe
(-6)! no existe
-5! si existe
$\left(\frac{1}{4}\right)!$ no existe

Operaciones que no se cumplen son:

Adición y Sustracción

$\underline{|a\pm b}\neq\underline{|a}\pm\underline{|b}$

Multiplicación

$\underline{|ab}\neq\underline{|a}\,\underline{|b}$

División

$\underline{\left|\frac{a}{b}\right.}\neq\dfrac{\underline{|a}}{\underline{|b}}$

Propiedades

I

Por definición: $1!=1$
Por acuerdo: $0!=1$

II

Si: $a!=b!\rightarrow a=b$
$a;b$ ▾ $0;1$

III

Si: $a!=1!$
$\rightarrow a=0 \vee a=1$

Propiedad degradativa
$a!=(a-1)!a$

BINOMIO DE NEWTON 12

OBJETIVOS :

* Desarrollar potencias de binomios aplicando la fórmula del Binomio de Newton.

* Calcular un término cualquiera en el desarrollo de la suma de un binomio mediante el uso de la expresión del término general.

INTRODUCCIÓN :

1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1

El triángulo de Pascal, que lleva el nombre de quien fuera un precursor del cálculo de probabilidades, se originó en una discusión que su creador tuvo con Fermat sobre un juego de azar. Este triángulo tiene la propiedad de que la suma de los números de cualquier fila es igual al total de combinaciones posibles de tantos elementos como lo indica el segundo número de fila correspondiente, tomados de dos en dos. cada cifra de la fila indica, desde afuera hacia adentro, las probabilidades decrecientes, en relación al total de la fila, de que se den las distintas combinaciones.

DESARROLLO DEL BINOMIO DE NEWTON

* Desarrollando los binomios:

$(a+b)^0 = 1$

$(a+b)^1 = a+b$

$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$

$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

$(a+b)^4 = a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$

$(a+b)^5 = ?$

. . . .

Nuestro objetivo es encontrar las potencias del binomio **(a+b)** cuando $n \geq 5$.

Para ello vamos a estudiar métodos o formas de poder conocer el desarrollo de $(a+b)^n$:

EL TRIÁNGULO DE PASCAL

Analicemos las pirmeras potencias de **(a+b)** y escribamos solamente sus coeficientes en el siguiente esquema triangular. Para ello consideremos $(a+b) \neq 0$:

$(a+b)^0$: 1
$(a+b)^1$: 1 1
$(a+b)^2$: 1 2 1
$(a+b)^3$: 1 3 3 1
$(a+b)^4$: 1 4 6 4 1
$(a+b)^5$: 1 5 10 10 5 1
$(a+b)^6$: 1 6 15 20 15 6 1
. . . .

*que cada elemento (coeficiente) que esta dentro del triángulo resulta de sumar los elementos que están encima de él, y el primero y último elemento de cada potencia es **1**.

* De esta manera podemos conocer los coeficientes de :

$$(a+b)^7 : \underbrace{1\ 7\ 21\ 35\ 35\ 21\ 71}_{\text{coeficientes del desarrollo}}$$

*De otro lado, observando el desarrollo de $(a+b)^n$; $n = 2; 3; 4;$ estos son polinomios homogéneos completo y ordenados (en forma decreciente respecto a la primera variable y en forma creciente respecto a la segunda).

* Por lo que, ahora si podemos conocer el desarrollo de $P(a;b) = (a+b)^n, n \geq 5$.

* En particular el de $P(a;b) = (a+b)^7$

$$(a+b)^7 = a^7+7a^6b+21a^5b^2+35a^4b^3+35a^3b^4+21a^2b^5+7ab^6+b^7$$

* La ampliación de dicho triángulo aritmético puede continuarse a voluntad, es decir, según la necesidad del estudiante.

Si observamos en detalle los elementos del triángulo, podemos deducir que, cada uno de ellos se puede

expresar como un número combinatorio . Tal como sigue:

$$C_0^0$$
$$C_0^1 \quad C_1^1$$
$$C_0^2 \quad C_1^2 \quad C_2^2$$
$$C_0^3 \quad C_1^3 \quad C_2^3 \quad C_3^3$$
$$C_0^4 \quad C_1^4 \quad C_2^4 \quad C_3^4 \quad C_4^4$$
$$C_0^5 \quad C_1^5 \quad C_2^5 \quad C_3^5 \quad C_4^5 \quad C_5^5$$
$$C_0^6 \quad C_1^6 \quad C_2^6 \quad C_3^5 \quad C_4^6 \quad C_5^6 \quad C_6^5$$
$$C_0^7 \quad C_1^7 \quad C_2^7 \quad C_3^7 \quad C_4^7 \quad C_5^7 \quad C_6^7 \quad C_7^7$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$C_0^n \quad C_1^n \quad C_2^n \quad C_3^n \quad \cdots\cdots\cdots \quad C_{n-3}^n \, C_{n-2}^n \, C_{n-1}^n \, C_n^n$$

Como la $(n+1)$ fila representa, los coeficientes de $(a+b)^n$ concluimos que los números combinatorios distribuidos horizontalmente en cada fila de dicho triángulo, nos expresa los coeficientes de la potencia de un cierto binomio.

EJEMPLO 1:

Desarrollar : $(a+b)^6$

RESOLUCIÓN:

* Se sabe que todos los términos son positivos. Luego tomando los números combinatorios de ***7ma*** fila :

$$(a+b)^6 = C_0^6a^6 + C_1^6a^5b + C_2^6a^4b^2 + C_3^6a^3b^3 + C_4^6a^2b^4 + C_5^6ab^5 + C_6^6b^6$$

* Luego :

$$(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^6 + b^6$$

EJEMPLO 2 :

Expandir : $(a-b)^7$

RESOLUCIÓN:

* Considerando que los signos de los términos son alternadamente positivos y negativos, tomemos los números combinatorios de la ***8va*** fila :

$$(a-b)^7 = C_0^7a^7 - C_1^7a^6b + C_2^7a^5b^2 - C_3^7a^4b^3 + C_4^7a^3b^4 - C_5^7a^2b^5 + C_6^7ab^6 - C_7^7b^7$$

* Finalmente :

$$(a-b)^7 = a^7 - 7a^6b + 21a^5b^2 - 35a^4b^3 + 35a^3b^4 - 21a^2b^5 + 7ab^6 - b^7$$

MÉTODO DE LOS COEFICIENTES BINÓMICOS

Dado el polinomio $P(x;y) = (x+y)^n \,;\; n \in Z^+$ la expansión de $P(x;y)$ es:

$$\boxed{(x+y)^n = C_0^nx^n + C_1^nx^{n-1}y + \ldots + C_{n-1}^nx\,y^{n-1} + C_n^ny^n}$$

Donde los números combinatorios son llamados coeficientes binomiales.

EJEMPLO 1:

* La expansión de $(x+6)^6$, es:

$$(x+y)^6 = C_0^6x^6 + C_1^6x^5y + C_2^6x^4y^2 + C_3^6x^3y^3 + C_4^6x^2y^4 + C_5^6xy^5 + C_6^6y^6$$

EJEMPLO 2:

* El desarrollo de $(x+2)^4$, es :

$$(x+2)^4 = C_0^4x^4 + C_1^4x^3 \times 2 + C_2^4x^2 \times 2^2 + C_3^4x \times 2^3 + C_4^4 \times 2^4$$

$$\rightarrow (x+2)^4 = x^4 + 4x^3 \times 2 + 6x^2 \times 4 + 4x \times 8 + 16$$

$$\rightarrow (x+2)^4 = x^4 + 8x^3 + 24x^2 + 32x + 16$$

PROPIEDADES :

$$\text{I)} \quad \boxed{\begin{bmatrix} \#\,\text{de términos} \\ \text{del desarrollo} \\ \text{binomio}(x+a)^n \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \text{exponente} \\ \text{del binomio} \end{pmatrix} + 1}$$

EJEMPLO:

* $P(x;a) = (10x+3a)^5$ tiene: $5+1=6$ términos

II) Los coeficientes de sus términos equidistantes son iguales por ser combinaciones complementarias.

III) La suma de sus coeficientes es 2^n, es decir:

$$\boxed{C_0^n + C_1^n + C_2^n + C_3^n + \ldots . C_n^n = 2^n}$$

IV) Si el binomio es suma, los términos del desarrollo serán positivos, si es diferencia los signos son alternados, siendo el lugar par «negativo» y el lugar impar «positivo»

$$\boxed{\underline{\text{TÉRMINO GENERAL}}(T_{k+1})\,en(x+y)^n}$$

A) Contando de izquierda a derecha

$$\boxed{T_{\underrightarrow{k+1}} = C_k^nx^{n-k}y^k}$$

t_{k+1} es el término de lugar $(k+1)$

EJEMPLO:

* En el desarrollo de $P(x;y) = (x^5+2y^2)^6$, se tiene que el tercer término , es :

$$T_3 = T_{2+1} = C_2^6(x^5)^4 \times (2y^2)^2 = 4C_2^6x^{20} \times y^4$$

B) Contando de derecha a izquierda :

$$\boxed{T_{\underleftarrow{k+1}} = C_k^nx^ky^{n-k}}$$

EJEMPLO:

*En la expansión de $J(x;\, y) = (x^3-2y^6)^5$ se tiene que el término de lugar *4* con respecto al final, es:

$$T_4 = T_{3+1} = C_3^5(x^3)^3(-2y^6)^2 = 2^2C_3^5x^9y^{12}$$

TÉRMINO CENTRAL

A) El desarrollo del binomio tendrá un único término central si «n» es par, luego la posición que

ocupa este término es : $\frac{n}{2}+1$

$$T_c = T_{\frac{n}{2}+1} = C^n_{\frac{n}{2}} \times x^{\frac{n}{2}} \times a^{\frac{n}{2}}$$

EJEMPLO:

Determinar el término central del desarrollo de:

$$P(x;a) = (x^2 + a)^6$$

RESOLUCIÓN :

$$T_c = T_{\frac{6}{2}+1} = C^6_3 (x^2)^3 \times (a)^3 = C^6_3 x^6 \times a^3$$

B) Si «n» es impar existen dos términos centrales.

$$T_{\frac{n+1}{2}} \wedge T_{\frac{n+1}{2}+1}$$

EJEMPLO :

Determinar los términos centrales del desarrollo de:

$$P(x;\ a) = (x^2 + a^3)^7$$

RESOLUCIÓN:

* Calculamos el primer término central para : $n = 7$

$$T_{1^\circ central} = T_{\frac{7+1}{2}} = T_{3+1} = C^7_3 (x^2)^4 (a^3)^3$$

$$\rightarrow T_{1^\circ central} = C^7_3 x^8 \times a^9$$

* Calculamos el segundo término central:

$$T_{2^\circ central} = T_{\frac{7+1}{2}+1} = T_{4+1} = C^7_4 (x^2)^3 (a^3)^4$$

$$\rightarrow T_{2^\circ central} = C^7_4 x^6 \times a^{12}$$

POTENCIA DE UN POLINOMIO

Al desarrollar la potencia del polinomio:

$$(x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n)^k$$

* No es nada sencillo ; puede convertirse en un trabajo tedioso por la cantidad de términos que posee. Sin embargo , podríamos indagar por el coeficiente de cierto término.

* Analicemos un caso particular : $(x+y+z)^2$

* Por álgebra se sabe que :

$$(x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz$$

* Observa que todos los términos tienen el mismo grado 2. Además, el coeficiente de los términos de la parte literal xy, xz ó yz es 2. ¿Por qué? Porque se pueden formar dos permutaciones en cada caso :

$$xy/yx,\ xz/zx,\ yz/zy$$

* Y el coeficiente de x^2, y^2, z^2 es *1* porque en cada caso se puede formar una permutación con repetición $x^2 = x \times x$, $y^2 = y \times y$, $z^2 = z \times z$

* Luego, si tenemos la potencia : $(x+y+z)^6$

* Y deseamos conocer el coeficiente del término cuya parte literal es $x^2y^2z^2$, habría que preguntamos cuántas permutaciones con repetición se pueden formar de seis en seis en las que aparece dos veces la x , dos veces la y y dos veces la z. Esto es:

$$\frac{6!}{2!\ 2!\ 2!} = 90. \text{ Luego , el coeficiente es } 90$$

* Este resultado se puede generalizar indicando que el coeficiente del término x^i, y^j, z^k en el desarrollo de la potencia $(x+y+z)^p$ es:

$$\frac{p!}{i!\ j!\ k!},\ \text{donde } p = i + j + k$$

*Este resultado se conoce como ***teorema multinomial.***

FÓRMULA DEL DESARROLLO (FÓRMULA DE LEIBNITZ)

Para obtener el desarrollo de un trinomio con exponente natural usaremos la fórmula de Leibnitz:

$$(x+y+z)^n = \sum_{\alpha;\beta;\theta}^{n} \frac{n!}{\alpha!\beta!\theta!} x^\alpha y^\beta z^\theta$$

* Donde: $\{\alpha, \beta, \gamma\} \subset Z^+_0$

* Además: $\alpha + \beta + \gamma = n;$ donde la suma se realiza para todos los valores que puedan tomar $\alpha;\ \beta$ y γ.

En el desarrollo de $(a+b+c+...)^n / n \in N$

$$(a+b+c+...)^n = \sum \frac{\lfloor n}{\lfloor \alpha \lfloor \beta \lfloor \gamma ...} a^\alpha b^\beta c^\gamma ...$$

donde :

$$\alpha + \beta + \gamma + ... = n\ ;\ \{\alpha, \beta, \gamma, ...\} \subset Z^+_0$$

EJEMPLO 1 :

Halle el coeficiente de x^5 en el desarrollo del trinomio: $Q(x) = (a + bx + cx^2)^9$

RESOLUCIÓN:

*El término general del desarrollo es :

$$T = \frac{9!}{\alpha!\beta!\gamma!}(a)^\alpha (bx)^\beta (cx^2)^\gamma = \frac{9!}{\alpha!\beta!\gamma!} a^\alpha b^\beta c^\gamma x^{\beta+2\gamma}$$

* Donde : $\alpha + \beta + \gamma = 9$ .... (I)

* Por condición: $\beta + 2\gamma = 5$ .... (II)

* Resolviendo *(I)* y *(II)*, tomando en cuenta que α, β y $\gamma \in N_0$.
* Las soluciones son :

$(\alpha=5 \wedge \beta=3 \wedge \gamma=1) \vee (\alpha=6 \wedge \beta=1 \wedge \gamma=2) \vee (\alpha=4 \wedge \beta=5 \wedge \gamma=0)$

* El coeficiente de x^5 se obtiene realizando la suma para los tres tríos de valores encontrados para $\alpha; \beta$ y γ.

$$\rightarrow Coef(x^5)=\frac{9!}{5!3!1!}a^5b^3c+\frac{9!}{6!1!2!}a^6bc^2+\frac{9!}{4!5!0!}a^4b^5$$

$$\rightarrow Coef(x^5)=504a^5b^3c+252a^6bc^2+126a^4b^5$$

EJEMPLO 2 :

Hallar el coeficiente de x^6 en el desarrollo de

$$(1+2x+3x^2)^5$$

RESOLUCIÓN :

* En el desarrollo es $\sum \frac{\lfloor 5}{\lfloor \alpha \lfloor \beta \lfloor \gamma}(1)^\alpha(2x)^\beta(3x^2)^\gamma$
* Donde : $\alpha+\beta+\gamma=5$
* Equivalente $\sum \frac{\lfloor 5}{\lfloor \alpha \lfloor \beta \lfloor \gamma} 2^\beta 3^\gamma \cdot x^{\beta+2\gamma}$
* En nuestro caso : $\alpha+\beta+\gamma=5$

$\beta+2\gamma=6$

* Si : $\gamma=1 \Rightarrow \beta=4 \wedge \alpha=0$

$\gamma=2 \Rightarrow \beta=2 \wedge \alpha=1$

$\gamma=3 \Rightarrow \beta=0 \wedge \alpha=2$

* Luego el coeficiente de x^6 es:

$$\frac{\lfloor 5}{\lfloor 0 \lfloor 4 \lfloor 1}2^4\times 3^1+\frac{\lfloor 5}{\lfloor 1 \lfloor 2 \lfloor 2}2^2\times 3^2+\frac{\lfloor 5}{\lfloor 2 \lfloor 0 \lfloor 3}2^0\times 3^3$$

$$=240+1080+270=1590$$

NÚMERO DE TÉRMINOS

El desarrollo de $\underbrace{(a+b+c+...+p)^n}_{\text{"r" términos}}$ tiene :

$$\boxed{\frac{\lfloor n+r-1}{\lfloor n \times \lfloor r-1} \text{ términos}}$$

* En su desarrollo :

I) Así : $\underbrace{(a+b+c)^2}_{3 \text{ términos}}$ tendrá:

$$\frac{\lfloor 2+3-1}{\lfloor 2 \lfloor 3-1}=\frac{\lfloor 4}{\lfloor 2 \lfloor 2}=\frac{4\times 3\times \lfloor 2}{\lfloor 2 \lfloor 2}=6 \text{ términos}$$

* Efectivamente, ya que su desarrollo es :

$a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$ de 6 términos.

II) En $(1+x+y+z)^3$ se tendrá :

$$\frac{\lfloor 3+4-1}{\lfloor 3 \lfloor 4-1}=\frac{\lfloor 6}{\lfloor 3 \lfloor 3}=20 \text{ términos.}$$

BINOMIO DE NEWTON CON EXPONENTE NEGATIVO O FRACCIONARIO

COEFICIENTE BINOMIAL :

$$\boxed{\binom{n}{k}=\frac{n(n-1)(n-2)...(n-k+1)}{k!}}$$

* Donde: $n \in \mathbb{R} \wedge k \in \mathbb{N}$
* Además: $\binom{n}{1}=n \; ; \; \binom{n}{n}=\binom{n}{0}=1$

EJEMPLO:

* $\binom{\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}-2)(\sqrt{3}-3)}{4!}$
* $\binom{-5}{3}=\frac{(-5)(-6)(-7)}{3!}$

NOTA

Si n es fraccionario o negativo el número de términos es ilimitado.

$$\boxed{(x+a)^n=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n}{k}x^{n-k}a^k / k \cup N \in \{0\}}$$

EJEMPLOS:

* $(1-x)^{-2}=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-2}{k}(-x)^k$

$$\Rightarrow (1-x)^{-2}=\binom{-2}{0}-\binom{-2}{1}x+\binom{-2}{2}x^2-\binom{-2}{3}x^3+...$$

$$\Rightarrow (1-x)^{-2}=1+2x+3x^2+4x^3+...$$

* $(1+x)^{1/2}=\binom{1/2}{0}+\binom{1/2}{1}x+\binom{1/2}{2}x^2+\binom{1/2}{3}x^3+...$

$$\Rightarrow (1+x)^{1/2}=1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{16}+...$$

* $(1-x)^{3/2}=\binom{3/2}{0}-\binom{3/2}{1}x+\binom{3/2}{2}x^2-\binom{3/2}{3}x^3+...$

$$=1-\frac{\frac{3}{2}}{\lfloor 1}x+\frac{\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}-1\right)}{\lfloor 2}x^2-\frac{\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}-1\right)\left(\frac{3}{2}-2\right)}{\lfloor 3}x^3+...$$

$$=1-\frac{3}{2}x+\frac{3}{8}x^2-\frac{1}{16}x^3+...$$

Esta fórmula será válida si $x \in \langle -1; 1 \rangle$

IMPORTANTE :

Si se tiene $(1+x)^n$ y «x» es un valor pequeñísimo, se cumple:

$\boxed{(1+x)^n \approx 1+nx}$; cuando «x» tiende a cero.

OBSERVACIONES

1°) La suma de los coeficientes de todos los términos del desarrollo de $(a+b)^n$ es igual a 2^n.

* Por el Teorema de Newton :

$$(a+b)^n = C_0^n a^n + C_1^n a^{n-1}b + C_2^n a^{n-2}b^2 + ... + C_n^n b^n$$

* Evaluando para $a=1$ y $b=1$, se tiene:

$$(1+1)^n = \underbrace{C_0^n + C_1^n + C_2^n + ... + C_n^n}_{\text{suma de coeficientes}}$$

$$\rightarrow \boxed{C_0^n + C_1^n + C_2^n + C_3^n + ... + C_n^n = 2^n ;\ n \in N^*}$$

EJEMPLOS :

$$*\ C_0^{10} + C_1^{10} + C_2^{10} + C_3^{10} + ... + C_{10}^{10} = 2^{10} = 1024$$

$$*\ C_0^{x+1} + C_1^{x+1} + C_2^{x+1} + C_3^{x+1} + ... + C_{x+1}^{x+1} = 2^{x+1}$$

$$*\ C_0^{3m} + C_1^{3m} + C_2^{3m} + C_3^{3m} + ... + C_{3m}^{3m} = 2^{3m} = 8^m$$

OBSERVACIONES :

* Analicemos el desarrollo de $(1+x)^n ; \in N^*$

Por el Teorema de Newton se tiene :

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_k^n (1)^{n-k} x^k \ ;\ n \geq k \geq 0$$

* Expandiendo la sumatoria , resulta :

$$(1+x)^n = C_0^n x^0 + C_1^n x^1 + C_2^n x^2 + ... + C_n^n x^n$$

* Mostrando explícitamente la propiedad :

$$\boxed{C_0^n + xC_1^n + x^2C_2^n + x^3C_3^n + ... + x^nC_n^n = (1+x)^n}$$

EJEMPLOS:

$$*\ C_0^n + 3C_1^n + 3^2C_2^n + 3^3C_3^n + ... + 3^nC_n^n = (1+3)^n = 4^n$$

$$*\ C_0^{10} - 2C_1^{10} + 2^2C_2^{10} - 2^3C_3^{10} + ... + 2^{10}C_{10}^{10} = (1-2)^{10} = 1$$

APLICACIONES :

I) Sumar la serie :

$$P = C_0^m + 2^2C_1^m + 2^4C_2^m + 2^6C_3^m + ... \text{"}(m+1)\ \textit{términos}\text{"}$$

$$P = C_0^m + 4C_1^m + 4^2C_2^m + 4^3C_3^m + ... + 4^mC_m^m$$

* Luego: $P = (1+4)^m = 5^m$

II) Efectuar :

$$E = \frac{C_1^n}{3} + \frac{C_2^n}{9} + \frac{C_3^n}{27} + ... + \frac{C_n^n}{3^n}$$

* Acomodando los coeficientes y sumando y restando el número , así :

$$E = \underline{C_0^n + \left(\frac{1}{3}\right)^1 C_1^n + \left(\frac{1}{3}\right)^2 C_2^n + \left(\frac{1}{3}\right)^3 C_3^n + ... + \left(\frac{1}{3}\right)^n C_n^n} - C_0^n$$

Es decir : $E = \left(1+\frac{1}{3}\right)^n - 1 = \left(\frac{4}{3}\right)^n - 1$

III) Que se obtiene al sumar :

$$R = C_0^p - \left(\frac{x}{x+1}\right)C_1^p + \left(\frac{x}{x+1}\right)^2 C_2^p - \left(\frac{x}{x+1}\right)^3 C_3^p + ... (p+1)\ \textit{términos}$$

* Es evidente que la sumatoria obedece la forma general de la propiedad . Por lo tanto :

$$R = \left[1 - \frac{x}{x+1}\right]^p = \left(\frac{1}{x+1}\right)^p = (x+1)^{-p} \ ;\ p \in N^*$$

2°) La suma de los coeficientes de los términos de lugar impar es igual a la suma de los coeficientes de los términos de lugar par en la potencia de $(a+b)^n$.

* Por el Teorema de Newton:

$$(a+b)^n = C_0^n a^n + C_1^n a^{n-1}b + C_2^n a^{n-2}b^2 + C_3^n a^{n-3}b^3 .... + C_n^n b^n$$

* Evaluando para $a=1$ y $b=-1$, resulta:

$$(1-1)^n = C_0^n - C_1^n + C_2^n - C_3^n + ... + (-1)^n C_n^n$$

$$\rightarrow 0 = C_0^n - C_1^n + C_2^n - C_3^n + ...(-1)^n C_n^n$$

$$\rightarrow \underbrace{C_1^n + C_3^n + C_5^n + ... + \Delta}_{S_p} = \underbrace{C_0^n + C_2^n + C_4^n + ... + \square}_{S_i}$$

* Asumiendo que :

S_p: Suma de coeficientes de términos de lugar *PAR*

S_i: Suma de coeficientes de términos de lugar *IMPAR*

S_t: Suma total de coeficientes.

* De la ***1ra.*** propiedad : $S_t = S_p + S_i .... = 2^n ....(I)$

* De la ***2da.*** propiedad , se sabe que $S_i = S_p ....(II)$

* Sustituyendo ***(II)*** en ***(I)***:

$$S_p + S_p = 2^n \rightarrow 2S_p = 2^n \rightarrow S_p = 2^{n-1}$$

* Por lo tanto : $S_p = S_i = 2^{n-1}$

* Es decir :

$$\boxed{C_0^n + C_2^n + C_4^n + ... = C_1^n + C_3^n + C_5^n + ... = 2^{n-1}}$$

* Para calcular los últimos términos de ambos miembros, debemos considerar dos casos:

PRIMER CASO :

Si : "n" es *PAR*

$$C_0^n + C_2^n + C_4^n + ... + C_n^n = C_1^n + C_3^n + C_5^n + ... + C_{n-1}^n = 2^{n-1}$$

EJEMPLO :

$$C_0^8 + C_2^8 + C_4^8 + C_6^8 + C_8^8 = C_1^8 + C_3^8 + C_5^8 + C_7^8 = 2^{8-1} = 2^7$$

SEGUNDO CASO :

Si: "*n*" es *IMPAR*

$$C_0^n+C_2^n+C_4^n+...+C_{n-1}^n=C_1^n+C_3^n+C_5^n+...+C_n^n=2^{n-1}$$

EJEMPLO:

$$C_0^7+C_2^7+C_4^7+C_6^7=C_1^7+C_3^7+C_5^7+C_7^7=2^{7-1}=2^6$$

3°) La suma de los grados absolutos de todos los términos del desarrollo de $(ax^p+by^q)^n$.

$$\sum G.A.=GA(T_1)+GA(T_2)+GA(T_3)...+GA(T_{n+1})$$

$$\rightarrow \boxed{\sum G.A.=\frac{n(n+1)}{2}(p+q)}$$

EJEMPLO:

Dado : $(3x^4+2y^5)^3$

* Desarrollando, se tiene :

$$=(3x^4)^3+3(3x^4)^2(2y^5)+3(3x^4)(2y^5)^2+(2y^5)^3$$

$$=27x^{12}+54x^8y^5+36x^4y^{10}+8y^{15}$$

* Luego : $\sum G.A.=12+13+14+15=54$

* Por la fórmula : $\sum G.A.=\frac{3(3+1)}{2}(4+5)=54$

4°) Cálculo de un término cualquiera contado a partir del extremo final en la potencia de $(a+b)^n$

$$\boxed{\overleftarrow{T_{k+1}}=C_k^n\ a^kb^{n-k};n\in\mathbb{N}^*}$$

EJEMPLO:

Determine el ***4to.*** término contado de derecha a izquierda, en la expansión de la expresión:

$$\left(\frac{x^3}{y}+\frac{y^4}{x}\right)^{10};xy\neq 0$$

* Por la fórmula :

$$\overleftarrow{T_4}=C_3^{10}\left(\frac{x^3}{y}\right)^3\left(\frac{y^4}{x}\right)^{10-3}$$

$$\rightarrow \overleftarrow{T_4}=\frac{10\times9\times8}{1\times2\times3}\left(\frac{x^9}{y^3}\right)\left(\frac{y^{28}}{x^7}\right)$$

* Finalmente : $\overleftarrow{T_4}=120x^2y^{25}$

5°) Cálculo del término central en la potencia de $(a+b)^n$.

* Si «*n*» es un número *PAR:*

El desarrollo de $(a+b)^n$ admite un sólo término central, cuya posición se calcula así:

$$\boxed{Lugar\,(T_C)=\frac{n}{2}+1}$$

* Si «*n*» es un número *IMPAR:*

La expansión $(a+b)^n$ posee dos términos centrales, cuyas posiciones se calculan así:

$$\boxed{Lugar\,(T_{C1})=\frac{n+1}{2}}\quad\boxed{Lugar\,(T_{C2})=\frac{n+3}{2}}$$

EJEMPLO 1:

Muestre el término central en el desarrollo de $(x^5+y^3)^6$

RESOLUCIÓN:

POR PROPIEDAD:

$$Lugar\,(T_C)=\frac{6}{2}+1=4$$

* Luego : $T_C=T_4=C_3^6(x^5)^3(y^3)^3$

$$T_C=\frac{6\times5\times4}{1\times2\times3}(x^{15})(y^9)$$

* Por lo tanto : $T_C=20x^{15}y^9$

EJEMPLO 2:

Señale la suma de los grados absolutos de los términos centrales de la potencia de $(x^3+y^4)^7$.

RESOLUCIÓN :

* $Lugar(T_{C_1})=\frac{7+1}{2}=4$

* $Lugar(T_{C_2})==\frac{7+3}{2}=5$

* Análogamente, los términos serán:

$$T_{C_1}=T_4=C_3^7(x^3)^4(-y^4)^3=-35x^{12}y^{12}$$

$$T_{C_2}=T_5=C_4^7(x^3)^3(-y^4)^4=-35x^9y^{16}$$

* Nos piden:

$$S=GA(T_{c1})+GA(T_{c2})$$

$$\rightarrow S=(12+12)+(9+16)=49$$

RECUERDA:

I) La suma de coeficientes en el desarrollo del binomio $(ax+by)^n$ es:

$\boxed{(a+b)^n}$ ***"Se obtiene haciendo $x=y=1$"***

donde «*x*» e «*y*» son las variables.

II) La suma de exponentes en el desarrollo del binomio $(x^\alpha+x^\beta)^n$ es:

$$\boxed{\frac{(\alpha+\beta)(n)(n+1)}{2}}$$

III) El coeficiente del ***valor máximo*** en el desarrollo de $(x+a)^n$ es el término central si «*n*» es

par, y los dos términos centrales si «n» es impar.

* Si: $(x+y)^{2n}$
$\Rightarrow$ *coef.máx.:* C_n^{2n}
* Si: $(x+y)^{2n+1}$
$\Rightarrow$ *coef.máx.:* $C_n^{2n+1} \wedge C_{n+1}^{2n+1}$

IV) El número de términos del desarrollo del trinomio $(x+y+z)^n$ es:

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2};\ n \in Z^+$$

V) En general, el número de términos del desarrollo de:

$(x_1+x_2+x_3+...+x_r)^n$ es: $\dfrac{(n+r-1)\,!}{n!(r-1)!};\ n \in \mathbb{Z}^+$

Número Combinatorio

Representación del número de combinaciones de "n" elementos tomados de "k" en "k". Notación:
$C_k^n;\ n \in \mathbb{Z}^+ \wedge k \in \mathbb{Z}_0^+ \wedge k \le n$

Definición matemática — *es* — $C_k^n = \dfrac{\lfloor n}{\lfloor k \lfloor n-k}$

Regla Práctica — *es* — $C_k^n = \dfrac{\lfloor n}{\lfloor k \lfloor n-k} = \dfrac{\overbrace{n(n-1)(n-2)...(n-k+1)}^{\text{"k" factores}}\lfloor n-k}{\underbrace{1.2.3...k}_{\text{"k" factores}}\lfloor n-k}$

sus *Propiedades* — *son*:
$C_0^n = 1$
$C_1^n = n$
$C_n^n = 1$

$C_k^n = C_{n-k}^n$

igualdad:
$C_p^n = C_q^n$
1ra posibilidad: $p = q$
2da posibilidad: $p + q = n$

suma de combinatorios: $C_k^n + C_{k+1}^n = C_{k+1}^{n+1}$

reglas de *Degradación* — *superior e inferior*: $C_k^n = \dfrac{n}{k}C_{k-1}^{n-1}$

inferior: $C_k^n = \dfrac{n-k+1}{k}C_{k-1}^n$

superior: $C_k^n = \dfrac{n}{n-k}C_k^{n-1}$

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1:

Utilizando el teorema del binomio,desarrollar : $(x-3)^4$.

RESOLUCIÓN:

* Recordemos que: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$

* Luego :

$(x-3)^4 = \binom{4}{0}x^4(-3)^0 + \binom{4}{1}x^3(-3)^1 + \binom{4}{2}x^2(-3)^2 + \binom{4}{3}x^1(-3)^3 + \binom{4}{4}x^0(-3)^4$

$\rightarrow (x-3)^4 = 1(1)x^4 + 4(-3)x^3 + 6(9)x^2 + 4(-27)x + 1(81)$

$\rightarrow (x-3)^4 = x^4 - 12x^3 + 54x^2 - 108x + 81$

PROBLEMA 2 :

Utilizando el teorema del binomio, desarrollar $(2r-t)^6$.

RESOLUCIÓN :

* Aplicando el teorema del binomio :

$(2r-t)^6 = \binom{6}{0}(2r)^6(-t)^0 + \binom{6}{1}(2r)^5(-t)^1 + \binom{6}{2}(2r)^4(-t)^2 +$
$\binom{6}{3}(2r)^3(-t)^3 + \binom{6}{4}(2r)^2(-t)^4 + \binom{6}{5}(2r)^1(-t)^5 + \binom{6}{6}(2r)^0(-t)^6$

$\Rightarrow (2r-t)^6 =$
$(2)^6r^6 - 6(2)^5r^5t + 15(2)^4r^4t^2 - 20(2)^3r^3t^3 + 15(2)^2r^2t^4 - 6(2)rt^5 + 1(1)t^6$

$\Rightarrow (2r-t)^6 = 64r^6 - 192r^5t + 240r^4t^2 - 160r^3t^3 + 60r^2t^4 - 12rt^5 + t^6$

PROBLEMA 3 :

Determinar el cuarto término del desarrollo binomial de $(3p+2q^3)^5$.

RESOLUCIÓN :

* El término de lugar $k+1$ del desarrollo de $(a+b)^n$, es:

$$T_{k+1} = \binom{n}{k}a^{n-k}b^k;\ 0 \le k \le n$$

* Luego el cuarto término del desarrollo de $(3p+2q^3)^5$ es:

$T_4 = \binom{5}{3}(3p)^2(2q^3)^3 = \binom{5}{3}3^2p^22^3q^9 \Rightarrow T_4 = 720p^2q^9$

PROBLEMA 4:

Determinar el término en el que anarece x^3 en el desarrollo de $(x-3)^4$.

RESOLUCIÓN:

* Recordemos que en el desarrollo de $(a+b)^n$ el término general es :

$$T_{k+1} = \binom{n}{k}a^{n-k}b^k; k \in Z;\ 0 \le k \le n$$

* Luego, para nuestro caso : $T_{k+1} = \binom{4}{k}(x)^{4-k}(-3)^k$

* Entonces, para que el término contenga a x^3:

$$4 - k = 3 \rightarrow k = 1$$

* Finalmente : $T_2=\binom{4}{1}x^3(-3)=-12x^3$

* Comparemos este resultado con el segundo término del desarrollo del problema *1*.

PROBLEMA 5:

El grado absoluto del *9no.* término del desarrollo de $(mn^3+p^2)^x$ es igual a *16*. Calcular el valor de «x»

A)5 B)6 C)7 D)8 E)9

RESOLUCIÓN:

* Por el término general :

$$T_9=C_8^x(mn^3)^{x-8}(p^2)^8$$

* Luego :

$$GA(T_9)=(1+3)(x-8)+16=16$$

* Efectuando : $4(x-8)=0$

* Finalmente : $x=8$

RPTA: "D"

PROBLEMA 6:

Hallar el *5to.* elemento de la potencia de la expresión:

$$\left(\frac{\sqrt[3]{x}}{3}+9\sqrt{x}\right)^{10}$$

A) $1780x^4$ B) $1890x^4$ C) $1880x^3$
D) $1850x^2$ E) $1590x^4$

RESOLUCIÓN:

* Aplicando la fórmula, se tiene:

$$T_5=C_4^{10}\left(\frac{\sqrt[3]{x}}{3}\right)^6(9\sqrt{x})^4\Rightarrow T_5=\frac{10\times9\times8\times7}{1\times2\times3\times4}\left(\frac{x^2}{3^6}\right)(3^8x^2)$$

* Simplificando se tiene: $T_5=1890x^4$

RPTA: "B"

PROBLEMA 7:

Determinar el *4to.* término en la expansión de:

$$\left(\frac{2x^3}{3}-\frac{1}{x}\right)^5$$

A) $-\frac{40}{9}x^3$ B) $-\frac{41}{9}x^2$ C) $-\frac{40}{8}x^3$ D) $\frac{40}{9}x^4$ E) $\frac{41}{9}x^4$

RESOLUCIÓN:

* Por el término general: $T_4=C_3^5\left(\frac{2x^3}{3}\right)^2\left(-\frac{1}{x}\right)^3$

$$\rightarrow T_4=\frac{5\times4\times3}{1\times2\times3}\left(\frac{4x^6}{9}\right)\left(-\frac{1}{x^3}\right)$$

* Finalmente : $T_4=-\frac{40}{9}x^3$

RPTA: "A"

PROBLEMA 8:

Muestre el término central en la potencia de :

$$\left(x^6-4x^2+\frac{4}{x^2}\right)^4$$

A) $1120x^8$ B) $1130x^7$ C) $1140x^3$
D) $1110x^4$ E) $1220x^5$

RESOLUCIÓN:

*El trinomio base es un cuadrado perfecto. Es decir:

$$\left[\left(x^3-\frac{2}{x}\right)^2\right]^4=\left(x^3-\frac{2}{x}\right)^8$$

* Luego el término central ocupa el quinto lugar.

$$T_5=C_4^8(x^3)^4\left(-\frac{2}{x}\right)^4\rightarrow T_5=\frac{8\times7\times6\times5}{1\times2\times3\times4}(x^{12})\left(\frac{16}{x^4}\right)$$

* Efectuando operaciones : $T_5=1120x^8$

RPTA: "A"

PROBLEMA 9 :

Indique el término de lugar *10* , en la expansión de: $\left(27x^5+\frac{1}{3x}\right)^{12}$.

Aplicando directamente la fórmula general.

RESOLUCIÓN :

$$T_{10}=C_9^{12}(27x^5)^{12-9}\left(\frac{1}{3x}\right)^9$$

$$\Rightarrow T_{10}=\frac{\lfloor 12}{\lfloor 9\,\lfloor 3}(3^3x^5)^3\left(\frac{1}{3x}\right)^9$$

$$\Rightarrow T_{10}=\frac{12\times11\times10\lfloor 9}{\lfloor 9\times1\times2\times3}(3^9x^{15})\left(\frac{1}{3^9x^9}\right)$$

* Finalmente : $T_{10}=220x^6$

PROBLEMA 10 :

Calcular el *7mo.* término de la potencia de :

$$\left(\frac{\sqrt[3]{x}}{2}-\sqrt{2x}\right)^9$$

Por la fórmula de recurrencia :

RESOLUCIÓN:

$$T_7=C_6^9\left(\frac{\sqrt[3]{x}}{2}\right)^3(-\sqrt{2x})^6\rightarrow T_7=\frac{\lfloor 9}{\lfloor 6\,\lfloor 3}\left(\frac{x}{8}\right)(2x)^3$$

$$\rightarrow T_7=\frac{9\times8\times7\lfloor 6}{\lfloor 6\;1\times2\times3}\left(\frac{x}{8}\right)(8x)^3\rightarrow T_7=84x^4$$

PROBLEMA 11:

Hallar el número de términos que tiene el desarollo de $(x+y^2)^n$, si los términos de lugares *4* y *5* tienen el mismo coeficiente.

A)8 B)10 C)12 D)14 E)16

RESOLUCIÓN:

* Por el término general :

$$Coef(T_4) = Coef(T_5) \Rightarrow C_3^n = C_4^n$$

* Por degradación de índices :

$$C_3^n = \left(\frac{n-4+1}{4}\right)C_3^n \Rightarrow 1 = \frac{n-3}{4} \rightarrow \boxed{n=7}$$

* Por lo tanto: $N°$ de términos $= n+1 = 8$

RPTA: "A"

PROBLEMA 12:

Qué valor natural de «n» hace que uno de los términos del desarrollo de : $\left(\frac{x}{y}+y\right)^n$ adopte la forma $p(xy)^4$

A)12 B)14 C)16 D)18 E)20

RESOLUCIÓN:

* Sea $(k+1)$ el lugar que ocupa dicho término:

$$T_{k+1} = C_k^n\left(\frac{x}{y}\right)^{n-k} y^k \rightarrow T_{k+1} = C_k^n x^{n-k} y^{2k-n}$$

* Por dato : $T_{k+1} = px^4y^4$
* Igualando : $n-k=4$ ....(I)

$2k-n=4$ ....(II)

* Resolviendo : $\boxed{k=8}$ y $\boxed{n=12}$

RPTA: "A"

PROBLEMA 13:

Indique el lugar que ocupa el término lineal al desarrollar : $(0,5x^4+4x^{-1})^{19}$

A)13avo B)14avo C)15avo D)16avo E)17avo

RESOLUCIÓN :

* Dado : $\left(\frac{x^4}{2}+\frac{4}{x}\right)^{19}$
* Sea $(k+1)$ el lugar que ocupa dicho término de primer grado :

$$T_{k+1} = C_2^{19}\left(\frac{x^4}{2}\right)^{19-k}\left(\frac{4}{x}\right)^k$$

* Reduciendo se tiene : $T_{k+1} = \Delta x^{76-5k}$
* Por condición : $76-5k=1$
* Se obtiene : $k=15$
* El lugar es $k+1 = 16avo$.

RPTA: "D"

PROBLEMA 14:

Hallar el número de términos en el desarrollo de : $(x^5+y^2)^n$ si la suma de los grados absolutos de todos los términos del desarrollo es igual a *546*.

A)11 B)12 C)13 D)14 E)15

RESOLUCIÓN:

* Por propiedad, se tiene:

$$\sum GA = (5+2)\frac{n(n+1)}{2} = 546$$

$$\rightarrow n(n+1) = 156 = 12\times 13$$

$$\rightarrow n(n+1) = 12(12+1) \rightarrow n = 12$$

RPTA: "B"

PROBLEMA 15:

Calcular $(m+n)$, si el cuarto término del desarrollo de $(x+2)^n$ es igual a $80x^m$.

A)7 B)6 C)5 D)4 E)3

RESOLUCIÓN:

$$T_4 = C_3^n x^{n-3}2^3 = 80x^m \Rightarrow 8C_3^n x^{n-3} = 80x^m$$

* Igualando los coeficientes: $8C_3^n = 80 \Rightarrow C_3^n = 10$
* Del cual, se tiene: $\boxed{n=5}$
* Además: $n-3=m \rightarrow \boxed{m=2}$
* Finalmente : $m+n=7$

RPTA: "A"

PROBLEMA 16 :

Hallar el lugar en el que se ubica el término del desarrollo del binomio:

$$\left(\sqrt{\frac{a}{\sqrt{b}}}+\sqrt{\frac{b}{\sqrt{a}}}\right)^{210}$$

$a,b \in \mathbb{R}-\{0\}$; que contiene a «a» y «b» elevados al mismo exponente.

RESOLUCIÓN :

$$t_{k+1} = C_k^{210}\times\left(a^{\frac{1}{2}}\times b^{-\frac{1}{4}}\right)^{210-k}\times\left(b^{\frac{1}{2}}\times a^{-\frac{1}{4}}\right)^k$$

$$\rightarrow t_{k+1} = C_k^{210}\times a^{\frac{210-k}{2}}\times a^{-\frac{k}{4}}\times b^{\frac{-210+k}{4}}\times b^{\frac{k}{2}}$$

* Reduciendo :

$$\rightarrow t_{k+1} = C_k^{210}\, a^{\frac{420-3k}{4}}\, b^{\frac{3k-210}{4}}$$

* Por condición los exponentes son iguales:

$$\frac{420-3k}{4} = \frac{3k-210}{4}$$

* Resolviendo : $k=105$
* El lugar pedido es «$k+1$»; *106*

PROBLEMA 17 :

Hallar el coeficiente de «x^r» en el desarrollo de la expresión : $\left(x^2+\frac{1}{x^3}\right)^n$

RESOLUCIÓN:

* Supongamos que «x^r» se encuentra en la posición: $k+1$¡

$$t_{k+1} = C_p^n\ (x^2)^{n-p}\left(\frac{1}{x^3}\right)^p$$

$$\rightarrow t_{k+1} = C_p^n x^{2n-5p}$$

*Pero como este término contiene a «x^r» y por tanto:

$$2n-5p=r \Rightarrow p=\frac{2n-r}{5}$$

* El coeficiente buscado es «C_p^n».

* Es decir : $C^n_{\frac{2n-r}{5}}$

* Desarrollando el combinatorio será:

$$\frac{n!}{\left(\frac{2n-r}{5}\right)!\left(n-\frac{2n-r}{5}\right)!}$$

* Reduciendo : $C_p^n = \dfrac{n!}{\left(\frac{2n-r}{5}\right)!\left(\frac{3n+r}{5}\right)!}$

PROBLEMA 18 :

Calcular el término independiente del desarrollo de: $\left(a^3-\frac{1}{a}\right)^{20}$.

RESOLUCIÓN:

$$T_{k+1}=\binom{20}{k}(a^3)^{20-k}\left(-\frac{1}{a}\right)^k$$

$$\rightarrow T_{k+1}=\binom{20}{k}a^{60-3k}(-1)^k a^{-k}=\binom{20}{k}(-1)^k a^{60-4k}$$

*Como se pide el término independiente, el exponente de «a» debe ser cero, luego:

$$60-4k=0 \rightarrow k=15$$

* Entonces :

$$T_{16}=\binom{20}{15}(-1)^{15}=-15504$$

* Es decir en el desarrollo de $\left(a^3-\frac{1}{a}\right)^{20}$ el término independiente es -15504 y se ubica en el lugar 16 de su desarrollo.

PROBLEMA 19 :

El desarrollo de las potencias :

$$\left(\frac{x}{y}+y^4\right)^{50}\ ;\ \left(x^5+y^{25/13}\right)^{20}$$

poseen cada uno de ellos un término con idéntica parte literal. Determina la ubicación de los mismos.

RESOLUCIÓN:

Sean $m+1$ y $n+1$ las ubicaciones de los términos con idéntica parte literal.

$$T_{m+1}=\binom{50}{m}\left(\frac{x}{y}\right)^{50-m}(y^4)^m=\binom{50}{m}x^{50-m}y^{5m-50}$$

$$T_{n+1}=\binom{20}{n}(x^5)^{20-n}(y^{25/13})^n=\binom{20}{n}x^{100-5n}y^{\frac{25n}{13}}$$

* Como son términos con idéntica parte literal se tiene :

$$50-m=100-5n \text{ ....}(I)$$

$$5m-50=\frac{25n}{13} \text{ ....}(II)$$

* Resolviendo el sistema, se tiene : $m=15$; $n=13$

* Por tanto las ubicaciones son 16 y 14 respectivamente.

PROBLEMA 20 :

Calcular el valor de «a» para que el coeficiente de x^6 en el desarrollo de $(x+a)^9$ sea igual a 672.

RESOLUCIÓN :

* El término que ocupa el lugar $k+1$, del binomio es :

$$T_{k+1}=\binom{9}{k}x^{9-k}a^k$$

* Ahora, para que la potencia de x sea 6, se debe dar $k=3$. Así,

$$T_4=\binom{9}{3}x^6a^3=84a^3x^6$$

* Entonces : $84a^3=672 \rightarrow a^3=8$

* Luego : $a=2$

* Además , podemos decir que el cuarto término del desarrollo de $(x+2)^9$ es 672.

PROBLEMA 21:

Dado el binomio : $\left(x^{\frac{1}{5}}+\dfrac{1}{x^{\frac{1}{3}}}\right)^{120}$ determinar:

I) El número de términos racionales e irracionales que tiene el desarrollo.

II) ¿Cuántos términos enteros y fraccionarios existen?

RESOLUCIÓN:

* El término general de este desarrollo es:

$$t_{k+1}=C_k^{120}\left(x^{\frac{1}{5}}\right)^{120-k}\left(\frac{1}{x^{1/3}}\right)^k \rightarrow t_{k+1}=C_k^{120}x^{\frac{120-k}{5}}x^{-\frac{k}{3}}$$

$$\rightarrow t_{k+1}=C_k^{120}x^{24-\frac{8k}{15}}$$

I) Para que sean racionales :

$$24-\frac{8k}{15}=\text{Número entero}$$

Esto cumple para: $k = 0; 15; 30; 45; 60; 75; 90; 105; 120$; lo cual indica que hay ***9*** términos racionales y como el desarrollo tiene ***121*** términos, los irracionales son ***112.***

II) Para que sean enteros :

$$24-\frac{8k}{15}=\text{Número entero y positivo.}$$

Esto se cumple para $k = 0 ; 15 ; 30 ; 45$; hay 4 términos enteros y como existen 9 racionales hay 5 fraccionarios.

PROBLEMA 22 :

Hallar el décimo término del desarrollo del binomio:

$$\left(27x^5+\frac{1}{3x}\right)^{12}$$

RESOLUCIÓN:

$$T_{10}=T_{9+1}=C_9^{12}(27x^5)^{12-9}\left(\frac{1}{3x}\right)^9$$

* Pero :

$$C_9^{12}=C_{12-9}^{12}=C_3^{12}=\frac{12\times11\times10}{1\times2\times3}=220$$

$$T_{10}=220\left(3^3x^5\right)^3\left(3^{-1}x^{-1}\right)^9$$

* Efectuando se tiene : $T_{10}=220x^6$

PROBLEMA 23 :

Siendo «A», «B» y «C» los coeficientes de tres términos consecutivos del desarrollo de $(a+b)^n$.

Además : $A+2B+C=C_{10}^{20}$

Hallar «*n*».

RESOLUCIÓN:

* Sea «T_{r+1}» el primer término:

$$\rightarrow T_{r+1}=C_r^n\,a^{n-r}\,b^r$$

* Luego : $A=C_r^n$.

* Sea «T_{r+2}» el segundo término:

$$\rightarrow T_{r+2}=C_{r+1}^n a^{n-(r+1)}b^{r+1}$$

* Luego : $B=C_{r+1}^n$

* Sea «T_{r+3}» el tercer término:

$$\rightarrow T_{r+3}=C_{r+2}^n a^{n-(r+2)}b^{r+2}$$

* De la condición:

$$A+2B+C=C_{10}^{20}\Rightarrow C_r^n+2C_{r+1}^n+C_{r+2}^n=C_{10}^{20}$$

$$\Rightarrow \underbrace{C_r^n+C_{r+1}^n}+\underbrace{C_{r+1}^n+C_{r+2}^n}=C_{10}^{20}$$

$$\Rightarrow \underbrace{C_{r+1}^{n+1}+C_{r+2}^{n+1}}=C_{10}^{20}\Rightarrow C_{r+2}^{n+2}=C_{10}^{20}$$

* De la igualdad : $n+2=20\rightarrow n=18$

PROBLEMA 24 :

Hallar el término que ocupa el lugar 103 en el desarrollo de :

$$\left(x^3-\sqrt[3]{y}\right)^{104}$$

RESOLUCIÓN:

$$T_{103}=T_{102+1}=C_{102}^{104}(x^3)^{104-102}\left(-\sqrt[3]{y}\right)^{102}$$

$$\rightarrow T_{103}=C_{102}^{104}\,x^6y^{34}$$

* Pero :

$$C_{102}^{104}=C_{104-102}^{104}=C_2^{104}\Rightarrow C_{102}^{104}=\frac{104\times103}{1\times2}=5356$$

* Reemplazando : $T_{103}=5356x^6y^{34}$

PROBLEMA 25:

Desarrollando la expresión :

$(a^2+a)^n\,(a^2-1)^{n+2}\,(1-a^{-1})^n$ se obtiene ***21*** términos en total. Hallar el segundo término.

RESOLUCIÓN :

* Agrupando convenientemente :

$$\left[\left(a^2+a\right)\left(\frac{a-1}{a}\right)\right]^n\left(a^2-1\right)^{n+2}$$

$$\rightarrow\left[a^2-1\right]^n\left(a^2-1\right)^{n+2}=\left(a^2-1\right)^{2n+2}$$

* Del dato : $2n+2+1=21\rightarrow n=9$

* Calculando « T_2» :

$$T_2=T_{1+1}=C_1^{20}(a^2)^{20-1}(-1)^1=-20a^{38}$$

PROBLEMA 26 :

Hallar «n» para que el T_{25} del desarrollo de:

$$\left(\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{\sqrt{x}}\right)^{5n+2}$$

contenga a «x» con exponente ***44*** .

RESOLUCIÓN:

* Calculamos «T_{25}» :

$$T_{25}=C_{24}^{5n+2}\left(\frac{x^2}{y}\right)^{5n+2-24}\left(\frac{y^2}{\sqrt{x}}\right)^{24}$$

* El exponente de «x» debe ser ***44 .***

$$2(5n+2-24)-\frac{1}{2}(24)=44$$

$\Rightarrow 10n+4-48-12=44 \Rightarrow 10n=48+12+44-4$

$\Rightarrow 10n=100 \Rightarrow n=10$

PROBLEMA 27:

Calcular el valor de «k» en el desarrollo de $(1+x)^{43}$ si se sabe que los coeficientes de los términos de lugares $(2k+1)$ y $(k+2)$ son iguales.

RESOLUCIÓN:

* Calculamos el término $(2k+1)$:

$$T_{2k+1}=C_{2k}^{43}(1)^{43-2k}(x)^{2k} \Rightarrow t_{2k+1}=C_{2k}^{43}\text{.........}(I)$$

* Calculamos el término $(k+2)$:

$$T_{k+2}=C_{k+1}^{43}(1)^{43-k-1}(x)^{k+1} \Rightarrow t_{k+2}=C_{k+1}^{43}\text{...}(II)$$

* Pero como (I) y (II) son iguales , entonces :

$$C_{2k}^{43}=C_{k+1}^{43}$$

* Se cumple : $2k+k+1=43$

* Luego : $k=14$

PROBLEMA 28:

Encontrar un binomio tal, que al desarrollar su quinta potencia, se encuentra que el tercer término es $10x^5$ y su quinto término $\frac{5}{x^5}$.

A) $x^2+\frac{1}{x}$ B) $x^3+\frac{1}{x^2}$ C) $x-\frac{1}{x^6}$ D) $x+\frac{1}{2x}$

RESOLUCIÓN :

$$(a+b)^5=a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$$

* Comparando:

$$10a^3b^2=10x^5 \to a^3b^2=x^5\text{....................}(I)$$

$$5ab^4=\frac{5}{x^5} \to ab^4=\frac{1}{x^5}\text{............................}(II)$$

* De $(I)\times(II) \to a^4b^6=1$; extrayendo $\sqrt{\ }$; $a^2b^3=1\text{...}(III)$

* De $(II)^2 \Leftrightarrow a^2b^8=\frac{1}{x^{10}}\text{...........................}(IV)$

* De $(III)\div(IV)$: $\frac{a^2b^3}{a^2b^8}=\frac{1}{\frac{1}{x^{10}}} \Rightarrow b^{-5}=x^{10} \Rightarrow b=\frac{1}{x^2}$

* Reemplazando en (I) se obtiene $(a=x^3)$ luego el binomio será : $\left(x^3+\frac{1}{x^2}\right)$

RPTA: "B"

PROBLEMA 29 :

Hallar el valor de «m» sabiendo que la diferencia entre los grados absolutos de los términos sexto y décimo sexto del desarrollo del binomio $(x^4+y^m)^{2n}$ es 10.

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 0

RESOLUCIÓN:

$T_6=C_5^{2n}(x^4)^{2n-5}(y^m)^5$, en donde su grado absoluto es : $8n-20+15m$

$T_{16}=C_{15}^{2n}(x^4)^{2n-15}y^{15m}$, en donde su grado absoluto es : $8n-60+15m$

* Por condición del problema :

$$(8n-20+5m)-(8n-60+15m)=10$$

$$\Rightarrow 40-10m=10 \Rightarrow m=3$$

RPTA: "C"

PROBLEMA 30:

Calcular el término independiente del desarrollo de: $\left(x+\frac{1}{x^{19}}\right)^{60}$

A) C_3^{20} B) C_2^{30} C) C_2^{60} D) C_3^{60} E) 286

RESOLUCIÓN:

* Se sabe : $T_{k+1}=C_k^{60}(x)^{60-k}(x^{-19})^k$

$$\Rightarrow T_{k+1}=C_k^{60}x^{60-20k}$$

* Para que sea el término independiente se debe cumplir: $x^{60-20k}=x^0$, de donde: $60-20k=0 \Rightarrow k=3$

* De donde se deduce que el término independiente es : $T_4=C_3^{60}$

RPTA: "D"

PROBLEMA 31:

Hallar el número de términos en el desarrollo de: $(x^2+y^5)^n$ si la suma de los exponentes de todos los términos es igual a 252.

RESOLUCIÓN:

* La suma de exponentes será :

$$\frac{(2+5)n(n+1)}{2}=252$$

* Reduciendo: $n(n+1)=72$

$$\to n(n+1)=8\times 9$$

* De aquí: $n=8$

* El número de términos es 9.

PROBLEMA 32:

Determinar «a» y «b» en la potencia : $\left(\frac{x^a}{y^{b-5}}+\frac{y^b}{x}\right)^b$

de modo que admita un término central de la forma: $C^{b}_{\frac{b}{2}}x^{3}y^{15}$

RESOLUCIÓN:

*Como hay un término central, el lugar es $\frac{b}{2}+1$.

$$T_{\frac{b}{2}+1}=C^{b}_{\frac{b}{2}}\left(\frac{x^{a}}{y^{(b-5)}}\right)^{b-\frac{b}{2}}\left(\frac{y^{b}}{x}\right)^{\frac{b}{2}}\Rightarrow T_{\frac{b}{2}+1}=C^{b}_{\frac{b}{2}}\frac{x^{a\left(\frac{b}{2}\right)}}{y^{(b-5)\frac{b}{2}}}\times\frac{y^{\frac{b^{2}}{2}}}{x^{\frac{b}{2}}}$$

$$\Rightarrow T_{\frac{b}{2}+1}=C^{b}_{\frac{b}{2}}x^{\frac{b}{2}(a-1)}\times y^{\frac{b}{2}(b-b+5)}\Rightarrow T_{\frac{b}{2}+1}=C^{b}_{\frac{b}{2}}x^{\frac{b}{2}(a-1)}\times y^{\frac{b}{2}(5)}\text{....(I)}$$

* Como :

$$t_{\frac{b}{2}+1}=C^{b}_{\frac{b}{2}}x^{3}\,y^{15}\text{..............................(II)}$$

* Pero como *(I)=(II)* ; entonces :

$$C^{b}_{\frac{b}{2}}x^{\frac{b}{2}(a-1)}\,y^{\frac{b}{2}(5)}=C^{b}_{\frac{b}{2}}x^{3}\,y^{15}$$

* Identificando exponentes de «x» e «y» :

$$\frac{b}{2}(a-1)=3;\ b(a-1)=6\rightarrow\frac{b}{2}(5)=15;\ b=6$$

* Resolviendo : ***a=2 ; b=6***

PROBLEMA 33:

Dado el binomio $\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[5]{x}}\right)^{50}$, determinar:

I) El número de términos racionales e irracionales del desarrollo.

II) El número de términos enteros y el número de fraccionarios.

II) Encontrar el término independiente.

RESOLUCIÓN:

$$T_{k+1}=C^{50}_{k}\left(x^{1/2}\right)^{50-k}\left(x^{-1/5}\right)^{k}$$

$$\Rightarrow T_{k+1}=C^{50}_{k}x^{25-k/2}\,x^{-k/5}\Rightarrow T_{k+1}=C^{50}_{k}x^{25-7k/10}$$

I) Para que una expresión sea racional, los exponentes de la parte literal de dicha expresión deben ser enteros; luego: $25-\frac{7k}{10}=$ número entero, cosa que se cumple para: $k\in\{0;\ 10;\ 20;\ 30;\ 40;\ 50\}$ ya que $k\le 50$, luego hay ***6*** términos racionales y ***45*** irracionales ya que el total de términos del binomio es ***51***.

II) Para que una expresión sea fraccionaria, alguno de los exponentes que afecta a sus letras debe ser negativo , luego :

$$25-\frac{7k}{10}<0\rightarrow\text{luego}: k\in\{36;\ 37;\ 38;....;50\}$$

$25<\frac{7k}{10}\rightarrow$ Entonces habrá ***15*** términos fraccionarios y ***36*** términos enteros.

$$\rightarrow 250<7k\rightarrow 35{,}7<k$$

* Nótese que para la resolución de este tipo de problemas se deberá observar las restricciones.

$0\le k\le n$; ***k = número entero*** , en donde «n» es el exponente del binomio.

III) El término independiente se obtendrá haciendo:

$x^{25-7/k}=x^{0}$ de donde: $25-\frac{7}{k}=0\rightarrow k=\frac{7}{25}$ pero «k» debe ser entero y positivo luego :

En el desarrollo de $\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[5]{x}}\right)^{50}$, no hay término independiente.

PROBLEMA 34:

Si los coeficientes binomiales $\binom{4}{x^{2}-x}\wedge\binom{4}{2x-2}$ equidistan de los extremos en el desarrollo elevado a un exponente $n\in N$. Halle el valor de *x*.

A)-1 *B)2* *C)3* *D)4* *E)-3*

RESOLUCIÓN:

*Si los coeficientes $\binom{4}{x^{2}-x}\wedge\binom{4}{2x-2}$ equidistan de los extremos en el desarrollo de un binomio.

$$\rightarrow(x^{2}-x)+(2x-2)=4$$

$$\rightarrow x^{2}+x-6=0$$

$$\rightarrow x=2\vee(x=-3)$$

$$\rightarrow x=2$$

* Pues $(x^{2}-x)\in N\ \wedge\ (2x-2)\in N$

RPTA: "B"

PROBLEMA 35:

Si el único término central del desarrollo de $\left(x^{2}+\frac{y}{x}\right)^{n}$ es de sexto grado, entonces el coeficiente de dicho término central es:

A)3 *B)6* *C)10* *D)20* *E)70*

RESOLUCIÓN:

* Datos : Binomio: $\left(x^{2}+\frac{y}{x}\right)^{n}$

término central $T_{\left(\frac{n}{2}+1\right)}$

grado de $T_{\left(\frac{n}{2}+1\right)}=6$

* El término central está dado por :

$$T_{\left(\frac{n}{2}+1\right)}=C^n_{n/2}(x^2)^{n/2}(y/x)^{n/2}\Rightarrow T_{\left(\frac{n}{2}+1\right)}=C^n_{n/2}x^{n-\frac{n}{2}}y^{\frac{n}{2}}$$

* Grado $T_{\left(\frac{n}{2}+1\right)}$ es 6

$$\rightarrow\frac{n}{2}+\frac{n}{2}=6\rightarrow n=6$$

* Luego, el coeficiente : $C^6_3=\dfrac{6\times5\times4}{3!}=20$

RPTA: "D"

PROBLEMA 36 :

En el desarrollo del siguiente binomio $(a^4+b^5)^{3n}$. Los términos de lugares $(n+6)$ y $(n+8)$ equidistan de los extremos. Encontrar el exponente de «a» en el término central.

A)25 B)36 C)48 D)72 E)81

RESOLUCIÓN:

* De $(a^4+b^5)^{3n}$

$$T_{n+6}=C^{3n}_{n+5}(a^4)^{2n-5}(b^5)^{n+5}$$
$$T_{n+8}=C^{3n}_{n+7}(a^4)^{2n-7}(b^5)^{n+7}$$

* Si ambos equidistan de los extremos, se cumple:

$$C^{3n}_{n+5}=C^{3n}_{n+7}$$

* De aquí : $n+5+n+7=3n\rightarrow n=12$

* $\Rightarrow$ El binomio es : $(a^4+b^5)^{36}$

OBSERVACIÓN:

El término central ocupa lugar 19.

* De donde: $T_{19}=C^{36}_{18}(a^4)^{18}(b^5)^{18}\rightarrow T_{19}=C^{36}_{18}a^{72}b^{90}$

* El exponente de «a» es 72.

RPTA: "D"

PROBLEMA 37:

Hallar el coeficiente de a^3b^3c en el desarrollo de : $(2a+b+3c)^7$

A)3300 B)3360 C)3240 D)7080 E)8000

RESOLUCIÓN:

* su término general es:

$$\frac{\lfloor 7}{\lfloor\alpha\lfloor\beta\lfloor\gamma}(2a)^\alpha b^\beta(3c)^\gamma=\frac{\lfloor 7}{\lfloor\alpha\lfloor\beta\lfloor\gamma}2^\alpha3^\gamma a^\alpha b^\beta c^\gamma$$

* Como la parte variable es : a^3b^3c

* Donde : $\alpha=3;\ \beta=3;\ \gamma=1$

* Luego, su coeficiente es:

$$\frac{\lfloor 7}{\lfloor 3\lfloor 3\lfloor 1}\times2^3\times3^1=\frac{7\times6\times5\times4\times\lfloor 3}{\lfloor 3\lfloor 3}\times8\times3$$
$$=7\times5\times4\times8\times3=3360$$

RPTA: "B"

PROBLEMA 38:

En el desarrollo de $(a^2+b-a)^8$, hallar los coeficientes de los términos de la forma: $a^{10}b^k$, donde «k» es el número par no nulo.

RESOLUCIÓN:

*Aplicando la fórmula de Leibniz, el coeficiente de $a^{10}b^k$, será :

$$\sum\frac{8!}{\alpha!\beta!\gamma!}(a^2)^\alpha(b)^\beta(-a)^\gamma$$

* Reduciendo : $\sum\dfrac{8!}{\alpha!\beta!\gamma!}(a)^{2\alpha+\gamma}b^\beta$

* Donde:

$\alpha+\beta+\gamma=8$.....................(I)

* Por dato:

$2\alpha+\gamma=10$ .... (II)

$k=\beta(par\ no\ nulo)$...............(III)

* Como:

$$\alpha+\beta+\gamma=8$$

α	β	γ
↓	↓	↓
4	2	2
2	4	2
1	6	1
0	8	0

* Donde el único trio de valores que cumple con (I),(II) y (III) es : $\alpha=4;\ \beta=2;\ \gamma=2$

* Luego :

$$\frac{8!}{4!2!2!}(a^2)^4(b)^2(-a)^2=420a^{10}b^2$$

$\rightarrow$ ***el coeficiente de $a^{10}b^2$ es 420***

PROBLEMA 39:

Hallar el coeficiente del término que lleva x^6 en el desarrollo de $(x^2-2x+1)^5$

A)320 B)420 C)210 D)260 E)180

RESOLUCIÓN:

* Observación: $(x^2-2x+1)^5=(x-1)^{10}$

* Supongamos que T_{k+1} lleva a x^6:

$$\Rightarrow T_{k+1}=C^{10}_kx^{10-k}(-1)^k\ ....(I)$$

* De aquí : $10-k=6\rightarrow k=4$

* En *(I)* : $Coef._{T_5} = C_4^{10}(-1)^4$

* O sea: $Coeficiente = \dfrac{10\times9\times8\times7}{1\times2\times34} = 210$

RPTA: "C"

PROBLEMA 40:

Hallar el coeficiente de x^{10} en el desarrollo de :

$$(2+3x^3+x^4)^4$$

RESOLUCIÓN:

* Su término general es :

$$\frac{\lfloor 4}{\lfloor\alpha\lfloor\beta\lfloor\gamma}2^{\alpha}(3x^3)^{\beta}(x^4)^{\gamma} = \frac{\lfloor 4}{\lfloor\alpha\lfloor\beta\lfloor\gamma}2^{\alpha}3^{\beta}x^{3\beta+4\gamma}$$

* De donde:

$$\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma=4\\ 3\beta+4\gamma=10\end{cases},\ \alpha,\ \beta,\ \gamma\in Z_0^+$$

* Resolviendo el sistema : $\gamma=1 \wedge \beta=2 \wedge \alpha=1$

* Luego su coeficiente es :

$$\frac{\lfloor 4}{\lfloor 1\lfloor 2\lfloor 1}2^1 3^2 = \frac{4\times3\times2}{\lfloor \cancel{2}}\cancel{2}\times9 = 216$$

* Luego el coeficiente de $x^{10} = 216$

PROBLEMA 41:

Hallar el término independiente de *x* en el desarrollo de : $\left(x+1+\dfrac{1}{x}\right)^4$

A) 19 B) 15 C) 17 D) 18 E) 16

RESOLUCIÓN:

* Recuérdese la fórmula de Leibniz .

* El término que contiene a x^0 (*T.I. de x*) en $\left(x+1+\dfrac{1}{x}\right)^4$ es:

$$\frac{\lfloor 4}{\lfloor\alpha\lfloor\theta\lfloor\beta}(x)^{\alpha}(1)^{\theta}(x^{-1})^{\beta} = \frac{\lfloor 4}{\lfloor\alpha\lfloor\theta\lfloor\beta}x^{\alpha-\beta} \text{...........}(I)$$

* De donde: $\alpha+\beta+\theta=4$

* Pero como es T.I. de $x \Rightarrow \alpha-\beta=0 \Rightarrow \alpha=\beta$.

* Luego: $2\alpha+\theta=4$ con $\alpha,\ \beta,\ \theta\in Z_0^+$

* De aquí: $\alpha=0,\ \theta=4$ y $\beta=0$

$\alpha=1,\ \theta=2$ y $\beta=1$

$\alpha=2,\ \theta=0$ y $\beta=2$

* Finalmente en *(I)* :

$$T.I. = \frac{\lfloor 4}{\lfloor 0\lfloor 4\lfloor 0}+\frac{\lfloor 4}{\lfloor 1\lfloor 2\lfloor 1}+\frac{\lfloor 4}{\lfloor 2\lfloor 0\lfloor 2} \Rightarrow T.I. = 1+12+6=19$$

RPTA: "A"

PROBLEMA 42:

¿Cuántos términos existen en el desarrollo de $(3x+2y^3-z^2+w)^5$?

RESOLUCIÓN:

* El desarrollo de : $\underbrace{(3x+2y^3-z^2+w)^5}_{4\ términos}$

* Tendrá:

$$\frac{\lfloor 5+4-1}{\lfloor 5.\lfloor 4-1} = \frac{\lfloor 8}{\lfloor 5\lfloor 3} = \frac{8\times7\times\cancel{6}\cancel{\lfloor 5}}{\cancel{\lfloor 5}\cancel{\lfloor 3}} = 56\ términos$$

PROBLEMA 43:

Un término que se obtiene en el desarrollo de $(x+y+z+w)^9$ es $kx^3y^2z^3w$. ¿Cuánto será el valor de k?

A) 5040 B) 2520 C) 1460 D) 1260 E) 1070

RESOLUCIÓN :

* Recuérdese la fórmula de Leibniz.

* El término $kx^3y^2z^3w$ que se obtiene de $(x+y+z+w)^9$ viene dado por:

$$\frac{\lfloor 9}{\lfloor\alpha\lfloor\beta\lfloor\theta\lfloor\gamma}x^{\alpha}y^{\beta}z^{\theta}w^{\gamma}$$

* Donde : $\alpha+\beta+\theta+\gamma=9$

* Observación : $\alpha=3,\ \beta=2,\ \theta=3,\ \gamma=1$

* Luego : $K = \dfrac{\lfloor 9}{\lfloor 3\lfloor 2\lfloor 3\lfloor 1} = \dfrac{9\times8\times7\times6\lfloor 5}{6\times2\times6\times1}$

* Simplificando : $K = 5040$

RPTA: "A"

PROBLEMA 44:

Halle el término de lugar 5 en el desarrollo de $(5+3x^2)^{2/3}$

RESOLUCIÓN:

* El desarrollo será equivalente al de $5^{2/3}\left(1+\dfrac{3}{5}x^2\right)^{2/3}$ por la fórmula general :

$$T_5 = T_{4+1} = 5^{2/3}\binom{2/3}{4}\left(\frac{2}{5}x^2\right)^4$$

$$\rightarrow T_5 = \sqrt[3]{25}\,\frac{\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}-1\right)\left(\frac{2}{3}-2\right)\left(\frac{2}{3}-3\right)}{\lfloor 4}\times\frac{3^4}{5^4}x^8$$

$$\rightarrow T_5 = \sqrt[3]{25}\,\frac{\left(\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{4}{3}\right)\left(-\frac{7}{3}\right)}{1\times2\times3\times4}\times\frac{3^4}{5^4}x^8$$

$$\rightarrow T_5 = \sqrt[3]{25}\,\frac{-7x^8}{3\times625} = -\frac{7\sqrt[3]{25}}{1875}x^8$$

PROBLEMA 45 :

Determinar el equivalente reducido de:

$$S = C_0^n + 2C_1^n + 3C_2^n + ... + (n+1)C_n^n$$

RESOLUCIÓN:

$$S = C_0^n + C_1^n + C_1^n + C_2^n + 2C_2^n + C_3^n + ... + C_n^n + nC_n^n$$

$$\Rightarrow S = \left[C_0^n + C_1^n + C_2^n + ... + C_n^n\right] + \left[C_1^n + 2C_2^n + 3C_3^n + ... + nC_n^n\right]$$

$$\Rightarrow S = \left[C_0^n + C_1^n + C_2^n + ... + C_n^n\right] + \left[\frac{n}{1}C_0^{n-1} + 2\frac{n}{2}C_1^{n-1} + ... + n\frac{n}{n}C_{n-1}^{n-1}\right]$$

$$\Rightarrow S = 2^n + n\underbrace{\left\{C_0^{n-1} + C_1^{n-1} + C_2^{n-1} + ... + C_{n-1}^{n-1}\right\}}_{2^{n-1}}$$

$$\Rightarrow S = 2^n + 2^{n-1}n$$

PROBLEMA 46:

Hallar el equivalente reducido de:

$$S = \frac{C_1^n}{3} + \frac{2C_2^n}{3^2} + \frac{2C_3^n}{3^3} + \frac{2C_4^n}{3^4} + ... + \frac{nC_n^n}{3^n}$$

A) $\frac{n}{2}\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}$ B) $\frac{n}{3}\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}$ C) $\frac{n}{3}\left(\frac{4}{3}\right)^{n+1}$

D) $\frac{n}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$ E) $\frac{n}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^{n}$

RESOLUCIÓN:

* Por degradación de índices : $\boxed{C_k^n = \frac{n}{k}C_{k-1}^{n-1}}$

*Aplicando en lo pedido para cada número combinatorio, se tendrá:

$$S = \frac{nC_0^{n-1}}{3} + \frac{nC_1^{n-1}}{3^2} + \frac{nC_2^{n-1}}{3^3} + ... + \frac{nC_{n-1}^{n-1}}{3^n}$$

* Extraemos $(n/3)$ y ordenamos así:

$$S = \frac{n}{3}\left[C_0^{n-1} + C_1^{n-1}\left(\frac{1}{3}\right) + C_2^{n-1}\left(\frac{1}{3}\right)^2 + ... + C_{n-1}^{n-1}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right]$$

OBSERVACIÓN:

La expresión en corchete es el desarrollo de $\left(1+\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

* Luego : $S = \frac{n}{3}\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}$

RPTA: "B"

PROBLEMA 47:

Determinar el equivalente reducido de

$$K = C_0^n + \frac{C_1^n}{2} + \frac{C_2^n}{3} + \frac{C_3^n}{4} + ... + \frac{C_n^n}{n+1}$$

RESOLUCIÓN:

* Multiplicando por $n+1$ miembro a miembro:

$$(n+1)K = \frac{n+1}{1}C_0^n + \frac{n+1}{2}C_1^n + \frac{n+1}{3}C_2^n + ... + \frac{n+1}{n+1}C_n^n$$

* De la fórmula de degradación : $\frac{n+1}{k}C_{k-1}^n = C_k^{n+1}$

$$\Rightarrow (n+1)K = C_1^{n+1} + C_2^{n+1} + C_3^{n+1} + ... + C_{n+1}^{n+1}$$

* Sumando 1:

$$(n+1)K + 1 = 1 + C_1^{n+1} + C_2^{n+1} + C_3^{n+1} + ... + C_{n+1}^{n+1}$$

* Pero : $1 = C_0^{n+1}$

$$\rightarrow (n+1)K = \underbrace{C_1^{n+1} + C_2^{n+1} + C_3^{n+1} + ... + C_{n+1}^{n+1}}_{2^{n+1}} - 1 \Rightarrow K = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$$

PROBLEMA 48 :

Hallar el valor de:

$$(C_0^n)^2 + (C_1^n)^2 + (C_2^n)^2 + ... + (C_n^n)^2$$

A) $\frac{\lfloor 2n}{\lfloor n \lfloor n}$ B) $\lfloor n$ C) $\frac{\lfloor 2n}{\lfloor n}$ D) 2^{2n} E) $\lfloor 2n$

RESOLUCIÓN:

* Para el problema usemos algunos desarrollos :

$$(1+x)^n = C_0^n + C_1^n x + C_2^n x^2 + C_3^n x^3 + ... + C_n^n x^n$$

$$(1+x^{-1})^n = C_0^n + C_1^n x^{-1} + C_2^n x^{-2} + C_3^n x^{-3} + ... + C_n^n x^{-n}$$

* Multiplicando miembro a miembro :

$$(1+x)^n(1+x^{-1})^n = (C_0^n)^2 + (C_1^n)^2 + (C_2^n)^2 + ... + (C_n^n)^n$$
$$\underbrace{+ C_0^n + C_0^n x^{-1} + C_0^n x^{-2} + C_0^n x^{-3} + ...}_{\text{todos estos sumandos dependen de } x}$$

* De aquí podemos decir que :

$$(C_0^n)^2 + (C_1^n)^2 + (C_2^n)^2 + ... + (C_n^n)^2$$

* Es el término independiente del producto de $(1+x)^n(1+x^{-1})^n \Rightarrow$ nos corresponde calcular el término independiente de dicho producto.

OBSERVACIÓN :

$$(1+x)^n\left(1+\frac{1}{x}\right)^n = \frac{(1+x)^{2n}}{x^n} = x^{-n}(1+x)^{2n}$$

* De aquí para calcular el término independiente de x, tenemos que hallar el término que contiene x^n en $(1+x)^{2n}$.

* Supongamos que el término que posee x^n sea

$T_{k+1} : T_{k+1} = C_k^{2n}x^k$

* Donde decimos: $n = k \rightarrow T_{n+1} = C_k^{2n}x^n$

* Luego: T.I. de $x = x^{-n}\left(C_k^{2n}x^n\right) = C_n^{2n}$ o también:

T.I. de $x = \frac{\lfloor 2n}{\lfloor n \times \lfloor n}$

RPTA: "A"

PROBLEMA 49 :

Siendo n un número positivo, hallar el valor de:

$$R = \frac{1}{4^n}\left[C_0^{4n} - C_2^{4n} + C_4^{4n} - C_6^{4n} + ... + C_{4n}^{4n}\right]$$

A)-1 B)$(-1)^n$ C)$(-1)^{n+1}$ D)$(-n)^{n+1}$ E)1

RESOLUCIÓN:

* Recuerde propiedades de la unidad imaginaria «i», tales como :

$$i^2=-1;\ i^4=1,\ \text{además}\ (1\pm i)^4=-4$$

* Calculemos los desarrollos siguientes:

$$(1+i)^{4n}=C_0^{4n}+C_1^{4n}i+C_2^{4n}i^2+C_3^{4n}i^3+...+C_{4n}^{4n}i^{4n}$$
$$(1-i)^{4n}=C_0^{4n}-C_1^{4n}i+C_2^{4n}i^2-C_3^{4n}i^3+...+C_{4n}^{4n}i^{4n}$$

* Sumamos miembro a miembro:

$$(1+i)^{4n}+(1-i)^{4n}=2\left[C_0^{4n}+C_2^{4n}i^2+C_4^{4n}i^4+...C_{4n}^{4n}i^{4n}\right]$$

$$(1+i)^{4n}+(1-i)^{4n}=2\underbrace{\left[C_0^{4n}-C_2^{4n}i^2-C_4^{4n}i^4+...C_{4n}^{4n}i^{4n}\right]}_{Llamemos\ E}$$

$$(-4)^n+(-4)^n=2E\to \cancel{2}(-4)^n=\cancel{2}E$$

* De aquí : $(-1)^n\times 4^n=E$

* Reemplazando en lo pedido (en R) :

$$R=\frac{1}{4^n}\left[(-1)^n\times 4^n\right]=(-1)^n$$

RPTA: "B"

PRIMERA PRACTICA DIRIGIDA

01 Determinar el cuarto término del desarrollo:

$$(x-y)^{10}$$

A)$-100x^7y^3$ B) $-120x^7y^3$ C)$100x^7y^3$
D) $120x^7y^3$ E) x^7y^2

02 Calcular el número de términos del desarrollo:

$$(2+3xy)^{12}$$

A)12 B)13 C)11 D) 10 E) 9

03 Hallar el cuarto término de : $(x^2+2y)^4$

A)$-30x^3y^2$ B) $32xy^2$ C) $32x^2y^3$
D) $28xy^3$ E) $-28x^2y^3$

04 Hallar el "T_{103}" del siguiente desarrollo:

$$(a^3-\sqrt[3]{b})^{104}$$

A)5 $635a^4b^{32}$ B) 5 $356a^6b^{34}$ C) $3565a^8b^{36}$
D) 6 $536a^4b^{32}$ E) N.A.

05 Hallar el noveno término de expansión de:

$$(2x^5+y^3)^{11}$$

A)1 $230x^{16}y^{25}$ B)1 $023x^{15}y^{28}$ C)1 $320x^{15}y^{24}$
D) 2 $130x^{16}y^{24}$ E) N.A.

06 Señalar la suma de coeficientes de : $(4a-2b)^8$

A)128 B) 127 C) 255 D)256 E) 1 024

07 Encontrar el cuarto término de: $\left(\frac{x}{2}-\frac{2}{x}\right)^6$

A) $-\frac{96}{x^4}$ B) $\frac{15}{4}x^2$ C) -20 D)40 E) 8

08 En el desarrollo del binomio $(2x-y)^{10}$ el coeficiente de x^6y^4 es:

A)13 380 B) 3 450 C) 13 460
D)13 440 E) 13 455

09 El término independiente de "x" en:

$\left(\frac{2}{5}x^2+\frac{1}{2x}\right)^9$ es:

A)0,018 B) 0,002 C) 0,084 D) 0,001 E) 0,8

10 Hallar el término independiente de "x", si existe en la expansión de: $\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^9$

A)84 B) 72 C) 60 D)92 E) 96

11 Determinar el lugar del término que lleva x^{25} en el desarrrollo de : $\left(3x^5-\frac{2}{x^2}\right)^{12}$

A)4 B) 5 C) 6 D)7 E) 8

12 Hallar el término independiente de "x" en el desarrollo de: $\left(3x^2-\frac{1}{3x}\right)^9$

A)$\frac{5}{18}$ B)$\frac{7}{18}$ C)$\frac{28}{9}$ D)1 E)$\frac{1}{2}$

13 Halle el término anterior al independiente de "x" en el desarrollo de : $\left(\frac{\sqrt[3]{x^2}}{2}+\frac{1}{\sqrt[5]{x}}\right)^{13}$

A)$\frac{713}{15}x^{\frac{13}{14}}$ B)$\frac{713}{16}x^{\frac{13}{14}}$ C)$\frac{714}{16}x^{\frac{13}{14}}$ D)$\frac{715}{16}x^{\frac{13}{14}}$ E)$\frac{715}{16}x^{\frac{13}{15}}$

14 Señale el lugar del término independiente del desarrollo de : $\left(x^2+\frac{1}{x^3}\right)^{55}$

A)23 B) 22 C) 21 D) 24 E) 25

15 Hallar el coeficiente del término independiente de "x" en el desarrollo de: $(x^8-x^{-4})^{12}$

A)C_{30}^{42} B)C_{27}^{42} C)C_{23}^{42} D)C_{28}^{42} E)C_{35}^{42}

16 Calcular el término central del desarrollo del binomio : $\left(4a^3-\frac{b}{8}\right)^{10}$

A) $a^{15}b^5$ B) $315a^{15}b^5$ C) $-315a^{15}b^5$

D) $\frac{315}{16}a^{15}b^5$ E) $-\frac{315}{16}a^{15}b^5$

17 Calcular el valor de término independiente de "x" en el desarrollo de :

$$\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^5$$

A) 10 B) 14 C) 15 D) 20 E) 6

18 En el siguiente binomio $(x^3y+x^2y^3)^{23}$.

Determinar : $\frac{T_{10}}{T_{15}}$

A) 2 B) 1 C) $\frac{2}{3}$ D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{3}{2}$

19 ¿Qué lugar ocupa el término que tien como grado absoluto 18 en el desarrollo de: $(x^2+5y)^{15}$?

A) 11 B) 12 C) 13 D) 14 E) 15

20 Hallar el penúltimo término de: $(nx^2-y^n)^{2n}$, sabiendo que la suma de coeficientes es: 6 561

A) x^2y^4 B) $-x^2y^4$ C) $-4x^2y^4$ D) $-32x^2y^4$ E) $-8x^2y^4$

TAREA DOMICILIARIA

01 Si el tercer término del desarrollo $\left(2a+\frac{3}{x}\right)^n$ tiene como coeficiente la octava parte del coeficiente del cuarto término . Hallar "n".

A) 12 B) 14 C) 20 D) 22 E) 18

02 Determinar el número de términos racionales enteros que posee el desarrollo de: $\left(\frac{x^2}{y}+\frac{y}{x}\right)^7$

A) 1 B) 4 C) 5 D) 3 E) 2

03 Determinar el término racional en el desarrollo de : $(\sqrt{2}+\sqrt[3]{2})^5$

A) 30 B) 20 C) 10 D) 40 E) 80

04 Calcule el número de términos del desarrollo de : $(x^5+x^{-2})^n$, si uno de los términos centrales contiene a "x^{17}".

A) 9 B) 10 C) 11 D) 12 E) 13

05 hallar el valor de :

$$\binom{-1998}{1}+\binom{-1997}{2}+\binom{-1996}{3}+\ldots\ldots\ldots+\binom{-1}{1998}$$

A) 1 B) -1 C) 0 D) 1998 E) -1998

06 Determinar el valor de «$a+b$» ; en :

$$C_0^{1998}-C_2^{1999}+C_4^{1999}-\ldots\ldots-C_{1998}^{1999}=a^b$$

A) 341 B) 1001 C) 623 D) 729 E) 1331

07 Reducir :

$$\underbrace{C_0^nC_{100}^n+C_1^nC_{99}^{n-1}+C_2^nC_{98}^{n-2}+\ldots\ldots}_{101\ sumandos}$$

A) C_{50}^n B) $2^{100}C_{100}^n$ C) C_{200}^n D) $(-n)^{n+1}$ E) 1

08 Reducir :

$$C_0^{10}C_5^{15}+C_1^{10}C_6^{15}+C_2^{10}C_7^{15}+\ldots\ldots\ldots+C_{10}^{10}C_{15}^{15}$$

A) C_{15}^{25} B) 0 C) -1 D) C_{50}^{70} E) 1

09 Reducir :

$$S=\frac{\left[\frac{C_0^n}{2}+\frac{C_1^n}{3}+\frac{C_2^n}{4}+\frac{C_3^n}{5}+\ldots+\frac{C_n^n}{n+2}\right]}{n\times2^{n+1}+1}(n+1)(n+2)$$

A) -1 B) $(-1)^n$ C) $(-1)^{n+1}$ D) $(-n)^{n+1}$ E) 1

SEGUNDA PRACTICA DIRIGIDA

01 Señalar el valor de:

$$\sqrt[4!+3!]{\frac{(2!)^{2!}(3!)^{3!}(4!)^{4!}}{(0!+1!+2!)^{2(!)+3!}}}$$

A) 6 B) 8 C) 9 D) 12 E) 16

02 Si se cumple: $C_{3x}^{17}=C_{2x+2}^{17}$

obtener el producto de los valores de «x»

A) 6 B) 5 C) 8 D) 12 E) 20

03 Reducir: $\frac{n!+2(n-1)!}{n!+(n+1)!}$

A) 1 B) n C) $\frac{1}{n}$ D) $n+1$ E) $n-1$

04 Calcular «x», si se cumple:

$$\left[\frac{(x+1)!}{x(x-1)!}\right]!=362\,880$$

A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

05 Señalar el valor de «x» en:

$$\{(x-1)!\}^{x!}=2(2!+3!+4!)$$

Dar como respuesta: C_x^{5x}

A) 5 *B) 125* *C) 225* *D) 455* *E) 910*

06 Si: $\frac{(x+3)!}{n!}=(3!+1!)(0!+2!)(4!)$

calcular $n!$

A) 1 *B) 6* *C) 24* *D) 120* *E) 720*

07 Mencionar el valor de:

$$\frac{C_{13}^{21}+C_{6}^{21}}{C_{13}^{18}+C_{6}^{18}+C_{7}^{19}+C_{12}^{20}}$$

A) 1 *B) 2* *C) 0,5* *D) 1,5* *E) 2,5*

08 Indicar el desarrollo de: $(x+a)^4$

A) $x^4+2x^3a+4x^2a^2+2xa^3+a^4$
B) $x^4+x^3a+2x^2a^2+xa^3+a^4$
C) $x^4+4x^3a+6x^2a^2+4xa^3+a^4$
D) $x^4+2x^3a+3x^2a^2+2xa^3+a^4$
E) $x^4+x^3a+3x^2a^2+xa^3+a^4$

09 Encontrar el término de lugar **11** en el desarrollo de: $(a+b)^{15}$

A) $1\,001a^5b^{10}$ B) $2\,002a^5b^{10}$ C) $3\,003a^5b^{10}$
D) $2\,002a^{10}b^5$ E) $3\,003a^{10}b^5$

10 El séptimo término del desarrollo de $(a+b)^9$ es ma^rb^s. Calcular: $m+r+s$

A) 73 *B) 83* *C) 93* *D) 77* *E) 87*

11 Señalar el término de lugar **5** en la expansión de: $(n+n^{-1})^8$

A) $70n$ B) $70n^2$ C) 70 D) $70n^{-1}$ E) $70n^{-2}$

12 Proporcionar la suma de los coeficientes del desarrollo en: $(x+y)^9$

A) 64 *B) 128* *C) 256* *D) 512* *E) 1 024*

13 Calcular la suma de los coeficientes de los tres primeros términos del desarrollo de:

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^{10}$$

A) 16 *B) 25* *C) 55* *D) 56* *E) 65*

14 El desarrollo de $(ax^2+3y)^n$ tiene **12** términos, el término que contiene x^{10} posee coeficiente **1 386**. Obtener el valor de «*a*»

A) 2 *B) 1/2* *C) 3* *D) 1/3* *E) –2*

15 En la expansión de: $(2x+\sqrt{x})^8$, el coeficiente del término de grado **5** es:

A) 56 *B) 64* *C) 102* *D) 112* *E) 132*

16 Mostrar el término constante en la expansión de:

$$\left(x^4+\frac{\sqrt{2}}{x^2}\right)^{12}$$

A) 2 970 *B) 2 790* *C) 7 290* *D) 7 920* *E) 7 970*

17 En el desarrollo de $\left(a+\frac{b}{4}\right)^{14}$ hay dos términos consecutivos que tienen igual coeficiente. Determinar este coeficiente común.

A) $\frac{16}{91}$ B) $\frac{91}{16}$ C) $\frac{41}{34}$ D) $\frac{81}{16}$ E) $\frac{16}{71}$

18 En la expansión de: $(x+1)^{43}$, los coeficientes de los términos de lugares $(2m+1)$ y $(m+2)$ son iguales. Señalar el valor de «*m*»

A) 11 *B) 12* *C) 13* *D) 14* *E) 15*

19 Al desarrollar la sexta potencia de un binomio, se sabe que: $T_5=2160a^4x^{12}$ y el último: $64x^{18}$. Obtener T_1

A) $729a^{12}$ B) $64a^6$ C) $27a^6$ D) $125a^6$ E) $4\,096a^6$

20 Indicar el coeficiente del término de lugar **9**, a partir del extremo final en el desarrollo de:

$$\left(x-\frac{1}{x}\right)^{17}$$

A) 24 310 *B) 24130* *C) –24 310* *D) –24130* *E) –24010*

TERCERA PRACTICA DIRIGIDA

01 Indique verdadero (**V**) o falso (**F**) en las proposiciones:

( ) $1!+2!+3!=6!$
( ) $C_x^7=C_3^7 \Rightarrow x=4$
( ) $3!!=720$

A) FVV *B) VFF* *C) FFV* *D) FVF* *E) VVF*

02 Calcular el valor de «*n*».

$$\frac{(n+2)!+(n+1)!+n!}{(n+1)!+n!}=5$$

A) 3 *B) 2* *C) 1* *D) 0* *E) 4*

03 Calcular la suma de los valores de «*x*» que verifica la igualdad:

$$C_3^x=2x$$

A) 2 *B) –3* *C) 4* *D) 5* *E) 0*

04 Efectuar la suma:

$$S=\frac{10!-9!}{8!}+\frac{9!-8!}{7!}+...+\frac{2!-1!}{0!}$$

A) 270 B) 276 C) 285 D) 290 E) 294

05 Calcular el grado absoluto del octavo término en el desarrollo de $(3x + y^2)^{10}$

A) 12 B) 17 C) 15 D) 16 E) 13

06 Hallar el término que contiene a x^{73} en el desarrollo de:

$$\left(x^5y^3+\frac{x}{y}\right)^{17}$$

A) $560\,x^{73}y^{36}$ B) $580\,x^{73}y^{34}$ C) $610\,x^{73}y^{32}$
D) $620\,x^{73}y^{30}$ E) $680\,x^{73}y^{29}$

07 En el desarrollo del binomio $\left(\sqrt[3]{a^2}-\frac{1}{a}\right)^{16}$, proporcione el término independiente.

A) 4004 B) 3 003 C) 5 005 D) –4 004 E) 6 006

08 Sea el binomio $\left(\sqrt[5]{xy}+\frac{1}{x}\right)^n$. Si la suma de los coeficientes de los términos primero, segundo y tercero es *46*, señale el número de términos del desarrollo.

A) 8 B) 9 C) 10 D) 11 E) 12

09 Encuentre el término central en la expansión del binomio $\left(\frac{1}{x}-\sqrt{x}\right)^{12}$

A) $921x^3$ B) $920x^{-6}$ C) $918x^{-4}$ D) $924x^{-3}$ E) $926x^{-2}$

10 Determine el número de términos que son fraccionarios en el desarrollo de:

$$\left(x^6-2x^2+\frac{1}{x^2}\right)^{60}$$

A) 22 B) 23 C) 24 D) 25 E) 26

11 En el desarrollo del binomio $\left(x\sqrt{x}+\frac{1}{x^4}\right)^n$, el coeficiente del tercer término es mayor que el coeficiente del segundo término en *44* unidades. Calcular el término que no contiene «x».

A) 150 B) 141 C) 161 D) 165 E) 180

12 Hallar:

$$S=3C_1^n+7C_2^n+11C_3^n+\ldots+(4n-1)C_n^n$$

A) $2^n.n-2^{n-1}+1$ B) $2^{n+1}.n-2^n+1$ C) $2^{n-1}-2^n.n$
D) $2^n.n-2^{n-1}$ E) $2^{n-1}+2^{n-2}+1$

13 ¿Qué valor asume «n» de manera que en el desarrollo de $(x^n+x^{-2})^{17}$, el producto de los términos centrales sea constante?

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{1}{2}$ C) 2 D) 4 E) 5

14 La suma de coeficientes del desarrollo:

$$\left[(x^2+2xy+y^2)^2\right]^n,\ \text{es } 2^{24}.$$

Hallar el antepenúltimo término.

A) $271x^3y^{21}$ B) $276x^2y^{22}$ C) $277x^5y^{19}$
D) $278x^4y^{20}$ E) $280x^6y^{18}$

15 El número de términos del desarrollo $(x + y + z + w)^3$, es:

A) 16 B) 20 C) 10 D) 18 E) 21

16 Si en el desarrollo del binomio $(ax^a + bx^b)^n$ los términos de lugares «$a+3$» y «$b-1$» equidistan de los extremos, además la suma de todos los coeficientes es *27*, calcular la suma de todos los exponentes de la variable «x» en su desarrollo.

A) 20 B) 18 C) 16 D) 14 E) 15

17 Suponga que se quiere expandir la expresión $(x + y + z)^{17}$. ¿Cuál es el coeficiente del término $x^2y^5z^{10}$?

A) 103 103 B) 240 042 C) 408 408
D) 671 125 E) 362 362

18 Calcule el coeficiente de x^8 en el desarrollo de $(1 + x^2 + x^4)^8$

A) 182 B) 232 C) 266 D) 320 E) 418

19 Dado el binomio $(x^5 - y^{4n})^8$, en la expansión un término es de la forma: $ax^{10}y^{48}$.

Dar el valor de: $a + n$.

A) 27 B) 26 C) 24 D) 30 E) 20

20 Sea: $P(x)=(1+x)+(1+x)^2+(1+x)^3+\ldots+(1+x)^{13}$

Calcular el coeficiente de x^2.

A) 364 B) 365 C) 366 D) 367 E) 368

CLAVES DE LA PRIMERA PRACTICA				
01) B	02) B	03) *	04) *	05) *
06) *	07) C	08) D	09) C	10) A
11) C	12) C	13) E	14) A	15) D
16) E	17) A	18) B	19) C	20) D
01) E	02) E	03) D	04) B	05) B
06) A	07) B	08) A	09) E	

CLAVES DE LA SEGUNDA PRACTICA									
1)D	2)A	3)C	4)C	5)D	6)E	7)B	8)C	9)C	10)C
11)C	12)D	13)D	14)D	15)D	16)D	17)B	18)D	19)A	20)C

CLAVES DE LA TERCERA PRACTICA									
1)D	2)A	3)D	4)C	5)E	6)E	7)C	8)C	9)D	10)D
11)D	12)B	13)C	14)B	15)B	16)C	17)C	18)C	19)D	20)A



OBJETIVOS :

* Comprensión y manejo del análisis combinatorio.

* Formular y resolver problemas de análisis combinatorio que se presentan en su vida cotidiana

* Aplicar los métodos del conteo para resolver problemas diversos .

* Definir los conceptos básicos asociados a un experimento aleatorio .

* Enumerar y diferenciar los distintos conceptos de probabilidad .

* Ilustrar e interpretar la idea de independencia de sucesos .

* Utilizar la combinatoria como herramienta para el Cálculo de Probabilidades .

INTRODUCCIÓN:

Combinatoria , rama de las matemáticas que estudia las posibles agrupaciones de objetos tomados de un conjunto dado; es de gran importancia en otras ramas de las matemáticas. Por ejemplo, se utiliza para el desarrollo del binomio de Newton; en la teoría de la probabilidad y en estadística (para calcular el número de casos posibles de un sistema). También tiene importantes aplicaciones en el diseño y funcionamiento de ordenadores o computadoras, así como en las ciencias físicas y sociales. De hecho, la teoría combinatoria es de gran utilidad en todas aquellas áreas en donde tengan relevancia las distintas maneras de agrupar un número finito de elementos.



Las variaciones y las combinaciones son distintas maneras de agrupar objetos. Si una persona saca dos bolas, de una en una, de una mesa de billar americano con tres bolas, hay seis posibles variaciones. En este caso el orden es importante, y es diferente elegir una bola azul y después una roja que una roja y luego una azul. Sin embargo, en las combinaciones el orden no importa y es la misma combinación sacar una bola roja y después una azul que al contrario. Por tanto, sólo hay tres posibles combinaciones.

ANÁLISIS COMBINATORIO

Es la parte de la matemática que estudia los diversos arreglos o selecciones que podemos hacer con los elementos de un conjunto dado, los cuales nos permitan resolver muchos problemas prácticos. Por ejemplo , podremos averiguar cuántos números diferentes de teléfonos o placas diferentes se pueden formar utilizando un conjunto dado de letras y dígitos . Finalmente uno de los propósitos más importantes de este capítulo es el de estudiar ciertos temas indispensables pare poder comprender y resolver los problemas de probabilidades.

PRINCIPIOS FUNDAMENTALES

Nos permiten determinar el números de casos posibles que tenemos para realizar un evento.

En la mayoría de los problemas de análisis combinatorio se observa que una operación o actividad aparece en forma repetitiva y es necesario conocer las formas o maneras que se puede realizar dicha operación. Para dichos casos es útil conocer determinadas técnicas o estrategias de conteo que facilitarán el cálculo señalado.

El análisis combinatorio también se define como una manera práctica y abreviada de contar; las operaciones o actividades que se presentan son designadas como eventos o sucesos.

EJEMPLO :

* Señalar las maneras diferentes de vestir de una persona, utilizando un número determinado de prendas de vestir .

* Ordenar **5** artículos en **7** casilleros

* Contestar **7** preguntas de un examen de **10**

* Designar **5** personas de un total **50** para integrar

una comisión .

* Sentarse en una fila de **5** asientos **4** personas

* Escribir una palabra de **7** letras utilizando **4** consonantes y **3** vocales

I) PRINCIPIO DE MULTIPLICACIÓN

Si un evento «*A*» se puede realizar de «*m*» maneras y para cada una de estas , otro evento «*B*» se puede efectuar de «*n*» maneras ,. entonces los eventos «*A*» y «*B*» se pueden efectuar simultáneamente (o uno seguido del otro) , de:

«m × n» MANERAS.

NOTA :

Este principio se puede generalizar para más de 2 sucesos .

EJEMPLO 1:

«Thalía» tiene **3** blusas diferentes y **4** faldas de diferentes modelos ; de cuántas maneras diferentes se puede vestir.

RE SOLUCIÓN:

* Como cada falda puede ponerse con cada una de las blusas , luego el *número de maneras diferentes* de vestirse será :

$$3 \times 4 = 12$$

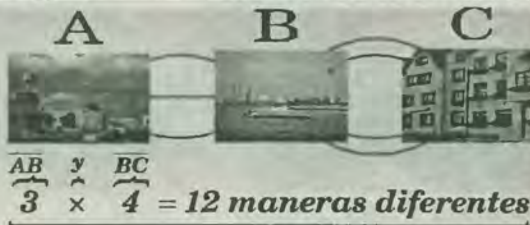


EJEMPLO 2 :

De una ciudad «*A*» a una ciudad «*B*» hay **3** caminos diferentes y de la Ciudad «*B*» a la ciudad «*C*» , **4** caminos diferentes. ¿De cuántas maneras se podrá viajar de «*A*» a «*C*»?

RESOLUCIÓN:

* Como se desea viajar de «*A*» a «*C*», necesariamente tenemos que pasar por «*B*»,es decir debemos realizar simultáneamente los viajes $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ (en forma conjunta); por que aplicaremos el principio de multiplicación , así :



$$\underbrace{\overline{AB}}_{3} \ \underbrace{y}_{\times} \ \underbrace{\overline{BC}}_{4} = 12 \text{ maneras diferentes}$$

$$\text{de } A \xrightarrow{a} C$$

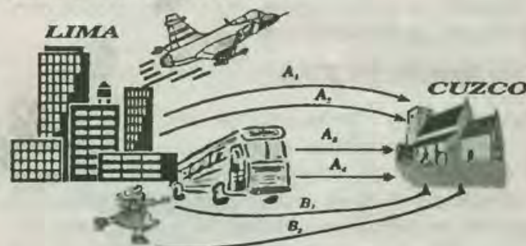
PRINCIPIO DE ADICIÓN

Si un evento «*A*» ocurre o se puede efectuar de «*m*» maneras diferentes y otro evento «*B*» se puede efectuar de «*n*» maneras diferentes , entonces «*A*» ó «*B*», se puede efectuar (en forma no simultánea) de «*m+n*» maneras diferentes.

EJEMPLO 1:

«Chary» desea viajar de LIMA a CUZCO; si dispone de **4** líneas aéreas y **2** líneas terrestres ¿ de cuántas maneras diferentes puede realizar el viaje?

RESOLUCIÓN:



Para viajar de ***Lima*** a ***Cuzco*** a, puede hacerlo por línea aérea (**4** maneras) o por línea terrestre (**2** maneras) , considerando que al elegir un transporte ya no se podrá utilizar otro en forma simultánea , es decir podrá utilizar ya sea A_1 ó A_2 ó A_3 ó A_4 ó B_1 ó B_2.

$$\Rightarrow \text{Maneras de viajar} : 4 + 2 = 6$$

EJEMPLO 2:

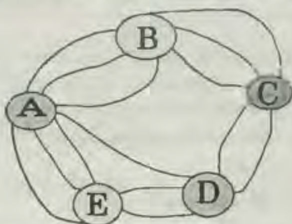
Supongamos que proyectamos un viaje y debemos decidir entre el transporte por bus o tren . Si hay **7** rutas para el tren y **8** para el auto. ¿De cuántas maneras podremos cumplir con el viaje?

RESOLUCIÓN :

* Al igual que el ejemplo anterior ; al escoger una ruta se tendrá que excluir a otra , por lo tanto :
NÚMERO DE MANERAS : ***7+8 = 15***

EJEMPLO 3 :

De cuantas maneras diferentes podra viajar una persona de ***A*** a ***E*** sin pasar ni regresar por el mismo camino?



RESOLUCION :

* analizando todas las posibilidades se obtendrá:

$$\left.\begin{array}{ll} ABCDE: & 3\times3\times2\times2=36 \\ ADE: & 1\times2=2 \\ AE: & =3 \end{array}\right\}(+)$$

→ ***TOTAL DE MANERAS : 41***

MÉTODOS DE CONTEO

En diferentes casos se tomará de algún conjunto parte de sus elementos o todos ellos, para formar diferentes agrupaciones, que se van a distinguir por el orden de sus elementos o por la naturaleza de algunos de ellos. Si los elementos que forman una agrupación son diferentes entre si, serán llamados agrupaciones sin repetición y si alguno de ellos son iguales se dirá que son agrupaciones con repetición.

Entre los métodos de conteo más conocidos tenemos: ***Permutación*** y ***Combinación .***

PERMUTACIÓN $\left(P_k^n\right)$

Es cada uno de los diferentes arreglos que pueden hacerse con una parte de los elementos o con todos los elementos de un conjunto. Conviene observar que el orden es una característica de especial importancia en una permutación. Cuando variamos el orden de los elementos se dice que permutamos dichos elementos.

Es importante resaltar que el ***orden*** es una característica importante en la permutación, cuando variamos el orden de los elementos se dice que permutamos dichos elementos.

EJEMPLO 1:

Sea el conjunto $A=\{a\ ;\ b\ ;\ c\ ;\ d\}$, ¿cuántas ordenaciones sin repetición se pueden obtener con 2 de sus elementos?

RESOLUCIÓN :

* Lo que resulta es:

ab ; ac ; ad ; ba ; bc ; bd ; ca ; cb ; cd ; da ; db ; dc.

* Son ***12*** en total.

EJEMPLO 2:

Determinar los diferentes arreglos o permutación que puede hacerse con las letras ***m; n*** y ***p*** tomados de 2 en 2 .

RESOLUCIÓN :

* ***1ER METODO :***

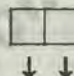
tabulando encontraremos los siguientes arreglos:

mn ; nm ; mp ; pm ; np ; pn

→ ***# arreglos : 6***

* ***2DO METODO :***

(Principio de la Multiplicación)



arreglos: 3×2=6

* El primer casillero puede ocupar cualquiera de las ***3*** letras existiendo : ***3*** posibilidades.

* El segundo casillero puede ocupar cualquiera de las ***2*** letras que quedan : 2 posibilidades.

PERMUTACIONES LINEALES CON ELEMENTOS DIFERENTES

«El número de permutaciones de ***n*** objetos diferentes tomados de ***k*** en ***k*** está dado por la fórmula:

$$P_k^n = \underbrace{n(n-1)(n-2)...(n-k+1)}_{\text{"}k\text{" factores}}\ ;\ (n \geq k)$$

Al multiplicar al numerador y denominador por $(n-k)!$ se obtiene :

$$\boxed{P_k^n = \frac{n!}{(n-k)!}}\quad ;\quad (n \geq k)$$

EJEMPLO 1 :

Calcular el número de palabras (no necesariamente pronunciables) que se pueden formar con las letras ***«L ; E ; Y»...***

RESOLUCIÓN :

1ER MÉTODO : Las palabras son :

LEY ; LYE ; ELY ; LYE ; YLE ; YEL

En total se han formado ***6*** palabras.

2DO ***MÉTODO :*** Por la fórmula:

$$P_3^3 = \underbrace{3\times2\times1}_{3\ factores} = 6$$

EJEMPLO 2:

Un entrenador de voley dispone de **7** jugadores para jugar en cualquier posición. ¿Cuántas diferentes quintas de voley podrá formar ?

RESOLUCIÓN:

* El resultado es igual al número de permutaciones de 7 objetos tomados de *5* en *5*.

$$\begin{pmatrix} \textit{número de} \\ \textit{quintas} \end{pmatrix} = P_5^7 = \underbrace{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3}_{5\ factores} = 2520$$

PERMUTACIÓN CON ELEMENTOS REPETIDOS

El número de permutaciones distintas de n elementos tomados de n en n en donde hay un primer tipo de a objetos iguales entre sí ; b objetos iguales entre sí de un segundo tipo , y así sucesivamente hasta z objetos iguales entre sí de un último tipo , entonces:

$$P^n_{a,b,\dots,z} = \frac{n!}{a! \times b! \times \dots \times z!}$$

* donde : $a + b + \dots + z = n$

EJEMPLO 1:

Calcular el número de permutaciones que se pueden formar con todas las letras de la palabra ***OSO***.

RESOLUCIÓN :

* En la palabra encontraremos *5* letras de las cuales se repite la letra «*O*» , luego :

* Tenemos que: $n = 3$.... *(total de letras)*
$a = 2$ ....*(2 letras O)*
$b = 1$. ....*(1 tetra S)*

* apliquemos la fórmula :

$$P^3_{2;1} = \frac{3!}{2! \times 1!} = 3 \text{ permutaciones}$$

* Las cuales son: {***OSO ; SOO ; OOS***}

EJEMPLO 2 :

de cuántas formas se pueden ordenar **2** cubos rojos, ***3*** cubos verdes y **2** azules .

RESOLUCIÓN :

* En total hay **7** cubos para ordenarlos uno a continuación de otro ; pero se repiten los colores , por lo que los ordenamientos distintos serán :

$$P^7_{2;3;2} = \frac{7!}{2! \times 3! \times 2!} = 210$$

EJEMPLO 3 :

Un hombre reparte billetes entre *10* muchachos , en la siguiente forma : *1* de ***S/.200*** , **2** de ***S/.100*** , *3* de ***S/.50*** , y *4* de ***S/.20***.

De cuántas maneras puede repartirse el dinero si a cada muchacho le toca un billete?

RESOLUCIÓN :

* Si todos los billetes fuesen diferentes, habría *10!* maneras en las cuales cada muchacho recibiría su billete. Pero puesto que hay grupos de uno , dos , tres y cuatro billetes iguales , tenemos :

$$P^{10}_{1;2;3;4} = \frac{10!}{1! \times 2! \times 3! \times 4!} = 12600 \text{ permutaciones}$$

PERMUTACIONES CIRCULARES

En nuestra discusión hasta aquí hemos supuesto que una permutación se forma poniendo un objeto después de otro a lo largo de una línea . Hay así un primer término y un último término . Sin embargo, si los **objetos** se **colocan alrededor** de un **círculo**, **no** hay primero ni último término, y las fórmulas anteriores **no son aplicables** directamente. Un arreglo circular presenta un nuevo aspecto porque una rotación no cambiaría la posición relativa de un objeto con respecto a los demás . Entonces, una rotación no constituye una permutación diferente.

Para encontrar el número de maneras de colocar alrededor de un círculo n objetos diferentes, escogemos primero una ***posición*** fija para uno de los objetos. Los otros pueden entonces colocarse en sus posiciones en $(n - 1)!$ maneras diferentes. Seis personas por ejemplo, pueden formar un círculo en *5!* maneras. Podrían , por supuesto , formar una línea en *6!* maneras.

CONCLUSIÓN:

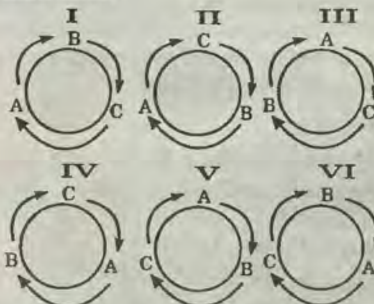
*«El número de permutaciones circulares de «**n**» objetos es **(n – 1)!** ».*

EJEMPLO 1:

¿De cuántas maneras se podrán sentar las personas **A, B** y **C** en una mesa circular de **3** asientos?

RESOLUCIÓN 1:

* Suponiendo que fuese similar a la permutación lineal tendríamos:



Pero como la permutación es con respecto a la mesa, entonces el caso ***I, IV*** y ***V*** es el mismo igualmente

el caso *II, III* y *VI* es la misma forma.

maneras diferentes es : (3 – 1)! = 2

EJEMPLO 2 :

De cuántas maneras pueden cuatro parejas sentarse alrededor de una mesa circular si los hombres y las mujeres están alternados?

RESOLUCIÓN :

* Pensemos primero en asignar una mujer, por ejemplo , a una silla. Esto determina ***3*** lugares particulares para las otras mujeres, y ***4*** lugares particulares para los hombres . Las mujeres, por tanto, pueden asignarse a sus lugares de ***3 !*** maneras, y los hombres en ***4!*** maneras . Aplicando el principio fundamental obtenemos el resultado ***3!×4! = 144.***

COMBINACIÓN

Una parte o la totalidad de un grupo de objetos se llama una **combinación** del grupo. Una combinacion , por lo contrario de una permutación, no hace ***referencia al orden***. Por ejemplo , en un comité seleccionado de un grupo de personas, nuestro interés esta en los individuos y no en el orden de selección u otros arreglos en los hombres del comité. Si todos los objetos de un grupo se toman a un tiempo, por supuesto , existe una sola combinación. Sin embargo , tomando solo una parte de los objetos cada vez , hay más de una combinaciones. Nos interesa como determinar el número de combinaciones para esta situación.

Las letras ***a ; b ; c ; d*** , tomadas tres a la vez tienen las siguientes combinaciones:

abc abd acd bcd

Cambiando el orden de alguna de estas combinaciones no se hace una nueva combinación . Asi , ***abc*** *y* ***bca*** *son* dos permutaciones de la misma cosa , o de la misma combinación.

Es decir una combinación es cada uno de los diferentes grupos que se pueden formar con los elementos de un conjunto de modo que cualquiera de ellas difiera por lo menos en un elemento.

EJEMPLO 1:

Sean los elementos ***a ; b ; c*** y ***d*** las combinaciones de los ***4*** elementos tomados de 2 en 2 son :

ab ; ac ; ad ; bc ; bd ; cd

Notamos que no nos interesa el orden , osea:

a ; b = b ; a

NÚMERO COMBINATORIO

El número de combinaciones de ***n*** objetos diferentes tomados de ***k*** en ***k*** está dado por:

$$C_k^n = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-k+1)}{k!}\ ;\ k \le n$$

Donde C_k^n ó $\binom{n}{k}$ simboliza el número combintatorio siendo n y ***k*** números naturales $(n \le r)$.

De la relación al multiplicar el numerador y denominador por ***(n – k)!*** , se obtiene ***:***

$$C_k^n = \frac{n(n-1)(n-2)....(n-k+1)}{k!(n-k)!}(n-k)!$$

$$\rightarrow C_k^n = \frac{n!}{k!(n-k)!}\ ;\ k \le n$$

Del resultado notamos que por cada combinación de ***k*** objetos seleccionados entre ***n*** elementos diferentes existe un grupo o combinación correspondiente de ***(n – k)*** objetos que no son seleccionados siendo estas las combinaciones complementarias, entonces:

*«El número de combinaciones de **n** elementos diferentes tomados de **k** en **k** es igual al número de combinaciones de **n** elementos diferentes tornados de **(n – k)** en **(n – k)**».*

$$\boxed{C_k^n = \frac{n!}{k!(n-k)!} = C_{n-k}^n}$$

EJEMPLO 1:

se desea saber cuántas combinaciones se puedan realizar con los elementos: ***a ; b ; c ; d ; e*** tomados de 2 en 2 .

RESOLUCIÓN :

* como se trata de combinaciones luego no interesa el orden de ubicación de elementos , es decir ***ab = ba***, entonces las combinaciones serán:

$$\left.\begin{array}{l} ab\ ;\ ac\ ;\ ad\ ;\ ae \\ bc\ ;\ bd\ ;\ be \\ cd\ ;\ ce \\ de \end{array}\right\} 10 \text{ combinaciones}$$

* aplicando el número combinatorio :

$$C_2^{10} = \frac{\overbrace{10 \times 9}^{2\ FACTORES}}{2 \times 1} = 10$$

EJEMPLO 1:

De un grupo de ***4*** estudiantes, cuántos grupos diferentes de 2 alumnos podrían formarse.

RESOLUCIÓN:

* Sean : ***A , B , C*** y ***D*** los alumnos , los diferentes grupos de 2 serían: ***AB ; AC ; AD ; BC ; BD*** y ***CD*** o sea ***6*** grupos.

* ***Por fórmula :*** $C_2^4 = \frac{4 \times 3}{2 \times 1} = 6$

EJEMPLO 3 :

Si disponemos de *5* puntos no colineales , ¿cuál es el máximo número de triángulos que se podrán formar?

RESOLUCIÓN :

* Para dibujar un triángulo solo es necesario *3* puntos en el plano , luego se escogerán *3* puntos ($k = 3$) de un total de *8* puntos ($n = 5$). Además no importa el orden , ya que el triángulo *ABC* es igual al △ *CBA*; por lo tanto se trata de una combinación.

$$C_3^5 = \frac{5 \times 4 \times 3}{3 \times 2 \times 1} = 10$$

EJEMPLO 4 :

Una señora tiene *3* frutas : manzana , fresa y piña. ¿Cuántos sabores diferentes de jugo podrá preparar con estas frutas ?

Fresa *(F)* , Piña *(P)* , Manzana *(M)*

RESOLUCIÓN:

MÉTODO 1 : (en forma gráfica)

* Cuando se escoge una fruta de las tres, los sabores son *3* : ***F , P , M***

* Cuando se escoge *2* de las tres frutas, los sabores son *3* : ***FP , FM , PM***

* Cuando se escoge las *3* frutas los sabores son *1*: ***FPM***

→ Total de sabores diferentes : $3 + 3 + 1 = 7$

MÉTODO 2 : (*Empleando combinaciones*)

* Se puede escoger una fruta de las tres ó *2* frutas de las tres ó las tres frutas de las tres, además en este caso no importa el orden; por lo tanto usamos el principio de adición aplicado a la combinación:

$$\#\,maneras\ diferentes = C_1^3 + C_2^3 + C_3^3$$

$$\rightarrow \#\,maneras\ diferentes = 2^3 - 1 = 7$$

NOTA : $\boxed{C_1^n + C_2^n + C_3^n + \ldots + C_n^n = 2^n - 1}$

EJEMPLO 4 :

Se desea formar un comité de *8* seleccionando *6* físicos y *2* matemáticos de un grupo de *10* físicos y *4* matemáticos. ¿De cuántas maneras podrá seleccionarse?

RESOLUCIÓN:

1°) Seleccionamos *6* físicos entre *10* en C_6^{10} formas.

$$C_6^{10} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{1 \times 2 \times 3 \times 4} = 210$$

2°) En forma similar seleccionamos *2* matemáticos entre *4* de:

$$C_2^4 = \frac{4 \times 3}{1 \times 2} = 6$$

3°) Por el teorema fundamental de multiplicación

$$\#\,comités = 210 \times 6 = 1260$$

DIFERENCIAS ENTRE PERMUTACIONES Y COMBINACIONES

las combinaciones se diferencian por sus elementos; en tanto que las permutaciones por el orden de los mismos .

* para las permutaciones el orden de sus elementos si interesa , ya que no es lo mismo decir *23* que *32.*

* para las combinaciones el orden no interesa .

* dos combinaciones son diferentes sólo si difieren por lo menos en un elemento :

abc ; abd ; bcd ; acd

COMBINACIONES CON REPETICIÓN

Supongamos que Eryck , Lela y Roy desean un refresco , y disponen refrescos de naranja , manzana ,piña y chicha ; si a ninguno de ellos le gusta beber refrescos mixtos o combinados. ¿de cuántas maneras pueden adquirir los refrescos ?

RESOLUCIÓN:

En un primer razonamiento pensariamoss, que la respuesta es C_3^4 ; pues este sería el modo de escoger *3* sabores diferentes de entre un total de *4* sabores pero esto no ocurre así . Ya que dos de ellas o las tres podrían escoger el mismo sabor de refresco. Las combinaciones de *4* objetos , tomadas de *3* en *3* con las características ya mencionadas , serían como sigue (*naranja(N), manzana(M), piña(P) , chicha(C)*):

NNN ; NNM ; MMN ; CCN ;NMP
MMM; NNP ; MMP ; CCM ; NMC
PPP ; NNC ; MMC ; CCP ; NMC
CCC ; MPC
} ***20 maneras***

Como podemos observar estamos tomando elementos repetidos ; esto *se* debe *a* la preferencia por el sabor de cada persona. Así , por ejemplo, Eryck y Lela podrían coincidir en pedir ambos refrescos de piña o las tres podrían pedir simultáneamente refresco de chicha, etc. Es así como la respuesta de este problema es: *20* maneras distintas y se representa así: $CR_3^4 = 20$

Número de combinaciones con repetición de *4* elementos tomados de *3* en *3.*

Tambien podríamos decir que CR_3^4 *es* el número de maneras de escoger *3* objetos de *4* objetos distintos, siendo valido seleccionar el mismo objeto más de una vez.

Debemos aclarar que en esta última afirmación se

esta considerando que el número de objetos de cada clase es el suficiente como para poder tomar varias del mismo tipo en cada clase si así se requiere.

En general, CR_k^n : es el número de maneras de escoger k objetos o elementos distintos o no de un total de n objetos distintos dados.

Para calcular CR_k^n , emplearemos la siguiente expresión:

$$CR_k^n = C_k^{n+k-1} = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!\times k!}$$

EJEMPLO 1 :

En una heladería , se venden *4* tipos de helados ya envasados y Chary quiere comprar 2 helados (para ella y su hermano) ¿De cuántas maneras diferentes puede hacerlo?

RESOLUCIÓN :

$$CR_2^4 = C_2^{4+2-1} = \frac{(4+2-1)!}{(4-1)!\times 2!} = \frac{5!}{6\times 2} = 10$$

EJEMPLO 2 :

Indica cuántas son las soluciones enteras no negativas de la ecuación $x + y + z = 7$

RESOLUCIÓN:

$$CR_3^7 = C_3^{7+3-1} = C_3^9 = \frac{9\times 8\times 7}{3\times 2\times 1} = 84$$

EJEMPLO 3 :

Se tiene *5* esferas iguales y *2* cajas ¿ De cuántas formas diferentes se puede guardar las 5 esferas en las 2 cajas , si se sabe que en una caja se pueda guardar una o más esferas?

RESOLUCIÓN:

$$CR_2^5 = C_2^{5+2-1} = C_2^6 = \frac{6\times 5}{2\times 1} = 15$$

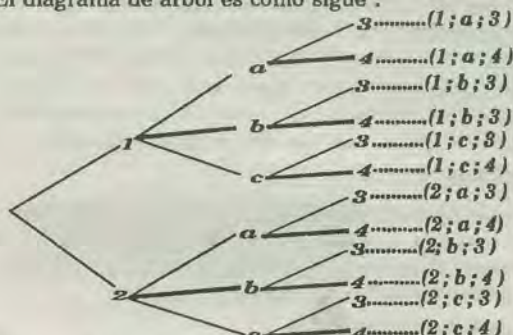
DIAGRAMAS DE ÁRBOL

Un diagrama de árbol es un recurso que se emplea para enumerar todas las posibilidades lógicas de una secuencia de sucesos , donde cada suceso puede ocurrir de un número finito de maneras. La construcción de diagramas de árbol se ilustra en los ejemplos siguientes:

EJEMPLO 1 :

Encontrar el conjunto producto de $A\times B\times C$, donde : $A = \{1; 2\}$, $B= \{a;b;c\}$ y $C = \{3;4\}$.

El diagrama de árbol es como sigue :

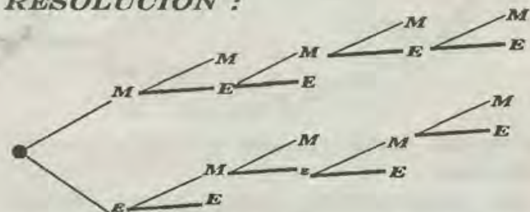


Observemos que el árbol se construye de izquierda a derecha , y que el número de ramas en cada punto corresponde al número de maneras en que puede ocurrir el suceso siguiente.

EJEMPLO 2:

Marcos y Enrique van a jugar un campeonato de tenis. El primero en ganar dos juegos seguidos o que gane un total de tres juegos, gana el torneo. El diagrama siguiente da varias formas en las cuales puede finalizar el campeonato.

RESOLUCIÓN :



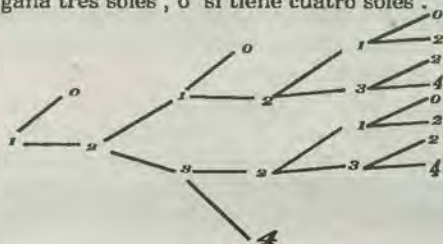
Observemos que existen *10* puntos extremos, los cuales corresponden a las *10* maneras en que puede finalizar el campeonato:

MM, MEMM, MEMEM, MEMEE, MEE, EMM, EMEMM, EMEME, EMEE, EE

La trayectoria desde el comienzo del árbol al punto extremo describe quien gane determinado juego durante el torneo.

EJEMPLO 3 :

Un hombre tiene tiempo de jugar ruleta por lo menos cinco veces . En cada ocasión gana o pierde un sol. El hombre comienza con un sol y se detendrá antes de la quinta ocasión, si pierde todo su dinero o si gana tres soles , o si tiene cuatro soles .



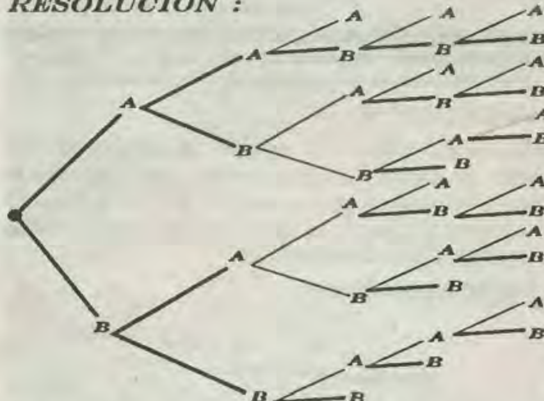
El diagrama de árbol describe la manera en la cual las apuestas puede desarrollarse. Cada número del diagrama representa los pesos que tiene en ese punto.

Las apuestas pueden tener lugar de *11* maneras diferentes. Notemos que dejará el juego antes de la quinta ocasión , en tres de los casos solamente.

EJEMPLO 4 :

Los equipos *A* y *B* juegan en un torneo de baloncesto. El equipo que gane los **3** primeros juegos , gana el torneo. Encontrar el número de maneras posibles **en las cuales** puede finalizar el torneo.

RESOLUCIÓN :



El torneo puede finalizar de veinte maneras diferentes:

AAA, AABA, AABBA, AABBB, ABAA, ABABA, ABABB, ABBAA, ABBAB , ABBB BAAA , BAABA, BAABB, BABAA, BABAB, BABB, BBAAA, BBAAB, BBAB , BBB .

PROBABILIDADES

Muchos de los eventos que ocurren en la vida diaria no pueden ser predichos con exactitud desde antes por diversas razones, pues la mayoría de los hechos están influidos por factores externos. Además , existen aquellos sucesos que están directamente influidos por el azar , es decir , por procesos que no se está seguro de lo que va a ocurrir . Sin embargo, la probabilidad nos permite acercarnos a esos sucesos y estudiarlos , ponderando las posibilidades de su ocurrencia y proporcionando métodos para tales ponderaciones.

Precisamente, algunos de esos métodos proporcionados por la probabilidad nos llevan a descubrir que algunos sucesos tienen una mayor o menor probabilidad de ocurrir que la ponderación asignada a través del sentido común. Nuestros sentidos , la información previa que poseemos , nuestras creencias o posturas , nuestras inclinaciones , son algunos de los factores que intervienen para no permitirnos hacer ponderaciones reales y sistemáticas . La probabilidad nos permitirá estudiar los eventos de una manera sistemática y más cercana a la realidad, retribuyéndonos con información más precisa y confiable y, por tanto, más útil para las disciplinas humanas.

La teoría de probabilidad es una herramienta o modelo matemático no determinístico que analiza principalmente fenómenos que no responden una regla uniforme ni está basada en parámetros fijos. El estudio de Probabilidades nos permite hacer aseveraciones de situaciones de las cuales no estamos absolutamente seguros de lo que va a ocurrir pero expresan cierto grado de predicción.

MODELOS DETERMINÍSTICOS , son:

- Leyes de Kepler,
- Leyes gravitacionales , ... etc.

MODELOS NO DETERMINÍSTICOS, serían:

- Situación meteorológica,
- Accidentes de Tránsito, etc.

El cálculo de probabilidades sirve de andamiaje a la estadística matemática que es la fuente de varias disciplinas muy especializadas hoy en día, tales como: el diseño de experimentos, la teoría del muestreo, el control de calidad, la teoría de decisiones y en especial la investigation operativa.

Cuando se realiza un **experimento**, que es cualquier proceso que produce un resultado o una observación , se van a obtener un conjunto de valores. A este conjunto de valores que puede tomar una ***variable*** se le denomina **espacio muestral**.

Por ejemplo: Si se tiene un dado cualquiera, el espacio muestral ***(EM)*** es :

$$EM=\{1; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}.$$

Si existen más de una variable , el espacio muestral está formado por las combinaciones de valores de cada una de las variables.

Si tomamos un subconjunto cualquiera del espacio muestral tenemos lo que se denomina un **evento**, y si éste consta de un solo elemento entonces es un **evento elemental.**

Como se puede uno imaginar , existen eventos que siempre *w*, no importa el número de experimentos o su situación, ocurren, y en cambio existen otros que nunca ocurren. Los que siempre ocurren son los **eventos seguros,** y los que nunca son los **eventos imposibles.**

Sin embargo, no todos los resultados son al azar, pues si un experimento es cualquier proceso entonces los resultados pueden tomar cualquier tipo de valor . Por esta razón, se define como **experimento aleatorio** al proceso en el que se pueden predecir con certeza la ocurrencia de sus eventos , con excepción del seguro o del imposible Hay que hacer la observación que esta definición habla en términos generales y no específicamente sobre algún experimento en particular.

A aquélla variable que está asociada a un experimento de este tipo se le denomina **variable aleatoria.**

En cambio, a un experimento no aleatorio se le denomina **experimento determinístico.**

Cuando hablamos de varios eventos dentro del mismo experimento se pueden dar varios casos.

Si dos o más eventos no pueden ocurrir simultáneamente , se llaman **eventos mutuamente excluyentes** , es decir, que la intersección de ambos eventos es vacía.

Por otro lado, en ocasiones un evento o más eventos dependen de otro evento previo , es decir, un evento A ocurre dado que ocurrió un evento ***B***. Si existe este tipo de relación entre eventos se dice que son **eventos dependientes o condicionados** (el evento ***A*** depende del evento ***B***, o el resultado del evento ***A*** está condicionado al resultado del evento ***B***). Por otro lado , si no existe tal relación entre eventos se dice que son **eventos independientes.**

EXPERIMENTO ALEATORIO (ε)

Se denomina así a toda prueba o ensayo cuyos resultados no son predecibles sin haberse realizado previamente la prueba .

EJEMPLOS :

ε_1 **:** Si lanzamos una moneda al aire y observamos el resultado de la cara superior.

ε_2 **:** Lanzar un dado varias veces y observar que ambos resultados son distintos.

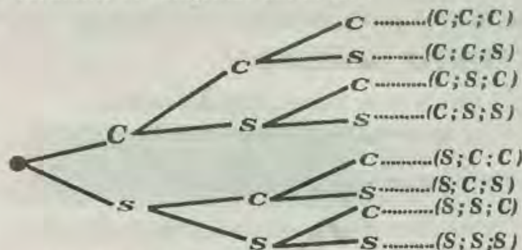
ESPACIO MUESTRAL (Ω) :

Es el conjunto de todos los resultados posibles de un expermento aleatorio.

EJEMPLOS :

ε_3**:** Lanzar una moneda **3** veces.

* Mediante el «diagrams del arbol»:



$$\Omega=\{(C;C;C),(C;C;S),(C;S;C),(C;S;S)$$
$$(S;C;C),(S;C;S),(S;S;C),(S;S;S)\}$$

Además : $n(\Omega)=8$

ε_4 : Lanzar dos dados legales(no trucados) y observar los resultados en la cara superior de ambos dados.

* Mediante la tabla de doble entrada:

D_1 / D_2	1	2	3	4	5	6
1	(1;1)	(1;2)	(1;3)	(1;4)	(1;5)	(1;6)
2	(2;1)	(2;2)	(2;3)	(2;4)	(2;5)	(2;6)
3	(3;1)	(3;2)	(3;3)	(3;4)	(3;5)	(3;6)
4	(4;1)	(4;2)	(4;3)	(4;4)	(4;5)	(4;6)
5	(5;1)	(5;2)	(5;3)	(5;4)	(5;5)	(5;6)
6	(6;1)	(6;2)	(6;3)	(6;4)	(6;5)	(6;6)

$$\Omega=\{(1;1),(1;2),(1;3),...(6;4),(6;5),(6;6)\}$$

De donde : $n(\Omega)=6\times6=36$

SUCESO O EVENTO :

Es un subconjunto del espacio muestral y se representa mediante una letra mayúscula ***(A ; B ; C ; ....; etc.).***

EJEMPLO 1:

Lanzamos dos dados legales y observamos que aparezcan los números iguales en la cara superior. Sea:

$$\Omega=\{(1;1);(1;2);(1;3);...(6;5);(6;6)\}$$

El evento es:

$$A=\{(1;1);(2;2);(3;3);(4;4);(5;5);(6;6)\}$$

EJEMPLO 2 :

Lanzamos una moneda tres veces y observas que los resultados sean alternados.

$\Omega = \{(C;C;C;\ (C;C;S);\ (C;S;C);\ ...\ ;\ (S;S;C);\ (S;S;S)\}$

* Entonces el evento es:

$$A = \{(C;S;C);\ (S;C;S)\}$$

Siendo Ω el espacio muestral y *A* el evento.

EVENTO SEGURO :

Si el evento A es igual al espacio muestral (A= Ω) entonces el evento es seguro.

EVENTO POSIBLE :

El evento *A* es posible si es subconjunto del espacio muestral $(A \subset \Omega)$

EVENTO IMPOSIBLE :

Si el evento *A* resulta ser un conjunto vacío entonces es un evento imposible.

EJEMPLO:

Al lanzar un dado, analizar si son posibles los siguientes eventos :

A : *De obtener un número impar.*

B : *De obtener un número par*

C : *De obtener un número mayor que **7***

D : *De obtener un número mayor que **0**.*

RESOLUCIÓN :

Se tiene el espacio muestral;

$$\Omega = \{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6\}$$

$A = \{1;\ 3;\ 5\}$ ***Evento posible***

$B = \{2;\ 4;\ 6\}$ ***Evento posible***

$C = \{8\ ;9;\ 10;\ 11;\ ...\}$ ***Evento imposible***

$D = \{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6\}$ ***Evento seguro***

DEFINICIÓN DE PROBABILIDAD

Al hacer el estudio de los fenómenos o experimentos aleatorios (ε_i) consideramos el espacio de probabilidad mediante la terna $(\Omega;\ A;\ P)$ donde Ω es el espacio muestral , *A* la clase de eventos o algebra de eventos y *P* es la función de los valores reales con lo cual definimos como probabilidad la función que hace corresponder a cada elemento de *A* un punto en el intervalo de $[0;1]$ es decir:

$$P : A \to P(A)\ ;\ P(A) \in [0;\ 1]$$

Donde *P(A)* es la llamada probabilidad del evento *A*.

DEFINICIÓN CLÁSICA :

Si en un experimento el número de elementos del conjunto *A* de casos favorables para un determinado suceso *A* es *n(A)* y el número de elementos de casos posibles *C* es *n(C)*, entonces la probabilidad del suceso *A* de experimentar una sola vez , es :

$$\boxed{P(A) = \frac{n(A)}{n(C)}} \text{ o también}$$

$$P(A) = \frac{\#\ \text{casos favorables al evento A}}{\#\ \text{total de casos posibles}}$$

Esto es aplicable si y sólo sí todos los casos son igualmente posibles.

EJEMPLO 1 :

Encontrar la probabilidad que al lanzar un dado se obtenga un valor par.

RESOLUCIÓN :

1°) El experimento es lanzar un dado.

2°) El conjunto de casos posibles:

$$C = \{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6\}$$

3°) El conjunto de casos favorables:

$$A = \{2;\ 4;\ 6\}$$

* Entonces : $n(A) = 3\ ;\ n(C) = 6$

$$P(A) = 3/6 = 1/2 = 0{,}5$$

EN GENERAL :

para «*n*» dados se cumple que :

$$N^o \text{ casos totales } = 6$$

→ Cuando se lanzan dos dados simultáneamente , aumenta la diversidad de eventos que puedan ocurrir , esto es:

$6^2 = 36$ casos en total

Los eventos más frecuentes, son aquellos que involucran a la SUMA de los números que aparecen en sus caras superiores.

* SUMA MÁS PROBABLE que salga es el ***7*** y su probabilidad es de ***6/36***.

* SUMAS MENOS PROBABLES son el **2** y el ***12*** y su respectiva probabilidad es de ***1/36*** , para cada uno.

EJEMPLO 2 :

¿Cual es la probabilidad que al lanzar dos dados , su suma sea un multiplo de ***3***?

RESOLUCIÓN :

* Para que sea múltiplo de ***3*** , la suma debe ser ***3*** ; ***6***; ***9*** ó ***12*** , siendo los casos favorables de **2** ; ***5*** ; ***4*** y ***1*** respectivamente, que en total hacen ***2+5+4+1*** , igual a ***12*** casos favorables , con respecto a ***36*** casos en total.

* Por lo tanto , la probabilidad será : $\frac{12}{36} = \frac{1}{3}$

OBSERVACIÓN :

Para el caso de NAIPES :
Debemos saber que el mazo consta de **52** cartas:

* ***palo de 13 cartas de corazones.***
* ***palo e 13 cartas de diamantes.***
* ***palo de 13 cartas de Treboles.***
* ***palo de 13 cartas de Espadas.***

EJEMPLO 3 :

De un mazo de **52** cartas, al extraer una de ellas ¿Cuál es la probabilidad de que sea un as?

RESOLUCIÓN :

* Como en un mazo de **52** cartas hay **4** ases, entonces la probabilidad será : $\frac{4}{52}=\frac{1}{13}$

* Para el caso de ***MONEDAS*** :
Una moneda tiene una CARA y un SELLO, es decir, cada moneda tiene dos casos totales.
En general , para «*n*» monedas , se cumple que :

$$N^{\circ} \text{ de casos totales} = 2^n$$

Deducción sencilla : en cada MONEDA , se cumple que :

* Probabilidad para obtener ***CARA = 1/2***
* Probabilidad para obtener ***SELLO = 1/2***

EJEMPLO 5 :

Una caja tiene **100** focos entre los cuales hay **20** defectuosos, ¿cuál es la probabilidad que al sacar una muestra de **3** focos los tres sean defectuosos?

RESOLUCIÓN :

1°) El experimento es sacar **3** focos de una caja que contiene ***100.***

2°) El conjunto de casos posibles es el conjunto de todos los grupos de **3** focos elegidos entre los ***100***, luego:

C = {combinaciones de orden *3* de *100* elementos}

$$n(C)=C_3^{100}=\frac{100\times 99\times 98}{1\times 2\times 3}=161\,700$$

3°) El conjunto de casos favorables es el conjunto de todos los grupos de **3** focos, todos defectuosos elegidos entre los ***20***.

A = {combinaciones de orden *3* de *20* elementos)

$$n(A)=C_3^{20}=\frac{20\times 19\times 18}{1\times 2\times 3}=1140 \rightarrow P(A)=\frac{C_3^{20}}{C_3^{100}}=\frac{1140}{161700}=\frac{67}{8085}$$

OPERACIONES ENTRE SUCESOS

Se han indicado anteriormente que los sucesos son conjuntos y Como tales cumplen todas las operaciones de los mismos.

* ***$A\cup B$: Ocurre A , ocurre B o ambas***
  Ocurre al menos uno de ellos.
* ***$A\cap B$: Ocurre A y ocurre B;***
  Ocurre ambas a la vez.
* ***$A-B$: Ocurre solamente A ;***
  Ocurre A pero no B
* ***A' : No ocurre el suceso A.***

SUCESOS SIMPLES :

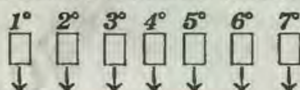
Es aquel cuya ocurrencia o no ocurrencia no está relacionada con ningún otro suceso.

EJEMPLO 1:

Una moneda se tira **7** veces calcular la probabilidad que aparezcan exactamente **4** caras.

RESOLUCIÓN :

1°) Calculando el número total de formas:



$$2\times 2\times 2\times 2\times 2\times 2\times 2=2^7=128$$

2°) Determinando el número de casos favorables al evento **A** :

* Entre **7** caras se puede seleccionar **4** caras de $C_4^7=35$ formas diferentes.

$$P(A)=\frac{35}{128}$$

EJEMPLO 2 :

Calcular la probabilidad de obtener una suma de por lo menos ***10*** puntos al lanzar dos dados.

RESOLUCIÓN:

Un dado puede aparecer de **6** formas diferentes:

1°) Número total de casos posibles:

$$6\times 6=36 \text{ formas}$$

2°) Determinando el número de casos a favor:

Por lo menos 10 puntos —— { ***10 puntos***, ***11 puntos***, ***12 puntos*** }

que la suma sea 10 —— { $4+6$, $5+5$, $6+4$ }

que la suma sea 11 —— { $5+6$, $6+5$ }

que la suma sea 12 —— $6+6$

casos a favor = 6; P(A) = 6/36 = 1/6

SUCESOS COMPUESTOS :

Es la ocurrencia de dos o más sucesos simples , además un suceso compuesto puede clasificarse en tres tipos :

* *sucesos mutuamente excluyentes.*
* *sucesos independientes.*
* *sucesos dependientes.*

SUCESOS MUTUAMENTE EXCLUYENTES

Los eventos A y B son mutuamente excluyentes si no pueden suceder a la vez

$$(A \cap B) = \varnothing.$$

Si: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

→ A y B son mutuamente excluyentes

EJEMPLO 1 :

el suceso compuesto de obtener un **6** o un **3** en un tiro de un dado son mutuamente excluyentes porque si el **6** aparece , el **3** no puede aparecer y viceversa.

EJEMPLO 2 :

En una aula de ***Pre*** , se tiene los siguientes sucesos:

A *: Un grupo de alumnos tienen de **15** a **17** años*
B *: Un grupo de alumnos tienen más de **17** años pero no más de **19** años*
C *: Un grupo de alumnos son mayores de **19** años.*

→ Si se elige a un alumno , este pertenecerá a cualquiera de los tres grupos.

TEORÍA DE LA ADICIÓN PARA SUCESOS MUTUAMENTE EXCLUYENTES

La probabilidad $P(A)$ de que ocurra uno u otro suceso de un cierto número de sucesos mutuamente excluyentes es la suma de probabilidades de la ocurrencia de los sucesos por separado

Sean «*n*» sucesos mutuamente exduyentes con probabilidades $P(A_1); P(A_2); P(A_3);...; P(A_n)$

Entonces :

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + ... + P(A_n)$$

Donde: $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup ... \cup A_n$

EJEMPLO:

Ha de escogerse el azar un comité de **4** personas entre **5** varones y **6** mujeres. ¿Cuál es la probabilidad de que el comité esté confórmado por más de **2** hombres?

RESOLUCIÓN:

1°) Sea el evento A en el cual intervengan **3** hombres y **1** mujer : $P(A_1) = \dfrac{C_3^5 \times C_1^6}{C_4^{11}} = \dfrac{10 \times 6}{330} = \dfrac{2}{11}$

2°) Sea el evento B en el cual intervengan **4** hombres y ninguna mujer :

$$P(A_2) = \frac{C_4^5}{C_4^{11}} = \frac{5}{330} = \frac{1}{66}$$

* Como son eventos mutuamente excluyentes :

$$P(A) = \frac{2}{11} + \frac{1}{66} = \frac{13}{66}$$

SUCESOS INDEPENDIENTES :

Los eventos A y B son indepedientes si la ocurrencia de uno cualquiera de ellos ***(A)*** no afecta la probabilidad de la ocurrencia del otro suceso ***(B).***

Si : $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

→ A y B son indepencientes

Así por ejemplo de obtener un as al tirar un dado y sello al tirar un moneda , está compuesto de dos sucesos independientes pues la ocurrecia de uno no afecta la probabilidad de la aparición de sello en la moneda o viceversa.

TEOREMA DE LA MULTIPLICACIÓN PARA SUCESOS INDEPENDIENTES

Sean «*n*» sucesos independientes con probabilidades $P(A_1); P(A_2); P(A_3);...; P(A_n)$; entonces la probabilidad $P(A)$ que ocurran simultáneamente es la multiplicación de las probabilidades de las ocurrencias por separado.

ENTONCES:

$$P(A) = P(A_1) \times P(A_2) \times P(A_3) \times ... \times P(A_n)$$

EJEMPLO :

Calcular la probabilidad de obtener un as en un tiro de un dado y cara en el tiro de una moneda .

RESOLUCIÓN:

1°) de obtener un as : $P(A_1) = 1/6$

2°) de obtener una cara : $P(A_2) = 1/2$

$$P(A) = 1/6 \times 1/2 = 1/12$$

NOTA :

Cuando se habla de sucesos independientes que ocurren en sucesión se entiende en que pueden ocurrir en cualquier orden y en el enunciado se les asocia con la palabra «*y*» o «*a la vez*» .

SUCESOS DEPENDIENTES :

Se dice que dos o más sucesos son dependientes si la ocurrencia de uno cualquiera de ellos afecta la probabilidad de la ocurrencia de alguno de los otros sucesos.

Así , por ejemplo , consideremos la probabilidad de

sacar sucesivamente **2** bolas numeradas con valor par de un cajón que contiene *10* bolas numeradas del *1* al *10* . La probabilidad de un valor par en la primera extracción sería *5/10 = 1/2* . Si volvemos a poner la bola extraída la probabilidad de obtener valor para en la segunda extracción es de nuevo *1/2* como estos dos sucesos son independientes por lo tanto la probabilidad de obtener **2** valores pares sería: *1/2 ×1/2 = 1/4*.

Sin embargo, si la primera bola extraída no se vuelve a poner entonces quedarían *4* valores pares de un total de **9** , por lo cual la probabilidad de obtener valor par en la segunda extracción sería *4/9*. Notamos que en este caso la probabilidad depende de la primera extracción , por lo tanto la probabilidad de extraer un valor par en este caso sería : *1/2×4/9 = 2/9.*

AXIOMAS DE PROBABILIDAD

Sea Ω el espacio muestral y *P(A)* es llamada la probabilidad del evento *A*, se cumplen los siguientes axiomas:

I) Para todo evento **A** : $\boxed{0 \le P(A) \le 1}$

$$\boxed{0\% \le P(A) \le 100\%}$$

II) $P(\Omega) = 1$; Ω es el espacio muestral , es decir una probabilidad será 1 cuando el suceso es seguro.

III) Si: *A* y *B* son eventos mutuamente excluyentes, entonces :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

IV) Si: *A'* es el complemento de un evento *A* , entonces:

$$P(A') = 1 - P(A)$$

V) Si: $A \subset B$, entonces: $P(A) \le P(B)$

VI) Si: **A** y **B** son dos eventos , entonces:

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$$

VII) Si: **A** y **B** son dos eventos , entonces:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Si **A** y **B** son dos eventos, la probabilidad de que ocurra **A** o **B** es igual a la suma de las probabilidades de ocurrencia de **A** y de **B**, menos la probabilidad de que ocurran **A** y **B** simultáneamente.

EXTRACCIÓN SIMPLE :

Para naipes , bolas y otras , cuando se quiere extraer de una en una , la probabilidad se determina por un simple cociente de los casos favorables respecto a los casos totales.

EJEMPLO :

De una caja que contiene **5** bolas rojas y **3** negras , se extrae uno de ellos al azar.

Determinar la probabilidad que sea negra.

RESOLUCIÓN :

$$P_{deseada} = \frac{3}{8}$$

EXTRACCIÓN MÚLTIPLE :

Cuando se extraen DOS o más objetos , se puede hallar la Probabilidad por dos métodos :

I) MÉTODO DE LA FRACCIÓN :

Hacer el PRODUCTO de tantas fracciones como EXTRACCIONES se hayan realizado

Nº de Fracciones = Nº de Extracciones

EJEMPLO :

De un mazo de **52** cartas. ¿Cuál es la probabilidad de que al extraer tres al azar, estas sean una figura ***(J, Q, K)***?

RESOLUCIÓN :

* En un mazo de **52** cartas existen *4* cartas ***«J»***, *4* cartas ***«Q»*** y *4* cartas ***«K»***, entonces tendremos *12* cartas favorables que se van a extraer de una en urna.

* *La probabilidad de la primera será :* $\frac{12}{52}$

* *La probabilidad de la segunda será :* $\frac{11}{51}$ *ya que hay una figura menos.*

* *La probabilidad de la tercera será :* $\frac{10}{50}$

* *Luego la probabilidad deseada será :*

$$P_{deseada} = \frac{12}{52} \times \frac{11}{51} \times \frac{10}{50}$$

PROBABILIDAD CONDICIONAL

La probabilidad de que ocurra un evento *A* dado que ocurrió el evento **B** (el evento **A** depende del evento **B**), denotado **P(A|B)**, es:

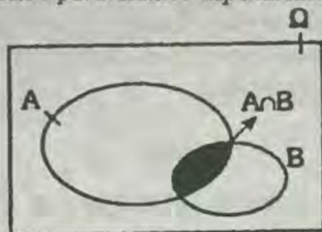
$$P(A \setminus B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Hay que notar que esta propiedad no es conmutativa, situación que sí ocurre con la probabilidad de unión o la intersección de eventos, por lo que no hay que confundir *P(A|B)* y *P(B|A)*.

* De la igualdad anterior se deduce , que si *A* y *B* son dos eventos cualesquiera , la probabilidad de que los eventos *A* y *B* sucedan a la vez , está dada por:

$$P(A \cap B) = P(A/B).\ P(B)$$

* Esta expresión es conocida como la regla de *la multiplicación para eventos dependientes*.



EJEMPLO 1 :

Una urna tiene *4* bolas blancas , *3* negras y *2* verdes; sí las extraemos una a una sin volver a depositarlas en la urna , ¿cuál es la probabilidad de obtener *bola negra* , dado que ya salió blanca?

RESOLUCIÓN :

* El espacio muestral Ω tiene *9* bolas.
* Sea *B* el suceso extraer bola blanca y *A* suceso obtener bola negra. Es claro que después de extraer una bola blanca el espacio muestral para el suceso *B* es diferente (*8* bolas), por lo tanto:

$$P(B/A)=\frac{3}{8}$$

NOTA :

Aquí debemos tener cuidado : tendremos que considerar como ***«espacio muestral»*** los resultados del suceso que ocurre inicialmente.

EJEMPLO 2 :

un fabricante de partes de avión sabe , por experiencia pasada, que la probabilidad de que un pedido esté listo pare ser distribuido ess *0,80* y que estará listo para entregarse a tiempo es *0,72* (también *que se entregará a* tiempo).

¿Cual as la probabilidad de que este *pedido se* entregue a tiempo , dado que estuvo listo su envío?

RESOLUCIÓN:

R : Suceso de que un pedido este listo para su distribución.

D : Suceso que se entregará a tiempo.

$$P(R)=0{,}80 \text{ y } P(D\cap R)=0{,}72$$

$$\rightarrow P(D/R)=\frac{P(D\cap R)}{P(R)}=\frac{0{,}72}{0{,}80}=0{,}9$$

POSIBILIDADES Y PROBABILIDADES

Se habla muy comúnmente en sitios de apuestas, como en las autódromos o hipódromos, de que «las apuestas a tal o cual participante es de *x* a *y*», es decir, que las posibilidades de que gane es de *x* a *y*.

Esta manera de expresarse se refiere al uso de razones.

En términos generales, la posibilidad de que ocurra un evento se determina mediante la razón de la probabilidad de que ocurra a la probabilidad de que no ocurra.

Esto quiere decir que si la probabilidad de que un evento ocurra es *p*, entonces las posibilidades de que ocurra son *x* a *y*, es decir : $\frac{x}{y}=\frac{p}{1-p}$

Tales que *x* y *y* son enteros positivos.

EJEMPLO :

Si se tiran dos monedas normales (no trucadas), la probabilidad de que las dos monedas caigan cara es de ¼. Esto quiere decir si alguien apuesta a que las dos monedas no caen simultáneamente en cara, la posibilidad de ganar la apuesta es de : $\frac{3/4}{1-3/4}=3$

es decir, *3* a *1*.

Hemos de considerar que si es mayor la probabilidad de que no ocurra un evento, entonces se acostumbra mencionar las posibilidades **en contra** del evento.

EJEMPLO :

Si se tira un dado no trucado, sabemos que la probabilidad de obtener un cuatro es $^1/_6$, es decir que la posibilidad de obtener un cuatro es de *1* a *6*; pero se acostumbra decir que las posibilidades en contra, esto es, de no obtener un cuatro es de *6* a *1*.

Inversamente, en el caso de tener las posibilidades de un evento, entonces es fácil obtener su probabilidad, pues si la posibilidad de un evento es de *x* a *y*, entonces la probabilidad *p* de que ocurra tal evento es $p=\frac{x}{x+y}$

EJEMPLO :

En la Copa Mundial de Futbol Perú *2002* se decía que el equipo peruano tenía una posibilidad de *1* a *75* de llegar a ser el campeón del torneo.

Si se desea encontrar la probabilidad de que el equipo mexicano llegase a ser campeón, entonces se tiene que : $p=\frac{1}{1+75}=\frac{1}{76}$

es la probabilidad de que ocurriese el evento.

NOTA :

Esto tiene la ventaja de que permite, en combinación con un axioma de la probabilidad, medir la confiabilidad que tienen las opiniones de las personas sobre las posibilidades que le asignan a

algunos eventos. Esto quiere decir que el cálculo de las probabilidades de dos eventos mutuamente excluyentes a partir de las posibilidades otorgadas de manera subjetiva resulta como un criterio de consistencia.

EJEMPLO :

Un criminólogo piensa que las posibilidades de que en la próxima semana la cantidad de delitos en una ciudad aumente con respecto a la anterior es de ***5*** a ***2***, de que sea la misma cantidad de delitos es de ***1*** a ***3*** y las posibilidades de que aumente la cantidad o sea la misma es de ***7*** a ***4***.

Si se desea saber si son consistentes las probabilidades correspondientes habría que hacer los cálculos.

Las probabilidades de aumente la cantidad de delitos, sea igual la cantidad de delitos, y de que aumente o sea igual la cantidad de delitos es, respectivamente, de :

$$\frac{5}{5+2}=\frac{5}{7}, \quad \frac{1}{1+3}=\frac{1}{4} \quad \text{y} \quad \frac{7}{7+4}=\frac{7}{11}$$

y dado que $\frac{5}{7}+\frac{1}{4}=\frac{20+7}{28}=\frac{27}{28}$ (como son eventos mutuamente excluyentes) no es lo mismo que $^{7}/_{11}$, entonces los criterios del criminólogo pueden ser cuestionados.

Probabilidad compuesta

A y B independientes $\Rightarrow$ $\mathbf{p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)}$

A y B dependientes $\Rightarrow \begin{cases} \mathbf{p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B/A)} \\ \mathbf{p(A \cap B) = p(B) \cdot p(A/B)} \end{cases}$ Las obtenemos despejando de la definición.

Probabilidad total

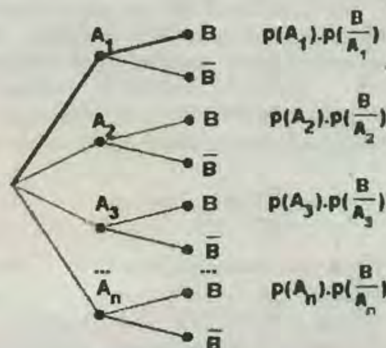
Hacemos un "diagrama en arbol". Queremos saber la probabilidad total de obtener el suceso B. Para hallarla debemos coger todas las "ramas" que nos lleven a B y sumarlas.

$$p(B) = p(A_1 \cap B) + p(A_2 \cap B) + p(A_3 \cap B) + \ldots + p(A_n \cap B) \Rightarrow \left| \begin{array}{l} p(A_1 \cap B) = p(A_1) \cdot p(B/A_1) \\ p(A_2 \cap B) = p(A_2) \cdot p(B/A_2) \\ p(A_3 \cap B) = p(A_3) \cdot p(B/A_3) \\ p(A_n \cap B) = p(A_n) \cdot p(B/A_n) \end{array} \right.$$

Teorema de Bayes

Es la relación entre la probabilidad de una de las ramas que cumplen un suceso y la probabilidad total de ese suceso. **Sabiendo que (me afirman)** se ha producido el suceso B, queremos saber la probabilidad de que haya sido por la rama A_1.

$$\mathbf{p(A_1 / B) = \frac{p(A_1 \cap B)}{p(B)} = \frac{p(A_1) \cdot p(B/A_1)}{p(B)}}$$



TEOREMA DE BAYES (GENERAL)

El teorema de Bayes, enunciado por Thomas Bayes, en la teoría de la probabilidad, es el resultado que da la distribución de probabilidad condicional de una variable aleatoria **A** dada **B** en términos de la distribución de probabilidad condicional de la variable **B** dada **A** y la distribución de probabilidad marginal de sólo **A**.

Sea $\{A_1, A_2, ..., A_i, ..., A_n\}$ un conjunto de sucesos incompatibles cuya unión es el total y tales que la probabilidad de cada uno de ellos es distinta de cero. Sea **B** un suceso cualquiera del que se conocen las probabilidades condicionales $P(B/A_i)$. Entonces, la probabilidad $P(A_i/B)$ viene dada por la expresión:

$$P(A_i/B)=\frac{P(B/A_i)P(A_i)}{P(B)}=\frac{P(B/A_i)P(A_i)}{\sum_{j=1}^{n}P(B/A_j)P(A_j)}$$

donde:

$P(A_i)$ son las probabilidades a priori.

$P(B/A_i)$ es la probabilidad de B en la hipótesis A_i.

$P(A_i/B)$ son las probabilidades a posteriori.

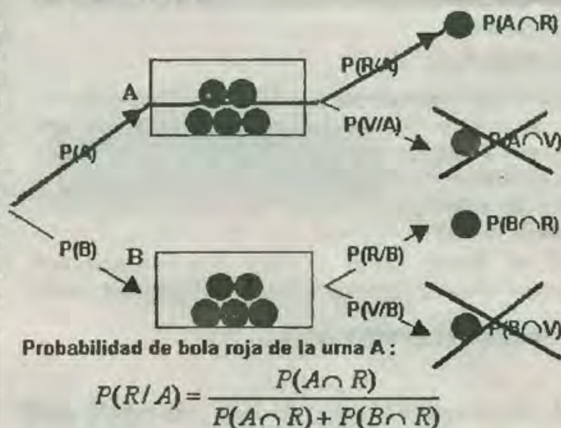
Esto se cumple $\forall i = 1; 2; 3; ....; n$

El teorema de Bayes es válido en todas las aplicaciones de la teoría de la probabilidad. Sin embargo, hay una controversia sobre el tipo de probabilidades que emplea. En esencia, los seguidores de la estadística tradicional sólo admiten probabilidades basadas en experimentos repetibles y que tengan una confirmación empírica mientras que los llamados estadísticos bayesianos permiten probabilidades subjetivas. El teorema puede servir entonces para indicar cómo debemos modificar nuestras probabilidades subjetivas cuando recibimos información adicional de un experimento. La estadística bayesiana está demostrando su utilidad en ciertas estimaciones basadas en el conocimiento subjetivo a priori y permitir revisar esas estimaciones en función de la evidencia es lo que está abriendo nuevas formas de hacer conocimiento.

$$\sum_{i=1}^{n}P(A_i/B)=1$$

En los problemas relacionados con la probabilidad, y en particular con la probabilidad condicionada, así como con la probabilidad total y el teorema de Bayes, es aconsejable que, con la información del problema, construyas una tabla de contingencia o un diagrama de árbol.

EJEMPLO :



Probabilidad de bola roja de la urna A :

$$P(R/A)=\frac{P(A\cap R)}{P(A\cap R)+P(B\cap R)}$$

EJERCICIO :

Tres máquinas, *A*, *B* y *C*, producen el 45%, 30% y 25%, respectivamente, del total de las piezas producidas en una fábrica. Los porcentajes de producción defectuosa de estas máquinas son del 3%, 4% y 5%.

I) Seleccionamos una pieza al azar; calcula la probabilidad de que sea defectuosa.

II) Tomamos, al azar, una pieza y resulta ser defectuosa; calcula la probabilidad de haber sido producida por la máquina *B*.

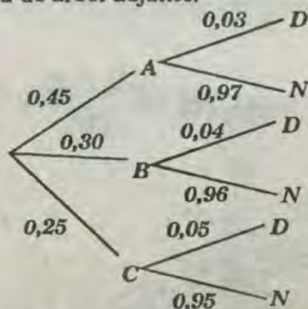
III) ¿Qué máquina tiene la mayor probabilidad de haber producido la citada pieza defectuosa?

RESOLUCIÓN :

Sea D= «la pieza es defectuosa»

y N= «la pieza no es defectuosa».

La información del problema puede expresarse en el diagrama de árbol adjunto.



I) Para calcular la probabilidad de que la pieza elegida sea defectuosa, *P(D)*, por la propiedad de la

probabilidad total,

$P(D) = P(A).P(D/A) + P(B).P(D/B) + P(C).P(D/C)$

$= 0,45\times0,03 + 0,30\times0,04 + 0,25\times0,05 = 0,038$

II) Debemos calcular $P(B/D)$. Por el teorema de Bayes,

$$P(B/D)=\frac{P(B)P(D/B)}{P(A)P(D/A)+P(B)P(D/B)+P(C)P(D/C)}$$

$$\Rightarrow P(B/D)=\frac{0,3\times0,04}{0,45\times0,03+0,3\times0,04+0,25\times0,05}=\frac{12}{38}=0,316$$

III) Calculamos $P(A/D)$ y $P(C/D)$, comparándolas con el valor de $P(B/D)$ ya calculado. Aplicando el teorema de Bayes, obtenemos:

$$P(A/D)=\frac{0,45\times0,03}{0,45\times0,03+0,3\times0,04+0,25\times0,05}=\frac{135}{380}=0,355$$

$$P(C/D)=\frac{0,25\times0,05}{0,45\times0,03+0,3\times0,04+0,25\times0,05}=\frac{125}{380}=0,329$$

La máquina con mayor probabilidad de haber producido la pieza defectuosa es *A*

VARIABLE ALEATORIA

Una función que asocia un número real, perfectamente definido, a cada punto muestral.

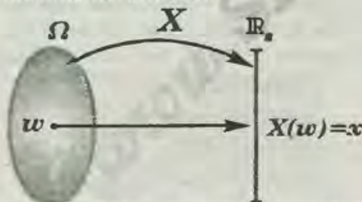
A veces las variables aleatorias (v.a.) están ya implícitas en los puntos muestrales.

DEFINICIÓN :

Una variable aleatoria se denota por **X** y se define como una función real definida en un espacio muestral . Abreviadamente:

$$X=\{(w;x)/w\in\Omega;X(w)=x;x\in\mathbb{R}_x\}$$

Esquemáticamente tenemos:



El objetivo de definir una variable aleatoria en Ω es transformar un conjunto no siempre numérico en numérico.

EJEMPLOS:

Consideremos los siguientes experimentos:

1) Se extraen tres artículos de un proceso de producción y definimos la variable aleatoria: **X**: número de artículos defectuosos

Entonces **X** toma los valores ***0; 1; 2; 3***; y se denota por $X=\{0;1;2;3\}$.

2) Observar durante una hora los clientes que llegan a un banco y definir la variable aleatoria:

X: número de clientes que llegaron al banco en una hora

Entonces, **X** toma los valores ***0; 1; 2; ...*** ; y se suele denotar por $X=\{0; 1; 2; ...\}$.

3) Observar el trabajo de un empleado durante ocho horas y definir: **X**: tiempo que utiliza el empleado en terminar una pieza Entonces: $X=\{0<x\leq 8\}$; *x:* horas.

4) Observar la duración de una llamada telefónica y **X** es el tiempo de duración de la llamada.

Entonces: $X=\{x/x\geq 0\}$.

5) Observar las fallas que tuvo Alberto al contestar un examen de veinte preguntas de opción múltiple, sea:

X : número de errores de Alberto en el examen

Entonces, $X=\{0; 1; 2; ... ; 20\}$; es decir, los valores que toma **X**, son de ***0*** a ***20***.

Una variable aleatoria puede ser de dos tipos:

* ***Variable aleatoria discreta*** :

Es aquella cuyos valores, constituyen un conjunto contable (finito, infinito). Es el caso de las variables aleatorias definidas en el ejemplo de los tres artículos (finito) y el número de clientes que llegan al banco (infinito).

* ***Variable aleatoria continua*** :

Es aquella cuyos valores no se pueden contar, es decir, pertenecen a los reales. Puede ser un intervalo, una unión de intervalos o todos los reales.

Como los valores de una variable aleatoria **X** dependen de los resultados de un experimento aleatorio, entonces se pueden asociar probabilidades a los valores de una variable aleatoria discreta. Por ejemplo, supón que el experimento consiste en extraer independientemente dos artículos de un proceso de producción y se define la variable aleatoria:

X = número de artículos defectuosos

Entonces: $x=\{0; 1; 2\}$.

y supón que el ***5%*** de los artículos son defectuosos

Entonces:

$$P(x=0)= p(0)=P(bb) = (0,95)^2= 0,9025$$

$$P(x=1)= p(1)= P(bd, db)= 2P(d)\,P(b)$$
$$= 2(0,95)\,(0,05)=0,095$$

$$P(x=2)= p(2)= P(dd)=(0,05)^2 = 0,025$$

Los valores que toma X, junto con sus respectivas probabilidades, los podemos representar en la siguiente tabla:

x	$p(x)$
0	0,9025
1	0,0950
2	0,0025
Total	1,0000

Vemos que la tabla tiene dos columnas: una para ubicar los valores que toma X y la otra para ubicar sus respectivas probabilidades.

Además, la suma de todas las probabilidades debe ser *1*.

FUNCIÓN DE PROBABILIDAD (CUANTÍA) DE UNA VARIABLE ALEATORIA DISCRETA X

Llamaremos función de probabilidad (cuantía) de una variable aleatoria X discreta a la función real definida en el rango de X, que cumple con las siguientes condiciones:

I) $0 \leq p(x) \leq 1, \forall x \in R_x = D_p$

II) $\sum_{\forall x \in Dp} p(x) = 1$

donde $p(x)$ representa la probabilidad de que la variable aleatoria X tome el valor de x, es decir: $P(X = x) = p(x)$.

Como en el ejemplo introductorio, de manera general una función de probabilidad de una variable aleatoria X discreta se puede representar por:

x	$p(x)$
x_1	$p(x_1)$
x_2	$p(x_2)$
x_3	$p(x_3)$
.	.
.	.
.	.
total	1,00

En algunos casos es posible encontrar una función matemática que represente los valores que toma X y sus respectivas probabilidades; es decir:

$p(x)$ = expresión matemática; dominio de la función

EJEMPLO:

Consideremos el experimento de lanzar un dado y definamos la variable aleatoria X: número que aparece en la cara superior del dado. Determinar:

A) los valores que toma X.

B) la función de probabilidad de X.

C) si es posible, encontrar una función que relacione las probabilidades con los valores que toma X.

RESOLUCIÓN:

A) X toma valores *1; 2; 3; 4; 5; 6.* Es decir:

$X=\{1;2;3;4;5;6\}$

B) Asumiendo que el dado es normal, entonces todos los números tienen la misma posibilidad de salir. Por *10* tanto, la función de probabilidad de X es:

x	$p(x)$
1	1/6
2	1/6
3	1/6
4	1/6
5	1/6
6	1/6
total	1,00

C) Como las probabilidades de cualquier valor que toma X son las mismas, entonces la expresión matemática de la función que relaciona los valores que toma X con sus respectivas probabilidades es:

$$p(x) = \frac{1}{6}; x = 1; 2; 3; 4; 5; 6$$

FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN PROBABILIDAD

La siguiente función de probabilidad representa las probabilidades del número de autos vendidos por día *(x)* en la firma La Norteña, con sede en Chimbote.

Números autos vendidos por día (x)	p(x)
8	0,06
9	0,014
10	0,20
11	0,32
12	0,18
13	0,10
total	1,00

Supón que la firma quiere determinar la probabilidad de que se vendan a lo más diez autos por día; es decir, $P(x \leq ;10)$. Entonces

$$P(x \leq 10)=0,06+0,14+0,20= 0,40$$

Pero al igual que en el caso de la estadística básica

(distribución de frecuencias), aquí también se pueden sumar las probabilidades individuales para hallar probabilidades acumuladas. A esto se le llama función de distribución de probabilidad. Así, para la función de probabilidad anterior tenemos:

x	$p(x)$	$F(x)$
8	0,06	0,06
9	0,14	0,20
10	0,20	0,40
11	0,32	0,72
12	0,18	0,90
13	0,10	1,00
total	1,00	–

Nota que los valores de la tercera columna se obtienen sumando las probabilidades individuales. Así:

$$F(8)=P(x\le 8)=P(x=8)=0{,}06$$
$$F(9)=P(x\le 9)=P(x=8)+P(x=9)$$
$$=0{,}06+0{,}14=0{,}20$$

y así sucesivamente se obtienen las demás frecuencias de la columna *3*. A esto se le llama ***distribución acumulada menor*** o igual que, y de manera general se denota por ***F(x)***; es decir:

$$F(x)=P(X\le x)=\sum_{\forall X\le x} p(x)$$

Ahora podríamos responder directamente la pregunta formulada usando la tabla:

$$P(x\le 10)=F(10)=0{,}4$$

EJERCICIO 1 :

Una firma que recibe pedidos por teléfono tiene seis líneas telefónicas. Sea la variable aleatoria ***X***: número de líneas en uso en un momento específico, y supón que su función de cuantía es:

x	0	1	2	3	4	5	6	Total
$p(x)$	0,10	0,15	0,20	0,25	0,20	0,06	0,04	1,00

Calcular la probabilidad de los siguientes eventos:

A) A lo más, dos líneas están en uso.

B) Por lo menos cuatro líneas están en uso.

C) Entre dos y cinco líneas están en uso.

D) Por lo menos cuatro líneas no están en uso.

RESOLUCIÓN:

A) El evento a lo más dos líneas están en uso es equivalente a que ***X*** tome valores *0;1* y *2*. Por lo tanto, piden:

$$P(X\le 2)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)$$
$$=0{,}10+0{,}15+0{,}20=0{,}45$$

B) Piden:

$$P(X\ge 4)=P(X=4)+P(X=5)+P(X=6)$$
$$=0{,}20+0{,}06+0{,}04=0{,}30$$

C) Piden:

$$P(2\le X\le 5)=P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)+P(X=5)$$
$$=0{,}20+0{,}25+0{,}20+0{,}06=0{,}71$$

D) El evento por lo menos cuatro líneas no están en uso es equivalente al evento a lo más tres líneas están en uso, por lo tanto piden:

$$P(X\le 3)=P(x=0)+P(x=1)+P(x=2)+P(x=3)$$
$$=0{,}10+0{,}15+0{,}20+0{,}25=0{,}70$$

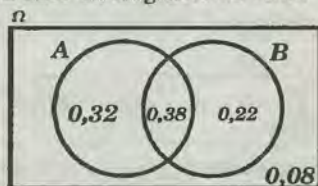
EJERCICIO 2 :

Supón que los resultados de dos prácticas calificadas de matemática tomadas en el bachillerato indican que el *70%* de alumnos aprobó la primera, el *60%* aprobó la segunda y sólo un *8%* no aprobó práctica alguna. Construye la función de probabilidad de la variable ***X***: número de prácticas aprobadas por un alumno elegido al azar.

RESOLUCIÓN:

Los valores que puede tomar ***X*** son: *0*; *1* y *2*, es decir, $X=\{0;1;2\}$

Para hallar las probabilidades de los valores que toma ***X***, usamos un diagrama de Venn:



donde ***A*** = {aprobaron la primera práctica}
B = {aprobaron la segunda práctica}

Como:

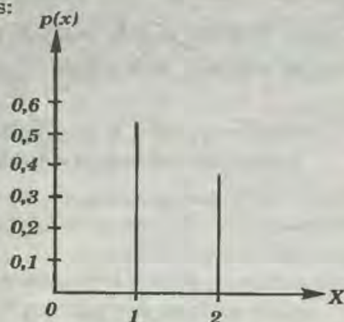
$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0{,}92$$
$$\Rightarrow 0{,}7+0{,}6-P(A\cap B)=0{,}92$$
$$\Rightarrow P(A\cap B)=0{,}38$$

Por lo tanto, la función de probabilidad de ***X*** es:

x	$p(x)$
0	0,08
1	0,54
2	0,38
Total	1,00

El gráfico de una función de probabilidad de una variable aleatoria discreta es un diagrama de bastones. Por ejemplo, el gráfico de la distribución

anterior es:



VALOR ESPERADO DE UNA VARIABLE ALEATORIA

Sea X una variable aleatoria discreta. El valor esperado de X, denotado por $E[X]$ o μ_x se define como:

$$\mu_x = \sum_{\forall x \in Dp} xp(x)$$

VARIANZA DE UNA VARIABLE ALEATORIA

Sea X una variable aleatoria discreta con valor esperado μ_x Entonces. la varianza de X se define por:

$$V(X) = \sum_{\forall x \in Dp} (x - \mu_x)^2 p(x) = E(x^2) - \mu_x^2$$

La desviación están dar de una variable aleatoria X discreta es una medida de dispersión absoluta expresada en las mismas unidades de la variable aleatoria X. Se define como la raíz cuadrada positiva de la varianza. Se denota por σ_x.

Es decir: $\sigma_x = \sqrt{V(x)}$

EJEMPLO:

Supongamos que la variable aleatoria

X: número de fallas que tiene una máquina por día tiene la siguiente distribución de probabilidad:

x	$p(x)$
	0,10
0	0,15
1	0,20
3	0,30
4	0,13
5	0,08
6	0,04
Total	1,00

A) Determinar e interpretar el valor esperado de X.

B) Calcular σ_x.

RESOLUCIÓN:

A) Nos piden:

$$E(x) = \sum_{x=0}^{6} xp(x) = 0 \times 0,10 + ... + 6 \times 0,04 = 2,61$$

Interpretación: *Se espera que aproximadamente la máquina tenga tres fallas por día.*

B) Primero calculamos $V(x)$.

$$V(x) = E(x^2) - [E(x)]^2$$

$$E(x^2) = \sum_{x=0}^{6} x^2 p(x) = 0^2 \times 0,10 + ... + 6^2 \times 0,04 = 9,17$$

$$\Rightarrow V(x) = 9,17 - (2,61)^2 = 2,3579$$

$$\therefore \sigma_x = \sqrt{2,3579} = 1,536$$

EJERCICIO 3 :

Supongamos que se venden quinientos boletos de una rifa que consiste en un premio de **S/. 200,** cuatro premios de **S/. 50** y diez premios de **S/. 5.** Si cada boleto cuesta **S/. 1** y si adquieres un boleto, definamos la variable.

U: utilidad. Calcular $E(U)$.

RESOLUCIÓN:

Primero calculamos los valores de U y sus respectivas probabilidades. En efecto:

$U = -1$, si no gana ningún premio.

$U = 4$, si gana un premio de **S/. 5.**

$U = 49$, si gana un premio de **S/. 50**

$U = 199$, si gana el premio de **S/. 200** .

Por tanto, la función de probabilidad de U es:

U	$p(U)$	$Up(U)$
-1	$\frac{485}{500}$	$-0,97$
4	$\frac{10}{500}$	$0,08$
49	$\frac{4}{500}$	$0,392$
199	$\frac{1}{500}$	$0,398$
Total	1,00	$-0,1$

Entonces:

$$E(U) = \sum_{i=1}^{4} U_i p(U_i)$$

$$= -1(0,97) + 4(0,02) + 49(0,008) + 199(0,002) = -0,1$$

$$\Rightarrow E(U) = -0,1$$

Es decir, espera perder **S/. 0,1**.

EJERCICIO 4 :

La demanda mensual de uno de los productos de Export S.A. varía de un mes a otro. A partir de la información de los últimos veinticuatro meses, se logró estimar la distribución de probabilidades para la demanda mensual del producto bajo estudio.

Demanda (unidades)	20000	30000	40000	50000
probabilidad	0,25	0,35	0,30	0,10

A) Si la compañía establece un programa de producción tomando como base el valor esperado de la demanda mensual, ¿cuál debe ser el programa mensual de producción para este producto?

B) Supón que cada unidad vendida produce un ingreso de ***S/. 10*** y que su costo es ***S/. 7***, ¿cuánto ganará Export S.A. en un mes si su programa de producción se basa en ***(A)*** y la demanda fuera de ***30 000*** unidades?

RESOLUCIÓN:

Definamos **X**: demanda mensual. Entonces la distribución de probabilidad de x es:

x	$p(x$	$xp(x)$
20 000	0,25	5000
30 000	0,35	10 500
40 000	0,30	12000
50 000	0,10	5000
Total	1,00	32500

A) Calculamos $E(x)=32\ 500$ (suma de la tercera columna). por lo tanto debe producir ***32 500*** unidades mensuales.

B) Definamos U : utilidad neta.

$U=I-C$ (ingreso – costo)

$U = 30\ 000\times 10 - 32\ 500\ (7) = 72\ 500$ soles

$\Rightarrow$ Su utilidad es de ***S/. 72 500.***

LEY DE PROBABILIDAD O DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD DE UNA VARIABLE ALEATORIA DISCRETA

Supón el experimento que consiste en lanzar tres veces una moneda equilibrada. Si en el espacio muestral de este experimento se define la variable aleatoria ***X*** como el número de caras que se obtiene, tendremos que cada valor que asume la variable tiene cierta probabilidad.

Existen ocho posibles resultados cuando se lanza tres veces una moneda. A continuación se muestran los resultados posibles (***C*** representa cara y ***S*** representa sello).

Resultado posible	Tirada de la moneda			Número de caras
	1°	2°	3°	(x)
1	S	S	S	0
2	S	S	C	1
3	S	C	S	1
4	C	S	S	1
5	C	C	S	2
6	C	S	C	2
7	S	C	C	2
8	C	C	C	3

Como puedes ver, el resultado «cero caras» ocurrió sólo una vez, «una cara» ocurrió tres veces, «dos caras» también tres veces y «tres caras» sólo una vez. Como «cero caras» apareció en una de ocho posibilidades, entonces la probabilidad de que aparezca «cero caras» es ***1/8***. De igual forma, la probabilidad de que aparezca «una cara» es ***3/8***, de que aparezca «dos caras» es ***3/8***, y de que aparezca «tres caras», ***1/8***.

La probabilidad de que la variable aleatoria tome un valor genérico igual a k se denota de la siguiente manera. $P_k=P(x=k)$

Nota que la suma de las probabilidades de todos los resultados posibles es ***1***.

Valores de X	Probabilidad que ocurra el valor de x $P(X=x)$
0	1/8
1	3/8
2	3/8
3	1/8
	$\sum_{x=0}^{3} P(X=x)=1$

Lo anterior representa una distribución o ley de probabilidad para la variable aleatoria x.

DEFINICIÓN :

La distribución de probabilidad de una variable aleatoria discreta x es el conjunto de valores asociados a cada resultado un experimento aleatorio, junto con las probabilidades de ocurrencia de cada uno de ellos.

En una distribución de probabilidad se cumplen las siguientes características:

La probabilidad de un resultado específico siempre debe estar comprendida entre ***0*** y ***1***.

La suma de las probabilidades de todos los resultados posibles es ***1***.

La distribución de probabilidad se puede representar gráficamente mediante «bastones».

Para el ejemplo del lanzamiento de la moneda tres veces, el gráfico de la distribución de probabilidad correspondiente es:



EJEMPLO:

Un embarque de ocho congeladoras similares que se envía al distribuidor CARISA contiene tres aparatos defectuosos. Si la cadena de pollerías «El Carmelo» realiza una compra aleatoria de dos de estas congeladoras, encontrar la distribución de probabilidad de las congeladoras defectuosas.

RESOLUCIÓN:

Sea la variable aleatoria x, que representa el número de congeladoras defectuosas compradas por la cadena de pollerías. La pollería al comprar dos congeladoras de la distrihuidora CARISA, que como sabemos tiene tres congeladoras defectuosas estarán en buenas condiciones y en el peor de los casos, las dos congeladoras pueden estar defectuosas.

Entonces, los posibles valores que toma la variable aleatoria son ***0 ; 1*** y ***2***.

Para hallar las probabilidades asociadas a cada valor de la variable aleatoria, será necesario utilizar la teoría de cálculo combinatorio.

Recordemos que una combinación representa el número de maneras posibles de elegir ***«p»*** cosas entre ***«n»*** de ellas, cuando el orden en que se eligen no es importante.

La combinación de n tomado en p, se denota con

$\binom{n}{p}$ ó C_p^n, y se define por la siguiente fórmula .

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Entonces, la propiedad de que la variable X tome el valor cero, es decir lo mismo que las dos congeladoras compradas provienen del grupo de las ***5*** congeladoras que están en óptimas condiciones; o también decir que la pollería no compró ninguna congeladora defectuosa. Esta probabilidad se representa así:

$$P_1 = P(X = 1) = \frac{\binom{3}{0}\binom{5}{2}}{\binom{8}{2}} = \frac{10}{28}$$

donde $\binom{3}{0}\binom{5}{2}$ representa el número de posibilidades de adquirir dos congeladoras en buenas condiciones. Estas desde luego provienen del grupo de las ***5*** congeladoras que están en buenas condiciones, y $\binom{8}{2}$. representa el número de posibilidades de adquirir dos congeladoras sin tomar en cuenta si están o no en buenas condiciones.

Entonces, la probabilidad de no comprar ninguna congeladora defectuosa es $\frac{10}{28}$.

La probabilidad de que la variable X tome el valor uno, significa que una de las congeladoras compradas provienen del grupo de las cinco congeladoras que están en óptimas condiciones y la otra congeladora comprada provienen del grupo de las tres congeladoras que están defectuosas. Esta probabilidad se representa así:

$$P_1 = P(X = 1) = \frac{\binom{3}{1}\binom{5}{1}}{\binom{8}{2}} = \frac{15}{28}$$

Del mismo modo, la probabilidad de que la variable X tome el valor dos, significa que las dos congeladoras compradas provienen del grupo de las ***3*** congeladoras que están defectuosas. Esta probabilidad se representa así:

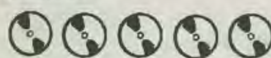
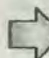
$$P_2 = P(X = 2) = \frac{\binom{3}{2}\binom{5}{0}}{\binom{8}{2}} = \frac{3}{28}$$

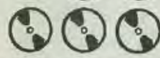
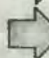
Entonces la distribución de probabilidad del número de congeladoras defectuosas compradas es :

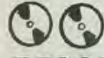
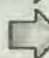
x	0	1	2
$P(X=x)$	$\frac{10}{28}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{3}{28}$

EJERCICIO 1 :

Una colección de diez **CD** consta de cinco **CD** de música clásica, dos de salsa y tres de rock. Si se toman cuatro de ellos al azar, encontrar la distribución de probabilidad para los **CD** de música clásica.

  ***CD música clásica***

  ***CD salsa***

  ***CD rock***

RESOLUCIÓN:

Sea la variable aleatoria x, que representa el número de CD de música clásica. Entonces, los posibles valores que toma la variable aleatoria es: *0;1;2;3* y *4*.

La probabilidad de que x tome el valor cero es:

$$P_0 = P(X = 0) = \frac{\binom{5}{0}\binom{5}{4}}{\binom{10}{4}} = \frac{5}{210}$$

La probabilidad de que x tome el valor uno es:

$$P_1 = P(X = 1) = \frac{\binom{5}{1}\binom{5}{3}}{\binom{4}{10}} = \frac{50}{210}$$

La probabilidad de que x tome el valor dos es:

$$P_2 = P(X = 2) = \frac{\binom{5}{2}\binom{5}{2}}{\binom{10}{4}} = \frac{100}{210}$$

La probabilidad de que x tome el valor tres es:

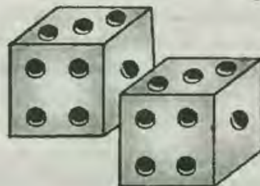
$$P_3 = P(X = 3) = \frac{\binom{5}{3}\binom{5}{1}}{\binom{10}{4}} = \frac{50}{210}$$

La probabilidad de que x tome el valor cuatro es:

$$P_4 = P(X = 4) = \frac{\binom{5}{4}\binom{5}{0}}{\binom{10}{4}} = \frac{5}{210}$$

EJERCICIO 2 :

Construir la tabla de la distribución de frecuencias de la variable aleatoria Y; que representa el puntaje total obtenido al lanzar dos dados equilibrados.



RESOLUCIÓN:

En la siguiente tabla de doble entrada se muestran los puntajes totales obtenidos al lanzar dos dados.

2° dado / 1° dado	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Sea la variable **Y**, definida por el puntaje total obtenido al lanzar los dados. Los valores posibles que toma la variable **Y** de la tabla anterior son: ***2; 3;4;5;6; 7; 8;9;10;11* y *12*.**

Entonces la tabla de distribución de probabilidad de la variante aleatoria ***Y*** *es* la siguiente :

y	Py
2	1/36
3	2/36
4	3/36
5	4/36
6	5/36
7	6/36
8	5/36
9	4/36
10	3/36
11	2/36
12	1/36

FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN O DE ACUMULACIÓN DE UNA VARIABLE ALEATORIA DISCRETA

Para una variable aleatoria x, su función de acumulación se define como: $F(k)=P(X \leq k)$ para todo número real k. Así, para la variable aleatoria x, cuya función de distribución es :

x	1	2	3	4
$P_x=P(X=x)$	0,2	0,3	0,4	0,1

se tiene, por ejemplo, que:

$F(0) = P(x \leq 0) = 0$

$F(1) = P(x \leq 1) = P(x = 1) = 0,2$

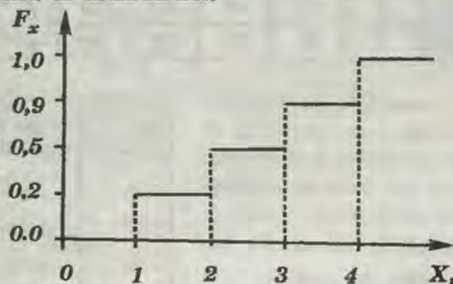
$F(2,5) = P(x \leq ; 2,5) = P(x=1)+P(x= 2)$

$= 0,2 + 0,3 = 0,5$

En general, para esta variable la función de distribución o de acumulación es:

$$F(X)=\begin{cases} 0 & si \quad x\leq 1 \\ 0,2 & si \quad 1x\leq 1<2 \\ 0,5 & si \quad 2\leq x<3 \\ 0,9 & si \quad 3\leq x<4 \\ 1 & si \quad x\leq 4 \end{cases}$$

En la siguiente figura se muestra el gráfico de esta función de acumulación



EJERCICIO :

Un embarque de ocho televisores contiene dos aparatos defectuosos. Una tienda distribuidora realiza una compra aleatoria de dos de ellos. Si x es el número de unidades defectuosas que se compran, encontrar la distribución de acumulación de x

RESOLUCIÓN:

Los valores que puede tomar la variable x son *0; 1* y *2* y las probabilidades asociadas se dan a continuación:

$$P_0=P(x=0)=\frac{\binom{2}{0}\binom{6}{2}}{\binom{10}{4}}=\frac{15}{28}=0,54$$

$$P_1=P(x=1)=\frac{\binom{2}{1}\binom{6}{1}}{\binom{8}{2}}=\frac{12}{28}=0,43$$

$$P_2=P(x=2)=\frac{\binom{2}{2}\binom{6}{0}}{\binom{8}{4}}=\frac{1}{28}=0,03$$

La tabla de la función de distribución de la variable x es:

x	0	1	2
$P_x=P(X=x)$	0,54	0,43	0,003

A partir de la tabla anterior, se puede elaborar la distribución de acumulación de x.

Si $X<0$, $F(X)=P(X<0)=0$

Si $0\leq X<1$; $F(0)=P(X\leq 0)=0,54$

Si $1\leq X<2$; $F(1)=P(X\leq 1)$

$=0,54+0,43=0,97$

Si $X\geq 2$; $F(2)=P(\leq 2)$

$=0,54+0,43+0,03=1,00$

resumiendo, la distribución de acumulación de la variable aleatoria **X** es.

$$F(X)=\begin{cases} 0 & \text{si} \quad x<0 \\ 0,54 & \text{si} \quad 0\leq x<1 \\ 0,97 & \text{si} \quad 1\leq x<2 \\ 1 & \text{si} \quad x\geq 2 \end{cases}$$

ESPERANZA Y VARIANZA DE UNA VARIABLE ALEATORIA DISCRETA

Tanto la media y la varianza son características importantes de toda distribución probabilística. La media indica la ubicación central de los datos y la varianza describe la dispersión de estos alrededor de la media.

EJEMPLO :

Un bodeguero observa que en las últimas cuatro semanas, la demanda de leche fresca en bolsa está aumentando. Sin embargo, no desea invertir en un pedido mayor porque prefiere invertir en otros productos que también tienen rotación. Él conoce cómo es la demanda diaria, sin embargo desea tener una medida resumen; es decir, una sola cantidad que lo apoye en su decisión.

Para esto cuenta con los registros de la cantidad demandada de leche, en unidades, en los últimos treinta días.

Cantidad demandada (unidades) (X)	Nº días f_i	Frecuencia relativa $fr_i\frac{f_i}{n}=P(X=x)$
10	6	(6/30) = 0,20
18	6	(7/30) = 0,23
20	9	(9/30) = 0,30
21	8	(8/30) = 0,27
	$n=30$	$\sum P(X=x)=1$

Observando la tabla se diría que la probabilidad de que en un día cualquiera se demanden diez bolsas de leche es igual a la frecuencia relativa asociada, es decir ***0,20***. De igual manera se definirán las probabilidades en los casos en que se demanden dieciocho, veinte o veintiún bolsas de leche.

Justamente una de las medidas resumen está representada por el valor esperado o media de la

distribución de probabilidades, que se define como:

El valor esperado, denotado por μ_x *o* por $E(X)$, es un valor representativo de la distribución de probabilidad. Es el valor medio que se espera obtener cuando se realiza el experimento un número grande de veces.

El valor esperado de una variable aleatoria discreta se calcula con la siguiente fórmula:

$$\mu_x = E(X) = \sum_{x \in R_x} x \cdot P(X=x)$$

donde $P(X=x)$, es la probabilidad de los diversos resultados de X.

Para el caso del bodeguero, la cantidad promedio esperada de leche será:

$E(x)=(10)(0,20)+(18)(0,23)+(20)(0,30)+(21)(0,27) = 17,8$

El bodeguero espera vender en promedio aproximadamente dieciocho bolsas de leche en bolsa por día.

Otra de la medidas resumen que mide la dispersión de la distribución de probabilidad de una variable aleatoria es la varianza, que se denota con σ^2 y se calcula con la siguiente fórmula:

$$\sigma^2 = V(X) = \sum_{x \in R_x} (x - \mu_x)^2 P(X=x)$$

La desviación estándar es la raíz cuadrada de la varianza. $\sigma = \sqrt{V(X)}$

Para el caso de la demanda de leche, los cálculos necesarios para obtener la varianza y desviación estándar se muestran en la siguiente tabla.

(X)	P(X=x	$(X-\mu_x)^2$	$(X-\mu_x)^2 P(X+x)$
10	0,20	61,00	12,20
18	0,23	0,04	0,01
20	0,30	4,80	1,44
21	0,27	10,18	2,75
			$\sigma_x^2 = \sum (X-\mu)^2 P(X=x) = 16,4$ $\sigma_x = \sqrt{16,4} \approx 4$

La varianza y desviación estándar para el caso de la demanda de leche es ***16,4*** y ***4*** respectivamente.

EJEMPLO:

Se ha determinado que el número de camiones de carga que arriban cada día a un pueblo, que está a ***30 km*** de Junín, sigue la distribución de probabilidad de la tabla siguiente.

Número de Camiones X	*Probabilidad*
0	0,05
1	0,10
2	0,15
3	0,25
4	0,30
5	0,10
6	0,05

Calcula el número esperado de arribos por día, la varianza y la desviación estándar de la variable aleatoria.

RESOLUCIÓN:

Sea la variable aleatoria para el ejemplo.

X : número de camiones de carga que arriban cada día al pueblo Los cálculos previos para encontrar el número esperado de arribos por día, la varianza y la desviación estándar se muestran en la tabla siguiente.

(X)	P(X=x)	X.P(X=x)	$(X-\mu)^2$	$(X-\mu)^2.P(X=x)$
0	0,05	0,00	9,92	0,05
1	0,10	0,10	4,62	0,46
2	0.15	0,30	1,32	0,20
3	0,25	0,75	0,02	0.10
4	0,30	1,20	0,72	0,22
5	0,10	0,50	3,42	0,34
6	0,05	0,30	8,12	0,41
		$\mu = E(X) = 3,15$		$V(X) = 2,13$ $\sigma = 1,46$

En promedio el número de camiones que arriban al día será ***3,15;*** la varianza ***2,13*** y la desviación estándar ***1,46***.

OBSERVACIÓN :

Cuando la variable aleatoria es discreta es igual a la suma de la probabilidad de cada posible suceso aleatorio multiplicado por el valor de dicho suceso. Por lo tanto, representa la cantidad media que se «espera» como resultado de un experimento aleatorio cuando la probabilidad de cada suceso se mantiene constante y el experimento se repite un elevado número de veces. Cabe decir que el valor que toma la esperanza matemática en algunos casos puede no ser «esperado» en el sentido más general de la palabra el valor de la esperanza puede ser improbable o incluso imposible.

EJERCICIO PROPUESTO :

Un juego consiste en extraer una carta de una baraja española (40 cartas) y:

* si sale Sota o Saballo recibimos 15 céntimos
* si sale As o Rey recibimos 5 céntimos
* si sale cualquier otra carta pagamos 4 céntimos

Calcula la ganancia esperada.

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1:

Un repuesto de automóvil se venden en *6* tiendas en la Victoria o en *8* tiendas de Breña. ¿De cuántas formas se puede adquirir el repuesto?

A) 11 *B) 13* *C) 48* *D) 14* *E) 15*

RESOLUCION:

* Por el principio de adición:

$$\overbrace{6\ formas}^{Victoria}\ \overbrace{+}^{ó}\ \overbrace{8\ formas}^{Breña} = 14\ formas$$

RPTA: "D"

PROBLEMA 2:

Se desea cruzar un río , para ello se dispone de *3* botes, *2* lanchas y *1* deslizador. ¿De cuantas formas se puede cruzar el río utilizando los medios de transporte señalados?

A) 3 *B) 5* *C) 12* *D) 9* *E) 6*

RESOLUCION:

* Aplicando el principio de adición se tiene:

$$\overbrace{3}^{Bote}\ \overbrace{+}^{ó}\ \overbrace{2}^{lancha}\ \overbrace{+}^{ó}\ \overbrace{1}^{deslizador} = 6$$

$\rightarrow \#\ maneras = 3 + 2 + 1 = 6$

RPTA: "E"

PROBLEMA 3:

Entre Lima y Huancayo hay *5* líneas de automóviles diferentes y entre Huancayo y Ayacucho hay *3* líneas de automóviles. ¿De cuántas maneras puede una persona ir de Lima a Ayacucho y regresar en líneas diferentes?

A) 201 *B) 185* *C) 120* *C) 6 0* *E) 23*

RESOLUCION:



* Para ir : $5 \times 3 = 15$
* Para venir : $2 \times 4 = 8$

$\Rightarrow$ Para ir y venir es : $15 \times 8 = 120$ formas

RPTA: "C"

PROBLEMA 4 :

¿De cuántas maneras podrá vestirse una persona que tiene *3* pares de zapatillas, *4* buzos (*2* iguales), *5* pares de medias y *6* polos (*3* iguales)?

A) 360 *B) 180* *C) 135* *D) 240* *E) 225*

RESOLUCION:

* Al vestirse utilizó un par de zapatillas ***(Z)***, *1* buzo ***(B)***, *1* par de medias ***(M)*** y un polo ***(P)*** , Entonces :

$$\begin{array}{cccc} Z \times & M \times & P \times & B \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array}$$

$$\#\ formas = 3 \times 3 \times 5 \times 4 = 180$$

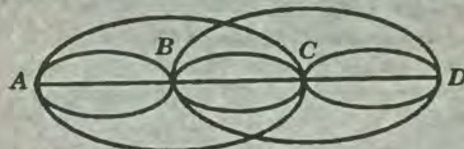
OBSERVACIÓN :

Los artículos iguales se contabilizan una sola vez.

RPTA: "B"

PROBLEMA 5 :

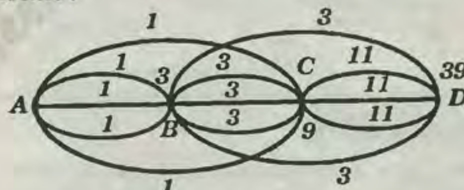
¿De cuántas maneras diferentes podrá viajar una persona de *A* a *D* sin retroceder?



A) 36 *B) 33* *C) 13* *D) 24* *E) 39*

RESOLUCION :

* Identificamos con un nombre a cada camino diferente :



* Razonemos de la siguiente forma :

I) para llegar a ***B*** se podrá llegar ya sea por arriba o por abajo o en medio(pero no simultáneamente por los *3*), por que aplicaremos el principio de adición ; así :

\# de formas de llegar de ***A*** a ***B*** : $1 + 1 + 1 = 3$

II) luego apliquemos el razonamiento anterior a todos los tramos enumerando (método enumerativo – aditivo) , así :

$$\begin{pmatrix} \#de\ formas\ de \\ llegar\ de\ A\ a\ B \end{pmatrix} = 11+11+11+3+3=39$$

RPTA: "E"

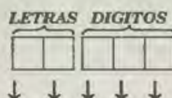
PROBLEMA 6 :

¿Cuántas placas para automóviles pueden hacerse si cada placa consta de dos letras diferentes seguidas de tres dígitos diferentes? (considerar *26* letras del alfabeto).

A 676 000 *B) 936 000* *C) 642 000*
D) 468 000 *E) 234 000*

RESOLUCION:

* Los guarismos o cifras que intervienen en las matrículas son del *0* al *9*. El siguiente esquema representa las placas:



↓ ↓ ↓ ↓ ↓

$26 \times 26 \times 10 \times 9 \times 8 = 468000$

→ ***placas = 26×25×10×9×8 = 468000***

EXPLICACIÓN :

* El ***1er.*** casillero puede ocupar cualquiera de las ***26*** letras.

* El ***2do.*** casillero puede ocupar cualquiera de las ***25*** letras que restan.

* El ***3er.*** casillero to puede ocupar cualquiera de los ***10*** dígitos (del ***0*** al ***9***).

* El ***4to.*** casillero lo puede ocupar los ***9*** dígitos que están quedando.

* Finalmente para el último casillero solamente le quedan ***8*** dígitos.

RPTA: "D"

PROBLEMA 7 :

El aula selección de una academia consta de ***12*** alumnos a los cuales se le toma el examen final. ¿Cuántas opciones distintas se tiene para ocupar los ***4*** primeros puestos si no hay empate?

A) 11320 B) 13200 C) 11200 D) 11880 E) 12400

RESOLUCIÓN :

* Como son ***12*** alumnos uno de ellos puede ocupar el ***1er.*** puesto (***12*** opciones), para el ***2do.*** puesto quedarán ***11*** alumnos (***11*** opciones), para el ***3er.*** puesto quedan ***10*** alumnos (***10*** opciones) y para el ***4to.*** puesto quedan ***9*** alumnos (***9*** opciones).

1° 2° 3° 4°

↓ ↓ ↓ ↓

formas= 12×11 ×10 ×9=11880

RPTA: "D"

PROBLEMA 8 :

¿Cuántos numerales de 2 cifras se pueden formar con los dígitos ***1*** ; ***3*** ; ***5*** y ***7*** ?

A) 120 B) 12 C) 24 D) 16 E) 96

RESOLUCIÓN :

MÉTODO 1 : (mediante arreglo numérico)

* Con los dígitos dados, formamos los siguientes números :

11 13 15 17

31 33 35 37

51 53 55 57

71 73 75 77

se aprecia que se pueden formar ***16*** numerales

MÉTODO 2 : (mediante la aplicación de los principios de análisis combinatorio)

* La forma general del numeral pedido es :

$\overline{ab}$

↓ ↓

1 1

2 2

3 3

4 4

4×4 = 16 numerales

⇒ cantidad de números = ***4× 4 = 16***

RPTA: "D"

PROBLEMA 9 :

¿De cuántas maneras diferentes se pueden colocar ***12*** cuadernos iguales en un estante cuya forma es la que se indica en la figura si se desea que en cada casilla haya a lo más un cuaderno y en cada fila y en cada columna ***3*** cuadernos?

A) 6 B) 12 C) 24 D) 30 E) 16

RESOLUCIÓN:

* Podemos notar que la condición de haya en cada fila o columnas ***3*** libros equivale a que en cada fila o columna quede un casillero vacío. Tomando referencia a las columnas ***A , B , C*** y ***D***.

* En *1ra.* columna se tiene ***4*** opciones para que ***1*** casillero quede vacío.

* En la *2da.* columna quedaron ***3*** opciones (no consideramos el casillero de la fila que está el *1er.* casillero vacío).

* Igualmente en la *3ra.* columna ***2*** opciones.

* y para culminar en la ***4ta.*** columna , ***1*** opción.

* Por el principio de multiplicación :

maneras =4 × 3 × 2 × 1 = 24

RPTA: "C"

PROBLEMA 10 :

Determinar cuántos numerales de ***3*** cifras existen en el sistema de base seis.

A) 120 B) 12 C) 240 D) 180 E) 96

RESOLUCION:

* La forma general del numeral es $\overline{abc}$, hallaremos las posibilidades que pueden tomar **a**, **b** y **c** en base seis y luego multiplicamos el número de las posibilidades

a	b	$c_{(6)}$
↓	↓	↓
1	0	0
2	1	1
3	2	2
4	3	3
5	4	4
	5	5

$5\times6\times6=180$ ***numerales***

→ se pueden formar ***180*** numerales

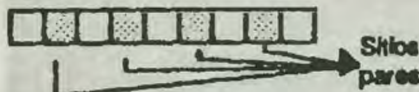
RPTA: "D"

PROBLEMA 11 :

Se quieren sentar ***5*** hombres y ***4*** mujeres en una fila de modo que las mujeres ocupen los sitios pares. ¿De cuántas formas pueden sentarse?

A) 51840 B) 2880 C) 144 D) 120 E) 24

RESOLUCIÓN:



* Las mujeres podrán sentarse de :

$4\times3\times2\times1=24$ ***formas***

* Los hombres podrán ubicarse de :

$5\times4\times3\times2\times1=120$ ***formas***

* Como tanto, hombres y mujeres se deben sentarse en forma simultánea aplicamos "El principio de multiplicación".

→ ***#de formas = 24×120 = 2880***

RPTA: "B"

PROBLEMA 12 :

¿Cuántos numerales de la forma:

$\overline{a(a+2)b(b-3)c_8}$ existen?

A) 146 B) 288 C) 576 D) 200 E) 864

RESOLUCIÓN:

* En estos tipos de problemas hay que tener en cuenta que cuando una variable representa una cifra, y esta se repite en el numeral, entonces a dicha variable se le considera una sola vez al calcular la cantidad de numerales.

* En nuestro problema, con la indicación anterior , tendremos :

a	$(a+2)$ ... b	$(b-3)c_8$
↓	↓	↓
1	3	0
2	4	1
.	.	.
5	7	7

cantidad de numerales = ***5 ×5× 8 = 200***

→ se pueden formar ***200*** numerales

RPTA: "D"

PROBLEMA 13 :

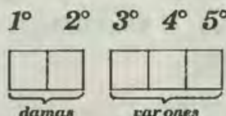
¿De cuántas formas se pueden sentar en una fila de ***5*** asientos ***3*** hombres y ***2*** mujeres de

A) 120 B) 12 C) 24 D) 48 E) 96

RESOLUCION:

* Asumamos que las damas ***A*** y ***B*** ocupan el ***1er.*** y ***2do.*** asiento , tenemos:

1° 2° 3° 4° 5°



* Analizando dicho caso particular :

I) Las damas se podrán sentar de:

$2\times1=2$ ***formas***

II) Los tres varones como disponen de ***3*** asientos se podrán sentar de:

$3\times2\times1=6$ ***formas***

* Luego:

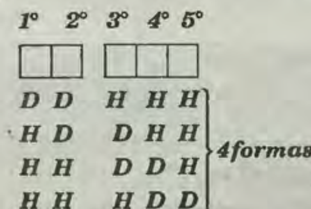
Por el «Principio de multiplicación» tenemos que el número de formas en dicha situación es :

(2)(6) = 12 formas

* Pero :

Notamos que las damas juntas se comportan como uno solo y en dicha fila se varía de ***4*** formas, veamos la figura:

1° 2° 3° 4° 5°



→ ***# total de formas: 4 (12) = 48***

RPTA: "D"

PROBLEMA 14 :

¿Cuántos numerales de tres cifras diferentes existen en el sistema de base decimal?

A) 646 B) 288 C) 576 D) 200 E) 648

RESOLUCION:

* La forma general del numeral es $\overline{abc}$, hallaremos las posibilidades que pueden tomar **a**, **b** y **c** en base diez y luego multiplicamos el número de las posibilidades, teniendo en cuenta que las tres cifras deben ser diferentes

a	b	c
↓	↓	↓
1	0	0
2	1	1
.	.	
.		
9	(10 − 1)	(10 − 2)

$9 \times 9 \times 8 = 648$ ***numerales***

→ se pueden formar **648** numerales

RPTA: "E"

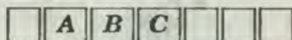
PROBLEMA 15 :

¿De cuántas formas pueden ordenarse **7** libros en un estante, si **3** libros determinados deben estar juntos?

A) 144 B) 288 C) 576 D) 624 E) 864

RESOLUCION:

* En el siguiente esquema asumamos que **A**, **B** y **C** son los libros que estan juntos (situación particular):



I) Los **3** libros **A**, **B** y **C** se pueden ordenar de:

$3 \times 2 \times 1 = 6$ ***formas***

II) Para los **4** libros restantes se podrán acomodar de: $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ ***formas***

III) Como los libros **A**, **B** y **C** están juntos en la fila podrán variar de: **6** formas

→ # total de formas es: $6 \times 24 \times 6 = 864$

RPTA: "E"

PROBLEMA 16 :

Un estudiante para ir a la universidad y regresar puede emplear como medio de transporte «bicicleta» o «bus» durante la semana (incluido los domingos). ¿Cuántos días deberán transcurrir para que puedan suceder todas las formas pôsibles en que puedan combinarse el ir y venir ya sea en «bicicleta» o «bus» durante una misma semana?

A) 28 B) 256 C) 1792 D) 16381 E) 16384

RESOLUCION:

* Sea el esquema que representa los días de la semana :

L	M	M	J	V	S
↓	↓	↓	↓	↓	↓

$4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 = 4^6$ ***semanas***

→ $\#días = 4^6 \times 7 = 16384$ ***días***

RPTA: "E"

PROBLEMA 17 :

¿De cuantas formas pueden sentarse en una misma mesa circular de **6** asientos un equipo de **6** personas?, si:

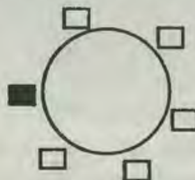
a) Cualquiera de las mujeres pueden ubicarse en los asientos.

b) Dos de las personas deben estar siempre juntas.

RESOLUCION:

* El ordenamiento que se realiza se considera con respecto a la mesa.

I) Asumamos que una de las **6** personas está ya sentada como en la figura:



* En los **5** asientos las **5** personas podrán variar de:

$5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$ ***formas***

II) Considerando que de las **6** personas están juntas dos de ellas y a su vez ubicadas en el gráfico:



• Los que están juntos podrán variar de:

$(2 \times 1) = 2$ ***formas***

• Los **4** restantes se podrán ordenar de:

$4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ ***formas***

→ # maneras de sentarse: **2 (24) = 48**

PROBLEMA 18:

¿Cuántos numerales de la forma:

$$\overline{a\left(\frac{14}{a}\right)b\left(\frac{b}{3}\right)_9}$$

existen?

A) 20 B) 3 C) 9 D) 60 E) 70

RESOLUCION:

* Los valores de «a» deben se factores de 14 y además menores que 9 ; luego los valores posibles de «a» solo pueden ser : 1; 2 ; 7 ; es decir hay 3 posibilidades.

* Los valores de «b» son múltiplos de 3 , menores que 9; luego los valores de «b» solo pueden ser: 0 ; 3 y 6; es decir hay 3 posibilidades :

$$\overline{a\left(\frac{14}{a}\right)b\left(\frac{b}{3}\right)}_9$$

↓		↓
1		0
2		3
7		6
3	×	3 = 9numerales

RPTA: "C"

PROBLEMA 10 :

Un tablero está constituido por casilleros distribuidos en 5 columnas y 4 filas, se desean colocar 4 fichas de diferentes colores en el tablero de tal manera que haya a lo sumo una sola ficha por fila y por columna. ¿De cuántas maneras pueden colocarse las fichas?

A) 5760 B) 1152 C) 2880 D) 65536 E) 14400

RESOLUCION:

* Dadas las fichas {a; b; c; d}.

A continuación mostramos la secuencia como han sido ubicadas las fichas:

(I)

	a			

(II)

		b		
	a			

(III)

		b		
	a			
			c	

(IV)

		b		
	a			
			c	
d				

EXPLICACIÓN :

I) Para ubicar la *1ra.* ficha (*a*) se tiene: *20* opciones

II) Para colocar la *2da.* ficha *(b)* se tiene: *12* opciones

III) Para la *3ra.* ficha *(c)* se tiene: *6* opciones

IV) Para la *4ta.* ficha *(d)* se tiene: *4* opciones

* luego aplicando el «Principio de multiplicación» :

$$\#formas: 20 \times 12 \times 6 \times 4 = 5760$$

RPTA: "A"

PROBLEMA 20 :

Con 10 triángulos negros y 10 triángulos blancos que ocupen medio cuadradito, se quiere cubrir, un tablero en forma de rectángulo dividido en 10 cuadraditos iguales (como se muestra en la figura) ¿de cuántas maneras puede hacerse con la condición de que no haya 2 triángulos del mismo color con un lado común?



A) 10 B) 26 C) 288 D) 128 E) 1024

RESOLUCION:

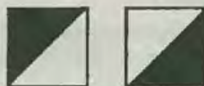
* Asignemos una letra a cada casillero:

A	B	C	D	E
F	G	H	I	J

* Para cubrir la casilla «A» se tienen 4 opciones :



* Elegida una de ellas, por ejemplo la primera de la izquierda, sólo hay 2 opciones para llenar «B» :



* Para llenar «F», tendremos 2 opciones:



* De igual modo para «C», «D» y «E» tendremos 2 opciones para cada una.

* Para llenar «G» tendremos 1 opción, ya que «B» y «F» están ya definidos (igual para «H», «I» y «J»).

* Pero todo el cubrimiento será :

A y B y C y D y E y F y G y H y I y J

↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓

$$4 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1$$

$= 128$ maneras

RPTA: "D"

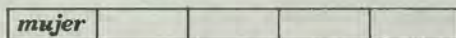
PROBLEMA 21 :

En una fila de *6* asientos se desean sentar *3* hombres y *1* mujer. ¿De cuántas maneras lo podrán hacer si a un lado de la mujer están los *3* hombres?

A) 24 *B) 30* *C) 40* *D) 60* *E) 180*

RESOLUCION:

1ER. CASO : (Cuando los hombres están a la derecha de la mujer)

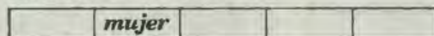


1er. hombre : 5 opciones

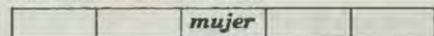
2do. hombre : 4 opciones

3er. hombre : 3 opciones

→# maneras : $5 \times 4 \times 3 = 60$



→# maneras: $4 \times 3 \times 2 = 24$



→# maneras: $3 \times 2 \times 1 = 6$

2DO. CASO : (Cuando los hombres están a la izquierda de la mujer)

* Notamos que sería similar que el ***1er.*** caso:

→ #maneras: $60 + 24 + 6 = 90$

* finalmente :

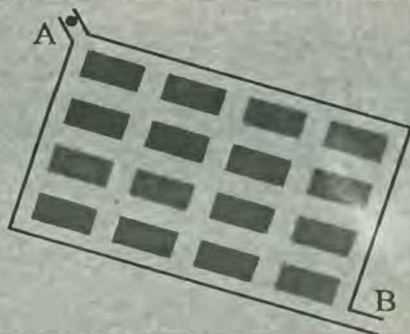
→# total de formas es: $2\ (90) = 180$

RPTA: "E"

PROBLEMA 22 :

Si se suelta una bolita en «*A*», ¿de cuántas formas diferentes puede llegar a «*B*»?

A) 16
B) 256
C) 70
D) 64
E) 81



RESOLUCIÓN :

* El problema es análogo a preguntar, ¿de cuántas maneras se puede ir de «*A*» a «*B*» por el camino más corto, para lo cual utilizaremos el método enumerativo utilizado en razonamiento inductivo deductivo :

A	1	1	1	1	
1	2	3	4	5	
1	3	6	10	15	
1	4	10	20	35	
1	5	15	35	70	B

$\begin{pmatrix}\text{\# de formas de}\\ \text{llegar de A a B}\end{pmatrix} = 70$

RPTA: "C"

PROBLEMA 23 :

¿Cuántas señales diferentes pueden hacerse izando seis banderas de diferentes colores una sobre otra, si pueden izarse cualquier número de ellas a la vez?

A) 248 *B) 302* *C) 40* *D) 876* *E) 180*

RESOLUCION:

* ***1ER. CASO :*** Cuando se iza una bandera:

señaleses = 6

* ***2DO. CASO :*** Cuando se izan **2** banderas:

señales = $6 \times 5 = 30$

* ***3ER. CASO:*** Cuando se izan **3** banderas:

señales = $6 \times 5 \times 4 = 120$

* ***4TO. CASO:*** Cuando se izan **4** banderas:

señales = $6 \times\times 5 \times 4 \times 3 = 360$

* ***5TO. CASO*** : Cuando se izan **5** banderas:

señales = $6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 = 720$

* ***6TO. CASO :*** Cuando se izan **6** banderas:

señales = $6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$

* finalmente :

$\begin{pmatrix}\text{\# total de}\\ \text{señales}\end{pmatrix} = (6+30+120+360+360) = 876$

RPTA: "D"

PROBLEMA 24 :

¿Cuántas palabras diferentes de **4** letras se pueden formar con todas las letras de la palabra ***LOLO*** sin necesidad que tengan significado?

A) 6 *B) 12* *C) 24* *D) 36* *E) 120*

RESOLUCION:

* Si asumimos que las palabras estan formadas por letras diferentes O_1 ; O_2 ; L_1 y L_2; entonces se tendría que el número de palabras es:

$$4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

* Analizemos una de las palabras, por ejemplo ***OLLO*** al considerar letras diferentes serán los siguientes : $O_1L_1L_2O_2$; $O_2L_1L_2O_1$; $O_1L_2L_1O_2$ y

$O_2L_2L_1O_1$; el cual indicaría que hemos tomado en cuenta 4 veces una misma palabra porque hemos considerado que L_1 y L_2 se han variado de $2\times 1 = 2$ formas , igualmente O_1 y O_2 de formas el cual hacen $(2)\times(2) = 4$ palabras.

$$\# \text{ palabras diferentes } = \frac{24}{(2\times 1)(2\times 1)} = 6$$

Los cuales son: ***OOLL ; OLOL ; OLLO ; LLOO ; LOLO ; LOOL .***

RPTA: "A"

PROBLEMA 25 :

Determinar cuántas palabras diferentes se podrán formar con las letras de la palabra ***"ULLUNCULU"*** con o sin significado.

A) 360 B) 720 C) 1440 D) 2520 E) 7560

RESOLUCION:

I) Asumiento que son letras diferentes el número de palabras es:

$$9\times 8\times 7\times 6\times 5\times 4\times 3\times 2\times 1$$

II) Pero en una de las palabras al asumir letras diferentes:

* La variable «*U*» (*4* letras *A*) se han variado de:

$$4\times 3\times 2\times 1 \text{ formas}$$

* La variable «*L*» (*3* letras *L*) se han variado de :

$$3\times 2\times 1 \text{ formas}$$

\# palabras diferentes;

$$\frac{9\times 8\times 7\times 6\times 5\times 4\times 3\times 2\times 1}{\underbrace{(4\times 3\times 2\times 1)}_{\text{Por las } U}\times\underbrace{(3\times 2\times 1)}_{\text{Por las } L}} = 2520$$

RPTA: "D"

PROBLEMA 26 :

¿De cuántas formas pueden elegirse un comité de *3* personas entre *12*?

A) 1330 B) 220 C) 1210 D) 665 E) 220

RESOLUCION:

* Suponiendo que me interese el orden de cada comité, se tendría :

$$12\times 11\times 10 = 1320 \text{ formas .... } (I)$$

* Pero en cada comité de *3* personas notamos que al ordenarse se tiene :

$$3\times 2\times 1 = 6 \text{ formas ....}(II)$$

* Es decir en *(I)* un comité se esta contando *6* veces cuando realmente se debe considerar una sola vez.

$$\# \text{ comités} = \frac{1320}{6} = 220$$

RPTA: "B"

OBSERVACIÓN :

* Cuando no me interese el orden de los elementos en el cual de «*n*» elementos se formen grupos de «*r*» elementos se determina del modo siguiente:

$$\# \text{ formas diferentes} = \frac{n(n-1)(n-2)....(n-r+1)}{r(r-1)(r-2)...\times 1}$$

PROBLEMA 27 :

¿De cuántas formas pueden seleccionarse *6* preguntas de un total de *10*?

A) 45360 B) 5040 C) 720 D) 420 E) 210

RESOLUCIÓN:

* Notamos que no me interesa el orden de las preguntas , entonces tomando en cuenta la observación anterior :

$$\begin{pmatrix}\# \text{ formas a}\\ \text{seleccionarse}\end{pmatrix} : \frac{10\times 9\times 8\times 7\times 6\times 5}{6\times 5\times 4\times 3\times 2\times 1} = 210$$

RPTA: "E"

PROBLEMA 28 :

La barra de una cafetería tiene *7* asientos en una fila. Si *4* personas desconocidas entre sí ocupan lugares al azar . ¿De cuántas maneras diferentes pueden quedar los *3* asientos restantes desocupados?

A) 720 B) 1440 C) 4320 D) 840 E) 800

RESOLUCIÓN:

* Notamos que la cantidad de maneras que los *3* asientos queden desocupados equivalen a la cantidad de formas que puedan sentarse las *4* personas:

$$\begin{pmatrix}\text{Cantidad de}\\ \text{maneras}\end{pmatrix} : P_4^7 = 7\times 6\times 5\times 4 = 840$$

RPTA: "D"

PROBLEMA 29 :

Con *7* consonantes y *5* vocales diferentes, ¿cuántas palabras pueden formarse que consten de *4* consonantes y *3* vocales? (No es necesario que las palabras tengan significado).

A) 1764000 B) 50400 C) 5040 D) 1080 E) 350

RESOLUCION :

* De las *7* consonantes escogemos *4* , siendo el número de formas:

$$C_4^7 = \frac{7\times 6\times 5\times 4}{1\times 2\times 3\times 4} = 35$$

* De la misma forma de las *5* vocales escogemos *3* , sería :

$$C_3^5 = \frac{5\times 4\times 3}{1\times 2\times 3} = 10$$

* Las *7* letras de cada palabra pueden seleccionarse de :

$(35)\ (10)=350$ formas

* Después de seleccionar las **7** letras éstas se pueden permutar de :

$$P_7^7=7\times6\times5\times4\times3\times2\times1=5040$$

$$\rightarrow \#\ palabras\ es:\ 5040\ (350)=1764000$$

RPTA: "A"

PROBLEMA 30 :

Al acudir al cine **4** parejas de amigos encuentran solamente **4** asientos en fila . ¿De cuántas maneras distintas se podrán sentar si se quiere que por lo menos esté sentado un hombre y una mujer?

A) 1320 B) 1420 C) 1584 D) 1632 E) 1840

RESOLUCION:

• Como se quiere que por lo menos esté sentado un hombre y una mujer , entonces no debemos considerer cuando se sientan los *4* hombres *o* las *4* mujeres (método del complemento).

I) Determinando el total en que las **8** personas se puedan sentar en los **4** asientos:

$$P_4^8=8\times7\times6\times5=1680$$

II) Calculamos lo que no nos interesa :

* Cuando se sientan los **4** hombres de :

$$P_4^4=4\times3\times2\times1=24$$

* Cuando se sientan las **4** mujeres de :

$$P_4^4=4\times3\times2\times1=24$$

$$\rightarrow \#\ maneras=1680-48=1632$$

RPTA: "D"

PROBLEMA 31 :

¿Cuántas palabras de **4** letras se pueden formar con **7** mayúsculas y **8** minúsculas de las cuales **3** son vocales , de tal forma que cada palabra empiece en mayúscula y tenga al menos una vocal minúscula siendo todas letras diferentes?

A) 8736 B) 6552 C) 5532 D) 5586 E) 5584

RESOLUCIÓN:

I) Determinamos el número de palabras que tengan mayúsculas y minúsculas c/s vocal.

Mayúscula *Minúscula*



$$7\ \times\ P_2^{13}\ \times\ 8$$

$$\rightarrow \#\ palabras:\ 7\times13\times12\times8=8736$$

II) Determinamos el **#** de palabras que no tengan vocal (no nos interesan).

Mayúscula *Minúscula*



$$7\ \times\ P_2^{10}\ \times\ 8$$

$$\rightarrow \#\ palabras:\ 7\times10\times9\times5=3150$$

* Por diferencia calculamos el **#** de palabras que tengan al menos una vocal (que cumpla la condición).

$$8736-3150=5586\ palabras$$

RPTA: "D"

PROBLEMA 32 :

La selección peruana de voleibol está conformada por **18** chicas. ¿ De cuántas maneras se puede conformar un equipo de **6** si se sabe que **3** de ellas se niegan a jugar en el mismo equipo ?

A) $5C_6^{15}$ **B)** $14C_5^{15}$ **C)** $13C_6^{15}$ **D)** $5/3C_6^{19}$ **E)** $14/3C_5^{15}$

RESOLUCIÓN :

* La delegación de **6** chicas para que cumpla la condición podría presentarse en los siguientes casos:

1ER. CASO : Si no figura ninguna de las **3** que se niegan estar juntas , las **6** restantes deben escogerse entre **15** :

$$\#\ equipos=C_6^{15}=\frac{5}{3}C_5^{15}$$

2DO. CASO : Si interviene una de las **3** que se niegan estar juntas , los otros **5** deben escogerse de los **15** restantes :

$$\#\ equipos=C_1^3\times C_5^{15}=3C_5^{15}$$

* finalmente :

$$\#\ total\ de\ equipos:\ \frac{5}{3}C_5^{15}+3C_5^{15}=\frac{14}{3}C_5^{15}$$

RPTA: "E"

PROBLEMA 33 :

Con **7** ingenieros y **8** médicos se debe formar un comité de **6** miembros. ¿De cuántas maneras puede formarse el comité que al menos incluya dos ingenieros?

A) 5005 B) 2002 C) 3049 D) 4056 E) 4929

RESOLUCIÓN :

I) Determinando el total de comisiones sin restricción alguna es :

$$C_6^{15}=\frac{15!}{6!\times9!}=5005$$

II) Calculando los casos que no interesan al problema que son :

* Cuando la comisión está formada por solamente médicos :

$$C_6^8=\frac{8!}{6!\times2!}=28$$

* Cuando intervenga en la comisión un solo ingeniero , es:

$$C_1^8\times C_5^6=8\times\frac{6!}{5!\times1!}=48$$

*** finalmente :**

comisiones : 5005 – (28 + 48) = 4929

RPTA: "E"

PROBLEMA 34 :

Se tiene una mesa redonda en la cual se pueden sentar **7** mujeres y **7** hombres. ¿De cuántas maneras lo podrán hacer con la condición de que no queden juntos dos hombres?

A) 12!   B) 13!   C) 14!   D) 13! – 12!   E) $(6!)^2$

RESOLUCION:

* Para que no estén juntos dos hombres, los hombres y las mujeres deben acomodarse de manera intercalada.

* Luego los hombres se podrán sentar de :

$$(7-1)\ 6!\ formas$$

* Igualmente las mujeres se podrán ubicar de:

$$(7-1) = 6!\ formas$$

* Pero como ambas permutaciones se deberán dar en forma simultánea.

$$\#\ maneras\ es:\ 6!\times 6! = (6!)^2$$

RPTA: "E"

PROBLEMA 35 :

¿De cuántas maneras diferentes se pueden sentar **10** personas en una mesa redonda de **6** asientos, si **4** están en espera?

A) 5!   B) 24×5!   C) 25×5!   D) 100×5!   E) 210×5!

RESOLUCIÓN:

I) Determinando el número de grupos de **6** personas que se ubican en la mesa circular es:

$$C_6^{10} = \frac{10!}{6!\times 4!} = 210$$

II) Cada grupo de **6** personas se podrán sentar en la mesa circular de :

$$(6-1)! = 5!\ formas$$

*** finalmente :**

$$\#\ total\ de\ formas\ es : 210\times 5!$$

RPTA: "E"

PROBLEMA 36 :

Se tiene **8** argollitas diferentes con los cuales se desea formar una cadena . Determinar de cuántas formas se podrán formar el cadena sabiendo que **3** argollitas siempre deben estar juntas.

A) 8!   B) 7!   C) 6!   D) 5!   E) 210

RESOLUCIÓN:

* Las **3** argollitas juntas se podrán ordenar de: $3\times 2\times 1 = 6$ ***formas***

* y las **5** argollitas restantes se podrán ordenar de: $P_5^5 = 5!$ ***formas***

* finalmente :

$$\#\ total\ de\ formas\ es : 6\times 5! = 6!$$

RPTA: "C"

PROBLEMA 37 :

Una moneda cuyas caras están marcadas con los números **2** y **3** respectivamente es tirada **5** veces. ¿Determinar de cuántas maneras se obtendrá como suma **12**?

A) 120   B) 60   C) 30   D) 15   E) 10

RESOLUCIÓN:

* Para que la suma sea **12** los resultados deben ser:

$$\{2;2;2;3;3\}$$

* Para lo cual se aplicará la permutación de variables repetidas , así :

$$P^5_{(3;2)} = \frac{5!}{3!\times 2!} = 10$$

RPTA: "E"

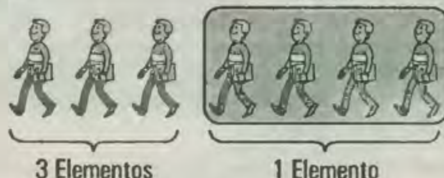
PROBLEMA 38 :

7 estudiantes son ubicados en una misma fila de modo que **4** de ellos siempre están juntos. ¿De cuántas maneras se puede hacer?.

A) 576   B) 420   C) 676   D) 930   E) 42

RESOLUCIÓN :

* Cada estudiante forma un elemento a ordenar , pero por condición del enunciado , **4** estudiantes deben estar juntos, entonces a estos **4** estudiantes los señalamos como un solo elemento , luego se tendrá :



Las formas de ordenar : $3 + 1 = 4$

elementos sería : $P_4^4 = 4!$

* Pero no hay que olvidar que los estudiantes que están juntos , también pueden ordenarse de maneras diferentes : $P_4^4 = 4!$

* Luego :

$$\begin{pmatrix}Total\ de\\ maneras\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}Ordenar\\ en\ la\ fila\end{pmatrix} y \begin{pmatrix}Ordenar\ 4\\ Estudiantes\ juntos\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix}Total\ de\\ maneras\end{pmatrix} = 4!\times 4! = 576$$

RPTA: "A"

PROBLEMA 39 :

Un sistema de cómputo emplea códigos de entrada que consisten de *5* letras seguidas por un solo dígito. ¿Determinar cuántos códigos consisten de tres letras *A* y *2* letras *B* y termina en un dígito impar?

A) 720 B) 360 C) 180 D) 120 E) 50

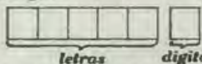
RESOLUCIÓN:

* Se tiene :

Letras : {*A; A; A; B; B*}

Dígitos: {*1; 3; 5; 7; 9*}

Los cuales se ubicarán en el siguiente esquema que representa el código:



I) Las letras se podrán ordenar de :

$$\frac{5!}{3!\,2!}=10\ formas$$

II) Para el último casillero solamente se tiene *5* opciones :

$$\rightarrow \#\ códigos : 10\times 5 = 50$$

RPTA: "E"

PROBLEMA 40 :

¿De cuántas formas diferentes se pueden sentar *11* personas alrededor de una mesa circular con *6* asientos, si quedan *5* de pie?

A) 42800 B) 96000 C) 84960 D) 72840 E) 277200

RESOLUCIÓN :

* De las *11* personas , sólo *6* podrán sentarse, hay que elegir a esas *6* personas de las *11* posibles . Esto estará dado por :

$$C_6^{11}=\frac{11\times 10\times 9\times 8\times 7\times 6}{6\times 5\times 4\times 3\times 2\times 1}=2310$$

* De éstos grupos de *6* personas , hay que ordenarlas alrededor de una mesa circular , esto será :

$$P_6^{\text{circular}}=(6-1)!=5!=120$$

* Luego :

$$\begin{pmatrix}Total\ de\\ formas\end{pmatrix}=\overbrace{2310}^{Escoger}\overset{y}{\times}\overbrace{120}^{Ordenar}=277200$$

RPTA: "E"

PROBLEMA 41 :

¿Cuántos números enteros positivos de *10* cifras existen cuyo producto de cifras sea *60*?

A) 3960 B) 6480 C) 2520 D) 2150 E) N.A.

RESOLUCIÓN:

* Notamos que : *60 = 2×2×3×5*

* Para que el producto de las *10* cifras sea *60* el conjunto de cifras que forma el numeral, puede ser:

I) {*6; 5; 2; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1*}

$$\rightarrow Cantidad\ de\ \#s=\frac{10!}{7!\times 1!\times 1!\times 1!}=720$$

II) {*5; 4; 3; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1*}

$$\rightarrow Cantidad\ de\ \#s=\frac{10!}{7!\times 1!\times 1!\times 1!}=720$$

III) {*2; 2; 3; 5; 1; 1; 1; 1; 1; 1*}

$$\rightarrow Cantidad\ de\ \#s=\frac{10!}{6!\times 2!\times 1!\times 1!}=25020$$

* finalmente :

Cantidad total de **#s** es: ***3960***

RPTA: "A"

PROBLEMA 42 :

Alrededor de una mesa de *9* asientos se quiere ubicar a *4* niños y *4* niñas de modo que el asiento vacío esté entre los niños. ¿De cuántas maneras diferentes se podrá hacer? (Considerar que las niñas van juntas).

A) 24 B) 576 C) 16 D) 256 E) 2056

RESOLUCIÓN :

* Los niños y el asiento vacío pueden ser considerados un solo elemento, entonces se tendría *5* elementos a colocar alrededor de la mesa :

$$P_5^{circular}=(\ 5-1\ )!=4!=24$$

* Pero a su vez los niños pueden ordenarse de $P_4^4=4!=24$ maneras distintas , luego :

$$\begin{pmatrix}Todas\ las\\ maneras\end{pmatrix}=\overbrace{24}^{Todos\ a\ la\ vez}\overbrace{\times}^{y}\overbrace{24}^{Solo\ niños}=576$$

RPTA: "B"

PROBLEMA 43 :

¿De cuántas maneras diferentes se pueden sentar en una fila de *7* butacas, *4* hombres y *3* mujeres de modo que los hombres no estén juntos?

A) 576 B) 4464 C) 5040 D) 5816 E) 7224

RESOLUCIÓN :

* Consideremos :

$$\underbrace{\begin{pmatrix}Total\ de\ maneras\\ que\ se\ sientan\\ 7\ personas\end{pmatrix}}_{P_7^7}=\underbrace{\begin{pmatrix}\#\ de\ maneras\\ con\ los\ hombres\\ juntos\end{pmatrix}}_{?}+\underbrace{\begin{pmatrix}\#\ de\ maneras\ con\\ hombres\ que\ no\ estén\\ juntos\end{pmatrix}}_{x}$$

* Calculemos cuando los hombres están juntos, donde consideraremos a los hombres como un solo elemento, luego dejarían de ser *7* y se tomaría :

$$\overbrace{3}^{Mujeres}+\overbrace{1}^{Hombres}=4$$

$P_4^4 = 4! = 24$ maneras

* Pero entre sí los hombres se pueden ordenar de :

$$P_4^4 = 4! = 24 \text{ maneras}$$

* Luego el total de maneras en que los hombres se sienten juntos será :

$$24 \times 24 = 576$$

* Finalmente :

$$\overbrace{3}^{Mujeres} + \overbrace{1}^{Hombres} = 4$$

$P_7^7 = 576 + x$

$\Rightarrow 5040 = 576 + x \Rightarrow x = 4464$ ***maneras***

RPTA: "B"

PROBLEMA 44 :

En el siguiente cuadrado de **25** casillas se deben ubicar **2** torres (piezas de ajedrez) de tal forma que no se coman entre ellas. ¿De cuántas formas diferentes se podrá hacer esto?



A) 578
B) 625
C) 140
D) 400
E) 2000

RESOLUCIÓN :

* La ***1ra.*** torre podrá ser colocada en cualquiera de los **25** casilleros . Para facilitar tomemos una casilla de la esquina.



* Al colocar una torre en una casilla, esa fila y esa columna no pueden contener otra torre (para que no se coman).

Habrá ***9*** casillas que no pueden ser utilizados por la ***2da.*** torre, luego de las ***25*** casillas posibles para la ***1ra.*** , sólo quedarán :

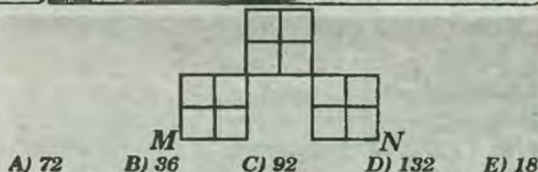
25 – 9 = 16 casillas para la ***2da.*** torre ; entonces :

$$\begin{pmatrix}\text{Total de}\\ \text{formas}\end{pmatrix} = \overbrace{25}^{1ra.\ torre} \times \overbrace{16}^{2da.\ torre} = 400$$

RPTA: "D"

PROBLEMA 45 :

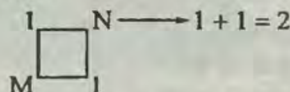
En el siguiente gráfico, calcular el número de caminos que existen para ir de *«M»* hasta *«N»*; siguiendo un recorrido mínimo. (Siguiendo consecutivamente las líneas).



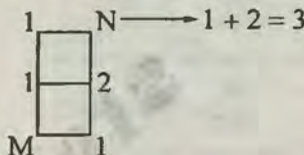
A) 72 B) 36 C) 92 D) 132 E) 18

RESOLUCIÓN :

* Por inducción :

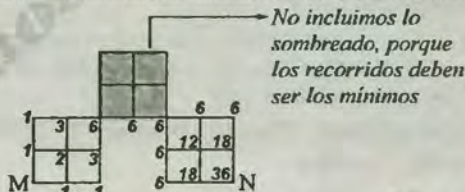


⇒ Para llegar a *«N»* desde *«M»*; Hay: ***1+1=2*** caminos.



⇒ Para llegar a *«N»* desde *«M»* , primero hay que sumar ***1 + 1 = 2*** y luego ***1 + 2 = 3*** caminos :

* Este mecanismo lo utilizaremos para lo pedido.



RPTA: "B"

PROBLEMA 46 :

¿De cuántas maneras se puede leer la palabra *«Raciocinio»* en :



A) 120 B) 180 C) 100 D) 90 E) 200

RESOLUCIÓN :

* Aplicando un criterio análogo al problema anterior se tendrá :



* Total de maneras de llegar de «*R*» a la última «*O*», que es lo mismo que leer la palabra «*Raciocinio*», será: $60 + 80 + 60 = 200$

RPTA: "E"

PROBLEMA 47 :

3 amigos, llegan a una ciudad con *3* hoteles. ¿De cuantas maneras diferentes pueden ocupar cada uno una habitación, si además desean estar en hoteles diferentes?, en el primer hotel hay *3* habitaciones libres, en el segundo hotel hay *4* y en último *2*?

A) 9! B) 924 C) 216 D) 144 E) 8!

RESOLUCIÓN :

* Primero hay que ordenar *3* personas en *3* hoteles:

$$P_3^3 = 3! = 6$$

* Aquel que quede en el primer hotel tendrá tres opciones y por cada una de ellas el que quede en el *2do.* hotel tiene *4* y el otro *2* opciones.

* Luego, por cada uno de los 6 ordenamientos en los hoteles, hay:

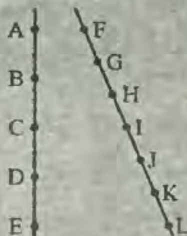
$3 \times 4 \times 2 = 24$ maneras de colocar a las personas en las habitaciones, entonces el total de maneras será:

$$\underbrace{6}_{\text{Ordenar en los hoteles}} \underbrace{\times}_{y} \underbrace{24}_{\text{Colocar en las habitaciones}} = 144$$

RPTA: "D"

PROBLEMA 48 :

En la siguiente figura se muestran los puntos *A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K* y *L* ¿Cuántos triángulos se pueden formar como máximo uniendo tres de dichos puntos?



A) 218
B) 152
C) 187
D) 160
E) 175

RESOLUCIÓN :

* Una de las maneras de formar un triángulo, será tomando uno de los *5* puntos de la recta vertical y relacionándolo con *2* puntos de los *5* presentes en la recta oblicua; y otra de las formas será tomar *1* punto de la oblicua y *2* de la vertical, luego:

$$\text{Total de formas}: \underbrace{5 \times C_2^7}_{\left(\text{1 de la vertical}\right) y \left(\text{2 de la oblicua}\right)} + \underbrace{C_2^5 \times 7}_{\left(\text{2 de la vertical}\right) y \left(\text{1 de la oblicua}\right)}$$

RPTA: "E"

PROBLEMA 49 :

En una juguería se tienen las siguientes frutas: papaya, carambola, plátano, piña, fresa, lúcuma, sandía; se quiere saber cuántos tipos diferentes de jugos se puede hacer sabiendo que cada uno debe estar hecho a base de *3* frutas y que la carambola y la fresa nunca deben combinarse ya que el jugo sería demasiado ácido.

A) 127 B) 125 C) 35 D) 30 E) 91

RESOLUCIÓN :

* Primero calculemos el total de formas de hacer un jugo de *3* sabores con las *7* frutas disponibles, el cual será:

$$C_3^7 = \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1} = 35$$

* Pero debemos excluir aquellos jugos donde intervengan la carambola y fresa (a la vez), los cuales serán *5*, debido a que con cada una de las *5* frutas restantes (sin carambola y fresa) se pueden formar jugos de *3* sabores incluyendo carambola y fresa (a la vez)

* Finalmente:

$$\left(\begin{array}{l}\text{Número de jugos}\\ \text{de 3 sabores,}\\ \text{sin que estén a}\\ \text{la vez carambola}\\ \text{y fresa.}\end{array}\right) = 35 - 5 = 30$$

RPTA: "D"

PROBLEMA 50 :

De un grupo de *5* profesores, *8* alumnos y *8* alumnas se quiere seleccionar *2* profesores y un equipo de fulbito y voley. ¿De cuántas formas diferentes se puede hacer eso, si Betty es matadora inamovible del equipo de voley y Luis delantero indiscutible del equipo de bútbol (los profesores no juegan)?.

A) 3500 B) 4410 C) 7250 D) 8210 E) 13450

RESOLUCIÓN :

* De las *8* alumnas debemos excluir a Betty, de modo que nos quedan *7* disponibles para escoger:

$$\overset{\text{Equipo de voley}}{\widehat{6}} - \overset{\text{Betty}}{\widehat{1}} = 5 \text{ alumnas}$$

* De los *8* alumnos debemos excluir a Luis, de modo que nos quedan *7* disponibles para escoger:

$$\overset{\text{Equipo de fulbito}}{\widehat{6}} - \overset{\text{Luis}}{\widehat{1}} = 5 \text{ alumnas}$$

* Pero debemos escoger:

$$\left(\begin{array}{c}\text{TOTAL DE}\\ \text{FORMAS}\end{array}\right) = \overset{\text{2 Profesores}}{\overbrace{C_2^5}} \times \overset{\text{Equipo de voley}}{\overbrace{C_5^7}} \times \overset{\text{Equipo de fulbito}}{\overbrace{C_6^7}} = 4410$$

RPTA: "B"

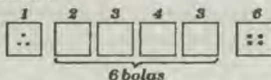
PROBLEMA 51 :

Se tiene *6* cajas en las cuales se deben colocar *13* bolas diferentes. ¿De cuántas maneras se pueden colocar , si en la primera caja se deben colocar *3* bolas , en la última caja *4* bolas y las restantes en las demás respectivamente?

A) 6006×4⁶ B) 210×4⁶ C) 286×4⁶ D) 13! E) 1316!

RESOLUCIÓN:

* Al hacer la distribución de las *13* bolas sería como indica el esquema :



* En la caja *1* de las *13* bolas se deben escoger *3* , siendo de : $C_3^{13}=286$ *formas.*

* En la caja 6 debemos escoger *4* de las $(13-3)=10$ restantes y sería de : $C_4^{10}=210$ *formas.*

* De las *6* bolas que restan :

* Cogemos la *1ra.* (una de ellas) y la podemos colocar en cualquiera de las *4* cajas (*4* opciones).

* Cogemos la *2da.* (una de las *5*) y ésta se podría colocar en las *4* cajas (*4* opciones) y así sucesivamente . La última tendrá *4* opciones por lo tanto las *6* bolas se pueden disponer en las *4* cajas de: $4\times4\times4\times4\times4\times4=4^6$ *formas.*

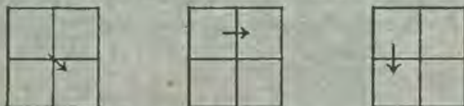
* finalmente :

formas es: $210\times286\times4^6=6006\times4^6$

RPTA: "A"

PROBLEMA 52 :

Se tiene un tablero cuadrado de *4×4* en el cual se ubica una ficha en el cuadrado superior izquierdo. De cuántas maneras es posible que la ficha llegue al cuadrado inferior derecho si los movimientos permitidos para la ficha son los siguientes:



A) 12 B) 33 C) 42 D) 63 E) Más de 63

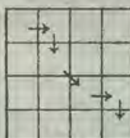
RESOLUCION:

* Vamos a indicar los movimientos permitidos por *H* (→); *V*(↓) y *D*( ) examinemos los casos: $D=0;1;2;3$



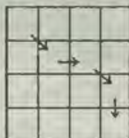
I) (D = 0) cualquiera de las formas se hará con *(H, H, H, V, V, V)* por ejemplo veamos la figura adjunta.

maneras posibles : $\dfrac{6!}{3!\times3!}=20$



II) (D = 1) cualquiera de las formas se hará con *(H, H, D, V, V)* por ejemplo veamos la figura adjunta.

maneras posibles : $\dfrac{5!}{2!\times2!\times1!}=30$



III) (D = 2) cualquiera de las formas se hará con *(H, D, D, V)* por ejemplo veamos la figura adjunta.

maneras posibles : $\dfrac{4!}{1!\times2!\times1!}=12$

IV) (D = 3) solamente hay *1* forma.

* finalmente :

$\begin{pmatrix}\text{Cantidad de}\\ \text{maneras posibles}\end{pmatrix}:20+30+12+1=63$

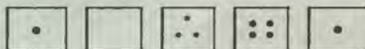
RPTA: "D"

PROBLEMA 53 :

Se tiene *9* monedas de un sol cada una y *5* casilleros. ¿De cuántas maneras se pueden distribuir las *9* monedas en los *5* casilleros? (Considerar que pueden quedar casilleros vacíos).

RESOLUCION :

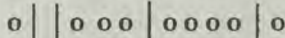
* Vamos a mostrar una de las maneras en que se puede distribuir :



* La situación precedente es perfectamente por el esquema :

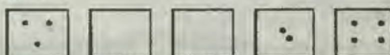


* haciendo similitud con el sistema binario :



* el cual sería un numeral de *13* cifras comprendido por *9* cifras o correspondientes a las *9* monedas y *4* cifras *1* (correspondiente a los *(5 – 1)* casilleros).

* Para ver si está claro escribir de un «modo binario» la situación :



* la situadón es traducido por.

0 0 0 1 1 1 0 0 1 0 0 0 0

* para que el «nodo binario» traduzca la situación que consiste en distribuir las *9* monedas en *5*

casilleros encontramos una bisección.

Número de maneras en que se puede distribuir 9 monedas 5 casilleros	→	Número de modos binarios compuestos excesivamente por 9 cifras 0 y (5 – 1) = 4 cifras 1

* Todos los numerales binarios está compuesto por 13 caracteres considerando los lugares que ocupan las cifras 0.

0|0|0 0 0| |0 0 0 0 → {1;3;5;6;7;10;11;12}

0|0|0 |0|0 0 0 0 0 → {1;3;5;7;9;10;11;12;13}

| |0 0 0 0 0 0 0 0 0| | → {3;4;5;6;7;10;11}

Nuevamente encontramos una bisección:

Cantidad de numerales binarios compuesto exclusivamente por 9 cifras 0 y (5 – 1) cifras 1.	→	Cantidad de sobconjuntos de 9 elementos de un conjunto (1, 2, 3,......, 13)

* Por lo tanto el número de maneras de distribuir las 9 monedas en los 5 casilleros es igual al número de subconjuntos de 9 elementos que se puede formar con un conjunto de $9 + 5 - 1 = 13$.

Elementos : $C_9^{13} = C_9^{9+5-1} = 715$

* Generalización:

> **El número de maneras que se pueden distribuir n elementos iguales en K casilleros es : C_n^{n+k-1}**

OTRO MÉTODO :

* Analizemos una de las maneras:

[•] [∴] [ ] [∷] [•]

* el cual sería similar a lo siguiente :

• + • • • + ... + • • • • + •

* al considerar que cada bolita «•» representa la unidad , se tendría :

$$1 + 3 + 0 + 4 + 1$$

* examinemos otros casos :

$\underbrace{\bullet + \bullet\bullet + \bullet\bullet\bullet + \bullet\bullet + \bullet}_{1+2+3+2+1}$ y $\underbrace{\bullet\bullet\bullet\bullet + \bullet\bullet\bullet + \bullet\bullet + ...}_{4+3+2+0+0}$

cada situación está representada por 9 bolitas (•) y 4 signos (+).

$$\# \, maneras = \frac{13!}{9! \times 4!} = 715$$

PROBLEMA 54 :

Cierto juego consiste en lanzar dos dados, se gana si el resultado es: *I)* la suma de 7 ó *II)* los dos dados muestran el mismo resultado: «se lanzan dos dados si se gana terminamos el juego, si no se gana se vuelve a lanzar dos dados terminando el experimento». ¿Cuántos eventos elementales tiene el espacio de muestras (espacio de posibilidades favorable asociado al experimento mencionado?

A) 1296 *B) 876* *C) 864* *D) 888* *E) 432*

RESOLUCIÓN:

1°) Al lanzar dos dados el número de puntos muestrales es como lo indica la «tabla de doble entrada».

D1 / D2	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Notamos que :

36 puntos muestrales → *12 favorables (termina)* / *24 no favorables (continua)*

2°) Si el resultado no es favorable (24 casos) entonces lanzamos dos dados y termina el experimento observamos por cada caso no favorable aparecen 36 puntos muestrales , por lo tanto :

eventos elementales: 12 + 24 × 36 = 876

RPTA: "B"

PROBLEMA 55 :

Si lanzamos 3 dados y dos monedas, determinar cuántos elementos tiene el espacio muestral en el cual el evento resulte con los resultados de las monedas iguales y la suma de los tres dados sea 16.

A) 6 *B) 12* *C) 24* *D) 48* *E) 96*

RESOLUCIÓN:

* Considerando los resultados de los dados y las monedas como eventos independientes.

1°) Para las monedas: **A = {(C ; C); (S ; S)}**

2°) Para los dados que suman **16** :

B={(4; 6; 6); (6; 4; 6); (6; 6; 4); (5, 5, 6); (5; 6; 5); (6; 5; 5)}

* Como el experimento consiste en lanzar los dados y la moneda , entonces :

puntos muestrales favorables: 2×6 = 12

RPTA: "B"

PROBLEMA 56 :

Se tiran **3** dados siendo los resultados representados por las ternas $(x ; y ; z)$. Determinar el número de puntos muestrales favorables al experimento en el cual x, y, z no sumen **15**.

A) 206 *B) 209* *C) 210* *D) 213* *E) 216*

RESOLUCIÓN:

* El número de elementos del espacio muestral es :

$$6 \times 6 \times 6 = 216$$

* El número de elementos no favorables al experimento sería cuando la suma sea **15** para lo cual se tendría :

- Si la terna tiene como elementos **3; 6** y **6:**

$$\# \text{ puntos muestrales}: \frac{3!}{2! \times 1!} = 3$$

- Si la terna tiene como elementos: **4; 5** y **6:**

$$\# \text{ puntos muestrales es: } 3 \times 2 \times 1 = 6$$

- Si la terna está formado por resultados iguales a **5**:

$$\# \text{ puntos muestrales es : } 1$$

→# casos no favorables es : **10**

→# puntos muestrales favorables :

$$216 - 10 = 206$$

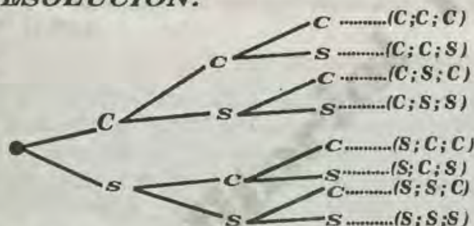
RPTA: "A"

PROBLEMA 57 :

Si se lanzan **3** monedas. ¿Cuál es la probabilidad de no obtener exactamente **2** caras?

A) 1/2 *B) 1/4* *C) 1/8* *D) 3/8* *E) 5/8*

RESOLUCIÓN:



* El espacio muestral sería :

$\Omega = \{ccc ; ccs ; csc ; css ; scc ; scs ; ssc ; sss\}$

* El evento **A** de no obtener exactamente dos caras, es :

$$A = \{ccc ; csc ; scs ; ssc ; sss\}$$

$\rightarrow P(A) = 5/8 = 0{,}625$

RPTA: "E"

PROBLEMA 58 :

Tres presos **A, B** y **C** se distribuyen en dos celdas numeradas **1** y **2** . Define un espacio muestral adecuado para este experimento use subíndice **1** y **2** para indicar el número de la celda por ejemplo A_2 significa que el preso **A** se encuentra en la segunda celda. ¿Cuál es la probabilidad de que **A** y **B** estén en la misma celda?

A) 0,75 *B) 0,5* *C) 0,42* *D) 0,25* *E) 0,20*

RESOLUCIÓN:

* Definamos el espacio muestral :

$\Omega = \{(A_1, B_1, C_1), (A_1, B_1, C_2), (A_1, B_2, C_1), (A_1, B_2, C_2), (A_2, B_1, C_2), (A_2, B_1, C_2), (A_2, B_2, C_1), (A_2, B_2, C_2)\}$

* El conjunto de casos favorables sería:

$A = \{(A_1, B_1, C_1), (A_1, B_1, C_2), (A_2, B_2, C_1), (A_2, B_2, C_2)\}$

→ ***La probabilidad sería : 4/8 = 0,5***

RPTA: "B"

PROBLEMA 59 :

Si **10** jugadores compiten en una carrera de **5000 m**. Existe un primer, segundo y tercer premio . Si un país cuenta con cuatro participantes en la carrera . ¿Cuál es la probabilidad que **A** y **B** obtengan los tres premios?

A) 0,033 *B) 0,333* *C) 0,243* *D) 0,211* *E) 0,266*

RESOLUCIÓN:

* Sea **P(A)** la probabilidad buscada:

1°) El número de casos posibles en el cual de los **10** jugadores ocupen los tres primeros puestos sería :

$$P_3^{10} = \frac{10!}{7!} = 720 \text{ maneras}$$

2°) El número de casos favorables es cuando de los **4** participantes de un país ocupan los **3** primeros puestos , el cual podría ser:

$$P^4 = \frac{4!}{1!} = 24 \text{ maneras} \rightarrow P(A) = 24/720 = 0{,}033$$

RPTA: "A"

PROBLEMA 60 :

Si tenemos **12** libros en un estante, ¿cuál es la probabilidad que siempre se incluya un libro determinado en una colección de **5** libros?

A) 0,2325 *B) 0,543* *C) 0,4672* *D) 0,4167* *E) 0,4327*

RESOLUCIÓN:

* El # casos posibles es : $C_5^{12} = 792$

* El # de casos favorables incluye un libro determinado y sería de:

$$1 \times C_4^{11} = \frac{11!}{4! \times 7!} = 330$$

→ La probabilidad es: **330/792 = 0,4167**

RPTA: "D"

PROBLEMA 61 :

Nueve libros , de los cuales *5* son de biología , *4* de matemáticas , se colocan al azar en una estantería. Hallar la probabilidad *«p»* de que los libros de cada materia estén juntos.

A) 9/230 B) 6/35 C) 1/63 D) 3/52 E) 15/126

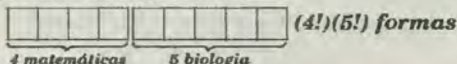
RESOLUCIÓN:

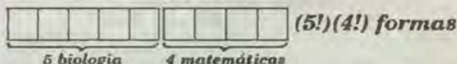
* Se tiene *9* libros (*5* de biología y *4* de matemáticas).

1°) El número de casos posibles sería:

$$P_5^5 = 5!$$

2°) El número de casos favorables se obtiene cuando se presenta los siguientes casos:





* Entonces el número de casos a favor sería:

$$2\,(4!)\,(5!)$$

$$\rightarrow P = \frac{2(4!)(5!)}{9!} = \frac{1}{63}$$

RPTA: "C"

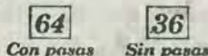
PROBLEMA 62 :

Se conoce qua en cada *100* panetones se observa que *64* tienen pasas y los restantes no, ¿cuál es la probabilidad de obtener *3* panetones con pasas y *2* sin pasas al escoger *5* panetones?

A) 62/499 B) 65/542 C) 37/38 D) 49/36 E) 93/1067

RESOLUCIÓN :

* Se tiene *100* panetones:



1°) El experimento es extraer *5* panetones de *100*.

2°) El conjunto de casos posibles es los grupos de *5* elegidos de *100* , siendo esto de C_5^{100} formas .

3°) El conjunto de casos favorables es el grupo de *5* que contiene *3* con pasas y *2* sin pasas elegidos entre *64* y *36* respectivamente, siendo estos de $C_3^{64} \times C_2^{36}$ formas.

$$\rightarrow P(A) = \frac{C_3^{64} \times C_2^{36}}{C_5^{100}} = \frac{93}{1067}$$

RPTA: "E"

PROBLEMA 63 :

Seis parejas de casados se encuentran en un cuarto. Si se escogen *2* personas al azar. Hallar la probabilidad de que uno sea hombre y otro mujer sin ser esposos.

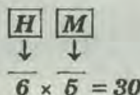
A) 0,5 B) 0,46 C) 0,83 D) 0,45 E) 0,90

RESOLUCIÓN:

1°) El experimento es escoger *2* personas al azar.

2°) El conjunto de casos posibles es todos los grupos de *2* escogidos de *12*.

3°) El conjunto de casos favorables es las parejas que no son esposos :



$$6 \times 5 = 30$$

* Notamos que el hombre *(H)* podría ser cualquiera de los seis y la pareja *(M)* sería cualquiera de las *(6 –1)= 5* mujeres sin considerar su respectiva esposa.

$\rightarrow P(A) = 30/66 = 5/11 = 0{,}45$

RPTA: "D"

PROBLEMA 64 :

Se escogen al azar *4* sillas entre *10* de los cuales *6* son defectuosos. Hallar la probabilidad de que *2* exactamente sean defectuosos.

A) 2/5 B) 3/5 C) 5/7 D) 6/11 E) 3/7

RESOLUCIÓN:

* Tenemos : $10 \text{ sillas} \begin{cases} 6 \text{ son defectuosos} \\ 4 \text{ no defectuosos} \end{cases}$

* Se extrae: $4 \text{ sillas} \begin{cases} 2 \text{ son defectuosos} \\ 2 \text{ no defectuosos} \end{cases}$

1°) Al extraer *4* sillas de un grupo de *10* se podrá hacer de:

$$C_4^{10} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{1 \times 2 \times 3 \times 4} = 210 \text{ maneras}$$

2°) El conjunto de casos posibles es extraer *2* defectuosos de los *6* y *2* no defectuosos de los *4* siendo de :

$$C_2^6 \times C_2^4 = \frac{6 \times 5}{1 \times 2} \times \frac{4 \times 3}{1 \times 2} = 90$$

$\rightarrow$ ***La probabilidad es : 90/210 = 3/7***

RPTA: "E"

PROBLEMA 65 :

De una bolsa que contiene *6* bolas blancas , *4* negras y *2* rojas , se sacan *6* bolas al azar. Calcular la probabilidad de que *3* sean blancas , *2* negras y *1* roja.

A) 16/33 B) 14/23 C) 20/77 D) 3/31 E) 4/23

RESOLUCIÓN:

* Se tiene : $12\ bolas \begin{cases} 6\ bolas\ blancas \\ 4\ bolas\ negras \\ 2\ bolas\ rojas \end{cases}$

* Se extraería : $6\ bolas \begin{cases} 3\ bolas\ blancas \\ 2\ bolas\ negras \\ 1\ bolas\ rojas \end{cases}$

1°) Determinando el número total de puntos muestrales : ***n (Ω)***

$$C_6^{12} = \frac{12\times11\times10\times9\times8\times7}{1\times2\times3\times4\times5\times6} = 924$$

2°) Calculando el número de eventos elementales favorables : ***n (A)***

$$C_3^6\times C_2^4\times C_1^2 = \frac{6\times5\times4}{1\times2\times3}\times\frac{4\times3}{1\times2}\times\frac{2}{1} = 240$$

$\rightarrow P(A) = 240/924 = 20/77$

RPTA: "C"

PROBLEMA 66 :

Una moneda cuyas caras están marcadas con los números ***2*** y ***3*** respectivamente es tirada ***5*** veces ¿cuál es la probabilidad de obtener un total de ***12*** ?

A) 2/7 B) 5/16 C) 3/7 D) 1/8 E) 5/9

RESOLUCIÓN:

* Para que la suma sea ***12*** los resultados de las caras deberán ser : ***{2 ; 2 ; 2 ; 3 ; 3}***

* Determinando el número de casos posibles sería:

$2\times2\times2\times2\times2 = 32$ ***formas***

* Para calcular el número de casos favorables se tendrá que aplicar la fórmula de la permutación de variables repetidas y sería:

$$\frac{5!}{2!\ 3!} = 10$$

* La probabilidad de obtener ***12*** es : ***10/32 = 5/16***

RPTA: "B"

PROBLEMA 67 :

Nueve personas se sientan al azar en círculo. ¿Cúal es la probabilidad de que dos personas queden contiguas?

A) 1/4 B) 1/8 C) 16/8! D) 13/81 E) 15/81

RESOLUCIÓN:

* Sean ***A*** y ***B*** las personas que van a quedar contiguas.

1°) Calculando el número total de formas en que se pueden sentar las ***9*** personas es:

$$(9-1)! = 8!$$

2°) Si ***A*** y ***B*** están contiguos lo podrán hacer de ***2*** formas y las ***7*** personas restantes se podrán ubicar de ***7!*** formas.

La probabilidad es : $\frac{2\times7!}{8!} = \frac{2\times7!}{7!\times8} = \frac{1}{4}$

RPTA: "A"

PROBLEMA 68 :

Si ***6*** personas se sientan alrededor de una mesa redonda. Hallar la probaiblidad de que ***2*** personas ocupen lugares contiguos.

A) 1/6 B) 3/8 C) 2/5 D) 5/12 E) 5/6

RESOLUCIÓN:

* El total de eventos es $(6-1)! = 5! = 4! \times 5$

* El número de eventos a favor sería: $2\times4!$

$$\rightarrow P(A) = \frac{2\times4!}{4!\times5} = \frac{2}{5}$$

RPTA: "C"

PROBLEMA 69 :

Seis maratonistas ***(A; B; C; D; E; F)*** compiten en la maratón de los Andes. ¿Cuál es la probabilidad de que «***A***» llegue antes que ***B***?

A) 0,5000 B) 0,208 C) 0,4666 D) 0,5240 E) 0,6250

RESOLUCIÓN:

* Sea el esquema que representan los puestos que se ubicarán los maratonistas :

1°	2°	3°	4°	5°	6°

1°) Determinando el # total de casos :

$$P_6^6 = 6!\ \textit{formas diferentes}$$

2°) Determinando el # de casos a favor:

Si ***A*** llega en el ***1er. , 2do. , 3er. , 4to.*** y ***5to.*** , puesto y ***B*** después tendría ***5 ; 4 ; 3 ; 2*** y ***1*** opción respectivamente y por cada una de estas opciones los ***4*** restantes se podrán ubicar de ***4!*** formas diferentes.

* Entonces el número de casos favorables sería:

$$5\times4! + 4\times4! + 3\times4! + 2\times4! + 1\times4! = 15\times4!$$

* La probabilidad buscada es: $\frac{15\times4!}{6!} = \frac{1}{2} = 0{,}5$

RPTA: "A"

PROBLEMA 70 :

Se lanzan ***2*** monedas y un dado. ¿Cuál es la probabilidad de que aparezcan dos caras y un número impar?

A) 0,500 B) 0,125 C) 0,250 D) 0,600 E) 0,111

RESOLUCION :

* Considerando como eventos independientes el lanzar la ***1ra.*** ; ***2da.*** moneda y el dado tendríamos:

1°) De obtener la **1ra.** cara: **1/2**

2°) De obtener la **2da.** cara: **1/2**

3°) De obtener un número impar: **3/6**

* Aplicando el teorema de la multiplicación para eventos independientes.

La probabilidad es: $1/2 \times 1/2 \times 3/6 = 1/8$

RPTA: "B"

PROBLEMA 71:

Una bolsa contiene **4** bolas blancas y **2** negras , otra bolsa contiene **3** bolas blancas y **5** negras . Se extrae una bola de cada bolsa. Determinar la probabilidad de que ambas sean blancas.

A) 1/2 B) 1/4 C) 2/3 D) 3/4 E) 1/3

RESOLUCION:

* Considerando que son eventos independientes:

1°) La probabilidad que la bola extraída de la primera bolsa sea blanca es: **4/6.**

2°) La probabilidad que la bola extraída de la segunda bolsa sea blanca es: **3/8.**

* Por tanto : $P(A) = 4/6 \times 3/8 = 1/4$

RPTA: "B"

PROBLEMA 72 :

En un salón de clases se encuentran **10** niños y **4** niñas , si se escogen tres estudiantes al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que los dos primeros sean niños y la última sea niña?

A) 15/91 B) 7/15 C) 3/17 D) 5/31 E) 2/5

RESOLUCIÓN:

* En el salón se tiene : **14 niños** $\begin{cases} 10 \text{ niños} \\ 4 \text{ niñas} \end{cases}$

* Y sea $P(A)$ la probabilidad buscada.

1°) Determinando la probabilidad que el primero es niño sería :

$$P(A_1)=10/14 = 5/7 \text{ .... (I)}$$

2°) Calculando la probabilidad que el segundo sea niño es:

$$P(A_2) = 9/13 \text{ .... (II)}$$

3°) Finalmente la probabilidad que el tercero sea una niña sería :

$$P(A_3) = 4/12 = 1/3 \text{ ....(III)}$$

* Por lo cual de **(I), (II) y (III)** como son eventos independientes:

$$P(A)=5/7 \times 9/13 \times 1/3 = 15/91$$

RPTA: "A"

PROBLEMA 73 :

Tres varones y dos chicas van al cine y encuentran una fila de 5 asientos juntos en una misma fila donde desean acomodarse. Determinar cuál es la probabilidad de que las chicas no se sienten juntas.

A) 2/5 B) 3/5 C) 5/8 D) 7/9 E) 4/5

RESOLUCIÓN:

* Determinando la probabilidad $P(A)$ en que las chicas estén juntas.

1°) El número total de formas es:

$$5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1=120$$

2°) El número de casos favorables al evento en el cual las damas estén juntas en el esquema:

$$\overbrace{8}^{\text{para las damas}} \times \overbrace{6}^{\text{para los varones}} = 48$$

* Luego : $P(A) = 48/120 = 2/5$

* Calculando la probabilidad $P(A^c)$ en el cual las damas no están juntas:

$$P(A^c) = 1 - 2/5 = 3/5$$

RPTA: "B"

PROBLEMA 74 :

Un artillero dispara a un blanco , se sabe que en un disparo la probabilidad de acertar es **0,01**. Se efectua dos disparos, ¿cuál será la probabilidad de no acertar?

A) 0,99 B) 0,9081 C) 0,9801 D) 0,9802 E) 0,0001

RESOLUCIÓN:

* Si la probabilidad de acertar en un disparo es **0,01**; se cumple que la probabilidad de no acertar un tiro es: $1 - 0{,}01 = 0{,}99$

* Para dos disparos se cumple que la probabilidad de no acertar es:

$$(0{,}99)^2 = 0{,}9801$$

RPTA: "C"

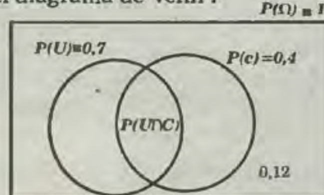
PROBLEMA 75 :

La probabilidad de que vlady ingrese a la **UNI** es **0,7** , que ingrese a la Católica es **0,4**, si la probabilidad de que no ingrese a ninguna es **0,12** . Hallar la probabilidad de que ingrese a ambas a la vez .

A) 0,42 B) 0,22 C) 0,24 D) 0,48 E) 0,58

RESOLUCIÓN:

* Según el diagrama de Venn :



* Del gráfico : $P(U\cup C)=1-0,12=0,88$

* Por teorema :

$P(U\cup C)=P(U)+P(C)-P(U\cap C)$

$\rightarrow 0,88=0,7+0,4=P(U\cap C)\rightarrow P(U\cap C)=0,22$

RPTA: "B"

PROBLEMA 76 :

Si la probabilidad de ganar un partido de ajedrez es **p** . ¿Cuál será la probabilidad de ganar al menos una partida en **3** partidas de ajedrez?

A) $1-p$ B) $(1-p)^3$ C) $(1-p)^2$ D) $1-(1-p)^3$ E) N.A.

RESOLUCIÓN:

* Si la probabilidad de ganar es **p** , entonces la probabilidad de no ganar **1** partida será: $1-p$. Y de no ganar **3** partidas sería $(1-p)^3$, por lo tanto la probabilidad de ganar al menos **1** partido sería : $1-(1-p)^3$.

RPTA: "D"

PROBLEMA 77 :

Las probabilidades que tienen **A, B** y **C** de resolver un mismo problema son : **4/5 ; 2/3 ; 3/7** respectivamente. Si intentan hacerlo los tres, determinar la probabilidad de que se resuelva el problema.

A) 24/105 B) 101/105 C) 81/105
D) 90/105 E) 4/105

RESOLUCION:

* Sea: $P(A^c)$; $P(B^c)$ y $P(C^c)$ las probabilidades que no puedan resolver **A** , **B** y **C** un mismo problema.

* Entonces se cumple :

$P(A^c)=1-4/5=1/5$ .... (I)

$P(B^c)=1-2/3=1/3$ .... (II)

$P(C^c)=1-3/7=4/7$ .... (III)

* De (I), (II) y (III) la probabilidad que no se resuelve el problema será:

$1/5\times 1/3\times 4/7=4/105$

* Por lo tanto la probabilidad que se resuelva el problema sería :

$1-4/105=101/105$

RPTA: "B"

PROBLEMA 78 :

Con **7** médicos y **4** ingenieros se debe formar un comité de **6** miembros. ¿Cuál es la probabilidad que el comité incluya al menos dos ingenieros?

A) 21/22 B) 23/66 C) 13166 D) 53/66 E) 1/66

RESOLUCIÓN:

* Sea **P(A)** la probabilidad que el comité incluya al menos 2 ingenieros.

* Entonces la probabilidad $P(A^c)$ que no incluya al menos dos ingenieros será en los sigientes casos:

* La probabilidad que el comité no incluya ingenieros será :

$$\frac{C_6^7}{C_6^{11}}=\frac{1}{66}\quad ....(I)$$

* La probabilidad que el comité incluya sólo **1** ingeniero será :

$$\frac{C_1^4\times C_5^7}{C_6^{11}}=\frac{12}{66}\quad ....(II)$$

* De (I) y (II) como es la probabilidad de eventos excluyentes :

$\rightarrow P(A^c)=1/66+12/66=13/66$

$P(A)=1-13/66+53/66$

RPTA: "D"

PROBLEMA 79 :

Un saco contiene **3** bolas rojas , **4** blancas y **5** azules, todas del mismo tamaño y materia. ¿Cuál es la probabilidad que la **1ra.** sea roja y las siguientes azules o blancas al seleccionarse **3** bolas sin reposición?

A) 0,2727 B) 0,004545 C) 0,1636
D) 0,2083 E) 0,2016

RESOLUCIÓN:

* Se tiene :
3 bolas rojas
4 bolas blancas
5 bolas azules

* Sea **P** la probabilidad buscada.

* Determinando la $P(R_1B_2B_3)$ en el cual la **1ra.** es roja , la **2da.** y **3ra**. blanca, sería:

$$P(R_1B_2B_3)=\frac{3}{12}\times\frac{4}{11}\times\frac{3}{10}=\frac{36}{1320}\quad ....(I)$$

* De la misma forma los damás casos serían:

$$P(R_1B_2B_3)=\frac{3}{12}\times\frac{5}{11}\times\frac{4}{10}=\frac{60}{1320}\quad ....(II)$$

$$P(R_1B_2B_3)=\frac{3}{12}\times\frac{5}{11}\times\frac{4}{10}=\frac{60}{1320}\quad ....(III)$$

$$P(R_1B_2B_3)=\frac{3}{12}\times\frac{5}{11}\times\frac{4}{10}=\frac{60}{1320}\quad ....(IV)$$

* De (I); (II); (III) y (IV) como son eventos mutuamente excluyentes.

$$\rightarrow P=\frac{36+60+60+60}{1320}=\frac{9}{55}=0,1636$$

RPTA: "C"

PROBLEMA 80 :

Un juego ordinario de barajas de **53** cartas tienen

13 cartas de cada palo enumeradas:

A ; 2 ; 3 ;...; 9 ; 10 ; J ; Q y K.

Existen *4* «palos»: Espadas o corazones bastos o corazones rojos , rombos oros o diamantes y tréboles o flores negras , además está el jocker.

¿Cuál es la probabilidad de hacer un pocker de ases, es decir lograr *4* cartas iguales que sean ases con cinco cartas en la mano?

A) 0,3077 *B) 0,8846* *C) 0,2321*
D) 0,5501 *E) 0,721*

RESOLUCIÓN:

* Como el experimento es extraer **5** cartas para tener el pocker de ases vamos a hacer la suposición de extraer la carta que no es en la quinta extracción, entonces la probabilidad en este caso supuesto será:

$$\left(\frac{1}{53}\times\frac{3}{52}\times\frac{2}{51}\times\frac{1}{50}\times\frac{49}{49}\right)$$

1er. as, 2do. as, 3er. as, 4to. as, La carta que no es as

* Pero como las cartas que no son as, podría obtenerse en la ***1ra.*** , ***2da.*** , ***3ra.*** , ***4ta.*** , o ***5ta.*** extracción , o sea de **5** formas.

$$\rightarrow P=5\left(\frac{4}{53}\times\frac{3}{52}\times\frac{2}{51}\times\frac{1}{50}\times\frac{49}{49}\right)$$

RPTA: "D"

PROBLEMA 81 :

Tres ampolletas malas se mezclan con doce buenas, se prueba seleccionándolas al azar entre las que quedan sin probar hasta encontrar las malas. ¿Cuál es la probabilidad de encontrar la tercera mala en la sétima prueba?

A) 0,2967 *B) 0,0667* *C) 0,1111*
D) 0,4286 *E) 0,0330*

RESOLUCION :

* Se tiene : ***15 ampollas*** $\begin{cases}\text{3 ampollas malas}\\ \text{12 ampollas buenas}\end{cases}$

1°) Notamos que al extraer la ***3ra.*** mala en la sétima prueba significa que **2** malas ya han salido en las seis primeras pruebas.

2°) El número de casos posibles sería considerando que las **7** extracciones son sin reposición , entonces será :

$$P_7^{15}=15\times14\times13\times12\times11\times10\times9\ ....(I)$$

3°) Para determinar el número de casos favorables indicamos el esquema :

2 malas y 4 buenas — 3ra. mala

1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°

$$P_2^6 \times P_4^{12} \times 3\ ....(II)$$

Variación de las malas — Variación de las 12 buenas

$$P=\frac{(6\times5)(12\times11\times10\times9)(3)}{15\times14\times13\times12\times11\times10\times9}=0,03296$$

OTRO MÉTODO:

1°) Como la ***3ra.*** mala se extrae en la sétima prueba significa que **2** malas ya han salido en las seis primeras pruebas.

2°) Analizemos uno de los casos :

1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°
M	B	M	B	B	B	M

3°) Aplicando la permutación de variables repetidas para las seis primeras extracciones y considerando cada extracción como eventos independientes tenemos:

M	B	M	B	B	B	M

$$P=\frac{6!}{2!\times4!}\left(\frac{3}{15}\times\frac{12}{14}\times\frac{2}{13}\times\frac{11}{12}\times\frac{10}{11}\times\frac{9}{10}\right)\times\frac{1}{9}=0,03296$$

RPTA: "E"

PROBLEMA 82 :

Una persona lanza repetidas veces **2** dados y gana si obtiene *8* puntos antes de obtener **7**. ¿Cuál es la probabilidad de ganar?

A) $\frac{1}{2}$ *B)* $\frac{3}{5}$ *C)* $\frac{5}{11}$ *D)* $\frac{7}{13}$ *E)* $\frac{3}{8}$

RESOLUCIÓN :

* Sucesos posibles : {*8 ; *8 ; **8 ; ***8 ; ....* }

* Donde cada «*» representa un resultado diferente de **7** ; *8* y tiene una probabilidad igual a :

$$1-P_{(7)}-P_{(8)}=1-\frac{6}{36}-\frac{5}{36}=\frac{25}{36}$$

* Se considera diferente de ***8*** , pues en caso contrario termina el juego y diferente de **7** pues en caso contrario pierde. Es decir:

$$W=\{8\ ;\ 7\ ;\ {*8}\ ;\ {*7}\ ;\ {**8}\ ;\ {**7}\ ;..........\}$$

* Luego :

$$P(ganar)=P\ (8)+P({*8})+P\ ({**8})+.....$$

$$=\underbrace{\frac{5}{36}+\frac{25}{36}\times\frac{5}{36}}_{\times\frac{25}{36}}+\frac{25}{36}\times\frac{25}{36}\times\frac{5}{36}+...\Rightarrow P_{(GANAR)}=\frac{\frac{5}{36}}{1-\frac{25}{36}}=\frac{5}{11}$$

RPTA: "C"

PROBLEMA 83 :

Con *4* niños y *7* niñas se desea formar un grupo de *6*. ¿Cuál es la probabilidad que el grupo se integre al menos por **2** niños?

A) $\frac{1}{2}$ *B)* $\frac{3}{37}$ *C)* $\frac{13}{62}$ *D)* $\frac{53}{72}$ *E)* $\frac{53}{66}$

RESOLUCIÓN :

* Sea *P(A)* la probabilidad que de los *6* , se integre al menos por *2* niños; entonces la probabilidad *P(A')*, será que no integre al menos *2* niños , lo cual se dará en los siguientes casos :

$$P(A') = \overbrace{\frac{C_6^7}{C_6^{11}}}^{\text{Probabilidad que no haya niños}} + \overbrace{\frac{C_1^4 \times C_5^7}{C_6^{11}}}^{\text{Probabilidad que se integre por 1 niño}}$$

* Operando resulta : $P(A') = \frac{13}{66}$

* Piden : $P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{13}{66} = \frac{53}{66}$

RPTA: "E"

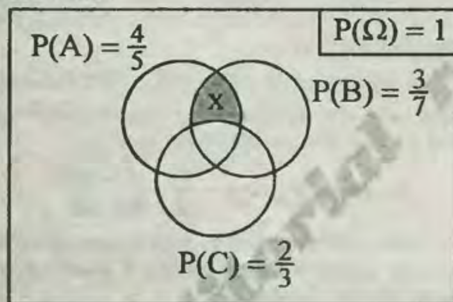
PROBLEMA 84 :

En una competencia de tiro, se sabe que, la probabilidad de que acierte «*A*» es $\frac{4}{5}$, la de «*B*» es $\frac{3}{7}$ y la de «*C*» es $\frac{2}{3}$. Si los *3* disparan. ¿Cuál es la probabilidad de que todos acierten, a excepción de «*C*»?

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{2}{5}$ D) $\frac{4}{17}$ E) $\frac{4}{35}$

RESOLUCIÓN :

* Graficando :



* Piden «*x*», la cual será :

$x = P(A \cap B) - P(A \cap B \cap C) \rightarrow x = \frac{4}{5} \times \frac{3}{7} - \frac{4}{5} \times \frac{3}{7} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{35}$

RPTA: "E"

PROBLEMA 85 :

Una caja contiene *4* focos malos y *6* focos buenos, se sacan *2* a la vez; se prueba uno de ellos y se encuentra que es bueno. ¿Cuál es la probabilidad de que el otro también sea bueno?

A) 3/5 B) 1/3 C) 1/2 D) 5/9 E) 4/9

RESOLUCIÓN :

* Sacar *2* focos a la vez, es lo mismo que sacar uno por uno hasta completar las *2* extracciones; luego si al sacar la primera resulta ser bueno, entonces en la caja quedarán *5* focos buenos y *4* malos, entonces :

$$P\left(\begin{matrix}\text{focos buenos}\\ \text{2da. extraccion}\end{matrix}\right) = \frac{5}{5+4} = \frac{5}{9}$$

RPTA: "D"

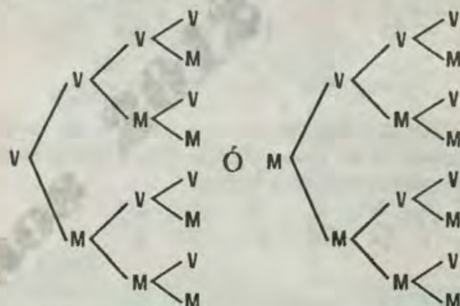
PROBLEMA 86 :

Una pareja planifica tener *4* hijos. ¿Cuál es la probabilidad de que entre ellos hayan *2* niños?

A) $\frac{1}{16}$ B) $\frac{15}{16}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{3}{8}$ E) $\frac{1}{5}$

RESOLUCIÓN :

* Haciendo el espacio muestral, por medio del diagrama del árbol :



Se puede apreciar que :

* Casos a favor : *6*
* Casos totales : *16*
* La probabilidad pedida : $\frac{6}{16} = \frac{3}{8}$

RPTA: "D"

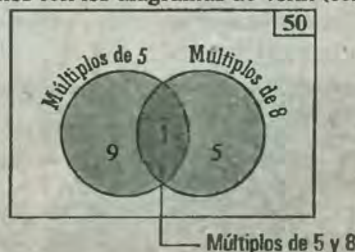
PROBLEMA 87 :

En una urna se encuentran *50* fichas marcadas del *1* al *50*. ¿Cuál es la probabilidad de que al extraer una ficha esta sea múltiplo de *5* u *8*?

A) $\frac{8}{25}$ B) $\frac{1}{10}$ C) $\frac{2}{5}$ D) $\frac{3}{7}$ E) $\frac{3}{10}$

RESOLUCIÓN :

* Tratemos con los diagramas de Venn (conjuntos) :



Múltiplos de 5 : $\underbrace{\{5 ; 10 ; 15 ; ..... ; 50\}}_{10\ numeros}$

Múltiplos de 8 : $\underbrace{\{8 ; 16 ; 24 ; .... ;48\}}_{6 numeros}$

Múltiplos de 5 y 8 : {40}

* Piden : $P\begin{pmatrix} Múltiplos \\ de\ 5\ u\ 8 \end{pmatrix} = \frac{9+1+5}{50} = \frac{3}{10}$

RPTA: "E"

PROBLEMA 88 :

Se extraen dos cartas de una baraja de 40. Calcular la probabilidad de que ambas cartas sean «reyes».

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{2}{25}$ C) $\frac{1}{65}$ D) $\frac{1}{30}$ E) $\frac{1}{130}$

RESOLUCIÓN :

* Llamando A al suceso : la primera carta es un rey; y B al suceso : la segunda carta es un rey, se nos pide la probabilidad del suceso $A \cap B$: Ambas cartas son reyes. Por tanto :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(A/B) = \frac{4}{40} \times \frac{3}{39} = \frac{1}{130}$$

* Ten en cuenta que el suceso B/A es: Sacar rey en la segunda extracción supuesto que en la primera salió rey. Hay 3 casos favorables (los tres reyes que quedan) sobe 39 posibles (las cartas restantes).

OBSERVACIÓN:

La probabilidad de la conjunción de dos sucesos dependientes (probabilidad de A y B) es igual a la probabilidad de A, por probabilidad de B, habiéndose dado A.

PROBLEMA 89 :

En una baraja de 52 cartas. ¿Cuál es la probabilidad de obtener una carta de corazones con un valor menor que 7 ó un valor mayor que 10?

A) $\frac{2}{17}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{5}{37}$ D) $\frac{9}{52}$ E) $\frac{7}{91}$

RESOLUCIÓN :

ε : Se extrae al azar una carta de la baraja.

EVENTO A : sale una carta de corazones con un valor menor que 7.

EVENTO B : sale una carta de corazones con un valor mayor que 10.

* Puede deducirse, fácilmente, que ambos eventos son mutuamente excluyentes, pues no puede ocurrir que habiendo extraído una sola carta de corazones ésta tenga, simultáneamente, un valor menor que 7 y a la vez un valor mayor que 10.

* Luego : Casos favorables al evento A :

{ 6 ; 5 ; 4 ; 3 ; 2 ; 1 }

$n(A) = 6$ y $n(\Omega) = 52 \rightarrow P(A) = \frac{6}{52}$

* Casos favorables al evento B : { 11 ; 12 ; 13 }

$n(B) = 3$

$n(\Omega) = 52 \Rightarrow P(B) = \frac{3}{52}$

* Entonces :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{6}{52} + \frac{3}{52} = \frac{9}{52}$$

RPTA: "D"

PRACTICA DE EJERCICIOS #1

01 Se lanzan simultáneamente un trompo que tiene 4 caras pintadas y un dado, ¿de cuántas maneras posibles pueden caer?

A) 10 B) 12 C) 24 D) 8 E) 16

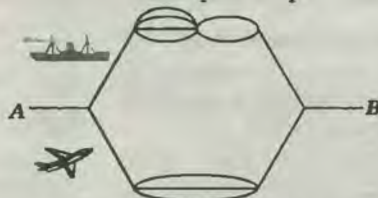
02 Pepito se va casar y duda entre usar alguno de sus 50 ternos clásicos o sus 40 ternos Miami Style. ¿De cuántas maneras podrá vestirse Pepito?

A) 200 B) 2000 C) 20 D) 90 E) 900

03 "Franco" juega para una liga deportiva y para vestirse cuenta con 3 polos, 4 shorts, 2 licras, 3 pares de medias y 5 chimpunes, ¿de cuántas maneras podrá vestirse?

A) 15 B) 360 C) 120 D) 17 E) 240

04 De cuántas maneras posibles puedo ir de "A" a "B"



A) 24 B) 6 C) 11 D) 14 E) 10

05 Hay 10 vapores que navegan entre Japón y Australia. ¿De cuántas maneras puede ir un hombre de Japón a Australia y regresar en un vapor diferente?

A) 100 B) 19 C) 20 D) 90 E) 99

06 Para preparar una hamburguesa Jorge dispone de 3 tipos de carne, 5 tipos de pan, 2 tipos de ensalada y 3 tipos de cremas. Si dicha hamburguesa consta de 1 tipo de cada uno de los elementos

mencionados. ¿De cuántas maneras se podrá preparar?

A)10 B)13 C)90 D)60 E)16

07 "Fiona" desea casarse con un sólo varón para siempre y tiene por pretendientes a los ingenieros *(A, B, C)* diputados *(x, y, z, w)* y profesores *(M, N, P)*. ¿De cuántas maneras posibles podrá casarse Fiona?

A)36 B)10 C)12 D)11 E)24

08 Para enviar un mensaje se puede usar •, -, •-, si mi mensaje consta sólo de *2* símbolos, ¿cuántos mensajes diferentes puedo enviar?

A)8 B)9 C)10 D)27 E)18

09 Cierto recibo se puede pagar en 3 Bancos únicamente en el *1ro.* se puede pagar en *3* cajeros en el *2do.* en *8* cajeros y en el tercero en *10* cajeros. ¿De cuántas maneras se puede pagar el recibo?

A)240 B)34 C)21 D)30 E)44

10 María tiene *4* blusas y *6* minifaldas todas de diferentes colores. ¿De cuántas maneras puede vestirse, si la blusa roja siempre la usa con una minifalda morada y viceversa?

A)15 B)24 C)22 D)16 E)20

11 Del problema anterior: ¿De cuántas maneras se vestirá si la blusa verde siempre la usa con la minifalda amarilla?

A)24 B)18 C)19 D)17 E)16

12 ¿De cuántas maneras se viste, si la minifalda negra sólo la usa con la blusa blanca?

A)20 B)18 C)16 D)17 E)21

13 Manuel tiene *5* pantalones *(2* iguales) y *7* camisas *(3* iguales). ¿De cuántas maneras diferentes puede vestirse

A)35 B)20 C)12 D)14 E)16

14 Un cartero debe repartir una carta a cada una de *3* personas: María, Lucía e Irene. A la casa de María puede ir a la *1, 2* ó *3* de la tarde, a la de Lucía puede ir a las *2* o a las *4* y a la de Irene a las *4* o a las *6*. ¿De cuántas maneras distintas puede repartirlas teniendo en cuenta la hora?

A)MAS DE 7 B)7 C)6 D)5 E)4

15 En el planeta "SHUGAR" los teléfonos tienen *3* dígitos. SHUBACA desea hacer una llamada y sólo recuerda que el primer dígito es *3*, el tercero es par (incluyendo al cero) y el segundo es mayor que *6*. ¿Cuántas llamadas debe hacer como mínimo para tener la certeza de haber marcado el número deseado?

A)8 B)15 C)9 D)10 E)12

16 Con cuatro personas ¿cuántos grupos de a *3* puedo formar?

A)3 B)4 C)2 D)12 E)5

17 Tres libros (física, química, álgebra), ¿de cuántas maneras los puedo acomodar en un estante?

A)2 B)3 C)6 D)8 E)12

18 Con *5* frutas, ¿cuántos jugos surtidos de *2* frutas puede preparar?

A)10 B)12 C)5 D)8 E)15

19 Con las cifras *1, 4, 6, 7*, ¿cuántos números de *1, 2* y *3* cifras diferentes puedo formar en total?

A)20 B)12 C)40 D)42 E)18

20 En un torneo futbolístico participan *6* equipos, ¿cuántos partidos diferentes se realizarán si juegan todos contra todos?

A)36 B)15 C)12 D)18 E)20

21 ¿De cuántas maneras se pueden disponer cinco niños en una fila?

A)24 B)36 C)30 D)25 E)120

22 ¿De cuántas maneras se pueden ordenar las vocales en una fila?

A)120 B)36 C)25 D)50 E)100

23 ¿De cuántas maneras se pueden disponer los jugadores de fulbito en la cancha?

A)120 B)720 C)600 D)12 E)36

24 ¿Cuántos números de tres cifras diferentes se pueden formar con: *1, 5, 4, 3, 8, 9*?

A)120 B)60 C)136 D)142 E)63

25 ¿Cuántas palabras de cuatro letras se pueden formar con las letras de la palabra QUISPE, sin importar su significado?

A)120 B)360 C)480 D)320 E)210

26 ¿De cuántas maneras se puede formar una comisión de *4* alumnos, de un salón que tiene *20* alumnos?

A)4548 B)4845 C)3616 D)3610 E)2014

27 En una bodega se venden: fideos, arroz, azúcar, frijoles y lentejas. ¿De cuántas maneras una persona podrá llevarse tres de estos artículos?

A)10 B)24 C)12 D)30 E)36

28 Con las cifras: *1, 2, 3, 5,7, 9*. ¿Cuántos números pares de cuatro cifras diferentes se puede formar?

A)120 B)180 C)30 D)90 E)60

29 ¿Cuántas señales se pueden hacer con cinco banderolas de colores diferentes, usando tres de ellas en cada señal?

A)120 B)40 C)60 D)30 E)15

30 Mónica tiene *9* amigas en la academia y quiere invitarlas a su casa para escuchar música, pero su mamá le ha dicho que sólo

invite a **5** de ellas. ¿De cuántas maneras podrá invitar a las **5** amigas, si de todas maneras debe invitar a Rosa que es su mejor amiga?

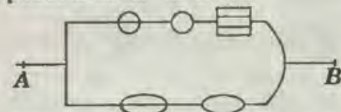
A)70 B)35 C)140 D)135 E)170

PRACTICA DE EJERCICIOS #2

01 "Lucy" desea comprar un producto y se sabe que lo venden en "WONG", "SANTA ISABEL" y "MAXI", en el primero lo tienen en 6 stands en el segundo en ***4*** y en el tercero en **5**. ¿De cuántas maneras distintas puede adquirir el producto?

A)5 B)15 C)120 D)18 E)24

02 ¿De cuántas maneras se puede ir de "*A*" a "*B*" ?



A)24 B)18 C)144 D)30 E)54

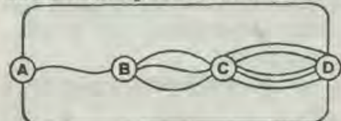
03 ¿Cuántas placas de tres símbolos se pueden hacer si el primero **y** tercero son vocales **y** el segundo son números?

A)20 B)250 C)30 D)180 E)200

04 ***6*** alumnos se sientan en una carpeta para ***3***. ¿De cuántas maneras distintas pueden ubicarse?

A)120 B)24 C)15 D)18 E)30

05 ¿De cuántas maneras diferentes se puede ir de "*A*" a "*D*"?



A)15 B)30 C)17 D)18 E)20

06 Una caja fuerte tiene una clave que consta de tres dígitos ***(2, 5, 8)***. ¿Cuántas combinaciones erradas pueden intentarse antes de abrir la caja?

A)8 B)12 C)26 D)27 E)30

07 Dado:



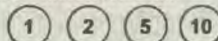
¿Cuántos grupos de **2** figuras diferentes puedo formar, si las figuras del mismo género son idénticas?

A)6 B)3 C)8 D)4 E)7

08 ¿De cuántas maneras diferentes se pueden sentar 2 personas en una mesa circular?

A)2 B)1 C)3 D)4 E)no se sabe

09 Con las monedas:



¿Cuántos grupos de **2** monedas puedo formar?

A)12 B)10 C)8 D)4 E)6

10 Con ***9*** colores diferentes cuántos tríos puedo formar si siempre uso el verde y el azul

A)9 B)18 C)7 D)6 E)27

11 Alberto desea comprarse ***1*** pantalón y va a una fábrica donde la marca LEE tiene ***10*** stands, ***Mc*** Gregor ***4*** stands, ***CK***, stands, FIORUCCI, ***5*** stands. ¿De cuántas formas podra comprarse dicho pantalón si todas las marcas mencionadas tienen el pantalón de su medida?

A)400 B)40 C)20 D)21 E)50

12 Si de "*B*" a "*C*" hay **5** caminos y de "*C*" a "*D*" existen **6** caminos, ¿de cuántas maneras puedo ir de ***B*** a ***D*** y volver, si el regreso tiene que ser por un camino diferente?

A)90 B)60 C)900 D)870 E)899

13 "Nicolás" desea vestirse y dispone de ***10*** pantalones ***(5*** iguales***)***, **6** camisas ***(3*** iguales***)*** y **3** pares de zapatos ***(2*** iguales***)***. ¿De cuántas formas diferentes podrá vestirse?

A)19 B)24 C)48 D)36 E)27

14 Con las cifras ***1, 3, 5, 7*** ¿cuántos números mayores que ***6000*** puedo formar?

A)24 B)10 C)6 D)8 E)4

15 En una reunión se contaron ***15*** estrechadas de mano. Si todos fueron corteses con los demas. ¿Cuántas personas asistieron a dicha reunión?

A)5 B)7 C)6 D)8 E)15

16 Con ***6*** frutas, ¿cuántos jugos surtidos compuestos de **5** frutas puedo preparar?

A)30 B)15 C)6 D)5 E)11

17 Tengo los libros ***(A,X,F,Q,G,T)***, ¿de cuántas maneras los puedo ordenar en línea?. Si ***A*** y ***T*** permanecen siempre en sus lugares

A)6 B)4 C)24 D)30 E)50

18 ¿De cuántas maneras se puede ir de "*A*" a "*B*" sin pasar **2** veces por un mismo punto?



A)8 B)7 C)6 D)5 E)9

19 Con las letras ***A, B, C, D, E***, ¿cuántos tríos puedo formar si la "***A***" siempre debe estar?

A)3 B)6 C)10 D)15 E)12

20 ¿Cuántos números de la forma siguiente existen:

$$\overline{\left(\frac{a}{2}\right)\left(\frac{b}{4}\right)\left(\frac{c}{5}\right)\left(\frac{d}{9}\right)}$$

si, $a, b, c, d, \in \mathbb{Z}$ menores que ***10***?

A)24 B)48 C)12 D)8 E)10

21 ¿De cuántos modos pueden disponerse en una fila, un sargento **y 6** soldados, si el sargento siempre es el primero?

A)120 B)720 C)14 D)180 E)N.A.

22 En un campeonato nacional de ciclismo, quedaron como finalistas un representante por cada departamento costero. En la gran final, ¿de cuántas maneras podrán ser ocupados los primeros tres puestos?.

A)720 B)140 C)360 D)540 E)900

23 Con las cifras: *1, 2, 3, 4, 5, 7* y *9*, ¿cuántos números pares de cuatro cifras diferentes se pueden determinar?

A)180 B)120 C)360 D)240 E)320

24 Una melodía musical debe estar formada por cinco notas diferentes. ¿Cuántas melodías se pueden componer?.

A)120 B)720 C)2520
D)1400 E)2600

25 Un comensal se sirve en cada comida cuatro platos de los nueve que son de su agrado. ¿Cuántas comidas diferentes puede hacer la persona?

A)3024 B)5! C)24 D)23 E)36

26 Mariela descansa dos días cualesquiera por semana. ¿Cuántas semanas podrán transcurrir para que no repita dos días de descanso?

A)24 B)21 C)42 D)36 E)N.A.

27 Con seis pesas de: *1,2,5,10, 20* y *50 kg*, ¿cuántas pesadas diferentes pueden obtenerse, tomando aquellas de tres en tres?

A)15 B)120 C)20 D)60 E)N.A.

28 ¿Cuántas combinaciones pueden hacerse con las letras: *a, b, c, d* y e, tomadas de tres en tres, entrando "*b*" en todas ellas?

A)12 B)6 C)8 D)4 E)N.A.

29 La diferencia entre el número de variaciones de "*x*" objetos, tomados de dos en dos, y el de combinaciones de esos objetos, tomados también de dos en dos es *190*. Calcular el valor de "*x*".

A)18 B)20 C)16 D)21 E)N.A.

30 En el campeonato de fútbol entran *14* equipos. Un periódico deportivo da un premio al que acierte la clasificación final de los *5* primeros equipos. Un suscriptor del periódico quiere enviar cuántas soluciones hagan falta para asegurar el premio.

¿Cuántas soluciones debe enviar?

A)240240 B)180120 C)280 540
D)196 500 E)Ninguna

PRACTICA DE EJERCICIOS #3

01 ¿De cuántas maneras se pueden disponer *7* niños en una fila?

A)24 B)25 C)120 D)20 E)100

02 ¿De cuántas maneras se pueden arreglar a todas las vocales en una circunferencia?

A)24 B)36 C)30 D)25 E)120

03 ¿De cuántas maneras se pueden disponer *5* jugadores de fulbito en una cancha, si uno de ellos siempre juega de arquero?

A)120 B)72 C)720 D)24 E)180

04 ¿Cuántos números de 3 cifras diferentes se pueden formar con las cifras: *2 ,3, 7, 1, 6,5?*

A)30 B)60 C)36 D)42 E)63

05 ¿Cuántas palabras de *4* letras se pueden formar con las letras de la palabra REXI?

A)120 B)360 C)480 D)320 E)24

06 ¿De cuántas maneras se puede formar una comisión de *4* alumnos, de un salón que tiene *20* alumnos?

A)4548 B)4845 C)3616
D)3610 E)2014

07 En una bodega se venden: fideos, arroz, azúcar, frijoles y lentejas. ¿De cuántas maneras una persona podrá llevarse 3 de estos artículos?

A)10 B)24 C)12 D)30 E)36

08 Con las cifras: *1,2,3,5, 7, 9.* ¿Cuántos números pares de 4 cifras diferentes se pueden formar?

A)120 B)180 C)30 D)90 E)60

09 ¿Cuántas señales se pueden hacer con *5* banderines de colores diferentes, usando *3* de ellas en cada señal?

A)120 B)40 C)60 D)30 E)15

10 En un campeonato de fútbol participan *16* equipos. ¿De cuántas maneras ocuparán los *5* primeros puestos, sabiendo que ALIANZA saldrá campeón?

A)732 B)180 C)366
D)250 E)256

11 Se tienen *20* puntos coplanares donde *3* o más de ellos no son colineales. ¿Cuántos triángulos se pueden determinar tomando como vértices a dichos puntos?

A)1200 B)1140 C)1440
D)1800 E)1610

12 En un campeonato nacional de ciclismo, quedaron como finalistas un representante por cada departamento costero. En la gran final, ¿de cuántas maneras podrán ser ocupados los primeros tres puestos?

A)720 B)140 C)360 D)540 E)900

13 Con las cifras *1, 2, 3, 4, 5, 7* y *9*, ¿cuántos números pares de 4 cifras diferentes se pueden determinar?

A)180 B)120 C)360 D)240 E)320

14 Una melodía músical debe estar formada por *5* notas diferentes. ¿Cuántas melodías se pueden componer?

A)120 B)720 C)2520
D)1400 E)2600

15 ¿De cuántas maneras puede una corte de **9** jueces, tomar una decisión por mayoría simple para condenar a un acusado?

A)180 B)315 C)220 D)255 E)270

16 Laura tiene **9** amigas en la academia y quiere invitarlas a su casa para escuchar música, pero su mamá le ha dicho que sólo invite a **5** de ellas. ¿De cuántas maneras podrá invitar a las **5** amigas, si de todas maneras debe invitar a Rita que es su mejor amiga?

A)70 B)35 C)140 D)135 E)170

17 Patricio tiene **9** amigos en la academia y quiere invitarlos a su casa para hablar acerca del mejor equipo del Perú: ALIANZA, pero su papá le ha dicho que sólo invite a **5** amigos. ¿De cuántas maneras podrá invitar los **5** amigos, si de ninguna manera debe invitar a Mauro, que es de otro equipo?

A)56 B)70 C)35 D)120 E)60

18 En una reunión asistieron cierto número de personas, observándose en total ***105*** apretones de mano. ¿Cuántas personas asistieron a dicha reunión?

A)15 B)12 C)7 D)14 E)9

19 ¿Cuántas señales se pueden hacer con 5 banderolas diferentes, sacando un número cualquiera de ellas a la vez?

A)225 B)120 C)325 D)240 E)N.A.

20 ¿Cuál es el máximo número de formas en que pueden entrar al cine, cuatro personas, ya sea de ***1*** en ***1***, de **2** en **2**, de ***3*** en ***3*** o de ***4*** en ***4***?

A)68 B)72 C)86 D)18 E)64

21 ¿De cuántas maneras se pueden sentar alrededor de una mesa circular, **7** personas?

A)5040 B)720 C)2500 D)49 E)1140

22 En una reunión hay ***7*** hombres y **5** mujeres; se van a formar comités mixtos de ***6*** personas en donde siempre debe haber sólo **2** mujeres. ¿De cuántas maneras se podrán formar estos comités?

A)710 B)350 C)120 D)5040 E)24

23 ¿Cuántas palabras se pueden formar con todas las letras de la palabra SUSURRO?

A)630 B)620 C)640 D)580 E)590

24 Una abuelita tiene **2** naranjas y **3** manzanas. Cada día, durante **5** días seguidos da a su nietecito una fruta. ¿De cuántas maneras puede hacer dicha entrega?

A)10 B)8 C)16 D)25 E)30

25 En un banquete hay 12 alumnos y ***3*** profesores y se obtienen fotografías distintas de forma que en cada fotografía entren **5** personas. ¿Cuántas fotografías habrá distintas en que entren **2** profesores?

A)420 B)960 C)600 D)810 E)N.A.

26 Con ***4*** consonantes y ***3*** vocales. ¿Cuántas palabras de **5** letras pueden formarse, conteniendo cada palabra ***3*** consonantes y **2** vocales?

A)10 B)8 C)16 D)25 E)30

27 Un sargento tiene ***16*** soldados a su mando y dispone que 4 siempre hagan guardía. Después de haberlos empleado de todas las maneras posibles. ¿Cuántas veces hizo guardia un soldado?

A)309 B)1820 C)455 D)620 E)360

28 Jorge y Rosa tienen ***3*** hijos y han comprado una mesa circular. ¿De cuántas maneras diferentes se pueden sentar los miembros de esta familia alrededor de la mesa, de modo que los padres siempre estén juntos?

A)12 B)24 C)48 D)96 E)60

29 ¿Cuántos números impares de 4 cifras no repetidas, se pueden formar con las cifras:***1,3,4, 5, 8, 9?***

A)20 B)30 C)240 D)250 E)235

30 Se tienen ***6*** números positivos y **5** negativos, ¿de cuántas maneras se podrá obtener un producto positivo, de ***4*** factores?

A)200 B)60 C)120 D)170 E)180

PRACTICA DE EJERCICIOS #4

**** Un marinero tiene siete banderines del mismo tamaño pero de colores diferentes, si las iza en un mástil una a continuación de otra:***

01 ¿Cuántas señales diferentes podrá hacer con tres de ellas?

A)35 B)210 C)5040 D)6 E)21

02 ¿Cuántas, con cinco de ellas?

A)5040 B)2520 C)120 D)21 E)42

03 Con cinco de ellas, siendo la primera siempre blanca y la última amarilla. ¿Cuantas señales diferentes podrá hacer?

A)60 B)10 C)120 D)210 E)20

04 ¿Cuántas señales hará, si las iza todas al mismo tiempo?

A)5040 B)49 C)7 D)343 E)2401

05 ¿Cuántas señales, si las iza todas simultáneamente pero la primera siempre es blanca, la central roja y la última azul?

A)49 B)5040 C)120 D)24 E)16

**** El capitán de un yate solicita tres marineros, pero se presentan siete:***

06 ¿De cuántas maneras diferentes podrá elegir la tripulación?

A)35 B)210 C)5040 D)21 E)6

07 ¿De cuántas maneras elegirá si cada uno va a desempeñar un cargo diferente?

A)35 B)210 C)5040
D)21 E)6

08 ¿De cuántas maneras elegirá la tripulación si Sandro siempre debe pertenecer a ella?

A)6 B)30 C)15 D)18 E)20

09 ¿De cuántas maneras, si Sandro debe pertenecer a la tripulación y además cada uno de los tripulantes debe desempeñar un cargo diferente?

A)30 B)60 C)90 D)15 E)20

* Se tienen 8 puntos en un plano, de los cuales tres o más no pueden estar en línea recta:

10 ¿Cuántos segmentos diferentes se podrán formar?

A)56 B)28 C)81 D)236 E)168

11 ¿Cuántos triángulos diferentes se podrán formar?

A)56 B)28 C)81 D)336 E)168

12 Tengo 5 objetos diferentes y 3 cajas; ¿en cuántas formas diferentes puedo colocar un objeto en cada caja?

A)12 B)24 C)30 D)60 E)72

13 En un torneo pugilístico participan 7 boxeadores. ¿Cuántas peleas se realizarán si pelean todos contra todos?

A)7 B)30 C)21 D)14 E)720

14 El capitán de un yate solicita tres marineros, pero se presentan seis. ¿De cuántas maneras diferentes podrá elegir la tripulación?

A)20 B)120 C)21 D)60 E)180

15 Se tienen cinco libros; ¿de cuántas maneras diferentes se podrán ordenar en un estante, (uno a continuación del otro)?

A)120 B)24 C)25 D)5 E)2

16 ¿De cuántas maneras diferentes, siete personas podrán ubicarse en una fila?

A)5040 B)7 C)720
D)120 E)49

PRACTICA DE EJERCICIOS #5

PROBABILIDADES

01 Se lanzan 2 dados simultáneamente. Calcular cuántos elementos tiene el espacio muestral.

A) 216 B) 12 C) 6 D) 1 E) 36

02 Determinar la probabilidad de que el resultado sea 7 al lanzar 2 dados.

A) 7/36 B) 1/6 C) 1/4 D) 4/5 E) 9/17

03 Al lanzar dos dados, ¿cuál es la probabilidad de que el resultado no sea 7?

A) 1/6 B) 2/7 C) 5/6 D) 7/36 E) 29/36

04 Al lanzar 2 dados, ¿cuál es la probabilidad de que el resultado del primer dado sea mayor que el segundo?

A) 1/6 B) 1/2 C) 1/3
D) 1/30 E) 5/12

05 Determinar la probabilidad de que al extraer 2 cartas de una baraja éstas sean corazones.

A) 1/13 B) 1/2 C) 1/17
D) 3/28 E) 4/25

06 A una señora embarazada le diagnosticaron que tendría trillizos. ¿ Cuál es la probabilidad que el día del parto nazcan 3 mujeres?

A) 1/2 B) 1/4 C) 1/8
D) 1/16 E) 1/3

07 Se lanzan dos monedas simultáneamente al aire. ¿Cuál es la probabilidad de obtener por lo menos una cara?

A) 1/2 B) 3/4 C) 1/6
D) 1/8 E) 1/16

08 Se lanzan simultáneamente una moneda y un dado. Calcular la probabilidad de obtener una cara y un número par.

A) 1/3 B) 1/4 C) 1/8
D) 1/2 E) 1/6

09 Se extrae una carta de una baraja normal. Calcular la probabilidad de obtener un 4 ó un 6 ?

A) 1/13 B) 2/13 C) 2/9
D) 1/9 E) 15/26

10 3 maratonistas (A, B y C) compiten en una maratón. ¿ Cuál es la probabilidad de que «A» llegue antes que «B»?

A) 1/3 B) 1/2 C) 1/4
D) 2/3 E) 3/4

11 Se quiere seleccionar un comité de 5 personas a partir de 7 mujeres y 6 varones. ¿Qué probabilidad habría que el comité esté integrado por 2 mujeres?

A) 1/7 B) 37/91 C) 140/429
D) 3/38 E) 7/23

12 Sabiendo que la probabilidad de que ocurra un accidente en 1 km de una carrera es 1/3, ¿cuál es la probabilidad de que ocurra encontrar al menos un accidente en 3 km de esa carrera?

A) 1/3 B) 1/27 C) 8/27
D) 2/3 E) 19/27

13 Las probabilidades que tienen A, B y C de resolver un mismo problema son 1/2; 3/5 y 1/6 respectivamente. Si intentan hacerlo los tres, determinar la probabilidad de que se resuelva el problema

A) 1/3 B) 5/6 C) 1/2 D) 1/6 E) 1/5

14 Si se arrojan 5 monedas,

¿cuál es la probabilidad de obtener 3 sellos y 2 caras?

A) 0,5 B) 0,25 C) 0,312
D) 0,3124 E) 0,3125

15 Si se lanza 5 veces un dado, ¿cuál es la probabilidad de que las 5 caras que aparecen sean diferentes?

A) 7/23 B) 31/32 C) 1/32
D) 7/22 E) 5/54

16 Una caja tiene 100 focos entre los cuales hay 10 defectuosos. ¿Cuál es la probabilidad de que al extraer una muestra de 3 focos, los 3 sean defectuosos?

A) 1/37 B) 2/2 695 C) 1/193
D) 2/491 E) 3/2 811

17 6 parejas de casados se encuentran en una habitación. Si las 4 personas se escogen al azar, encontrar la probabilidad de que se escojan 2 parejas de casados.

A) 1/2 B) 1/3 C) 1/17
D) 1/33 E) 2/5

18 De una baraja de 52 cartas,¿ cuál es la probabilidad de obtener una carta de corazones con un valor menor que 7 o un valor mayor que 10?

A) 1/13 B) 7/52 C) 9/52
D) 7/13 E) 9/42

19 Una caja contiene 5 bolas rojas, 4 bolas blancas y 3 bolas azules. Si se extraen 5 bolas al azar, determinar la probabilidad de que 3 sean rojas y 2 sean blancas.

A) 1/2 B) 4/11 C) 4/33
D) 7/11 E) 1/3

20 Con 7 médicos y 4 ingenieros se debe formar un comité de 6 miembros, ¿cuál es la probabilidad que el comité incluya al menos 2 ingenieros?

A) 1/2 B) 53/65 C) 17/52
D) 1/3 E) 23/62

21 Si se lanzan 3 monedas, ¿ Cuál es la probabilidad de no obtener exactamente 2 caras?

A) 3/8 B) 1/5 C) 5/8 D) 1/2 E) 4/5

22 Una clase contiene 10 hombres y 20 mujeres, de los cuales la mitad de los hombres y la mitad de las mujeres tienen ojos castaños. Encontrar la probabilidad de que una persona escogida al azar sea un hombre o tenga los ojos castaños.

A) 1/2 B) 1/3 C) 2/3 D) 4/5 E) 1/7

23 De 10 pacientes examinados, 20 padecían de artritis, 32 padecían de gastritis y 8 tenían ambos males. Hallar la probabilidad de seleccionar un paciente que padezca de artritis o gastritis.

A) 11/25 B) 11/50 C) 17/50
D) 13/50 E) 19/25

24 Ha de elegirse al azar un grupo de 4 astronautas, seleccionados entre 6 militares y 5 civiles. ¿Cuál es la probabilidad de que sean seleccionados más de 2 militares?

A) 1/4 B) 17/23 C) 23/66
D) 7/9 E) 11/45

25 Un lote de 12 artículos tiene 4 defectuosos. Se toman al azar 3 artículos del lote uno tras otro. Hallar la probabilidad de que los 3 estén buenos.

A) 11/17 B) 17/23 C) 14/55
D) 17/26 E) 1/13

26 La probabilidad que tiene «A» de ganar a «B» una partida de ajedrez es igual a 1/3. Cuál es la probabilidad que tiene «A» de ganar por lo menos una de las tres partidas?

A) 1/9 B) 1/27 C) 8/27
D) 19/27 E) 4/27

27 Cuál es la probabilidad de que al lanzar 3 monedas, se obtengan 3 caras o 3 sellos?

A) 1/2 B) 1/3 C) 1/4 D) 1/5 E) 1/6

28 De una bolsa que contiene 5 bolas negras y 3 blancas, se extraen 3 bolas en sucesión y sin reemplazo.¿Cuál es la probabilidad de que las 3 sean negras?

A) 0,125 B) 0,123 C) 0,725
D) 0,179 E) 0,912

29 Hallar la probabilidad de obtener al menos una cara al lanzar «n» monedas a la vez.

A) $\frac{1}{n}$ B) $\frac{2^n-1}{2^n}$ C) $\frac{2^n-1}{n}$
D) $\frac{2^n}{n}$ E) $\frac{2}{n}$

30 Se lanza un dado «n» veces. ¿ Cuál es la probabilidad de que 2 salga al menos una vez en los «n» lanzamientos?

A) $\frac{5}{6}$ B) $\frac{1}{6^n}$ C) $\left(\frac{5}{6}\right)^n$
D) $1-\left(\frac{5}{6}\right)^n$ E) $1-\left(\frac{1}{6}\right)^n$

PRIMERA PRACTICA DIRIGIDA

01 «Taty» tiene 5 blusas diferentes y 6 faldas de diferentes modelos ; de cuantas maneras diferentes se puede vestir.

A) 26 B) 12 C) 30
D) 11 E) 21

02 De cuántas maneras se puede nombrar un presidente , un secretario y un tesorero si los aspirantes son Pedro , Juan y Alberto.

A) 6 B) 9 C) 30
D) 11 E) 21

03 Supongamos que chary , que está buscando empleo , observa en un diario local que en cuatro tiendas mayoristas se solicitan trabajadores para venta en el mostrador , para almacén y para limpieza. ¿Cuántas oportunidades de empleo tiene chary?

A) 10 B) 12 C) 30 D) 11 E) 24

04 Una compañía constructora necesita un servicio de un ingeniero civil , un arquitecto , un jefe de personal y un topógrafo. Ante este pedido se presenta doce ingenieros civiles , siete arquitectos , cinco jefes de personal y diez topógrafos. ¿Cuántas opciones diferentes tendrá la compañía para cubrir esas plazas?

A) 4200 B) 9000 C) 300 D) 1400 E) 7200

05 En una microempresa de confecciones un producto se elabora en tres etapas. Para la etapa de trazado se tiene disponibles a seis personas; para la etapa de corte a tres , y para la etapa de armado a cinco personas. ¿De cuántas maneras puede moverse el producto en el proceso de confecciones?

A) 20 B) 90 C) 30 D) 48 E) 21

06 En el estante de una biblioteca hay cinco libros de estadística de autores diferentes y siete libros de matemática , también de distintos autores. Si deseamos seleccionar un solo libro, ¿Cuántas opciones diferentes tenemos?

A) 8 B) 9 C) 32 D) 12 E) 21

07 En tres mercados de una pequeña ciudad se venden arroz por saco ; en el primer mercado hay disponibles seis tiendas , en el segundo cuatro y en el tercer mercado cinco tiendas. ¿De cuántas maneras puede realizarse la compra de un saco de arroz?

A) 8 B) 23 C) 15 D)13 E) 4

08 En una encuesta se recomienda a un consumidor que ordene sus preferencias por cuatro marcas de gaseosas. ¿Cuántas ordenaciones pueden resultar?

A) 32 B) 92 C) 30 D) 11 E) 24

09 En un edificio de doce pisos , entran al ascensor en el primer piso cuatro personas . Cada persona puede bajar en un piso diferente. ¿De cuántas maneras pueden estas personas bajar el ascensor?

A) 7920 B) 920 C) 630 D) 1140 E) 24000

10 Un equipo de sonido tiene un reproductor de discos compactos con capacidad para seis discos. Si el reproductor tiene forma circular , ¿de cuántas maneras diferentes se pueden colocar los CD en el reproductor del equipo?

A) 120 B) 80 C) 60 D) 32 E) 24

11 ¿Cuántos números diferentes se pueden formar permutando las cifras del número *74373*?

A) 32 B) 60 C) 30 D) 11 E) 24

12 ¿Cuántas comisiones de tres alumnos se pueden formar con un grupo de cinco alumnos?

A) 3 B) 92 C) 12 D) 10 E) 24

13 Un salón de segundo grado de un centro educativo tiene doce alumnos : siete niños y cinco niñas . ¿Cuántos grupos de tres alumnos tienen por lo menos un niño?

A) 210 B) 92 C) 30 D) 240 E) 280

14 ¿Cuántos números de tres cifras menores de *226* se pueden formar con los dígitos *1*; *2*; *3* y *4*, si cada dígito se usa sola vez?

A) 8 B) 9 C) 10 D) 11 E) 12

15 El profesor de dibujo pide a sus alumnos que pinten los cuatro cuadritos presentados a continuación , usando sus colores rojo o verde. ¿De cuántas maneras diferentes se pueden pintarse los cuadraditos?

A) 32 B) 16 C) 36 D) 11 E) 24

16 ¿De cuántas maneras diferentes pueden sentarse doce personas alrededor de una mesa circular, si dos personas necesariamente deben estar una al lado de la otra?

A) 82056 B) 7200 C) 10! D) 11! E) 7257600

17 Victor y Manuel invitan a *10* de sus amigos a una cena que se llevará acabo en la casa de Victor, cada uno de los invitados van con sus respectivas esposas. ¿De cuántas formas se podrán sentar en una mesa redonda, si los matrimonios deben estar siempre juntos y además Victor y Manuel deben estar siempre juntos?

A) $(10!)\times 2^{10}$ B) $(10!)\times 2^{10}$ C) $10!\times 2^{11}$ D) $2^{12}\times(10!)$

18 ¿De cuántas maneras distintas un director de un laboratorio de investigación puede seleccionar cuatro químicos entre diez solicitantes , y tres físicos entre cinco solicitantes?

A) 720 B) 3200 C) 440 D) 2100

19 ¿De cuántas maneras diferentes se pueden distribuir *3* fichas iguales en un recuadro de *3* por *3* casillas , si en cada fila y columna haya a lo más una ficha?

A) 27 B) 81 C) 3 D) 6 E) 24

20 *3* amigos, llegan a una ciudad con *3* hoteles. ¿De cuántas maneras diferentes pueden ocupar cada uno una habitación, si además desean estar en

hoteles diferentes?, en el primer hotel hay *3* habitaciones libres, en el segundo hotel hay *4* y en el último *2*?

A) 9! B) 924 C) 216 D) 144 E) 8!

21 ¿Cuántas palabras de *4* letras se pueden formar con *7* mayúsculas y *8* minúsculas de las cuales *3* son vocales, de tal forma que cada palabra empiece en mayúscula y tenga al menos una vocal minúscula siendo todas letras diferentes?

A) 8736 B) 6552 C) 5532 D) 5586 E) 5584

SEGUNDA PRACTICA DIRIGIDA

01 Se lanzan 2 dados simultáneamente ¿Calcular cuántos elementos tiene el espacio muestral?

A) 6 B) 12 C) 24 D) 36 E) 216

02 Se lanzan 2 monedas simultáneamente ¿Calcular cuántos elementos tiene el espacio muestral?

A) 6 B) 12 C) 54 D) 4 E) 2

03 Se lanzan *6* monedas simultáneamente ¿Calcular cuántos elementos tiene el espacio muestral?

A) 4 B) 32 C) 64 D) 36 E) 8

04 Se lanzan 2 dados y una moneda simultáneamente ¿Calcular cuántos elementos tiene el espacio muestral?

A) 72 B) 32 C) 24 D) 36 E) 28

05 Determinar la probabilidad de que el resultado sea *5*, al lanzar *1* dado?

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{6}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{3}{4}$ E) $\frac{1}{5}$

06 Determinar la probabilidad de que el resultado sea un número impar, al lanzar *1* dado?

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{6}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{3}{4}$ E) $\frac{1}{5}$

07 Determinar la probabilidad de que el resultado sea un número no impar, al lanzar *1* dado?

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{6}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{3}{4}$ E) $\frac{1}{5}$

08 Determinar la probabilidad de que el resultado sea un número mayor o igual que 2, al lanzar *1* dado?

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{5}{6}$ C) $\frac{1}{3}$ D) $\frac{3}{4}$ E) $\frac{1}{5}$

09 Determinar la probabilidad de que el resultado sea un número menor que 2, al lanzar *1* dado?

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{6}$ C) $\frac{1}{3}$ D) $\frac{3}{4}$ E) $\frac{1}{5}$

10 Determinar la probabilidad de que el resultado sea cara, al lanzar una moneda ?

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{6}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{3}{4}$ E) $\frac{1}{5}$

11 Determinar la probabilidad de que al extraer *1* carta de una baraja, ésta sea trébol

A) $\frac{1}{13}$ B) $\frac{1}{6}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{3}{4}$ E) $\frac{1}{5}$

12 Determinar la probabilidad de que al extraer *1* carta de una baraja, esta sea roja

A) $\frac{1}{13}$ B) $\frac{1}{6}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{3}{4}$ E) $\frac{1}{5}$

13 Determinar la probabilidad de que al extraer *1* carta de una baraja, esta sea un rey.

A) $\frac{1}{13}$ B) $\frac{1}{6}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{3}{4}$ E) $\frac{1}{5}$

14 Determinar la probabilidad de que al extraer *1* carta de una baraja, esta sea 7 ó una jota.

A) $\frac{2}{13}$ B) $\frac{1}{6}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{3}{4}$ E) $\frac{1}{5}$

15 Determinar la probabilidad de que el resultado sea *3*, al lanzar 2 dados?

A) $\frac{7}{36}$ B) $\frac{1}{6}$ C) $\frac{1}{18}$ D) $\frac{4}{5}$ E) $\frac{9}{17}$

16 Al lanzar 2 dados. ¿Cuál es la probabilidad de que el resultado de los 2 dados no sea *3* ?

A) $\frac{17}{18}$ B) $\frac{2}{7}$ C) $\frac{5}{6}$ D) $\frac{7}{36}$ E) $\frac{29}{36}$

17 Determinar la probabilidad de que al extraer 2 cartas de una baraja, estas sean espadas.

A) $\frac{1}{13}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{17}$ D) $\frac{3}{28}$ E) $\frac{4}{25}$

18 Determinar la probabilidad de que el resultado de cada dado sea lo mismo, al lanzar 2 dados?

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{6}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{3}{4}$ E) $\frac{1}{5}$

19 Hallar la probabilidad de que al lanzar tres dados , la suma de los números que se obtengan sea igual a *10*.

A) $\frac{1}{2}$ B) 0,25 C) 0,125 D) 0,75 E) 0,7

20 De una baraja de naipes (*52* cartas), se extraen *2* cartas al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que las cartas extraídas sean una reina y una jota?

A) 4/663 B) 2/663 C) 1/1326 D) 8/663 E) 4/13

21 Se tiene un círculo de radio *8 cm* si ubicamos un punto aleatoriamente. ¿Cuál es la probabilidad de que este punto esté más cerca o a igual distancia del centro que de la circunferencia?

A) 0,85 B) 0,25 C) 0,35 D) 0,314 E) 0,11

22 *9* amigos se sientan al azar en círculo ¿Cuál es la probabilidad de que *2* de ellos queden juntos?

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{1}{8}$ E) $\frac{1}{5}$

23 Si se lanza *5* veces un dado ¿cuál es la probabilidad de que las *5* caras que aparecen sean diferentes?

A) $\frac{7}{23}$ B) $\frac{31}{32}$ C) $\frac{1}{32}$ D) $\frac{7}{21}$ E) $\frac{5}{54}$

24 Si se arrojan *5* monedas, ¿Cuál es la probabilidad de obtener *3* sellos y *2* caras?

A) 0,5 B) 0,32 C) 0,3275 D) 0,1 E) 0,3125

25 Las probabilidades que tienen **A**, **B** y **C** de resolver un mismo problema son:

$\frac{1}{2}$, $\frac{3}{5}$ y $\frac{1}{6}$ respectivamente. Si intentan hacerlo los tres, determinar la probabilidad de que se resuelva el problema

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{5}{6}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{1}{6}$ E) $\frac{1}{5}$

26 Sabiendo que la probabilidad de que ocurra un accidente en *1 km*. de una carrera es $\frac{1}{3}$ ¿Cuál es la probabilidad de que ocurra encontrar al menos un accidente en *3 km*. de esa carretera?

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{1}{27}$ C) $\frac{8}{27}$ D) $\frac{2}{3}$ E) $\frac{19}{27}$

27 Al lanzar *2* dados, ¿Cuál es la probabilidad de que el resultado del primer dado sea mayor que el segundo?

A) $\frac{1}{6}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{3}$ D) $\frac{1}{30}$ E) $\frac{5}{12}$

28 Un artillero dispara a un blanco , se sabe que en un disparo la probabilidad de acertar es *0,01*. Se efectúa dos disparos, ¿cuál será la probabilidad de no acertar?

A) 0,99 B) 0,9081 C) 0,9801 D) 0,9802 E) 0,0001

29 De una bolsa que contiene *6* bolas blancas , *4* negras y *2* rojas , se sacan *6* bolas al azar. Calcular la probabilidad de que *3* sean blancas , *2* negras y *1* roja.

A) 16/33 B) 14/23 C) 20/77 D) 3/31 E) 4/23

30 Si *10* jugadores compiten en una carrera de *5000 m*. Existe un primer, segundo y tercer premio. Si un país cuenta con cuatro participantes en la carrera . ¿Cuál es la probabilidad que *A* y *B* obtengan los tres premios?

A) 0,033 B) 0,333 C) 0,243 D) 0,211 E) 0,266

31 Un jugador lanza dos monedas. Gana 1 ó *S/.2* si aparecen una o dos caras. Por otra parte pierde *S/.5* si no aparece cara. Determinar la esperanza matemática del juego y si este es favorable.

32 Se lanza un par de dados. Se define la variable aleatoria X como la suma de las puntuaciones obtenidas. Hallar la función de probabilidad, la esperanza matemática .

33 Un jugador lanza un dado corriente. Si sale número primo, gana tantos cientos de soles como marca el dado, pero si no sale número primo, pierde tantos cientos de soles como marca el dado. Determinar la función de probabilidad y la esperanza matemática del juego.

34 Si una persona compra una papeleta en una rifa, en la que puede ganar de *S/.5000* ó un segundo premio de *S/.2000* con probabilidades de: *0,001* y *0,003*. ¿Cuál sería el precio justo a pagar por la papeleta?

CLAVES DE LA SEGUNDA PRÁCTICA

01) D	02) D	03) B	04) A	05) B
06) A	07) A	08) B	09) B	10) A
11) C	12) C	13) A	14) A	15) C
16) A	17) C	18) B	19) C	20) D
21) B	22) C	23) E	24) E	25) B
26) E	27) E	28) C	29) C	30) A



NÚMEROS COMPLEJOS 14

OBJETIVO :

*Conocer un nuevo campo numérico denominado ***"El Campo Complejo"***, así como desarrollar habilidad operativa con los elementos de dicho campo.

* Conocer los conceptos: unidad imaginaria, número complejo, parte real y parte imaginaria.

* Conocer la estructura analítica y algebraica de los números complejos y sus principales elementos(operaciones algebraicas y vectores en un plano)

* Representación de los complejos como puntos en un plano,representación polar , conjugado de un complejo ,módulo, distancia, raíces de un complejo.

* Pasar de forma binómica a forma polar y viceversa. Operar con complejos en forma polar (multiplicación, potenciación y división) e interpretarlo gráficamente.

* Conocer la fórmula de Moivre. Hallar todas las raíces n-ésimas de un complejo e interpretarlas gráficamente.

INTRODUCCIÓN :

Muchos conceptos en matemáticas tardaron varios años y hasta siglos en desarrollarse, desde el momento en que fueron descubiertos por primera vez, por alguna mente brillante, hasta la formalización de los mismos. El avance en el tiempo de la matemática fue un proceso lento, debido al caracter formal de esta ciencia: una de sus reglas es que cualquier objeto nuevo debe estar claramente definido para ser aceptado por toda la comunidad. Así pues, muchas ideas incompletas quedaron relegadas a la oscuridad y el olvido por no encajar en el sistema de razonamiento de la época, como fue el caso de los números complejos.

Fue en Italia, durante el periodo del renacimiento, cuando por vez primera los algebristas se dedican a investigar seriamente estos números y penetran el halo misterioso en que se hallaban envueltos desde la antiguedad.

Los complejos aparecen inicialmente en el libro Ars magna de Girolamo Cardano, publicado en ***1545.***

Pero ¿Cómo surge la idea de usar estos números? ¿Porque no aparecieron antes?

¿Quién era Cardano? Trataremos de contestar a estas interrogantes remontándonos a los orígenes del álgebra.

Podemos decir que los números complejos aparecieron muy temprano en el paisaje de las matemáticas, pero fueron ignorados sistemáticamente, por su caracter extraño, carentes de sentido e imposibles de representar. Aparecen entre las soluciones de las ecuaciones cuadráticas, que generan raíces cuadradas de números negativos.

Por ejemplo la ecuación: $x^2 + x + 5 = 0$ no posee soluciones reales. Si empleamos la conocida fórmula de resolución de una ecuación de segundo grado, nos encontraremos con la raíz cuadrada de -19: Los matemáticos griegos, que conocían los métodos geométricos de resolución, consideraban este tipo de problemas irresolubles.

Es completamente incorrecto decir que la aparición de los números complejos se debió a la imposibilidad de resolver todas las ecuaciones cuadráticas, pues los matemáticos de entonces simplemente no se interesaban en ello. La motivación real de entenderlos, viene de las ecuaciones cúbicas, como veremos más adelante.

Recordemos que los griegos rechazaron el uso de los números negativos, por la falta de un equivalente dentro de la geometría. Para ellos, todo número representaba la longitud de un segmento o el área de una figura plana. La geometría era considerada entonces como el corazón de toda la matemática y esto, por supuesto, retardó considerablemente el desarrollo de los sistemas numéricos.

Con el surgimiento del álgebra durante la Edad Media, el concepto de número se amplía, para poder manipular las ecuaciones, desligadas ya de la influencia dominante de la geometría. El algebrista se va a mover en un mundo pleno de libertad e imaginación donde las ecuaciones y fórmulas serían el semillero de las grandes ideas que darían impulso a la matemática. Los números, de ahora en adelante, quedarían libres de sus equivalentes geométricos.

La palabra álgebra se deriva del vocablo arabe aljabr que quiere decir restaurar.

¿Qué tiene esto que ver con la matemática? Cuando se tiene una ecuación, como por ejemplo $2x + 3 = 5$ entonces quitamos y ponemos símbolos a los lados para resolverla. Esta es la forma de operar del algebrista. Pero no solo los algebristas operan: también los doctores lo hacen. En la medicina antigua el término álgebra se usaba para designar las operaciones de los huesos. Así pues, un algebrista era un matemático o bien un doctor que colocaba los huesos partidos en su sitio. Algebra es el arte de restituir a su lugar los huesos dislocados, según el diccionario de la Real Academia de la Lengua Española.

Debe quedar claro la necesidad de extender los números reales a los números complejos y conocer el álgebra básica de los números complejos.

La cuestión de resolver ecuaciones algebraicas a llevado al hombre desde los números naturales N al prentender resolver ecuaciones como; $x+2=1$, a los números enteros Z donde no existe solución para ecuaciones del tipo; $2x+3=0$, a los números racionales Q que tiene limitaciones para resolver ecuaciones como: $x^2-2=0$, hasta llegar a los números reales. Sin embargo sabemos que no existe ningún número real x con la propiedad $x^2+1=0$, entonces se hace necesario extender el conjunto de los números reales R, tal extensión es el conjunto de los números complejos C.

NÚMEROS COMPLEJOS

Se llama número complejo a todo par ordenado $(a;b)$ de componentes reales, tales que la primera componente representa la parte real y la segunda componente la parte imaginaria.

NOTACIÓN :

$$\boxed{z=(a;b);\ donde:\ a;b\in R}$$

* Al número "a" se le llama parte real de "z":

$$\boxed{Re(z)=a}$$

*Al número "b" se le llama parte imaginaria de "z":

$$\boxed{Im(z)=b}$$

EJEMPLO:

$$z=(2;\sqrt{3})\Rightarrow\begin{cases}Re(z)=2\\Im(z)=\sqrt{3}\end{cases}$$

CONJUNTO DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS C

El conjunto de todos los números complejos está denotado por:

$$\mathbb{C}=\{(x;y)/x\in\mathbb{R};y\in\mathbb{R}\}$$

en el cual se definen las operaciones de adición, multiplicación y una relación de igualdad, así:

ADICIÓN ENTRE NÚMEROS COMPLEJOS

Para hallar la suma entre dos números complejos, se sumarán las partes reales y también las partes imaginarias. Así:

* Sean:

$$z_1=(a;b);\ z_2=(x;y)\ ,a;b;x;y\in R$$

* Entonces:

$$z_1+z_2=(a+x;\ b+y)$$

MUNTIPLICACIÓN ENTRE NÚMEROS COMPLEJOS

Para hallar el producto de multiplicar 2 números complejos, ***para la parte real*** se multiplicarán las partes reales menos el producto de las partes imaginarias. Y ***para la parte imaginaria*** se multiplicará la primera parte real con la segunda parte imaginaria aumentado en el producto de multiplicar la primera parte imaginaria con la segunda parte real. Así:

* Sean

$$z_1;z_2\in\mathbb{C}:z_1=(a;b)\wedge z_2=(c;d),\ entonces:$$

$$z_1\times z_2=(ac-bd;ad+bc)$$

* Además: $m(a;b)=(ma;mb)$

EJEMPLO:

Si: $z_1=(3;5)$ y $z_2=(-1;7)$

* Entonces:

$$z_1+z_2=(3+(-1);5+7)=(2;12)$$

$$z_1z_2=((1)(-3)-(5)(7);(7)(3)+(1)(-5))$$
$$=(-3-35;21-5)=(-38;16)$$

OBSERVACIÓN :

* Sobre C se verifica la ley conmutativa,asociativa, distributiva , del elemento neutro inverso respecto a la adición y multiplicación.

* Al sumar dos números complejos el resultado es un número complejo , porque la suma de reales es un real. Es decir, la adición en $\mathbb{C}$ es cerrada o la

adición en $\mathbb{C}$ es una operación binaria o la adición en $\mathbb{C}$ cumple la propiedad clausurativa.

*Al multiplicar dos números complejos el producto es un número complejo , porque el producto y la suma de reales es un real. Es decir , la multiplicación en $\mathbb{C}$ es cerrada o la multiplicación en $\mathbb{C}$ es una operación binaria o la multiplicación en $\mathbb{C}$ cumple la propiedad clausurativa.

RELACIÓN DE IGUALDAD

Dos números complejos son iguales , si y sólo si sus partes reales y sus partes imaginarias son iguales respectivamente.

Así:

* Sean $z_1; z_2 \in \mathbb{C} : z_1 = (a;b) \wedge z_2 = (c;d)$, entonces :

$$\boxed{z_1 = z_2 \text{ si y sólo si } a = c \ \wedge \ b = d}$$

DEFINICIONES:

I) Dado $z \in \mathbb{C} : z = (a;b)$

z es el ***complejo real*** $\Leftrightarrow \operatorname{Im}(z) = 0$, luego $z = (a;0)$

*Además convendremos en escribir $(a;0) \equiv a$, esto por la similitud que se da al efectuar las operaciones anteriormente definidas.

II) Dado $z \in \mathbb{C} : z = (a;b)$

z es ***imaginario*** $\Leftrightarrow \operatorname{Im}(z) \neq 0$

III) Dado $z \in C : z = (a;b)$

z es ***imaginario puro*** $\Leftrightarrow Re(z)=0$, luego $z=(0;b)$

*Además si $b=1$, es decir $z=(0;1)$ definimos como ***unidad imaginaria*** y convendremos en asociarle la letra i tales que $i = (0;1)$

TEOREMA: $i^2 = -1$

PRUEBA :

$i = (0;1) \Rightarrow i^2 = (0;1) \times (0;1)$ .... Por definición de multiplicación Por convención

$\Rightarrow i^2 = (0-1;0+0)$

$\Rightarrow i^2 = (-1;0)$

$\Rightarrow i^2 = -1$

$$\boxed{\text{Si} : i^2 = -1 \Rightarrow i = \sqrt{-1}}$$

TEOREMA :

$$(0;b) = bi \quad , \forall\ b \in R$$

PRUEBA:

$(0;b) = (b \times 0 - 1 \times 0; b \times 1 + 0 \times 0); \forall b \in R$

$(0;b) = (b;0) \times (0;1)$ ....Por definición de multiplicación

$(0;b) = bi \ ; \ \ b \in R$ Por convención

IV) Dado $z \in C : z = (a;b)$

z es complejo nulo $\Leftrightarrow Re(z) = \operatorname{Im}(z) = 0$ es decir :

$z = (0;0)$

RELACIONES DEFINIDAS EN $\underline{\mathbb{C}}$:

Dado $z \in \mathbb{C} : z = (a;b)$ se define:

$\bar{z} = (a;-b); \bar{z}$: ***conjugado*** de z

$z^* = (-a;+b); z^*$: ***opuesto*** de z

FORMA CARTESIANA O BINÓMICA DE UN COMPLEJO

El número complejo: $z = (a;b);$ lo podemos expresar como :

$$z = (a;b) = a\underbrace{(1;0)}_{1} + b\underbrace{(0;1)}_{i}$$

$$\Rightarrow \boxed{z = a + bi}$$

OBSERVACION :

* Si $b = 0 \rightarrow$ el número complejo $(a+0i)$ se llama ***complejo real.***

* Si $a = 0 \rightarrow$ el número complejo $(0+bi)$ se llama ***complejo imaginario puro .***

*Dos números complejos: $z_1 = a + bi$ y $z_2 = c + di$; son iguales si: $a = c$ y $b = d$

* El conjugado de un número complejo :

$$z = a + bi \text{ es: } \bar{z} = a - bi$$

* El opuesto de un número complejo :

$$z = a + bi \text{ es: } z^* = -a - bi$$

NOTA :

Con los números complejos en forma binomial se pueden establecer las mismas operaciones que se realizan con los reales (adición, sustracción , multiplicación , división, potenciaciòn , radicación, menos la relación de orden).

CANTIDADES IMAGINARIAS

Son aquellos números que resultan de extraer una raíz de índice par a un número real negativo.

EJEMPLOS:

* $\sqrt{-16}=\sqrt{16(-1)}=\sqrt{16}\underbrace{\sqrt{-1}}_{i}=4i$
* $\sqrt{-5}=\sqrt{5(-1)}=\sqrt{5}\underbrace{\sqrt{-1}}_{i}=\sqrt{5}i$
* $\sqrt{-100}=\sqrt{100}\sqrt{-1}=10i$
* $\sqrt[4]{-625}=\sqrt[4]{625}\sqrt[4]{-1}=\dfrac{5}{\sqrt{2}}(1+i)$
* $\sqrt[6]{-729}=\sqrt[6]{729}\sqrt[6]{-1}=3i$

De todos estos el más importante es $\sqrt{-1}$; al cual denominaremos ***unidad imaginaria***, cuya notación universal es $\boxed{i=\sqrt{-1}}$

POTENCIAS ENTERAS DE LA UNIDAD IMAGINARIA

* Analicemos el comportamiento del número i^n; $\forall\ n\in Z$; teniendo en cuenta la siguiente definición:

$$\boxed{i^0=1\ ;\ i^1=i}$$

* $i^1=i$
* $i^2=-1$
* $i^3=i^2\times i=-i$
* $i^4=i^2\times i^2=(-1)(-1)=1$
* $i^5=i^4\times i=i$
* $i^6=i^4\times i^2=-1$
* $i^7=i^4\times i^3=-i$
* $i^8=i^4\times i^4=1$
* $i^9=i^8\times i=i$
* $i^{10}=i^8\times i^2=-1$
* $i^{11}=i^8\times i^3=-i$
* $i^{12}=i^8\times i^4=1$

. . .

* De donde se aprecia que las potencias enteras de i se repiten cada cuatro veces y sólo toman uno de los cuatro valores $i\ ;-1\ ;-i\ ;1$

Esto implica que la unidad imaginaria elevado a un múltiplo de cuatro es igual a la unidad.

* Por lo tanto : $i^{\overset{o}{4}}=1$

* ***EN GENERAL :***

$$\boxed{i^{\pm\overset{o}{4}}=1}$$

PROPIEDADES:

1) $\boxed{i^{4n}=1}\boxed{i^{4n+1}=i}\boxed{i^{4n+2}=-1}\boxed{i^{4n+3}=-i}$; $n\in N$

2) $\boxed{i+i^2+i^3+...+i^{4n}=0}$; $n\in N$

3) $\boxed{(1+i)^2=2i}$; $\boxed{(1-i)^2=-2i}$

4) $\boxed{(1+i)^4=(1-i)^4=-4}$

5) $\boxed{\dfrac{1+i}{1-i}=i}$ $\boxed{\dfrac{1-i}{1+i}=-i}$

TEOREMA:

$$\boxed{i^{-k}=(-1)^k i^k;\ \forall\, k\in Z}$$

$$\boxed{(\overset{o}{a}+k)^n=\overset{o}{a}+k^n;\ n\in N}$$

NOTA :

Cuando el exponente es un número mayor que **4** , se le divide entre **4** y luego se sustituye con el residuo de la división efectuada.

EJEMPLOS:

* $i^{99}=i^{4(24)+3}=i^3=-i$
* $i^{144}=i^{4(36)}=i^{\overset{o}{4}}=1$
* $i^{22}=i^{\overset{o}{4}+2}=-1$
* $i^{-2000}=i^{\overset{o}{4}}=1$
* $i^{81}=i^{\overset{o}{4}+1}=i$
* $i^{-17}=(-1)^{17}i^{17}=(-1)i=-1$
* $i^{43}=i^{\overset{o}{4}+3}=-i$

COROLARIOS :

Sea $i=\sqrt{-1}$ la unidad imaginaria

I) $i+i^2+i^3+i^4=0$

II) $i^{4k}+i^{4k+1}+i^{4k+2}+i^{4k+3}=0$;$\forall\ k\in Z$

III) $i^n+i^{n+1}+i^{n+2}+i^{n+3}=0$; $\forall n\in Z$

IV) $i+i^2+i^3+i^4+i^5+...i^{4k}=0$; $k\in Z$

EJEMPLOS :

* $i+i^2+i^3+i^4+i^5+...+i^{1024}=0$
* $i^{-1}+i^{-2}+i^{-3}+...+i^{-80}=0$

EJERCICIO :

Calcular: $\dfrac{1+i^1+i^2+i^3+...+i^{1999}}{1+i+i^2}$

RESOLUCIÓN :

*Como: $1=i^{2000}$; entonces el numerador será:

$$i^{2000}+i+i^2+i^3+...+i^{1999}$$

* Ordenando :

$$\underbrace{i^1+i^2+i^3+i^4}_{0}+\underbrace{i^5+i^6+i^7+i^8}_{0}+...+i^{2000}$$

* Se observa que cada cuatro términos se obtiene cero, luego el numerador será cero, entonces se tiene:

$$\frac{0}{1+i+i^2}=0$$

NUMEROS COMPLEJOS

Un número complejo z es aquel que está formado por la unión de una parte real y otra imaginaria.

Su representación es:

$$z=a+bi=(a;b)\ ;\ a \text{ y } b\in\mathbb{R}$$

parte real (a) — parte imaginaria (b)

* Siendo a y b números reales , nos indica que el complejo está formado por "a" unidades reales y "b" unidades imaginarias.

EJEMPLOS :

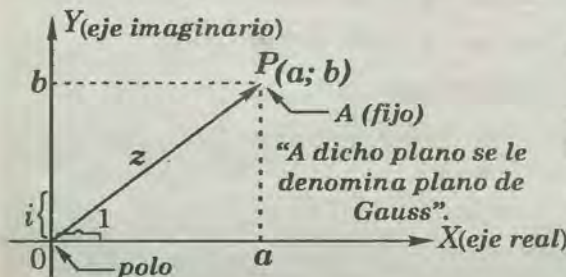
* $z_1=(4;5)=4+5i$
* $z_3=(\sqrt{3};-6)=\sqrt{3}-6i$
* $z_2=\left(\frac{1}{3};-\frac{5}{2}\right)=\frac{1}{3}-\frac{5}{2}i$
* $z_4=(0;-5)=-5i$

PRESENTACIÓN GRÁFICA DE UN COMPLEJO

FORMA CARTESIANA DE UN COMPLEJO:

Todo número z escrito en su forma binómica $z=a+bi$, puede representarse en su forma cartesiana $z=(a;b)$.

*El eje horizontal X representa las cantidades reales, y el eje vertical Y representa las cantidades imaginarias.



*Donde $\overline{OP}$ es el radio vector del complejo $z=(x;y)$

CLASIFICACIÓN

I) COMPLEJOS IGUALES :

Dos complejos son iguales, si tienen iguales sus partes reales y sus partes imaginarias. Esto es:

Si: $a+bi=c+di \Rightarrow a=c$ y $b=d$

II) COMPLEJO REAL O PURAMENTE REAL :

Es aquel número complejo que carece de la parte imaginaria; es decir su parte imaginaria es cero.

NOTACIÓN:

$$z=x+0i\equiv x\ ;\ \forall x\in\mathbb{R}$$

EJEMPLOS:

$z_1=3\ ;\ z_2=-15\ ;\ z_3=\sqrt{11}$

III) COMPLEJO IMAGINARIO PURO :

Es aquel número complejo que carece de la parte real; es decir su parte real es cero; además su parte imaginaria es diferente de cero.

NOTACIÓN:

$$z=0+yi\equiv yi\ ;\ \forall\ y\in\mathbb{R}-\{0\}$$

EJEMPLOS:

$z_1=3i\ ;\ z_2=-12i\ ;\ z_3=\sqrt{5}i$

IV) COMPLEJO NULO :

Es aquel número complejo que presenta la parte real e imaginaria igual al número cero; es decir las dos componentes son nulas.

NOTACIÓN:

$$z=0+0i\equiv 0$$

EJEMPLOS:

$z_1=0+0i\ ;\ z_2=0\ ;\ z_3=0i$

EJERCICIO:

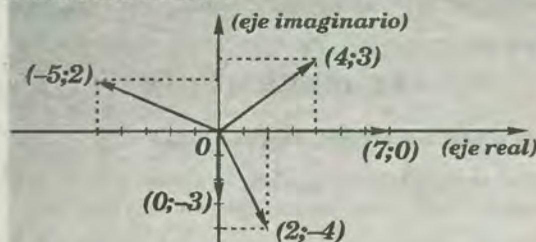
Representar gráficamente los siguientes números

$4+3i=(4;3)$ $7=(7;0)$

$2-4i=(2;-4)$ $-3i=(0;-3)$

$-5+2i=(-5;2)$

RESOLUCIÓN:



COMPLEJOS CONJUGADOS :

Son aquellos que tienen la misma parte real e imaginaria, pero de signos contrarios sus partes imaginarias.

Dado el conjunto $z = a + bi$; se define el complejo conjugado de z, denotado por $\overline{z}$ como:

$$\boxed{\overline{z} = a - bi}$$

EJEMPLOS:

* $z = 3 + 4i \Rightarrow \overline{z} = 3 - 4i$
* $z = 3 \Rightarrow \overline{z} = 3$

OPUESTO DE UN COMPLEJO :

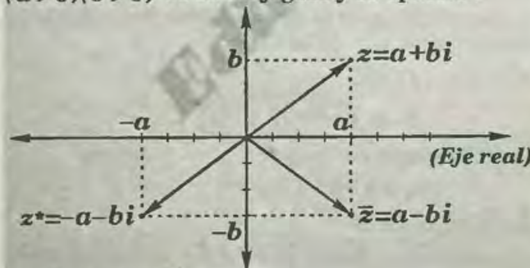
El opuesto de un complejo $z = a + bi$; es:

$\boxed{z^* = -a - bi}$ ....*(opuesto de z)*

EJEMPLOS:

* $z = 3 + \sqrt{2}i \Rightarrow z^* = -3 - \sqrt{2}i$
* $z = -1 + 5i \Rightarrow z^* = 1 - 5i$
* $z = 5 - 2i \Rightarrow z^* = -5 + 2i$
* $z = 7 \Rightarrow z^* = -7$

* La representación geométrica de $z = a + bi$ $(a > 0)(b > 0)$ de su conjugado y su opuesto :



PROPIEDADES:

* Sean : $z ; z_1 ; z_2 \in \mathbb{C}$

I) $z = \overline{z} \Leftrightarrow z$ es complejo real

II) $\overline{\overline{z}} = z$

III) $\overline{z} = -z = z^* \Leftrightarrow z$ es complejo imaginario puro

IV) $z + \overline{z} = 2\mathbb{R}e(z)$

V) $z - \overline{z} = 2i\,\mathbb{I}m(z)$

VI) $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$

VII) $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$

VIII) $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$; $\forall\, z_2 \neq (0;0)$

IX) $\overline{(z^n)} = (\overline{z})^n$; $\forall\, n \in \mathbb{N}$

X) $\overline{(\sqrt[n]{z})} = \sqrt[n]{\overline{z}}$; $\forall\, n \in \mathbb{N}$

OPERACIONES EN LA FORMA BINÓMICA O CARTESIANA

Sean los números $z_1 = a + bi \wedge z_2 = c + di$, se definen las siguientes operaciones :

I) ADICIÓN DE NÚMEROS COMPLEJOS :

Dados los números complejos: z_1, z_2 se tiene:

$z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di)$

$$\boxed{z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i}$$

EJEMPLO:

* Dado: $z_1 = 3 - 2i$; $z_2 = 2 + 4i$
* Entonces:

$z_1 + z_2 = (3 - 2i) + (2 + 4i)$

$\Rightarrow z_1 + z_2 = (3 + 2) + (-2 + 4)i$

$\Rightarrow z_1 + z_2 = 5 + 2i$

II) SUSTRACIÓN DE NÚMEROS COMPLEJOS

Dados los complejos z_1, z_2 entonces

$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$

$\Rightarrow z_1 - z_2 = (a + bi) + (-c - di)$

$\Rightarrow \boxed{z_1 - z_2 = (a - c) + (b - d)i}$

EJEMPLO 1 :

* Dado : $z_1 = 5 - 7i$; $z_2 = 7 + 11i$
* Entonces :

$z_1 - z_2 = (5 - 7i) - (7 + 11i)$

$\Rightarrow z_1 - z_2 = (5 - 7) + (-7 - 11)i$

$\Rightarrow z_1 - z_2 = -2 - 18i$

EJEMPLO 2 :

* Si: $z_1 = 2\sqrt{3} - 4i \wedge z_2 = \sqrt{3} + 4i$

$\Rightarrow z_1 - z_2 = (2\sqrt{3} - \sqrt{3}) + (-4-4)i$

$\rightarrow z_1 - z_2 = \sqrt{3} - 8i$

III) MULTIPLICACIÓN DE NÚMEROS COMPLEJOS :

Dados los números complejos z_1, z_2

se tiene $z_1z_2 = (a+bi)(c+di)$

$= (ac + adi + bci + bdi^2)$

$= (ac - bd) + (bc + ad)i$

$$\rightarrow \boxed{z_1z_2 = (ac-bd)+(bc+ad)i}$$

EJEMPLO 1:

* Dado : $z_1 = 2 - 3i$; $z_2 = 1 + 2i$

* Entonces: $z_1 \cdot z_2 = (2 - 3i) \cdot (1 + 2i)$

$\Rightarrow z_1 \times z_2 = 2 + 4i - 3i - 6i^2$

$\Rightarrow z_1 \times z_2 = 2 + i - 6(-1)$

$\Rightarrow z_1 \times z_2 = 8 + i$

EJEMPLO 2 :

* Si: $z_1 = 3 + 2i$; $z_2 = 2 - 5i$

$\Rightarrow z_1 \times z_2 = (3+2i)(2-5i)$

$\rightarrow z_1 \times z_2 = 6 - 15i + 4i + 10$

* Luego : $z_1 \times z_2 = 16 - 11i$
* También por propiedad :

$\rightarrow z_1 \times z_2 = 6 + 10 + (4-15)i$

$\rightarrow z_1 \times z_2 = 16 - 11i$

IV) DIVISIÓN DE NÚMEROS COMPLEJOS :

Sean los números complejos z_1, z_2

$z_2 \neq (0;0)$ para efectuar la división $\frac{z_1}{z_2}$ habrá que multiplicar a z_1 y z_2 por $\overline{z_2}$ con lo cual se obtiene:

$z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}$$

$$\rightarrow \boxed{\frac{a+bi}{c+di} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i}$$

EJEMPLO 1:

* Dado: $z_1 = 2 + 3i$; $z_2 = 4 - 2i$
* Entonces:

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2+3i}{4-2i}$

$$\Rightarrow \frac{z_1}{z_2} = \frac{2+3i}{4-2i} \times \frac{4+2i}{4+2i} = \frac{8+4i+12i+6i^2}{16-4i^2} = \frac{8+16i-6}{16+4}$$

$$\Rightarrow \frac{z_1}{z_2} = \frac{2+16i}{20} = \frac{2}{20} + \frac{16}{20}i = \frac{1}{10} + \frac{4}{5}i$$

EJEMPLO 2:

$$\frac{2-5i}{4+3i} = \frac{(2-5i)(4-3i)}{(4+3i)(4-3i)} = \frac{8-26i+15i^2}{4^2+3^2} = -\frac{7}{25} - \frac{26}{25}i$$

V) POTENCIA DE NÚMEROS COMPLEJOS :

Emplearemos por ahora exponentes pequeños y para ello nos apoyaremos de los productos notables.

EJEMPLO:

* Dado: $z_1 = 2 - 3i$
* Entonces:

$$z_1^2 = \underbrace{(2-3i)^2}_{\text{Binomio al cuadrado}}$$

$\Rightarrow z_1^2 = 2^2 - 2(2)(3i) + (3i)^2$

$\Rightarrow z_1^2 = 4 - 12i + 9i^2$

$\Rightarrow z_1^2 = 4 - 12i - 9$

$\Rightarrow z_1^2 = -5 - 12i$

PROPIEDADES :

* $(1+i)^2 = 2i$
* $(1-i)^2 = -2i$
* $(1+i)^3 = 2i(1+i)$
* $(1-i)^3 = -2i(1-i)$
* $(1+i)^4 = -4$
* $(1-i)^4 = -4$
* $\boxed{\frac{1+i}{1-i} = i}$
* $\boxed{\frac{1-i}{1+i} = -i}$

VI) RADICACIÓN DE NÚMEROS COMPLEJOS :

La radicación de números complejos arrojará tantas raíces como lo indique el índice del signo radical. Es decir:

dado: $z = a + bi$

* Se tiene: $\boxed{\sqrt[n]{a+bi} = x + yi}$
* Donde: "n" de z $(n \in \mathbb{N}$; $n \geq 2)$

EJEMPLO :

Calcular las raíces cuadradas de : $21-20i$

RESOLUCIÓN:

* Aplicamos transformación de radicales en simples, así:

$$\to \sqrt{21-20i} \begin{cases} \sqrt{25}-\sqrt{-4}=5-\sqrt{4(-1)}=5-2i \\ \sqrt{-4}-\sqrt{25}=2i-5 \end{cases}$$

OBSERVACIÓN :

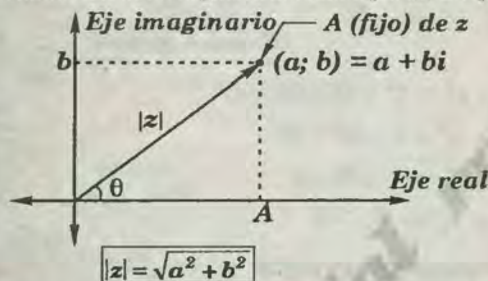
$$\boxed{\sqrt{a\pm bi}=\sqrt{\frac{\rho+a}{2}}\pm i\sqrt{\frac{\rho-a}{2}}}\ ;\text{donde: } \rho=\sqrt{a^2+b^2}$$

EJEMPLO:

$$\sqrt{-12-16i}=\sqrt{\frac{20+(-12)}{2}}-i\sqrt{\frac{20-(-12)}{2}}=2-4i$$

MÓDULO O VALOR ABSOLUTO DE UN COMPLEJO

Dado: $z=a+bi$; el módulo o valor absoluto de z es un número real no negativo denotado por $|z|$ tal que:



$$\boxed{|z|=\sqrt{a^2+b^2}}$$

Geométricamente, el módulo nos representa la magnitud del radio vector del complejo z de origen *(0; 0)* y extremo final el afijo de z.

EJEMPLOS:

Halle el módulo de los siguientes números complejos:

I) $z=3+4i$ *III)* $z=a$

II) $w=-2+3i$ *IV)* $z=bi$

RESOLUCIÓN:

I) $|z|=\sqrt{(3)^2+(4)^2}=\sqrt{25}=5$ *III)* $|z|=|a|$

II) $|w|=\sqrt{(-2)^2+3^2}=\sqrt{13}$ *IV)* $|z|=|b|$

PROPIEDADES:

De la definición de módulo se desprende las siguientes propiedades; sean $z\ ;\ z_1\ ;\ z_2\in\mathbb{C}$ entonces:

A) $|z|\geq 0\ ;\ |z|=0 \Leftrightarrow z=(0;0)$

B) $|z|=|\bar{z}|=|z^*|$

C) $|z|^2=z\times\bar{z}$

D) $|\mathbb{R}e(z)|\leq|z|\ ;\ |\mathbb{I}m(z)|\leq|z|$

E) $|z_1z_2|=|z_1||z_2|$

F) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}\ ;\ \forall\, z_2\neq(0;0)$

G) $|z^n|=|z|^n\ ;\ \forall\, n\in\mathbb{N}$

H) $|\sqrt[n]{z}|=\sqrt[n]{|z|}\ ;\ \forall\, n\in\mathbb{N}\ ;\ n\geq 2$

I) $|z_1+z_2|\leq|z_1|+|z_2|$

J) $\big||z_1|-|z_2|\big|\leq|z_1-z_2|$

AFIJO DE UN COMPLEJO

Es un punto del plano complejo, el cual está determinado por un par ordenado *(a; b)*

$a=\mathbb{R}e(z)$: nos representa la parte real

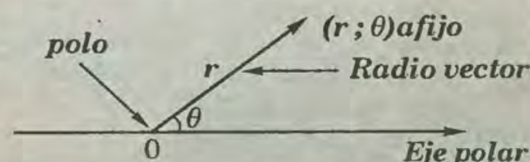
$b=\mathbb{I}m(z)$: nos representa la parte imaginaria

EJEMPLOS:

# Complejo	Afijo del # complejo
$z_1=3+5i$	$(3;5)$
$z_2=-2-2i$	$(-2;-2)$
$z_3=-6+8i$	$(-6;8)$
$z_4=7-\sqrt{2}i$	$(7;-\sqrt{2})$

FORMA POLAR

Este sistema determina el afijo de un número complejo mediante dos coordenadas polares, una de las coordenadas es el radio vector "*r*" que es la distancia del afijo $(r;\theta)$ al polo y la otra coordenada es el argumento "θ", llamado también ángulo polar, que está determinado por el eje polar y el radio vector, como muestra la gráfica adjunta .

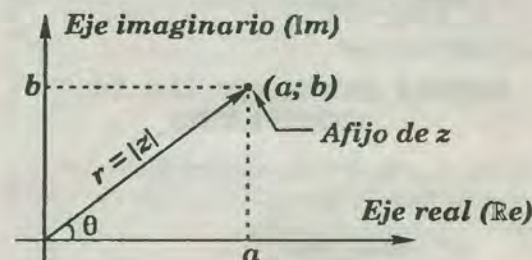


RELACIÓN ENTRE LAS COORDENADAS CARTESIANAS Y LAS COORDENADAS POLARES

Haciendo coincidir el polo del eje polar con el origen de coordenadas, obtenemos la gráfica del complejo.

$z = a + bi$ ....(*En la forma cartesiana*)

$z = r\underline{|\theta}$ .... (*En la forma polar*)



* Del gráfico:

$a^2 + b^2 = r^2$ ....(por Pitágoras)

$\rightarrow r = \sqrt{a^2 + b^2}$; $(r \geq 0)$

$$\rightarrow r = |z|$$

* Además :

$$tg\theta = \frac{b}{a} \rightarrow \boxed{\theta = arctg\frac{b}{a}}$$

$$cos\theta = \frac{a}{r} \Rightarrow a = rcos\theta$$

$$sen\theta = \frac{b}{r} \Rightarrow b = rsen\theta$$

* Pero : $z = a + bi = rcos\theta + (rsen\theta)i$

$$\rightarrow \boxed{z = r(cos\theta + isen\theta)}$$

(Forma trigonométrica de un complejo)

* O también :

$$\boxed{z = |z|(cos\theta + isen\theta)}$$

* Donde :

r : Módulo del complejo $z (r > 0)$

θ : Argumento principal del complejo $z (\theta \in \mathbb{R})$

ARGUMENTO DE UN COMPLEJO (ARG(z))

Se define:

$$\boxed{Arg(z) = \theta + 2k\pi} \; ; \forall \; k \in z$$

donde: θ : Argumento principal de z, si: $0 \leq \theta < 2\pi$

NOTA :

θ se puede expresar en radianes o grados sexagesimales

ARGUMENTO PRINCIPAL DE UN NÚMERO COMPLEJO

De todos los valores de θ; elegimos aquel que se encuentra en el intervalo $[0 ; 2\pi >$;: es decir $0 \leq \theta < 2\pi$; a dicho θ se le denomina argumento principal.

OBSERVACIÓN

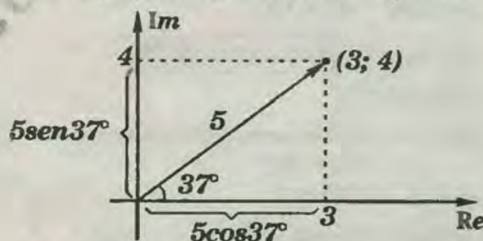
*Al argumento de z , $Arg(z)$, también se le denomina amplitud .

* El argumento es el ángulo generado por el radio vector al girar en sentido antihorario desde el eje real positivo hacia un punto cualquiera del radio vector.

EJEMPLO 1:

Sea el complejo:

$z = 3 + 4i$, expresarlo en su forma trigonométrica



$z = 3 + 4i$

$\rightarrow z = 5(cos37° + isen37°)$

OBSERVACIÓN :

Para calcular el argumento principal de z se debe observar en qué cuadrante se encuentra el afijo de z y luego calculamos a partir de

$$\boxed{tg\theta = \frac{b}{a}} \vee \boxed{\theta = arctg\left(\frac{b}{a}\right)}$$

EJEMPLO 2:

Expresar en forma polar : $8 + 6i$

RESOLUCIÓN:

* Se sabe que : $8 + 6i = r(cos\theta + isen\theta)$

* Calculando: "r" y "θ":

* $r = \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{64 + 36} \Rightarrow r = 10$

* $\theta = arctg\frac{b}{a} = arctg\frac{6}{8} \Rightarrow \theta = arctg\frac{3}{4} \Rightarrow \theta = 37°$

www.SIGLO21X.blogspot.com

* Finalmente : $8+6i=10(cos37^\circ+isen37^\circ)$

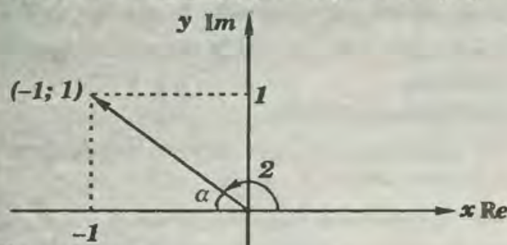
EJEMPLO 3:

Representar :

$z=-1+i$ en la forma polar

RESOLUCIÓN:

* Representando $z=-1+i$ en el plano complejo



* Vemos que:

$r=\sqrt{(-1)^2+(1)^2}=\sqrt{2}$

$\theta=180^\circ-\alpha$; donde $tg\alpha=\frac{1}{1}=1$

$\rightarrow \alpha=45^\circ$

$\rightarrow \theta=180^\circ-45^\circ=135$

* Con lo cual: $\boxed{z=-1+i=\sqrt{2}\lfloor 135^\circ}$

EJEMPLO 4 :

Exprese en la forma cartesiana el número complejo

$$z=2\lfloor 120^\circ$$

RESOLUCIÓN:

* Teniendo en cuenta que:

$$z=r\lfloor\theta=rcos\theta+irsen\theta$$

* Se tendrá que : $z=2cos120^\circ+i2sen120^\circ$
* Reduciendo al primer cuadrante :

$z=-2cos60^\circ+i2sen60^\circ$

$\rightarrow z=-2\left(\frac{1}{2}\right)+i2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$\rightarrow z=-1+i\sqrt{3}$

FORMAS DE REPRESENTACIÓN DE UN NÚMERO COMPLEJO

El número complejo $z=a+bi$ se puede representar en las siguientes formas:

1) FORMA CARTESIANA : $z=a+bi$

2) FORMA TRIGONOMÉTRICA :

$$z=rcos\theta+irsen\theta$$

3) FORMA POLAR (FASORIAL) :

$$z=r\lfloor\theta=r(cos\theta+isen\theta)$$

4) FORMA EXPONENCIAL :

$$z=re^{i\theta}=r(cos\theta+isen\theta)$$

5) FORMA SINTÉTICA :

$$z=rcis(\theta)=r(cos\theta+isen\theta)$$

* Considerar que para todas las formas:

* $r=\sqrt{a^2+b^2}=|z|$: módulo del complejo.
* $\theta=arctg\frac{b}{a}$: Argumento del complejo.

$-180^\circ\le\theta\le180^\circ$

FORMA EXPONENCIAL DE UN COMPLEJO

Siendo: $z=r(cos\theta+isen\theta)$ un número complejo en su forma polar o trigonométrica, la fórmula de Euler es :

$$\boxed{e^{\theta i}=cos\theta+isen\theta}$$

* Multiplicando por "r" :

$$\boxed{re^{\theta i}=\underbrace{r(cos\theta+isen\theta)}_{z}}$$

* Su forma exponencial viene dado por: $\boxed{z=re^{\theta i}}$

Donde:

* $r=|z|$: Módulo de z
* e : Base de los logaritmos neperianos ($e=2,71828...$)
* i : Unidad Imaginaria.
* $\theta=Arg(z)$: Argumento de z, expresado en radianes.

EJEMPLO 1:

Dado el número complejo: $z=3(cos10^\circ+isen10^\circ)$

Expresarlo en su forma exponencial.

RESOLUCIÓN:

* Observamos :

* $r=|z|=3$
* $Arg(z)=\theta=10^\circ=\frac{\pi}{18}$

* Su forma exponencial es : $z=3e^{i\frac{\pi}{18}}$

EJEMPLO 2:

Exprese su forma exponencial: $z=-3+3i$

RESOLUCIÓN

* Se observa: $\theta\in IIC\Rightarrow\theta=\pi-\alpha$
* Pero : $tg\alpha=\left|\frac{3}{-3}\right|=1\Rightarrow\alpha=\frac{\pi}{4}$

* Luego : $\theta = \pi - \frac{\pi}{4}$, $\theta = \frac{3\pi}{4}$

* Además : $r = \sqrt{(-3)^2 + 3^2} \Rightarrow r = 3\sqrt{2}$

* La forma exponencial de z es : $3\sqrt{2}e^{\frac{3}{4}\pi i}$

IMPORTANTE :

Del teorema de Euler se tiene:

$e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta$ .... $\boxed{I}$

$e^{-i\theta} = \cos\theta - i\,\text{sen}\,\theta$ .... $\boxed{II}$

* Al sumar $\boxed{I} + \boxed{II}$ se tiene:

$$\boxed{e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos\theta} \Rightarrow \boxed{\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}}$$

* Al restar $\boxed{I} - \boxed{II}$ se tiene:

$$\boxed{e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i\,\text{sen}\,\theta} \Rightarrow \boxed{\text{sen}\,\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}}$$

EJEMPLO:

Expresar en forma binómica :

$$z = 2e^{1 + \frac{\pi}{6}i}$$

RESOLUCIÓN:

$z = 2e \times e^{\frac{\pi}{6}i}$ se puede escribir $z = 2e \times e^{\frac{\pi}{6}i}$

* Por Euler

$$z = 2e\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\,\text{sen}\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\rightarrow z = 2e\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \sqrt{3}e + ei$$

OBSERVACIÓN :

Conociendo el complejo $z = |z|e^{i\theta}$; podemos hallar la representación exponencial de su conjugado sólo reemplazando θ por $(-\theta)$. $\bar{z} = |z|e^{i(-\theta)}$

REPRESENTACIÓN CIS:

Es usada para representar en forma abreviada a un complejo en su forma polar. Así:

$$\boxed{z = |z|(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta) = |z|\,\text{cis}\,\theta}$$

EJEMPLO :

* $z = 3(\cos 17° + i\,\text{sen}\,17°) = 3\,\text{cis}\,17°$

MULTIPLICACIÓN DE NÚMEROS COMPLEJOS EN OTRAS REPRESENTACIONES

**** EN LA FORMA POLAR :***

Primero se hace la transformación de la forma cartesiana a polar ; es decir , dados:

I) $z_1 = a + bi = r_1\underline{|\theta_1}$, donde

$$r_1 = \sqrt{a^2 + b^2} \wedge \theta_1 = \text{arctg}\frac{b}{a}$$

II) $z_2 = c + di = r_2\underline{|\theta_2}$, donde

$$r_2 = \sqrt{c^2 + d^2} \wedge \theta_2 = \text{arctg}\frac{d}{c}$$

* Vemos que:

$$\boxed{z_1 z_2 = (r_1\underline{|\theta_1})(r_2\underline{|\theta_2}) = r_1 r_2\underline{|\theta_1 + \theta_2}}$$

* El módulo del producto es igual al producto de los módulos de los factores.

* El argumento del producto es igual a la suma de los argumentos de los factores.

OBSERVACIÓN :

Sean los números complejos :

$z = |z|e^{i\theta}$; $w = |w|e^{i\alpha}$, se cumple:

FORMA EXPONENCIAL:

$$\frac{z}{w} = \frac{|z|}{|w|}e^{i(\theta - \alpha)}$$

FORMA POLAR:

$$z \times w = |z||w|(\cos(\theta + \alpha) + i\,\text{sen}(\theta + \alpha))$$

REPRESENTACIÓN CIS:

$$z \times w = |z||w|\,\text{cis}(\theta + \alpha)$$

REPRESENTACIÓN FASORIAL:

$$z \times w = |z||w|\underline{|\theta + \alpha}$$

DIVISIÓN DE NÚMEROS COMPLEJOS EN OTRAS REPRESENTACIONES

**** EN LA FORMA POLAR :***

Primero se hace la transformación de cartesiano a polar; es decir:

$z_1 = a + bi = r_1\underline{|\theta_1}$

$z_2 = c + di = r_2\underline{|\theta_2}$

* Entonces:

$$\boxed{\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1\underline{|\theta_1}}{r_2\underline{|\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2}\underline{|\theta_1 - \theta_2}}$$

* El módulo del cociente, es igual al cociente de los módulos del dividendo y divisor.

* El argumento del cociente, es igual a la diferencia del argumento del dividendo y divisor.

www.SIGLO21X.blogspot.com

OBSERVAR :

Sean: $z=|z|e^{i\theta}$; $w=|w|e^{i\alpha}$, se cumple:

FORMA EXPONENCIAL :

$$\frac{z}{w}=\frac{|z|}{|w|}e^{i(\theta-\alpha)}$$

FORMA POLAR :

$$\frac{z}{w}=\frac{|z|}{|w|}(\cos(\theta-\alpha)+i\,\text{sen}(\theta-\alpha))$$

REPRESENTACIÓN CIS :

$$\frac{z}{w}=\frac{|z|}{|w|}\text{cis}(\theta-\alpha)$$

FORMA FASORIAL:

$$\frac{z}{w}=\frac{|z|}{|w|}\underline{|(\theta-\alpha)}$$

* En una división de complejos, se debe tener en cuenta lo siguiente :

I) $z=\dfrac{a+bi}{c+di}$; es un número real, si: $\dfrac{a}{c}=\dfrac{b}{d}$

II) $z=\dfrac{a+bi}{c+di}$; es imaginario puro, si: $\dfrac{a}{d}=-\dfrac{b}{c}$

PROPIEDADES:

Sea: $z=r(\cos\theta+i\,\text{sen}\theta)=r\,\text{cis}\theta$; se establece:

1) $|\text{cis}\theta|=1$; $\forall\ \theta\in R$

2) $\text{cis}\theta_1\times\text{cis}\theta_2=\text{cis}(\theta_1+\theta_2)$

3) $\dfrac{\text{cis}\theta_1}{\text{cis}\theta_2}=\text{cis}(\theta_1-\theta_2)$

4) $\text{cis}(-\theta)=\cos\theta-i\,\text{sen}\theta$

5) $(\text{cis}\theta)^n=\text{cis}(n\theta)$; $\forall n\in R$

6) $\text{cis}\theta_1=\text{cis}\theta_2\Rightarrow\theta_1=\theta_2+2k\pi,\forall\ k\in Z$

7) $\text{cis}\theta_1+\text{cis}\theta_2=2\cos\left(\dfrac{\theta_1-\theta_2}{2}\right)\text{cis}\left(\dfrac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)$

OPERACIONES:

Sea: $z_1=r_1\text{cis}\theta_1\wedge z_2=r_2\text{cis}\theta_2$

* Entonces:

$z_1z_2=r_1r_2\text{cis}(\theta_1+\theta_2)=r_1r_2(\cos(\theta_1+\theta_2)+i\,\text{sen}(\theta_1+\theta_2))$
$\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{r_1}{r_2}\text{cis}(\theta_1-\theta_2)=\dfrac{r_1}{r_2}(\cos(\theta_1-\theta_2)+i\,\text{sen}(\theta_1-\theta_2))$

TEOREMAS:

Sea: $e^{\theta i}=\cos\theta+i\,\text{sen}\theta$, entonces :

1) $|e^{\theta i}|=1$

2) $e^{\theta_1 i}e^{\theta_2 i}=e^{(\theta_1+\theta_2)i}$

3) $\dfrac{e^{\theta_1 i}}{e^{\theta_2 i}}=e^{(\theta_1-\theta_2)i}$

4) $(e^{\theta i})^n=e^{(n\theta)i}\ \forall n\in R$

5) Si $e^{\theta_1 i}=e^{\theta_2 i}\rightarrow\ \theta_1=\theta_2+2k\pi,\ \forall\ k\in Z$

6) $\dfrac{1}{e^{\theta i}}=e^{-\theta i}$

CONCLUSIÓN:

Para multiplicar dos números complejos en forma polar (exponencial) multiplicamos los módulos y sumamos los argumentos y, para dividir dos números complejos en forma polar, dividimos los módulos y restamos los argumentos.

EJEMPLO:

Sean:

$$z_1=2(\cos 41^\circ+i\,\text{sen}41^\circ)\ ;\ z_2=\cos 4^\circ+i\,\text{sen}4^\circ$$

Calcular:

I) z_1z_2 *II)* $z_1\div z_2$

RESOLUCIÓN:

I) Como : $z_1=2\text{cis}41^\circ$ y $z_2=\text{cis}4^\circ$

* Luego : $z_1z_2=(2)(1)\text{cis}(41^\circ+4^\circ)$

$\rightarrow z_1z_2=2\text{cis}45^\circ$

$\rightarrow z_1z_2=2(\cos 45^\circ+i\,\text{sen}45^\circ)$

$\rightarrow z_1z_2=\sqrt{2}+\sqrt{2}i=\sqrt{2}(1+i)$

II) $\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{2}{1}\text{cis}(41^\circ-4^\circ)=2\text{cis}37^\circ$

$\Rightarrow\dfrac{z_1}{z_2}=2(\cos 37^\circ+i\,\text{sen}37^\circ)$

$\Rightarrow\dfrac{z_1}{z_2}=2\left(\dfrac{4}{5}+i\dfrac{3}{5}\right)$

$\Rightarrow z_1\div z_2=\dfrac{2}{5}(4+i)$

POTENCIACIÓN DE UN COMPLEJO

Para el caso de la potencia de un complejo se puede utilizar el binomio de Newton o la fórmula de DE MOIVRE, la cual veremos a continuación:

Dado; $z=a+bi$; al transformar a polar se obtiene:

$$\boxed{z=r\underline{|\theta}}$$

* Donde $r=|z|=\sqrt{a^2+b^2}$ .... "Módulo"

$\theta = arctg\frac{b}{a}; -180° \le \theta \le 180°$.........(arg.)

$$z^n = (r\underline{|\theta})^n = r^n\underline{|n\theta}$$
$$z^n = r^n[cosn\theta + isen\,n\theta]$$

* El módulo de la potencia es igual al módulo de la base a la potencia deseada.

* El argumento de la potencia es igual al argumento de la base por el exponente de la potencia.

TEOREMA DE MOIVRE

Sea el número complejo: $z = |z|e^{i\theta}$; se cumple:

FORMA EXPONENCIAL : $z^n = |z|^n e^{in\theta}$

FORMA POLAR :

$z^n = |z|^n (cosn\theta + isen\,n\theta)$

REPRESENTACIÓN CIS:

$z^n = |z|^n cis(n\theta)$

FORMA FASORIAL:

$z^n = |z|^n \underline{|n\theta}$

$\forall n \in Z$

EJEMPLO 1 :

Calcular : $A = (4+4\sqrt{3}i)^5$

RESOLUCIÓN :

* Transformando adecuadamente :

$4+i4\sqrt{3} = 8\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 8(cos\frac{\pi}{3}+isen\frac{\pi}{3}) = 8e^{i\pi/3}$

$\rightarrow (4+i4\sqrt{3})^5 = (8e^{i\pi/3})^5 = 8^5e^{5\pi/3}$

$\rightarrow A = 8^5(cos5\pi/3 + isen5\pi/3)$

$\rightarrow A = 8^5(1/2 - i\frac{\sqrt{3}}{2})$

EJEMPLO 2:

Calcular : $B = (1+\sqrt{3}i)^{120} + (1-\sqrt{3}i)^{120}$

RESOLUCIÓN:

* Primero:

$1+\sqrt{3}i = 2(cos60° + isen60°)$

$1-\sqrt{3}i = 2(cos(-60°)+isen(-60°)) = 2(cos60° - isen60°)$

* Luego:

$$B = \left[2\left(cos\frac{\pi}{3}+isen\frac{\pi}{3}\right)\right]^{120} + \left[2\left(cos\frac{\pi}{3}-isen\frac{\pi}{3}\right)\right]^{120}$$

$$\rightarrow B = \left[2^{120}\left(cos120\frac{\pi}{3}+isen120\frac{\pi}{3}\right)\right] + \left[2^{120}\left(cos120\frac{\pi}{3}-isen120\frac{\pi}{3}\right)\right]$$

* Simplificando, resulta :

$\rightarrow B = 2^{120}(2cos40\pi) = 2^{120} \times 2(1) = 2^{121}$

RADICACIÓN DE UN COMPLEJO

Para extraer la raíz de un complejo se utiliza la fórmula de DE MOIVRE.

Dado: $z = a + bi = r\underline{|\theta}$, se tiene para la raíz n-ésima

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r\underline{|\theta}} = \sqrt[n]{r}\underline{|\theta/n}$$

* Cuya expresión genérica es:

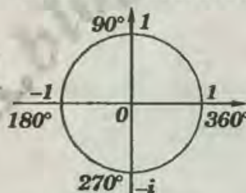
$$\sqrt{z} = \sqrt[n]{r}\left[cos\left(\frac{\theta+360°k}{n}\right)+isen\left(\frac{\theta+360°k}{n}\right)\right]$$

* O también:

$$\sqrt{z} = \sqrt[n]{|z|}\left[cos\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)+isen\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)\right]$$

$$\sqrt{z} = \sqrt[n]{|z|}\,cis\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right);\ \forall n \in N;\ n \ge 2$$

* Donde: $k = 0; 1; 2; 3 ......, (n-1)$ Tener en cuenta:



$1 = cos0° + isen0°$

$1 = cos90° + isen90°$

$-1 = cos180° + isen180°$

$-1 = cos270° + isen270°$

OBSERVACIÓN :

Para todo $z \in C$ y todo $n \in N - \{1\}$; existen raíces (n - ésimas) de z

EJEMPLO 1:

Calcular las raíces cúbicas de : $z = 4\sqrt{3} - 4i$

RESOLUCIÓN :

* Como :

$z = 4\sqrt{3}-4i = 8\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}-i\frac{1}{2}\right) = 8\left(cos(-\frac{\pi}{6})+isen(-\frac{\pi}{6})\right)$

* Entonces:

$$w_k = 8^{1/3}\left[cos\left(\frac{-\pi/6+2k\pi}{3}\right)+isen\left(\frac{-\pi/6+2k\pi}{3}\right)\right], k=0;1;2$$

* Por lo tanto :

$w_0 = 2(cos(-\pi/18) + isen(-\pi/18))$

$w_1 = 2(cos(11\pi/18) + isen(11\pi/18))$

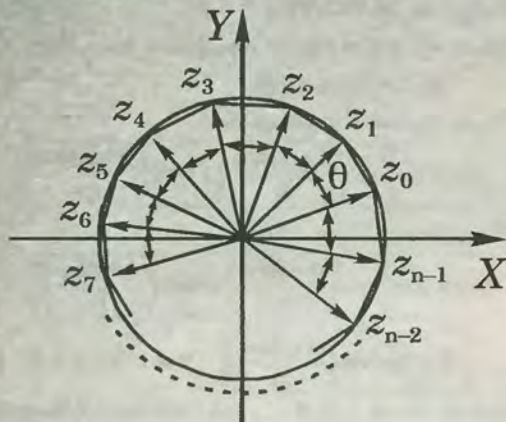
$w_2 = 2(cos(23\pi/18) + isen(23\pi/18))$

PROPIEDAD GEOMÉTRICA DE LAS RAÍCES

Las raíces n-ésimas de $z = re^{i\theta}$ se encuentran sobre una circunferencia de radio $r^{1/n}$ con centro en el

origen y se hallan igualmente espaciadas y una de las raíces tiene un argumento igual a $\frac{1}{n}Arg(z)$.

* Sean: z_0 ; z_1 ; z_2 ; z_3 ; ... ; z_{n-1} ; las n-raíces (n-ésimas) de z.



* Del gráfico se observa: $\theta=\left(\frac{2\pi}{n}\right)$

* Luego el área del polígono regular de n lados es:

$$S=\frac{n|z_0|^2}{2}\times sen\left(\frac{2\pi}{n}\right)\mu^2$$

* Donde z_o es una de las raíces (n–esimal) de z

* También se cumple:

I) $z_0^n=z_1^n=z_2^n=......=z_{n-1}^n=z$

II) $z_0+z_1+z_2+......+z_{n-1}=0$

EJEMPLO:

Determinar las raíces cúbicas de : $z=-1+i$

RESOLUCIÓN:

$$z=-1+i=\sqrt{2}(cos3\pi/4+isen3\pi/4)$$

* Entonces las raíces cúbicas de z son:

$$w_k=\sqrt[6]{2}\left(cos\left(\frac{3\pi/4+2k\pi}{3}\right)+isen\left(\frac{3\pi/4+2k\pi}{3}\right)\right)$$

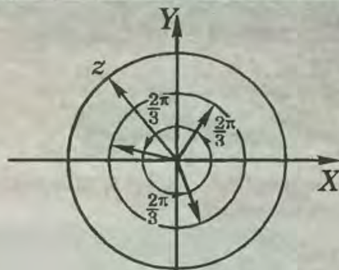
* Luego para : $k = 0; 1; 2$

$$w_0=\sqrt[6]{2}\left(cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+isen\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$w_1=\sqrt[6]{2}\left(cos\left(\frac{11\pi}{12}\right)+isen\left(\frac{11\pi}{12}\right)\right)$$

$$w_2=\sqrt[6]{2}\left(cos\left(\frac{19\pi}{12}\right)+isen\left(\frac{19\pi}{12}\right)\right)$$

* Gráficamente :



RAÍCES CÚBICAS DE LA UNIDAD

Resolver : $x^3=1$

RESOLUCIÓN:

* Como; $1=cos0°+isen0°$, entonces

$$x=\sqrt[3]{1}=(cos0°+isen0°)^{1/3}$$

* Por De Moivre; se tiene:

$$x=\sqrt[3]{1}=cos\left(\frac{0°+360°k}{3}\right)+isen\left(\frac{0°+360°k}{3}\right)$$

* Donde : $k = 0; 1; 2$

* Para $k = 0$:

$x_1=cos0°+isen0° \rightarrow \boxed{x_1=1}$

* Para $k = 1$:

$x_2=cos120°+isen120°$

$\rightarrow x_2=-cos60°+isen60°$

$\rightarrow \boxed{x_2=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}}$

* Para $k = 2$:

$x_3=cos240°+isen240°$

$\rightarrow x_3=-cos60°+isen60°$

$\rightarrow \boxed{x_3=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}}$

* Entonces las raíces cúbicas de la unidad real son:

$$1\ ;\ \underbrace{-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\ ;\ -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i}_{conjugados}$$

* Donde si asumimos por w al número $\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

* Las raíces cúbicas de 1 son: 1, w , w^2 es decir:

$$\sqrt[3]{1}=\begin{cases}1\\ -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i=w\\ -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i=w^2\end{cases}$$

PROPIEDADES DE LAS RAÍCES CÚBICAS DE LA UNIDAD

1) Una de las raíces complejas de la raíz cúbica de la unidad es el cuadrado de la otra.

2) La suma de las tres raíces cúbicas de la unidad es igual a cero.

3) El producto de las raíces complejas de la raíz cúbica de la unidad es igual a *1*.

*** En conclusión :**

$$\sqrt[3]{1}=\begin{cases}1\\ w\\ w^2\end{cases}\rightarrow\begin{cases}a)\ 1+w+w^2=0\\ b)\ w\times w^2=w^3=1\\ c)\ w^{3k}=1\\ d)\ w^{3k+r}=w^r\end{cases}$$

4) Se observa que las tres raíces cúbicas de la unidad tienen el mismo módulo; por lo tanto sus afijos estarán en el borde de una circunferencia de radio igual al módulo. En este caso el módulo es igual a la unidad.



* En la figura se observa que los afijos de 1; w; w^2 son los vértices de un triángulo equilátero.

5) $\overline{w}=w^2$

OBSERVACIÓN

* Si w_1; w son las raíces n–ésimas de la unidad; entonces w_1w es también raíz n–ésima de la unidad en particular w; w^2; w^3; ... Son raíces enésimas de la unidad.

* Si $w^{n-1}\neq 1$; se dice que w es una raíz primitiva de la unidad .

$$w_1=\cos\frac{2\pi}{n}+i\operatorname{sen}\frac{2\pi}{n};$$

* Existen otras raíces primitivas ; las cuales son :

$$w_k=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\operatorname{sen}\frac{2k\pi}{n};$$

$k<n$, y k es coprimo con n

POLINOMIOS SOBRE LOS COMPLEJOS

Un polinomio sobre el conjunto (campo) de los números complejos tiene la forma :

$$P(z)=a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+...+a_1z+a_0$$

Donde los $a_i\in C$ y z toma valores complejos, n es su grado.

* El siguiente teorema asegura que una ecuación como $P(z)=0,\ n\geq 1$, siempre tiene solución sobre el campo de los complejos.

TEOREMA FUNDAMENTAL DE ÁLGEBRA

Todo polinomio $P(z)=a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+...+a_1z+a_0$ sobre el campo de los complejos con $n>0$, tiene exactamente n raíces, algunas de las cuales se pueden repetir y $P(z)$ puede ser expresado en la forma :

$$P(z)=a_n(z-r_1)(z-r_2)...(z-r_n)$$

EJEMPLO :

Resolver : $z^2+(2i-3)z+5-i=0$

RESOLUCIÓN:

$$z=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-(2i-3)\pm\sqrt{(2i-3)^2-4(1)(5-i)}}{2(1)}$$

$$\rightarrow z=\frac{3-2i\pm\sqrt{-15-8i}}{2}$$

* Como las raíces cuadradas de

$-15-8i=17(\cos\theta+i\operatorname{sen}\theta)$; $\cos\theta=-\frac{15}{17}$; $\operatorname{sen}\theta=-\frac{8}{17}$

* Entonces θ está en el tercer cuadrante:

$\sqrt{17}(\cos\theta/2+i\operatorname{sen}\theta/2)$

$\sqrt{17}(\cos(\theta/2+\pi)+i\operatorname{sen}(\theta/2+\pi))=\sqrt{17}(\cos\theta/2+i\operatorname{sen}\theta/2)$

* Ahora :

• $\cos\theta/2=\pm\sqrt{(1+\cos\theta)/2}=\pm 1/\sqrt{17}$, entonces:

$\cos\theta=-1/\sqrt{17}$

• $\operatorname{sen}\theta/2=\pm\sqrt{(1-\cos\theta)/2}=\pm 4/\sqrt{17}$, entonces:

$\operatorname{sen}\theta=-4/\sqrt{17}$

* Entonces : $\sqrt{-15-8i}\pm(1-4i)$

* Luego : $z=\dfrac{3-2i+(1-4i)}{2}=2-3i$ ó $z=1+i$

GRÁFICO DE REGIONES

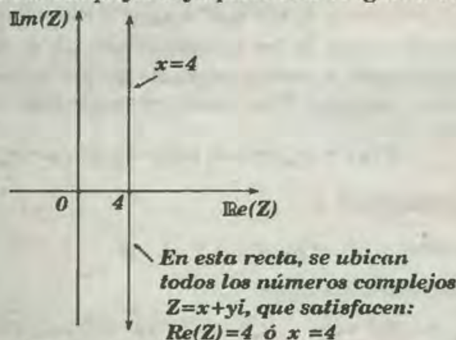
La parte real *Re(Z)*, parte imaginaria *Im(Z)*, módulo |Z| y argumento Arg(Z) son números reales, donde $Z=x+iy$; entonces se pueden relacionar mediante una igualdad o desigualdad con otras cantidades reales y representarlos en el plano complejo como lugares geométricos o regiones donde se ubican los números complejos.

EJEMPLOS:

I) Ubique todos los números complejos cuya parte real es igual a *4*.

RESOLUCIÓN:

*Los puntos pertenecientes a la recta vertical $x=4$ es el lugar geométrico donde se ubican todos los números complejos cuya parte real es igual a *4*.



II) Gráfique : $|Z|=2$

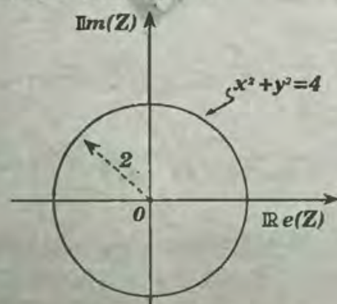
RESOLUCIÓN:

*En esta circunferencia, se ubican todos los números complejos Z cuyo módulo es $|Z|=2$

OBSERVACIÓNES :

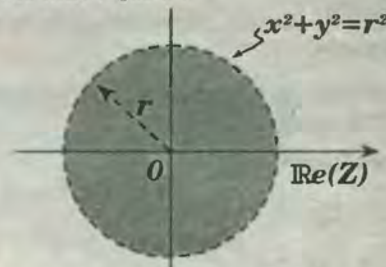
* Todos los números complejos que se ubiquen en la región interna de la circunferencia de radio *r* tienen el módulo menor que *r*.

* Todos los números complejos que se ubiquen en la región interna de la circunferencia de radio *r* tienen el módulo menor que *r*.



OBSERVACIÓN:

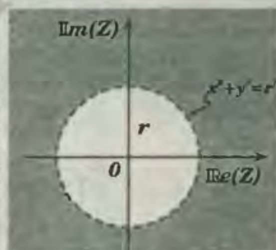
todos los números complejos que se ubiquen en la región interna de la circunferencia de radio r tienen el módulo menor que r .



* En la región sombreada se ubican todos los números complejos Z que cumplen.

$$|Z|<r \quad ó \quad x^2+y^2<r^2$$

*Todos los números complejos Z, ubicados en la parte externa de una circunferencia de radio *r*, incluyendo la misma, tienen el módulo mayor o igual a *r*.

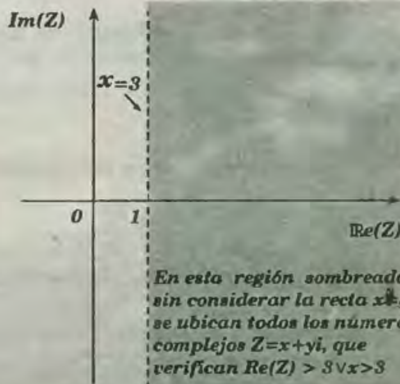


* En la región sombreada se ubica todos los números complejos Z que verifican $|Z|\geq r$ ó $x^2+y^2\geq r^2$

III) Represente todos los números complejos, tal que su parte real sea mayor que *3*.

RESOLUCIÓN :

* La región sombreada vista de la figura representa al conjunto de todos los números complejos, donde la parte real es mayor que *1*.



PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1 :

Calcular :

$$A = i^{-87} + i^{2^{32}} + i^{41^{45}}$$

A) 1 B) 0 C) 2 D) −1 E) $\sqrt{2}$

RESOLUCIÓN:

$$A = (-1)i^{87} + i^{2^2 \times 2^{30}} + i^{(40+1)^{45}}$$

$$\rightarrow A = -i^{\dot{4}+1} + i^{\dot{4}} + i^{\dot{4}+1}$$

$$\rightarrow A = -i + 1 + i = 1$$

RPTA: "A"

PROBLEMA 2 :

Después de efectuar :

$$Q = \frac{50}{4+3i} + \frac{1}{1-i} + \frac{1}{1+i}$$ se obtiene:

A) 9 − 6i B) 7 + 3i C) 12 − 5i D) 4 + 8i E) 2 + 9i

RESOLUCIÓN:

* Multiplicando a cada fracción, por el respectivo conjugado de denominador, se obtendrá:

$$Q = \frac{50(4-3i)}{4-(3i)^2} + \frac{1+i}{1-i^2} + \frac{1-i}{1-i^2}$$

* Se sabe que: $i^2 = -1$

$$\rightarrow Q = \frac{50(4-3i)}{25} + \frac{1+i}{2} + \frac{1-i}{2}$$

* Simplificando:

$$Q = 2(4-3i) + \frac{2}{2} = 9 - 6i$$

RPTA: "A"

PROBLEMA 3 :

Al reducir : $J = \frac{(2+3i)^2}{2+i}$

Se obtiene una expresión de la forma:

$a + bi$, siendo $i = \sqrt{-1}$

Calcular :

$$P = 5\sqrt{a^2 + b^2}$$

A) $\sqrt{5}$ B) $\sqrt{13}$ C) 13 D) 5 E) $13\sqrt{5}$

RESOLUCIÓN:

* Efectuando: $J = \frac{4+12i+9i^2}{2+i} = \frac{-5+12i}{2+i}$

*Multiplicando por la conjugada del denominador:

$$J = \frac{(-5+12i)(2-i)}{4-i^2} = \frac{2+29i}{5} = \frac{2}{5} + \frac{29}{5}i$$

* Luego : $a = \frac{2}{5}$; $b = \frac{29}{5}$

* Reemplazando en P :

$$P = 5 \times \sqrt{\frac{4}{25} + \frac{841}{25}} = 13\sqrt{5}$$

RPTA: "E"

PROBLEMA 4 :

Evaluar : $R = 2^{-50}(1+i)^{101} + 1 + i$

A) 1+i B) 2i+1 C) 2+i D) 0 E) 1−i

RESOLUCIÓN :

*Efectuando por separado :

$$(1+i)^{101} = \left[(1+i)^2\right]^{50} \times (1+i)$$

$$= (2i)^{50}(1+i)$$

$$= 2^{50} \times i^{50}(1+i) = 2^{50} \times i^2(1+i)$$

*En R : $R = 2^{-50} \times 2^{50} \times i^2(1+i) + 1 + i$

$$\rightarrow R = -(1+i) + (1+i) = 0$$

RPTA: "D"

PROBLEMA 5

Efectuar :

$$E = \frac{(1+i)^{11}}{1+i^{11}} + \frac{(1+i)^{13}}{1+i^{13}} ; \ (i = \sqrt{-1})$$

A) −64 B) 128 C) 64 D) −96 E) −128

RESOLUCIÓN:

$$E = \frac{\left((1+i)^2\right)^5 \times (1+i)}{1-i} + \frac{\left((1+i)^2\right)^6 \times (1+i)}{1+i}$$

* Se sabe que: $(1+i)^2 = 2i$

$$\rightarrow E = \frac{(2i)^5(1+i)^2}{1-i^2} + (2i)^6$$

$$\rightarrow E = \frac{32i(2i)}{2} + 64i^6 = -32 - 64 = -96$$

RPTA: "D"

PROBLEMA 6 :

Señalar la parte real del complejo resultante al efectuar:

$$Q = \frac{5}{2+i} + \frac{13}{2-i} + \frac{2}{1-i}$$

A) 4 B) 3 C) 5 D) −2 E) −4

RESOLUCIÓN :

$$Q = \frac{5(2-i)}{4-i^2} + \frac{13(2+3i)}{4-(3i)^2} + \frac{2(1+i)}{1-i^2}$$

* Se sabe que : $i^2 = -1$

$$Q = \frac{5(2-i)}{5} + \frac{13(2+3i)}{13} + \frac{2(1+i)}{2}$$

* Simplificando :

$$Q = 2 - i + 2 + 3i + 1 + i = 5 + 3i$$

*Cuya parte real será : 5

RPTA: "C"

PROBLEMA 7 :

Simplificar :

$$M = \frac{(a+b+c)(a-b+c)}{(a+c+bi)(a+c-bi)}$$

Siendo a, b y $c \in \mathbb{R}$; $i = \sqrt{-1}$

A) 1/3 B) 1/4 C) 1/5 D) 2/7 E) 1/2

RESOLUCIÓN :

* Por productos notables :

$$M = \frac{[(a+c)+b][(a+c-b]}{[(a+c)+bi]^2 + [(a+c)-bi]^2}$$

*Por diferencia de cuadrados e identidad de Legendre:

$$M = \frac{(a+c)^2 - b^2}{2\left[(a+c)^2 + (bi)^2\right]} = \frac{(a+c)^2 - b^2}{2\left[(a+c)^2 - b^2\right]} = \frac{1}{2}$$

RPTA: "E"

PROBLEMA 8 :

Determinar el menor valor de "n" que verifica:

$$(1+i)^n = 32i$$

A) 6 B) 4 C) 10 D) 5 E) 2

RESOLUCIÓN:

* Como $i^5 = i$ ya que $i^4 = 1 \Rightarrow (1+i)^n = 32i^5$
* Así también : $(1+i)^n = (2i)^5$
* Luego : $(1+i)^n = \left((1+i)^2\right)^5$

$\rightarrow (1+i)^n = (1+i)^{10}$

$\Rightarrow n = 10$

RPTA: "C"

PROBLEMA 9 :

El valor de : $(-\sqrt{-1})^{4n+3}$

donde "n" es entero y positivo, es:

A) -1 B) $e^{-\frac{\pi}{2}i}$ C) i D) $-i$ E) 1

RESOLUCIÓN:

* Se sabe que : $i = \sqrt{-1};\ i^2 = -1;\ i^3 = -i;\ i^4 = 1$
* De donde:

$i^{4k} = 1$, para todo k entero.

* Se pide :

$$(-\sqrt{-1})^{4n+3} = (-i)^{4n+3} = (-i)^{4n} \times (-i)^3$$

$$= i^{4n}(-i^3) = -i^3 = -(-i) = i$$

RPTA: "C"

PROBLEMA 10 :

Efectuar: $E = \cfrac{1+i}{1 - \cfrac{1+i}{1 - \cfrac{1+i}{1 - \cfrac{1+i}{1 - \cfrac{1+i}{1-i}}}}}$

A) $1-i$ B) $1+i$ C) 0 D) 1 E) i

RESOLUCIÓN:

* Como : $\dfrac{1+i}{1-i} = i$

$$\rightarrow E = \cfrac{1+i}{1 - \cfrac{1+i}{1 - \cfrac{1+i}{1 - \cfrac{1+i}{1 - \boxed{\cfrac{1+i}{1-i}}}}}}$$

$$\rightarrow E = \cfrac{1+i}{1 - \cfrac{1+i}{1 - \cfrac{1+i}{1 - \boxed{\cfrac{1+i}{1-i}}}}} = \cfrac{1+i}{1 - \cfrac{1+i}{1 - \boxed{\cfrac{1+i}{1-i}}}}$$

$$\rightarrow E = \cfrac{1+i}{1 - \boxed{\cfrac{1+i}{1-i}}} = \frac{1+i}{1-i} = \frac{1+i}{1-i} = i$$

RPTA: "E"

PROBLEMA 11 :

Siendo el complejo:

$$z = i + \cfrac{\cfrac{(1+i)^2}{1-i}}{1 - \cfrac{1-i}{1 + \cfrac{1+i}{1-i}}} \quad ; \ i = \sqrt{-1}$$

Halle : $2\mathbb{I}m(z) + 3\mathbb{R}e(z)$.

A) 0 B) 2 C) -2 D) 4 E) -4

RESOLUCIÓN:

* Sabemos:

$$\frac{1+i}{1-i} = i \ ; \ \frac{1-i}{1+i} = -i \ : \ (1 \pm i)^2 = \pm 2i$$

$$\rightarrow z = i + \cfrac{\cfrac{(1+i)^2}{1-i}}{1 - \cfrac{1-i}{1 + \boxed{\cfrac{1+i}{1-i}}}}$$

$$\rightarrow z = i + \cfrac{\cfrac{(1+i)^2}{1-i}}{1 - \cfrac{1-i}{1+i}} = i - \cfrac{\cfrac{2i}{1-i}}{1-(-i)} = i + \frac{2i}{-i}$$

$\rightarrow z=-2+i$

$\rightarrow Re_{(z)}=-2$; $Im(z)=1$

* Nos piden: $2Im(z)+3Re_{(z)}=-4$

RPTA: "E"

PROBLEMA 12 :

El valor de la expresión $\left[\dfrac{1+i}{1-i}\right]^{30}$ es:

A) 1 B) $1-2\sqrt{3}i$ C) -1 D) $\sqrt{3}-i$ E) $1+i$

RESOLUCIÓN :

$$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{30}=\left[\frac{(1+i)}{(1-i)}\times\frac{(1+i)}{(1+i)}\right]^{30}$$

$$=\left[\frac{1+(-1)+2i}{1-(-1)}\right]^{30}=i^{30}=(i^2)^{15}=-1$$

RPTA: "C"

PROBLEMA 13 :

La expresión : $\dfrac{(1+i)^2(1+3i)}{i-3}$

donde $i=\sqrt{-1}$, es igual a :

A) $1-3i$ B) -2 C) 10 D) 2 E) -10

RESOLUCIÓN:

*Realizando las operaciones indicadas se tiene:

$$E=\frac{(1+2i+i^2)(1+3i)}{i-3}=\frac{2i(i+3i)}{i-3}=\frac{2(i+3i^2)}{i-3}$$

$$=\frac{2(i-3)}{i-3}=2$$

RPTA: "D"

PROBLEMA 14 :

Calcular el valor de $\dfrac{(1+i)^n}{(1-i)^{n-2}}$;

donde n es un entero positivo.

A) -2 B) $2i^n$ C) $-2i^{n+1}$ D) $-2i$ E) $2i^{n+1}$

RESOLUCIÓN:

* Hagamos transformaciones :

$$\frac{(1+i)^n}{(1-i)^{n-2}}=\frac{(1+i)^n(1-i)^2}{(1-i)^n}=\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^n\times(1-i)^2$$

$$\rightarrow \frac{(1+i)^2}{(1-i)^{n-2}}=(i)^n\times(-2i)=-2i^{n+1}$$

RPTA: "C"

PROBLEMA 15 :

Hallar el valor de : $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{280}$

A) 2^{280} B) 3^{280} C) 2^{120} D) $\left(\dfrac{3}{2}\right)^{140}$ E) 3^{140}

RESOLUCIÓN:

* Agrupando :

$$\left[\frac{\sqrt{3}}{2}(1-i)\right]^{280}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{280}\left[(1-i)^4\right]^{70}$$

* Efectuando :

$$\frac{3^{140}}{2^{280}}\times(-4)^{70}=\frac{3^{140}}{2^{280}}\times2^{140}=\left(\frac{3}{2}\right)^{140}$$

RPTA: "D"

PROBLEMA 16 :

Si: $i=(0;1)$ entonces el valor de la siguiente suma

$$M=\frac{1+i}{1-i}+\frac{1+2i}{2-i}+\frac{1+3i}{3-i}+...+\frac{1+20i}{20-i}$$ es:

A) $16i$ B) $18i$ C) $20i$ D) $22i$ E) $24i$

RESOLUCIÓN:

* Nótese que cada término tiene la forma:

$$\frac{1+ki}{k-i}\ ;\ k=1;2;3;..........;20$$

$$\frac{1+ki}{k-i}\times\frac{k+i}{k+i}=\frac{(k-k)+(k^2+1)i}{k^2+1}=i$$

* Luego: $M=\underbrace{i+i+i+...+i}_{20\ veces}\rightarrow M=20i$

RPTA: "C"

PROBLEMA 17 :

Indicar un valor del complejo z, si :

$$z=\sqrt{2\sqrt{i-\sqrt{i+\sqrt[17]{i^5}}}}$$

dar como respuesta el módulo de z.

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) $\sqrt{2}$

RESOLUCIÓN:

* Colocando : $i^5=\dot{i}^{4}+1=i^{17}$; se obtendrá:

$$z=\sqrt{2\sqrt{i-\sqrt{i+\sqrt[17]{i^{17}}}}}$$

$$\rightarrow z=\sqrt{2\sqrt{i-\sqrt{2i}}}=\sqrt{2\sqrt{-\sqrt{(1+i)^2}}}$$

$$\rightarrow z=\sqrt{2\sqrt{i-1-i}}=\sqrt{2\sqrt{-1}}=\sqrt{2i}$$

$$\rightarrow z=\sqrt{(1+i)^2}\rightarrow z=1+i$$

Se pide : $|z|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$

RPTA: "E"

PROBLEMA 18 :

Calcular un valor de : $E=\sqrt[3]{-2\sqrt{-2\sqrt[10]{i\sqrt[11]{1-\sqrt{2\sqrt[9]{i}}}}}}$

A) $-i$ B) i C) $1-i$ D) 1 E) $1+i$

RESOLUCIÓN :

* Transformando de adentro hacia afuera; teniendo presente que $i <> i^9$

* Reemplazando :

$$E=\sqrt[3]{-2\sqrt{-2\sqrt[10]{i^{11}\sqrt[11]{1-\sqrt{\underbrace{2\sqrt[9]{i^9}}_{(2i)=(1+i)^2}}}}}}$$

$$\rightarrow E=\sqrt[3]{-2\sqrt{-2\sqrt[10]{i^{11}\sqrt[11]{1-\sqrt{(1+i)^2}}}}}$$

$$\rightarrow E=\sqrt[3]{-2\sqrt{-2\sqrt[10]{i^{11}\sqrt[11]{-i}}}}\ ;\ \text{pero } -i<>i^{11}$$

$$\rightarrow E=\sqrt[3]{-2\sqrt{-2\sqrt[10]{i^{11}\sqrt[11]{i^{11}}}}}$$

$$\rightarrow E=\sqrt[3]{-2\sqrt{-2\sqrt[10]{i^2}}}\ ;\ \text{pero } i^2<>i^{10}$$

$$\rightarrow E=\sqrt[3]{-2\sqrt{-2\sqrt[10]{i^{10}}}}=\sqrt[3]{-2\sqrt{\boxed{-2i}}}$$

$$\rightarrow E=\sqrt[3]{-2\sqrt{(1-i)^2}}=\sqrt[3]{-2+2i}$$

* Pero: $-2+2i=(1+i)^3$

* Reemplazando nos queda: $1+i$

RPTA: "E"

PROBLEMA 19 :

La suma de los siguientes números complejos $S=(1+i)+(2+i^2)+(3+i^3)+...+(4n+i^{4n})$ es:

A) $n(2n+1)$ B) $2n(4n+1)$ C) 0

D) $n(4n+1)$ E) $2n(4n-1)$

RESOLUCIÓN:

* Separando la parte real de la imaginaria :

$$S=(1+2+3+4+...+4n)+\underbrace{(i+i^2+i^3+i^4+...+i^{4n})}_{\text{esto es igual a cero, por propiedad}}$$

$$\rightarrow S=\frac{4n(4n+1)}{2}+0=2n(4n+1)$$

RPTA: "B"

PROBLEMA 20 :

Calcular :

$$S=i^2+2i^4+3i^6+4i^8+...+(2n-1)i^{4n-2}+2ni^{4n}$$

A) 1 B) 0 C) n D) $2n$ E) n^2

RESOLUCIÓN:

* Se observa que hay "$2n$" términos, la cual está señalada por los coeficientes. Determinando las potencias de "i":

$$S=(-1)+2(1)+3(-1)+4(1)+...+(2n-1)(-1)+2n(1)$$

* Agrupando de "2" en "2", donde cada grupo vale 1; se tiene:

$$S=\underbrace{1+1+1+...+1}_{n\ veces}\rightarrow S=n(1)=n$$

RPTA: "C"

PROBLEMA 21 :

Calcular la siguiente suma :

$$i+2i^2+3i^3+4i^4+...+2ki^{2k}$$

donde: $i=\sqrt{-1}$; k es par.

A) $k(1-i)$ B) k C) k^2 D) $k(i-1)$ E) $ki-1$

RESOLUCIÓN:

* Observamos que k es par $\rightarrow$ existen $\frac{2k}{4}$ grupos exactos de 4 sumandos:

$$\underbrace{(i-2-3i+4)}+\underbrace{(5i-6-7i+8)}+...$$

$$(2-2i)\quad+\quad(2-2i)\quad+...\frac{2k}{4}\text{ sumandos}$$

$$=2(1-i)\left(\frac{2k}{4}\right)=k(1-i)$$

RPTA: "A"

PROBLEMA 22

Reducir el siguiente número complejo :

$$z=\frac{\sqrt{3+2a}+i\sqrt{3-2a}}{\sqrt{3+2a}-i\sqrt{3-2a}}-\frac{\sqrt{3-2a}+i\sqrt{3+2a}}{\sqrt{3-2a}-i\sqrt{3+2a}}$$

donde: $-\frac{3}{2}\le a\le\frac{3}{2}$

A) $\frac{2a}{3}$ B) $-\frac{2a}{3}$ C) $\frac{a}{3}$ D) $\frac{4a}{3}$

RESOLUCIÓN :

* Hagamos los cambios siguientes :

$\sqrt{3+2a}=m \wedge \sqrt{3-2a}=n$

* Y multiplicamos y dividimos por i, la segunda fracción :

$$\Rightarrow z=\frac{m+ni}{m-ni}+\frac{(n+mi)}{(n-mi)}\times\frac{i}{i}$$

$$\Rightarrow z=\frac{m+ni}{m-ni}+\frac{m-ni}{m+ni}$$

$$\Rightarrow z=\frac{(m+ni)^2+(m-ni)^2}{m^2-(ni)^2}=\frac{2(m^2+n^2i^2)}{m^2+n^2}$$

$$\Rightarrow z=\frac{2(m^2-n^2)}{m^2+n^2}$$

* Pero : $m^2=3+2a \wedge n^2=3-2a$

* Luego:

$$z=\frac{2(4a)}{6}=\frac{4a}{3}$$

RPTA: "D"

PROBLEMA 23 :

¿Cuál debe ser el valor que se le asigne a «k» a fin de que : $\dfrac{3+4i}{1-ki}$ sea real.

A) 1 B) 0 C) 2 D) $-\dfrac{4}{3}$ E) $\dfrac{1}{2}$

RESOLUCIÓN :

* Como :

$\dfrac{3+4i}{1-ki}$ es real $\Leftrightarrow \dfrac{3+4i}{1-ki}=a \rightarrow 3+4i=a-aki$

* De la igualdad : $a=3; -ak=4 \rightarrow k=-\dfrac{4}{3}$

RPTA: "D"

PROBLEMA 24

Si los complejos:

$z_1=a+2i$ y $z_2=(2a-1)+(3b+2)i$

Son conjugados. Hallar el valor de: a^2+b^2

A) 1 B) $\dfrac{17}{8}$ C) $\dfrac{25}{9}$ D) 11 E) $\dfrac{13}{2}$

RESOLUCIÓN :

* Dado que son complejos conjugados; sus partes reales son iguales , es decir :

$a=2a-1 \rightarrow \boxed{a=1}$

* De otro lado, sus partes imaginarias, sólo se diferencian en el signo :

$2=-(3b+2) \rightarrow 4=-3b \rightarrow b=-\dfrac{4}{3}$

* Reemplazando en:

$E=a^2+b^2 \rightarrow E=(1)^2+\left(-\dfrac{4}{3}\right)^2=\dfrac{25}{9}$

RPTA: "C"

PROBLEMA 25 :

Si z es un número complejo y satisface :

Entonces: $\left|\dfrac{1-z}{1+z}\right|=1$

A) $Re(z)>0$ B) $Im(z)\geq 0$

C) z es un número real D) z es imaginario puro

E) $Re(z)<0$

RESOLUCIÓN :

* Sea $z=a+bi$; reemplazando en la igualdad:

$$\left|\dfrac{1+a+bi}{1-a-bi}\right|=1$$

$\Rightarrow |1+a+bi|=|1-a-bi|$

$\Rightarrow \sqrt{(1+a)^2+b^2}=\sqrt{(1-a)^2+(-b)^2}$

$\Rightarrow (1+a)^2+b^2=(1-a)^2+b^2$

$\Rightarrow 1+2a+a^2=1-2a+a^2$

$\Rightarrow 4a=0 \Leftrightarrow a=0$

* Luego $z=a+bi=0+bi=bi$

* Entonces z es imaginario puro

RPTA: "D"

PROBLEMA 26 :

El número complejo z_0 satisface la ecuación:

$\dfrac{5+3i}{-4+i}=\dfrac{2i}{z_0}-2i$. Determinar el valor de $f(z_0)$; donde $f(x)=x^2-3x+3$

A) $1+i$ B) $1-i$ C) $-2+i$ D) $2+\sqrt{2}i$ E) i

RESOLUCIÓN :

Si: $\dfrac{5+3i}{-4+i}=\dfrac{2i}{z_0}-2i \Rightarrow \dfrac{2i}{z_0}=\dfrac{5+3i}{-4+i}+2i$

$\rightarrow \dfrac{2i}{z_0}=\dfrac{5+3i-8i-2}{-4+i} \Rightarrow z_0=\dfrac{8i+2}{5i-3}\times\dfrac{(5i+3)}{(5i+3)}$

$\rightarrow z_0=1-i$

* Luego : $f(z_0)=(1-i)^2+3(i-1)+3=i$

RPTA: "E"

PROBLEMA 27 :

Calcular el equivalente de: $z=\left(\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^6$, siendo: $i=\sqrt{-1}$

A) 1 B) 0 C) -1 D) 2i E) -2

RESOLUCIÓN :

* Expresando a su forma trigonométrica :

$z=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i\right)^6 \rightarrow z=(\cos 30^\circ+i\,\text{sen}30^\circ)^6$

$\rightarrow z=\cos(30^\circ)(6)+i\,\text{sen}(30^\circ)(6)$

$\rightarrow z=\underbrace{\cos 180^\circ}_{-1}+i\underbrace{\text{sen}180^\circ}_{0} \Rightarrow z=-1$

RPTA: "C"

PROBLEMA 28 :

Calcular :

$$z=\dfrac{12(\cos 16^\circ+i\,\text{sen}16^\circ)}{3(\cos 44^\circ+i\,\text{sen}44^\circ)[2(\cos 62^\circ+i\,\text{sen}62^\circ)]}$$

A) 2i B) -i C) -2i D) 1 E) 4

RESOLUCIÓN :

* Se puede escribir :

$z=\dfrac{12\text{cis}16^\circ}{3\text{cis}44^\circ\times 2\text{cis}62^\circ}=\dfrac{12\text{cis}16^\circ}{(3\times 2)\text{cis}(44^\circ+62^\circ)}$

$\rightarrow z=\dfrac{2\text{cis}16^\circ}{\text{cis}106^\circ}=2\text{cis}(-90^\circ)$

$\rightarrow z=2(\cos(-90^\circ)+i\,\text{sen}(-90^\circ))$

$\rightarrow z=2(\cos 90^\circ-i\,\text{sen}90^\circ)=2(0-i)=-2i$

RPTA: "C"

PROBLEMA 29 :

Calcular :

A) $5\underline{|16^\circ}\times 2\underline{|19^\circ}\times\underline{|25^\circ}$

B) $[16(\cos 15^\circ+i\operatorname{sen}15^\circ)][2(\cos 75^\circ+i\operatorname{sen}75^\circ)]$

C) $2(\cos 15^\circ+i\operatorname{sen}15^\circ)^6$

D) $[4(\cos 20^\circ+i\operatorname{sen}20^\circ)]^3$

E) $z=\dfrac{\left[\sqrt[3]{3}(\cos 31^\circ+i\operatorname{sen}31^\circ)\right]^3\left[\sqrt[5]{5}(\cos 12^\circ+i\operatorname{sen}12^\circ)\right]^5}{\left[\sqrt[3]{15}(\cos 11^\circ+i\operatorname{sen}11^\circ)\right]^3}$

RESOLUCIÓN :

A) En este caso se tiene :

$(5\times 2\times 1)\underline{|16^\circ+19^\circ+25^\circ}=10\underline{|60^\circ}=10(\cos 60^\circ+i\operatorname{sen}60^\circ)$

$=10\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)=5+5\sqrt{3}i$

B) El complejo producto es :

$(16\times 2)[\cos(15^\circ+75^\circ)+i\operatorname{sen}(15^\circ+75^\circ)]$

$=32(\cos 90^\circ+i\operatorname{sen}90^\circ)=32(0+i)=32i$

C) Aplicando fórmula de De Moivre :

$2(\cos 6\times 15^\circ+i\operatorname{sen}6\times 15^\circ)$

$=2(\underbrace{\cos 90^\circ}_{0}+i\underbrace{\operatorname{sen}90^\circ}_{1})=0+2i$

D) Igualmente a lo anterior :

$4^3(\cos 3\times 20^\circ+i\operatorname{sen}3\times 20^\circ)$

$=64(\underbrace{\cos 60^\circ}_{1/2}+i\underbrace{\operatorname{sen}60^\circ}_{\sqrt{3}/2})=32+32\sqrt{3}i$

E) Transformando a la forma exponencial :

$e^{i\theta}=\cos\theta+i\operatorname{sen}\theta$

$$z=\frac{(\sqrt[3]{3})^3[\cos 31^\circ+i\operatorname{sen}31^\circ]^3(\sqrt[5]{5})^5[\cos 12^\circ+i\operatorname{sen}12^\circ]^5}{(\sqrt[3]{15})^3(\cos 11^\circ+i\operatorname{sen}11^\circ)^3}$$

$$\Rightarrow z=\frac{3(e^{31i})^3\times 5(e^{12i})^5}{15(e^{11i})^3}$$

$$\Rightarrow z=\frac{15\times e^{93i}\times e^{60i}}{15\times e^{33i}}=e^{120i}$$

$$\Rightarrow z=e^{120i}=\cos 120^\circ+i\operatorname{sen}120^\circ\Rightarrow z=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

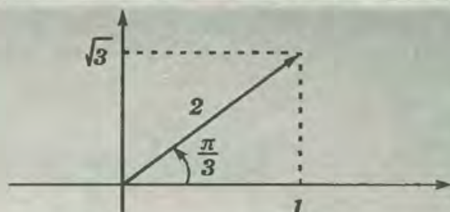
PROBLEMA 30 :

Calcular a su forma exponencial :

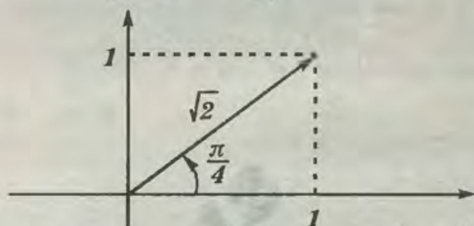
$$z=(1+\sqrt{3}i)(1+i)\left(\cos\frac{\pi}{3}-i\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\right)$$

RESOLUCIÓN :

$*\ 1+\sqrt{3}i=2\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{3}\right)=2e^{\frac{\pi}{3}i}$



$*\ 1+i=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}$



$*\ \cos\dfrac{\pi}{3}-i\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{3}=\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)+i\operatorname{sen}\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)=e^{-\frac{\pi}{3}i}$

* Luego:

$$z=\left(2e^{\frac{\pi}{3}i}\right)\left(\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}\right)\left(e^{-\frac{\pi}{3}i}\right)\Rightarrow z=2\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}$$

PROBLEMA 31 :

Calcular :

A) $\left(\dfrac{1}{2}\sqrt{3}-\dfrac{1}{2}i\right)^{10}$ B) $(-2+2\sqrt{3}i)(2\sqrt{3}-2i)$

C) $\dfrac{4-4i}{\sqrt{3}-i}$ D) $(\cos 135^\circ+i\operatorname{sen}135^\circ)^{1/2}$

E) $[32(\cos 200^\circ+i\operatorname{sen}200^\circ)]^{1/5}$

F) $\sqrt[3]{\sqrt{3}-i}$ G) $\sqrt[5]{2-2\sqrt{3}i}$

RESOLUCIÓN :

A) Sea: $w=z^{10}$; donde $z=\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i$

* Llevemos a la forma trigonométrica :

$*\ |z|=\sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2}\to|z|=1$

$*\ tg\theta=\dfrac{-1/2}{\sqrt{3}/2}\to\theta\in IVC$

* De aquí: $\theta=330^\circ=11\pi/6=Arg(z)$

$\Rightarrow z=1cis(11\pi/6)$

* Luego : $w=[1cis(11\pi/6)]^{10}$

* Aplicando de Moivre :

$w=1^{10}(\cos 10\times 330^\circ+i\operatorname{sen}10\times 330^\circ)$

* Descontando número entero de vueltas, nos queda:

$w=\cos 60^\circ+i\operatorname{sen}60^\circ$

$\Rightarrow w = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

B) Sea : $z = -2 + 2\sqrt{3}i$ y $w = 2\sqrt{3} - 2i$

$\Rightarrow |z| = \sqrt{(-2)^2 + (2\sqrt{3})^2} \rightarrow |z| = 4$

* Además : $tg\theta_1 = \frac{2\sqrt{3}}{-2} \rightarrow \theta_1 \in IIC$

$\Rightarrow z = 4cis(2\pi/3)$

* Para w:

$|w| = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + (-2)^2} \rightarrow |w| = 4$

y $tg\theta_2 = \frac{-2}{2\sqrt{3}} \rightarrow \theta_2 \in IVC$

* De aquí: $\theta_2 = 330° = 11\pi/6 = Arg(w)$

$\Rightarrow w = 4cis(11\pi/6)$

* Luego: $zw = 4cis(2\pi/3) \times 4cis(11\pi/6)$

$$zw = 16cis\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{11\pi}{6}\right) = 16cis\left(\frac{5\pi}{2}\right)$$



C) Sea : $z = 4 - 4i$ y $w = \sqrt{3} - i$

$\Rightarrow |z| = \sqrt{4^2 + (-4)^2} \rightarrow |z| = 4\sqrt{2}$

* Además : $tg\theta = \frac{-4}{4} \rightarrow \theta \in IVC$

* De aquí : $\theta = 315° = 7\pi/4 = Arg(z)$

$\Rightarrow z = 4\sqrt{2}cis(7\pi/4)$

* Para w :

$|w| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} \rightarrow |w| = 2$

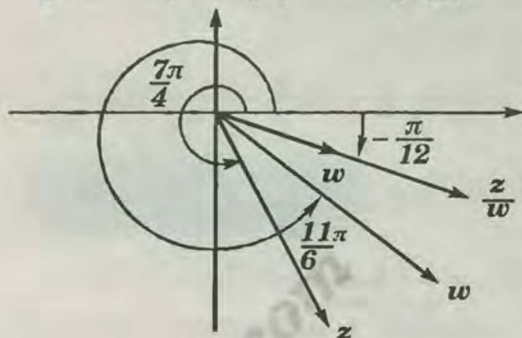
y $tg\theta = \frac{-1}{\sqrt{3}} \rightarrow \theta \in IVC$

* De aquí : $\theta = 330° = 11\pi/6 = Arg(w)$

$\Rightarrow w = 2cis(11\pi/6)$

* Luego : $\frac{z}{w} = \frac{4\sqrt{2}cis(7\pi/4)}{2cis(11\pi/6)}$

$$\frac{z}{w} = 2\sqrt{2}cis\left(\frac{7\pi}{4} - \frac{11\pi}{6}\right) = 2\sqrt{2}cis\left(-\frac{\pi}{12}\right)$$



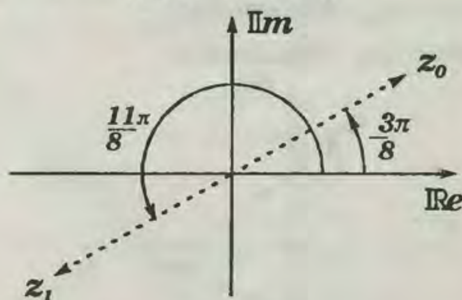
D) Aplicando fórmula de radicación, las raíces cuadradas del número complejo viene dado por:

$$E_k = cos\left[\frac{\frac{3\pi}{4} + 2k\pi}{2}\right] + isen\left[\frac{\frac{3\pi}{4} + 2k\pi}{2}\right]$$

* Donde: $k = 0; 1$

* $k = 0 \rightarrow z_0 = cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) + isen\left(\frac{3\pi}{8}\right)$

* $k = 1 \rightarrow z_1 = cos\left(\frac{11\pi}{8}\right) + isen\left(\frac{11\pi}{8}\right)$



E) Las raíces quintas vienen dadas por:

$$z_k = 2\left[cos\left(\frac{\frac{10\pi}{9} + 2k\pi}{5}\right) + isen\left(\frac{\frac{10\pi}{9} + 2k\pi}{5}\right)\right]$$

donde: $k = 0; 1; 2; 3; 4$

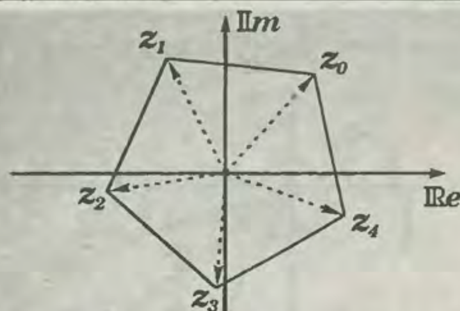
* $k = 0 \rightarrow z_0 = 2(cos2\pi/9 + isen2\pi/9)$

* $k = 1 \rightarrow z_1 = 2(cos28\pi/45 + isen28\pi/45)$

* $k = 2 \rightarrow z_2 = 2(cos46\pi/45 + isen46\pi/45)$

* $k = 3 \rightarrow z_3 = 2(cos64\pi/45 + isen64\pi/45)$

* $k = 4 \rightarrow z_4 = 2(cos82\pi/45 + isen82\pi/45)$



F) Llevemos a forma trigonométrica $z=\sqrt{3}-i$

$$|z|=\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2}\rightarrow |z|=2$$

$$\text{y } Arg(z)=\frac{11}{6}\pi \Rightarrow z=2cis(11\pi/6)$$

* Luego : $z^{1/3}=[2cis(11\pi/6)]^{1/3}$

* Donde tenemos :

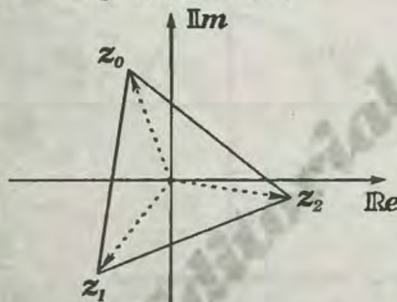
$$z_k=\sqrt[3]{2}cis\left(\frac{\frac{11\pi}{6}+2k\pi}{3}\right)$$

donde : $k=0;1;2$

* $k=0\rightarrow z_0=\sqrt[3]{2}cis(11\pi/18)$

* $k=1\rightarrow z_1=\sqrt[3]{2}cis(23\pi/18)$

* $k=2\rightarrow z_2=\sqrt[3]{2}cis(35\pi/18)$



G) Sea $z=\sqrt[5]{w}$, donde: $w=2-2\sqrt{3}i$

* Llevamos w a forma trigonométrica :

* $|w|=\sqrt{2^2+(-2\sqrt{3})^2}\rightarrow |w|=4$

* $tg\theta=\frac{-2\sqrt{3}}{2}\rightarrow \theta\in IVC$

* De aquí : $\theta=360°=5\pi/3=Arg(w)$

$\Rightarrow w=4cis(5\pi/3)$

* Luego: $z=[4cis(5\pi/3)]^{1/5}$

* Por fórmula de radicación , se tiene :

$$z_k=\sqrt[5]{4}cis\left(\frac{\frac{5\pi}{3}+2k\pi}{5}\right)$$

* Donde : $k=0;1;2;3;4$

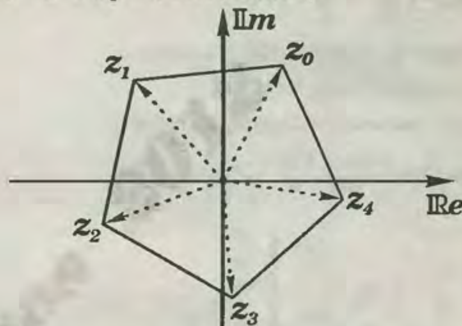
* $k=0\rightarrow z_0=\sqrt[5]{4}cis(\pi/3)$

* $k=1\rightarrow z_1=\sqrt[5]{4}cis(11\pi/15)$

* $k=2\rightarrow z_2=\sqrt[5]{4}cis(17\pi/15)$

* $k=3\rightarrow z_3=\sqrt[5]{4}cis(23\pi/15)$

* $k=4\rightarrow z_4=\sqrt[5]{4}cis(29\pi/15)$



PROBLEMA 32 :

Si: $z=a+bi;\ i=\sqrt{-1}$, una solución de la ecuación $z^3=i$, es:

A) $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}$ *B)* $\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{i}{3}$ *C)* $\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}$

D) $\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{i}{3}$ *E)* $\sqrt{3}+i$

RESOLUCIÓN :

* Expresando en su forma polar, para luego emplear el criterio de MOIVRE :

$$z^3=i=0+i=\cos\frac{\pi}{2}+isen\frac{\pi}{2}$$

$$\rightarrow z=\sqrt[3]{\cos\frac{\pi}{2}+isen\frac{\pi}{2}}=\cos\left(\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3}\right)+isen\left(\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3}\right)$$

* Donde : $k=0;1;2$

* Si $k=0: z=\cos\frac{\pi}{6}+isen\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}$

* Si $k=1: z=\cos\frac{5\pi}{6}+isen\frac{5\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}$

* Si $k=2: z=\cos\frac{3\pi}{2}+isen\frac{3\pi}{2}=0-i$

RPTA: "C"

PROBLEMA 33 :

Sea el complejo: $z = 1 + i$. Calcular: z^8

A)8 B)4 C)64 D)32 E)16

RESOLUCIÓN :

* Sabemos que: $(1+i)^2 = 2i$
* Se pide: $z^8 = (1+i)^8 = \left[(1+i)^2\right]^4 = (2i)^4 = 2^4 i^4$

$$\rightarrow z^8 = 16$$

RPTA: "E"

PROBLEMA 34 :

Si: $z = -1 + \sqrt{3}i$, entonces el complejo z^8 es igual a:

A)$256(1-\sqrt{3}i)$ B)$-128(1+\sqrt{3}i)$ C)$-256(1+\sqrt{3}i)$

D)$128(1-\sqrt{3}i)$ E)$125(-1-\sqrt{2}i)$

RESOLUCIÓN:

* De: $z = -1 + \sqrt{3}i$

$\rightarrow |z| = 2$

$Arg(z) = 120°$

$\rightarrow z^8 = [2cis120°]^8$

$\rightarrow z^8 = 2^8 \times cis(8 \times 120°)$

$\rightarrow z^8 = 2^8 \times cis(960°) = 2^8 cis240°$

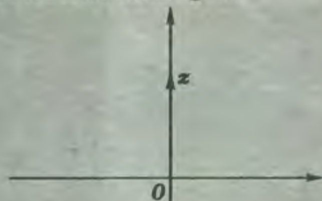
$\rightarrow z^8 = 2^8(\underbrace{cos240°}_{-\frac{1}{2}} + \underbrace{isen240°}_{-\frac{\sqrt{3}}{2}})$

$\rightarrow z^8 = -128(1+\sqrt{3}i)$

RPTA: "B"

PROBLEMA 35 :

Si la gráfica del número complejo $z = \dfrac{1+ai}{1-ai}$, $a \in \mathbb{R}$, es el que se muestra en la figura:



Entonces el valor de "a" es:

A)4 B)-2 C)1 D)-1 E)2

RESOLUCIÓN :

* Por ser un número imaginario puro :

$$z = ki \quad ; \quad (k > 0)$$

* Entonces : $ki = \dfrac{1+ai}{1-ai}$
* De donde : $ki + ak = 1 + ai$
* Finalmente : $a = k;\ ak = 1 \Rightarrow a = 1$

RPTA: "C"

PROBLEMA 36 :

En C, los valores de x e y, al resolver la ecuación siguiente:

$\dfrac{xi}{1+yi} = \dfrac{3x+4i}{x+3y}$, son:

A) $x = \pm 1$, $y = \pm 3/4$ B) $x = \pm 2$, $y = \pm 3/2$

C) $x = \pm 3$, $y = \pm 4/3$ D) $x = \pm 3$, $y = \pm 2/3$

E) $x = \pm 2$, $y = \pm 5/4$

RESOLUCIÓN :

* Multiplicando en aspa :

$$xi(x+3y) = (3x+4i)(1+yi)$$

$$\rightarrow x^2 i + 3xyi = 3x + 3xyi + 4i - 4y$$

* Ordenando : $x^2 i + 4y = 4i + 3x$
* Por igualdad de complejos.

$$x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$$

$$\rightarrow 4y = 3x \Rightarrow y = \pm \frac{3}{2}$$

$$\rightarrow x = \pm 2 \ ; \ y = \pm \frac{3}{2}$$

RPTA: "B"

PROBLEMA 37 :

Si z es un número complejo definido por

$z = \dfrac{(-1-i)^3\left(\sqrt{2}cis(315°)\right)^4}{\left(\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}\right)^5}$, entonces equivalente de z es :

A)$-2i$ B)$1+2i$ C)$2+2i$ D)$\sqrt{2}i$ E)$-\sqrt{2}i$

RESOLUCIÓN :

* Como : $-1-i = \sqrt{2}cis225°$

$$\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i} = \sqrt{2}cis\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}cis45°$$

* Luego :

$$z = \frac{(\sqrt{2}cis225°)^3(\sqrt{2}cis315°)^4}{(\sqrt{2}cis45°)^5}$$

$$\rightarrow z = \frac{\sqrt{2}^3 cis(3\times 225°)\sqrt{2}^4 \times cis(4\times 315°)}{\sqrt{2}^5 \times cis(5\times 45°)}$$

$$\rightarrow z = \sqrt{2}^2 \times cis(675° + 1260° - 225°)$$

$$\rightarrow z = 2 \times cis1710° = 2 \times cis270°$$

$$\rightarrow z = 2(-i) = -2i$$

RPTA: "A"

PROBLEMA 38 :

Si $z \in C \wedge |z| + z = 9 + 3i$, entonces un valor de la $\sqrt{z}$ es:

A) $3 + i$ B) $3 - i$ C) $\frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}$

D) $-\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$ E) $\frac{3-i}{2}$

RESOLUCIÓN :

* Sea $z = a + bi$; $a, b \in R$

$\rightarrow \sqrt{a^2+b^2} + a + bi = 9 + 3i$

$\rightarrow \sqrt{a^2+b^2} + a = 9 \wedge b = 3$

* Luego: $\sqrt{a^2+9} + a = 9$

$\rightarrow \sqrt{a^2+9} = 9 - a \rightarrow a^2 + 9 = (9-a)^2$

$\wedge a \le 9 \rightarrow a^2 + 9 = 9^2 - 18a + a^2$

$\wedge a \le 9 \rightarrow 18a = 72 \wedge a \le 9 \Rightarrow a = 4$

* De donde: $z = 4 + 3i$

* Un valor de $\sqrt{z}$ será :

$\sqrt{z} = \sqrt{4+3i} = \sqrt{i(3-4i)}$

$= \sqrt{\frac{2i}{2}} \times \sqrt{3-4i} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(1+i)^2} \times \sqrt{(2-i)^2}$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)(2-i) = \frac{1}{\sqrt{2}}(2+i-i^2)$

$\rightarrow \sqrt{z} = \frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$

RPTA: "C"

PROBLEMA 39 :

Al simplificar el siguiente número complejo

$z = \frac{(1-i\sqrt{3})^5 (cos\theta + isen\theta)^7}{2(1-i)^6 (cos\theta - isen\theta)^8}$ se obtiene:

A) $2e^{i\left(\frac{13\pi}{6}+15\theta\right)}$ B) $e^{2i\left(\frac{13\pi}{7}+8\theta\right)}$ C) e D) 1

RESOLUCIÓN :

* Como: $1 - i\sqrt{3} = 2cis\frac{5\pi}{3}$

$1 - i = \sqrt{2}cis\frac{7\pi}{4}$

$\Rightarrow z = \frac{(1-i\sqrt{3})^5 (cos\theta + isen\theta)^7}{2(1-i)^6 (cos\theta - isen\theta)^8}$

$\Rightarrow z = \frac{\left(2cis\frac{5\pi}{3}\right)^5 (cis\theta)^7}{2\left(\sqrt{2}cis\frac{7\pi}{4}\right)^6 (cis(-\theta))^8}$

$\Rightarrow z = \frac{2^5 cis\frac{25\pi}{3} \times cis(7\theta)}{2^4 cis\frac{21\pi}{2} \times cis(-8\theta)}$

$\Rightarrow z = 2cis\left(\frac{25\pi}{3} - \frac{21\pi}{2}\right) \times cis(15\theta)$

$\Rightarrow z = 2cis\left(-\frac{13\pi}{6}\right)cis(15\theta)$

$\Rightarrow z = 2cis\left(15\theta - \frac{13\pi}{6}\right) = 2e^{\left(15\theta - \frac{13\pi}{6}\right)i}$

RPTA: "A"

PROBLEMA 40 :

Sabiendo que : $\sigma = cos12° - isen12°$

Hallar el valor de $M = \sigma^{15} + \frac{1}{\sigma^{15}}$

A) 2 B) $\frac{1}{2}$ C) 1 D) -2 E) 0

RESOLUCIÓN :

* Por dato : $\sigma = cos12° - isen12°$

* Elevando a la *15* se escribe:

$\sigma^{15} = cos12° \times 15 - isen12° \times 15$.....................(I)

* Ahora recuerde: si $\sigma = cos12° - isen12°$

$\Rightarrow \frac{1}{\sigma} = cos12° + isen12°$

Elevando a la *15* se tiene

$\frac{1}{\sigma^{15}} = cos12° \times 15 + isen12° \times 15$...................(II)

* De (I) + (II):

$$\sigma^{15} + \frac{1}{\sigma^{15}} = 2\underbrace{cos180°}_{(-1)} = -2$$

RPTA: "D"

PROBLEMA 41 :

Simplificar :

$$E = \frac{|z|^2 + |w|^2}{\left|\frac{z^2+w^2}{2} + zw\right| + \left|\frac{z^2+w^2}{2} - zw\right|}$$

A) 1 B) 2 C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{1}{3}$ E) 5

RESOLUCIÓN :

* Por partes :

$\frac{z^2+w^2}{2} + zw = \frac{z^2+w^2+2zw}{2} = \frac{(z+w)^2}{2}$...... (I)

$\frac{z^2+w^2}{2} - zw = \frac{z^2+w^2-2zw}{2} = \frac{(z-w)^2}{2}$...... (II)

* (I) y (II) lo reemplazo en "E":

$$E=\frac{|z|^2+|w|^2}{\left|\frac{(z+w)^2}{2}\right|+\left|\frac{(z-w)^2}{2}\right|}=\frac{2(|z|^2+|w|^2)}{|z+w|^2+|z-w|^2}$$

$$\rightarrow\ E=\frac{2(|z|^2+|w|^2)}{|z+w|^2+|z-w|^2}$$

* El denominador es equivalente a :

$$|z+w|^2+|z-w|^2=2\left[|z|^2+|w|^2\right]$$

* Reemplazando se tiene :

$$E=\frac{2(|z|^2+|w|^2)}{2(|z|^2+|w|^2)}=1$$

RPTA: "A"

PROBLEMA 42 :

Calcular : $w^{668}+w^{273}+w^{855}+w^{542}+w^{115}+w^{439}$

Siendo : 1, w y w^2, las tres raíces de la unidad.

A) -1 B) 439 C) 3 D) 0 E) 2

RESOLUCIÓN:

* Sabemos que: $w^{3k}=1$
* También todo número es múltiplo de 3 si la suma de sus cifras es múltiplo de 3.
* Luego:

$$H=w^{3k+2}+w^{3k}+w^{3k}+w^{3k+2}+w^{3k+1}+w^{3k+1}$$

$$\rightarrow\ H=w^{3k}\times w^2+1+1+w^{3k}\times w^2+w^{3k}\times w+w^{3k}\times w$$

* Reemplazando : $w^{3k}=1$

$$H=w^2+2+w^2+w+w$$

$$\rightarrow\ H=2\underbrace{(w^2+w+1)}_{cero}\Rightarrow H=0$$

RPTA: "D"

PROBLEMA 43 :

Si $w\neq 1$ es una raíz n-ésima primitiva de la unidad y $h\in N$ es coprimo con n; calcular:

$$S=1+w^h+w^{2h}+w^{3h}+\dots+w^{(n-1)h}$$

A) 1 B) w^{nh} C) w^h D) 0 E) w^{h+1}

RESOLUCIÓN :

* Si w es una raíz n-ésima de 1 sea primitiva o no, se cumple $w^n=1$
* Además "S" es un cociente notable, donde :

$$S=\frac{1-w^{nh}}{1-w^h}\ \text{ó}\ S=\frac{1-(w^n)^h}{1-w^h}$$

* Reemplazando : $S=\dfrac{1-1^h}{1-w^h}\Rightarrow S=0$

RPTA: "D"

PROBLEMA 44 :

Si $w\neq 1$ es una raíz enésima de la unidad, entonces la siguiente suma $S=1+4w+9w^2+\dots+n^2w^{n-1}$ es equivalente a:

A) $\dfrac{-n}{(w-1)^2}$ B) $\dfrac{n^2(w-1)-2n}{(w-1)^2}$

C) $\dfrac{2n+n^2(1-w)}{(1-w)^2}$ D) 0

RESOLUCIÓN :

* De :

$$w=\sqrt[n]{1}\wedge w\neq 1\rightarrow w^n-1=0$$

$$\rightarrow (w-1)(w^{n-1}+w^{n-2}+\dots+w^2+w+1)=0$$

$$\rightarrow w^{n-1}+w^{n-2}+\dots+w^2+w+1=0$$

$$S=1+4w+9w^2+16w^3+\dots+n^2w^{n-1}\ \dots\dots\dots\ (I)$$

$$\rightarrow wS=w+4w^2+9w^3+16w^4+\dots+n^2w^n\ \dots\dots\ (II)$$

* Luego de $(I)-(II)$:

$$(1-w)S=\underbrace{1+3w+5w^2+7w^3+\dots+(2n-1)w^{n-1}}_{R}-n^2w^n$$

*Ahora :

$$R=1+3w+5w^2+7w^3+\dots+(2n-1)w^{n-1}\ \dots\dots(III)$$

$$\rightarrow wR=w+3w^2+5w^3+7w^4+\dots+(2n-1)w^n\ \dots\ (IV)$$

* De $(III)-(IV)$:

$$(1-w)R=1+2w+2w^2+2w^3+\dots+2w^{n-1}-(2n-1)w^n$$

$$\rightarrow (1-w)R=-1+2\underbrace{(1+w+w^2+w^3+\dots+w^{n-1})}_{0}-(2n-1)w^n$$

$$\rightarrow (1-w)R=-1-(2n-1)w^n\wedge w^n=1$$

$$\rightarrow (1-w)R=-1-2n+1\rightarrow R=\frac{-2n}{1-w}$$

* Reemplazando :

$$(1-w)S=\frac{-2n}{1-w}-n^2\times w^n=\frac{-2n+n^2(w-1)}{1-w}$$

$$\rightarrow S=\frac{n^2(w-1)-2n}{(1-w)^2}$$

RPTA: "B"

PROBLEMA 45 :

Sabiendo que 1, z y z^2 son las raíces cúbicas de la unidad , entonces el valor de la expresión:

$$E=\left[\dots\left[\left[z^z\right]^{z^2}\right]^{N}\right]^{z^{50}}$$ es:

A) $z+1$ B) z^2 C) z^3 D) 1 E) z

RESOLUCIÓN :

* De : $\sqrt[3]{1}=\begin{cases}1\\ z\\ z^2\end{cases}\rightarrow 1+z+z^2=0\wedge z^3=1$

$$\rightarrow\ E=z^{z\times z^2\times z^3\dots z^{50}}=z^{z^{1+2+3+\dots+50}}$$

$$\rightarrow\ E=z^{z^{25\times 51}}=z^{(z^3)^{25\times 17}}=z^1=z$$

RPTA: "E"

PROBLEMA 46 :

Si $z \in \mathbb{C}$ tal que $z^{20} - i = 0$. Determinar el valor de verdad de las siguientes afirmaciones:

I) La raíz principal es $e^{\frac{\pi i}{20}}$

II) Una raíz es $e^{i\frac{41\pi}{20}}$

III) En el tercer cuadrante existen *9* raíces.

A)FFF *B)VVV* *C)VFV* *D)FVF* *E)FFV*

RESOLUCIÓN :

* De: $z^{20} - i = 0 \rightarrow z = \sqrt[20]{i} = \sqrt[20]{cis\frac{\pi}{2}}$

$$\rightarrow z = cis\left(\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{20}\right) ;\ k = 0; 1; ...19$$

$$I) k = 0 : z_1 = cis\frac{\pi}{40} = e^{i\left(\frac{\pi}{40}\right)}$$

Esta es la raíz principal .... *(FALSA)*

$$II)\ z_k = cis\left(\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{20}\right) = e^{i\frac{(4k+1)\pi}{40}} = e^{i\frac{41\pi}{40}}$$

$$\rightarrow 4k + 1 = 41 \rightarrow k = 10$$

* En efecto: $z_{10} = e^{i\frac{41\pi}{40}}$ es una raíz ...*(VERDADERA)*

$$III)\ z_k = e^{i\frac{(4k+1)\pi}{40}} \in IIIC$$

$$\rightarrow \pi < \frac{(4k+1)\pi}{40} < \frac{3\pi}{2} \rightarrow 40 < 4k + 1 < 60$$

$$\rightarrow \frac{39}{4} < k < \frac{59}{4} \rightarrow k = 10; 11; 12; 13; 14$$

→ En el *IIIC* hay *5* raíces................. *(Falsa)*

RPTA: "D"

PROBLEMA 47 :

Si z es un número complejo definido por $z = -16 + 30i$, entonces la parte real de una de las raíces cuadradas de z es:

A)4 *B)5* *C)-5* *D)-4* *E)-3*

RESOLUCIÓN :

* Aplicando el criterio de los radicales dobles:

$$z = -16 + 30i$$

$$\rightarrow \sqrt{z} = \sqrt{-16 + 30\sqrt{-1}} = \sqrt{-16 + 2\sqrt{-225}}$$

$$\rightarrow \sqrt{z} = \sqrt{-16 + 2\sqrt{9(-25)}} ...(9 + (-25) = -16)$$

$$\rightarrow \sqrt{z} = \pm(\sqrt{9} + \sqrt{-25}) = \pm(3 + 5i)$$

$$\rightarrow z_1 = 3 + 5i \vee z_2 = -3 - 5i$$

$$\rightarrow Re(z_1) = 3 \vee Re(z_2) = -3$$

RPTA: "E"

PROBLEMA 48 :

Si *A* es un conjunto definido por $A = \{z \in \mathbb{C} / z^4 = -4\}$, entonces el conjunto *A* por extensión es:

A) $A = \{1+i;\ 1-i;\ 2i;\ -2i\}$

B) $A = \{1+i;\ 1-i;\ -1+i;\ -1-i\}$

C) $A = \{2i;\ -2i;\ 1-2i;\ -1+2i\}$

D) $A = \{1-2i;\ 1+i;\ 1-i;\ 2i\}$

RESOLUCIÓN :

* De: $z^4 = -4 \rightarrow z^4 + 4 = 0$

$$\rightarrow (z^2 + 2i)(z^2 - 2i) = 0$$

$$* z^2 + 2i = 0 \rightarrow z^2 = -2i = (1 - i)^2$$

$$\rightarrow z = \pm(1 - i)$$

$$* z^2 - 2i = 0 \rightarrow z^2 = 2i = (1 + i)^2$$

$$\rightarrow z = \pm(1 + i)$$

$$\rightarrow A = \{1-i;\ -1+i;\ 1+i;\ -1-i\}$$

RPTA: "B"

PROBLEMA 49 :

Si: $J = \left[\frac{1 + \sqrt[n]{1}}{2cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)}\right]^{np}$ y $k = 0;1;2;$ .... $;(n-1)$

Calcular $|J|$

A)1 *B)2* *C)* $\sqrt{2}$ *D)* $\sqrt{3}$ *E)n*

RESOLUCIÓN :

* Calculemos las raíces n-ésimas de *1* , así :

$$\sqrt[n]{1} = cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + isen\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$$

* Por condición : $k = 0; 1; 2 ;......;(n-1)$

* De aquí : $1 + \sqrt[n]{1} = 1 + cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + isen\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$

* Por criterios de trigonometría, las partes señaladas se transforman así:

$$1 + \sqrt[n]{1} = 2cos^2\left(\frac{k\pi}{n}\right) + i \times 2sen\left(\frac{k\pi}{n}\right)cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)$$

$$\Rightarrow 1 + \sqrt[n]{1} = 2cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)\left[cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) + isen\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right]$$

* Reemplazando en *J*, nos quedará así:

$$J = \left[cos\frac{k\pi}{n} + isen\frac{k\pi}{n}\right]^{np}$$

* Por Moivre :

$$J = 1[cos(kp\pi) + isen(kp\pi)] \rightarrow |J| = 1$$

RPTA: "A"

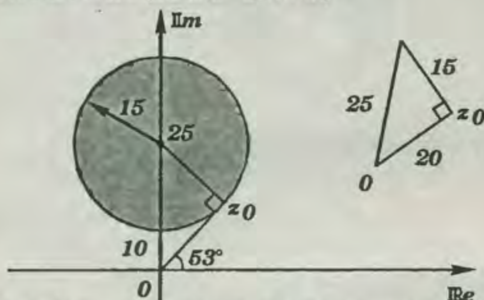
PROBLEMA 50 :

El número complejo z de menor argumento que cumple la condición $|z-25i| \le 15$ es:

A) $12+16i$ B) $3+4i$ C) $10+12i$ D) $16+12i$ E) $6+5i$

RESOLUCIÓN :

*Grafiquemos el conjunto (Ver capítulo de relaciones) $R=\{z \in \mathbb{C} / |z-25i| \le 15\}$



* De la figura, z_0 es el complejo de menor argumento posible $/ z_0 = \in A$.

$$z_0 = 20cis53° = 20(cos53° + isen53°)$$

$$\rightarrow z_0 = 20\left(\frac{3}{5}+\frac{4}{5}i\right) = 12+16i$$

RPTA: "A"

PROBLEMA 51 :

Hallar el gráfico del conjunto :

$$S=\{i-\bar{z} / |iz+1-i| \le 1\}$$

RESOLUCIÓN:

* **MÉTODO 1 :**

Sea $w = x+yi = 1-\bar{z}$ entonces $z = -x+(y-1)i$

$\rightarrow iz = -(y-1)-ix$

* Así $|iz+1-i| = |(2-y)+(-x-1)| \le 1$

$\Leftrightarrow (x+1)^2+(y-2)^2 \le 1$

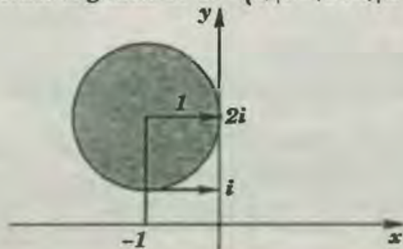
$\rightarrow S$ es un círculo de centro $(-1; 2)$ y radio 1.

* **MÉTODO 2:**

Como

$$|iz-1-i| = |i|\left|z+\frac{1}{2}-1\right| = |z-i-1| = |z-(1+i)| \le 1$$

* Entonces la gráfica de $S=\{z / |z-(1+i)| \le 1\}$ es :



PROBLEMA 52 :

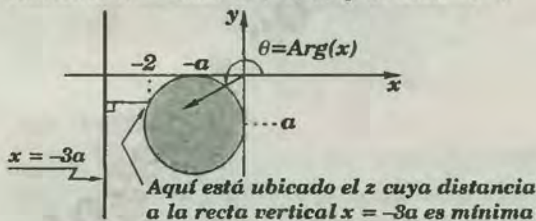
Sea $z \in \mathbb{C}$ tal que cumple :

$|z+z_0| \le a$, donde: $z_0 = (a;a); \in \mathbb{R}^+$. Calcular el argumento de z cuya distancia a la recta vertical que pasa por $x=-3a$ sea mínima.

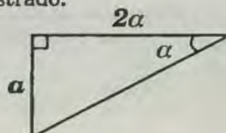
A) $\left(\frac{33}{2}\right)^{\circ}$ B) $\left(\frac{37}{2}\right)^{\circ}$ C) $45°$ D) $\left(\frac{413}{2}\right)^{\circ}$

RESOLUCIÓN :

* Los $z \in \mathbb{C}$ que satisfacen la desigualdad $|z+(a;a)| \le a$, son todos aquellos que se encuentran dentro de una circunferencia (incluyendo el contorno) con centro en $(-a; a)$ y de radio "a".



* Del ⊿ mostrado:



$$tg\alpha = \frac{a}{2a} \rightarrow tg\alpha = \frac{1}{2}$$

* De aquí, por triángulo notable : $\alpha = \left(\frac{53}{2}\right)^{\circ}$

* Luego : $\theta = arg(z) = 180° + \left(\frac{53}{2}\right)^{\circ} = \left(\frac{413}{2}\right)^{\circ}$

RPTA: "D"

PROBLEMA 53 :

Si A es un conjunto definido por $A=\{\bar{z}-i / 2Re(z)+3Im(z) \le 4\}$, entonces la figura que mejor representa la gráfica del conjunto A es:



RESOLUCIÓN :

* Sea $\bar{z}-i = x+yi \Rightarrow \bar{z} = x+(y+1)i$

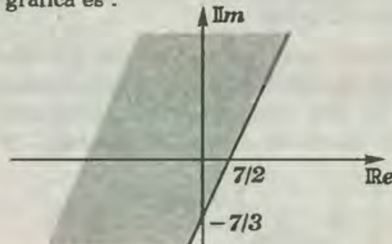
$\Rightarrow z = x-(y+1)i$

* De donde : $Re(z)=x \wedge Im(z)=-y-1$
* En : $2Re(z)+3Im(z)\leq 4$

$\rightarrow 2x+3(-y-1)\leq 4 \rightarrow y\geq \frac{2}{3}x-\frac{7}{3}$

$\rightarrow A=\left\{x+yi/y\geq \frac{2}{3}x-\frac{7}{3}\right\}$

* Su gráfica es :



RPTA: "B"

PROBLEMA 54 :

Dado una familia de número complejos que cumplen $4(z-3)(\bar{z}-3)=|z|^2+15$.

Seleccionar el complejo situado en el primer cuadrante que tenga el mayor argumento principal e indicar su módulo.

A) $\sqrt{2}$ B) $\sqrt{3}$ C) $\sqrt{5}$ D) $\sqrt{7}$ E) 7

RESOLUCIÓN :

* De : $4(z-3)(\bar{z}-3)=|z|^2+15$

$\rightarrow 4(z\times\bar{z}-3(z+\bar{z})+9)=|z|^2+15$

* Pero : $z\times\bar{z}=|z|^2 \wedge z+\bar{z}=2Re(z)$

$\rightarrow 4(|z|^2-3\times 2Re(z)+9)=|z|^2+15$

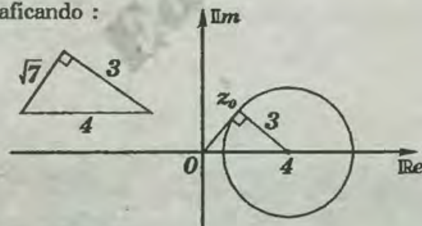
$\rightarrow |z|^2-8Re(z)+7=0$

* Si : $z=x+yi \rightarrow |z|^2=x^2+y^2$

$\rightarrow x^2+y^2-8x+7=0 \rightarrow x^2-8x+16+y^2=9$

$\rightarrow (x-4)^2+y^2=3^2$

* Graficando :

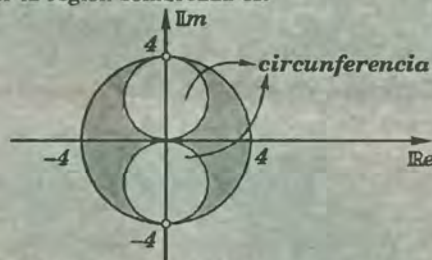


z_0 es un complejo del *IC* , con mayor argumento posible : $|z_0|=\sqrt{7}$

RPTA: "D"

PROBLEMA 55 :

El conjunto de números complejos que representa mejor la región sombreada es:



A) $\{z\in C/|z|\geq 4 \wedge |z-i|\leq 2\}\cup$
$\{z\in C/|z|\leq 4 \wedge Im(z)\geq 0 \wedge |z-2i|\geq 2\}$

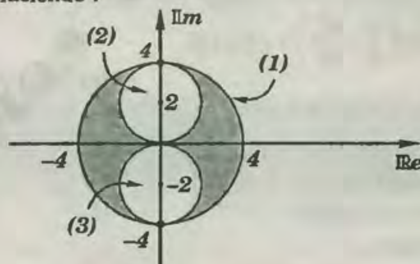
B) $\{z\in C/|z|\leq 4 \wedge |z+i|<2\}\cup\{z\in C/|z|\leq 4 \wedge |z-i|\leq 2\}$

C) $\{z\in C/|z|\leq 4 \wedge |z-2i|\leq 2 \wedge |z+i|\leq 2\}$

D) $\{z\in C/|z|\leq 4 \wedge |z-2i|\geq 2 \wedge Im(z)\geq 0\}\cup$
$\{z\in C/|z|\leq 4 \wedge |z+2i|\geq 2 \wedge Im(z)\leq 0\}$

RESOLUCIÓN :

* Haciendo :



(1): $x^2+y^2\leq 4^2 \rightarrow |z|\leq 4$

(2): $x^2+(y-2)^2\geq 2^2 \rightarrow |x+(y-2)i|^2\geq 2^2$

$\rightarrow |z-2i|\geq 2 \wedge Im(z)\geq 0$

(3): $x^2+(y+2)^2\geq 2^2 \rightarrow |x+(y+2)i|^2\geq 2^2$

$\rightarrow |z+2i|\geq 2 \wedge Im(z)\leq 0$

* Luego, el conjunto es:

$\{z\in C/|z|\leq 4 \wedge |z-2i|\geq 2 \wedge Im(z)\geq 0\}$

$\cup\{z\in C/|z|\leq 4 \wedge |z+2i|\geq 2 \wedge Im(z)\leq 0\}$

RPTA: "D"

PROBLEMA 56 :

Una de las raíces de orden 4 de un número complejo de módulo 16, tiene argumento igual a $\frac{7\pi}{12}$. Indicar la raíz correspondiente al mayor

A) $2cis\left(\frac{19\pi}{12}\right)$ B) $2cis\left(\frac{3\pi}{2}\right)$ C) $2cis\left(\frac{13\pi}{2}\right)$ D) $2cis\left(\frac{17\pi}{12}\right)$

RESOLUCIÓN :

* Sea el complejo : $z/|z|=16$

* Si: z_0, z_1, z_2, z_3 son raíces constituyen los vértices de un cuadrado inscrito en una circunferencia con centro *(0; 0)* y radio igual a **2**.

* Graficando :



* La raíz de mayor argumento corresponde a z_3, donde:

$$Arg(z_3)=\frac{7\pi}{12}+\pi=\frac{19\pi}{12}$$

$$\Rightarrow z_3=2\left(\cos\frac{19\pi}{12}+isen\frac{19\pi}{12}\right)=2cis\left(\frac{19\pi}{12}\right)$$

RPTA: "A"

PROBLEMA 57 :

Hallar el argumento del complejo: $z=i^{-w}$ siendo "w" una raíz cúbica no real de la unidad.

A) $\frac{\pi}{2}$ B) $\frac{3\pi}{4}$ C) $\frac{\pi}{4}$ D) π

RESOLUCIÓN :

* w es $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i \vee -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

$$\Rightarrow z=i^{-\left(-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)}=i^{\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i}$$

* De aquí, se puede escribir : $z=i^{\frac{1}{2}}\times\left(i^i\right)^{\pm\frac{\sqrt{3}}{2}}$

* Por fórmula de Euler :

$$e^{i\theta}=\cos\theta+isen\theta;\ \forall\theta \text{ en rad.}$$

* Si: $\theta=\frac{\pi}{2}\rightarrow e^{\frac{\pi}{2}i}=\underbrace{\cos\frac{\pi}{2}}_{0}+i\underbrace{sen\frac{\pi}{2}}_{1}\Rightarrow e^{\frac{\pi}{2}i}=i$

* Elevando a la i, tenemos :

$$\left(e^{\frac{\pi}{2}i}\right)^i=i^i\Rightarrow i^i=e^{-\frac{\pi}{2}}$$

* En z :

$$z=i^{\frac{1}{2}}\left(e^{-\frac{\pi}{2}}\right)^{\pm\frac{\sqrt{3}}{2}} \text{ ó } z=e^{\pm\frac{\pi}{4}\sqrt{3}}\left(e^{\frac{\pi}{2}i}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow z=e^{\pm\frac{\sqrt{3}}{4}\pi}\times e^{\frac{\pi}{4}i}\rightarrow Arg(z)=\frac{\pi}{4}$$

RPTA: "C"

PROBLEMA 58 :

Dado el polinomio :

$P(z)=(2-\alpha)z^3+(4+2i)z+6,\ z\in\mathbb{C}$. ¿Qué valor de α hace que $P(1+i)$ sea un complejo imaginario puro.

A) –5 B) –4 C) –3 D) –2 E) 3

RESOLUCIÓN:

* Como: $(1+i)^3=(1+i)^2(1+i)=2i(1+i)$

$\rightarrow P(1+i)=(2-\alpha)2i(1+i)+(4+2i)(1+i)+6$

$\rightarrow P(1+i)=(1+i)(4i-2\alpha i+4+2i)+6$

$\rightarrow P(1+i)=(1+i)[4+(6-2\alpha)i]+6$

$\rightarrow P(1+i)=[4+(2\alpha-6)+6]+[4+6-2\alpha]i$

$\rightarrow P(1+i)=(2\alpha+4)+(10-2\alpha)i$

$\rightarrow P(1+i)$ es imaginario puro

$\rightarrow 2\alpha+4=0\rightarrow\alpha=-2$

RPTA: "D"

PRIMERA PRACTICA DIRIGIDA

01 Dar el valor de :

$$3\sqrt{-20}-2\sqrt{-45}+3\sqrt{-125}$$

A) $15\sqrt{5}i$ B) $-3\sqrt{5i}$ C) $5\sqrt{5i}$ D) $3\sqrt{7i}$ E) $3\sqrt{5i}$

02 Efectuar : $\sqrt{-36}+\sqrt{\sqrt{-4}+\sqrt{-25}}-12i$

Siendo "i" la unidad imaginaria.

A) 13i B) i C) 25i D) 12i E) –25i

03 Calcular : $i^{100}+i^{201}+i^{302}+i^{403}+i^{500}$

A) 1 B) 2 C) i D) 1+i E) 2+i

04 Efectuar : $i^{2^2}+i^{2^3}+i^{2^4}+....+i^{2^{2003}}$

A) 1 B) 2 001 C) 1 000 D) 2 003 E) 2 002

05 Efectuar : $i^{3^{4^5}}+i^{5^{4^{10}}}$

A) 0 B) –2i C) 2i D) 2 E) –2

06 Hallar el valor de : $4i^{4043}-3i^{1080}+2i^{1050}$

A) 3i B) 3+2i C) 5 +3i D) –5 – 4i E) 2+3i

07 Calcular el valor de : $2i^{4^2}+3i^{2^3}+4i^{3^4}$

A) 6+i B) 3+3i C) 5+6i D) 5+4i E) 4+2i

08 Efectuar : $(1+i)^2+(1-i)^2+3i^{4n}$

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

09 Calcular :

$$(2+3i)(3+2i)+(1+2i)(2+i)+18i^3$$

A) 1 B) 2i C) 3i D) 4 E) 0

10 Efectuar :

$$(4+i)(3+i)(1+i)(3-i)(4-i)(1-i)+1$$

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

11 Calcular : $(1+i)^{400}-(1-i)^{400}$

A) 1 B) –1 C) 2 D) 2^{200} E) 0

12 Determinar el valor de "m", si la división :

$\dfrac{m+2i}{3+i}$ es un número real.

A) 2 B) 4 C) 8 D) 6 E) 10

13 Calcular : $i^1+i^2+i^3+i^4+....+i^{2003}$

A) 0 B) 1 C) –1 D) i E) $-i$

14 Determinar "a" para que Z sea un número imaginario puro.

$$Z=\frac{6+8ai}{2-3i};\ i=\sqrt{-1}$$

A) 2 B) -2 C) $-\frac{1}{2}$ D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{1}{4}$

15 Calcular el valor de:

$$S=-(1-i)^{-(1+i)^{-(1-i)^4}}$$

A) –4 B) 8 C) –8 D) 4 E) $2i$

16 Si se cumple :

$$(1+i)^2+(1+i)^4+(1+i)^6+(1+i)^8=a+bi$$

A) $\frac{1}{3}$ B) 3 C) $\frac{2}{3}$ D) $\frac{4}{3}$ E) $\frac{1}{5}$

17 Calcular : $z=(1+i)^8.(1-i)^8$

A) 64 B) 128 C) 256 D) 8 E) 16

18 Sumar : $z=i^2+2i^4+3i^6+4i^8+...+(4n)i^{8n}$

Siendo: $i=\sqrt{-1}$

A) n B) $2n$ C) $4n$ D) $2n^2$ E) $4n^2$

19 Reducir :

$$E=(\sqrt{4+3i}+\sqrt{4-3i})(\sqrt{12+5i}+\sqrt{12-5i})$$

A) 20 B) 30 C) 40 D) 60 E) 50

20 Calcule el menor valor que verifica:

$(1+i)^n=-64$

Si: $n\in N$

A) 6 B) 12 C) 10 D) 5 E) 16

21 Efectuar : $\left(\dfrac{1+i}{1-i}+\dfrac{1-i}{1+i}\right)^{15}$

A) 1 B) 2^{30} C) $-i$ D) $-2^{15}i$ E) 0

22 Efectuar : $\dfrac{1+i}{1-\dfrac{1+i}{1-\dfrac{1+i}{1-i}}}$

A) 1 B) i C) $-i$ D) –1 E) 0

23 Efectuar : $\dfrac{2+3i}{2-3i}+\dfrac{3+2i}{3-2i}+\dfrac{2i}{13}$

A) i B) $2i$ C) $3i$ D) $4i$ E) $-i$

24 Simplificar : $M=i^{-343}+i^{-522}+i^{-1000}$

A) i B) $-i$ C) 1 D) $-2i$ E) –1

25 Hallar $x; y$ en :

$$(1+i)x+(-2+5i)y=-4+17i$$

A) 1 ; 2 B) 3 ; 2 C) 4 ; 5 D) 2 ; 3 E) 7 ; 8

26 Hallar x en la ecuación :

$$(1+i)+(2+2i)+(3+3i)+...(x+xi)=820+820i$$

A) 30 B) 10 C) 20 D) 9 E) 40

27 Efectuar : $\dfrac{(1+i)^{101}}{2^{50}}+1+i$

A) 1 B) 2 C) 0 D) 3 E) –1

28 Hallar el módulo de un complejo Z que al multiplicarlo por su conjugado y dividir este producto por $(1+i)$ resulte : $5-5i$

A) $\sqrt{5}$ B) $\sqrt{7}$ C) $\sqrt{10}$ D) $\sqrt{2}$ E) $-\sqrt{10}$

29 Halle el módulo del complejo :

$$(3+4i)(5+12i)(2\sqrt{2}+i)$$

A) 195 B) 80 C) 190 D) 70 E) 90

30 Si: $z=3-bi$; $|z|=5$. Halle el valor de b.

A) –4 B) –3 C) 4 D) 5 E) 3

TAREA DOMICILIARIA

01 Reducir : $\sqrt{-8}-i\sqrt{-16}-\sqrt{-32}-2$

A) $-2\sqrt{2}i$ B) $2-3\sqrt{2}i$ C) $1-2\sqrt{2}i$

D) $2+2\sqrt{2}i$ E) $2-2\sqrt{2}i$

02 Reducir : $i^1+i^2+i^3+i^4+....+i^{102}$

A) $1+i$ B) $1-i$ C) 1 D) $-1+i$ E) $-i$

03 Efectuar : $(1+i)^4-(1-i)^4$

A) $1+i$ B) $1-i$ C) 0 D) $2-i$ E) $2-2i$

04 Reducir : $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{11}+\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{8}$

A) i B) 0 C) $1+i$ D) $1-i$ E) $1+2i$

05 Calcular el módulo de M si:
$M=(4+3i)(5-12i)$

A)40 B)45 C)65 D)20 E)70

06 Calcular el valor de "n" para que el resultado de dividir: $\frac{2+ni}{1-i}$ sea un número real.

A) 2 B) 1 C) 0 D) −1 E) −2

07 Calcular el valor de "n" para que al dividir los siguientes complejos el resultado sea un imaginario puro. $\frac{5+ni}{1-i}$

A) 8 B) −9 C) −10 D) −8 E) 7

08 Determinar "a" para que "z" sea un número imaginario puro.

$$z=\frac{6+8ai}{2-3i};\ i=\sqrt{-1}$$

A) 2 B) -2 C) $-\frac{1}{2}$ D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{1}{4}$

09 Efectuar :

$$S=\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{-1}+\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{-1}+\frac{1}{(1-i)^6};\ i=\sqrt{-1}$$

A) $\frac{1}{8}$ B) $-\frac{1}{8}$ C) $\frac{i}{8}$ D) $-\frac{i}{8}$ E) $\frac{i}{16}$

10 Calcular : $w=\left[\frac{(1+i)^{17}}{1+i^{17}}\right]^2;\ i=\sqrt{-1}$

A) 2^{17} B) 2^{16} C) $2^{17}i$ D) -2^{16} E) $-2^{16}i$

SEGUNDA PRACTICA DIRIGIDA

01 Calcular : $M=\frac{i^{32}+i^{54}+i^{65}}{i^{46}+i^{520}-i^{673}}$

A) 1 B) −1 C) i D) $-i$ E) 2

02 Efectuar : $E=\frac{i^{-25}+2i^{-6}+i^{-63}}{i^{-6}+i^{-7}+i^{-33}}$

A)1 B) −1 C) i D) $-i$ E) 2

03 Evaluar : $L=i^2+2i^4+3i^6+4i^8+........+49i^{98}+50i^{100}$

A) 50 B) −50 C) 25 D) −25 E)1275

04 Sea el complejo : $Z=4(3-i)-i(8i-6)$

Calcular : $Re_{(Z)}^{Im(Z)}$

A)20 B)40 C)4^{10} D)400 E)100

05 A partir del complejo : $Z=(5+3i)(3+2i)$

Calcular: $Re(Z)-Im(Z)$

A) −10 B) 10 C) 28 D) −28 E) 9

06 Hallar el complejo por el cual se tiene que multiplicar a $3+2i$ para obtener $17+7i$

A) $5+i$ B) $5-i$ C) $3+i$ D) $3-i$ E) $3-2i$

07 Si el complejo W definido como:

$$W=\frac{m+3i}{2+ni}/m,n\in\mathbb{R}$$

Es un real puro, calcular "mn"

A)1 B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{3}{2}$ D)3 E)6

08 Calcular "m" si el complejo :

$$Z=\frac{3+4mi}{2-i}$$

Es un número puramente imaginario

A) $\frac{2}{3}$ B) $-\frac{2}{3}$ C) $\frac{3}{2}$ D) $-\frac{3}{2}$ E) $\frac{4}{3}$

09 Calcular : $M=(1+i)^3+(1-i)^3$

A) 4 B) −4 C) $4i$ D) $-4i$ E) 2

10 Evaluar : $E=(1+i)^6(1-i)^8$

A) $64i$ B) $-64i$ C) $128i$ D) $-128i$ E) 256

11 Calcular : $L=\sqrt{-2\sqrt[5]{i}+i}$

A) 1 B) −2 C) i D) $-i$ E) $2i$

12 Calcular : $B=\frac{(i+11)(1-i)^{-5}}{(1+i)^7}-\frac{11-15i}{64i}$

A)1/4 B) $\frac{1}{2}$ C)2 D)1 E) -1

13 Sabiendo que $a;\ b;\ x;\ y;\ \in\mathbb{R}$ y

Además : $\sqrt{a+bi}=x+yi$

Calcular : $E=\frac{b^2}{ay^2+y^4}$

A) 2 B) 3 C) 4 D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{1}{4}$

14 Calcular :

$$R=\frac{(1+i)^3-(1+i)^2}{(1-i)^4}$$

A)1 B)2 C) -1 D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{1}{4}$

15 Efectuar :

$$T=i^{17^{18^{19^{20}}}}+i^{25^{26^{27^{28}}}}+i^{33^{34^{35^{36}}}}$$

A) $3i$ B) $-3i$ C) 3 D) 1 E) 0

16 Reducir la expresión compleja:

$$Z=\sqrt{-2\sqrt{i-\sqrt{2i}}}$$

A) $1+i$ B) $1-i$ C) i D) $-i$ E) 1

17 Dados los números complejos:

$Z_1=2+i$ $Z_3=1+3i$

$Z_2=4-2i$ $Z_4=3-4i$

proporcione el valor: $(Z_1-Z_2)(Z_3+Z_4)$

A) $5+12i$ B) $-5+12i$ C) $-5+14i$
D) $-5-14i$ E) $1+2i$

18 Luego de efectuar: $Z=(7+i)(4-i)$

el valor de $Re(Z)-Im(Z)$ es:

A) 26 B) 32 C) 10 D) 16 E) 23

19 Efectuar : $Z=\dfrac{7+i}{4-i}$

e indicar $(Re(Z)+Im(Z))(17)$

A) 35 B) 36 C) 37 D) 38 E) 39

20 Calcular "a", si se sabe:

$$a(-1+i)+b(1+2i)=1\ ;\ a;\ b\in\mathbb{R}$$

A) -1 B) -2 C) $-2/3$ D) $-3/2$ E) 5

TAREA DOMICILIARIA

01 Calcular : $i^{47\,186}$

A) -1 B) i C) $-i$ D) 1 E) 0

02 Determine el valor de : $E=i^{2^{2^2}}$

A) -1 B) 1 C) $-i$ D) i E) 0

03 Simplificar : $M=\dfrac{i^{328}+i^{321}+i^{313}+i^{302}}{i^{244}+i^{253}+i^{327}+i^{120}}$

A) i B) 1 C) -1 D) $-i$ E) 2

04 Efectuar : $P=1+i+i^2+i^3+i^4+.....+i^{91}$

A) 1 B) $-1+i$ C) 0 D) -1 E) i

05 Efectuar : $\sqrt{2\sqrt{i-\sqrt{i+\sqrt[5]{i}}}}\ ;\ i=\sqrt{-1}$

A) $1+i$ B) $1-i$ C) i D) $\sqrt{2}$ E) $\dfrac{-1+i}{2}$

TERCERA PRACTICA DIRIGIDA

01 Hallar el módulo del siguiente complejo :

$$Z=12+5i$$

A) 5 B) 12 C) 13 D) 15 E) 16

02 Indicar el módulo de : $Z=\dfrac{4+6i}{\sqrt{2}-\sqrt{11}i}$

A) 1 B) 2 C) $\sqrt{2}$ D) 4 E) 6

03 Calcular : $M=(1+i)^6-(1-i)^6$

A) 0 B) 16 C) $16i$ D) $-16i$ E) 8

04 Efectuar :

$$P=\left(\frac{1+\sqrt{5}i}{2}\right)^4+\left(\frac{1-\sqrt{5}i}{2}\right)^4$$

A) 1 B) -1 C) $\dfrac{1}{2}$ D) $-\dfrac{1}{2}$ E) 2

05 Dada la siguiente igualdad :

$$(1+i)^2+(1+i)^4+(1+i)^6+(1+i)^8=x+yi$$

Calcular: $E=\dfrac{x+y}{x-y}$

A) 2 B) 3 C) 6 D) $1/3$ E) $1/2$

06 Calcular el módulo del siguiente complejo :

$$Z=\frac{2}{1-i}+\frac{5}{2-i}$$

A) 1 B) 3 C) 5 D) $\sqrt{13}$ E) $\sqrt{17}$

07 Calcular : $E=\sqrt{9+40i}+\sqrt{9-40i}$

A) 20 B) $20i$ C) $15i$ D) $-15i$ E) 10

08 Calcular a y b en : $ai+b=1+\dfrac{i}{1-i}$

indicar : ab

A) 20 B) $1/2$ C) 6 D) $1/6$ E) $1/4$

09 Si : $Re(z)=7$; hallar : $F=|1+z|^2-|1-z|^2$

A) 9 B) 14 C) 28 D) 35 E) 49

10 Indicar el módulo del complejo :

$$Z=\sqrt{2\sqrt{i-\sqrt{2\sqrt[9]{i}}}}$$

A) 2 B) $\sqrt{2}$ C) $\sqrt{3}$ D) 4 E) $\sqrt[4]{2}$

11 Calcular el valor de a para que el complejo:

$Z=\dfrac{a+2i}{a+3(1+i)}$; sea real puro

A) 2 B) 4 C) 6 D) $\frac{2}{3}$ E) -6

12 Calcular "n" si :

$$[(1+i)^9+(1-i)^9]^n = 1024$$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

13 Siendo el complejo :

$$Z=\frac{1+i}{1-\frac{1+i}{1-\frac{1+i}{1-i}}}+1$$

indicar su módulo

A) 1 B) 0 C) $\sqrt{2}$ D) $\sqrt{3}$ E) $\sqrt{5}$

14 Halla el complejo **Z** que verifica :

$$|Z|^2=5Re(z)$$

Dar como respuesta : $\left|Z-\frac{5}{2}\right|$

A) $\frac{3}{2}$ B) $\frac{5}{2}$ C) 2 D) 5 E) $\frac{2}{5}$

15 Indicar el módulo de **Z** si :

$$\frac{Z^2+Z}{5}=1+i$$

A) $\sqrt{5}$ B) 3 C) $2\sqrt{2}$ D) $\sqrt{10}$ E) A ó D

16 Sean los complejos :

$$Z_1=3+4i \qquad Z_2=-5-12i$$

Calcular: $E=|Z_1|+|Z_2|$

A) 16 B) 17 C) 18 D) 19 E) 20

17 Sabiendo que : $Z=\frac{1+i}{\sqrt{5}+\sqrt{3}\,i}$

Calcular $|Z|$

A) 1 B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D) $\sqrt{2}$ E) $3\sqrt{2}$

18 Calcular el módulo del número complejo **Z**.

Si: $Z=\frac{\sqrt{5}\,(1+i)^5\,(3-2i)}{\sqrt{3+4i}\,(5+i)}$

A) $2\sqrt{2}$ B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C) $\sqrt{2}$ D) 4 E) 1

19 Efectuar :

$$\frac{\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{30}}{\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{30}}$$ se obtiene :

A) 1 B) -1 C) i D) $-i$ E) 1/2

20 Indicar el valor de "n" en:

$$\left(\frac{1+i}{2}\right)^{(1-i)^n}=(1-i)^{(1+i)^n}$$

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

TAREA DOMICILIARIA

01 Obtener el número complejo z, que cumpla con la condición :

$$|z+1|-\bar{z}+2=4-2i$$

Dar como respuesta el valor de : $z+\bar{z}$

A) 1 B) 1/2 C) -1 D) 3/2 E) -2

02 Halle el argumento de :

$$z=(1+i)^{7-i}\left(\sqrt{2}\right)^{i-7}$$

A) $\frac{\pi}{4}$ B) $\frac{3\pi}{4}$ C) $\frac{5\pi}{4}$ D) $\frac{7\pi}{4}$ E) $\frac{9\pi}{4}$

03 Sabiendo que: $a, b, x, y \in R$, además :

$$\sqrt{a+bi}=x+yi$$

Hallar : $M=\frac{b^2}{ay^2+y^4}$

A) 2 B) 6 C) 3 D) 5 E) 4

04 Encuentre el módulo de :

$$Z=\sqrt{\frac{(1+3i)(2+2i)}{\left(\sqrt{3}+\sqrt{7}i\right)(1-i)}}$$

A) $\sqrt{2}$ B) $2\sqrt{7}$ C) $\sqrt{3}$ D) $2\sqrt{3}$ E) $\sqrt{7}$

05 Sabiendo que $|Z|=6$. Determine el valor de:

$$M=|1+z|^2+|1-z|^2$$

A) 36 B) 74 C) 72 D) 37 E) 54

CUARTA PRACTICA DIRIGIDA

01 Expresar en forma trigonométrica :

$$Z=2=2+0i$$

A) 2(cos50°+isen50°)
B) 2(cos30°+isen30°)
C) 2(cos90°+isen90°)
D) 2(sen0°+icos0°)
E) 2(sen90°+icos90°)

02 Expresar en forma polar :

$$Z=-2=-2+0i$$

A) $2[\cos 2\pi + i\,sen 2\pi]$ B) $2[\cos \pi + i\,sen\pi]$
C) $2[\sec \pi + i \cos \pi]$ D) $2[\cos \pi/2 + i\,sen\pi/2]$
E) $2\cos\frac{3\pi}{2}$

03 Expresar en forma trigonométrica :

$$Z=2i = 0+ 2i$$

A) $2(sen\pi/2 + i\cos \pi/2)$ B) $2(\cos \pi + i\,sen\pi)$
C) $2(\cos \pi/2 + i\,sen\pi/2)$ D) $2\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\,sen\frac{3\pi}{2}\right)$
E) $2sen3\pi/2$

04 Expresar en forma polar : $Z=-2i=0-2i$

A) $2(\cos \pi + i\,sen\pi)$ B) $2(sen\pi + i\cos \pi)$
C) $2(\cos 3\pi/2 + i\,sen3\pi/2)$ D) $2(\cos \pi/2 + i\,sen\pi/2)$
E) $\cos \pi/3$

05 ¿Cuántos de los siguientes números no están escritos en forma polar o trigonométrica?

$Z_1 = 2[\cos 40° + i\,sen 40°]$

$Z_2 = -\sqrt{3}\left[\cos\frac{5\pi}{12} + i\,sen\frac{5\pi}{12}\right]$

$Z_3 = \sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{7}\right) + i\,sen\left(-\frac{\pi}{7}\right)\right]$

$Z_4 = (\tan 120°)(\cos 80° + i\,sen 80°)$

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

06 Expresar: $Z = 1 + \sqrt{3}i$, en forma trigonométrica.

A) $2[\cos 60° + i\,sen 60°]$ B) $3[\cos 30° + i\,sen 30°]$
C) $4[\cos 60° + i\,sen 60°]$ D) $[\cos 60° + i\,sen 60°]$
E) $[\cos 45° + i\,sen 45°]$ F) $2\sqrt{3}\left[\cos\frac{\pi}{6} + i\,sen\frac{\pi}{6}\right]$

07 Expresar: $Z_1=(1;1)$ en forma polar.

A) $\sqrt{2}\left[\cos\frac{\pi}{3} + i\,sen\frac{\pi}{3}\right]$ B) $\sqrt{2}\left[\cos\frac{\pi}{2} + i\,sen\frac{\pi}{2}\right]$
C) $\sqrt{2}\left[\cos\frac{\pi}{4} + i\,sen\frac{\pi}{4}\right]$ D) $\sqrt{3}\left[\cos\frac{\pi}{4} + i\,sen\frac{\pi}{4}\right]$
E) $\sqrt{2}[\cos\pi + i\,sen\pi]$

08 Expresar : $Z=1$, en forma polar.

A) $\cos \pi + i\,sen\pi$ B) $\cos 2\pi + i\,sen 2\pi$
C) $\cos\frac{\pi}{2} + i\,sen\frac{\pi}{2}$ D) $\cos 0° + i\,sen 0°$
E) $2[\cos 0° + i\,sen 0°]$

09 Expresar: $Z=i$, en forma polar o trigonométrica.

A) $\cos\pi + i\,sen\pi$ B) $\cos\frac{\pi}{2} + i\,sen\frac{\pi}{2}$
C) $\cos\frac{\pi}{4} + i\,sen\frac{\pi}{4}$ D) $\cos\frac{\pi}{3} + i\,sen\frac{\pi}{3}$
E) $\cos\frac{\pi}{8} + i\,sen\frac{\pi}{8}$

10 Señalar una de las raíces quintas del complejo: $Z_1 = -4+4i$

A) $\sqrt{2}[\cos 243° + i\,sen 243°]$ B) $\sqrt{2}[\cos 120° + i\,sen 120°]$
C) $\sqrt{2}[\cos 240° + i\,sen 240°]$ D) $2\sqrt{2}[\cos 90° + i\,sen 90°]$
E) $2\sqrt{2}[\cos 142° + i\,sen 142°]$

11 Sea el complejo: $Z_1=1+i$; expresarlo en forma exponencial.

A) $\sqrt{2}e^{\pi i}$ B) $\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{2}i}$ C) $\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}$ D) $\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}$ E) $e^{\frac{\pi}{3}i}$

12 Hallar : $Z=i^i$

A) $e^{\frac{\pi}{2}i}$ B) $e^{-\frac{\pi}{2}i}$ C) $e^{\frac{\pi}{2}}$ D) $e^{-\frac{\pi}{2}}$ E) $e^{-\frac{\pi}{4}}$

13 Expresar el complejo: $Z_1 = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$ en forma exponencial.

A) $e^{\frac{\pi}{3}i}$ B) $e^{\frac{\pi}{4}i}$ C) $e^{\frac{\pi}{2}i}$ D) $e^{-\frac{\pi}{4}i}$ E) $e^{\frac{\pi}{8}i}$

14 Sean : $Z_1 = 2\sqrt{3}\left[\cos\frac{5\pi}{12} + i\,sen\frac{5\pi}{12}\right]$

$$Z_2 = \frac{1}{4}\left[\cos\frac{\pi}{4} + i\,sen\frac{\pi}{4}\right]$$

hallar : $E = Z_1 \times Z_2$

A) $\frac{\sqrt{3}}{2}cis\frac{2\pi}{3}$ B) $\frac{\sqrt{3}}{3}cis\frac{\pi}{3}$ C) $\frac{\sqrt{3}}{7}cis\frac{\pi}{4}$
D) $\frac{\sqrt{3}}{2}cis\frac{\pi}{8}$ E) $\frac{\sqrt{2}}{2}cis\frac{\pi}{4}$

15 Si : $Z = 2[\cos\frac{\pi}{3} + i\,sen\frac{\pi}{3}]$

hallar : $W=Z^3$

A) $8cis\pi$ B) $16cis\pi$ C) $14cis\pi$
D) $12cis\pi$ E) $8cis\frac{\pi}{2}$

16 La forma cartesiana del siguiente complejo:

$$Z = \frac{[\cos 17° + i\,sen 17°]^3\left[\sqrt{2}(\cos 28° + i\,sen 28°)\right]^2}{(\cos 7° + i\,sen 7°)^{11}}$$

es:

A) $i + \sqrt{2}$ B) $2 + 2i$ C) $\sqrt{3} + i$
D) $2 + \sqrt{3}i$ E) $12 + \sqrt{3}i$

18 Simplificar : $Z_1 = (1+W-W^2)^3 - (1-W+W^2)^3$

siendo "W" raíz cúbica de la unidad.

A) 1 B) W C) W^2 D) –W E) 0

19 Calcular :

$$E = \sqrt[4]{27 - \left[(2W+1)^6 + \left(2W^2+1\right)^6\right]}$$

Siendo "W" una raíz cúbica compleja de la unidad real.

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

20 Reducir : $N = \dfrac{3(cis72°)(4cis70°)(5cis38°)}{(10cis7°)(2cis85°)(cis78°)}$

sabiendo que: $cis\theta = cos\theta + isen\theta$

A) 2 B) 3 C) cis180° D) 1 E) 8

TAREA DOMICILIARIA

01 Expresar : $Z=(-1;0)$ en forma polar

A) $cos\ \pi + isen\pi$

B) $cos\ \dfrac{\pi}{2} + isen\dfrac{\pi}{2}$

C) $cos\ \dfrac{\pi}{3} + isen\dfrac{\pi}{3}$

D) $cos\ \dfrac{\pi}{4} + isen\dfrac{\pi}{4}$

E) $cos\dfrac{\pi}{8} + isen\dfrac{\pi}{8}$

02 Si: $Z_1 = 3\left[cos\dfrac{\pi}{6} + isen\dfrac{\pi}{6}\right]$

$$Z_2 = 4\left[cos\frac{\pi}{3} + isen\frac{\pi}{3}\right]$$

hallar "$Z_1 \times Z_2$"

A) $12\left[cos\dfrac{\pi}{6} + isen\dfrac{\pi}{6}\right]$

B) $12\left[cos\dfrac{\pi}{12} + isen\dfrac{\pi}{12}\right]$

C) $12\left[cos\dfrac{\pi}{2} + isen\dfrac{\pi}{2}\right]$

D) $6[cos\pi + isen\pi]$

E) 8π

03 Si : $Z_1 = 3\left[cos\dfrac{\pi}{6} + isen\dfrac{\pi}{6}\right]$

$$Z_2 = 4\left[cos\frac{\pi}{3} + isen\frac{\pi}{3}\right]$$

hallar : $\dfrac{Z_1}{Z_2}$

A) $\dfrac{4}{3}\left[cos\dfrac{\pi}{2} + isen\dfrac{\pi}{2}\right]$

B) $\dfrac{4}{3}[cos\,\pi + isen\pi]$

C) $\dfrac{4}{3}\left[cos\dfrac{\pi}{6} + isen\dfrac{\pi}{6}\right]$

D) $3\left[cos\dfrac{\pi}{3} + isen\dfrac{\pi}{3}\right]$

QUINTA PRACTICA DIRIGIDA

01 Efectuar y simplificar:

$$\frac{\dfrac{2+5i}{3+2i} + \dfrac{2-5i}{3-2i}}{\dfrac{2-5i}{3+2i} + \dfrac{2+5i}{3-2i}}$$

A) 1 B) 4 + 19i C) –4 D) 4 – 19i E) –1

02 Calcular el módulo de :

$Z=(1-2i)(2-i)+(3-4i)(4-3i)+ ... +(39-40i)(40-39i)$

A) 22140 B) 22 410 C) 24 201 D) 22104 E) 30 140

03 Reducir la expresión compleja:

$$Z = \sqrt[3]{-2\sqrt[4]{4i\sqrt{i - \sqrt[6]{-8\sqrt[5]{i}}}}}$$

indicando como respuesta su valor más sencillo, teniendo en cuenta que: $i=\sqrt{-1}$

A) 1 – i B) –1 C) 1 + 2i D) –i E) i

04 Sabiendo que: $|Z+ai| = |Z+bi|$ además: $a \neq \pm b;\ i = \sqrt{-1}$, hallar :

$$M = \frac{Z - \overline{Z}}{a+b}$$

A) i B) –i C) 1 D) –1 E) 1 + i

05 Si: $Im\left(Z + \dfrac{1}{Z}\right) = 0$, calcule el valor entero positivo de la parte imaginaria de Z.

A) 0 B) 2 C) –2
D) 1 E) No se puede determinar

06 Dados los complejos Z; W; U; V de módulo igual a 2, calcule:

$$|ZU + WV|^2 + |Z\overline{V} - W\overline{U}|^2$$

A) 4 B) 2 C) 32 D) 64 E) Faltan datos

07 Dados los complejos Z; W; V; U , determine $Re(U)$, si:

$$U = W\,Im(\overline{Z}V) + Z\,Im(\overline{V}W) + V\,Im(\overline{W}Z)$$

A) 1 B) 2 C) 0 D) –2 E) $\mathbb{R} - \{0\}$

08 Sabiendo que el módulo de:

$$Z = \sum_{k=1}^{2n} [k + (-1)^k (k+1)i]$$

es igual a $n\sqrt{530}$, calcular "n"

A) 5 B) 7 C) 9 D) 11 E) 3

09 Sabiendo que Z es un número complejo, resolver la ecuación:

$$Z^2+\overline{Z-2}=-2$$

Señale la suma de los módulos de todas las raíces

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

(10) Resolver la ecuación:

$$|Z|+Z=2+i;\ \forall Z\in C$$

A) $\frac{1}{2}+i$ B) $3+2i$ C) $\frac{3}{4}+i$ D) $\frac{3}{2}-i$ E) $2-i$

(11) Sabiendo que a, b, x, y son números reales, además: $(a+bi)^3=x+yi$, hallar:

$$E=\frac{(a^2+b^2)(bx+ay)}{(a^2-b^2)(bx-ay)}$$

A) $\frac{2}{b}$ B) $-\frac{2a}{b}$ C) -2 D) 2 E) 4

(12) La suma de dos números complejos es $(-2;-6)$, la parte real de uno de ellos es -4 y el cociente es imaginario puro. Halle la diferencia de las partes imaginarias de los números complejos

A) $2i$ B) $-6i$ C) $-8i$ D) $16i$ E) i

(13) Dado un polinomio P con variable compleja Z y regla de correspondencia:

$$P(Z)=Z^4+2Z^3+20Z+16$$

calcular: $P(1+2i)+P(1-2i)$

donde: $i=\sqrt{-1}$

A) 10 B) 12 C) 14 D) 18 E) 20

(14) Hallar todos los valores reales de "x" y los correspondientes a W que hacen que el número complejo:

$$W=(x-i)[(x+3)-9i]$$

sea imaginario puro, e indicar uno de los valores de W.

A) $(12+\sqrt{5})i$ B) $(5\sqrt{2}+6)i$ C) $(12+5\sqrt{5})i$ D) $(3-5\sqrt{5})i$ E) $3\sqrt{5}i$

(15) Si: $a+bi=(1+\sqrt{3}i)^6;\ \sqrt{-1}=i$, calcular el valor de:

$$E=\sqrt[12]{\frac{(m+n)^2+(n-m)^2}{2}}$$

A) 3 B) 4 C) 5 D) 2 E) 6

(16) Si: $m<p \wedge (m+pi)^2=1-2\sqrt{6}i$

además: $\frac{\sqrt{8+6i}}{1-i}=n+qi;\ n>0.$

calcular: $m+n+p+q+\sqrt{3}-\sqrt{2}$

A) 1 B) 2 C) -1 D) 3 E) 5

(17) Calcular el valor de "n"

$$\{(1+i)^{17}+(1-i)^{17}\}^n=2^{81}$$

A) 4 448 B) 4 488 C) 8 440 D) 4 480 E) 448

(18) Indicar el módulo de:

$$Z=\frac{1}{6}\left\{\frac{(\sqrt{5}+2)^5}{(1-\sqrt{2}i)^8}\sqrt[5]{\left(\frac{12-4\sqrt{5}i}{2+\sqrt{3}i}\right)^2}\right\}$$

A) 1 B) 3 C) 9 D) 27 E) 54

(19) Señalar la suma de los valores reales de "x" tal que:

$$\left(\sqrt{15+(2i)^3}+\sqrt{15-(2i)^3}\right)^x=x^2\times 4^x$$

A) 4 B) 6 C) 8 D) 10 E) 2

(20) Siendo $Z_1;\ Z_2\in C$, además: $|Z_1|=\sqrt{3};\ |Z_2|=\sqrt{12}$, calcular:

$$M=|Z_1+Z_2|^4-2(Z_1^2\overline{Z}_2^{-2}+Z_2^2\overline{Z}_1^{-2})+|Z_1-Z_2|^4$$

A) 326 B) 472 C) 384 D) 474 E) 594

SEXTA PRACTICA DIRIGIDA

(01) Calcular el valor de:

$$\frac{2\sqrt{-12}+4\sqrt{-27}-3\sqrt{-75}}{i^{5^{2^3}}+i^{7^{10}}}$$

A) $\sqrt{3}$ B) $-2\sqrt{3}$ C) -1 D) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ E) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(02) Si se cumple que:

$$\sqrt{3+i}=(x;y)$$

obtener: $\frac{x}{y}-\frac{y}{x}$

A) 2 B) 6 C) 7 D) 11 E) $-0,5$

(03) Dado un complejo Z, entonces: $\frac{Z+\overline{Z}}{2}$ es igual a:

A) $Re(Z)$ B) $-Re(Z)$ C) $Im(Z)$ D) $-Im(Z)$ E) $Re(Z)-Im(Z)$

(04) Determinar los números reales a y b, si:

$$(-1+i)a+(1+2i)b=1$$

Dar como respuesta: $9ab$

A) 1 B) -1 C) 2 D) -2 E) 3

(05) Siendo: $Z=\frac{1+i}{i}+\frac{i}{1-i}$

determinar : $Im(Z)$

A) 2 B) -2 C) 1 D) -1/2 E) 1/2

06 Reducir la expresión:

$$\frac{\sqrt{1+x^2}+ix}{x-i\sqrt{1+x^2}}\ ;\ (x \text{ es real})$$

A) i B) $-i$ C) xi D) $-xi$ E) x

07 Si: $Im(Z_0) = Im(Z)$

además: $$4+Z_0 i = \frac{Z-\overline{Z}}{2}$$

señalar: $Re(Z_0)$

A) 3 B) 0 C) 4 D) -2 E) 6

08 Encontrar el valor de «b» para que el complejo: $$\frac{(5;6)}{2-(b+2)i}$$
sea un imaginario puro.

A) 1 B) -1/3 C) -5/2 D) 3/5 E) 2

09 Reducir.

$$\frac{1-i}{1-\dfrac{1-i}{1-\dfrac{1-i}{1+i}}}$$

A) 1 B) -1 C) i D) $-i$ E) $1-i$

10 Mencionar el resultado de efectuar:

$$\frac{5}{(1-i)(2-i)(3-i)}$$

A) i B) $-i$ C) $\frac{i}{2}$ D) $-\frac{i}{2}$ E) 1

11 Mencionar un valor de:

$$\sqrt{2\sqrt{i-\sqrt{i+\sqrt[5]{i}}}}$$

A) i B) $-i$ C) 1 D) $1+i$ E) $1-i$

12 Dar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

( ) $\frac{1}{i}=-i$

( ) $(1-i)^3=-2i(1-i)$

( ) $(1+i)^4=(1-i)^4$

( ) $\frac{1+i}{1-i}+\frac{1-i}{1+i}=0$

A) VVVV B) VFVF C) VFFV D) FVVF E) FVFV

13 Los complejos Z_1 y Z_2 verifican el sistema:

$$\begin{cases} Z_1+iZ_2=1 \\ iZ_1+Z_2=1+i \end{cases}$$

Obtener: $3Im(Z_1)+2Re(Z_2)$

A) 0,25 B) -2,5 C) 1 D) -0,5 E) 1

14 Determine el equivalente de:

$$\frac{(1+i)^n}{1-i^{n-1}}\ ;\ n\in Z^+-\{\}$$

A) i B) $1-i$ C) $-1+i$ D) $i^n(1+i)$ E) $i^n(1-i)$

15 Hallar la suma:

$$\frac{1+2i}{2-i}+\frac{2+3i}{3-2i}+\frac{3+4i}{4-3i}+\ldots(\text{"n términos"})$$

A) 0 B) ni C) $-ni$ D) i E) $-i$

16 Determinar el complejo Z, tal que:

$$|Z|-Z=1+2i$$

Luego el valor de $Re(Z).ImZ$ es:

A) -3 B) 6 C) -1 D) 12 E) 0

17 Cómo deben ser los números complejos Z que satisfacen: $$\left|\frac{1+Z}{1-Z}\right|=1$$

A) Z es el complejo nulo B) Puramente reales
C) Imaginarios puros D) puramente reales y el nulo
E) imaginarios puros y el nulo

18 Si Z es un número complejo, tal que:

$$|Z|=1$$

calcular: $|1+Z|^2+|1-Z|^2$

A) 2 B) 4 C) 6 D) 8 E) 10

19 Si $Z, W\in C$, proporcionar el valor de:

$$Im\left(\frac{Z}{Z+W}\right)+Im\left(\frac{W}{Z+W}\right)$$

A) 0 B) 1 C) -1 D) 2 E) -2

20 Señalar el módulo de:

$$\frac{1+Cos\theta+iSen\theta}{1-Cos\theta+iSen\theta}\ ;\ 0\le\theta\le\pi$$

A) 1 B) $Tg\frac{\theta}{2}$ C) $Ctg\frac{\theta}{2}$ D) $\left|Tg\frac{\theta}{2}\right|$ E) $\left|Ctg\frac{\theta}{2}\right|$

SEPTIMA PRACTICA DIRIGIDA

01 Sea $Z = 1 + i$ y con respecto a las raíces de $\sqrt[9]{Z}$ se proponen los siguientes enunciados:

I) En el *I* cuadrante están ubicados dos de tales raíces.

II) En el *II* cuadrante estan ubicadas tres de tales raíces.

III) En el *III* cuadrante estan ubicadas dos de tales raíces.

Indique cuál(es) es(son) correcto(s):

A) Sólo I B) Sólo II C) Sólo III D) I y II E) II y III

02 Al resolver: $x^3=-4\sqrt{2}+4\sqrt{2}i$, indique cuál(es) de los siguientes enunciados es(son) correcto(s):

I) La raíz principal esta en el *II* cuadrante.

II) Una de sus raíces posee argumento *285°*.

III) Sus raíces estan ubicadas en el *I*, *III* y *IV* cuadrante.

A) Sólo I B) Sólo II C) I y II D) Sólo II E) II y III

03 Al ubicar las raíces de la ecuación $x^{50} - i = 1$ en el plano complejo, determine cuantas de estas se encuentran en el tercer cuadrante.

A) 22 B) 23 C) 24 D) 25 E) 13

04 Si $\in$ es una raíz compleja de $Z^5 - 1 = 0$ y

$$W=\frac{1}{1-\in}-\frac{1}{1+\in^3}+\frac{\in^2}{1-\in^4}$$

determine: $Re(W)$

A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 4

05 Dados los siguientes enunciados, indique cuál(es) es(son) correcto(s):

$I)$ Si $Z=(-2+2\sqrt{3i})^6 \Rightarrow Z=2^{12}$

$II)$ Si $Z=4e^{\frac{\pi i}{6}} \Rightarrow \left|e^{iz}\right|=e^{-4}$

$III)$ $|Z+1|<1 \Leftrightarrow |\overline{Z}+1|<1\ ,\ \forall Z\in C$

A) Sólo I B) Sólo II C) I y III
D) III y II E) I, II y III

06 Simplifique: $\dfrac{(1+i)^{51}(\sqrt{3}-i)^{28}}{(-1+i)^{29}(-1-\sqrt{3}i)^{38}}$

A) $1+\sqrt{3}i$ *B)* $\sqrt{3}-i$ *C)* $\sqrt{2}-\sqrt{6}i$ *D)* $1-\sqrt{3}i$ *E)* $\sqrt{3}+i$

07 Determine "x", si el complejo:

$$Z=(1-i)^3[Cos(x+180°)+iSen(x+180°)]^{\frac{1}{2}}$$

$0 \le x < 360°$ es imaginario puro. Indique cuál(es) de los siguientes enunciados es(son) correcto(s):

$I)\ x\in\Phi$

$II)\ x\in\{0°;90°\}$

$III)\ x\in\{240°;270°\}$

A) I y II B) I y III C) II y III D) Sólo II E) Sólo III

08 Determine el valor de $\overline{Z}$, si se cumple:

$$(\overline{Z}-1)^4=(\overline{Z}^2-2i\overline{Z}-1)^2$$

A) $\dfrac{1-ie^{ik\frac{\pi}{2}}}{1-e^{ik\frac{\pi}{2}}}$ *B)* $\dfrac{e^{ik\frac{\pi}{2}}}{1+ie^{ik\frac{\pi}{2}}}$ *C)* $3e^{ik\frac{\pi}{2}}$ *D)* $1-e^{ik\frac{\pi}{2}}$ *E)* $1+2e^{ik\frac{\pi}{2}}$

09 Determine el valor de "a" de manera que se cumpla $2^i = e^{aiLn8}$

A) $\frac{1}{5}$ *B)* $\frac{1}{4}$ *C)* $\frac{1}{3}$ *D)* $\frac{1}{2}$ *E)* 1

10 Determine el módulo del complejo:

$$Z=\left(1+e^{\frac{\pi i}{8}}\right)^2$$

A) $4Cos\frac{\pi}{8}$ *B)* $4Cos^2\frac{\pi}{8}$ *C)* $4Sen\frac{\pi}{16}$

D) $4Sen^2\frac{\pi}{16}$ *E)* $4Cos^2\frac{\pi}{16}$

11 Dados los números complejos:

$$Z_1=2e^{\frac{-\pi}{3}i};\ Z_2=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

determine el módulo de $\dfrac{Z_1}{Z_2}$.

A) 4 B) 3 C) 2 D) 1 E) 5

12 Sea Z en $\mathbb{C}$ tal que:

$$Z=(\sqrt{3}-1)+i(\sqrt{3}+1)$$

Determine el valor $\mathbb{R}e(Z^{12})$

A) 2^{12} *B)* -2^{16} *C)* 2^{18} *D)* -2^{18} *E)* 2^{15}

13 Si *45°* es el argumento del complejo; $a\in\mathbb{R}$.

$$Z=\left((1-a)\sqrt{1+i}+a(1+i)\right)$$

entonces su módulo es:

A) 1 *B)* 2 *C)* $\sqrt{2}$ *D)* $2\sqrt{2}$ *E)* $4\sqrt{2}$

14 Dados los siguientes enunciados:

I) El módulo del complejo:

$$Z=1+Cos74°+iSen74° \text{ es } \frac{12}{5}$$

II) El argumento del complejo:

$$Z=1+Cos20°+iSen20° \text{ es } 5°.$$

III) El módulo del complejo:

$$Z=2i(1+i)(2+i)(3+i) \text{ es } 20$$

¿cuál(es) es(son) correcto(s)?

A) Sólo I B) Sólo II C) Sólo III D) I y III E) II y III

15 Resuelva la ecuación:

$$3x^3-(7-5i)x^2+(3-8i)x+1+3i=0$$

si se sabe que una de sus raíces es real. Indique una de las raíces complejas no reales.

A) $-1-i$ B) $1+i$ C) $\frac{2i-1}{3}$ D) $\frac{1-2i}{3}$ E) $2-3i$

16 Determine una de las raíces de la ecuación:

$$Z^2+(2+i)Z-(13-13i)=0$$

A) $3+5i$ B) $1+2i$ C) $3-2i$ D) $1+i$ E) $2+3i$

17 Resuelva la siguiente ecuación:

$$iZ^4+4=0$$

Dar como respuesta la raíz cúbica en el *IV* cuadrante.

A) $1{,}3-0{,}6i$ B) $0{,}5-1{,}3i$ C) $0{,}6-2{,}1i$
D) $2{,}5-6i$ E) $0{,}1-0{,}1i$

18 Determine una raíz del polinomio complejo

$$P(Z)=2iZ^2+8Z-6i.$$

A) $1+2i$ B) $1-2i$ C) $3i$ D) $-3i$ E) $1+5i$

19 Si el polinomio complejo:

$P(x)=x^2+6x+2ix+a-bi$, a y $b\in\mathbb{R}$ tiene raíz cuadrada exacta, entonces calcule: $a+b$.

A) 2 B) 4 C) 6 D) 8 E) 10

20 Una de las raíces de la ecuación polinomial:

$(Z^2+2iZ-1)^2=(2Z+1)^4$ es:

A) $\dfrac{Cis\left(\frac{\pi}{2}\right)-i}{1+Cis\left(\frac{\pi}{2}\right)}$ B) $\dfrac{Cis\left(\frac{\pi}{2}\right)-i}{1+Cos\frac{\pi}{2}}$ C) $\dfrac{Cis\left(\frac{\pi}{2}\right)-i}{1-Cos\frac{\pi}{3}}$

D) $\dfrac{-1-i}{3}$ E) $\dfrac{Cis\left(\frac{\pi}{4}\right)-i}{1-Cos\frac{\pi}{4}}$

CLAVES

(PRIMERA PRACTICA)

01) A	02) B	03) A	04) E	05) A
06) D	07) D	08) D	09) E	10) B
11) E	12) D	13) C	14) C	15) D
16) B	17) C	18) B	19) B	20) B
21) E	22) B	23) B	24) A	25) D
26) E	27) C	28) C	29) A	30) A
01) E	02) D	03) C	04) D	05) C
06) E	07) C	08) C	09) D	10) B

SEGUNDA PRACTICA (COMPLEJOS)

01) B	02) E	03) C	04) D	05) A
06) B	07) E	08) C	09) B	10) D
11) A	12) A	13) C	14) D	15) A
16) B	17) C	18) B	19) D	20) C
01) A	02) B	03) A	04) C	05) A

TERCERA PRACTICA (COMPLEJOS)

01) C	02) B	03) D	04) D	05) D
06) D	07) E	08) E	09) C	10) B
11) C	12) B	13) C	14) B	15) A
16) C	17) B	18) D	19) A	20) D
01) A	02) D	03) E	04) A	05) B

CLAVES DE LA QUINTA PRACTICA

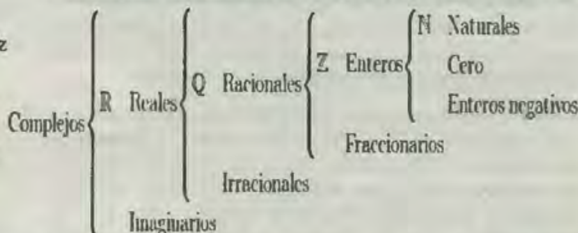
1)A	2)A	3)A	4)C	5)D	6)D	7)C	8)D	9)B	10)C
11)E	12)A	13)C	14)C	15)D	16)D	17)C	18)B	19)B	20)D

CLAVES DE LA SEXTA PRACTICA

1)E	2)B	3)A	4)D	5)D	6)A	7)C	8)B	9)D	10)C
11)D	12)A	13)D	14)E	15)B	16)A	17)E	18)B	19)A	20)C

CLAVES DE LA SEPTIMA PRACTICA

1)C	2)D	3)E	4)C	5)C	6)D	7)E	8)A	9)C	10)E
11)C	12)D	13)C	14)C	15)D	16)C	17)B	18)C	19)A	20)D



Los números complejos son la herramienta de trabajo del álgebra ordinaria, llamada álgebra de los números complejos, así como de ramas de las matemáticas puras y aplicadas como variable compleja, aerodinámica y electromagnetismo entre otras de gran importancia.

Contienen a los números reales y los imaginarios puros y constituyen una de las construcciones teóricas más importantes de la inteligencia humana. Los análogos del cálculo diferencial e integral con números complejos reciben el nombre de variable compleja o análisis complejo.

ECUACIONES LINEALES Y CUADRATICAS 15

OBJETIVOS :

* Adquirir habilidad y rapidez al resolver ecuaciones lineales, cuadráticas y otras.

**En el nivel elemental, hacer notar que de las ecuaciones polinomiales, la más importante, es la ecuación cuadrática; por su conformación característica y sus propiedades inherentes, bastante usuales en todas las ramas de la matemática.*

* En el álgebra funcional, el análisis del parámetro critico denominado discriminante ($\Delta = b^2 - 4ac$), es muy importante para entender el comportamiento y la variabilidad de la función cuadrática: $F(x) = ax^2 + bx + c;\ a \neq 0$

* En el caso de ecuaciones cuadráticas con coeficientes reales y discriminante negativo, aprenderemos a trabajar con raíces imaginarias y la riqueza teórica que encierra este tipo de numerales definidos en el conjunto $\mathbb{C}$, como ampliación necesaria del conjunto de los números reales.

INTRODUCCIÓN :

En la primera parte de este capítulo analizaremos expresiones de la forma :

$$x+3=0;\ 2x-1=9;\ 3(-4x+2)=-7;\ \frac{1}{3x+2}=4$$

Son ejemplos de ecuaciones lineales con una incógnita x.

Una ecuación plantea que dos expresiones algebraicas son iguales. Nos referimos a estas expresiones algebraicas como el lado izquierdo y el lado derecho de la ecuación.

El objetivo es encontrar valores de la incógnita para los que la ecuación es verdadera. Estos valores se llaman las soluciones o raíces de la ecuación , y el conjunto de todas las soluciones se llama el conjunto solución. Así, por ejemplo, 5 es una solución de la ecuación $2x - 1 = 9$, porque $2(5) - 1 = 9$, y -5 no es una solución porque $2(-5)-1 \neq 9$.

Las soluciones de una ecuación dependen del sistema númerico en el que se esté trabajando (o conjunto refencial). Así , la ecuación $x+3=0$ no tiene solución en los números naturales , pero sí en los enteros . En efecto $x=-3$ es una solución . La ecuación $3x=7$ no tiene solución en los enteros , pero sí en los racionales. En efecto, $x=\frac{7}{3}$ es una solución.

En nuestro estudio , salvo que se indique lo contrario, el conjunto referencial es el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$.

Una ecuación es una identidad si es verdadera para todo número real para el que ambos lados de la ecuación estén definidos. Por ejemplo, $x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$ es una identidad porque es verdadera para todos los números reales , es decir , todo número real es una solución de la ecuación.

La ecuación $x-2=5$ es verdadera únicamente si $x=7$. Al reemplazar las variable x por cualquier otro valor real , la expresión $x-2=5$ se convierte en una proposición falsa . Recuerde que la ecuación $x-2=5$ se llama una forma proposicional o una ecuación condicional.

Cuando se dice solucionar o resolver una ecuación, se quiere encontrar todas las soluciones o raíces de la ecuación.

Si una ecuación se puede reemplazar por otra ecuación más simple que tiene las mismas soluciones, entonces se dice que las dos ecuaciones son equivalentes y se ha avanzado en el proceso de encontrar las soluciones. Por ejemplo: $2x-1=9$ y $2x=10$ son ecuaciones equivalentes porque $\{5\}$ es el conjunto solución de ambas ecuaciones.

DEFINICIONES BÁSICAS

IGUALDAD :

Es la relación que nos indica que dos expresiones tienen el mismo valor en un cierto orden de ideas.

EJEMPLO :

Si A y B tienen el mismo valor, entonces decimos que:

$$\boxed{A=B} \text{ donde : } \begin{cases} A: \text{Primer miembro de la igualdad} \\ B: \text{Segundo miembro de la igualdad} \end{cases}$$

CLASES DE IGUALDADES

A) IGUALDAD ABSOLUTA :

Formalmente son identidades que se verifican para cualquier valor numérico de sus letras, en la cual están definidos.

EJEMPLOS:

* $(x+2)^3 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$
* $(x+a)(x-a) = x^2 - a^2$
* $(x+y)^2 + (x-y)^2 = 2(x^2 + y^2)$

B) IGUALDAD RELATIVA O ECUACIÓN

Se llaman también igualdades condicionales y se verifican para algunos valores de sus variables.

EJEMPLOS:

* $3x-2=x+2$; se verifica para $x=2$
* $x^3-6x^2+11x-6=0$
se verifica para $x=1 \wedge x=2 \wedge x=3$
* $x^2-1=0$; se verifica para $x=1$
* $x^4-16=0$; se verifica para $x=-2$
* $x^5+1=0$; se verifica para $x=-1$
* $x^7+x^6-2=0$; se verifica para $x=1$
* $\sqrt{x-2}+\sqrt{x+3}=5$; se verifica para $x=6$.

DEFINICIÓN DE ECUACIÓN

Es una igualdad entre dos expresiones matemáticas en la que al menos esté presente una variable que ahora recibirá el nombre de incógnita.

NOTACIÓN :

$$A\underbrace{(x,y,...z)}_{\text{Primer miembro}}=B\underbrace{(x,y,...z)}_{\text{Segundo miembro}}$$

* Donde :
 A y **B** : Expresiones matemáticas
 $x,y,....,z$: Incógnitas

* Transponiendo términos podemos llegar a lo siguiente:

$$\underbrace{A(x;y;z...)-B(x;y;z...)}_{F(x,y,z...)=0}=0$$

Forma General de una Ecuación

EJEMPLOS:

ECUACIONES ALGEBRAICAS :

* $x^2+x-2=0$; *Ecuación polinomial.*
* $\dfrac{4}{x}+\dfrac{1}{x-1}=0$; *Ecuación fraccionaria.*
* $\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x}=0$; *Ecuación irracional.*

ECUACIONES NO ALGEBRAICAS:

* $2^x+1-x^2=0$; *Ecuación exponencial.*
* $Logx+1=0$; *Ecuación logarítmica.*
* $Senx-\dfrac{1}{2}=0$; *Ecuación trigonométrica.*

SOLUCIÓN DE UNA ECUACIÓN

Una solución de una ecuación es una colección de valores (de las incógnitas), que al ser reemplazadas en la ecuación transforman a esta, en una proposición verdadera.

EJEMPLOS :

* Sea la ecuación $x^3=x$

Si $x=0 \Rightarrow 0^3=0$ .... *(VERDADERO)*

Si $x=1 \Rightarrow 1^3=1$ ....*(VERDADERO)*

Si $x=-1 \Rightarrow (-1)^3=-1$ ....*(VERDADERO)*

* Luego **0; 1 y -1** son soluciones de la ecuación.
* En cambio:

Si $x=2 \Rightarrow 2^3=2$ ....*(FALSO)*

Si $x=3 \Rightarrow 3^3=3$ ....*(FALSO)*

* Luego: **2**, ni **3** son soluciones de la ecuación.

OBSERVACIÓN :

Si la ecuación tiene una sola variable, la solución también se nombra raíz.

CONJUNTO SOLUCIÓN DE UNA ECUACIÓN (C.S.)

Es aquel conjunto formado por todas las soluciones de dicha ecuación. Si la ecuación no tiene solución, entonces su conjunto solución es el conjunto vacío ϕ.

EJEMPLO 1 :

$(x-3)^5(x+5)(x-7)^8=0$ vemos que las soluciones son -5; 3; 7; entonces su **C.S.={-5; 3; 7}**

* Para determinar el conjunto solución de una ecuación se utiliza el siguiente teorema.

$$\boxed{ab=0 \Leftrightarrow a=0 \wedge b=0}$$

EJEMPLO 2 :

* De: $(x-3)(x+2)(x-5i)=0$

$$x-3=0 \vee x+2=0 \vee x-5i=0$$
$$x=3 \qquad x=-2 \qquad x=5i$$

* Entonces : **C.S.={-2; 3; 5i}**

OBSERVACIONES :

* En caso la ecuación no presenta soluciones entonces el conjunto solución será el conjunto nulo o vacío.

Así: $C.S.=\phi \vee C.S.=\{\ \}$

* En caso la ecuación presente infinitas soluciones entonces el conjunto de valores en el cual existe la ecuación será el que se denomina universo.

* No olvidar que resolver una ecuación significa determinar el conjunto solución.

RESOLUCIÓN DE UNA ECUACIÓN

Resolver una ecuación significa encontrar su conjunto solución o en todo caso demostrar que la ecuación no se cumple para ningún valor.

TEOREMA:

Sean $F(x) \wedge G(x)$ expresiones matemáticas si $F(x) \times G(x) = 0$

$$\text{Entonces se cumple} \begin{cases} F(x)=0 \wedge G(x) \neq 0 \\ \vee \\ F(x) \neq 0 \wedge G(x)=0 \\ \vee \\ F(x)=0 \wedge G(x)=0 \end{cases}$$

EJEMPLO 1 :

Resolver :

$$(x-2)(x-3)=0 \Rightarrow \begin{cases} x-2=0 \wedge x-3 \neq 0 \\ \vee \\ x-2 \neq 0 \wedge x-3=0 \\ \vee \\ x-2=0 \wedge x-3=0 \end{cases}$$

$$\text{* Luego se tiene : } \begin{cases} x=2 \wedge x \neq 3 \rightarrow x=2 \\ x=2 \wedge x=3 \rightarrow x=3 \\ x=2 \wedge x=3 \rightarrow x \in \phi \end{cases}$$

EJEMPLO 2 :

$(x+1)(x-2)(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{5})=0$

MÉTODO PRÁCTICO :

Este tipo de ecuaciones con una sola incógnita se resuelve igualando a cero cada factor.

- $(x+1)=0 \rightarrow x=-1$
- $(x-2)=0 \rightarrow x=2$
- $(x+\sqrt{3})=0 \rightarrow x=-\sqrt{3}$
- $(x-\sqrt{5})=0 \rightarrow x=\sqrt{5}$

$\rightarrow C.S.\{-1; 2; -\sqrt{3}; \sqrt{5}\}$

CLASIFICACIÓN DE LAS ECUACIONES

Existen varias formas de clasificar a una ecuación :

A) ATENDIENDO AL GRADO :

Las ecuaciones pueden ser, de primer grado, segundo grado, de tercer grado, etc.

EJEMPLOS :

I) $5x+3=0$......................(1°)

II) $3x^2-11x-5=0$..........(2°)

III) $9x^3-x-2=0$..............(3°)

B) POR EL NÚMERO DE INCÓGNITAS :

Las ecuaciones pueden ser, de una incógnita, de dos incógnitas, de tres incógnitas, etc.

EJEMPLOS:

I) De una incógnita: $5x^4-x^2+3=0$

II) De dos incógnitas:

$$\begin{cases} 3x-5y=-2 \text{.................(I)} \\ 4x-3y=\ 7 \text{.................(II)} \end{cases}$$

C) ATENDIENDO A SUS COEFICIENTES :

Las ecuaciones pueden ser númericas o literales.

EJEMPLOS :

a) Númerica : $2x^2-6x-7=0$

b) Literal : $ax^4-bx^3+c=0$

D) ATENDIENDO A SU ESTRUCTURA ALGEBRAICA :

Las ecuaciones pueden ser:

I) ECUACIONES POLINOMIALES :

$$2x^4-x^3+3x^2-x-3=0$$

II) ECUACIONES FRACCIONARIAS :

$$\frac{2x}{x^2-1}-\frac{5}{x^4+3}=0$$

III) ECUACIONES IRRACIONALES :

$$\sqrt{x^3-1}-\sqrt{2x-3}=0$$

IV) ECUACIONES TRASCENDENTES :

- $2^{x-3}+2^{x-4}=12$
- $Log_x(x-2)-5x+3=0$

E) ATENDIENDO A SU SOLUCIÓN :

Las ecuaciones pueden ser compatibles o incompatibles.

I) ECUACIONES COMPATIBLES :

Son aquellas que poseen al menos una solución. Estas pueden ser :

1) DETERMINADAS :

Una ecuación es compatible determinada, si es posible determinar la cantidad de sus soluciones, o tiene un número limitado de elementos de su conjunto solución.

EJEMPLOS :

- $x+3=5$ tiene $C.S.=\{2\}$

$\Rightarrow$ Ecuación compatible determinada

- Sea: $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)=0$

$\rightarrow C.S.=\{1;2;3;4\}$

2) ECUACIÓN COMPATIBLE INDETERMINADA :

Es aquella que tiene un número ilimitado de elementos en su conjunto solución.

EJEMPLOS :

$*(x-3)=x-3$

$\rightarrow x=x$

$\rightarrow 0x=0$

$\Rightarrow$ Ecuación compatible indeterminada pues tiene infinitas soluciones.

* Sea: $x^0=1$

$$\rightarrow C.S.=\{1;\ 2;\ 3;\ \sqrt{2};...\}$$

II) ECUACIONES INCOMPATIBLES (INCONSISTENTES)

Es aquélla que no tiene ningún elemento en su conjunto solución, es decir su conjunto solución es el vacío (C.S. = ϕ)

EJEMPLOS :

* Sea : $0x=2 \rightarrow C.S=\phi$

$\Rightarrow$ Ecuación incompatible pues no tiene solución.

* $\dfrac{5}{x-3}+x=3+\dfrac{5}{x-3}$

* $\dfrac{1}{x-3}=0$

F) ECUACIONES EQUIVALENTES :

Dos o más ecuaciones son equivalentes si están en una misma incógnita y tienen el mismo conjunto solución.

EJEMPLOS :

$I)\ \dfrac{x}{2}+\dfrac{2x}{3}=14 \Rightarrow C.S.=\{12\}$

$II)\ 5x-36=2x \Rightarrow C.S.=\{12\}$

* Luego, las ecuaciones anteriores son equivalentes, puesto que tienen el mismo conjunto solución.

OBSERVACIÓN :

Si las ecuaciones son equivalentes no necesariamente deben ser del mismo grado.

* Si a ambos miembros de una ecuación les sumamos un mismo término resulta otra ecuación equivalente a la primera.

Ecuaciones Equivalentes

$$\begin{cases} 8x+2=6 \\ \qquad \rightarrow \textit{Solución}: x=1/2 \\ 8x+\cancel{2}+(-\cancel{2})=6+(-2)=8x=4 \\ \qquad \rightarrow \textit{Solución}: x=1/2 \end{cases}$$

Observa que 2 ha pasado del primer miembro al segundo con signo cambiado.

Por lo tanto, en una ecuación se puede pasar un término de un miembro a otro cambiándole de signo. Esta operación se conoce como transposición de términos.

* Si a ambos miembros de una ecuación los multiplicamos por un número distinto de cero, resulta otra ecuación equivalente a la primera.

Si $K\neq 0$ es un número real, la ecuación

$$KE_1(x)=KE_2(x) \Leftrightarrow E_1(x)=E_2(x)$$

Ecuaciones Equivalentes

$$\begin{cases} 2x=16 & \rightarrow \textit{Solución } x=8 \\ \left(\dfrac{1}{\cancel{2}}\right)\cancel{2}x=\left(\dfrac{1}{\cancel{2}}\right)\overset{8}{\cancel{16}} & \rightarrow \textit{Solución } x=8 \end{cases}$$

Observa que hemos multiplicado ambos miembros de la ecuación por $\left(\dfrac{1}{2}\right)$, es decir, hemos dividido entre 2.

ECUACIÓN DE PRIMER GRADO

Denominada también ECUACIÓN LINEAL, es aquella ecuación polinomial de una incógnita, que se reduce a la forma general:

$ax+b=0;\ a\neq 0$

Cuya solución o raíz es: $\boxed{x=-\dfrac{b}{a}}$

DISCUSIÓN DE LA ECUACIÓN: $ax+b=0$

PRIMER CASO: Si $a\neq 0 \wedge b\neq 0$

La raíz $x=-b/a$ es única. y la ecuación resulta

COMPATIBLE DETERMINADA de primer grado, de la forma: $ax+b=0$

SEGUNDO CASO : Si $a\neq 0 \wedge b=0$

La raíz $x=0$ es única y la ecuación también resulta *COMPATIBLE DETERMINADA* de primer grado, de la forma: $ax+0=0$

TERCER CASO : Si $a=0 \wedge b=0$

La ecuación se verifica para todo valor que toma la incógnita «x»; esto quiere decir que, la ecuación es *COMPATIBLE INDETERMINADA* de primer grado, de la forma: $0x+0=0$

CUARTO CASO : Si $a=0 \wedge b\neq 0$

La ecuación no se verifica para ningún valor de la incógnita; lo cual indica que, la ecuación es *INCOMPATIBLE* de primer grado de la forma: $0x+b=0$

* La cual se reduce a: $b=0$ y esto contradice la condición de este caso.

* Para nuestro própósito, nos limitaremos al estudio de las ecuaciones compatibles determinadas de primer grado de la forma:

$$ax+b=0,\ a\neq 0$$

RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DE PRIMER GRADO

Ya sabes que resolver una ecuación es encontrar el conjunto solución de la variable que hace que el enunciado abierto sea verdadero.

Para ello se despeja la variable. Despejar una variable significa dejarla sola en uno de los miembros de la ecuación y los valores numéricos en el otro.

EJEMPLO 1 :

* Vamos a resolver la ecuación:

$$2-[x+3x-(x+6)-3]=3$$

RESOLUCIÓN :

Eliminamos los paréntesis y los corchetes.

$$\rightarrow 2-[x+3x-x-6-3]=3$$

$$\rightarrow 2-x-3x+x+6+3=3$$

$$\rightarrow \cancel{x}-3x\cancel{x}=\cancel{3}-2-6-\cancel{3}$$

Transponemos términos y reducimos los semejantes.

$$\rightarrow -3x=-8 \rightarrow x=2\frac{2}{3}$$

$$\rightarrow C.S.(x)=\left\{2\frac{2}{3}\right\}$$

EJEMPLO 2 :

Resolver:

$$2(x-1)(x-2)-3(x+1)=(x-4)(2x-3)+1$$

RESOLUCIÓN :

Efectuamos las multiplicaciones en ambos miembros.

$$2(x-1)(x-2)-3(x+1)=(x-4)(2x-3)+1$$

$$\rightarrow 2(x^2-3x+2)-3x-3 \quad =2x^2-11x+12+1$$

$$\rightarrow 2x^2-6x+4-3x-3 \quad =2x^2-11x+13$$

Reducimos los términos semejantes y aplicamos la propiedad cancelativa

$$2x^2-6x+4-3x-3 \quad =2x^2-11x+13$$

$$\rightarrow \cancel{2x^2}-9x+1 \quad =\cancel{2x^2}-11x+13$$

$$\rightarrow -9x+1 \quad =-11x+13$$

Despejamos la variable y operamos.

$$-9x+11x=13-1$$

$$\rightarrow 2x=12 \rightarrow x=\frac{12}{2} \rightarrow x=6$$

* El conjunto solución de la ecuación es {6}.

ECUACIONES CON DENOMINADORES

En estas ecuaciones se suprimen los denominadores multiplicando los dos miembros de la ecuación por el *M.C.M.* de los denominadores. Así se obtiene una ecuación equivalente a la primera, pero sin denominadores.

EJEMPLO 3 :

Resolver: $\frac{x+1}{8}-\frac{x-1}{6}+\frac{x+3}{5}=2$

RESOLUCIÓN :

* Primero calculamos: $MCM\ (8;\ 6;\ 5)=120$
* Multiplicamos ambos miembros por **120**.

$$120\left(\frac{x+1}{8}-\frac{x-1}{6}+\frac{x+3}{5}\right)=2(120)$$

$$\rightarrow 15x+15-20x+20+24x+72=240$$

* Resolvemos como en los casos anteriores:

$$15x-20x+24x=240-15-20-72$$

$$\rightarrow 19x=133 \rightarrow x=\frac{133}{19}$$

EJEMPLO 4 :

Resolver $\frac{5x}{x+3}-3=\frac{1}{x+3}$

RESOLUCIÓN :

* El *M.C.M* de los denominadores es $x+3$. Al multiplicar ambos lados de la ecuación por $x+3$ para eliminar los denominadores, se obtiene:

$$(x+3)\left(\frac{5x}{x+3}-3\right)=(x+3)\left(\frac{1}{x+3}\right)$$

$$\rightarrow 5x-3(x+3)=1 \rightarrow 5x-3x-9=1$$

$$\rightarrow 2x-9=1 \rightarrow 2x=10 \rightarrow x=5$$

OBSERVACIONES :

Se dijo antes que cuando se multiplican ambos lados de una ecuación por cualquier número diferente de *0*, resulta una ecuación equivalente. ¿Qué sucede si se multiplica una ecuación por una expresión que contiene una variable o incógnita?

En el ejemplo anterior, este procedimiento funcionó y dio una solución. Pero esto no siempre sucede porque la respuesta que se obtiene puede dar un denominador cero cuando se sustituye en la ecuación original. Tenga en cuenta entonces:

Cuando se multiplica o divide ambos lados de una ecuación por una expresión que contiene la incógnita, la ecuación resultante puede no ser equivalente a la ecuación original. La respuesta

obtenida se debe sustituir en la ecuación original para verificar si es o no solución.

EJEMPLO 5 :

$$\frac{2x}{x-3}+1=\frac{6}{x-3}$$

RESOLUCIÓN :

* El ***M.C.M.*** de los denominadores es $x-3$

$$\frac{2x}{x-3}+1=\frac{6}{x-3}$$

$\rightarrow (x-3)\left(\frac{2x}{x-3}+1\right)=(x-3)\left(\frac{6}{x-3}\right)$

$\rightarrow (x-3)\times\frac{2x}{x-3}+(x-3)\times 1=(x-3)\frac{6}{x-3}$

$\rightarrow 2x+x-3=6 \rightarrow 3x-3=6$

$\rightarrow 3x=9 \rightarrow x=3$

* Al sustituir $x=3$ en la ecuación original, se obtienen denominadores ***0***. Luego, la ecuación dada no tiene solución. El conjunto solución es ϕ.

EJEMPLO 6 :

Resolver: $\frac{1}{x+1}-\frac{2}{x-1}=\frac{3}{x^2-1}$

RESOLUCIÓN :

* Hallemos el ***M.C.M.*** de $\left[x+1; x-1; (x^2-1)\right]$ es:

M.C.M $=(x+1)(x-1)$.

* Multiplicamos los dos miembros por $(x+1)(x-1)$.

$$(x+1)(x-1)\left[\frac{1}{x+1}-\frac{2}{x-1}\right]=\left(x^2-1\right)\left(\frac{3}{x^2-1}\right)$$

$\rightarrow (x-1)-2(x+1)=3$

* Efectuamos el producto indicado, suprimimos el paréntesis y operamos.

$x-1-2x-2=3 \rightarrow x-2x=3+1+2$

$\rightarrow x=-6;\ C.S.=\{-6\}$

EJEMPLO 7 :

Resolver: $2(x+5)-\frac{x}{3}=x+12$

RESOLUCIÓN :

$6(x+5)-x=3(x+12)$..... Suprimimos el denominador.

$\rightarrow 6x+30-x=3x+36$...... Suprimimos los signos de agrupación.

$\rightarrow 6x-x-3x=36-30$...... Transponemos términos.

$\rightarrow 2x=6$.............................. Reducimos términos semejantes

$\rightarrow x=\frac{6}{2}$.................................Despejamos x

$\rightarrow x=3$...................... Valor de la raíz o solución

EJEMPLO 8 :

Resolver : $\frac{2(x+1)}{3}+\frac{3(x+2)}{2}=2(x+2)$

RESOLUCIÓN :

* Efectuando :

$$\frac{4(x+1)+9(x+2)}{6}=2(x+2)$$

$\rightarrow 4x+4+9x+18=12(x+2)$

$\rightarrow 13x+22=12x+24 \rightarrow x=2 \rightarrow C.S.=\{2\}$

EJEMPLO 9 :

Resolver:

$$\frac{1}{x^2+3x-28}-\frac{1}{x^2+12x+35}=\frac{3}{x^2+x-20}$$

RESOLUCIÓN :

* Factorizando los denominadores:

$$\frac{1}{(x+7)(x-4)}-\frac{1}{(x+7)(x+5)}=\frac{3}{(x+5)(x-4)}$$

* ***M.C.M.*** $=(x+7)(x-4)(x+5)$

* Operando : $(x+5)-(x-4)=3(x+7)$

$\rightarrow \not{x}+5-\not{x}+4=3x+21$

$\rightarrow x=-4$

EJEMPLO 10 :

Calcular el valor de «x» en :

$$x-\sqrt{x^2-21}=7$$

RESOLUCIÓN :

* Transponiendo convenientemente :

$$x-7=\sqrt{x^2-21}$$

* Elevando al cuadrado ambos miembros:

$$x^2-14x+49=x^2-21$$

$\rightarrow 70=14x \rightarrow x=5$

* Reemplazando este valor en la ecuación inicial se observa que es absurdo, es decir es una ecuación incompatible.

EJEMPLO 11 :

Se le preguntó por su edad a Celia y contesta «tomen ***5*** veces los años que tendré dentro de ***4*** años y réstenle ***5*** veces los años que tenía hace ***4*** años y

resultará exactamente mi edad actual».

RESOLUCIÓN :

Tenía	Tengo	Tendré
$x-4$	x	$x+4$

* Luego siguen el enunciado:

$$5(x+4)-5(x-4)=x$$

$\rightarrow \cancel{5x}+20-\cancel{5x}+20=x \rightarrow x=40$ **años**

ECUACIONES LITERALES :

Las ecuaciones literales de primer grado tienen como coeficientes letras diferentes a la de la variable.

EJEMPLO 12 :

Resolver: $\dfrac{x-b}{a}=\dfrac{x}{b}$

RESOLUCIÓN :

* Multiplicamos por ab para eliminar denominadores :

$$\frac{\cancel{a}b(x-b)}{\cancel{a}}=\frac{a\cancel{b}(x)}{\cancel{b}} \rightarrow b(x-b)=ax$$

$\rightarrow bx-b^2=ax \rightarrow bx-ax=b^2$

$\rightarrow x(b-a)=b^2 \rightarrow x=\dfrac{b^2}{b-a}$

EJEMPLO 13 :

De la ecuación lineal consistente:

$$\frac{mx}{3}-5=4x+\frac{m}{2}$$

Qué se puede afirmar respecto del parámetro «m», si esta admite solución única.

RESOLUCIÓN :

* Por la transposición de términos :

$$\frac{mx}{3}-4x=\frac{m}{2}+5$$

* Efectuando operaciones de reducción :

$$\left(\frac{m-12}{3}\right)x=\frac{m+10}{2}$$

* De donde: $\dfrac{m-12}{3}\neq 0 \rightarrow m\neq 12$

* Es decir, para cualquier valor de «m» distinto de 12, la ecuación admite una única solución, la cual es :

$$\rightarrow x=\frac{3}{2}\left(\frac{m+10}{m-12}\right)$$

EJEMPLO 14 :

De la ecuación lineal mostrada :

$$\frac{(a+1)x}{3}-\frac{b}{4}=\frac{3x}{2}-\frac{b-1}{6}$$

qué se deduce, si ésta admite soluciones.

RESOLUCIÓN :

* Transponiendo términos , se tiene :

$$\frac{(a+1)x}{3}-\frac{3x}{2}=\frac{b}{4}-\frac{b-1}{6}$$

$$\rightarrow \left(\frac{a+1}{3}-\frac{3}{2}\right)x=\frac{3b-2(b-1)}{12}$$

* Efectuando : $\left(\dfrac{2a-7}{6}\right)x=\dfrac{b+2}{12}$

* Simplificando : $(2a-7)x=\dfrac{b+2}{2}$

* Si la ecuación es indeterminada , debe tomar la forma : $0x=0$

* Por ello : $2a-7=0 \rightarrow a=7/2$

$b+2=0 \rightarrow b=-2$

EJEMPLO 15 :

Qué condiciones se debe establecer para que la ecuación algebraica :

$\dfrac{x-p+1}{5}+\dfrac{x+q-2}{4}=\left(\dfrac{p+q}{10}\right)x$ sea compatible.

RESOLUCIÓN :

* Multiplicando m.a.m. por el **M.C.M. = 20**

$$4(x-p+1)+5(x+q-2)=2(p+q)x$$

* Reduciendo se tiene :

$$9x-4p+5q-6=(2p+2q)x$$

* Por la transposición de términos :

$$\underbrace{(9-2p-2q)}_{=0}x=\underbrace{(6+4p-5q)}_{\neq 0}$$

* Si no acepta solución alguna, la igualdad debe ser ABSURDA . Por ello se debe cumplir :

$$9-2p-2q=0 \wedge 6+4p-5q\neq 0$$

$$9=2(p+q) \wedge 6+4(p+q)-9q\neq 0$$

$\rightarrow p+q=\dfrac{9}{2} \wedge q\neq\dfrac{8}{3}$

* De donde se deduce que : $p\neq\dfrac{11}{6}$

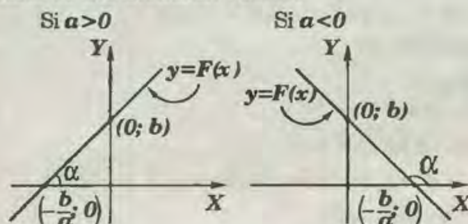
SOLUCIÓN GRÁFICA DE LA ECUACIÓN COMPATIBLE DETERMINADA DE COEFICIENTES REALES : $Ax+B=0$

Dada la función real de variable real definida por la regla de correspondencia :

$$y = F_{(x)} = ax + b;\ a \neq 0$$

Cuya representación gráfica en el plano cartesiano es una LÍNEA RECTA , obtenida al unir puntos cuyas coordenadas $(x;\ y)$ verifican la condición: $y = F_{(x)}$. Donde la constante *«a»* es la pendiente de la recta, cuyo valor resulta de $a = Tan\alpha$, y la constante *«b»* es la ordenada del punto de intersección de la recta con el eje de ordenadas.

* De acuerdo al valor de la pendiente, esta recta se inclina de dos maneras: veamos



* En la regla de correspondencia: $y = ax + b$

Si $y = 0$, se obtiene $ax+b=0$ (Ecuación de *1er* grado) donde $x = -b/a$ (Raíz de la ecuación); y estos valores dan origen al par ordenado $\left(-\frac{b}{a};\ 0\right)$, que representa al punto de intersección de la recta $y = F(x)$ con el eje de abcisas.

EJEMPLO 16 :

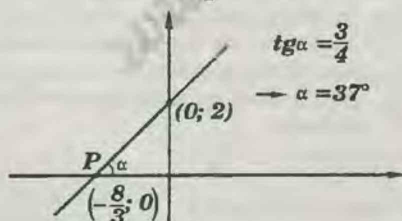
Resolver gráficamente la ecuación :

$$\frac{3}{4}x + 2 = 0$$

RESOLUCIÓN :

* Esbozemos la gráfica de la función lineal:

$$y = F_{(x)} = \frac{3}{4}x + 2 = 0$$



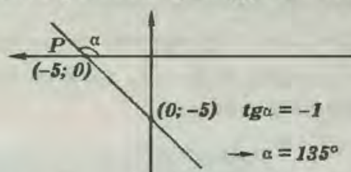
* Observar que la abcisa del punto **P**, es la solución de la ecuación : $x = -\dfrac{8}{3}$

EJEMPLO 17 :

Resolver gráficamente la ecuación : $-x-5=0$

RESOLUCIÓN :

Esbozando la gráfica de $y = F(x) = -x-5$ resulta:



* La abscisa del punto **P** es la solución de la ecuación dada: $x = -5$

ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

Llamadas también ***«ecuaciones cuadráticas»***. Son aquellas ecuaciones que pueden reducirse a la forma:

$$\boxed{ax^2 + bx + c = 0};\ (a \neq 0)$$

donde:

ax^2 = Término cuadrático
bx = Término lineal
c = Término independiente

a, b y c son los coeficientes respectivos de sus términos.

EJEMPLOS :

* $x^2 - 4x - 5 = 0$
* $4x^2 + 4x + 1 = 0$
* $6x^2 - x - 2 = 0$
* $x^2 + x + 3 = 0$
* $x^2 - 6x + 9 = 0$
* $2x^2 - 5x + 5 = 0$

OBSERVACIÓN :

* Las raíces de una ecuación cuadrática están dadas por la siguiente fórmula general:

$$\boxed{x_{1;2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

* Donde: "$b^2 - 4ac$" es el ***discriminante*** de la ecuación y se denota así:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

* Para hallar las raíces de una ecuación cuadrática se recomienda primero intentar factorizar por el método de aspa simple.

RESOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO

I) POR FACTORIZACIÓN (ASPA SIMPLE) :

El empleo de la factorización para resolver ecuaciones de segundo grado se basa en la siguiente

propiedad:

El producto de dos o más factores es cero, si cualquiera de los factores es cero.

Y se aplicará si el discriminante es un cuadrado perfecto $(\Delta \in \{0; 1; 4; 9; ....\})$, para su solución aplicaremos el aspa simple.

EJEMPLO 1 :

Resolver : $2x^2 + x - 3 = 0$

RESOLUCIÓN :

* Factorizando por aspa simple :

$$2x^2+x-3=0$$
$$\begin{matrix} 2x & & 3 \\ & \times & \\ x & & -1 \end{matrix}$$

* Entonces resulta :

$(2x+3)(x-1)=0$.... Al aplicar la propiedad si $ab=0$, entonces $a=0$ ó $b=0$.

$\rightarrow 2x+3=0 \vee x-1=0$

$\rightarrow x=-\dfrac{3}{2} \vee x=1$

$\rightarrow C.S.=\left\{-\dfrac{3}{2}; 1\right\}$

* Las raíces de la ecuación son :

$$x_1 = -\frac{3}{2}; \quad x_2 = 1$$

EJEMPLO 2 :

Resolver : $10x^2 + 11x - 6 = 0$

RESOLUCIÓN :

* Para esta ecuación : $a = 10, b = 11$ y $c = -6;$ el discriminante es :

$$\Delta=(11)^2-4(10)(-6)=361=19^2$$

* Como , **361** es un cuadrado perfecto la ecuación se puede factorizar :

$$10x^2+11x-6=0$$
$$\begin{matrix} 2x & & 3 & \rightarrow 15x \\ & \times & & \\ 5x & & -2 & \rightarrow \underline{-4x} \\ & & & 11x \end{matrix}$$

* Con lo cual : $(2x+3)(5x-2)=0$

* Recordemos que :

$$\boxed{Si: a \times b = 0 \Leftrightarrow a=0 \vee b=0}$$

* En nuestro caso: $x=\dfrac{-3}{2} \vee x=\dfrac{2}{5}$

NOTA :

En la ecuación cuadrática se cumple :

2 raíces iguales $\leftrightarrow$ 1 solución

2 raíces diferentes $\leftrightarrow$ 2 soluciones.

MÁS EJEMPLOS :

1) $x^2+10x-39=0$

$\rightarrow (x+13)(x-3)=0$

$\rightarrow x+13=0$ ó $x-3=0 \rightarrow x=-13$ ó $x=3$

$\rightarrow C.S.=\{-13; 3\}$

2) $x^2+4x=0$

$\rightarrow x(x+4)=0$

$\rightarrow x=0$ ó $x+4=0 \rightarrow x=0$ ó $x=-4$

$\rightarrow C.S.=\{0; -4\}$

3) $x^2=5$

$\rightarrow x^2-5=0$

$\rightarrow (x+\sqrt{5})(x-\sqrt{5})=0$

$\rightarrow x+\sqrt{5}=0$ ó $x-\sqrt{5}=0 \rightarrow x=-\sqrt{5}$ ó $x=\sqrt{5}$

$\rightarrow C.S.=\{\sqrt{5}; -\sqrt{5}\}$

OBSERVACIÓN :

$$\boxed{Si: x^2=5 \Rightarrow x=\pm\sqrt{5}}$$

4) $x^2+36=0$

$\rightarrow x^2=-36$

$\rightarrow x=\pm\sqrt{-36}=\pm 6\sqrt{-1}$

$\rightarrow x=\pm 6i$

$\rightarrow C.S.=\{6i; -6i\}$

5) $x^2+2x+1=0$

* Se trata de un trinomio cuadrado perfecto, luego:

$$(x+1)^2=0 \rightarrow x+1=0$$

$\rightarrow x=-1$....(solución única o raíz doble)

II) POR FÓRMULA CUADRÁTICA :

Cuando no sea fácilmente factorizable, se puede generalizar el método para llegar a una fórmula que facilite la resolución de cualquier ecuación de segundo grado. Esta fórmula se conoce con el nombre de *fórmula de la ecuación de segundo grado o fórmula cuadrática.*

DEDUCCIÓN :

Sea: $ax^2+bx+c=0; \; a \neq 0$

* Multiplicando por $4a$, con el objetivo de completar cuadrados ; así :

$$4a^2x^2+4abx+4ac=0$$

* Transponiendo: $4a^2x^2+4abx=-4ac$

* Sumando b^2 en ambos miembros, para formar en el primero un trinomio cuadrado perfecto :

$$4a^2x^2+4abx+b^2=b^2-4ac$$

* Luego : $(2ax+b)^2=b^2-4ac$
* Extrayendo la raíz cuadrada :

$$2ax+b=\pm\sqrt{b^2-4ac}$$

* Despejando la incógnita «x», resulta :

$$\boxed{x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$$

* Que viene a ser la solución general de la ecuación cuadrática.

$\rightarrow C.S.=\left\{\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a};\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right\}$

DISCRIMINANTE O VARIANTE :

Se denomina así a la cantidad subradical de la solución general: b^2-4ac, y se le simboliza por la letra griega mayúscula "Δ"; es decir :

$$\boxed{\Delta=b^2-4ac}$$

RAÍCES DE LA ECUACIÓN CUADRÁTICA:

De la solución general, se obtienen:

$$\boxed{x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}} \quad ó \quad \boxed{x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}}$$

* Para conocer los valores de estas raíces, a partir de la ecuación polinomial:

$$ax^2+bx+c=0;\ a^10$$

* Se reemplazan directamente los valores de los parámetros «a», «b» y «c». Pero, si el polinomio cuadrático se puede factorizar fácilmente, entonces se realiza este procedimiento, obteniéndose dos factores lineales, para luego igualar a cero cada uno de estos.

EJEMPLO 1 :

Resolver : $x^2-2x-4=0$

RESOLUCIÓN :

* Como no es factorizable en Q, lo más razonable sería aplicar la fórmula, primero vemos que:

$a=1;\ b=-2;\ c=-4$

* Entonces:

$$x=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4(1)(-4)}}{2(1)}=\frac{2\pm2\sqrt{5}}{2}$$

$\Rightarrow x_1=1+\sqrt{5} \vee x_2=1-\sqrt{5}$

EJEMPLO 2 :

Resuelva $2x^2-3x-1=0$

RESOLUCIÓN :

* Vemos que : $a=2,\ b=-3,\ c=-1$
* Reemplazando en la fórmula :

$$x_{(1;2)}=\frac{3\pm\sqrt{(-3)^2-4(2)(-1)}}{2(2)}=\frac{3\pm\sqrt{17}}{4}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1=\dfrac{3+\sqrt{17}}{4} \\ x_2=\dfrac{3-\sqrt{17}}{4} \end{cases}$$

* Entonces: $C.S.=\left\{\frac{3+\sqrt{17}}{4};\frac{3-\sqrt{17}}{4}\right\}$

EJEMPLO 3 :

Resolver la ecuación $2x^2+14x+25=0$, mediante el uso de la fórmula de la ecuación de segundo grado.

RESOLUCIÓN :

* De: $2x^2+14x+25=0$
* Por tanto, $a=2,\ b=14\ y\ c=25$

$$x=\frac{-14\pm\sqrt{(14)^2-4(2)(25)}}{2(2)}=\frac{-14\pm\sqrt{-4}}{4}$$

$\rightarrow x=\frac{-7\pm i}{2}$

$\rightarrow C.S.=\left\{\frac{-7+i}{2};\frac{-7-i}{2}\right\}$

DISCUSIÓN DE LAS RAÍCES DE LA ECUACIÓN CUADRÁTICA CON COEFICIENTES REALES

$ax^2+bx+c=0$ La naturaleza de las raíces de la ecuación:

$$ax^2+bx+c=0;a,b,c\in\mathbb{R}\wedge a\neq0$$

Viene caracterizada por el valor que asume el discriminante Δ, es decir :

CASO I:

Si $\boxed{\Delta>0}$ las raíces serán reales y diferentes. La ecuación presenta dos soluciones.

EJEMPLO :

Resolver : $3x^2-5x+1=0$

RESOLUCIÓN :

* Cálculo del discriminante $(a=3;\ b=-5;\ c=1)$:

$$\Delta=(-5)^2-4(3)(1)=13 \text{ donde: } \Delta>0$$

* Luego , reemplazando en la solución general:

$$x=\frac{-(-5)\pm\sqrt{13}}{2(3)}$$

* De aquí: $x_1 = \frac{5+\sqrt{13}}{6}$ ó $x_2 = \frac{5-\sqrt{13}}{6}$

* Las raíces son reales y diferentes.

CASO II :

Si $\boxed{\Delta = 0}$ las raíces son iguales $(x_1 = x_2)$ y reales. La ecuación posee solución única. Además ax^2+bx+c, es un trinomio cuadrado perfecto.

EJEMPLO :

Resolver : $4x^2 - 12x + 9 = 0$

RESOLUCIÓN :

* Análogamente : $\Delta = (-12)^2 - 4(4)(9) = 0$

* En la solución general : $x = \frac{-(12) \pm \sqrt{0}}{2(4)}$

* De aquí : $x_1 = x_2 = \frac{3}{2}$

CASO III:

Si $\boxed{\Delta < 0}$ las raíces son complejas no reales y conjugadas. $(x_1 = u + vi \Leftrightarrow x_2 = u - vi)$; $v \neq 0$

EJEMPLO :

Resolver : $x^2 - 2x + 2 = 0$

RESOLUCIÓN :

* De igual manera: $\Delta = (-2)^2 - 4(1)(2) = -4$

* donde: $\Delta < 0$, y en la solución general:

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{-4}}{2(1)}$$

* De aquí: $x_1 = 1 + i$ ó $x_2 = 1 - i$

* Las cuales son imaginarias y conjugadas

EJERCICIO :

Hallar los valores de «k» en la ecuación:

$(k+1)x^2 - (5k-3)x + 9 = 0$ sabiendo que sus raíces son iguales.

RESOLUCIÓN :

* Desde que las raíces son iguales entonces: $\Delta = b^2 - 4ac = 0$, es decir:

$[-(5k-3)]^2 - 4(k+1)(9) = 0$ desarrollando, obtenemos la ecuación:

$$25k^2 - 66k - 27 = 0$$

$$\begin{matrix} 25k & 9 \\ k & -3 \end{matrix}$$

* De donde:

$$(25k+9)(k-3) = 0 \rightarrow \begin{cases} k = 3 \\ \vee \\ k = \frac{9}{25} \end{cases}$$

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LAS RAÍCES DE LA ECUACIÓN CUADRÁTICA CON COEFICIENTES REALES

Sean las funciones: $y = F(x) = ax^2 + bx + c;\ a \neq 0$
$y = G(x) = 0$

* Si: $F(x) = G(x)$..................(I)

* Se obtiene la ecuación cuadrática:

$$ax^2 + bx + c = 0;\ a \neq 0$$

* De la igualdad de funciones *(I)*, se deben calcular aquellos «x» (x_1 y x_2) para los cuales las ordenadas de ambas funciones (y_1 y y_2) son las mismas, es decir, geométricamente, hallar los puntos de intersección de las gráficas de estas funciones, como se muestra en la figura:

donde $y_1 = y_2 = 0$ y $x_1 \neq x_2$

Siendo las abcisas de los puntos de intersección $(x_1; 0)$ y $(x_2; 0)$ de las gráficas de F y G, las raíces o ecuaciones de la ecuación cuadrática: $ax^2 + bx + c = 0;\ a \neq 0$

EJEMPLO EXPLICATIVO :

Resolver gráficamente: $2x^2 - x - 15 = 0$

RESOLUCIÓN :

* Esbozamos la gráfica de la función cuadrática

$$y = F(x) = 2x^2 - x - 15$$

* Las abcisas de los puntos P y Q de intersección de la gráfica de F y el eje horizontal, nos representan

las raíces o soluciones de la ecuación.

* Observar que , para :

$x=-\frac{5}{2} \rightarrow y=F\left(-\frac{5}{2}\right)=0$
$x=3 \rightarrow y=F(3)=0$ } se generan los puntos

$P=\left(-\frac{5}{2};0\right);\ Q=\{3;0\}$

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LA DISCUSIÓN DE LAS RAÍCES DE LA ECUACIÓN CUADRÁTICA DE COEFICIENTES REALES

En la ecuación cuadrática: $ax^2+bx+c=0;\ a\neq 0$. Sabemos que la naturaleza de sus raíces viene dada por el valor del discriminante "Δ". Según eso, geométricamente, se obtienen gráficamente lo siguiente:

CARACT. DEL DISCRIMINANTE	COEFICIENTE PRINCIPAL	REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICA	NATURALEZA DE LAS RAÍCES
$\Delta>0$	$a>0$	x_1 x_2	Las raíces son reales y diferentes $x_1\neq x_2$
	$a<0$	x_1 x_2	
$\Delta=0$	$a>0$	$x_1=x_2$	Las raíces son reales e iguales $x_1=x_2$ o una raíz real doble
	$a<0$	$x_1=x_2$	
$\Delta<0$	$a>0$		Las raíces son imaginarias y conjugadas
	$a<0$		

PROPIEDAD :

Dada la ecuación cuadrática con coeficientes racionales :

$$ax^2+bx+c=0\ ;\ a\neq 0$$

Si su discriminante Δ es un número cuadrado perfecto, las raíces de dicha ecuación siempre serán racionales. Si no es así, serán irracionales y conjugados.

EJEMPLO :

Resolver : $2x^2-x-6=0$

RESOLUCIÓN :

* Cálculo del discriminante:

$\Delta=(-1)^2-4(2)(-6)=49$ ....(cuadrado perfecto)

* Luego reemplazando en la solución general:

$x=\frac{-(-1)\pm\sqrt{49}}{2(2)}$; de la cual se obtienen:

$$x_1=2 \text{ ó } x_2=-3/2$$

* Las cuales son números racionales.

PROPIEDADES DE LAS RAÍCES

(TEOREMA DE VIÉTE) :

Conociendo la ecuación: $ax^2+bx+c=0$ y asumiendo que sus raíces son: x_1 y x_2, se puede establecer las siguientes propiedades:

$$\text{Suma de raíces} = S_r = x_1+x_2=-\frac{b}{a}$$

$$\text{Producto de raíces} = P_r = x_1x_2=\frac{c}{a}$$

$$\text{Diferencia de raíces} = D_r = |x_1-x_2|=\frac{\sqrt{\Delta}}{a}$$

$$\text{Cociente de raíces} = C_r = \frac{x_1}{x_2}=\frac{b+\sqrt{\Delta}}{b-\sqrt{\Delta}}$$

* Las anteriores propiedades se verifican en una ecuación cuadrática con coeficientes de naturaleza arbitraria (reales o complejos).

PROPIEDADES ADICIONALES :

Sea : $S=x_1+x_2 \wedge P=x_1.x_2 \wedge D=x_1-x_2$

I) $(x_1+x_2)^2-(x_1-x_2)^2=4x_1x_2$

Luego : $D^2=S^2-4P$

II) $x_1^2+x_2^2=S^2-2P$

III) $x_1^3+x_2^3=S^3-3SP$

$x_1^2+x_2^2=\frac{b^2-2ac}{a^2}$; $x_1^3+x_2^3=\frac{b(3ac-b^2)}{a^3}$

$(x_1+x_2)^2-(x_1-x_2)^2=\frac{4c}{a}$; $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=-\frac{b}{c}$

EJEMPLO 1 :

Si x_1 y x_2 son raíces de la ecuación cuadrática:

$$2x^2+6x+3=0$$

Se cumplen las relaciones de Viéte :

* $x_1+x_2=-\frac{6}{2}=-3$
* $x_1.x_2=\frac{3}{2}$

$\Delta=(6)^2-4(2)(3)=12$; luego :

* $x_1-x_2=\frac{\sqrt{12}}{2}=\frac{2\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$

EJERCICIO :

¿Qué relación guardan los coeficientes de la ecuación: $ax^2+bx+c=0;\ a\neq 0$. Si una de sus raíces es el triple de la otra?.

RESOLUCIÓN :

* De acuerdo a los datos , se tiene :

$$\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}..........(I)\\ x_1.x_2=\dfrac{c}{a}...........(II)\\ x_1=3x_2.......(III)\end{cases}$$

* Reeplazando, *(III)* en *(I)* :

$$3x_2+x_2=-\frac{b}{a}\ \rightarrow\ x_2=-\frac{b}{4a}$$

* Asimismo: $x_1=-\dfrac{3b}{4a}$

* Reemplazando en *(II)* , tendríamos :

$$\left(-\frac{3b}{4a}\right)\left(-\frac{b}{4a}\right)=\frac{c}{a}\Rightarrow \boxed{3b^2=16ac}$$

FORMACIÓN DE UNA ECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO CONOCIENDO SUS RAÍCES

I) Conociendo: «x_1» y «x_2», raíces de la ecuación de segundo grado, se cumple que: $(x-x_1)(x-x_2)=0$

llevando a la forma canónica, se tendría la fórmula:

$$\boxed{x^2-(x_1+x_2)\ x+x_1.x_2=0}$$

II) Conociendo la suma de las raíces: $S=x_1+x_2$ y el producto de ellas mismas $P=x_1\ .\ x_2$, la fórmula a utilizar es:

$\boxed{x^2-Sx+P=0}$ ó

$\boxed{x^2-(\text{suma de raíces})x+(\text{producto de raíces})=0}$

EJEMPLO 1 :

Escribir una ecuación de segundo grado cuyas raíces sean $-\dfrac{2}{3}$ y $\dfrac{3}{2}$.

RESOLUCIÓN :

* La suma de las raíces es: $-\dfrac{2}{3}+\dfrac{3}{2}=\dfrac{5}{6}$

* El producto de las raíces es: $-\dfrac{2}{3}.\dfrac{3}{2}=-1$

* Luego, una ecuación es:

$$x^2-\frac{5}{6}x+(-1)=0\ \text{ó}\ 6x^2-5x-6=0$$

EJEMPLO 2 :

Formar una ecuación de segundo grado, cuyas raíces sean $\dfrac{3+\sqrt{29}}{10}$ ó $\dfrac{3-\sqrt{29}}{10}$

RESOLUCIÓN :

* Asumiendo que dichos valores son x_1 y x_2 respectivamente. Calculemos S y P por separado :

$$S=\frac{3+\sqrt{29}}{10}+\frac{3-\sqrt{29}}{10}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$$

$$P=\left(\frac{3+\sqrt{29}}{10}\right)\left(\frac{3-\sqrt{29}}{10}\right)=\frac{3^2-\sqrt{29}^2}{100}=-\frac{20}{100}=-\frac{1}{5}$$

* Aplicando la fórmula , se tiene :

$$x^2-\left(\frac{3}{5}\right)x+\left(-\frac{1}{5}\right)=0$$

* Que expresada con coeficientes enteros, resulta:

$$5x^2-3x-1=0$$

EJEMPLO 3 :

Construir una ecuación cuadrática que acepte como raíces a $\left(\dfrac{3+i}{2}\right)$ ó $(-1+2i)$

RESOLUCIÓN :

* Calculando S y P, se tienen:

$$S=\left(\frac{3+i}{2}\right)+(-1+2i)=\frac{1+5i}{2}$$

$$P=\left(\frac{3+i}{2}\right).(-1+2i)=\frac{-5+5i}{2}$$

* La ecuación formada, será:

$$x^2-\left(\frac{1+5i}{2}\right)x+\left(\frac{-5+5i}{2}\right)=0$$

* La cual reduce a: $2x^2-(1+5i)x-5+5i=0$

* Siendo: $i=\sqrt{-1}$, la unidad imaginaria.

EJEMPLO 4 :

Formar una ecuación de segundo grado de coeficientes reales, si una de sus raíces es: $2+\sqrt{6}$

RESOLUCIÓN :

* Como las raíces irracionales se presentan por pares conjugados, entonces:

$$x_1=2+\sqrt{6}\ \wedge\ x_2=2-\sqrt{6}$$

* Con lo cual:

I) $x_1+x_2=2+\sqrt{6}+2-\sqrt{6}=4$

II) $x_1.x_2=(2+\sqrt{6})(2-\sqrt{6})=4-6=-2$

* Reemplazando en la fórmula, obtenemos la ecuación: $\boxed{x^2-4x-2=0}$

PROPIEDADES PARTICULARES

A) En la ecuación: $ax^2+bc+x;\ a\neq 0$

La condición que se debe cumplir para que:

A_1) SUS RAÍCES SEAN SIMÉTRICAS U OPUESTAS $(x_1+x_2=0)$

Es decir, las raíces sean iguales en valor absoluto pero de signos contrarios.

* Por propiedad:

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a}=0 \text{ ó } x_1=-x_2$$

* Luego, la condición necesaria y suficiente es:

$$\boxed{b=0}$$

* La ecuación cuadrática que admite raíces simétricas, es de la forma genérica:

$$ax^2+c=0;\ a\neq 0,\ c\neq 0$$

A_2) SUS RAÍCES SEAN RECÍPROCAS O INVERSAS $(x_1x_2=1)$:

* Es decir, una raíz es la inversa de la otra.

* Por propiedad : $x_1.x_2=\dfrac{c}{a}=1$ ó $x_1=\dfrac{1}{x_2}$

* Entonces, la condición necesaria y suficiente es:

$$\boxed{c=a}$$

* La ecuación cuadrática que admite raíces recíprocas tiene la forma genérica:

$$ax^2+bx+a=0;\ a\neq 0$$

A_3) UNA DE SUS RAÍCES ES IGUAL A LA UNIDAD :

Es decir $x=1$, verifica la ecuación cuadrática:

$$ax^2+bx+c=0;\ a\neq 0$$

* Reemplazando este valor, resulta la condición necesaria y suficiente : $\boxed{a+b+c=0}$

B) Para el siguiente sistema de ecuaciones cuadráticas :

$$a_1x^2+b_1x+c_1=0\ ;a_1\neq 0$$
$$a_2x^2+b_2x+c_2=0\ ;a_2\neq 0$$

La condición que se debe cumplir para que:

B_1) AMBAS ECUACIONES TENGAN LAS MISMAS RAÍCES :

Es decir que las ecuaciones sean equivalentes. Se debe cumplir la relación de proporcionalidad entre los coeficientes de sus respectivos términos semejantes, la cual es :

$$\boxed{\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}}$$

B_2) AMBAS ECUACIONES ADMITAN UNA RAÍZ COMÚN – TEOREMA DE BEZOUT

$$\boxed{(a_1b_2-a_2b_1)(b_1c_2-b_2c_1)=(a_1c_2-a_2c_1)^2}$$

Siendo esta relación, la *CONDICIÓN DE COMPATIBILIDAD* conocida con el nombre de *BEZOUTIANA*, para que dos ecuaciones cuadráticas de una incógnita, tengan una raíz común, cuyo valor se determina asi :

$$x=-\frac{\begin{vmatrix}a_1 & c_1\\ a_2 & c_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}}=\frac{a_1c_2-a_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}$$

TEOREMAS :

Sean las ecuaciones cuadráticas :

$$ax^2+bx+c=0\ ...\ ;a\neq 0$$
$$mx^2+nx+p=0\ ...\ ;m\neq 0$$

Si estas ecuaciones tienen las mismas soluciones. Se cumple:

I) Son equivalentes , entonces: $\boxed{\dfrac{a}{m}=\dfrac{b}{n}=\dfrac{c}{p}}$

II) Tienen una raíz común , entonces :

$$\boxed{(cm-ap)^2=(an-bm)(bp-cn)}$$

EJEMPLO 1 :

Las ecuaciones $\begin{cases}x^2-5x+6=0\\ 3x^2-15x+18=0\end{cases}$

* Poseen el mismo **C.S.** = {2; 3}, entonces $\frac{1}{3}=\frac{-5}{-15}=\frac{6}{18}$

EJEMPLO 2 :

Calcular "*a*" y "*b*" en las ecuaciones :

$$\begin{cases}(a-3)x^2-(a-4)x+3=0\\ (b+1)x^2-(2b-4)x+6=0\end{cases}$$

Sabiendo que tienen las mismas raíces.

RESOLUCIÓN :

* Ya que las raíces son las mismas, se cumple que :

$$\frac{a-3}{b+1}=\frac{a-4}{2b-4}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

* De donde obtenemos , el sistema :

$$\begin{cases} 2a-b=7....(I) \\ a-b=2....(II) \end{cases}$$

* De *(I)* y *(II)*, se obtienen: $a=5$ y $b=3$

ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO QUE TIENE UNA RAÍZ COMÚN

Las ecuaciones: $\begin{cases} ax^2+bx+c=0 \\ dx^2+ex+f=0 \end{cases}$

* Tienen una raíz común; se elimina « x^2 » y se obtiene la raíz común ; es decir :

$$\begin{cases} adx^2+bdx+cd=0....(I) \\ adx^2+aex+af=0...(II) \end{cases}$$

* Restando *(I) – (II)* ; se obtienen :

$$x(bd-ae)+(cd-af)=0 \rightarrow \boxed{x=\frac{af-cd}{bd-ae}}$$

FORMAS SIMÉTRICAS DE LAS POTENCIAS DE LAS RAÍCES DE LA ECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO

Se denomina así a las expresiones de la forma $(x_1^n+x_2^n)$, $n\in Z^+$, cuya característica es que al intercambiar x_1 por x_2 y x_2 por x_1, la forma de la expresión original no se altera; siendo x_1 y x_2 raíces de la ecuación cuadrática :

$$ax^2+bx+c=0;\ a\neq 0$$

* Establezcamos una fórmula que nos permita relacionar la suma de las raíces, de los cuadrados, de los cubos, de las cuartas, y en general de las enésimas potencias de las raíces; las cuales denotaremos por S_1, S_2, S_3, S_4 y en general S_n.

* Para facilitar el procedimiento de la deducción llevaremos la ecuación cuadrática general a su forma canónica:

$$x^2+px+q=0$$

* Donde: $p=\frac{a}{b}$ y $q=\frac{c}{a}$

* Además :

$$x_1+x_2=-p \text{ y } x_1.x_2=q.....................(\theta)$$

* Construyendo progresivamente las sumas requeridas

$1)\ x_1+x_2=S_1=-p..............................(1)$

$\rightarrow S_1+p=0.......................(\alpha)$

$2)\ x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2(x_1.x_2)$

* De los (θ), reemplazando:

$$x_1^2+x_2^2=(-p)^2-2(q)$$

* Luego : $x_1^2+x_2^2=S_2=p^2-2q....................(2)$

$\rightarrow S_2-p^2+2q=0$

$\rightarrow S_2+pS_1+2q=0.......................(\beta)$

* De la misma manera :

$3)\ x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)^3-3(x_1x_2)(x_1+x_2)$

* Por *(1)* y (θ) , reemplazando :

$$x_1^3+x_2^3=(-p)^3-3(q)(-p)$$

* Luego :

$x_1^3+x_2^3=S_3=-p^3+3pq.......................(3)$

$\rightarrow S_3+p^3-3pq=0$

$\rightarrow S_3+p(p^2-2q)+q(-p)=0$

* De *(1)* y *(2)* , se deduce que :

$$S_3+pS_2+qS_1=0................(\gamma)$$

* Asimismo:

$4)\ x_1^4+x_2^4=(x_1+x_2)^4-4(x_1x_2)(x_1^2+x_2^2)-6(x_1x_2)^2$

* Sustituyendo de (θ) y de *(2)*:

$\rightarrow x_1^4+x_2^4=(-p)^4-4(q)(p^2-2q)-6(q)^2$

$\rightarrow x_1^4+x_2^4=S_4=p^4-4p^2q+2q^2$

* Luego. $S_4-p^4+4p^2q-2q^2=0$

$\rightarrow S_4+p(-p^3+3pq)+q(p^2-2q)=0$

* De *(2)* y *(3)*, reemplazando:

$$S_4+pS_3+qS_2=0.......................(\phi)$$

* Por lo tanto de $(\alpha),(\beta),(\gamma),(\phi)$, resumiendo

$S_1+p=0$

$S_2+pS_1+2q=0$

$S_3+pS_2+qS_1=0$

$S_4+pS_3+qS_2=0$

....

* En general: $\boxed{S_n+pS_{n-1}+qS_{n-2}=0}$

* Y teniendo en cuenta que: $p=\frac{b}{a}$; $q=\frac{c}{a}$ la relación anterior se podrá escribir así:

$$aS_n + bS_{n-1} + cS_{n-2} = 0$$

* A la cual se le denomina *LEY GENERAL DE RECURRENCIA* de las potencias de las raíces de la ecuación cuadrática.

EJEMPLO:

Calcular: $N = (1+\sqrt{3})^6 + (1-\sqrt{3})^6$

RESOLUCIÓN:

* Podemos considerar que $(1+\sqrt{3})$ y $(1-\sqrt{3})$ son raíces de una ecuación de segundo grado ; es decir :

$$x_1 = 1+\sqrt{3} \text{ y } x_2 = 1-\sqrt{3}$$

* Y la ecuación de la cual provienen es:

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + (x_1.x_2) = 0$$

* Reemplazando dichos valores se obtiene:

$$x^2 - 2x - 2 = 0 .... (I)$$

* Luego: $p = -2$ y $q = -2$

* Entonces, la expresión N nos representa la suma de las *SEXTAS POTENCIAS* de las raíces de la ecuación *(I)*.

Así: $S_6 = x_1^6 + x_2^6$

Este valor, se puede obtener aplicando sucesivamente la ley general de recurrencia. Tal como sigue:

$S_1 - 2 = 0 \rightarrow S_1 = 2$

$S_2 - 2S_1 - 4 = 0 \rightarrow S_2 = 8$

$S_3 - 2S_2 - 2S_1 = 0 \rightarrow S_3 = 20$

$S_4 - 2S_3 - 2S_2 = 0 \rightarrow S_4 = 56$

$S_5 - 2S_4 - 2S_3 = 0 \rightarrow S_5 = 152$

$S_6 - 2S_5 - 2S_4 = 0 \rightarrow S_6 = 416$

* Finalmente : $N = 416$

ECUACIONES RADICALES SIMPLES

Una ecuación con una variable en un radicando es una ecuación radical.

Las ecuaciones $\sqrt{x} = 5$ y $2 - \sqrt{3x} = -5$ son ecuaciones radicales.

* Los siguientes ejemplos ilustran el procedimiento para resolver ecuaciones radicales.

EJEMPLO 1 :

Resolver : $\sqrt{x} = 7$

RESOLUCIÓN :

* Note que $x \geq 0$. Se eleva al cuadrado a ambos lados de la ecuación :

$$\sqrt{x}^2 = 7^2 \rightarrow x = 49$$

EJEMPLO 2 :

Resolver : $\sqrt{7x+18} = 9$

RESOLUCIÓN :

* Se eleva al cuadrado a ambos lados de la ecuación:

$$\sqrt{7x+18} = 9$$

$\rightarrow (\sqrt{7x+18})^2 = 9^2 \rightarrow 7x + 18 = 81$

$\rightarrow 7x = 81 - 18 \rightarrow 7x = 63 \rightarrow x = 9$

OBSERVACIÓN :

Se debe chequear cada solución en la ecuación original porque algunas veces al elevar al cuadrado a ambos lados de una ecuación se introducen soluciones que no son soluciones de la ecuación original, estas soluciones se llaman soluciones extrañas.

EJEMPLO 3 :

Resolver : $\sqrt{3x+4} = -4$

RESOLUCIÓN :

$$\sqrt{3x+4} = -4$$

$\rightarrow (\sqrt{3x+4}) = (-4)^2 \rightarrow 3x + 4 = 16$

$\rightarrow 3x = 12 \rightarrow x = 4$

* Al reemplazar este valor de x en la ecuación original, se tiene:

$$\sqrt{3(4)+4} = \sqrt{16}$$
$$= 4$$
$$\text{y} \quad 4 \neq -4$$

* Luego : *la ecuación no tiene solución.*

OBSERVACIÓN :

No es necesario desarrollar esta ecuación para darse cuenta que no tiene solución , porque el lado izquierdo de la ecuación es por definición un número no negativo, mientras que el lado derecho es un número negativo, y un número no negativo nunca puede ser igual a un número negativo.

EJEMPLO 4 :

Resolver : $\sqrt{5x^2 - 4} = x$

RESOLUCIÓN :

$$\sqrt{5x^2-4} = x \rightarrow (\sqrt{5x^2-4}) = x^2$$

$\rightarrow 5x^2 - 4 = x^2 \rightarrow 4x^2 = 4$

$\rightarrow x^2 = 1 \rightarrow x = \pm 1$

* Pero en este ejemplo el lado izquierdo de la ecuación dada es no negativo, así que el lado derecho

debe ser también no negativo. Como el lado derecho es x, cualquier solución debe ser no negativa. En este ejemplo -1 es una solución extraña.

EJEMPLO 5 :

Resolver la ecuación : $\sqrt{x+21}-\sqrt{x}=3$

RESOLUCIÓN :

* Se pasa un radical al otro lado de la igualdad:

$$\sqrt{x+21}=3+\sqrt{x}$$

* Se eleva al cuadrado a ambos lados:

$$\left(\sqrt{x+21}\right)^2=\left(3+\sqrt{x}\right)^2$$

$$\rightarrow x+21=9+6\sqrt{x}+x \rightarrow \sqrt{x}=2 \rightarrow x=4$$

Ecuaciones de la forma : $a\sqrt{x+b}=x+c$

Para resolver este tipo de ecuación se procede de la siguiente manera: se elevan al cuadrado ambos miembros de la expresión, con el fin de eliminar el radical y luego se reordena la ecuación. Así, se llega a una ecuación cuadrática que se resolverá de acuerdo a lo estudiado.

EJEMPLO 6 :

Resolver : $2\sqrt{x+5}=x-10$

RESOLUCIÓN :

$$\left(2\sqrt{x+5}\right)^2=(x-10)^2$$

$$\rightarrow 4(x+5)=(x-10)^2 \rightarrow 4x+20=x^2-20x+100$$

$$\rightarrow x^2-24x+80=0 \quad \rightarrow (x-20)(x-4)=0$$

$$\rightarrow x_1=20 \text{ y } x_2=4$$

* Si comprobamos estos valores en la ecuación inicial , resulta :

$$x_1=20 \rightarrow 2\sqrt{20+5}=20-10$$

$$\rightarrow 2\sqrt{25}=10 \rightarrow 2\times 5=10$$

$$x_2=4 \rightarrow 2\sqrt{4+5}\neq 20-10$$

$$\rightarrow 2\sqrt{9}\neq 10 \rightarrow 2\times 3\neq 10$$

* Observamos que $x_1=20$ es una solución de la ecuación propuesta, y que $x_2=4$ es una solución extraña, por lo que, al resolver este tipo de ecuaciones, siempre será necesario verificar qué solución cumple con la ecuación original.

Ecuaciones de la forma : $\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b}=c$

Para resolver una ecuación de este forma, uno de los radicales (cualquiera) se pasa al otro miembro de la ecuación. Luego se procede a elevar al cuadrado ambos miembros de la ecuación, reordenando nuevamente los términos hasta obtener una nueva ecuación de la forma $\sqrt{x+b}=x+c$. Esta será resuelta de la misma forma que en el caso anterior.

EJEMPLO 7 :

Observa cómo resolvemos la siguiente ecuación: $\sqrt{4-2x}+\sqrt{x+2}=2$

Pasamos $\sqrt{x+2}$ al segundo miembro y elevamos al cuadrado ambos miembros.

$$\sqrt{4-2x}+\sqrt{x+2}=2 \rightarrow \left(\sqrt{4-2x}\right)^2=\left(2-\sqrt{x+2}\right)^2$$

$$\rightarrow (4-2x)=4-2(2)\sqrt{x+2}+x+2$$

$$\rightarrow 4-2x=6-4\sqrt{x+2}+x$$

Aislamos el radical $\rightarrow 4\sqrt{x+2}=3x+2$

Elevamos nuevamente al cuadrado y operamos

$$\rightarrow \left(4\sqrt{x+2}\right)^2=(3x+2)^2$$

$$\rightarrow 16(x+2)=9x^2+12x+4$$

$$\rightarrow 16x+32=9x^2+12x+4$$

Reducimos y ordenamos

$$\rightarrow 16x+32=9x^2+12x+4$$

$$\rightarrow 9x^2-4x-28=0$$

Resolvemos la ecuación factorizando y obtenemos:

$$\rightarrow 9x^2-4x-28=0 \rightarrow (x-2)\left(x+\frac{14}{9}\right)=0$$

$$\rightarrow (x-2)=0 \rightarrow x_1=2; \left(x+\frac{14}{9}\right)=0 \rightarrow x_2=\frac{-14}{9}$$

* Si reemplazamos en la ecuación original se comprueba que $x_1=2$ es solución pero $x_2=\frac{-14}{9}$ no lo es, puesto que al reemplazar en la ecuación original x por $-14/9$ no se cumple la igualdad.

Ecuaciones de la forma : $\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b}=\sqrt{x+c}$ con a, b y c constantes.

Para resolver una ecuación de esta forma elevamos al cuadrado cada miembro de la expresión. Así, la expresión queda reducida a la forma :

$$2\sqrt{(x+a)(x+b)}=d-x$$

EJEMPLO 8 :

Observa cómo resolvemos la ecuación

$$\sqrt{(x+8)}+\sqrt{x+3}=\sqrt{x+24}$$

RESOLUCIÓN:

Elevamos al cuadrado ambos miembros, reducimos y ordenamos.

$$\left(\sqrt{x+8}+\sqrt{x+3}\right)^2=\left(\sqrt{x+24}\right)^2$$

$$\rightarrow \not{x}+8+2\sqrt{(x+8)(x+3)}+x+3=\not{x}+24$$

$$\rightarrow 2\sqrt{(x+8)(x+3)}=13-x$$

Elevamos nuevamente al cuadrado y obtenemos.

$$\left(2\sqrt{(x+8)(x+3)}\right)^2=(13-x)^2$$

$$\rightarrow\ 4(x+8)(x+3)=169-26x+x^2$$

Hallamos el producto, reducimos términos e igualamos a cero.

$$4(x+8)(x+3)=169-26x+x^2$$

$$\rightarrow 4\left(x^2+11x+24\right)=169-26x+x^2$$

$$\rightarrow 4x^2+44x+96=169-26x+x^2$$

$$\rightarrow\ 3x^2+70x-73=0$$

Resolvemos la ecuación por factorización.

$$3x^2+70x-73=0\rightarrow (x-1)(3x+73)=0$$

$$(x-1)=0\ \rightarrow x_1=1;(3x+73)=0\ \rightarrow\ x_2=\frac{-73}{3}$$

* Verificando ambas soluciones comprobamos que: $x_1 = 1$ es la solución que satisface la ecuación.

Ecuaciones de la forma : $\frac{\sqrt{x}}{a}+\frac{a}{\sqrt{x}}=c$

con a, c constantes

En este tipo de ecuación , como notamos , $\frac{\sqrt{x}}{a}$ y $\frac{a}{\sqrt{x}}$ una es la inversa de la otra .

Por lo tanto, haciendo $y=\frac{\sqrt{x}}{a}$, la ecuación queda reducida a $y+\frac{1}{y}=c$, lo que nos lleva a una ecuación cuadrática $y^2-cy+1=0$. Esta ecuación, una vez resuelta, nos dará los valores y_1, y_2. Luego,

$y_1=\frac{\sqrt{x}}{a};\ y_2=\frac{\sqrt{x}}{a}$ las resolveremos elevando al cuadrado cada término.

EJEMPLO 9 :

Observa cómo resolvemos: $\frac{3-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x}}{3-\sqrt{x}}=\frac{5}{2}$

* Sustituimos $\frac{3-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ por y y operamos

$$y+\frac{1}{y}=\frac{5}{2}\rightarrow y^2+1=\frac{5}{2}\ y\ \rightarrow\ 2y^2-5y+2=0$$

* Resolvemos la ecuación por factorización y obtenemos :

$$2y^2-5y+2=0\ \rightarrow (y-2)(2y-1)=0$$

$$y-2=0\ \rightarrow\ y_1=2;\ 2y-1=0\ \rightarrow y_2=\frac{1}{2}$$

* Reemplazamos los valores obtenidos para y_1 e y_2 y operamos.

$$\frac{3-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=2\ \rightarrow\ 3-\sqrt{x}=2\sqrt{x}$$

$$\rightarrow\ \not{3}=\not{3}\sqrt{x}\ \rightarrow\ \sqrt{x}=1\ \rightarrow\ x_1=1$$

* O también :

$$\frac{3-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=\frac{1}{2}\ \rightarrow\ 6-2\sqrt{x}=\sqrt{x}$$

$$\rightarrow\ 6=3\sqrt{x}\ \rightarrow\ \sqrt{x}=2\ \rightarrow\ x_2=4$$

* Los valores que satisfacen la ecuación dada son $x_1 = 1; x_2 = 4$.

ECUACIONES REDUCIBLES A CUADRÁTICAS

Son aquellas ecuaciones que al hacer un cambio de variable en su estructuración algebraica se transforma en una ecuación de la forma:

$$\boxed{ax^2+bx+c=0}\ ;\ a\neq 0$$

A continuación mostraremos diversos ejemplos sobre transformación de ecuaciones a ecuaciones cuadráticas.

EJEMPLO 1 :

Resolver : $\sqrt{\frac{3x-2}{2x-5}}+3\sqrt{\frac{2x-5}{3x-2}}=4$

RESOLUCIÓN :

* Haciendo la transformación :

$$\sqrt{\frac{3x-2}{2x-5}}=z\ \rightarrow\ \sqrt{\frac{2x-5}{3x-2}}=\frac{1}{z}$$

* Donde $z > 0$; la ecuación dada se transforma en:

$$z+\frac{3}{z}=4\ \rightarrow\ z^2-4z+3=0$$

* Factorizando : $(z-3)(z-1)=0$

* Vemos que : $z=3 \vee z=1$

* Para : $z = 3$

$$\rightarrow\ \sqrt{\frac{3x-2}{2x-5}}=3\ \rightarrow\ \frac{3x-2}{2x-5}=9$$

* Resolviendo : $x=\frac{43}{15}$

* Para : $z = 1$

$\rightarrow \sqrt{\dfrac{3x-2}{2x-5}} = 1$

* Resolviendo : $x = -3$

* El conjunto solución es : $C.S.\left\{\dfrac{45}{13}; -3\right\}$

EJEMPLO 2 :

Resolver : $2x^2 + 4x - 7\sqrt{x^2 + 2x + 10} = -5$

RESOLUCIÓN :

* Expresando la ecuación en la siguiente forma:

$$2\left(x^2 + 2x + 10 - 10\right) - 7\sqrt{x^2 + 2x + 10} = -5$$

* De otro lado; haciendo : $\sqrt{x^2 + 2x + 10} = a$

* Tal que $(a > 0)$; se tiene :

$$2\left(a^2 - 10\right) - 7a = -5$$

$\rightarrow 2a^2 - 7a - 15 = 0$

* Factorizando por aspa simple :

$2a \quad\quad 3 \rightarrow 3a$

$a \quad\quad -5 \rightarrow \underline{-10a}$

$-7a$

$$(2a+3)(a-5) = 0 \rightarrow \begin{cases} a=5 : Si \\ \wedge \\ a = -\dfrac{3}{2} : No \end{cases}$$

* Volviendo a la variable original :

$$\sqrt{x^2 + 2x + 10} = 5 \rightarrow x^2 + 2x - 15 = 0$$

* Factorizando :

$$x^2 + 2x - 15 = 0$$

$x \quad\quad 5$

$x \quad\quad -3$

$\rightarrow (x+5)(x-3) = 0 \rightarrow C.S. = \{-5; 3\}$

EJERCICIOS RESUELTOS

EJERCICIO 1 :

Resolver la ecuación $(t+3)^2 = -23$

RESOLUCIÓN :

$$(t+3)^2 = -23$$

$\rightarrow t + 3 = \pm\sqrt{-23} \rightarrow t + 3 = i\sqrt{23}$

$\rightarrow t = -3 \pm i\sqrt{23}$

* Luego: $t = -3 + i\sqrt{23}$ ó $t = -3 - i\sqrt{23}$

EJERCICIO 2 :

Resolver : $2p^2x^2 + pqx - 15q^2 = 0$

RESOLUCIÓN :

* Factorizando :

$$2p^2x^2 + pqx - 15q^2$$

$2px \quad\quad -5q$

$px \quad\quad 3q$

$\rightarrow 2px - 5q = 0$ ó $px + 3q = 0$

$\rightarrow x = \dfrac{5q}{2p}$ ó $x = -\dfrac{3q}{p}$

EJERCICIO 3 :

Resolver : $x - 5\sqrt{x} + 6 = 0$

RESOLUCIÓN :

* Colocando $x = \sqrt{x}^2$, así :

$$\sqrt{x}^2 - 5\sqrt{x} + 6 = 0$$

$\sqrt{x} \quad\quad -3$

$\sqrt{x} \quad\quad -2$

$\rightarrow \sqrt{x} - 3 = 0$ ó $\sqrt{x} - 2 = 0$

$\rightarrow x = 9$ ó $x = 4$

EJERCICIO 4 :

Resolver : $(2x-7)^2 + 8 = 6(2x-7)$

RESOLUCIÓN :

$$(2x-7)^2 - 6(2x-7) + 8 = 0$$

* Se hace el siguiente cambio de variable: $u = 2x - 7$

* Entonces la ecuación $(2x-7)^2 - 6(2x-7) + 8 = 0$, se transforma en:

$$u^2 - 6u + 8 = 0$$

$\rightarrow (u-4)(u-2) = 0$

$\rightarrow u - 4 = 0$ ó $u - 2 = 0 \rightarrow u = 4$ ó $u = 2$

* Y se reemplaza u por $2x - 7$:

* Es decir :

$2x - 7 = 4$ ó $2x - 7 = 2 \rightarrow 2x = 11$ ó $2x = 9$

* Luego : $x = \dfrac{11}{2}$ ó $x = \dfrac{9}{2}$

EJERCICIO 5 :

Resolver : $\left(x^2+6\right)^2 - 17\left(x^2+6\right) + 70 = 0$

RESOLUCIÓN :

* Se hace : $u = x^2 + 6$

* Entonces la ecuación :

$(x^2+6)^2-17(x^2+6)+70=0$ se transforma en:

$u^2-17u+70=0$

$\rightarrow (u-10)(u-7)=0$

$\rightarrow u-10=0$ ó $u-7=0 \rightarrow u=10$ ó $u=7$

* Después se reemplaza u por x^2+6 en cada una de las ecuaciones anteriores y se resuelven para x , así:

$x^2+6=10$ ó $x^2+6=7$

$x^2=4$ ó $x^2=1$

$x=\pm 2$ ó $x=\pm 1 \rightarrow C.S.=\{-1;+1;-2;+2\}$

EJERCICIO 6 :

Resolver : $x^4=x^2+20$

RESOLUCIÓN :

$x^4-x^2-20=0$

$\rightarrow (x^2+4)(x^2-5)=0$

$\rightarrow x^2=-4$ ó $x^2=5 \rightarrow x=\pm 2i$ ó $x=\pm\sqrt{5}$

$\rightarrow C.S.=\{\sqrt{5};-\sqrt{5};2i;-2i\}$

EJERCICIO 7 :

Resolver : $27x^6+8=35x^3$

RESOLUCIÓN :

* De:

$27x^6-35x^3+8=0$

$\rightarrow (27x^3-8)(x^3-1)=0$

$\rightarrow (3x-2)(9x^2+6x+4)(x-1)(x^2+x+1)=0$

* Entonces :

I) $3x-2=0 \rightarrow x_1=\dfrac{2}{3}$

II) $9x^2+6x+4=0$ $\begin{cases} x_2=\dfrac{-6+\sqrt{6^2-4(9)(4)}}{2(9)} \\ x_3=\dfrac{-6-\sqrt{6^2-4(9)(4)}}{2(9)} \end{cases}$

III) $x-1=0 \rightarrow x_4=1$

IV) $x^2+x+1=0$ $\begin{cases} x_5=\dfrac{-1+\sqrt{1^2-4(1)(1)}}{2(1)} \\ x_6=\dfrac{-1-\sqrt{1^2-4(1)(1)}}{2(1)} \end{cases}$

* Luego :

$C.S.=\left\{\dfrac{2}{3};\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{3};\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{3};1;\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2};\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right\}$

EJERCICIO 8 :

Resolver : $2x+3=4\sqrt{2x+3}-3$

RESOLUCIÓN :

* Se hace $u=\sqrt{2x+3}$ entoces $u^2=2x+3$, luego la ecuación dada se transforma , en :

$u^2-4u+3=0$

$\rightarrow (u-3)(u-1)=0 \rightarrow u=3$ ó $u=1$

* Después se remplaza u por $\sqrt{2x+3}$ en cada una de las ecuaciones anteriores y se resuelven para x , así:

$\sqrt{2x+3}=3$ ó $\sqrt{2x+3}=1$

$(\sqrt{2x+3})^2=3^2$ ó $(\sqrt{2x+3})^2=1^2$

$2x+3=9$ ó $2x+3=1$

$2x=6$ ó $2x=-2$

$x=3$ ó $x=-1$

* Entonces : $C.S.=\{3;-1\}$

EJERCICIO 9 :

Resolver : $\sqrt{4x^2+2x+7}+4x=5$

RESOLUCIÓN :

$\sqrt{4x^2+2x+7}=5-4x$

$\rightarrow (\sqrt{4x^2+2x+7})^2=(5-4x)^2$

$\rightarrow 4x^2+2x+7=25-40x+16x^2$

$\rightarrow 2x^2-7x+3=0$

$\rightarrow (2x-1)(x-3)=0 \rightarrow x=\dfrac{1}{2}$ ó $x=3$

* Cotejando los resultados, se verificará que $x=3$ es una solución extraña, entonces : $C.S.=\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$

EJERCICIO 10 :

Resolver : $\sqrt{5x-1}-\sqrt{x+6}=3$

RESOLUCIÓN :

$\sqrt{5x-1}=3+\sqrt{x+6}$

$\Rightarrow (\sqrt{5x-1})^2=(3+\sqrt{x+6})^2 \Rightarrow 5x-1=9+6\sqrt{x+6}+(x+6)$

$\Rightarrow 5x-1-9-x-6=6\sqrt{x+6} \Rightarrow 4x-16=6\sqrt{x+6}$

$\Rightarrow (4x-16)^2=(6\sqrt{x+6})^2 \Rightarrow 16x^2-128x+256=36(x+6)$

$\Rightarrow 4x^2-41x+10=0$

$\Rightarrow (4x-1)(x-10)=0 \Rightarrow x=\dfrac{1}{4}$ ó $x=10$

* Verificando se obtendrá que $x=10$, es una solución extraña.

$\rightarrow C.S.=\left\{\dfrac{1}{4}\right\}$

EJERCICIO 11 :

Resolver : $\sqrt{7x+8}=\sqrt{3x+1}+\sqrt{x+1}$

RESOLUCIÓN :

$$\left(\sqrt{7x+8}\right)^2=\left(\sqrt{3x+1}+\sqrt{x+1}\right)^2$$

$\rightarrow 7x+8=3x+1+2\sqrt{(3x+1)}\sqrt{(x+1)}+(x+1)$

$\rightarrow 7x+8-3x-1-x-1=2\sqrt{(3x+1)(x+1)}$

$\Rightarrow 3x+6=2\sqrt{3x^2+4x+1}\Rightarrow(3x+6)^2=\left(2\sqrt{3x^2+4x+1}\right)^2$

$\Rightarrow 9x^2+36x+36=4\left(3x^2+4x+1\right)$

$\Rightarrow 3x^2-20x-32=0\Rightarrow(3x+4)(x-8)=0$

$\Rightarrow x=-\dfrac{4}{3}$ ó $x=8$

* Al verificar encontraremos que $x=-\dfrac{4}{3}$ es una solución extraña.

$\rightarrow C.S.=\{8\}$

EJERCICIO 12 :

Resolver : $\sqrt{x^2-5x+2}-\sqrt{x^2-6x+2}=1$

RESOLUCIÓN :

$$\sqrt{x^2-5x+2}=1+\sqrt{x^2-6x+2}$$

$\rightarrow \left(\sqrt{x^2-5x+2}\right)^2=\left(1+\sqrt{x^2-6x+2}\right)^2$

$\rightarrow x^2-5x+2=1+2\sqrt{x^2-6x+2}+x^2-6x+2$

$\rightarrow x-1=2\sqrt{x^2-6x+2}$

$\rightarrow (x-1)^2=\left(2\sqrt{x^2-6x+2}\right)^2$

$\rightarrow x^2-2x+1=4x^2-24x+8$

$\rightarrow -3x^2+22x-7=0 \rightarrow 3x^2-22x+7=0$

$\rightarrow (3x-1)(x-7)=0 \rightarrow 3x-1=0$ ó $x-7=0$

$\rightarrow x=\dfrac{1}{3}$ ó $x=7$

* Al comprobar, se verificará que $x=\dfrac{1}{3}$ es una solución extraña, entonces: $C.S.=\{7\}$

EJERCICIO 14 :

Resolver : $(x-3)(x-4)(x-2)(x-1)-120=0$

RESOLUCIÓN :

* Multiplicando los factores «2» a «2» de forma que la suma de los términos independientes sean iguales.

$$(x-3)(x-4)(x-2)(x-1)-120=0$$

* Obtenemos : $\left(x^2-5x+6\right)\left(x^2-5x+4\right)-120=0$

* Haciendo la transformación; $x^2-5x=a$, se tendría la ecuación :

$$(a+6)(a+4)-120=0\rightarrow a^2+10a-96=0$$

* Factorizando :

$$(a+16)(a-6)=0\rightarrow\begin{cases}a=6\\ \text{ó}\\ a=-16\end{cases}$$

* Volviendo a la variable original

* Para : $a=6$

$$x^2-5x-6=0\rightarrow(x-6)(x+1)=0\begin{cases}x=6\\ \text{ó}\\ x=-1\end{cases}$$

* Para : $a=-16$

$$x^2-5x+16=0\rightarrow x=\frac{5\pm\sqrt{39}i}{2}$$

* Entonces : $C.S.=\left\{-1;\,6;\dfrac{5+\sqrt{39}i}{2};\dfrac{5-\sqrt{39}i}{2}\right\}$

EJERCICIO 15 :

Resolver : $\sqrt[n]{\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+5x-8}}+\sqrt[n]{\dfrac{x^2+5x-8}{x^2-3x+2}}=2$

RESOLUCIÓN :

* Haciendo la transformación :

$$\sqrt[n]{\frac{x^2-3x+2}{x^2+5x-8}}=a;\ \sqrt[n]{\frac{x^2+5x-8}{x^2-3x+2}}=\frac{1}{a}$$

* La ecuación dada, se transforma en :

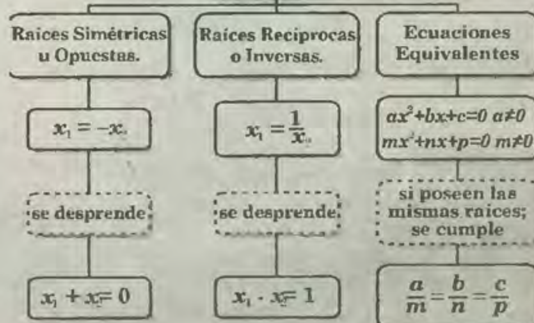
$$a+\frac{1}{a}=2\rightarrow a^2-2a+1=0$$

$\rightarrow (a-1)^2=0\rightarrow a=1$

* Volviendo a la variable original :

$$\sqrt[n]{\frac{x^2-3x+2}{x^2+5x-8}}=1\rightarrow x^2-3x+2=x^2+5x-8$$

$\rightarrow -8x=-10\rightarrow x=\dfrac{5}{4}$



PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1 :

Resolver : $\dfrac{x+3}{x-2}=\dfrac{x+1}{x-4}$

A) 1 B) 2 C) Incompatible D) 0 E) –10

RESOLUCIÓN :

* Multiplicando en forma de aspa (X), obtenemos:

$$(x+3)(x-4)=(x-2)(x+1)$$

$$\rightarrow x^2-4x+3x-12=x^2+x-2x-2$$

* Simplificando : $-x-12=-x-2 \rightarrow 0x=10$

* Como el coeficiente de «x» es cero, la ecuación es incompatible.

RPTA: "C"

PROBLEMA 2 :

Resolver : $\dfrac{3x-2}{4}-\dfrac{5x-1}{3}=\dfrac{2x-7}{6}$

A) 1 B) 0,2 C) 0,5 D) 0,8 E) 2

RESOLUCIÓN :

* Multiplicando a ambos miembros por el M.C.M(4; 3; 6) = 12, resultando:

$$3(3x-2)-4(5x-1)=2(2x-7)$$

$$\rightarrow 9x-6-20x+4=4x-14$$

$$\rightarrow -11x-2=4x-14$$

$$\rightarrow -15x=-12 \rightarrow x=\frac{4}{5}=0{,}8$$

PROBLEMA 3 :

Resolver : $\dfrac{\dfrac{x-a}{b}-\dfrac{x-b}{a}}{\dfrac{x-2a}{a}-\dfrac{x-2b}{b}}=-\dfrac{a}{b}$

A) 1 B) 0 C) a D) b E) $\dfrac{b(a+b)}{b-a}$

RESOLUCIÓN:

* Aplicando: $\boxed{\dfrac{m}{n}\pm\dfrac{p}{q}=\dfrac{mq\pm pn}{nq}}$ ... «criterio del aspa», tanto en el numerador como en denominador , resultando :

$$\frac{a(x-a)-b(x-b)}{b(x-2a)-a(x-2b)}=-\frac{a}{b}$$

* Operando y reduciendo :

$$\frac{ax-a^2-bx+a^2}{bx-2ab-ax+2ab}=-\frac{a}{b}$$

* Obtenemos :

$$\frac{(a-b)x-(a^2-b^2)}{-(a-b)x}=\frac{-a}{b}\rightarrow\frac{(a-b)x-(a+b)(a-b)}{-(a-b)x}=-\frac{a}{b}$$

* Cancelando : $(a-b)$

$$\frac{x-(a+b)}{-x}=-\frac{a}{b}\rightarrow bx-(a+b)b=ax$$

$$\rightarrow (b-a)x=ab+b^2 \rightarrow x=\frac{b(a+b)}{b-a}$$

RPTA: "E"

PROBLEMA 4 :

Hallar el valor de «x» en la ecuación :

$$\frac{a}{b}\left(1-\frac{a}{x}\right)+\frac{b}{a}\left(1-\frac{b}{x}\right)=1$$

A) a B) b C) a + b D) a^3+b^3 E) a – b

RESOLUCIÓN :

* Efectuando : $\dfrac{a}{b}-\dfrac{a^2}{bx}+\dfrac{b}{a}-\dfrac{b^2}{ax}=1$

* M.C.M = abx

$$a^2x-a^3+b^2x-b^3=abx$$

* Transponiendo : $a^2x+b^2x-abx=a^3+b^3$

* Factorizando se tiene :

$$x\left(a^2+b^2-ab\right)=(a+b)\left(a^2-ab+b^2\right)$$

* Despejando : $x=a+b$

RPTA: "C"

PROBLEMA 5 :

Hallar «x» en :

$$\frac{2x+a}{b}-\frac{b-x}{a}=\frac{3ax+(a-b)^2}{ab}$$

A) a B) 1 C) 0 D) 2ab E) 2b

RESOLUCIÓN :

* Multiplicando por MCM = ab , resultando :

$$2ax+a^2-b^2+bx=3ax+(a-b)^2$$

* Transponiendo :

$$bx-ax=a^2-2ab+b^2-a^2+b^2$$

* Simplificando y factorizando :

$$x(b-a)=2b^2-2ab \rightarrow x(b-a)=2b(b-a)$$

* Despejando : $x=\dfrac{2b(b-a)}{(b-a)}=2b$

RPTA: "E"

PROBLEMA 6 :

Calcular «x» en función de «m» , si :

$$\frac{m-x+n}{m-n}+\frac{m-n}{m+n}=\frac{x-2m-2n}{m+n}$$

A) $m+n$ B) m C) $3m$ D) $2m$ E) $\frac{m}{2}$

RESOLUCIÓN:

* Siendo $\begin{cases} m+n=a \\ m-n=b \end{cases}$

* En la ecuación : $\frac{a-x}{b}+\frac{b}{a}=\frac{x-2a}{a}$

* M.C.M. = ab

$$a^2-xa+b^2=bx-2ab$$

* Transponiendo : $\underbrace{a^2+2ab+b^2}_{(a+b)^2=x(a+b)}=bx+ax$

* Luego : $x=a+b$

* Reemplazando $x=m+n+m-n=2m$

RPTA: "D"

PROBLEMA 7 :

Resolver la ecuación :

$$\frac{x-a}{x}+\frac{x}{x+a}+\frac{x+a}{x-a}=3,\ a\neq 0$$

A) $-3a$ B) $-a/4$ C) $-a/5$ D) $-a/3$

RESOLUCIÓN :

* Dando común denominador :

$$\frac{(x-a)^2(x+a)+(x-a)x^2+(x+a)^2x}{x(x+a)(x-a)}=3$$

* Simplificando : $3x^3+a^3=3(x^3-a^2x)$

* De donde : $x=\frac{-a}{3}$

RPTA: "D"

PROBLEMA 8 :

Hallar «x» en:

$$\frac{x-a}{x-a-1}-\frac{x-a-1}{x-a-2}=\frac{x-b}{x-b-1}-\frac{x-b-1}{x-b-2}$$

RESOLUCIÓN :

* Haciendo $\begin{cases} x-a-2=m \\ x-b-2=n \end{cases}$

* En la ecuación : $\frac{m+2}{m+1}-\frac{m+1}{m}=\frac{n+2}{n+1}-\frac{n+1}{n}$

* Efectuando : $\frac{1}{m(m+1)}=\frac{1}{n(n+1)}$

$\rightarrow m^2+m=n^2+n$

$\rightarrow m^2-n^2+m-n=0$

* Factorizando : $(m-n)(m+n+1)=0$

* Luego : $m+n+1=0$

* Volviendo a «x» :

$$x-a-2+x-b-2+1=0 \rightarrow x=\frac{a+b+3}{2}$$

PROBLEMA 9 :

Resolver : $\frac{x+3}{x+2}-\frac{x-2}{x-3}=\frac{x+2}{x+1}-\frac{x-3}{x-4}$

A) 2 B) 1 C) 3 D) 0 E) -2

RESOLUCIÓN :

* Aplicando : $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad-bc}{bd}$

* Resulta :

$$\frac{(x+3)(x-3)-(x+2)(x-2)}{(x+2)(x-3)}=\frac{(x+2)(x-4)-(x-3)(x+1)}{(x+1)(x-4)}$$

$$\rightarrow \frac{x^2-9-(x^2-4)}{x^2-x-6}=\frac{x^2-2x-8-(x^2-2x-3)}{x^2-3x-4}$$

$$\rightarrow \frac{5}{x^2-x-6}=\frac{-5}{x^2-3x-4}$$

$$\rightarrow x^2-3x-4=x^2-x-6 \rightarrow x=1$$

RPTA: "B"

PROBLEMA 10 :

Resolver : $\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x-3}=\frac{3}{x^2-x-6}$

A) 2 B) 3 C) 1 D) 0 E) 8

RESOLUCIÓN :

* Operando , resulta :

$$\frac{x-3+x+2}{(x+2)(x-3)}=\frac{3}{x^2-x-6}$$

$$\rightarrow \frac{2x-1}{x^2-x-6}=\frac{3}{x^2-x-6} \rightarrow 2x-1=3 \rightarrow x=2$$

RPTA: "A"

PROBLEMA 11 :

Resolver : $\frac{4x-1}{4x+1}+\frac{6}{16x^2-1}=\frac{4x+1}{4x-1}$

A) $\frac{8}{3}$ B) $\frac{3}{9}$ C) $\frac{3}{8}$ D) 1 E) 0

RESOLUCIÓN :

* Multiplicando todo por :

$$M.CM.\left(4x+1;\ 16x^2-1;\ 4x-1\right)=16x^2-1$$

* Resultando :

$$(4x-1)(4x-1)+6(1)=(4x+1)(4x+1)$$

$$\rightarrow (4x-1)^2+6=(4x+1)^2$$

$$\rightarrow 6=(4x+1)^2-(4x-1)^2$$

* Aplicando LEGENDRE :

$$6=4(4x)(1) \rightarrow x=\frac{3}{8}$$

RPTA: "C"

PROBLEMA 12 :

Resolver :

$$5+\cfrac{2}{3+\cfrac{-4}{1+\cfrac{x-1}{x-3}}}=5+\cfrac{2}{3-\cfrac{4}{1-\cfrac{x-2}{5-x}}}$$

A) 1 B) 2 C) 3 D) –1 E) 0

RESOLUCIÓN :

* Debe tenerse en cuenta que los términos que son iguales en los dos miembros de la ecuación se pueden cancelar directamente; es decir: 5 con 5; 2 con 2; 3 con 3; -4 con -4 y 1 con 1 ; quedando :

$$\frac{x-1}{x-3}=-\frac{x-2}{5-x}$$

* O lo que es lo mismo : $\frac{x-1}{x-3}=\frac{x-2}{x-5}$

$\rightarrow x^2+5x-x+5=x^2-2x-3x+6$

* Simplificando : $-x+5=6 \rightarrow x=-1$

RPTA: "D"

ROBLEMA 13 :

Resolver : $\frac{x^2-14x+50}{x^2+6x+10}=\left(\frac{x+3}{x-7}\right)^{-2}$

A) 2 B) 1 C) 3 D) 4 E) 8

RESOLUCIÓN :

* Transformando el exponente negativo en positivo y desarrollando el cuadrado del binomio obtenemos:

$$\frac{x^2-14x+50}{x^2+6x+10}=\frac{x^2-14x+49}{x^2+6x+9}$$

* Haciendo el cambio de variable :

$$x^2-14x+49=a \wedge x^2+6x+9=b$$

* Tendríamos : $\frac{a+1}{b+1}=\frac{a}{b} \rightarrow ab+b=ab+a$

* De donde $b=a$ ó $x^2+6x+9=x^2-14x+49$

$\rightarrow 20x=40 \rightarrow x=2$

RPTA: "A"

PROBLEMA 14:

Resolver: $\frac{1}{x+4}+\frac{1}{x-4}=\frac{8}{x^2-16}$

RESOLUCIÓN :

* Se aprecia que $x \neq 4$ y $x \neq -4$

* Operando , resulta :

$$\frac{x-4+x+4}{x^2-16}=\frac{8}{x^2-16} \rightarrow 2x=8 \rightarrow x=4$$

* Pero como $x \neq 4$ no está definido (ya que $\frac{1}{4-4}=\frac{1}{0}$ no existe), entonces la ecuación no tiene solución.

PROBLEMA 15 :

Resolver :

$$(x-9)(x-7)(x-5)(x-1)=(x-2)(x-4)(x-6)(x-10)$$

A) 1 B) 2 C) 5 D) 6,5 E) 5,5

RESOLUCIÓN :

* Efectuando convenientemente :

$$\underbrace{(x-9)(x-1)}\underbrace{(x-7)(x-5)}=(x-4)(x-6)(x-2)(x-10)$$

$\rightarrow (x^2-10x+9)(x^2-12x+35)=(x^2-10x+24)(x^2-12x+20)$

* Haciendo: $\begin{cases} x^2-10x=m \\ x^2-12x=n \end{cases}$

$\rightarrow (m+9)(n+35)=(m+24)(n+20)$

$\rightarrow mn+35m+9n+315=mn+20m+24n+480$

* Simplificando se tiene :

$$15m-15n=165 \rightarrow m-n=11$$

* Reemplazando :

$$x^2-10x-x^2+12x=11$$

$\rightarrow 2x=11 \rightarrow x=5,5$

RPTA: "E"

PROBLEMA 16 :

Resolver : $\frac{\sqrt{5x+a}+\sqrt{5x-a}}{\sqrt{5x+a}-\sqrt{5x-a}}=\frac{3}{2}$

A) a B) $2a$ C) $\frac{17a}{21}$ D) $\frac{13a}{60}$ E) 1

RESOLUCIÓN :

* Haciendo el cambio de variable :

$$\begin{cases} \sqrt{5x+a}=m \\ \sqrt{5x-a}=n \end{cases}$$

* La ecuación se transforma en :

$$\frac{m+n}{m-n}=\frac{3}{2} \rightarrow 2m+2n=3m-3n \rightarrow 5n=m$$

* Volviendo a la variable original :

$$5\sqrt{5x-a}=\sqrt{5x+a}$$

* Elevando al cuadrado ; se obtiene :

$$25(5x-a)=(5x+a)$$

$$\rightarrow 125x-25a=5x+a \rightarrow x=\frac{13a}{60}$$

RPTA: "D"

PROBLEMA 17 :

Calcule el valor de x en la ecuación :

$$\frac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}=\frac{b}{a}$$

RESOLUCIÓN :

* Se sabe que; por proporciones se cumple:

$$\Rightarrow \boxed{\frac{A}{B}=\frac{C}{D}\Rightarrow\frac{A+B}{A-B}=\frac{C+D}{C-D}}$$

* La ecuación es :

$$\frac{2\sqrt{a+x}}{2\sqrt{a-x}}=\frac{b+a}{b-a}\Rightarrow\frac{\sqrt{a+x}}{\sqrt{a-x}}=\frac{b+a}{b-a}$$

* Elevando al cuadrado se tiene :

$$\frac{a+x}{a-x}=\frac{(b+a)^2}{(b-a)^2}$$

* Por propiedad de proporciones :

$$\frac{2a}{2x}=\frac{(b+a)^2+(b-a)^2}{(b+a)^2-(b-a)^2}$$

* Por Legendre se tiene :

$$\frac{a}{x}=\frac{2(b^2+a^2)}{4ba}\Rightarrow \boxed{x=\frac{2a^2b}{a^2+b^2}}$$

PROBLEMA 18 :

Hallar x en : $\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}=\frac{\sqrt{a+b}}{\sqrt{a-b}}$

RESOLUCIÓN :

* Por propiedad de las proporciones:

$$\boxed{\frac{A}{B}=\frac{C}{D}\Rightarrow\frac{A+B}{A-B}=\frac{C+D}{C-D}}\rightarrow\frac{2\sqrt{1+x}}{2\sqrt{1-x}}=\frac{\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}}$$

* Elevando al cuadrado y simplificando :

$$\frac{1+x}{1-x}=\frac{\left(\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}\right)^2}{\left(\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}\right)^2}$$

* Por proporciones :

$$\frac{2}{2x}=\frac{\left(\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}\right)^2+\left(\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}\right)^2}{\left(\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}\right)^2-\left(\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}\right)^2}$$

$$\rightarrow\frac{1}{x}=\frac{\cancel{2}(a+\cancel{b}+a-\cancel{b})}{\cancel{4}\sqrt{a^2-b^2}}$$

* Simplificando :

$$\frac{1}{x}=\frac{2a}{2\sqrt{a^2-b^2}}\rightarrow x=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$$

PROBLEMA 19 :

Calcular «x» en : $\frac{\sqrt[n]{ax+1}+\sqrt[n]{ax}}{\sqrt[n]{ax+1}-\sqrt[n]{ax}}=a$

Sabiendo que : $(a-1)^n=a(a+1)^{n-1}$

A) 1 B) 0 C) –1 D) 2 E) –4

RESOLUCIÓN :

* Por propiedad de proporciones :

$$\frac{A}{B}=\frac{C}{D}\Rightarrow\frac{A+B}{A-B}=\frac{C+D}{C-D}\Rightarrow\frac{2\sqrt[n]{ax+1}}{2\sqrt[n]{ax}}=\frac{a+1}{a-1}$$

* Simplificando y elevando :

$$\frac{ax+1}{ax}=\frac{(a+1)^n}{(a-1)^n}\text{.........................}(I)$$

* De la condición :

$$(a-1)^n=a(a+1)^n.(a+1)^{-1}\rightarrow\frac{(a+1)^n}{(a-1)^n}=\frac{a+1}{a}$$

* Reemplazando en *(I)* : $\frac{ax+1}{ax}=\frac{a+1}{a}$

* En aspa :

$$ax^2+a=a^2x+ax\rightarrow ax=a\rightarrow x=1$$

RPTA: "A"

PROBLEMA 20 :

Hallar el valor de «x» en la ecuación :

$$\sqrt{3x-5}-\sqrt{x-1}=\sqrt{2x-3}-\sqrt{4x-7}$$

A) 1 B) 0 C) –1 D) 2 E) 5

RESOLUCIÓN :

* Transponiendo :

$$\sqrt{4x-7}-\sqrt{x-1}=\sqrt{2x-3}-\sqrt{3x-5}$$

* Elevando al cuadrado :

$$\left(\sqrt{4x-7}-\sqrt{x-1}\right)^2=\left(\sqrt{2x-3}-\sqrt{3x-5}\right)^2$$

$$\rightarrow 4x-7+x-1-2\sqrt{4x-7}.\sqrt{x-1}=$$

$$2x-3+3x-5-2\sqrt{2x-3}\times\sqrt{3x-5}$$

$$\rightarrow 5x-8-2\sqrt{(4x-7)(x-1)}=$$

$$5x-8-2\sqrt{(2x-3)(3x-5)}$$

* Simplificando y elevando al cuadrado :

$$(4x-7)(x-1)=(2x-3)(3x-5)$$

$$\rightarrow 4x^2-11x+7=6x^2-19x+15$$

$$\rightarrow 0=x^2-4x+4$$

$\rightarrow (x-2)^2=0 \Rightarrow x=2$

RPTA: "D"

PROBLEMA 21 :

Resolver : $\sqrt{4x-1}+\sqrt{x}=\sqrt{2+x+2\sqrt{2x}}$

A) 1 B) 2 C) 0 D) $\frac{3}{4}$ E) $\frac{7}{2}$

RESOLUCIÓN :

* Transformando el **2do.** miembro :

$$\sqrt{2+x+2\sqrt{2x}}=\sqrt{\left(\sqrt{x}+\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{x}+\sqrt{2}$$

* En la ecuación :

$$\sqrt{4x-1}+\sqrt{x}=\sqrt{x}+\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{4x-1}=\sqrt{2} \Rightarrow 4x-1=2 \rightarrow x=\frac{3}{4}$$

RPTA: "D"

PROBLEMA 22 :

Luego de resolver la siguiente ecuación:

$$\sqrt{x-4a+16}=2\sqrt{x-2a+4}+\sqrt{x}$$

Determinar el valor de: $E=(4x)^{2x}$

A) a^{a^2} B) a^{2a} C) a^{4a} D) a^4 E) a

RESOLUCIÓN :

* Transponiendo :

$$\sqrt{x-4a+16}+\sqrt{x}=2\sqrt{x-2a+4}$$

* Elevando al cuadrado cada miembro :

$$x-4a+16+2\sqrt{x(x-4a+16)}+x=4x-8a+16$$

* Simplificando y transponiendo :

$$2\sqrt{x(x-4a+16)}=2x-4a \Rightarrow \sqrt{x(x-4a+16)}=x-2a$$

* Nuevamente al cuadrado :

$$x(x-4a+16)=(x-2a)^2$$

$$\rightarrow x^2-4ax+16x=x^2-4ax+4a^2$$

* De donde : $16x=4a^2 \rightarrow x=\frac{a^2}{4}$

* Se pide : $E=\left(4.\frac{a^2}{4}\right)^{2\times\frac{a^2}{4}}=a^{a^2}$

RPTA: "A"

PROBLEMA 23 :

¿Qué valor debe tomar «a» para que la ecuación:

$\frac{a}{b}(x-a)=\frac{b}{a}(x-b)$ se incompatible.

A) $2b$ B) b C) $-b$ D) b^2 E) $-2b$

RESOLUCIÓN :

* Efectuando : $a^2(x-a)=b^2(x-b)$

$$\rightarrow a^2x-a^3=b^2x-b^3$$

* Transponiendo : $a^2x-b^2x=a^3-b^3$

$$\rightarrow x(a^2-b^2)=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

$$\rightarrow x=\frac{a^2+ab+b^2}{a+b}$$

* Será incompatible si : $a+b=0 \rightarrow a=-b$

RPTA: "C"

PROBLEMA 24 :

Resolver la ecuación :

$\frac{x+n}{x-2}+\frac{x-n}{x-1}=n$; si es de primer grado

A) 2 B) 2/3 C) 3/2 D) 1/2 E) 1

RESOLUCIÓN :

* Efectuando :

$$(x+n)(x-1)+(x-n)(x-2)=n(x-2)(x-1)$$

$$\rightarrow x^2-x+\cancel{nx}-n+x^2-2x-\cancel{nx}+2n=nx^2-3nx+2n$$

* Simplificando :

$$2x^2-3x+n=nx^2-3xn+2n$$

$$\rightarrow x^2(2-n)+3x(n-1)-n=0$$

* Si la ecuación es de **1er.** grado, el coeficiente del término cuadrado debe ser cero.

$$2-n=0 \Rightarrow \boxed{n=2}$$

* Reemplazando :

$$x^2(\cancel{2-n})+3x(n-1)-n=0 \rightarrow 3x-2=0 \rightarrow x=\frac{2}{3}$$

RPTA: "B"

PROBLEMA 25 :

En la ecuación :

$$(2x-1)m^2-2(x-1)-(3x-1)m=0$$

Determinar el valor de «m» de manera que «x» posea infinitas soluciones.

A) -1 B) $-1/2$ C) 3 D) -2 E) 2

RESOLUCIÓN :

* Efectuando la ecuación :

$$2m^2x-m^2-2x+2-3mx-m=0$$

$$\rightarrow (2m^2-2-3m)x-(m^2+m-2)=0$$

* Para que «x» tenga infinitas soluciones se cumple que :

• $2m^2-3m-2=0$

$$\rightarrow (m-2)(2m+1)\begin{cases} m=2 \\ m=-\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

• $m^2+m-2=0\begin{cases} m=2 \\ m=-1 \end{cases}$

* Luego el valor de «m» es **2**

RPTA: "E"

PROBLEMA 26 :

¿Qué cantidad debe agregarse a cada uno de los términos de la fracción m/n para que sea igual a su inversa?

A) m B) n C) $m+n$ D) $-(m+n)$ E) 1

RESOLUCIÓN :

* Sea «x» la cantidad por restarse.
* La ecuación es: En aspa

$$\frac{m+x}{n+x}=\frac{n}{m} \quad \rightarrow \; m(m+x)=n(n+x)$$

$$\rightarrow m^2+mx=n^2+nx$$

* Transponiendo: $mx-nx=n^2-m^2$
* Factorizando: $x(m-n)=-(m^2-n^2)$
* Despejando: $x=\dfrac{-(m+n)(m-n)}{m-n}$

$\rightarrow x=-m-n=-(m+n)$

RPTA: "D"

PROBLEMA 27 :

Resuelva la ecuación :

$$2004(2002x+2004)=2003(2003x+2005)$$

A) 1 B) 0 C) 2 D) -2 E) $\sqrt{2}$

RESOLUCIÓN :

* Haciendo 2003 $\begin{cases} 2002=m-1 \\ 2004=m+1 \\ 2005=m+2 \end{cases}$

* Reemplazando en la ecuación :

$$(m+1)[(m-1)x+m+1]=m(mx+m+2)$$

$$\Leftrightarrow (m+1)(m-1)x+(m+1)^2=m^2x+M(m+2)$$

$$\Rightarrow (m^2-1)x-m^2x=m^2+2m-(m+1)^2$$

$$\Rightarrow (\cancel{m^2}-1-\cancel{m^2})x=\cancel{m^2}+\cancel{2m}-(\cancel{m^2}+\cancel{2m}+1)$$

$\rightarrow x=1$

RPTA: "A"

PROBLEMA 28 :

Calcule la suma de cifras del número x, sabiendo que satisface

$$\frac{x}{1\times 2}+\frac{2x}{1\times 2\times 3}+\frac{3x}{1\times 2\times 3\times 4}+\frac{4x}{1\times 2\times 3\times 4\times 5}=119$$

A) 3 B) 1 C) 4 D) 0 E) -1

RESOLUCIÓN :

* Factorizando :

$$x\left(\frac{1}{1\times 2}+\frac{2}{1\times 2\times 3}+\frac{3}{1\times 2\times 3\times 4}+\frac{4}{1\times 2\times 3\times 4\times 5}\right)=119$$

$$x\left(\left(1-\cancel{\frac{1}{1\times 2}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{1\times 2}}-\cancel{\frac{1}{1\times 2\times 3}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{1\times 2\times 3}}-\cancel{\frac{3}{1\times 2\times 3\times 4}}\right)+\right.$$

$$\left.+\left(\cancel{\frac{3}{1\times 2\times 3\times 4}}-\cancel{\frac{4}{1\times 2\times 3\times 4\times 5}}\right)\right)=119$$

$$x\left(1-\frac{1}{120}\right)=119 \Rightarrow x\left(\frac{119}{120}\right)=119 \rightarrow x=120$$

* Se pide : $1+2+0=3$

RPTA: "A"

PROBLEMA 29 :

Al resolver la ecuación :

$(x+b+c)(x+a+b)(x+a+c)(a+b+c)=abcx$ con respecto a x entonces una solución es:

A) 0 B) $a+b+c$ C) $-(a+b+c)$ D) 1 E) -1

RESOLUCIÓN :

* Sea : $x+a+b+c=y$
* Reemplazando :

$$(y-a)(y-c)(y-b)(a+b+c)=abc(y-a-b-c)$$

$$\rightarrow (a+b+c)y^3-(a+b+c)^2y^2+(a+b+c)(ab+bc+ac)y$$

$$-abcy\cancel{(a+b+c)}=abcy-abc\cancel{(a+b+c)}$$

$$\rightarrow (a+b+c)y^3-(a+b+c)^2y^2+[(a+b+c)(ab+bc+ac)-abc]y=y$$

$$\rightarrow y=0 \vee (a+b+c)y^2-(a+b+c)^2y+(a+b+c)(ab+bc+ac)-abc=0$$

* Pero para $y=0 \rightarrow x+a+b+c=0$

$\rightarrow x=-(a+b+c)$

RPTA: "C"

PROBLEMA 30 :

Resolver :

$$\frac{2(x^2-6x-9)}{(x^2-5x+6)(x-4)(x-3)}=\frac{1}{x^2-5x-6}+\frac{5}{x-3}$$

Anuncie el valor de verdad de las proposiciones.

I) La solución es racional

II) La solución es irracional o la solución es fraccionaria

III) La solución es real y la solución es entera.

A) VVF B) VVV C) FFF D) VFV E) FVF

RESOLUCIÓN :

* Lo equivalente , será :

$$\frac{2(x-3)^2}{(x-\cancel{3})(x-2)(x-4)(x-\cancel{3})}=\frac{1}{(x-2)(x-\cancel{3})}+\frac{5}{(x-\cancel{3})}$$

$\rightarrow 2(x-3)=(x-4)+5(x-2)(x-4)$

$\rightarrow 2x-6=5x^2-9x-20x+36$

$\rightarrow 5x^2-31x+42=0$

$\rightarrow (5x-21)(x-2)=0$

$\rightarrow x=\dfrac{21}{5} \vee \underbrace{x=2}_{\text{solución extraña}}$

$\rightarrow C.S.=\left\{\dfrac{21}{5}\right\}$

RPTA: "A"

PROBLEMA 31 :

Resolver : $\dfrac{x-a}{b}+\dfrac{x-b}{a}=\dfrac{b}{x-a}+\dfrac{a}{x-b}$ $/ab\neq 0$

Luego indique el producto de dos soluciones

A) 0 B) ab C) a D) b E) a + b

RESOLUCIÓN :

* Transponiendo :

$$\frac{x-a}{b}-\frac{b}{x-a}=\frac{a}{x-b}-\frac{x-b}{a}$$

$$\rightarrow \frac{(x-a)^2-b^2}{b(x-a)}=\frac{a^2-(x-b)^2}{(x-b)a}$$

$$\rightarrow \frac{(x-a-b)(x-a+b)}{b(x-a)}=\frac{(a+x-b)(a-x+b)}{(x-b)a}$$

$$\rightarrow (x-a-b)=0 \vee \frac{x-a+b}{b(x-a)}=\frac{x+a-b}{a(x-b)}$$

$$\rightarrow x=a+b \vee \frac{(x-a+b)(x-b)}{(x-a)(x+a-b)}=\frac{b}{a} \rightarrow x=0$$

* Como 0 es una solución, entonces el producto de soluciones será «0».

RPTA: "A"

PROBLEMA 32 :

Si una raíz de la ecuación $3x^2+4x+12a+9ax=0$ es mayor que 6, entonces la afirmación correcta del coeficiente «a» es:

A) $a=2$ B) $a>-2$ C) $a=-2$ D) $a<-2$ E) $-2<a<2$

RESOLUCIÓN :

* Factorizando ;

$$3x^2+(9a+4)x+12a=0$$

$3x \quad\quad 4 \rightarrow x_1=-\dfrac{4}{3}$

$x \quad\quad 3a \rightarrow x_2=-3a$

* Luego según enunciado :

$$x_2>6 \rightarrow -3a>6 \rightarrow a<-2$$

RPTA: "D"

PROBLEMA 33 :

Resolver : $(1-x)^{1/2}-(x^2+1)^{1/2}=0$.

Dar como respuesta la suma de sus raíces.

A) -2 B) -1 C) 1 D) 2 E) 0

RESOLUCIÓN :

* Transponiendo : $(1-x)^{1/2}=(x^2+1)^{1/2}$

$\rightarrow 1-x=x^2+1 \rightarrow x^2+x=0$

* De la última ecuación obtenida :

Suma de raíces $=-\dfrac{1}{1}=-1$.... (Propiedad)

RPTA: "B"

PROBLEMA 34 :

El cociente del cuadrado de un número entero menos 45 entre la raíz cuadrada de la diferencia del cuadrado del número mencionado y 72 es 12. El valor del número es:

A) 6 B) 8 C) 10 D) 9 E) 11

RESOLUCIÓN :

* Sea el número entero x, luego del enunciado del problema se establece :

$$\frac{x^2-45}{\sqrt{x^2-72}}=12 \text{ ....(I)}$$

* Haciendo : $x^2-72=a$ ....(II)

* Reemplazando en (I) : $\dfrac{a+27}{\sqrt{a}}=12$

* Elevamos al cuadrado ambos miembros :

$$\frac{(a+27)^2}{a}=144 \rightarrow a^2+54a+27^2=144a$$

$\rightarrow a^2-90a+27=0$

$a \quad -81=0 \rightarrow a=81$

$a \quad -9 \;=0 \rightarrow a=9$

* Reemplazando : $a=81 \rightarrow x^2-72=9 \rightarrow x=9$

RPTA: "D"

PROBLEMA 35 :

Encuentre la suma de los valores enteros de x para los cuales $x^2-13x+39$ sea un cuadrado perfecto.

A) 6 B) 23 C) 13 D) 19 E) 39

RESOLUCIÓN :

* Del dato : $x^2-13x+39=n^2$

* Multiplicando por 4 y completando cuadrados:

$$4\left(x-\frac{13}{2}\right)^2-4n^2=13$$

* Factorizando :

$(2x+2n-13)(2x-2n-13)=13$

$\begin{cases}2x+2n-13=13\\2x-2n-13=1\end{cases} \Rightarrow \begin{matrix}x=3\\n=3\end{matrix}$ ó $\begin{cases}2x+2n-13=1\\2x-2n-13=1\end{cases} \Rightarrow \begin{matrix}x=3\\n=3\end{matrix}$

→ La suma de valores de x es 13

RPTA: "C"

PROBLEMA 36:

Si la suma de las raíces de la ecuación :

$a^2x^2 - 2ax + 21 = 0,\ a \neq 0$ es -5, hallar a .

A) 5/2 B) 2/5 C) –2/5 D) 1 E) –5/2

RESOLUCIÓN :

* Por dato :

$$x_1 + x_2 = -5$$

$\rightarrow -\dfrac{2a}{a^2} = -5$........ (por propiedad)

$\rightarrow \dfrac{2}{a} = 5 \rightarrow a = \dfrac{2}{5}$

RPTA: "B"

PROBLEMA 37 :

Si $a > b > 0$, entonces :

$$x_1 = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{a-b}} \text{ y } x_2 = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} - \sqrt{a-b}}$$

son raíces de la ecuación:

A) $ax^2 - bx + a = 0$ B) $ax^2 + ax + b = 0$

C) $ax^2 - ax - b = 0$ D) $bx^2 - 2ax + a = 0$

E) $bx^2 + 2ax + a = 0$

RESOLUCIÓN :

* La ecuación será de la forma :

$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2 = 0$ cuyas raíces son :

$$x_1 = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{a-b}};\ x_2 = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} - \sqrt{a-b}}$$

* Donde $a>b>0$, entonces :

$$x_1 + x_2 = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{a-b}} + \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} - \sqrt{a-b}}$$

$$\rightarrow x_1 + x_2 = \frac{\sqrt{a}\left(\sqrt{a} - \sqrt{a-b}\right) + \sqrt{a}\left(\sqrt{a} + \sqrt{a-b}\right)}{\sqrt{a}^2 - \sqrt{a-b}^2}$$

$$\rightarrow x_1 + x_2 = \frac{2a}{b}$$

* Además :

$$x_1.x_2 = \frac{\sqrt{a}}{\left(\sqrt{a} + \sqrt{a-b}\right)} \cdot \frac{\sqrt{a}}{\left(\sqrt{a} - \sqrt{a-b}\right)} = \frac{a}{b}$$

* Reemplazando :

$$x^2 - \left(\frac{2a}{b}\right)x + \frac{a}{b} = 0 \rightarrow bx^2 - 2ax + a = 0$$

RPTA: "D"

PROBLEMA 38 :

Si x_1 y x_2 son las raíces de la ecuación $x^2 - kx + 12 = 0$ que satisfacen la condición $\dfrac{x_1}{x_2} + \dfrac{x_2}{x_1} = \dfrac{1}{12}$, entonces el valor de $k \in \mathbb{R}^+$ es:

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

RESOLUCIÓN :

* Aplicando la suma y producto de raíces :

$$x_1 + x_2 = k \wedge x_1.x_2 = 12$$

* Por condición : $\dfrac{x_1}{x_2} + \dfrac{x_2}{x_1} = \dfrac{1}{12}$

$\rightarrow \dfrac{x_1^2 + x_2^2}{x_1.x_2} = \dfrac{1}{12} \rightarrow x_1^2 + x_2^2 = 1$

$\rightarrow x_1^2 + x_2^2 + 2x_1.x_2 = 1 + 2\underbrace{x_1x_2}_{12}$

$\rightarrow (x_1 + x_2)^2 = 25 \rightarrow k^2 = 25$

$\rightarrow k = 5 \vee k = -5$

* Pero : $k \in \mathbb{R}^+ \rightarrow k = 5$

RPTA: "E"

PROBLEMA 39 :

Hallar α tal que la ecuación tenga raíces iguales :

$$(\alpha + 4)x^2 - 1 = (2\alpha + 2)x - \alpha$$

A) 1 B) 2 C) 5 D) 0 E) –3

RESOLUCIÓN :

* Como tiene raíces iguales, luego su discriminante debe ser igual a cero $(\Delta = 0)$, es decir :

$$(2\alpha + 4)^2 - 4(\alpha + 4)(\alpha - 1) = 0$$

* Al reducir , resulta : $\alpha = 5$

RPTA: "C"

PROBLEMA 40 :

Si la ecuación $x^2 + (2n - 1)x + 4 - n = 0$ tiene raíces reales múltiples, entonces $4n^2$ es igual a

A) 12 B) 9 C) 15 D) 8 E) 0

RESOLUCIÓN :

* Si la ecuación $x^2 + (2n - 1)x + 4 - n = 0$ tiene raíces múltiples sus raíces son iguales, entonces su discriminante es cero , es decir:

$$(2n - 1)^2 - 4(4 - n) = 0$$

$$\Rightarrow 4n^2 - \cancel{4n} + 1 - 16 + \cancel{4n} = 0 \rightarrow 4n^2 = 15$$

RPTA: "C"

PROBLEMA 41 :

Si Δ es el discriminante de la ecuación :
$bx^2 + ax + c = 0,\ b \neq 0$ tal que $\Delta > 0$, entonces, la

diferencia entre las raíces mayor y menor de esta ecuación es :

A) $\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$ B) $\frac{\sqrt{\Delta}}{|b|}$ C) $\frac{\sqrt{\Delta}}{|c|}$ D) $\frac{\Delta}{|a|}$ E) $\frac{\Delta}{|b|}$

RESOLUCIÓN :

* Se tiene : $\Delta = a^2 - 4bc > 0$

* Las raíces son : $x = \frac{-a \pm \sqrt{\Delta}}{2b}$

$\Rightarrow x_1 = \frac{-a+\sqrt{\Delta}}{2b}$; $x_2 = \frac{-a-\sqrt{\Delta}}{2b}$

* Luego : $x_2 - x_1 = \frac{-\sqrt{\Delta}}{b} \rightarrow |x_2 - x_1| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|b|}$

RPTA: "B"

PROBLEMA 42 :

Determinar el valor de m, de tal manera que la ecuación de segundo grado.

$x^2 - 2(m^2-4m)x + m^4 = 0$ tenga sus dos raíces con un mismo valor diferente de cero.

A) m=1 B) m=4 C) m=-2 D) m=-4 E) m=2

RESOLUCIÓN :

* Por propiedad de las raíces de las ecuaciones cuadráticas, para que las raíces sean iguales, el discriminante Δ debe ser igual a cero.

$$\Delta = [-2(m^2-4m)]^2 - 4(1)(m^4) = 0$$

* Factorizando :

$$\Delta = 4(m^2-4m)^2 - 4m^4 = 0$$

$\rightarrow \Delta = -32m^3 + 64m^2 = 0$

$\rightarrow \Delta = m^2(m-2) = 0$

* De donde : $m=0$ ó $m=2$ ($m = 0$ se descarta, pues reemplazando este valor en la ecuación, resulta: $x_1 = x_2 = 0$).

RPTA: "E"

PROBLEMA 43 :

Si $a+b \neq 0$, ¿qué valor deberá tener w en la ecuación $(a+b)^2x^2 + 2(a^2-b^2)x + w = 0$ para que sus 2 raíces sean iguales?

A) $(a-b)$ B) $(a-b)^2$ C) a^2-b^2 D) $-(a+b)^2$

RESOLUCIÓN :

* Para que las raíces sean iguales $\Delta = 0$:

$$\Delta = [2(a^2-b^2)]^2 - 4[(a+b)^2][w] = 0$$

$\rightarrow [2(a-b)(a+b)]^2 = 4(a+b)^2 w$

$\rightarrow 4(a-b)^2(a+b)^2 = 4(a+b)^2 w$; $a+b \neq 0$

$\rightarrow (a-b)^2 = w$

RPTA: "B"

PROBLEMA 44 :

En la ecuación $x^2 - 2(n-3)x + 4n = 0$ determine los valores que puede tomar n para que la ecuación posea raíces iguales. Dé como respuesta la suma de estos valores.

A) 1 B) 9 C) 10 D) 0 E) 2

RESOLUCIÓN :

* Raíces iguales entonces $\Delta = 0$ (Δ:discriminante) reemplazando : $[-2(n-3)]^2 - 4(4n) = 0$

* Efectuando :

$$n^2 - 10n + 9 = 0$$

n -9

n -1

$\rightarrow (n-9)(n-1) = 0 \Rightarrow n = 9 \vee n = 1$

$\rightarrow$ Suma de valores de n : 10

RPTA: "C"

PROBLEMA 45 :

Para que valor de m, las raíces de la ecuación $\frac{x^2+3x}{5x+12} = \frac{m-1}{m+1}$, serán iguales en magnitud pero de signo contrario.

A) 1 B) 2 C) -3 D) -4 E) 4

RESOLUCIÓN :

* Operando :

$$x^2(m+1) + 3x(m+1) = 5x(m-1) + 12(m-1)$$

$\rightarrow x^2(m+1) - x(2m-8) - 12(m-1) = 0$

* Luego por tener raíces iguales de signos contrarios se obtendrá:

$$x_1 + x_2 = 0 \rightarrow \frac{2m-8}{m+1} = 0 \rightarrow m = 4$$

RPTA: "E"

PROBLEMA 46 :

Dada la ecuación en «x» :

$abx^2 + ax - \left(\frac{a^2+b^2}{2}\right) = 0$; $ab \neq 0$ de raíces x_1 y x_2 ¿cuánto hay que aumentar a dichas raíces para que sean simétricas?

RESOLUCIÓN :

* Si x_1 y x_2 son raíces $\Rightarrow \left\{ x_1 + x_2 = -\frac{1}{b} \right.$

* Sea k la cantidad tal que se va aumentar:

www.SIGLO21...

(x_1+k) y (x_2+k) (son simétricos)

$\Rightarrow x_1+k+x_2+k=0$

$\Rightarrow x_1+x_2+2k=0-\dfrac{1}{b}+2k=0 \Rightarrow k=\dfrac{1}{2b}$

PROBLEMA 47 :

Determinar las condiciones sobre **p** y **q** a fin de que la ecuación $p+qx+qx^2+px^3=0$ tenga raíces diferentes.

RESOLUCIÓN :

* Factorizando :

$$p(1+x^3)+qx(1+x)=0$$

$\Rightarrow (x+1)\left[px^2+(q-p)x+p\right]=0$

* La expresión entre corchetes tiene raíces iguales si y sólo si :

$$(q-p)^2-4p^2=0$$

* Factorizando : $(q-3p)(q+p)=0$

* Así, la ecuación propuesta tiene raíces diferentes si y sólo si : $(q-3p)(q+p)\neq 0$

PROBLEMA 48 :

Si la ecuación cuadrática $x^2-2mx+m+3=0$ tiene $C.S.=\left\{\dfrac{b}{a}+1;\dfrac{a}{b}+1\right\}$ calcule el valor de m^2

A) 4 B) 9 C) 0 D) 16 E) 100

RESOLUCIÓN :

* Como $\dfrac{b}{a}+1;\dfrac{a}{b}+1$, son soluciones, entonces:

$\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}+2=2m$.....................................(I)

$\left(\dfrac{a}{b}+1\right)\left(\dfrac{b}{a}+1\right)=\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}+2=m+3$ ....(II)

* De (I) = (II):

$$2m=m+3 \rightarrow m=3$$

* Se pide : $m^2=9$

RPTA: "B"

PROBLEMA 49 :

La ecuación $x^2+4x+m-1=0$ tiene raíces reales, pero la ecuación $x^2-2x+m+1=0$ tiene raíces complejas. Hallar la suma de los valores

A) 10 B) 15 C) 14 D) 13 E) 9

RESOLUCIÓN :

* De: $x^2+4x+m-1=0 : 4^2-4(m-1)\geq 0,$ de donde: $m\leq 5$

* De : $x^2-2x+m+1=0 : 4-4(m+1)<0,$ de donde: $0<m$.

* Así : $0<m\leq 5$

* La suma de valores enteros de m es :

$$1+2+3+4+5=15$$

RPTA: "B"

PROBLEMA 50 :

Si las raíces de las ecuaciones en «x»:

$$x^2-3x+m+1=0$$

$$3x^2+5x+m=0$$

son imaginarias y reales respectivamente, determine los valores enteros de «m».

A) {0; 1} B) {0} C) {1} D) {2} E) {0; 2}

RESOLUCIÓN :

* Por condición :

$x^2-3x+m+1=0;$ raíces imaginarias

$\rightarrow \Delta<0 \Rightarrow 9-4(m+1)<0$

$\rightarrow 5-4m<0 \Rightarrow 4m>5$ .... (I)

$3x^2+5x+m=0;$ raíces reales

$\rightarrow \Delta\geq 0 \Rightarrow 25-4(3)(m)\geq 0$

$\rightarrow 25-12m\geq 0 \Rightarrow m\leq\dfrac{25}{12}$..................... (II)

* De (I) y (II) : $\dfrac{5}{4}<m\leq\dfrac{25}{12} \Rightarrow m=2$

RPTA: "D"

PROBLEMA 51 :

Si r y t son raíces de la ecuación $x^2-ax+b=0$ que satisfacen la condición $\dfrac{r^2}{t}+\dfrac{t^2}{r}=3a,$ entonces el producto de las raíces de la ecuación $a^2x^2+2x+b=0$ es :

A) -3 B) $\dfrac{1}{6}$ C) $\dfrac{2}{3}$ D) 3 E) 6

RESOLUCIÓN :

* Por suma y producto de raíces :

$$r+t=a \wedge rt=b$$

* Condición : $\dfrac{r^2}{t}+\dfrac{t^2}{r}=3a$

$\rightarrow r^3+t^3=3a\times rt$

$\rightarrow r^3+t^3+3rt(r+t)=3art+3rt(\underbrace{r+t}_{a})$

$\rightarrow (r+t)^3 = 6art$

$\rightarrow a^3 = 6ab \rightarrow a^2 = 6b$

* Reemplazando en :

$$a^2x^2 + 2x + b = 0; \quad 6bx^2 + 2x + b = 0,$$

cuyo producto de raíces será :

$$x_1x_2 = \frac{b}{6b} \rightarrow x_1x_2 = \frac{1}{6}$$

RPTA: "B"

PROBLEMA 52 :

Hallar «p» si las raíces de la ecuación :

$$x^2 - (p+3)x + \left(\frac{p}{2}\right)^2 + 1 = 0$$

son: $x_1 = m^m + 1;\ x_2 = m^m;\ m \in \mathbb{R}^+$

A) $-\frac{2}{3}$ B) 0 C) $\frac{1}{3}$ D) 1 E) -2

RESOLUCIÓN :

* Por suma y producto de raíces :

$$x_1 + x_2 = p+3 \ \ y \ \ x_1x_2 = \frac{p^2+4}{4}$$

* Por Legendre : $(x_1+x_2)^2 - (x_1-x_2)^2 = 4x_1x_2$

$\rightarrow (p+3)^2 - 1 = p^2 + 4$

$\rightarrow p^2 + 6p + 8 = p^2 + 4 \rightarrow 6p = -4 \rightarrow p = -\frac{2}{3}$

RPTA: "A"

PROBLEMA 53 :

Indicar un valor de «m» para el cual la suma de las cuartas potencias de las raíces de la ecuación: $x^2 - mx + 1 = 0$ sea mínima.

A) $\sqrt{2}$ B) $\sqrt{5}$ C) $\sqrt{6}$ D) 1 E) $\sqrt{3}$

RESOLUCIÓN :

* De : $x_1 + x_2 = m \ \ y \ \ x_1x_2 = 1$

* Entonces : $x_1^2 + x_2^2 = (x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2$

$\rightarrow x_1^2 + x_2^2 = m^2 - 2$

* También :

$$x_1^4 + x_2^4 = (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2(x_1x_2)^2$$

$\rightarrow x_1^4 + x_2^4 = (m^2-2)^2 - 2$

$\rightarrow min(x_1^4 + x_2^4) = -2$, para $m^2 - 2 = 0$

$\rightarrow m = \pm\sqrt{2}$

RPTA: "A"

PROBLEMA 54 :

Si las ecuaciones : $\begin{cases} x^2 - nx + 6 = 0 \\ x^2 - (n+1)x + 8 = 0 \end{cases}$

Tienen una raíz común , entonces el producto de las raíces no comunes es :

A) 4 B) 6 C) 9 D) 12 E) 15

RESOLUCIÓN :

$$x^2 - nx + 6 = 0 \rightarrow \{x_1; x_2\}$$

$$x^2 - (n+1)x + 8 = 0 \rightarrow \{x_1; x_3\}$$

* Por propiedades de raíces:

$$x_1 + x_2 = n \ ; \ x_1 + x_3 = n+1$$

$$x_1x_2 = 6 \ ; \ x_1x_3 = 8$$

* De donde: $x_2 - x_3 = -1 \ \wedge \ \frac{x_2}{x_3} = \frac{2}{3}$

$\rightarrow x_2 + 1 = x_3 \ \wedge \ 3x_2 = 2x_3$

$\rightarrow 3x_2 = 2(x_2+1) \rightarrow x_2 = 2 \ , \ x_3 = 3$

$\rightarrow x_2x_3 = 6$

RPTA: "B"

PROBLEMA 55 :

La condición para que las ecuaciones cuadráticas $x^2 + bx + c = 0 \ \wedge \ x^2 + b'x + c' = 0$ tengan una raíz común es:

A) $(b-b')^2 + (c-c')(bc' - b'c) = 0$

B) $(c-c')^2 + (b-b') = 0$

C) $(b-b')(bc' - b'c) = 0$

D) $(c-c')^2 + (bc' - b'c) = 0$

E) $(c-c')^2 + (b-b')(bc' - b'c) = 0$

RESOLUCIÓN :

* Si: $x^2 + bx + c = 0 \ \wedge \ x^2 + b'x + c' = 0$

Tienen una raíz común (x_1), entonces:

$$x_1^2 + bx_1 + c = 0 \text{.......................... } (I)$$

$$x_1^2 + b'x_1 + c' = 0 \text{........................ } (II)$$

* Restando :

$$x_1(b-b') + (c-c') = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{(c'-c)}{(b-b')}$$

* Reemplazando en (I) :

$$\left(\frac{c'-c}{b-b'}\right)^2 + b\left(\frac{c'-c}{b-b'}\right) + c = 0$$

$\Rightarrow (c'-c)^2 + b(b-b')(c'-c) + c(b-b')^2 = 0$

$\rightarrow (c'-c)^2 + (b-b')(bc' - b'c) = 0$

RPTA: "E"

PROBLEMA 56 :

Respecto de la ecuación en x :

$$ax^2+(a+2)x+1=0;\ a\in R;\ a\neq 0$$

Indique verdadero o falso en las proposiciones:

I) $a>1\Rightarrow$ Las raíces son reales negativas.

II) Tiene al menos una raíz positiva $\forall\ a\in R\ ;\ a\neq 0$

III) $\exists\ a\in R\ /$ Las raíces no son reales.

A) VVV B) FVV C) FFF D) VFF E) VFV

RESOLUCIÓN :

* De la ecuación $ax^2+(a+2)x+1=0;\ a\neq 0$

Analizando :

I) Para $a>1$, sean $x_1; x_2$ raíces de la ecuación

$$\Delta=(a+2)^2-4a=a^2+4>0$$

$$x_1+x_2=\frac{-(a+2)}{a}<0\ ;\ x_1x_2=\frac{1}{a}>0$$

$\Rightarrow x_1 ; x_2$ son negativas. *(VERDADERO)*

II) No siempre, por lo menos una raíz es positiva *(FALSO)* por *I*

III) $\Delta=a^2+4>0,\ \forall\ a\in R$; Siempre las raíces son reales. *(FALSO)*

RPTA: "D"

PROBLEMA 57 :

Si la ecuación cuadrática: $x^2-mx+(1-m)=0$ tiene dos raíces positivas diferentes, entonces el conjunto de valores reales que admite m , es :

A) $\langle-\infty;0\rangle$ B) $\langle 2\sqrt{2}-2;1\rangle$ C) $\langle 1;\infty\rangle$ D) R E) $\langle 2;6]$

RESOLUCIÓN :

* Como :

$x^2-mx+(1-m)=0,$ tiene dos raíces positivas diferentes, es decir :

$x_1\neq x_2\ \wedge\ x_1>x_2>0$

$\rightarrow \Delta>0\ \wedge\ x_1+x_2>0\ \wedge\ x_1x_2>0$

$\rightarrow m^2-4(1-m)>0\ \wedge m>0\ \wedge\ 1-m>0$

$\rightarrow m^2+4m-4>0\ \wedge \underbrace{m>0\ \wedge\ m<1}$

$\rightarrow (m+2)^2-8>0\ \wedge\ 0<m<1$

$\rightarrow \underbrace{(m+2+2\sqrt{2})}_{+\ para\ 0<m<1}(m+2-2\sqrt{2})>0\ \wedge 0<m<1$

$\rightarrow m+2-2\sqrt{2}>0\ \wedge\ 0<m<1$

$\rightarrow m>2\sqrt{2}-2\ \wedge 0<m<1$

$\rightarrow m\in\langle 2\sqrt{2}-2\ ;1\rangle$

RPTA: "B"

PROBLEMA 58 :

Si la siguiente ecuación $x^2-mx-(m+1)=0$ tiene dos raíces reales, entonces el intervalo en que debe variar «m» par que sus dos raíces estén a la izquierda del número 4 , es :

A) $\langle-\infty;8\rangle$ B) $\langle 3;\infty\rangle$ C) $\langle-\infty;3\rangle$ D) R E) $\langle-\infty;-3\rangle$

RESOLUCIÓN :

* Como : $x^2-mx-(m+1)=0,$ tiene dos raíces reales a la izquierda de 4 , es decir :

$$x_1<4\ \wedge\ x_2<4$$

* Factorizando :

$$x^2-mx-(m+1)=0,$$

$x \quad\quad 1$
$x \quad\quad -(m+1)$

$\rightarrow x_1=-1\ \wedge\ x_2=m+1,$ luego :

$-1<4\ \wedge\ m+1<4\rightarrow m<3\ \rightarrow\ m\in\langle-\infty;3\rangle$

RPTA: "C"

PROBLEMA 59 :

Sean $f:R\ \wedge\ g:R/(0)\rightarrow R$ funciones definidas por:

$$f(x)=mx+12\ ;\ m\neq 0\ ;\ g(x)=\frac{2}{x}$$

¿Para qué valores de m las funciones f y g admiten dos puntos de intersección?

A) $\langle-1;\infty\rangle$ B) $\langle-18;0\rangle\cup\langle 0;\infty\rangle$ C) $\langle-\infty;-3\rangle$ D) $\langle-\infty;\infty\rangle$

RESOLUCIÓN :

* Los puntos de intersección se encuentran igualando las funciones :

$$f(x)=g(x)\ \rightarrow\ mx+12=\frac{2}{x}$$

(ecuación cuadrática cuya solución nos da los dos puntos de intersección).

* Por condición del problema admiten dos puntos de intersección, entonces el discriminante de $mx^2+12x-2$ debe ser mayor que cero.

* Por lo tanto: $(12)^2-4(m)(-2)>0$

$\rightarrow (18+m)>0$

$\rightarrow m>-18\ \wedge m\neq 0$.................*(dato)*

$\rightarrow m\in\langle-18;0\rangle\cup\langle 0;+\infty\rangle$

RPTA: "B"

PROBLEMA 60 :

Si $A=\left\{\dfrac{2n-1}{n-1};\dfrac{2n+3}{n+1}\right\}$ es el conjunto solución de la ecuación $ax^2+2bx+4c=0\ \wedge\ a\neq 0,$ entonces

el valor de $L = \dfrac{b^2 - 4ac}{(a+b+c)^2}$ es:

A) 1 B) 2 C) 4 D) 9 E) 16

RESOLUCIÓN :

* $A = \left\{\dfrac{2n-1}{n-1}; \dfrac{2n+3}{n+1}\right\}$ puede colocarse así:

$$A = \left\{2 + \frac{1}{n-1}; 2 + \frac{1}{n+1}\right\}$$

* De la ecuación: $ax^2 + 2bx + 4c = 0$ por propiedades de raíces , se tiene :

$I)\ 2 + \dfrac{1}{n-1} + 2 + \dfrac{1}{n-1} = -\dfrac{2b}{a} \rightarrow \dfrac{1}{n-1} + \dfrac{1}{n+1} = -\dfrac{2b}{a} - 4$

$II)\ \left(2 + \dfrac{1}{n-1}\right)\left(2 + \dfrac{1}{n+1}\right) = \dfrac{4c}{a}$

$\rightarrow 4 + 2\left(\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+1}\right) + \dfrac{1}{(n-1)(n+1)} = \dfrac{4c}{a}$

$\rightarrow 4 + 2\left(-\dfrac{2b}{a} - 4\right) + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n+1}\right) = \dfrac{4c}{a}$

$\rightarrow \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n+1}\right) = \dfrac{4c}{a} + \dfrac{4b}{a} + 4$

* $2 + \dfrac{1}{n-1} - \left(2 + \dfrac{1}{n+1}\right) = \dfrac{\sqrt{(2b)^2 - 4(a)(c)}}{a}$

$\rightarrow \dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n+1} = \dfrac{2\sqrt{b^2 - 4ac}}{a}$

* Reemplazando en la anterior :

$\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2\sqrt{b^2 - 4ac}}{a}\right) = \dfrac{4c}{a} + \dfrac{4b}{a} + 4 \rightarrow \sqrt{b^2 - 4ac} = 4(a+b+c)$

* De donde : $L = \dfrac{b^2 - 4ac}{(a+b+c)^2} = 16$

RPTA: "E"

PROBLEMA 61 :

En la ecuación $P(x) = 2ax^2 + (3a-1)x + (a+b) = 0$ calcular b, para que exista un solo valor de «a» que permita que las raíces de $P(x) = 0$, sean iguales.

RESOLUCIÓN :

* Si las raíces de la ecuación son iguales, se deben cumplir : $\Delta = 0$

$$\Delta = (3a-1)^2 - 4(2a)(a+b) = 0$$

$\rightarrow 9a^2 - 6a + 1 - 8a^2 - 8ab = 0$

$\rightarrow 9a^2 - 6a + 1 - 8a^2 - 8ab = 0$

* Como es una ecuación cuadrática en «a», debe existir un solo valor «a».

* $\Delta = (6+8b)^2 - 4(1)(1) = 0$

$36 + 96b + 64b^2 - 4 = 0$

$\rightarrow b = -1 \vee b = -\dfrac{1}{2}$

* Entonces : $C.S. = \left\{-1; -\dfrac{1}{2}\right\}$

PROBLEMA 62 :

Dada la ecuación $ax^2 + bx + c = 0,\ a \neq 0,$ si S_1 es la suma de las raíces, S_2 la suma de sus cuadrados y S_3 la suma de sus cubos. Hallar.

$$S = aS_3 + bS_2 + cS_1$$

A) 1 B) 0 C) -1 D) 4 E) 8

RESOLUCIÓN :

* Sean x_1, x_2, las raíces , luego :

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a};\ x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$$

$S_1 = x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$

$S_2 = x_1^2 + x_2^2 = (x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2 = \dfrac{b^2}{a^2} - \dfrac{2c}{a} = \dfrac{b^2 - 2ac}{a^2}$

$S_3 = x_1^3 + x_2^3 = (x_1+x_2)(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2) =$

$(x_1+x_2)\left[(x_1+x_2)^2 - 3x_1x_2\right] = -\dfrac{b}{a}\left[\dfrac{b^2}{a^2} - \dfrac{3c}{a}\right] = \dfrac{b^3 - 3abc}{a^3}$

* Luego:

$$S = a\left[-\frac{b^3 - 3abc}{a^3}\right] + b\left[\frac{b^2 - 2ac}{a^2}\right] + c\left[-\frac{b}{a}\right]$$

$\rightarrow S = -\dfrac{b^3 - 3abc}{a^2} + \dfrac{b^3 - 2abc}{a^2} - \dfrac{bc}{a}$

$\rightarrow S = -\dfrac{b^3 - 3abc}{a^2} + \dfrac{b^3 - 2abc}{a^2} - \dfrac{abc}{a^2} = 0$

RPTA: "B"

PROBLEMA 63 :

Hallar m , n, tal que las ecuaciones tengan las mismas raíces:

$$(5m-52)x^2 - (m-4)x + 4 = 0$$
$$(2n+1)x^2 - 5nx + 20 = 0$$

RESOLUCIÓN :

* Por propiedad : $\dfrac{5m-52}{2n+1} = \dfrac{-(m-4)}{-5n} = \dfrac{4}{20}$

* Que al resolver , resulta : $m = 11$ y $n = 7$

PROBLEMA 64 :

¿Cuál es el producto de las raíces de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0,$ cuyo conjunto solución es

$\{\Delta+1; \Delta-1\}$, si Δ es el discriminante de la ecuación?

A) 15 B) 12 C) 8 D) 0 E) -12

RESOLUCIÓN :

* Reconstruyendo la ecuación :

$$x_1+x_2=\Delta+1+\Delta-1=2\Delta$$

$$x_1x_2=(\Delta+1)(\Delta-1)=\Delta^2-1$$

* La ecuación es : $x^2-2\Delta x+(\Delta^2-1)=0$

* Como Δ es el discriminante :

$$\rightarrow \Delta=(-2\Delta)^2-4(1)(\Delta^2-1)$$

$$\rightarrow \Delta=4\Delta^2-4\Delta^2+4=4$$

* Reemplazando: $x^2-8x+15=0$

* Luego: $x_1x_2=15$

RPTA: "A"

PROBLEMA 65 :

Al resolver dos jóvenes una ecuación cuadrática, ocurre lo siguiente:

* Lenin se equivocó en el término independiente y obtuvo como soluciones a 8 y 2.

* Vlady se equivocó en el coeficiente del término lineal y obtuvo como soluciones -9 y -1.

¿Cuál fue la ecuación correcta?

A) $x^2-x+9=0$ B) $x^2-1=0$ C) $x^2-10x+9=0$

RESOLUCIÓN :

* Lenin obtuvo como soluciones a 8 y 2 la ecuación que resolvió fue:

$$x^2-(8+2)x+8\times2=0$$

↑ correcto ↑ equivocado

* Vlady obtuvo como soluciones -9, -1 la ecuación que resolvió fue:

$$x^2-(-9-1)x+(-9)(-1)=0$$

↑ equivocado ↑ correcto

* La ecuación correcta fue : $x^2-10x+9=0$

RPTA: "C"

PROBLEMA 66 :

Determinar las condiciones para que se cumpla:

I) $x^2+8x+a=0$, tenga 2 raíces negativas.

II) $3x^2-10x+b=0$, tenga 2 raíces positivas.

RESOLUCIÓN :

I) Raíces negativas :

$$\begin{cases}\Delta\geq0\\ x_1+x_2<0\\ x_1x_2>0\end{cases}$$

* En la ecuación : $x^2+8x+a=0$

$$\left.\begin{array}{l}x_1+x_2=-8<0\\ x_1x_2=a>0\end{array}\right\}a>0$$

$$\Delta=8^2-4(a)>0\Rightarrow a<16$$

* De donde : $a\in\langle0;16\rangle$

II) Raíces positivas: $\begin{cases}\Delta\geq0\\ x_1+x_2>0\\ x_1x_2>0\end{cases}$

* En $3x^2-10x+b=0$

$$\left.\begin{array}{l}x_1+x_2=\dfrac{10}{3}>0\\ x_1\times x_2=\dfrac{b}{3}>0\end{array}\right\}b>0$$

$$\Delta=10^2-4(3b)\geq0\Rightarrow b\leq\frac{25}{3}$$

* Entonces: $b\in\left\langle0;\dfrac{25}{3}\right\rangle$

PROBLEMA 67:

Resolver en la variable « z »:

$$z^2-(3+2i)z+5+5i=0$$

RESOLUCIÓN :

* aplicando la fórmula cuadrática o de carnot , donde los coeficientes son :

a = 1 ; $b=-(3+2i)$ y $c=5+5i$; entonces :

$$z=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$\rightarrow z=\frac{-(-3-2i)\pm\sqrt{(-3-2i)^2-4(1)(5+5i)}}{2(1)}\;.......(I)$$

* pero : $\sqrt{(-3-2i)^2-4(1)(5+5i)}=\sqrt{-15-8i}=1-4i$

* reemplazando en (I) , resulta :

$$z=\frac{3+2i\pm(1-4i)}{2}\rightarrow z_1=2-i\wedge z_2=1+4i$$

PROBLEMA 68 :

Resolver numéricamente en Z :

$$(ax-b)^2+(bx-a)^2=x$$

sabiendo que admite una solución entera .

RESOLUCIÓN :

* Si $a=b=0$, la ecuación es de primer grado, con solución única $x=0$.

* Ahora supongamos $a \neq 0$ y $b \neq 0$. La ecuación es: $(a^2+b^2)x^2-(4ab+1)x+a^2+b^2=0$, de segundo grado, con raíces x_1, x_2, siendo $x_1 \in \mathbb{Z}$. Como:

$$x_1=(ax_1-b)^2+(bx_1-a)^2,$$

deducimos que x_1 es, además de entero, positivo. Como las raíces son reales, el discriminante de la ecuación será mayor o igual que cero:

$$(4ab+1)^2-4(a^2+b^2)^2 \geq 0 \leftrightarrow \left[1-2(a-b)^2\right]\left[1+2(a-b)^2\right] \geq 0$$

y esto exige que $1-2(a-b)^2 \geq 0$. Puesto que $(a-b)^2$ es natural, resulta necesariamente $(a-b)^2=0$, es decir, $a=b$. Con esto, la ecuación se convierte en: $2a^2-(4a^2+1)x+2a^2=0$ y, según las fórmulas de Cardano-Vieta, se tiene:

$$x_1+x_2=2+\frac{1}{2a^2} \quad \wedge \quad x_1x_2=1$$

Observamos que, al ser $x_1 \in N$, $x_1=0$ no puede ser de raíz, ni tampoco $x_1=1$ puede serlo. Por lo tanto, $x_1 \geq 2$. Ya que $x_2=\dfrac{1}{x_1}>0$, entonces

$x_1<x_1+x_2=2+\dfrac{2}{a^2}<3$. Por lo tanto $2<x_1<3$ con x_1 entero implica $x_1=2$, $x_2=\dfrac{1}{2}$.

Sustituyendo los valores resulta: $a^2=1$, así que $\in\{-1;1\}$.

* La única posibilidad, entonces, es:

$$a=b=\pm 1, \text{ con raíces } 2;\ \frac{1}{2}.$$

PROBLEMA 69 :

Sea «a» un número real dado. Calcular los números reales $x_1; x_2; x_3; \ldots\ldots; x_n$ que son soluciones del sistema:

$$x_1^2+a\,x_1+\left(\frac{a-1}{2}\right)^2=x_2$$

$$x_2^2+a\,x_2+\left(\frac{a-1}{2}\right)^2=x_3$$

$$x_3^2+a\,x_3+\left(\frac{a-1}{2}\right)^2=x_4$$

....

....

$$x_n^2+a\,x_n+\left(\frac{a-1}{2}\right)^2=x_1$$

RESOLUCIÓN:

* Sumando miembro a miembro todas las ecuaciones:

$$\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2+\ldots\ldots+x_n^2\right)+(a-1)(x_1+x_2+x_3+\ldots+x_n)+\left(\frac{a-1}{2}\right)^2=0$$

* y el primer miembro se escribe como:

$$x_1^2+(a-1)x_1+x_1^2+(a-1)x_1+\left(\frac{a-1}{2}\right)^2+\ldots+x_n^2+(a-1)x_n+\left(\frac{a-1}{2}\right)^2$$

* es decir: $\left(x_1+\dfrac{a-1}{2}\right)^2+\ldots\ldots\ldots+\left(x_n+\dfrac{a-1}{2}\right)^2=0$

* luego todos los paréntesis deben ser nulos y así se obtiene:

$$x_1=x_2=\ldots=x_n=\frac{1-a}{2}$$

Inmediatamente se comprueba por sustitución directa que esta solución verifica las ecuaciones iniciales del sistema.

PRIMERA PRACTICA DIRIGIDA

01 Dada la ecuación:

$(x-3)^2(x+1)=0$ indique verdadero *(V)* o falso *(F)*:

( ) Tiene 3 soluciones.
( ) Tiene 2 raíces.
( ) $\{-1; 3\}$ es su C.S.

A) VVV B) FFF C) FVF D) VFV E) FFV

02 Respecto de la ecuación paramétrica: $ax=b$ indicar verdadero *(V)* o falso *(F)*:

( ) Es determinada si: $a \neq 0 \wedge b=0$
( ) Es indeterminada si: $a=0 \wedge b=0$
( ) Es incompatible si: $a=0 \wedge b \neq 0$

A) VVV B) FFF C) FVV D) VFF E) VVF

03 Resolver:

$$\frac{x}{6}+\frac{3}{4}=x+\frac{2}{3}$$

y dar como respuesta $(5x)$.

A) $\frac{1}{10}$ B) $\frac{1}{5}$ C) $\frac{1}{3}$ D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{1}{12}$

04 Si $a \neq b$, resolver: $\dfrac{a}{x}+\dfrac{a}{b}=\dfrac{b}{x}+1$

A) $\{-a\}$ B) $\{-b\}$ C) $\{a-b\}$ D) $\{b-a\}$ E) $\{ab\}$

05 Luego de resolver:

$$\frac{x+3}{2}-\frac{x+1}{5}=x-5$$

calcular: $E=1+2+3+\ldots+x$

A) 21 B) 28 C) 36 D) 45 E) 55

06 Calcular (x), si: $\sqrt{4-\sqrt[3]{25+\sqrt[5]{x}}}=1$

A) 2 B) 3 C) 32 D) 1 E) 243

07 Si la ecuación paramétrica: $m^2(x-1)=5(5x-m)$

es incompatible, calcular *(m)*

A) 5 B) – 5 C) 5 ∨ – 5 D) 0 E) 5 ∨ 0

08 Calcular el valor de «x», si:

$$(x+1) + (x+2) + (x+3) + ... + (x+11) = 11^2$$

A) 10 B) 12 C) 20 D) 5 E) 11

09 Calcular «x», si: $\dfrac{\dfrac{\dfrac{x}{2}-10}{2}-10}{2}-10=0$

A) 70 B) 80 C) 120 D) 140 E) 210

10 Encontrar el valor de $x+\dfrac{3}{4}$ después de resolver

$$\frac{\sqrt[5]{x+5}}{x}+\frac{\sqrt[5]{x+5}}{5}=\sqrt[5]{5x}$$

A) 1 B) 2 C) 3 D) $\frac{5}{4}$ E) $\frac{11}{4}$

11 Calcular *(x)*, si:

$$(x+3)^2(x^2-4x+5)=(x-2)^2(x^2+6x+10)$$

A) $-\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{2}$ C) – 2 D) 2 E) Incompatible

12 Resolver en «x»:

$$\frac{(a-b)x}{a-b}-\frac{ax}{a+b}-\frac{a-b}{a+b}=\frac{ax}{a-b}+\frac{a+b}{a-b}$$

A) 1 B) 2 C) –2 D) 3 E) –3

13 Calcular x^{-1}, si: $\dfrac{\sqrt{5x+7}+\sqrt{6x}}{\sqrt{5x+7}-\sqrt{6x}}=4$

A) $\frac{5}{3}$ B) $\frac{3}{5}$ C) $\frac{7}{5}$ D) $\frac{5}{7}$ E) $\frac{3}{7}$

14 Ángel tenía **90** bolas y regaló **8** veces tantas bolas como las que no regaló. Calcular la quinta parte de las bolas que le quedan.

A) 16 B) 10 C) 5 D) 2 E) 1

15 En uno de los locales de la Academia PRE-UNIX estudian **500** alumnos, de estos **329** dominan Álgebra, **186** Física, **295** Geometría, **83** Álgebra y Física, **217** Álgebra y Geometría y **63** Física y Geometría. Calcular el número de alumnos que dominan los **3** cursos.

A) 50 B) 60 C) 53 D) 51 E) 54

16 Resolver:

$$\sqrt{\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}}=\left(\frac{x-1}{2}\right)^{0.5}$$

A) $\left\{\frac{1}{5}\right\}$ B) $\left\{\frac{3}{5}\right\}$ C) $\left\{\frac{4}{5}\right\}$ D) $\left\{\frac{5}{2}\right\}$ E) $\left\{\frac{5}{3}\right\}$

17 Resolver: $2(5^{x-2})+2^x=12(5^{x-3})+3(2^{x-3})$

A) 5 B) 4 C) 3 D) 2 E) 1

18 Hallar *(x)*, si:

$$\frac{a^2-x}{(a+b-c)(a-b+c)}-1=\frac{b^2+c^2+x}{(c-a-b)(b-a-c)}$$

A) ab B) ac C) –ac D) bc E) –bc

19 ¿A qué hora entre las **3** y las **4**, las agujas de un reloj forman un ángulo recto por segunda vez?

A) 3h B) $3h\,32\frac{9}{11}m$ C) $3h\,32\frac{8}{11}m$ D) $3h\,33\frac{8}{11}m$ E) $3h\,31\frac{8}{11}m$

20 Calcular *(a + b)*, si $x=\dfrac{a}{b}$ en:

$$\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-\sqrt{x}}=0{,}5\sqrt{\frac{9x}{x+\sqrt{x}}}$$

A) 38 B) 39 C) 40 D) 41 E) 42

SEGUNDA PRACTICA DIRIGIDA

01 Resolver : $\dfrac{5x-16}{6}=-\dfrac{x+8}{12}+\dfrac{x+1}{3}$

A) 4 B) –1 C) 2/5 D) 3/7 E) 4/5

02 Resolver :

$$2(2-3x)-3(3-2x)=4(x+1)+3(4-5x)$$

A) 21/11 B) 1/4 C) 1/5 D) 9/7 E) 19

03 Resolver : $\dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{x}{3}=\dfrac{1}{7}-\dfrac{x}{7}+\dfrac{x}{11}-\dfrac{1}{11}$

Determinar el valor de: $\sqrt[2x]{3+x}$

A) 1 B) $\sqrt{2}$ C) $\sqrt[6]{6}$ D) $\sqrt[8]{7}$ E) 2

04 Resolver : $1-\dfrac{2}{3-\dfrac{4}{5-\dfrac{6}{x}}}=0$

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

05 Resolver :

$$\frac{2}{5}\left[x-\frac{5}{3}(x+4)\right]=\frac{x-3}{3}-\frac{2}{3}(x+2)$$

A) 2 B) –1 C) 5 D) 4 E) 7

06 Resolver para «x» : $\dfrac{x+m}{n}-\dfrac{x-n}{m}=2$

Dar como respuesta el opuesto de x

A) $m-n$ B) $n-m$ C) $m+n$ D) $m-1$ E) $mn-1$

07 Despejar «x» en :

$$ab(x+c)+bc(x-a)=ca(b-x)$$

A) $\dfrac{3abc}{ab+bc+ca}$ B) $\dfrac{abc}{ab+bc+ca}$ C) $\dfrac{a+b+c}{abc}$

D) $\dfrac{ab+bc+ca}{abc}$ E) $\dfrac{a+b+c}{ab+bc+ca}$

08 Resolver : $\dfrac{x}{a+b}+\dfrac{x}{a-b}=2;\ a\neq 0$

A) $(a^2+b^2)/a$ B) $(a^2-b^2)/a$ C) $(a+b)/a$

D) $(a^2+b^2)/b$ E) $(a^2-b^2)/b$

09 Resolver la ecuación :

$$\sqrt{21+\sqrt{12+\sqrt{14+\sqrt{x}}}}=5$$

A) $x=4/3$ B) $x=3$ C) $x=4$ D) $x=16$ E) $x=9$

10 Resolver :

$$8x+2(x+1)=7(x-2)+3(x+1)+13$$

A) 5 B) infinitas soluciones C) 8 D) 2000 E) -6

11 Resolver :

$$\frac{x}{1\times 2}+\frac{x}{2\times 3}+\frac{x}{3\times 4}+.....+\frac{x}{99\times 100}=\frac{198}{25}$$

y dar como respuesta el valor de $\sqrt[3]{x}$ (Sugerencia:

$$\frac{1}{a(a+1)}=\frac{1}{a}-\frac{1}{a+1}$$

A) -1 B) 1 C) 0 D) 2 E) 3

12 Si una raíz de la ecuación :

$$5(x+a)=x+b+6$$

es -2, calcule usted el valor de : $M=\dfrac{b+9}{a-1}$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

13 En la ecuación lineal : $m(x-1)+2x-3=0$

el valor de «m» para que la ecuación sea incompatible es:

A) $m=-2$ B) $m=3$ C) $m\neq-1$ D) $m\neq-2$ E) $m\neq-3$

14 En la ecuación : $(a-2)x-b+3=0$ que condición debe cumplir $a\wedge b$ si la ecuación es compatible indeterminada

A) $a\neq 2\wedge b=3$ B) $a=2\wedge b=3$ C) $a=2\wedge b\neq 3$

D) $a\neq 2\wedge b\neq 3$ E) $a\in R-(2)\wedge b=3$

15 Si a, b y c son constantes positivas, calcular el valor de «x» en :

$$\frac{x-a}{2b+3c}+\frac{x-2b}{3c+a}=2$$

A) $a+b+c$ B) $a+2b+3c$ C) $3a+2b+c$

D) $a-2b+3c$ E) $a-b+c$

16 Despeje «x» de :

$$\frac{2x+a}{b}-\frac{b-x}{a}=\frac{3ax+(a-b)^2}{ab};\ a\neq b$$

A) b B) a C) ab D) $2a$ E) $2b$

17 Si la ecuación : $ax^2+ax+7=3x^2-x+5a$

es de 1° grado, el valor de «x» es :

A) $\dfrac{3}{2}$ B) 2 C) $-\dfrac{1}{2}$ D) -1 E) $\dfrac{1}{2}$

18 Luego de resolver la siguiente ecuación :

$$2(2x+3)+4=4(x+2)+1$$

señalar el valor de verdad de:

( ) Es una ecuación polinomial

( ) Tiene infinitas soluciones

( ) Es incompatible

A) VFV B) VVV C) FFV D) VVF E) FVF

19 Luego de resolver :

$$\frac{3}{2x+1}-\frac{2}{2x-1}-\frac{x+3}{4x^2-1}=0$$

indicar la solución aumentada en 1

A) 7 B) 3 C) 4 D) 8 E) 9

TAREA DOMICILIARIA

01 Resolver : $4(x-3)(x+3)-(2x+1)^2=3$

Dar como respuesta el valor de M ; siendo :

$$M=\frac{x+12}{x+17}$$

A) -1 B) 0 C) 1 D) $2/7$ E) -10

02 Determinar el valor de «x» si :

$$\frac{x}{2}+\frac{x}{3}+\frac{x}{4}+\frac{x}{5}=x+17$$

indique su característica

A) x es impar B) $x<60$ C) $x+61$

D) x es par E) x es múltiplo de 18

03 El valor de «x» que verifica la ecuación :

$$\frac{\frac{x}{2}-3}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}+\sqrt{3}=\sqrt{7}$$

A) 14 B) 13 C) 12 D) 10 E) 8

04 Calcular el valor de «x» en :

$$(n-2)x^2-(n^2-4)x+n^2+n-1$$

$$\frac{x}{\sqrt{2}}-\frac{3}{\sqrt{2}}+\frac{x}{\sqrt{3}}-\frac{3}{\sqrt{3}}=\frac{3}{\sqrt{3}}-\frac{x}{\sqrt{5}}$$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

05 Resolver : $1+\cfrac{1}{\cfrac{1}{2}+\cfrac{1}{\cfrac{1}{2}+\cfrac{1}{x}}}=2$

A) 2/3 B) 3/2 C) 5/2 D) 2/5 E) 7/2

TERCERA PRACTICA DIRIGIDA

01 Resolver las siguientes ecuaciones:

A) $x^2+5x-14=0$ .... C.S. = { ; }

B) $x^2-5x-24=0$ .... C.S. = { ; }

C) $6x^2-x-2=0$ .... C.S. = { ; }

D) $15x^2+11x+2=0$ .... C.S. = { ; }

E) $3x^2+x-3=0$ .... C.S. = { ; }

02 Resolver e indicar una solución :

$$x^2-2ax+a^2-b^2=0$$

A) $a+b$ B) $a+2b$ C) $a+3b$ D) $a+5b$ E) $a+6b$

03 Resolver la ecuación : $x^2+12cx+35c^2=0$

Indicar una raíz.

A) $3c$ B) $-3c$ C) $5c$ D) $-5c$ E) $3c^2$

04 Resolver la ecuación : $x^2-14x+50=0$

Indicando una raíz.

A) $2+i$ B) $6+i$ C) $7-i$ D) $14-i$ E) $56+i$

05 Hallar "n" si la ecuación tiene raíces iguales.

$$x^2-10x+n-2=0$$

A) 100 B) 60 C) 25 D) 27 E) 23

06 Resolver la ecuación e indicar una raíz:

$$49x^2+14x+1=n^2-4n+4$$

A) $\frac{n-3}{4}$ B) $\frac{n-3}{17}$ C) $\frac{-n+2}{7}$ D) $\frac{-n+1}{7}$ E) $\frac{n-2}{7}$

07 Calcular "n" si la suma de raíces es 8

$$(n-2)x^2-(n^2-4)x+n^2+n-1=0$$

A) 2 B) 6 C) 4 D) 10 E) 14

08 Hallar "m" si el producto de raíces es 6 en la ecuación : $mx^2-(m+7)x+m^2-7m=0$

A) 10 B) 12 C) 13 D) 11 E) 16

09 Hallar "m" si una raíz de la ecuación es 2.

$$x^2-9x+m=0$$

A) 10 B) 12 C) 14 D) 16 E) 18

10 Resolver la ecuación e indicar una raíz.

$$x^2-5ax+6a^2-ab-b^2=0$$

A) $3a-b$ B) $4a-b$ C) $a-b$ D) $2a-b$ E) a^2+b^2

11 Resolver en $\mathbb{R}$: $\sqrt{x-7}+\frac{4}{\sqrt{x-7}}=\sqrt{2x+9}$

Indicar el número de soluciones.

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 6

12 Formar la ecuación de segundo grado con coeficientes reales sabiendo que una raíz es $x_1=2+5i;\ i=\sqrt{-1}$

A) $x^2-4x+4=0$ B) $x^2-2x+29=0$

C) $x^2-x+1=0$ D) $2x^2-8x+8=0$

E) $2x^2-8x+58=0$

13 Formar la ecuación de segundo grado con coeficientes racionales sabiendo que una raíz es :

$$x_1=3+\sqrt{5}$$

A) $x^2-6x+13=0$ B) $x^2+6x+18=0$

C) $x^2-6x+4=0$ D) $x^2+6x+10=0$

E) $x^2-6x=0$

14 Determinar "m" para que el doble producto de las raíces de la ecuación:

$$\left(m^2-\frac{13}{3}m+\frac{13}{9}\right)x^2+3mx+2=0$$

sea igual al cuadrado de uno de ellos.

A) $\frac{1}{2}$ B) $-\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{3}$ D) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{1}{9}$

15 Si "a" y "b" son raíces de la ecuación:

$$\frac{(3-x)^3+(4+x)^3}{(3-x)^2+(4+x)^2}=7$$

Hallar: $(2a+3b)$

A) -8 B) -6 C) -5 D) -4 E) -3

16 Una de las raíces de la ecuación:

$$1+\frac{4x^2}{2x^2+8x}+\frac{27}{2x^2+7x-4}=\frac{6}{2x-1}$$; es :

A) 0,25 B) 0,2 C) 0,3 D) 0,5 E) 0,72

17 Una de las raices de la ecuación:

$$x^{-1}+\frac{3}{2}=\frac{1}{x+3}$$

A) -2 B) -2,1 C) -3 D) -3,1 E) -4

18 Resolver la ecuación : $(x-6)(x+2)=9$

Indicar la mayor solución.

A) 1 B) 2 C) 7 D) -3 E) 8

19 Hallar el número de soluciones de la ecuación:

$$\sqrt{2x+5}=5-x$$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 6

20 Hallar el número de soluciones de la ecuación : $\sqrt{2x+3}-\sqrt{x-2}-2=0$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 6

21 La ecuación: $5x^2-2x+3=0$ tiene dos raíces "x_1" y "x_2". Calcular: $M=(1+x_1)(1+x_2)$

A) $\frac{8}{3}$ B) $\frac{3}{8}$ C) 8 D) 3 E) 2

22 Dada la ecuación: $x^2-nx+3n=9$ cuyas raíces son "x_1" y "x_2", calcular el valor de "n" tal que se cumpla: $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{5}{12}$

A) 13 B) 14 C) 15 D) 16 E) 17

23 Si: "x_1" y "x_2" son raíces de: $x^2-3x+1=0$

Calcular : $\left(x_1^{x_2}+x_2^{x_1}\right)\left(x_1^{x_1}+x_2^{x_2}\right)$

A) 12 B) 18 C) 20 D) 21 E) 17

24 Sean "x_1" y "x_2" raíces de: $3x^2+7x+2k=0$

Hallar "k", si: $(x_1+3)(x_2+3)=6$

A) 6 B) 8 C) -6 D) -3 E) 4

25 Calcular "a" y "b" sí estas son raíces de: $x^2+ax+b=0$. Indicar el valor de : a^3+b^3

A) 9 B) -19 C) -7 D) 0 E) F.D.

TAREA DOMICILIARIA

01 Resolver: $\sqrt[3]{x-1}+3=\sqrt{3x-2}$

A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

02 Resolver: $\frac{x}{x+1}+\frac{2x}{4x-1}=-\frac{1}{x+1}$

A) $\frac{1}{2}$ B) 2 C) $\frac{1}{6}$ D) 3 E) N.A.

03 Resolver: $\frac{x+1}{x+2}-\frac{x+1}{x}=0$

A) 0 B) -2 C) -1 D) -3 E) -4

04 Hallar el valor de "m" si las raices de la ecuación: $6x^2-11x+m=0$ son entre si como 9 es a 2

A) 5 B) 4 C) 3 D) 2 E) 1

05 Siendo "x_1" y "x_2" raíces de la ecuación: $x^2+mx+n=0$

Hallar: $\frac{x_1^2+x_2^2-m^2}{n}$

A) 1 B) -1 C) -2 D) $\frac{1}{2}$ E) $-\frac{1}{4}$

06 Sea la ecuación cuadrática: $(m-8)x^2+(m-3)x+m=0$ de raíces "x_1" y "x_2", si: $(x_1+1)(x_2+1)=\frac{1}{m}+1$.

Entonces el valor de "m" es :

A) -4 B) -2 C) 4 D) 8 E) -8

07 Calcular "$m+n$" si las ecuaciones :

$(m+2)x^2+(n+8)x-12=0$

$nx^2+4x-4=0$

D) 12 E) 10

08 Formar una ecuación de segundo grado con coeficientes racionales enteros que tenga por una de sus raíces : $\frac{3+\sqrt{7}}{2}$

A) $x^2-4x+5=0$ B) $2x^2-6x+1=0$ C) $4x^2-8x+3=0$
D) $4x^2+6x+5=0$ E) $2x^2+6x-2=0$

09 Resolver para "x": $x+(a-b)\sqrt{x+a}=ab-a$ ("a" y "b" positivos)

A) a^2-a B) a^2-b C) b^2-a D) b^2+a E) Dos correctas

10 Formar una ecuación de segundo grado que tenga por raíces: $x_{1,2}=\sqrt{a}\pm\sqrt{a+1}$

A) $x^2-2\sqrt{a}x-1=0$ B) $x^2-\sqrt{a}x+a=0$
C) $x^2+2\sqrt{a}x+1=0$ D) $x^2+2\sqrt{a}x+a=0$
E) $x^2-2\sqrt{a}x+1=0$

CUARTA PRACTICA DIRIGIDA

01 Dar el conjunto solución de :

$$7(x^2+x) = 2(3x^2+4x)$$

A){0;1} B){0;-1} C){1;-2} D){0;2} E){-2;0}

02 Determinar el conjunto solución de :

$$3(2x-3)^2 = 4x(2x-9) + 43$$

A){2} B){2;-2} C){-2} D){-1;1} E){-1}

03 En la ecuación : $x^2+6x-\lambda=0$; $\lambda \in \mathbb{R}$.
Hallar « λ » si una raíz de la ecuación es –2

A)–8 B)8 C)–2 D)2 E)16

04 Si una raíz de la ecuación $x^2+mx-2=0$ es 1, hallar «m».

A)1 B)2 C)3 D)4 E)5

05 Una raíz de la ecuación :

$$abx^2 - (3a+2b)x + 6 = 0$$

A)2/b B)–2/a C)3/b D)4/b E)6/b

06 Sabiendo que una de las raíces de :

$$x^2 - (m^2-5)x - 8m + 3 = 0$$

es –3, calcular la otra raíz , aumentada en m.

A)10 B)3 C)7 D)2 E)5

07 Si la suma de sus raíces de la ecuación :

$$(m-2)x^2 + mx + 1 = 0, \text{ es } 2$$

Hallar «m».

A)4/3 B)3/4 C)4 D)1/4 E)2

08 Si el producto de las raíces de la siguiente ecuación : $(m-1)x^2 - (2m+2)x + m + 4 = 0$ es 9/4.
Indicar lo correcto

A)m+1=3 B)m^2=9 C)m–1=6

09 Si: x_1 y x_2 son las raíces de : $x^2+10 = 5x$
calcular : $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$

A)0,25 B)0,5 C)–0,5 D)2 E)–2

10 Calcular la diferencia de raíces de :

$$x^2 - 6x + 8 = 0$$

A)2 B)±2 C)4 D)±4 E)3

11 Si las raíces de la ecuación : $mx^2 - 24x + m = 7$ son iguales, calcular «m»

A)12 y 9 B)12 y –9 C)16 y –9 D)16 y 9 E)24 y –6

12 Formar una ecuación de 2do. grado cuyas raíces son : 3 y 1/2

A)$x^2-7x+3=0$ B)$x^2+7x+3=0$ C)$2x^2-7x-3=0$
D)$2x^2+7x+3=0$ E)$2x^2-7x-3=0$

13 Formar una ecuación de 2do. grado si sus raíces cumplen :

$$\frac{x_1}{x_2} = 3; \quad x_1 - x_2 = 6$$

A)$x^2-9x+18=0$ B)$x^2+9x+18=0$ C)$x^2-9x-18=0$
D)$x^2-12x-27=0$ E)$x^2-12x+27=0$

14 Hallar «k» para que las raíces de la ecuación: $x^2 + kx + 8 = k$; sean iguales $(k<0)$

A)–8 B)12 C)–6 D)10 E)13

15 Si «m» ∧ «n» son las raíces de la ecuación: $x^2 - 2x = 3$, calcular : $J = m^2n + mn^2$

A)2 B)4 C)–4 D)6 E)–6

16 En la ecuación : $2x^2 - (m+2)x + m = -7$ hallar el valor de «m» para que las raíces difieran en $\sqrt{2}$.

A)–10 B)–6 C)–4 D)2 E)16

17 Encontrar el valor de «a» para que una raíz de la ecuación : $x^2 + 9x + a = 0$ sea el doble de la otra

A)3 B)6 C)9 D)18 E) 27

18 Si una raíz de la ecuación : $x^2 - 2Ax + B = 0$ es un tercio de la otra, proporcione la relación entre A y B.

A)$A^2 = 3B$ B)$3A^2 = B$ C)$3B^2 = 4A$
D)$3A^2 = 4+B$ E)$3A^2 = 4B$

19 Determinar la ecuación de 2do. grado y de coeficientes racionales si una de sus raíces es: $2-\sqrt{3}$.

A)$x^2+4x+1=0$ B)$x^2-4x-1=0$ C)$x^2-4x+1=0$
D)$x^2-x+4=0$ E)$x^2+4x-1=0$

20 Si: x_1 es una raíz de la ecuación :

$$3x^2 - 7x + 2 = 0$$

Calcule usted el valor de : $P = \frac{2x_1 - 1}{x_1^2 - x_1}$

A)1,5 B)2 C)1 D)0,5 E)–0,5

TAREA DOMICILIARIA

01 ¿Qué valor debe tomar «m» para que una raíz de $2x^2 + mx + 2 = 0$; sea igual a –2?

A)3 B)4 C)5 D)–5 E)6

02 Hallar «m», si la ecuación tiene por raíz a 2;

«m» es impar: $5x^2 - 10x + m^2 - 5m + 6 = 0$

A) 1 B) 21 C) 3 D) 5 E) 7

03 Calcular el discriminante de : $x^2 + 5x + 2 = 0$

A) 10 B) 17 C) 15 D) 12 E) 8

04 Calcule usted la menor raíz de la ecuación :

$$2x^2 - 2x - 3 = 0$$

A) $\frac{-1-\sqrt{7}}{2}$ B) $\frac{-1+\sqrt{7}}{2}$ C) $\frac{1-\sqrt{7}}{2}$ D) $\frac{1+\sqrt{7}}{2}$ E) $\frac{1-\sqrt{7}}{4}$

05 Señale una raíz de : $\frac{4x^2 - 3x + 5}{x^2 - 2x + 13} = 2$

A) 7/2 B) -7/4 C) -3 D) -7/2 E) 1

QUINTA PRACTICA DIRIGIDA

01 Si el conjunto solución de la ecuación:

$4x^2 - x - 2 = 0$, es $\left\{\frac{1+\sqrt{5n+3}}{m}; \frac{1-\sqrt{5n+3}}{m}\right\}$

calcular: $\frac{m}{n}$

A) $\frac{3}{4}$ B) $\frac{4}{3}$ C) $\frac{2}{3}$ D) $\frac{3}{2}$ E) $-\frac{2}{3}$

02 Resolver la ecuación cuadrática:

$$8x^2 + 10x - 3 = 0$$

A) $C.S = \left\{-\frac{3}{2}; \frac{1}{4}\right\}$ B) $C.S = \left\{\frac{3}{2}; -\frac{1}{4}\right\}$

C) $C.S = \left\{\frac{4}{3}; \frac{1}{2}\right\}$ D) $C.S = \left\{-\frac{3}{4}; 2\right\}$

E) $C.S = \left\{-\frac{3}{2}; \frac{1}{4}\right\}$

03 Si en la siguiente ecuación cuadrática de variable «x»:

$(n + 2)x^2 - (n - 3)x - 1 = 0$, se sabe que el discriminante es igual a 25, calcular «n».

A) 4 ó (-2) B) 4 C) -2 D) Más de una es correcta E) 6

04 Relacionar:

I) $16x^2 - 8x + 1 = 0$

II) $3x^2 + 2x + 5 = 0$

III) $2x^2 + 4x + 1 = 0$

a) Tiene raíces reales y diferentes.

b) Tiene raíces reales e iguales.

c) Tiene raíces imaginarias y conjugadas.

A) Ia; IIb; IIIc B) Ib; IIa, IIIc C) Ib; IIc; IIIa
D) Ic; IIb; IIIa E) Ic; IIa; IIIb

05 Siendo x_1 y x_2 las raíces de la ecuación:

$4x^2 + 2x + 1 = 0$, calcular:

$$A = \frac{x_1}{x_1 + 1} + \frac{x_2}{x_2 + 1}$$

A) $-\frac{2}{3}$ B) $\frac{1}{2}$ C) 0 D) $-\frac{1}{2}$ E) $\frac{3}{2}$

06 Formar una ecuación cuadrática cuyas raíces son: $\frac{5}{3}$ y $-\frac{3}{2}$

A) $6x^2 + x + 15 = 0$ B) $6x^2 - x + 15 = 0$
C) $6x^2 + x - 15 = 0$ D) $6x^2 + 2x - 15 = 0$
E) $6x^2 - x - 15 = 0$

07 Formar una ecuación cuadrática de raíces m y n, si se sabe que:

I) $5x^2 + (m - 8)x - 2 = 0$ tiene raíces simétricas.

II) $(7-n)x^2 + 3x + n - 1 = 0$, tiene raíces recíprocas.

A) $x^2 + 2x - 18 = 0$ B) $x^2 - x - 16 = 0$

C) $x^2 - 16x + 36 = 0$ D) $x^2 - 12x + 32 = 0$

E) $x^2 + 14x - 16 = 0$

08 Si la siguiente ecuación cuadrática: $b^2 - ax - c = 0$, tiene por raíces α y β, determine la ecuación cuadrática de raíces: α^{-1} y β^{-1}.

A) $cx^2 + ax - b = 0$ B) $cx^2 - ax + b = 0$
C) $cx^2 + ax + b = 0$ D) $ax^2 - bx - c = 0$
E) $ax^2 + bx - c = 0$

09 Calcular la menor de las raíces del polinomio: $P(x) = 8x^2 - 3nx + (n - 1)$, sabiendo que una de ellas es el doble de la otra.

A) 0,2 B) 0,5 C) 0,25 D) 0,4 E) 2,5

10 Si: $(n+4)x^2 - 1 = (2n + 2)x - n$, tiene por conjunto solución un conjunto unitario, calcular el valor de $n^2 + 2$.

A) 3 B) 11 C) 38 D) 27 E) 18

11 Las soluciones de $x^2 - 7x + a = 0$ se diferencian en 3 unidades y de $x^2 + bx + 8 - b = 0$ son iguales, $b > 0$, calcular el valor de $ab + 5$

A) 42 B) 44 C) 46 D) 48 E) 45

12 Si α y β son las raíces de:

$x^2 - 100x + 1 = 0$, determine el valor de:

$$A = \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$$

A) $\sqrt{105}$ B) $\sqrt{104}$ C) $\sqrt{103}$ D) $\sqrt{102}$ E) $\sqrt{101}$

13 ¿En cuánto hay que disminuir las raíces de la ecuación:

$$(m^2-n^2)x^2 + 2(m+n)x + (m-n) = 0$$

para que sean simétricas?

A) $n-m$ B) $\frac{1}{n+m}$ C) $\frac{1}{n-m}$ D) $\frac{1}{m-n}$ E) $m-n$

14 Sabiendo que al formar una ecuación con el doble de las raíces aumentadas en uno de $4x^2+2x+c=0$, se obtiene $x^p + bx + 10 = 0$. Indique el valor de: $b+c+p$

A) 7 B) 5 C) $\frac{11}{4}$ D) 11 E) 13

15 Determine el mayor valor que puede tener «a», de manera que la ecuación cuadrática: $(4-a)x^2 + 2ax + 2 = 0$. tenga una raíz múltiple.

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

16 Calcular:

$$P=\left\{\left(\left[\frac{a}{a-3}+\frac{b}{b-3}\right]^{\frac{1}{a}}\right)^{b^{-1}}\right\}^{a+b}$$

si la siguiente ecuación cuadrática: $x^2 - 3x + 1 = 0$, posee como $C.S = \{a; b\}$

A) 512 B) –343 C) 164 D) –8 E) 125

17 Determine una ecuación cuádratica de raíces a y b, si las ecuaciones:

$6x^2+(2a+1)x+4b+2=0$; $2x^2+5x+6=0$, son equivalentes.

A) $x^2-5x+6=0$ B) $x^2-5x+10=0$ C) $x^2-11x+28=0$
D) $x^2-x-2=0$ E) $x^2-3x+4=0$

18 Si x_o es solución de : $x^2-2x-3=0$, calcule el valor de: $\left(x_o+\frac{2}{x_o-1}\right)^3$

A) 1 B) –8 C) 27 D) –64 E) 125

19 Calcular el valor de «α» para que la suma de los cuadrados de las raíces de la ecuación: $x^2+(2-\alpha)x-3-\alpha=0$, sea mínima.

A) 0 B) –1 C) 1 D) 2 E) 9

20 Si $\{x_1;x_2\}$ es el conjunto solución de la ecuación: $x^2+3x+k=0$, sabiendo que: $x_1^3+x_2^3=6k$, hallar la ecuación de raices k y $(k-6)$.

A) $x^2-6x-5=0$ B) $x^2-9x=0$ C) $x^2-9=0$
D) $x^2-24x+140=0$ E) $x^2-12x+27=0$

SEXTA PRACTICA DIRIGIDA

01 En la ecuación en «x»: $(2a-b)x+a+2b=10$ verifica $\forall x \in R$. Calcular ab.

A) 2 B) 8 C) 6 D) 10 E) 12

02 Calcular el valor de «x» en:

$$\frac{x-3}{2}-\frac{4-x}{5}+1=\frac{3x+2}{6}$$

A) $\frac{21}{8}$ B) $\frac{41}{3}$ C) $\frac{1}{9}$ D) $\frac{49}{6}$ E) $-\frac{4}{61}$

03 Proporcione el conjunto solución al resolver:

$$\frac{x-51}{121}+\frac{x}{2601}=\frac{121+51x}{28611}$$

A) 121 B) 51 C) 62 D) 2 601 E) 1

04 Hallar una raíz de la ecuación:

$$(c+a-2b)x^2 + (a+b-2c)x + b + c - 2a = 0$$

A) $ab+c$ B) $a+b+c$ C) 1 D) $\frac{(a+b)}{(a+c)}$ E) $c+a-2b$

05 En la ecuación: $x^2 - 10x - n^2 + 25 = 0$ indique el valor de verdad:

( ) Tiene solución única, si $n = 0$
( ) Tiene raíces imaginarias, si $n < 0$
( ) Tiene 2 raíces reales diferentes, si $n \neq 0$

A) VVF B) VFV C) VVV D) FFV E) FVF

06 Si x_1; x_2 son raíces de la ecuación $x^2-4x-1=0$, calcular el valor:

$$\left(\frac{1}{x_1}-1\right)\left(\frac{1}{x_2}-1\right)$$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

07 Sabiendo que las raíces de la ecuación:

$$x^2+5x+3=0 \text{ son } x_1; x_2$$

calcular: $x_1(x_1^2-1)+x_2(x_2^2-1)$

A) 83 B) 85 C) 86 D) 88 E) 90

08 Calcular la suma de los cuadrados de las raíces de la ecuación: $(2k+2)x^2 + (4-4x)x + k - 2 = 0$ sabiendo que las raíces son recíprocas.

A) 5 B) $\frac{82}{9}$ C) 10 D) 13 E) 15

09 Dada la ecuación cuadrática:

$(m-2)x^2+2(m-1)x+m-3=0$; $m\neq2$ si tiene raíces

reales diferentes, el valor de «*m*» se encuentra:

A) $m>\frac{5}{3}$ B) $m<1$ C) $m\geq\frac{1}{3}$ D) $m\leq-1$ E) $2<m$

10 Determine el valor de «*m*» de manera que los polinomios tienen el mismo conjunto solución:

$$P(x)=x^2+5x+m\ ;\ Q(x)=mx+7$$

A) 10 B) $\frac{9}{4}$ C) $\frac{25}{4}$ D) $-\frac{1}{25}$ E) $\frac{16}{25}$

11 Formar la ecuación de segundo grado con raíces: $\frac{1}{\sqrt{a}+1}$ y $\frac{1}{\sqrt{a}-1}$

A) $a^2+\sqrt{a}x-1=0$ B) $(a-1)x^2-2\sqrt{a}x+1=0$

C) $\sqrt{a}x^2+ax+1=0$ D) $(a+1)x^2+ax-1=0$

E) $(\sqrt{a}+1)x^2-ax+1=0$

12 Determine el menor valor de k, de modo que las raíces de la ecuación:

$kx^2-kx+2k-3x+1=0$ difieran en 2 unidades.

A) 1 B) $\frac{11}{9}$ C) $\frac{13}{9}$ D) $-\frac{9}{11}$ E) $-\frac{13}{9}$

13 Sea las ecuaciones equivalentes:

$$(a^2-b^2)x^2+(ab+1)x+7=0$$

$$(a-b)x^2+x+1=0\ ;\ a\neq b$$

Calcular: a^3-b^3

A) 210 B) 215 C) 218 D) 220 E) 240

14 La ecuación $3x^2+5x-4=0$ tiene como $C.S=\{a;b\}$. Encontrar el valor de:

$$\frac{a(a+1)}{2-a}+\frac{3(b^2-1)}{1-5b}$$

A) $\frac{4}{3}$ B) $\frac{1}{3}$ C) 3 D) 1 E) $\frac{2}{3}$

15 De la ecuación: $x^2+10x+p=0$ una raíz es el cubo de la otra. Indicar el valor de «*p*»

A) 2 B) 4 C) 8 D) 16 E) –8

16 Determine «*m*» de modo que la suma de cuadrados de las raíces de la ecuación:

$x^2+(m-2)x-(m+3)=0$, tenga el menor valor posible.

A) –2 B) –1 C) 0 D) 1 E) 2

17 Sea «α» una raíz de: $x^2+x-1=0$.

Calcular: $\alpha^5-5\alpha$

A) –1 B) –2 C) –3 D) 1 E) 2

18 Dada la ecuación: $ax^2+bx+c=0\ ;\ a\neq0$ si S_2 es la suma de los cuadrados de sus raíces, S_3 es la suma de sus cubos y S_4 es la suma de sus cuartas, calcular: $aS_4+bS_3+cS_2$

A) 3 B) 2 C) 0 D) 1 E) 5

19 Si x_1 y x_2 son raíces del polinomio cuadrático:

$P(x)=ax^2+bx+c;\ 2ac<\frac{b^2}{2}$ indicar qué tipo de raíces tiene el polinomio $P(x-ac)$

A) Reales e iguales B) Imaginarias C) Positivas
D) Reales diferentes E) Negativas

20 Resolver para $x>0$:

$$\sqrt{x+\sqrt{x}}-a\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}\right)=\sqrt{x-\sqrt{x}}\ ;\ a>1$$

y dar como respuesta una solución.

A) $x=\left(\frac{a^2-2a+2}{2(a-1)}\right)^2$ B) $x=\left(\frac{a^2+2a+2}{2(a-1)}\right)^2$ C) $x=(a-1)^2+1$

D) $x=(a+1)^2+1$ E) $x=\frac{a+1}{a-1}$

CLAVES DE LA PRIMERA PRACTICA									
1)F	2)A	3)D	4)B	5)D	6)C	7)B	8)D	9)D	10)B
11)A	12)C	13)A	14)D	15)C	16)E	17)B	18)E	19)C	20)D

CLAVES DE LA SEGUNDA PRACTICA				
01) A	02) A	03) E	04) E	05) C
06) B	07) B	08) B	09) C	10) B
11) D	12) E	13) A	14) B	15) B
16) E	17) B	18) C	19) D	
01) D	02) D	03) A	04) A	05) A

CLAVES DE LA TERCERA PRACTICA				
01)	02) A	03) D	04) C	05) B
06) D	07) C	08) C	09) C	10) D
11) A	12) E	13) C	14) C	15) B
16) D	17) A	18) C	19) A	20) B
21) E	22) C	23) C	24) A	25) C
01) D	02) C	03) C	04) C	05) C
06) A	07) B	08) B	09) C	10) A

CLAVES DE LA CUARTA PRACTICA				
01) A	02) B	03) A	04) A	05) C
06) A	07) A	08) D	09) B	10) D
11) C	12) D	13) E	14) A	15) E
16) B	17) D	18) E	19) C	20) A
01) C	02) C	03) B	04) C	05) D

CLAVES DE LA QUINTA PRACTICA									
1)A	2)E	3)B	4)C	5)C	6)E	7)D	8)A	9)C	10)B
11)E	12)D	13)C	14)D	15)B	16)B	17)C	18)A	19)C	20)E

CLAVES DE LA SEXTA PRACTICA									
1)B	2)D	3)C	4)C	5)B	6)D	7)B	8)B	9)A	10)C
11)B	12)D	13)B	14)D	15)D	16)D	17)C	18)[illegible]	19)D	[illegible]



ECUACIONES POLINOMIALES

16

OBJETIVO:

Conocer la teoría sobre definición, teoremas y propiedades referentes a las ecuaciones y sus raíces.

INTRODUCCIÓN:

Sea el polinomio general en una variable de grado n.

$$P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+...+a_n,\ a_0\neq 0$$

A la igualdad $P(x)=0$ se llama ecuación polinomial de grado n.

En la resolución de estas ecuaciones se tendrá particularmente a la ecuación lineal, cuadrática, cúbica, cuártica, bicuadrada, recíproca y binomial mediante fórmulas generales en términos de sus coeficientes. Sin embargo, no ha sido posible resolver en forma general una ecuación de quinto grado o superior mediante fórmulas generales (por radicales). Más aún el matemático Evariste Galois ***(1811-1832)*** demuestra que el polinomio general de grado $n\geq 5$ no es soluble por radicales, mediante la teoría de grupos (tratado en Álgebra Moderna). Pero si los coeficientes son numéricos, el valor de cualquiera de las raíces reales puede hallarse mediante aproximaciones (visto en las aplicaciones de la derivada).

ECUACIÓN POLINOMIAL CON UNA INCÓGNITA

Es aquella ecuación cuya forma canónica o general adopta la forma:

$$P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_{n-1}x+a_n=0\ ;\ a_0\neq 0$$

donde: $a_0, a_1, a_2, a_3, ... a_{n-1}, a_n$ son coeficientes complejos; $n\in Z^+$

* Esta ecuación es de grado "n" si y sólo si: $a_0\neq 0$
* a_n: ***coeficiente principal***
* a_0: ***término independiente***

De acuerdo a la naturaleza de los coeficientes a_i, una ecuación polinomial puede ser:

* Si $a_i\in Z$, se tendrá una ecuación polinomial con coeficientes enteros.

EJEMPLO:

$$P(x)=4x^5+3x^4-6x^2+x-5=0$$

* Si $a_i\in Q$, se tendrá una ecuación polinomial con coeficentes racionales.

EJEMPLO:

$$P(x)=\frac{3}{5}x^4+7x^3-\frac{2}{5}x^2+6x+\frac{1}{2}=0$$

* Si $a_i\in R$, se tendrá una ecuación polinomial con coeficientes reales.

EJEMPLO:

$$P(x)=\sqrt{3}x^7+\frac{2}{3}x^5+7x^4-\sqrt{2}x^3+x-\frac{\sqrt{6}}{6}=0$$

* Si $a_i\in C$, se tendrá una ecuación polinomial con coeficientes complejos.

EJEMPLO:

$$P(x)=3ix^6+\sqrt{2}ix^5+6x^3-\frac{\sqrt{2}}{3}x+5+i=0$$

El grado del polinomio determina el grado de la ecuación, así:

* $x+1=0$ ***Ecuación lineal o de primer grado***
* $x^2-8x+3=0$ ***Ecuación cuadrática o de segundo grado***
* $7x^3-5x+2=0$ ***Ecuación cúbica o de tercer grado***

RAIZ DE UN POLINOMIO (ó cero de un polinomio) Es aquel valor de la variable que anula un polinomio.

Sea $P(x)$ polinomio no constante:

$$P(\alpha)=0\Leftrightarrow "\alpha" \text{ es raíz de } P(x)$$

ó $$\alpha \text{ es raíz de } P(x)\Leftrightarrow P(\alpha)=0$$

Donde $\alpha\in C$

* Es decir la raíz de un polinomio es el valor que al ser reemplazado en $P(x)$, este toma el valor cero.

EJEMPLO 1:

* Dado el polinomio: $P(x)=x^3+1$ una de sus raíces es $x=-1$
* Ya que: $P(-1)=(-1)^3+1=0$

EJEMPLO 2:

* Sea: $P(x) = x^2 - 25$

Si: $x = 5 \Rightarrow P(5) = 5^2 - 25 = 0$

Si: $x = -5 \Rightarrow P(-5) = (-5)^2 - 25 = 0$

* Entonces 5 y -5 son raíces de $P(x)$

OBSERVACIÓN:

Toda ecuación polinomial de grado "n" tiene "n" raíces

TEOREMA DEL FACTOR

Si un polinomio $P(x)$ se anula para $x = a$, entonces $(x - a)$ es un factor de $P(x)$ y por consiguiente "a" es una raíz de dicho polinomio.

* Dicho de otra forma:

"Dado $P(x) = 0$, tal que $P(a) = 0$ entonces $(x - a)$ es un factor de $P(x)$"

* Se cumple que:

$$\boxed{P(x) = (x - a)Q(x)}$$

EJEMPLO:

* Sea $P(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$ se observa que:

$P(1) = 0$; $P(-1) = 0$; $P(2) = 0$

* Luego, $-1; 1; 2$ son raíces de dicho polinomio.

Por tanto: $(x+1), (x-1), (x-2)$ son factores de dicho polinomio.

* Entonces: $P(x) = (x+1)(x-1)(x-2)Q(x)$

RAÍZ MÚLTIPLE DE UN POLINOMIO

Si la ecuación polinomial:

$$P(x) = 0 \; ; \; n \geq 2 \; , \; a_0 \neq 0$$

admite "k" raíces iguales a "r" $(n \geq k)$, entonces se dice que "r" es una ***RAÍZ DE MULTIPLICIDAD*** "k" de dicha ecuación.

* Es decir si una raíz es de multiplicidad k, significa que la raíz se repite k veces.

DEFINICIÓN:

Sea $P(x)$ un polinomio donde $\alpha \in \mathbb{C}$ constante, es una raíz de multiplicidad k. Si y sólo si $(x - \alpha)^k$ es un factor de $P(x)$ y $(x - \alpha)^{k+1}$ no es factor de $P(x)$.

Es decir:

$$\boxed{P(x) = (x - \alpha)^k q(x) \text{ con } q(\alpha) \neq 0}$$

OBSERVACIÓN:

Si se desea hallar las raíces de un polinomio o ecuación se factoriza y se iguala cada factor a cero.

EJEMPLO 1:

Hallemos las raíces de: $P(x) = (x+2)^3(x-5)^2(x-8)$

* Igualando cada factor a cero (debe tener: $3+2+1=6$ raíces)

$\left.\begin{array}{l}(x+2) = 0 \Leftrightarrow x_1 = -2 \\ (x+2) = 0 \Leftrightarrow x_2 = -2 \\ (x+2) = 0 \Leftrightarrow x_3 = -2\end{array}\right\}$ *$x = -2$ es raíz de multiplicidad tres o raíz triple (se repite 3 veces)*

$\left.\begin{array}{l}(x-5) = 0 \Leftrightarrow x_4 = 5 \\ (x-5) = 0 \Leftrightarrow x_5 = 5\end{array}\right\}$ *$x = 5$ es raíz de multiplicidad 2 o raíz doble*

$(x-8) = 0 \Leftrightarrow x_6 = 8 \}$ *$x = 8$ es raíz simple (no tiene multiplicidad)*

EJEMPLO 2:

* Al hallar las raíces de: $P(x) = 3(x+5)(x-3)^2(x+1)^3$

Igualando cada factor a cero:

$x+5=0 \Rightarrow x=-5$: raíz simple (no tiene multiplicidad)

$(x-3)^2=0 \Rightarrow x=3$: raíz doble de multiplicidad 2

$(x+1)^3=0 \Rightarrow x=-1$: raíz triple o de multiplicidad 3

OBSERVACIÓN:

* Una raíz de la ecuación polinomial $P(x)=0$ sin tomar en cuenta su multiplicidad se denomina también "***solución de dicha ecuación***", entonces:

Número de raíces de $P(x)$	$\geq$	Número de soluciones de $P(x) = 0$

; es decir el número de soluciones no excede al grado.

EJEMPLO:

* Sea la ecuación polinomial:

$$P_{18}(x) = 6x^5(x+1)^2(x-2)^4(x-3)^7 = 0$$

* Se dice que :

"0" : es una raíz de multiplicidad 5

"-1" : es una raíz de multiplicidad 2

"2" : es una raíz de multiplicidad 4

"3" : es una raíz de multiplicidad 7

* De lo anterior, la ecuación de grado 18, admite 18 raíces; pero el conjunto solución "S" de dicha ecuación, admite solo 4 elementos, es decir:

$$S = \{0 \; ; -1 \; ; 2 \; ; 3\}$$

NOTA:

El término raíz o cero de un polinomio se utiliza únicamente para ecuaciones polinomiales , es decir

es absurdo hablar de raíz en ecuaciones irracionales o fraccionarias.

TEOREMA FUNDAMENTAL DEL ÁLGEBRA

Toda ecuación polinomial de coeficientes numéricos posee por lo menos una raíz que generalmente es compleja.

COROLARIO :

Toda ecuación polinomial de grado "n" tiene exactamente "n" raíces contadas con su respectiva multiplicidad.

* Sean las raíces de $P(x)$ polinomio de grado "n" con coeficiente principal "a".

$$x_1 ; x_2 ; x_3 ; x_4 ; x_5 ; ... ; x_n$$

el polinomio puede expresarse de la siguiente manera:

$$P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)...(x - x_n)$$

a → *coeficiente principal*

EJEMPLOS:

I) $x^4 - 16 = 0$ ó $P(x) = x^4 - 16 = 0;$

Como la ecuación es de 4to. grado debe tener 4 raíces.

* Verifique que las raíces son $2 ; -2 ; 2i ; -2i$, donde i es la unidad imaginaria.

II) $P(x) = (x - 3)^2(x - 1)^3(x + 5) = 0$

* Vemos que el polinomio es de grado **6**, entonces debe tener **6** raíces.

OBSERVACIÓN:

Si $a_0 = 1$ se dice que $P(x)$ es un polinomio mónico.

Sea $P(x)$ un polinomio, además recuerde que:

* $P(1)$ = Suma de coeficientes
* $P(0)$ = Término independiente

EJEMPLO:

Sean $2; 3$ y -5 las raíces de un polinomio $P(x)$ de grado mínimo, hallar la suma de sus coeficientes si dicho polinomio es mónico.

RESOLUCIÓN:

* Si: 2 *es raíz* $\Rightarrow (x - 2)$ *es factor de* $P(x)$

3 *es raíz* $\Rightarrow (x - 3)$ *es factor de* $P(x)$

-5 *es raíz* $\Rightarrow (x + 5)$ *es factor de* $P(x)$

$\Rightarrow P(x) = a_0(x - 2)(x - 3)(x + 5)$

* Como el polinomio es mónico: $a_0 = 1$

$\Rightarrow P(x) = (x - 2)(x - 3)(x + 5)$

* Nos piden la suma de coeficientes:

→ Sea : $x = 1$

$$P(1) = (-1)(-2)(6) \rightarrow P(1) = 12$$

→ La suma de coef. del polinomio es **12**

NOTA:

* Del teorema y el corolario se concluye que toda ecuación polinomial tiene solución, por lo tanto será compatible.

* Así mismo toda ecuación polinomial tiene n raíces contadas con su multiplicidad, es decir, será compatible determinada.

TEOREMA DE CARDANO-VIETTE

Dado un polinomio $P(x)$ de grado "n" con coeficientes complejos en general de la forma:

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + ... + a_n = 0 \,/\, a_0 \neq 0$$

cuyas raíces son $x_1, x_2, x_3, ..., x_n,$ entonces:

I) SUMA DE RAÍCES :

$$S_1 = x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n = -\frac{a_1}{a_0}$$

II) SUMA DE PRODUCTOS BINARIOS :

$$S_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 + ... = \frac{a_2}{a_0}$$

"Suma de los productos tomados de **2** en **2**.

III) SUMA DE PRODUCTOS TERNARIOS :

$$S_3 = x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_2x_3x_4 + ... = -\frac{a_3}{a_0}$$

... y así sucesivamente ....

IV) PRODUCTOS DE RAÍCES :

$$S_n = x_1x_2x_3...x_n = (-1)^n \frac{a_n}{a_0}$$

→ $\frac{a_n}{a_0}; \forall\ n = par$

→ $\frac{a_n}{a_0}; \forall\ n = impar$

NOTA:

Este teorema nos permite tener relaciones numéricas entre las raíces de una ecuación y sus respectivos coeficientes.

EJEMPLO 1:

Dado el polinomio: $P(x) = 2x^3 - 6x^2 + 7x - 8$

Si: $r_1; r_2; r_3$ son sus raíces, entonces:

$$r_1 + r_2 + r_3 = \frac{-(-6)}{2} = 3 \qquad r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3 = \frac{7}{2}$$

$$r_1r_2r_3=\frac{-(-8)}{2}=4$$

EJEMPLO 2:

Sea: $5x^4-3x^3+2x-3=0$

Hallar la suma de sus raíces y su producto correspondiente.

RESOLUCIÓN:

Teniendo en cuenta que la suma de las raíces de una ecuación de grado "n" es igual al coeficiente de x^{n-1} entre el coeficiente de x^n, con signo cambiado; se tendría:

$$5x^4-3x^3+2x-3=0\rightarrow\begin{cases}Coef.\ de\ x^4=5\\Coef.\ de\ x^3=-3\end{cases}$$

* Entonces suma de raíces:

$$x_1+x_2+x_3+x_4=-\frac{-3}{5}=\frac{3}{5}$$

EJEMPLO 3:

Resolver: $x^3-x^2-x-2=0$

Sabiendo que dos de sus raíces suman menos uno.

RESOLUCIÓN:

* Sean las raíces: $\{x_1, x_2, x_3\}$
* Por condición: $x_1+x_2=-1$ .... *(I)*
* Del teorema de Cardano - Vieta

$$x_1+x_2+x_3=-\frac{-1}{1}=1\ldots\ldots(II)$$

* Reemplazando *(I)* en *(II)*:

$$-1+x_3=1\rightarrow\boxed{x_3=2}$$

* Siendo $x_3=2$, una de las raíces de la ecuación, esta contiene al factor $(x-2)$, obteniéndose el otro factor, por la regla de Ruffini:

$x-2=0$	1	−1	−1	−2
$x=2$		2	2	+2
	1	+1	1	0

* De donde, tendríamos: $(x-2)(x^2+x+1)=0$
* Igualando cada factor a cero:

$$x-2=0\rightarrow x=2$$

$$x^2+x+1=0\rightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$$

* Las raíces de la ecuación dada son:

$$x_1=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2};\ x_2=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2};\ x_3=2$$

TEOREMAS SOBRE LAS PARIDADES DE LAS RAÍCES

I) PARIDAD DE RAÍCES IMAGINARIAS:

Toda ecuación polinomial de ***coeficientes reales*** que tenga una raíz compleja de la forma "$a+bi$" donde a y $b\in\mathbb{R}\wedge i=\sqrt{-1}$. Tendrá necesariamente por raíz al complejo conjugado de la raíz inicial: es decir la otra raíz será: "$a-bi$"; $(b\neq0)$.

II) PARIDAD DE RAÍCES IRRACIONALES :

Si una raíz del polinomio $P(x)$ de ***coeficientes racionales***, es el número irracional $a+\sqrt{b}$ $(a,b\in\mathbb{Q}\wedge b>0\wedge\sqrt{b}\notin\mathbb{Q})$, entonces necesariamente otra raíz de la ecuación será el irracional conjugado: $a-\sqrt{b}$

OBSERVACIÓN:

Todas las raíces imaginarias de una ecuación polinomial, con coeficientes reales, se presentan por ***PARES***, las cuales son dos a dos números imaginarios y conjugados. Por ello, el número de raíces imaginarias de este tipo de ecuaciones es par.

COROLARIO:

Toda ecuación polinomial, con coeficientes reales y de grado impar , tiene por lo menos una raíz real.

III) TETRARIDAD DE LAS RAÍCES IRRACIONALES :

Si una ecuación polinomial $P_n(x)=0$, con ***coeficientes racionales***, admite la raíz irracional $(\sqrt{a}+\sqrt{b})$, donde a y b son racionales positivos no cuadrados perfectos ($\sqrt{a},\sqrt{b}$ son irracionales entonces, su irracional conjugado $(\sqrt{a}-\sqrt{b})$ su opuesto $(-\sqrt{a}-\sqrt{b})$ y el conjugado de su opuesto $(-\sqrt{a}+\sqrt{b})$, también son raíces de dicha ecuación

IV) TERNARIDAD DE LAS RAÍCES COMPLEJAS :

Si una ecuación polinomial $P_n(x)=0$, con ***coeficientes racionales*** , admite la raíz irracional $\sqrt[3]{a}$, donde a es un racional no cubo perfecto, entonces $\sqrt[3]{a}w$ y su conjugada $\sqrt[3]{a}w^2$ también son raíces de dicha ecuación; siendo "w" una de las raíces cúbicas imaginarias de la unidad.

EJEMPLO 1:

Ecuación	Raíces
x^2+x+1	$x_1=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$; $x_2=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$
x^2-4x-1	$x_1=2+\sqrt{5}$; $x_2=2-\sqrt{5}$
x^4-10x^2+1	$x_1=\sqrt{2}+\sqrt{3}$; $x_2=\sqrt{2}-\sqrt{3}$ $x_3=-\sqrt{2}+\sqrt{3}$; $x_4=-\sqrt{2}-\sqrt{3}$
$x^3-4x^2+14x-20$	$x_1=1+3i$; $x_2=1-3i$; $x_3=2$

EJEMPLO 2:

Construir una ecuación de menor grado, donde una de sus raíces es: $1+2i$

RESOLUCIÓN:

* Por el teorema de la paridad de raíces imaginarias, si $x_1=1+2i$ es raíz entonces $x_2=1-2i$ también lo será, luego una de las ecuaciones de menor grado es:

$$x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2=0$$
$$\rightarrow x^2-2x+3=0$$
$$(1+2i)(1-2i)\lrcorner$$

EJEMPLO 3:

Si una de las raíces de: $x^2+px+q=0, \{p;q\}\in Q$, es: $1-\sqrt{2}$; calcular "p" y "q".

RESOLUCIÓN:

* Como los coeficientes de la ecuación son números racionales, aplicamos el teorema de la paridad, se tiene que si $x_1=1-\sqrt{2}$ es una raíz, luego la otra raíz será necesariamente $x_2=1+\sqrt{2}$, luego formemos la ecuación:

$$x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2=0$$
$$\rightarrow x^2-(1-\sqrt{2}+1+\sqrt{2})x+(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})=0$$
$$\rightarrow x^2-2x-1=0$$

* Comparándola con: $x_2+px+q=0$
* Se obtiene: $p=-2 \wedge q=-1$

OTROS TEOREMAS:

A) Si una raíz de la ecuación polinomial:

$$P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_{n-1}x+a_n=0$$

con coeficientes enteros $(a_0\neq 0)$, es el número entero "p", entonces necesariamente "p" es un divisor de "a_n".

B) Además si una raíz es $\frac{p}{q}$ $(p,q\in Z \wedge q\neq 0 \wedge p$ y q son primos entre sí; entonces necesariamente "p" es un divisor de "a_n" y "q" un divisor de "a_0".

C) También si $P(1)$ y $P(0)$ son números enteros impares, entonces la ecuación no tiene raíces enteras.

EJEMPLO:

Sea la ecuación: $P(x)=x^2-x-5=0$

* Como:

$$P(1)=1^2-1-5=-5$$
$$P(0)=0^2-0-5=-5$$

* Entonces como $P(1)$ y $P(0)$ son impares entonces la ecuación $x^2-x-5=0$ no presentan raíces enteras.

TEOREMA DE BOLZANO (TEOREMA DEL VALOR INTERMEDIO)

Este teorema es aplicable para funciones continuas, aquí lo aplicaremos para polinomios. "En todo polinomio $P(x)$ de coeficientes reales, si $P(a)P(b)<0$, entonces existe al menos una raíz real $x_0\in<a;b>$".

EJEMPLO:

Sea: $P(x)=2x^3-15x^2-28x+40$

Se observa que:

$$P(0)=2(0)^3-15(0)^2-28(0)+40=40\rightarrow P(0)>0$$
$$P(1)=2(1)^3-15(1)^2-28(1)+40=-1\rightarrow P(1)<0$$

* Como $P(0)P(1)<0$ entonces existe al menos una raíz x_0 de $P(x)$ en el intervalo $<0;1>$

LÍMITES O COTAS DE LAS RAÍCES

Al buscar las raíces reales de una ecuación, tal como lo haremos, es útil conocer un intervalo de valores que contenga todas las raíces. Todo número que sea mayor o igual a la mas grande de las raíces, se llama límite superior de las raíces. Cualquier número que sea menor o igual a la raíz más pequeña se llama límite inferior de las raíces. Los límites superior e inferior pueden determinarse aplicando el siguiente teorema.

TEOREMA:

I) Si en la división sintética de ruffini en un polinomio $f(x)$ entre $x-r$, donde r es positivo, cada término del tercer renglón es positivo (algunos pueden ser nulos), entonces r es un límite superior para las raíces reales de la ecuación $f(x)=0$.

II) Si r es negativo y los términos del tercer renglón son alternativamente positivos y

negativos(tomando el cero en el tercer renglón ya sea comno positivo o negativo) , entonces r es un límite inferior para las raíces.

La verdad del teorema puede observarse inmediatamente. Si una r positiva produce términos positivos en el cociente del proceso de la división , un número mayor que r aumentaría todos los términos del renglón siguiente al primero. El último término del tercer renglón no podría entonces ser nulo. En consecuencia , un valor mayor que r no es raíz de la ecuación.

Por un razonamiento completamente similar, puede ser establecida la segunda parte del teorema.

EJEMPLO:

Encontrar los límites superior e inferior de las raíces de la ecuación

$$2x^3 - 5x^2 - 7x + 4 = 0$$

RESOLUCIÓN:

Mostramos la prueba para $r=3$ y $r=4$:

	2	−5	−7	+4
3		+6	+3	−12
	2	+1	−4	−8

tercer renglón

	2	−5	−7	+4
4		+8	+12	+20
	2	+3	+5	+24

tercer renglón

* Estas pruebas muestran que el entero más pequeño que es límite superior , determinado por el teorema, es *4*.

* En seguida probamos enteros negativos, comenzando con *1*.

	2	−5	−7	+4
−1		−2	+7	+0
	2	−7	+0	+4

tercer renglón

	2	−5	−7	+4
-2		−4	+18	−22
	2	−9	+11	−18

tercer renglón

Puesto que − **2** hace a los términos del tercer renglón de signos alternados, este número es un límite inferior. Por tanto, todas las raíces reales de la ecuacion dada están entre − *2* y *4*.

OBSERVACIÓN:

la cota o límite superior*(S)* e inferior*(I)* de las raíces también se puede determinar mediante las siguientes ***fórmulas de lagrange:***

$$S = 1 + \sqrt[P]{\frac{G}{a_0}} \qquad I = -\left(1 + \sqrt[P]{\frac{G}{a_0}}\right)$$

donde:

P: Diferencia entre el grado de la ecuación y el grado del primer término con coeficiente negativo.

G: Valor absoluto del menor coeficiente negativo del polinomio.

a_0: primer coeficiente de la ecuación.

NOTA:

el valor de ***S*** se calcula a partir de $f(x)$, mientras que el valor de ***I*** se calcula a partir de $f(-x)$, siendo necesariamente a_0 positivo.

EJEMPLO:

en: $f(x) = x^5 + 2x^4 + 5x^3 - 7x^2 - 32x - 160 = 0$

* la raíces probables son:

$\pm 1; \pm 2; \pm 4; \pm 8; \pm 16; \pm 32; \pm 5; \pm 10; \pm 40; \pm 80; \pm 160$

* Cálculo de ***S***:

$$S = 1 + \sqrt[5-2]{\frac{160}{1}} \approx 1 + 6 = 7$$

luego las únicas raíces positivas probables serán: ***1; 2 ; 4 ; 5***

* Cálculo de ***I***:

$$f(-x) = -x^5 + 2x^4 - 5x^3 - 7x^2 + 32x - 160 = 0$$

* Pero para calcular ***I*** es necesario que $a_0 > 0$, por lo que multiplicaremos por ***(−1)*** ambos miembros de la ecuación, así:

$$x^5 - 2x^4 + 5x^3 + 7x^2 - 32x + 160 = 0$$

$$P = 5 - 4 = 1 \text{ ; } G = 32 \text{ y } a_0 = 1$$

* entonces: $I = -\left(1 + \sqrt[5-4]{\frac{32}{1}}\right) = -33$

* Por lo que las únicas raíces negativas probables serán: ***− 32 ; −16 ; −8 ; − 4 ; −2 ; −1 ; − 5; −10 y − 20.***

REGLA DE SIGNOS DE DESCARTES

De un polinomio $f(x)$, con los términos escritos en orden de potencias descendentes de x, se dice que tiene un cambio de signo (***variación***) si dos terminos consecutivos tienen signos opuestos. Toda potencia de x faltante debe rechazarse en esta definición (no se ponen los coeficientes iguales a

cero) .

EJEMPLO:

El polinomio $2x^5-x^4-3x^3+x^2-2$ tiene tres cambios de signo (*3* variaciones).

$$\underbrace{2x^5 - x^4}_{V}\underbrace{- 3x^3 + x}_{V}\overbrace{^2 - 2}^{V}$$

Hay un cambio de $2x^5$ *a* $-x^4$, otro de $-3x^3$ *a* $+x^2$, y un tercero de $+x^2$ *a* -2.

Los cambios del signo suministran alguna informacion sobre las raíces de una ecuación polinomial. Con relación a esto enunciemos el siguiente teorema:

TEOREMA:

(Regla de signos de Descartes)

El número de raíces positivas de una ecuación polinomial $f(x)=0$ es igual al número de cambios de signo en $f(x)$, o es menor que ese número según un múltiplo de 2. El número de raíces negativas de $f(x)=0$ es igual al número de cambios de signo en $f(-x)$, o es menor que ese número según un múltiplo de 2.

NOTA:

Aunque se omite la demostracion de esta regla, la aplicaremos a algunas ecuaciones. De acuerdo con la regla, un solo cambio de signo significa que hay solamente una raíz positiva. Para un número de cambios mayor que *1*, la regla no proporciona ninguna información definida. Cuatro cambios, por ejemplo, revelan que hay cuatro, dos, o ninguna raíz positiva.

EJEMPLO 1:

Aplicar la regla de signos de Descartes a la ecuación:

$$x^3 + 7x^2 + 8x - 17 = 0$$

RESOLUCIÓN:

* Como el primer miembro $f(x)$ tiene un cambio de signo. Entonces la ecuación tiene exactamente una raíz positiva. Para hacer la prueba de las raíces negativas, substituimos x por $-x$ y tenemos:

$$f(-x) = -x^3 + 7x^2 - 8x - 17$$

Aquí hay dos cambios de signo. De acuerdo con la regla, la ecuacion dada tiene dos raíces negativas o ninguna negativa.

Concluimos, por lo tanto, que la ecuación original tiene una raíz positiva y que las dos raíces restantes son ambas negativas o imaginarias; estas son:

NÚMERO TOTAL DE RAICES	*3*	*3*
NÚMERO DE RAÍCES POSITIVAS(+)	*1*	*1*
NÚMERO DE RAÍCES NEGATIVAS(−)	*2*	*0*
NÚMERO DE RAÍCES IMAGINARIAS	*0*	*2*

!RECUERDA¡

Dado un polinomio $P(x)$ con coeficientes Reales, se denomina variación al paso de un término a otro consecutivo de diferente signo, y permanencia si son de signos iguales.

REGLA:

* El número de raíces positivas de un polinomio $P(x)$ con coeficientes Reales no excede al número de variaciones del polinomio y cuando es menor su diferencia es un número par.

* Para analizar el número de raíces negativas de un polinomio $P(x)$ bastará con analizar $P(-x)$.

EJEMPLO2:

En: $P(x) = 2x^7 - x^6 + x^5 - x^3 - 5$

* Hay *3* variaciones, entonces este polinomio no tendrá más de *3* raíces positivas.

* Luego:

$$P(-x) = -2x^7 - x^6 - x^5 + x^3 - 5$$

Como presenta 2 variaciones, entonces no tendrá más de 2 raíces negativas.

EJEMPLO 3:

Aplicar la regla de signos de Descartes a la ecuación:

$$f(x) = 3x^5 + 4x^3 + 2x - 5 = 0$$

RESOLUCIÓN:

*el polinomio $f(x)$ tiene un cambio de signo de $2x$ a -5; por consiguiente la ecuación tiene exactamente una raíz real positiva.

* ahora: $f(-x) = -3x^5 - 4x^3 - 2x - 5 = 0$

$f(-x)$ no tiene variación de signo , entonces no hay real negativa.

Por lo tanto la ecuación original tiene una raíz real y cuatro complejas .

REGLA DE BUDAN:

sean V_a y V_b el número de cambios de signos en las sucesiones:

$$\begin{cases} P(a); P'(a); P''(a); ....; P^{(n)}(a) \\ P(b); \underbrace{P'(b); P''(b); ....; P^{(n)}(b)}_{\text{derivadas de } P(x)} \end{cases}$$

respectivamente; entonces el número de ceros o raíces de $P(x)$ en $[a; b]$ es igual , bien a $(V_a - V_b)$ ó $(V_a - V_b)$menos un número par.

NOTA:

El intervalo $[a;b]$ se puede estimar mediante el ***teorema del valor intermedio.***

EJEMPLO:

sea: $P(x)=x^4-10x^3+32x^2-18x+15=0$

* Tomemos $[0;2]$ (debemos adecuacamente el intervalo); luego evaluamos los polinomios y las derivadas en $a=0$ y $b=1$, así:

$P(x)=x^4-10x^3+32x^2-18x+15 \rightarrow P(0)=15$ y $P(2)=43$

$P'(x)=4x^3-30x^2+64x-18 \rightarrow P'(0)=-18$ y $P'(2)=22$

$P''(x)=12x^2-60x+64 \rightarrow P''(0)=64$ y $P''(2)=-8$

$P'''(x)=24x-60 \rightarrow P'''(0)=-60$ y $P'''(2)=-12$

$P^{iv}(x)=24 \rightarrow P^{iv}(0)=24$ y $P^{iv}(2)=24$

* ***ahora formemos la sucesión:***

$$\begin{cases} 15;-18;64;-60;24 \rightarrow V_a=4 \\ 43;22;-8;-12;24 \rightarrow V_b=2 \end{cases}$$

entonces: $V_a - V_b = 4-2=2$, dando entender que en $[0; 2]$ hay 2 raíces o ninguna $(2-2=0)$.

TEOREMA DE LAS RAÍCES MÚLTIPLES

Si el polinomio $P(x)=(x-a)^k q(x)/q(a) \neq 0$ se cumple:

Si: $P(a)=0$, entonces:

$$P'(a)=0 \wedge P''(a)=0 \wedge .... \wedge P^{(k-1)}(a)=0$$

Es decir, todas sus derivadas hasta el orden $(k-1)$ se anulan en "a" (se hacen cero).

EJEMPLO:

Sea: $P(x)=x^2+x+4$

Se observa que: $P(-2)=(-2)^2+4(-2)+4=0$

* Además: $P'(x)=2x+4 \rightarrow P'(-2)=2(-2)+4=0$

* Entonces -2 es una raíz doble del polinomio.

OBSERVACIÓN:

Sea: $P(x)=a_0x^{2n}+a_1x^{2n-1}+a_2x^{2n-2}+...+a_{2n}$

Un polinomio de grado par y coeficientes reales y si: $a_0a_{2n}<0$, entonces $P(x)$ tiene por lo menos 2 raíces reales.

EJEMPLO:

Sea: $x^4+2x^3-x^2-5$

* Se observa que: $a_0=1$ y $a_{2n}=-5 \Rightarrow a_0a_{2n}<0$

* Entonces este polinomio presenta por lo menos 2 raíces reales.

TRANSFORMACIONES DE LAS ECUACIONES

Comúnmente es necesario transformar una ecuación en otra, cuyas raíces tengan una relación con las raíces de la ecuación general.

Sus principales transformaciones son:

I) CAMBIAR DE SIGNO A LAS RAÍCES :

Dado el polinomio $P(x)$ de raíces $x_1, x_2, ... , x_n$.

Para hallar otro polinomio del mismo grado, cuyas raíces sean $-x_1, -x_2, -x_3, ... , -x_n$, será suficiente cambiar en el polinomio $P(x)$, x por $-x$.

EJEMPLO:

* Como $P(x)=x^2+3x+2$ tiene como raíces $a-1$ y -2, entonces:

$P(-x)=x^2-3x+2$ tendrá como raíces a 1 y 2.

II) MULTIPLICACIÓN DE LAS RAÍCES POR UNA CONSTANTE :

Sea $P(x)$ de raíces $x_1, x_2, ..., x_n$ se busca otro polinomio del mismo grado de raíces $rx_1, rx_2, rx_3, ... , rx_n$ donde r es constante no nula.

Sean x_k las raíces de $P(x)$ se busca otro polinomio de raíces $y_k=rx_k \Rightarrow x_k=\frac{y_k}{r}$ será suficiente cambiar en $P(x)$, x por $\frac{y}{r}$ ó $\frac{x}{r}$.

EJEMPLO:

* Sea $P(x)=x^2-3x+2$ de raíces 1 y 2, se desea otro polinomio de raíces 3 y 6, es decir el triple de las anteriores, entonces se hará: $y=3x \Rightarrow x=\frac{y}{3}$(ó por $\frac{x}{3}$).

* Cosa que el nuevo polinomio será:

$$P\left(\frac{x}{3}\right)=\left(\frac{x}{3}\right)^2-3\left(\frac{x}{3}\right)+2 \rightarrow P\left(\frac{x}{3}\right)=\frac{x^2}{9}-x+2, \text{ de}$$

esto vemos: $\frac{x^2}{9}-x+2=0 \rightarrow x^2-9x+18=0$

$$\begin{matrix} x & \searrow\nearrow & -6 \\ x & \nearrow\searrow & -3 \end{matrix}$$

tendrá como raíces a: *3(1)* y *3(2)*

III) LAS RAÍCES AUMENTADAS EN UNA CONSTANTE :

Sea $P(x)$ un polinomio de raíces $x_1, x_2, ..., x_n$, se busca otro polinomio de raíces $x_1+r; x_2+r; ...; x_n+r$, es decir, las raíces aumentadas en una constante r.

Sean x_k las raíces de $P(x)$ se busca otro polinomio de raíces $y_k = x_k + r \Rightarrow x_k = y_k - r$. Basta reemplazar en el polinomio $P(x)$, x por $x - r$.

EJEMPLO 1:

* Sea: $P(x)=x^2-7x+10$ de raíces 2 y 5, se desea otra ecuación de raíces 3 y 6, es decir las raíces de $x^2-7x+10$ aumentadas en 1, entonces será suficiente reemplazar a "x" por "$x-1$", luego:

$(x-1)^2-7(x-1)+10=x^2-9x+18$ será el polinomio buscado, es decir: $x^2-9x+18$ tendrá como raíces a: **2+1 y 5+1**

OBSERVACIÓN:

Una manera práctica de obtener la ecuación ya desarrollada es dividir por Ruffini en forma sucesiva $x^2-7x+10$ entre $(x+1)$, así:

	1	−7	10
−1	↓	−1	8
	1	−8	18 → *Término independiente del nuevo polinomio*
−1	↓	−1	
	1	−9 → *Coeficiente lineal del nuevo polinomio*	

* Entonces el nuevo polinomio cuyas raíces son las anteriores aumentadas en 1, será:

$$P(x)=x^2-9x+18$$

EJEMPLO 2:

Determinar la ecuación polinomial cuyas raíces sean las de: $x^3-2x+1=0$

Disminuidas en 2.

RESOLUCIÓN:

* Para aplicar el criterio de un Ruffini sucesivo, dividiremos x^3-2x+1 entre $x-2$, así:

	1	0	−2	1
2	↓	2	4	4
	1	2	2	5 → T.I.
2	↓	2	8	
	1	4	10 → de "x"	
2	↓	2		
	1	6 → de "x^2"		

* Luego la ecuación pedida será: $x^3+6x^2+10x+5=0$

IV) LAS RAICES RECIPROCAS :

Dado un polinomio $P(x)$ de raíces $x_1, x_2, ..., x_n$, se busca otro polinomio de raíces $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, ..., \frac{1}{x_n}$.

Es suficiente cambiar en $P(x)$, x por $\frac{1}{x}$.

EJEMPLO:

Determine una ecuación cúbica cuyas raíces sean las inversas de: $x^3+3x^2-2x-7=0$

RESOLUCIÓN:

* Sustituyendo a "x" por "$\frac{1}{x}$", así:

$$\left(\frac{1}{x}\right)^3+3\left(\frac{1}{x}\right)^2-2\left(\frac{1}{x}\right)-7=0$$

* Multiplicando por x^3, se tiene:

$$1+3x-2x^2-7x^3=0$$

$\rightarrow -7x^3-2x^2+3x+1=0$ *Es la ecuación pedida.*

V) CUADRADO DE LAS RAÍCES :

Dado un polinomio $P(x)$ de raíces $x_1, x_2, ..., x_n$ otro polinomio del mismo grado de raíces $x_1^2, x_2^2, ..., x_n^2$ se consigue reemplazando x por $\sqrt{x}$.

* Es decir sea x la raíz de $P(x)$ se busca otro polinomio de raíz $y=x^2$.

$\Rightarrow x=\sqrt{y} \Rightarrow$ se reemplaza x por $\sqrt{x}$

EJEMPLO:

Determinar la ecuación de 2° grado cuyas raíces sean el cuadrado de las raíces de:

$$x^2-x+1=0$$

RESOLUCIÓN:

* Será suficiente reemplazar a "x" por "$\sqrt{x}$", así:

$$(\sqrt{x})^2-\sqrt{x}+1=0 \rightarrow x+1=\sqrt{x}$$

* Elevando al cuadrado y despejando resulta:

$x^2+x+1=0$ *Que será la ecuación pedida.*

OBSERVACIÓN:

(MÉTODOS PRÁCTICOS)

Sea: $P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+...+a_n=0$

cuyas raíces son: $\{x_1; x_2; x_3; ...; x_n\}$

A) Si se desea un polinomio cuyas raíces sean:

$$\{kx_1; kx_2; kx_3; ...; kx_n\}$$

* Este será igual a:

$$P(x)=a_0x^n+ka_1x^{n-1}+k^2a_2x^{n-2}+...+k^na_n=0$$

B) Si se desea un polinomio cuyas raíces sean:

$$\{-x_1;-x_2;-x_3;...;-x_n\}$$

* Este será igual a:

$$P(x)=a_0x^n-a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+...+(-1)^na_n=0$$

* Es decir se cambia de signo a los términos de lugar par.

C) Si se desea un polinomio cuyas raíces sean:

$$\left\{\frac{1}{x_1};\frac{1}{x_2};\frac{1}{x_3};...;\frac{1}{x_n}\right\}$$

* Este será igual a:

$$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$$

* Es decir se invierte el orden de los coeficientes.

NOTA:

En estos tres últimos casos los polinomios deben estar previamente completos y ordenados , de no ser así se completan con ceros los términos que faltan.

D) Si se desea un polinomio cuyas raíces sean:

$$\{x_1^2;x_2^2;x_3^2;...;x_n^2\}$$

* Éste polinomio se obtiene haciendo primero:

$$P(x)\times P(-x)$$

Que resultarán potencias pares de "x" y a continuación se sustituye a x^2 por "y" (o mejor a "x^2" por "x").

EJEMPLO:

Sea: $x^2-5x+6=0$, de raíces $\{x_1;x_2\}$

Aplicando métodos prácticos, determinar un polinomio cuadrático que:

A) Tenga como raíces a $\{6x_1;6x_2\}$

B) Tenga como raíces a $\{-x_1;-x_2\}$

C) Tenga como raíces a $\left\{\frac{1}{x_1};\frac{1}{x_2}\right\}$

D) Tenga como raíces a $\{x_1^2;x_2^2\}$

RESOLUCIÓN:

A) $P(x)=x^2-6\times5x+6^2\times6=0\rightarrow x^2-30x+216=0$

B) $P(x)=x^2+5x+6=0\rightarrow x^2+5x+6=0$

C) $P(x)=6x^2-5x+1=0\rightarrow 6x^2-5x+1=0$

D) $\underline{P(x)\times P(-x)}=(x^2-5x+6)(x^2+5x+6)$

$$G(x)=x^4-13x^2+36$$

* Haciendo $x^2=y$:

$$\rightarrow Q(y)=y^2-13y+36 \text{ ó } Q(x)=x^2-13x+36$$

VI) ELIMINACIÓN DEL SEGUNDO TÉRMINO :

Sea: $P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+...+a_n$

* Para eliminar el segundo término (a_1x^{n-1}), se agrega a las raíces una cantidad "k" de modo que aquellos términos desaparezcan de la ecuación, así:

$$x+k=y\Rightarrow x=y-k$$

* Entonces:

$$P(y)=a_0(y-k)^n+a_1(y-k)^{n-1}+...+a_n$$

* Desarrollando:

$$\rightarrow P(y)=a_0y^n-\underbrace{a_0nky^{n-1}+a_1y^{n-1}}_{\text{se desea eliminar}}+...$$

* Entonces:

$$-a_0nky^{n-1}+a_1y^{n-1}=0\rightarrow k=\frac{a_1}{a_0n}$$

CONCLUSIÓN:

Para eliminar el segundo término de $P(x)=0$, se deben incrementar en $\frac{a_1}{a_0n}$ a las raíces.

EJEMPLO:

Eliminar el segundo término de:

$$x^3-3x^2+3x-1=0$$

RESOLUCIÓN:

* En este caso: $a_0=1$; $a_1=-3$ y $n=3$

* Entonces: $k=\frac{-3}{1\times3}=-1$

* Luego debemos agregar en $k=-1$ a las raíces de $x^3-3x^2+3x-1=0$ para ello aplicamos Ruffini en forma sucesiva: $(x-1=0\rightarrow x\rightarrow 1)$

	1	–3	3	–1
1	↓	1	–2	1
	1	–2	1	0
1	↓	1	–1	
	1	–1	0	
1	↓	1		
	1	0		

* Luego la ecuación final será:

$$x^3+0x^2+0x+0=0\rightarrow x^3=0$$

OJO:

En este caso se eliminó también el tercer y cuarto término (no siempre ocurre así).

ECUACION CUBICA

Llamada también ecuación polinomial de grado 3 cuya forma general es:

$$ax^3+bx^2+cx+d=0\ ;\ a\neq 0$$

* La solución de esta ecuación se realiza eliminando el término cuadrático (segundo término en la ecuación cúbica), para ello hacemos la sustitución x por $\left(x-\dfrac{b}{3a}\right)$ se puede obtener la siguiente ecuación en x:

$x^3+px+q=0$ ...*"llamada cúbica incompleta"*

* Supongamos ahora que la ecuación cúbica incompleta tiene una solución de la forma $x=y+z$. Luego por definición de solución:

$$(y+z)^3+px+q=0$$

$$\Rightarrow y^3+z^3+3yz\underbrace{(y+z)}_{x}+px+q=0$$

$$\Rightarrow (y^3+z^3+q)+(3yz+p)x=0$$

* El cual verifica si: $y^3+z^3+q=0$

$$3yz+p=0$$

* Con lo que $y^3+z^3=-q\ \wedge\ y^3z^3=-\dfrac{p^3}{27}$

* Conociendo la suma y la multiplicación de y^3, z^3 se puede formar una ecuación cuadrática de raíces y^3, z^3.

$$r^2-(y^3+z^3)r+y^3z^3=0, \text{ es decir:}$$

$r^2+qr-\dfrac{p^3}{27}=0$ *"llamada ecuación resolvente"*

* De donde: $r_1=\dfrac{-q\pm\sqrt{q^2-4\left(-\dfrac{p^3}{27}\right)}}{2}$

* Como y^3, z^3 son las raíces de esta ecuación:

$$y^3=-\left(\frac{q}{2}\right)+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

$$z^3=-\left(\frac{q}{2}\right)-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

* Para solucionar la ecuación anterior, definamos $\Delta=\left(\dfrac{q}{2}\right)^2+\left(\dfrac{p}{3}\right)^3$, como discriminante de la ecuación cúbica incompleta:

$$x^3+px+q=0$$

* Como: $x=y+z$, se tiene:

$$x=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\Delta}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\Delta}}\quad \text{con } \Delta=\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3$$

* Luego de los números complejos, se tiene que:

$$x=\sqrt[3]{R}\rightarrow\begin{cases}x_1=m\\x_2=mw\\x_3=mw^2\end{cases}$$

donde: $m^3=R\ ;\ w=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\ ;\ i=\sqrt{-1}$

* Entonces en: $x^3+px+q=0$, con:

$\Delta=\left(\dfrac{q}{2}\right)^2+\left(\dfrac{p}{3}\right)^3$ es:

$$x_1=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\Delta}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\Delta}}$$

$$x_2=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\Delta}}\,w+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\Delta}}\,w^2$$

$$x_3=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\Delta}}\,w^2+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\Delta}}\,w$$

EJEMPLO:

Resolver: $x^3-2x-4=0$

RESOLUCIÓN:

* Sea : $x=y+z$ la solución de la ecuación, entonces:

$$(y+z)^3-2x-4=0$$

$$\rightarrow y^3+z^3+3yz\underbrace{(y+z)}_{x}-2x-4=0$$

$$\rightarrow (y^3+z^3-4)+(3yz-2)x=0$$

* Cumpliendo cuando: $y^3+z^3=4\ \wedge\ yz=\dfrac{2}{3}$

* De donde: $y^3+z^3=4\wedge y^3z^3=\dfrac{8}{27}$

* Ahora la ecuación resolvente de raíces $y^3\wedge z^3$, es: $r^2-4r+\dfrac{8}{27}=0\Rightarrow r=2\pm\dfrac{10}{9}\sqrt{3}$

* Con lo que: $y^3=2+\dfrac{10}{9}\sqrt{3}\Rightarrow y=1+\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$$z^3=2-\frac{10}{9}\sqrt{3}\Rightarrow z=1-\frac{\sqrt{3}}{3}$$

* Entonces:

$$x_1=1+\frac{\sqrt{3}}{3}+1-\frac{\sqrt{3}}{3}=2$$

$$x_2=\left(1+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)w+\left(1-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)w^2=1+i$$

$$x_3=\left(1+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)w^2+\left(1-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)w=1-i$$

ANÁLISIS Y DISCUSIÓN DE LAS RAÍCES DE LA ECUACIÓN CÚBICA

Sea la ecuación $x^3+px+q=0$, $\{p;q\}\subset R$ de raíces x_1, x_2, x_3 y $\Delta=\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3$

$$x_1=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\Delta}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\Delta}}$$

$$x_2=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\Delta}}\,w+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\Delta}}\,w^2$$

$$x_3=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\Delta}}\,w^2+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\Delta}}\,w$$

donde:

$$w=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\ /\ i=\sqrt{-1}$$

Se cumple:

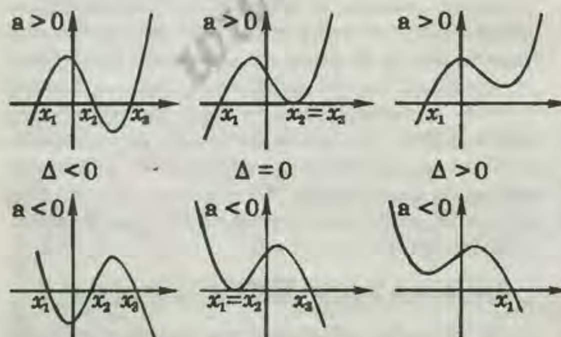
1) Si $\Delta<0\Rightarrow\{x_1,x_2,x_3\}\subset R$, *además todas distintas (3 raíces diferentes entre sí)*

2) Si $\Delta=0\Rightarrow\{x_1,x_2,x_3\}\subset R$ *además* $x_1=x_2$ *(dos raíces iguales)*

3) Si $\Delta>0\Rightarrow x_1\in R$, $x_2=\overline{x}_3\wedge x_2,x_3\in C-R$ *es decir una raíz real y las otras 2 imaginarias y además conjugadas.*

ANÁLISIS GEOMÉTRICO

Sea el polinomio $P(x)=ax^3+bx+c$; $a, b, c\in R$ de raíces x_1,x_2,x_3 y discriminate Δ



EJEMPLO:

Analice las raíces de: $x^3-x+3=0$

RESOLUCIÓN:

* En este caso: $p=-1;\ q=3$

$$\Rightarrow\Delta=\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{-1}{3}\right)^3=\frac{9}{4}-\frac{1}{27}>0$$

$\Rightarrow\Delta>0$

* De donde concluimos que la ecuación presenta *1* raíz real y *2* imaginarias.

ECUACIÓN CUÁRTICA O DE CUARTO GRADO

Son aquellas de la forma:

$$P(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0;\ a\neq0$$

RESOLUCIÓN DE FERRARI

Sea la ecuación $x^4+2px^3+qx^2+2rx+s=0$ se busca formar cuadrados perfectos.

* Sumando miembro a miembro $(ax+b)^2$ a fin de que ambos miembros sean cuadrados perfectos.

$$x^4+2px^3+(q+a^2)x^2+2(r+ab)x+(s+b^2)=(ax+b)^2$$

* Supongamos que el primer miembro sea $(x^2+px+k)^2$.

* Por identidad de polinomios:

$$p^2+2k=q+a^2;\ kp=r+ab;\ k^2=s+b^2$$

* Eliminando a y b de estas ecuaciones tenemos:

$$(pk-r)^2=(p^2+2k-q)(k^2-s)$$

* Formándose la siguiente ecuación cúbica.

$$\boxed{2k^3-qk^2+2(pr-s)k-p^2s+qs-r^2=0}$$

* De esta ecuación cúbica puede hallarse siempre un valor real de k, con lo cual a y b quedan determinadas como:

$$(x^2+px+k)^2=(ax+b)^2\Rightarrow x^2+px+k=\pm(ax+b)$$

* Luego, los valores de x se obtienen de las ecuaciones cuadráticas.

$$x^2+(p-a)x+k-b=0$$
$$x^2+(p+a)x+k+b=0$$

EJEMPLO:

Resolver: $x^2-2x^3+2x^2+4x-8=0$

RESOLUCIÓN:

* Sumando a ambos miembros:

$(ax+b)^2=a^2x^2+2abx+b^2$, resulta:

$$x^4-2x^3+(a^2+2)x^2+2(ab+2)x+b^2-8=(ax+b)^2$$

* Sea el primer miembro igual a: $(x^2-x+k)^2$

* Por identidad de polinomios:

$$a^2=2k-1;\ ab=-k-2;\ b^2=k^2+8$$

* Obteniéndose: $(2k-1)(k^2+8)=(-k-2)^2$

$\rightarrow 2k^3 - 2k^2 + 12k - 12 = 0$

* De donde se obtendrá: $k=1$

* Entonces:

$a^2=1$; $ab=-3$; $b^2=9 \rightarrow a=1$ y $b=-3$

* Luego la ecuación:

$(x^2-x+k)^2=(ax+b)^2$ queda:

$(x^2-x+1)^2=(x-3)^2$

$\rightarrow \quad x^2-x+1=\pm(x-3)$

* Es decir: $x^2-2x+4=0$ ....(I)

$x^2-2=0$ ....(II)

* Obteniéndose finalmente de *(I)* y *(II)*:

$x_1=\sqrt{2}; x_2=-\sqrt{2}; \; x_3=1+\sqrt{3}i; x_4=1-\sqrt{3}i$

RESOLUCIÓN DE DESCARTES

* Haciendo $x=y-\dfrac{a}{4}$, la ecuación queda reducida en: $y^4-qy^2+ry+s=0$ *(ecuación cuártica incompleta)*

* Suponga que el polinomio cuártico queda

$$y^4+qy^2+ry+s=(y^2+ky+\ell)(y^2-ky+m),$$

* De la igualdad de polinomos se tiene:

$$\ell+m-k^2=q; \; k(m-\ell)=r; \; \ell m=s$$

* De las dos primeras ecuaciones:

$2m=k^2+q+\dfrac{r}{k}$, $2\ell=k^2+q-\dfrac{r}{k}$ y reemplazando

En la tercera: $(k^3+qk+r)(k^3+qk-r)=4sk^2$

* Es decir: $\boxed{k^6+2qk^4+(q^2-4s)k^2-r^2=0}$

* Esta es una ecuación cúbica en k^2 que tiene siempre una solución positiva. Cuando se conoce k^2 se conocen los valores de ℓ y m y la solución de la cuártica incompleta se obtiene resolviendo las dos ecuaciones cuadráticas.

$$y^2+ky+\ell=0$$
$$y^2-ky+m=0$$

EJEMPLO:

Resolver: $x^4-13x^2-4x+2=0$

RESOLUCIÓN:

* Haciendo:

$$x^4-13x^2-4x+2=(x^2+kx+\ell)(x^2-kx+m)$$

* De donde por igualdad de polinomios resulta:

$$\left.\begin{array}{l} m+\ell=k^2-13 \\ m-\ell=-\dfrac{4}{k} \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l} 2m=k^2-\dfrac{4}{k}-13 \\ 2\ell=k^2+\dfrac{4}{k}-13 \end{array}$$

$$m\ell=2$$

* De donde: $(k^2-\dfrac{4}{k}-13)(k^2+\dfrac{4}{k}-13)=4(2)$

$\Rightarrow (k^3-13k-4)(k^3-13k+4)=8k^2$

$\Rightarrow (k^3-13k)^2-16=8k^2$

$\Rightarrow k^6-26k^4+161k^2-16=0$

* Resolviendo resulta $k=4$, entonces:

$m+\ell=3$; $m-\ell=-1 \rightarrow m=1 \wedge \ell=2$

* Luego:

$$x^4-13x^2-4x+2=(x^2+4x+2)(x^2+4x-1)$$

* Entonces:

$$x^2+4x+2=0 \rightarrow x=-2\pm\sqrt{2}$$
$$x^2-4x+1=0 \rightarrow x=2\pm\sqrt{3}$$
$$-2+\sqrt{2}\,;\,-2-\sqrt{2}\,;\,2+\sqrt{3}\,;\,2-\sqrt{3}$$

ECUACIÓN GENERAL DE QUINTO GRADO

El éxito obtenido al resolver las ecuaciones de tercero y cuarto grado llevaron a los matemáticos de la época de Bombelli a intentar, por métodos similares, resolver la ecuación general de quinto grado:

$$x^5+bx^4+cx^3+dx^2+ex+f=0$$

pero todos sus esfuerzos fallaron. La razón de este fracaso fue descubierta en ***1824*** por el joven y genio matemático noruego ***N.H.*** Abel ***(1802–1829)***, quien demostró que la ecuación general de quinto grado *no se puede resolver* por radicales. Es decir, no se encuentra una expresión, donde las operaciones de adición, sustracción, multiplicación, división y el cálculo de raíces cuadradas, cúbicas, cuartas, etc., de explícitamente las raíces de un polinomio arbitrario, mónico, de grado ***5***, en términos de los coeficientes del polinomio. Los resultados más importantes en la teoría de ecuaciones polinomicas se logran en las investigaciones del matemático francés, contemporaneo de Abel, Evariste Galois ***(1811-1832)***. La teoría de Galois no solamente muestra por que es imposible resolver la ecuación general de quinto grado por radicales, sino también por qué es posible resolver las ecuaciones de tercero y cuarto grado.

ECUACIÓN BICUADRADA

Es la ecuación polinomial de cuarto grado que contiene solamente potencias pares de la incógnita, su forma canónica o general es:

$$\boxed{ax^4+bx^2+c=0\;;\;abc\neq 0}$$

"a"; "b" y "c" son los coeficientes; "x" es la incógnita.

RESOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN BICUADRADA

Sea: $ax^4+bx^2+c=0\ ;\ a\neq 0$

* Realizando el cambio: $x^2=y$, la ecuación se puede transformar a una de segundo grado, llamada *ECUACIÓN RESOLVENTE*, de la forma:

$$ay^2+by+c=0;\ a\neq 0$$

* Cuya solución general es:

$$y=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

* Como: $y=x^2$, se tiene:

$$x^2=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

* Por lo tanto:

$$\boxed{x=\pm\sqrt{\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}}\ \ldots\ldots\ldots\ldots(I)$$

donde: $\Delta=b^2-4ac$........(Discriminante o invariante)

Siendo ésta, la solución general de la ecuación bicuadrada *(I)*. Haciendo todas las combinaciones posibles de los signos en *(I)*, se obtienen las siguientes raíces:

$$x_1=+\sqrt{\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}};\ x_2=-\sqrt{\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}}$$

$$x_3=+\sqrt{\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}};\ x_4=-\sqrt{\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}}$$

OBSERVACIÓN:

La ecuación bicuadrada $ax^4+bx^2+c=0$; se puede resolver por factorización (Aspa simple).

Si: b^2-4ac; ***es un cuadrado perfecto.***

EJEMPLO 1:

Resolver: $9x^4-13x^2+4=0$

RESOLUCIÓN:

* Dado que: $a=9\ ;\ b=-13\ ;\ c=4$

$b^2-4ac=(-13)^2-4(9)(4)=25$; es un cuadrado perfecto, la ecuación es factorizable; en efecto los factores de:

$$9x^4-13x^2+4=0$$

$$\begin{array}{lll} 9x^2 & -4 \rightarrow & -4x^2 \\ x^2 & -1 \rightarrow & -9x^2 \\ & & \overline{-13x^2} \end{array}$$

Son: $(9x^2-4)(x^2-1)=0$

* Asimismo, cada paréntesis se puede factorizar aplicando diferencia de cuadrados, es decir:

$(3x+2)(3x-2)(x+1)(x-1)=0$

* Igualando cada factor a cero las raíces correspondientes son:

$$x_1=-\frac{2}{3};\ x_2=\frac{2}{3};\ x_3=-1;\ x_4=1$$

EJEMPLO 2:

Resolver: $36x^4-73x^2+16=0$

RESOLUCIÓN:

* Factorizando por aspa simple:

$$(4x^2-1)(9x^2-16)=0$$

* Igualando cada factor a cero:

$$\begin{cases} 4x^2-1=0\Rightarrow x=\pm\dfrac{1}{2} \\ 9x^2-16=0\Rightarrow x=\pm\dfrac{4}{3} \end{cases}$$

* Entonces: $C.S.=\left\{\frac{1}{2};-\frac{1}{2};\frac{4}{3};-\frac{4}{3}\right\}$

EJEMPLO 3:

Resolver: $2x^4+3x^2-5=0$

RESOLUCIÓN:

* Cálculo del discriminante: $\Delta=(3)^2-4(2)(-5)=49$

* Reemplazando en la solución general:

* Se tiene: $x=\pm\sqrt{\dfrac{-3\pm\sqrt{49}}{2(2)}}$

* Luego, las raíces por separado son:

$$x_1=+\sqrt{\frac{-3+7}{4}}=1;\ x_2=-\sqrt{\frac{-3+7}{4}}=-1$$

* Además:

$$x_3=+\sqrt{\frac{-3-7}{4}}=\frac{\sqrt{10}}{2}i$$

$$x_4=-\sqrt{\frac{-3-7}{4}}=-\frac{\sqrt{10}}{2}i$$

NOTA:

Algunas ecuaciones bicuadradas se pueden resolver factorizando el polinomio (ax^4+bx^2+c) en dos factores cuadráticos.

EJEMPLO 4:

Resolver: $9x^4+481x^2-10000=0$

RESOLUCIÓN:

* Aplicando el criterio del aspa simple, se tiene:

$$\begin{array}{ll} 9x^2 & +625 \\ x^2 & -16 \end{array}$$

$$(9x^2+625)(x^2-16)=0$$

* Igualando a cero cada factor cuadrático:

$$9x^2+625=0 \quad ó \quad x^2-16=0$$
$$x^2=-\frac{625}{9} \quad ó \quad x^2=16$$
$$x=\pm\frac{25}{3}i \quad ó \quad x=\pm 4$$

* Luego, el conjunto solución S, será:

$S=\left\{\frac{25}{3}i;-\frac{25}{3}i;4;-4\right\}$ siendo $i=\sqrt{-1}$, la unidad imaginaria.

PROPIEDADES DE LAS RAÍCES DE LA ECUACIÓN BICUADRADA

Sea la bicuadrada en "x":

$$ax^4+bx^2+c=0\ ;\ abc\neq 0$$

Si "m" y "n" son dos raíces no simétricas, entonces: "$-m$" y "$-n$" también lo serán.

I) Las raíces de la ecuación bicuadrada son opuestas dos a dos es decir:

$$x_1=m\ ;\ x_2=-m\ ;\ x_3=n\ ;\ x_4=-n$$

II) Suma de productos binarios:

$$\boxed{x_1x_2+x_3x_4=\frac{b}{a}} \wedge \boxed{m^2+n^2=-\frac{b}{a}}$$

III) Producto de raíces:

$$\boxed{x_1x_2x_3x_4=\frac{c}{a}} \wedge \boxed{m^2\times n^2=\frac{c}{a}}$$

EJEMPLO:

Dada la ecuación bicuadrada: $6x^4+10x^2+9=0$

Si $x_1+x_2+x_3$ y x_4 son raíces de la misma se verifican las relaciones (por Cardano Viéte):

* $x_1+x_2+x_3+x_4=0$ * $x_1x_2+x_3x_4=\frac{10}{6}=\frac{5}{3}$

* $x_1x_2x_3x_4=\frac{9}{6}=\frac{3}{2}$

RECONSTRUCCIÓN DE LA ECUACIÓN BICUADRADA

Conociendo dos raíces, cuya suma no sea cero. (no simétricas).

Una ecuación bicuadrada en "x", donde dos de sus raíces son "m" y "n" $(m+n\neq 0)$ viene dada por:

$$\boxed{x^4+\left(\begin{matrix}\text{Suma de}\\ \text{productos binarios}\end{matrix}\right)x^2+\left(\begin{matrix}\text{Producto}\\ \text{de raíces}\end{matrix}\right)=0}$$

ó $\boxed{x^4-(m^2+n^2)x^2+m^2n^2=0}$

EJEMPLO 1:

Formar la ecuación bicuadrada, dos de cuyas raíces son: -3 y $2i$

RESOLUCIÓN:

* En este caso: $m=-3$ y $n=2i$, luego la ecuación será:

$$x^4-\left[(-3)^2+(2i)^2\right]x^2+(-3)^2(2i)^2=0$$
$$\rightarrow x^4-5x^2-36=0$$

EJEMPLO 2:

Una de las soluciones de una ecuación bicuadrada es 5.

Reconstruir la ecuación; si: $x_1x_2x_3x_4=225$

RESOLUCIÓN:

* Si una de las raíces es $x_1=5$, entonces la otra será: $x_2=-5$

* Reemplazando en el dato:

$$(5)(-5)x_3x_4=225 \ \rightarrow x_3x_4=-9$$

* Pero si: $x_3=n\rightarrow x_4-n$, luego: $n(-n)=9\rightarrow n=3$

* Se pide: $x^4-(m^2+n^2)x^2+m^2n^2=0$

$$\Rightarrow x^4-(5^2+3^2)x^2+5^2\times 3^2=0$$
$$\Rightarrow x^4-34x^2+225=0$$

EJEMPLO 3:

Muestre la ecuación bicuadrada de coeficientes enteros, en la cual una de cuyas raíces es:

$$\frac{\sqrt{10+\sqrt{11}}}{2}$$

RESOLUCIÓN:

* Una forma práctica es racionalizando gradualmente este valor irracional, así:

$$x=\frac{\sqrt{10+\sqrt{11}}}{2}\Rightarrow\ 2x=\sqrt{10+\sqrt{11}}$$

* Elevando al cuadrado ambos miembros:

$$4x^2=10+\sqrt{11}\ \Rightarrow 4x^2-10=\sqrt{11}$$

* Nuevamente al cuadrado, se obtiene:

$$16x^4-80x^2+100=11$$

* Transponiendo 11, resulta lo que nos piden:

$$16x^4-80x^2+89=0$$

EJEMPLO 4:

Calcular "m" para que las cuatro raíces de la ecuación bicuadrada:

$x^4-(3m+10)x^2+(m+2)^2=0$, forme una progresión aritmética.

RESOLUCIÓN:

* Sean $-\beta, -\alpha, \alpha, \beta$ las raíces con $\alpha < \beta$, luego como están en progresión aritmética, entonces:

$$\beta - \alpha = \alpha - (\alpha) \Rightarrow \beta = 3\alpha$$

* De la ecuación:

$$\alpha^2 + \beta^2 = 3m + 10 \text{ ....(I)}$$

$$\alpha^2\beta^2 = (m+2)^2$$

$$\rightarrow \alpha\beta = m + 2 \text{ ....(II)}$$

* De $(I) + (II)$:

$$\frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta} = \frac{3m+10}{m+2}$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha^2 + (3\alpha)^2}{\alpha(3\alpha)} = \frac{3m+10}{m+2} \Rightarrow \frac{10}{3} = \frac{3m+10}{m+2}$$

* Resolviendo: $m=10$

ECUACIÓN BINOMIA

Es aquella ecuación de dos términos y que presenta la siguiente forma general:

$$\boxed{ax^n + b = 0}$$

donde: $ab \neq 0;\ n \in Z \wedge n \geq 3$

Para resolver esta ecuación podemos aplicar productos notables o los criterios factorización, así como también las aplicaciones de los números complejos (Teorema de Moivre).

* En: $ax^n + b = 0 \Rightarrow x^n = -\frac{b}{a} \Rightarrow x = \sqrt[n]{-\frac{b}{a}}$

* Luego:

CASO I: Si: $\frac{b}{a} < 0$

$$\Rightarrow\ x = \sqrt[n]{-\frac{b}{a}(1)} = \sqrt[n]{-\frac{b}{a}} \times \sqrt[n]{1}$$

$$\Rightarrow \boxed{x_k = \sqrt[n]{-\frac{b}{a}}\left[\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i sen\left(\frac{2k\pi}{n}\right)\right]}$$

$$k = 0;1;2;...;(n-1)$$

CASO II: Si: $\frac{b}{a} > 0$

$$\Rightarrow\ x = \sqrt[n]{\frac{b}{a}(-1)} = \sqrt[n]{\frac{b}{a}} \times \sqrt[n]{-1}$$

$$\Rightarrow \boxed{x_k = \sqrt[n]{\frac{b}{a}}\left[\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{n}\right) + i sen\left(\frac{(2k+1)\pi}{n}\right)\right]}$$

$$k = 0;1;2;.....;(n-1)$$

TEOREMA:

Las ecuaciones binomias sólo tienen raíces simples, no aceptan raíces múltiples.

EJEMPLO 1:

Resolver: $9x^4 - 1 = 0$

RESOLUCIÓN:

* Factorizando: $(3x^2+1)(3x^2-1) = 0$

$$\Rightarrow 3x^2 + 1 = 0 \vee 3x^2 - 1 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 = -\frac{1}{3} \vee x^2 = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow x = \pm\sqrt{-\frac{1}{3}} \vee x = \pm\sqrt{\frac{1}{3}}$$

$$\Rightarrow x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}i \vee x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\Rightarrow C.S. = \left\{\frac{\sqrt{3}}{3}i ; -\frac{\sqrt{3}}{3}i ; \frac{\sqrt{3}}{3} ; -\frac{\sqrt{3}}{3}\right\}$$

EJEMPLO 2:

Resolver: $x^3 - 64 = 0$

RESOLUCIÓN:

$$\Rightarrow x^3 = 64 \Rightarrow x = \sqrt[3]{64} = \underbrace{\sqrt[3]{64}}_{En\ R} \cdot \underbrace{\sqrt[3]{1}}_{En\ C}$$

* Pero:

$$\sqrt[3]{1} = \begin{cases} 1 \\ -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \end{cases} \Rightarrow x_1 = 4(1) = 4$$

$$x_2 = 4\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -2 + 2\sqrt{3}i$$

$$x_3 = 4\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -2 - 2\sqrt{3}i$$

$$\rightarrow C.S. = \{4; -2 + 2\sqrt{3}i; -2 - 2\sqrt{3}i\}$$

EJEMPLO 3:

Resolver: $x^3 + = 0$

RESOLUCIÓN:

* Lo podemos resolver aplicando productos notables y la resolución de la ecuación cuadrática:

$$\Rightarrow x^3 + 8 = 0$$

$$\Rightarrow (x+2)(x^2 - 2x + 4) = 0$$

$$\Rightarrow (x+2)(x^2 - 2x + 4) = 0$$

$$\Rightarrow x + 2 = 0 \vee x^2 - 2x + 4 = 0$$

$$\Rightarrow x = -2 \vee x = 1 + \sqrt{3}i \vee x = 1 - \sqrt{3}i$$

$$\rightarrow C.S.: x \in \{-2; 1 + \sqrt{3}i; 1 - \sqrt{3}i\}$$

ECUACIÓN TRINOMIA

Son aquellas ecuaciones de tres términos que presentan la siguiente forma general:

$$\boxed{ax^{2n}+bx^n+c=0}\ ;\ \forall\ abc\neq 0 \wedge n\in N$$

Estas ecuaciones se resuelven factorizando o realizando el cambio de variable: $x_n=y$; lo que la convierte en una ecuación cuadrática después de resolver esta, se repone la variable original y se hallan las soluciones de la ecuación trinomia.

* En la ecuación: $ax^{2n}+bx^n+c=0$

$$\Rightarrow ay^2+by+c=0 \qquad \Rightarrow y_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$\rightarrow y_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad \Rightarrow y_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

* En (I):

$$*\ x^n=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad \Rightarrow x=\sqrt[n]{\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$$

ó

$$*\ x^n=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad \Rightarrow x=\sqrt[n]{\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$$

EJEMPLO 1:

Resolver: $8x^6+7x^3-1=0$

RESOLUCIÓN:

* Factorizando: $(8x^3+1)(x^3-1)=0$

$$(2x+1)(4x^2-2x+1)(x-1)(x^2+x+1)=0$$

$$\Rightarrow 2x+1=0 \vee 4x^2-2x+1=0 \vee x-1=0 \vee x^2+x+1=0$$

$$\Rightarrow x=-\frac{1}{2} \vee x=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{4} \vee x=1 \vee x=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$$

$$C.S.=\left\{\frac{1}{2};\frac{1+\sqrt{3}i}{4};\frac{1-\sqrt{3}i}{4};1;\frac{-1+\sqrt{3}i}{2};\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right\}$$

EJEMPLO 2:

Resolver: $x^6+19x^3-216=0$

RESOLUCIÓN:

* Factorizando: $(x^3+27)(x^3-8)=0$

$$\Rightarrow x^3+27=0 \text{ ó } x^3-8=0$$

$$\Rightarrow x^3=-27 \vee x^3=8$$

$$\Rightarrow x=-3\sqrt[3]{1} \vee x=2\sqrt[3]{1}$$

* Entonces: $x_1=(-3)(1)=-3$

$$x_1=(-3)(1)=-3$$

$$x_2=(-3)\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=\frac{3}{2}-\frac{3}{2}\sqrt{3}i$$

$$x_3=(-3)\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\sqrt{3}i$$

$$x^4=(2)(1)=0$$

$$x_5=(2)\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=-1+\sqrt{3}i$$

$$x_6=(2)\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=-1-\sqrt{3}i$$

* Luego:

$$C.S.=\left\{-3;\frac{3}{2}-\frac{3}{2}\sqrt{3}i;\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\sqrt{3}i;2;-1+\sqrt{3}i;-1-\sqrt{3}i\right\}$$

EJEMPLO 3:

Resolver: $x^6-10x^3+16=0$

RESOLUCIÓN:

* Factorizando:

$$(x^3-8)(x^3-2)=0 \ \Rightarrow \ \{x^3=8 \vee x^3=2\}$$

$$\Rightarrow x=\sqrt[3]{8} \vee x=\sqrt[3]{2} \Rightarrow \{\ x_1=2\ ;\ x_4=\sqrt[3]{2}$$

$$x_2=2w\ ;\ x_5=\sqrt[3]{2}w \qquad x_3=2w^2\ ;\ x_6=\sqrt[3]{2}w^2\ \}$$

donde: $w=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\,/\,i=\sqrt{-1}$

ECUACIONES RECÍPROCAS

Se denominan así a aquellas ecuaciones polinómicas o racionales en las que al intercambiar $x\rightarrow\frac{1}{x}$ la ecuación que se obtiene es equivalente a la original. Estas ecuaciones pueden ser de grado para o impar, y se pueden reconocer también porque los coeficientes de sus términos equidistantes son iguales en valor absoluto. Presentan las siguiente forma general:

$$\boxed{ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+...+cx^2+bx+a=0}$$

donde $n\in Z \wedge n\geq 2$

PROPIEDADES:

* Si "r" es raíz de la ecuación recíproca entonces: "$1/r$" también es raíz de la ecuación.

* Si la ecuación es recíproca de grado impar, tiene una raíz "1" ó "-1" (se evalúa para determinar cual de ellas es la raíz).

* Si $P(x)=0$ es una ecuación polinómica de grado "n", se cumple:

$$\boxed{P(x)=x^nP\left(\frac{1}{x}\right)}$$

* De la definición, los polinomios recíprocos son de la forma:

$$ax+b$$

$$ax^2+bx+a$$

$$ax^3+bx^2+bx+a$$

$ax^4+bx^3+cx^2+bx+a$

$ax^5+bx^4+cx^3+cx^2+bx+a$

$\vdots$

EJEMPLOS:

$$2x^3+5x^2+5x+2=0$$

$$x^4-7x^3+6x^2-7x+1=0$$

$$3x^5+2x^4+5x^3-5x^2-2x-3=0$$

* Para la resolución se debe agrupar los términos equidistantes de los extremos, factorizar $x^{\frac{n}{2}}$ (si n es par) para luego realizar el siguiente cambio de variable:

$$x+\frac{1}{x}=y\Rightarrow\begin{cases}x^2+\dfrac{1}{x^2}=y^2-2\\ x^3+\dfrac{1}{x^3}=y^3-3y\end{cases}$$

* Para que la resolución sea más clara, veamos los dos siguientes casos:

I) ECUACIÓN RECÍPROCA DE GRADO PAR:

Se factoriza la parte literal del término central y se agrupa convenientemente; luego se realiza el cambio de variable respectivo:

* Si: $x+\frac{1}{x}=a$ Si: $x-\frac{1}{x}=a$

$x^2+\frac{1}{x^2}=a^2-2$ $x^2+\frac{1}{x^2}=a^2+2$

$x^3+\frac{1}{x^3}=a^3-3a$ $x^3-\frac{1}{x^3}=a^3+3a$

$\vdots$ $\vdots$

* Se resuelve la ecuación con la nueva variable; luego se repone, la variable original y se resuelve, hallándose las soluciones de la ecuación recíproca.

EJEMPLO 1:

Resolver: $6x^4-25x^3+38x^2-25x+6=0$

RESOLUCIÓN:

* Agrupando adecuadamente:

$$x^2\left[6x^2-25x+38-\frac{25}{x}+\frac{6}{x^2}\right]=0$$

$$\rightarrow x^2\left[6\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-25\left(x+\frac{1}{x}\right)+38\right]=0\ \text{..........}(I)$$

* Realizando el cambio de variable en el corchete :

$$x+\frac{1}{x}=a\rightarrow x^2+\frac{1}{x^2}=a^2-2$$

* Reemplazando: $6(a^2-2)-25a+38=0$

* Factorizando: $(6a-13)(a-2)=0$

* Reponiendo "x" y reemplazando en (I):

$$\Rightarrow x^2\left[6\left(x+\frac{1}{x}\right)-13\right]\left[x+\frac{1}{x}-2\right]=0$$

* Efectuando:

$$(6x^2-13x+6)(x^2-2x+1)=0$$

$$\rightarrow(3x-2)(2x-3)(x-1)^2=0$$

* Igualando a cero cada factor el $C.S.=\left\{\frac{2}{3};\frac{3}{2};1\right\}$

NOTA:

También se puede factorizar por aspa doble especial.

EJEMPLO 2:

Resolver: $12x^4-4x^3-41x^2-4x+12x=0$

RESOLUCIÓN:

$$P(x)=x^2\left[12x^2-4x-41-\frac{4}{x}+\frac{12}{x^2}\right]$$

$$\rightarrow P(x)=x^2\left[12\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-4\left(x+\frac{1}{x}\right)-41\right]\text{.......}(I)$$

* Hacemos: $x+\frac{1}{x}=a\Rightarrow x^2+\frac{1}{x^2}=a^2-2$

* En el corchete de (I):

$$12(a^2-2)-4a-41\Rightarrow12a^2-4a-65$$

$$\Rightarrow(6a+13)(2a-5)$$

* Reponiendo "x":

$$x^2\left[6\left(x+\frac{1}{x}\right)+13\right]\left[2\left(x+\frac{1}{x}\right)-5\right]=0$$

$$\Rightarrow x^2\left(\frac{6x^2+13x+6}{x}\right)\left(\frac{2x^2-5x+2}{x}\right)=0$$

$$\Rightarrow(3x+2)(2x+3)(x-2)(2x-1)=0$$

$$\Rightarrow3x+2=0\vee2x+3=0\vee x-2=0\vee2x-1=0$$

$$\Rightarrow x=-\frac{2}{3}\vee x=-\frac{3}{2}\vee x=2\vee x=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow C.S.=\left\{-\frac{2}{3};-\frac{3}{2};2;\frac{1}{2}\right\}$$

II) ECUACIÓN RECÍPROCA DE GRADO IMPAR:

* Se factoriza mediante el método de los divisores binómicos, evaluar para $x=1\vee x=-1$

* Luego de obtener el factor lineal, el otro factor es un polinomio recíproco de grado par al cual se le aplica el método para resolver la ecuación recíproca de grado par.

EJEMPLO 1:

Resolver: $6x^5 - 29x^4 + 27x^3 + 27x^2 - 29x + 6 = 0$

RESOLUCIÓN:

* Factorizando por divisores binómicos:

$x+1=0$	6	−29	273	27	−29	370
$x=-1$	↓	−6	5	−62	35	47
	6	−35	62	−35	6	0

$\rightarrow (x+1)(6x^4 - 35x^3 + 62x^2 - 35x + 6) = 0$

* Igualando cada factor a cero:

$$x+1=0 \ ; \ x=-1$$

$$6x^4 - 35x^3 + 62x^2 - 35x + 6 = 0$$

* Aplicando el método para la ecuación recíproca de grado par:

* Se obtiene: $(2x^2 - 5x+2)(3x^2-10x+3=0$

* igualando a cero cada factor, el conjunto solución final es:

$$C.SP\left\{-1 : \frac{1}{2}; 2\frac{1}{3}; 3\right\}$$

EJEMPLO 2:

Resolver: $6x^5 - 41x^4 + 97x^3 - 97x^2 + 41x - 6 = 0$

RESOLUCIÓN:

* La ecuación se verifica para $x=1$

	6	−41	97	−97	41	−6
$x=1$	↓	6	−35	62	−35	6
	6	−35	62	−35	6	0

$\Rightarrow (x-1)(6x^4 - 35x^3 + 62x^2 - 35x + 6) = 0$

$\Rightarrow (x-1)x^2\left[6x^2 - 35x + 62 - \frac{35}{x} + \frac{6}{x^2}\right] = 0$

$\Rightarrow (x-1)x^2\left[6\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 35\left(x + \frac{1}{x}\right) + 62\right] = 0$

* Haciendo: $x + \frac{1}{x} = a \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = a^2 - 2$ y luego de factorizar y reponer, resulta:

$$(x-1)x^2\left(\frac{2x^2 - 5x + 2}{x}\right)\left(\frac{3x^2 - 10x + 3}{x}\right) = 0$$

$\Rightarrow (x-1)(2x^2 - 5x + 2)(3x^2 - 10x + 3) = 0$

$\Rightarrow (x-1)(2x-1)(x-2)(3x-1)(x-3) = 0$

* Igualando cada factor a cero, se obtiene:

$$C.S. = \left[1; \frac{1}{2}; 2; \frac{1}{3}; 3\right]$$

GRÁFICA DE UN POLINOMIO

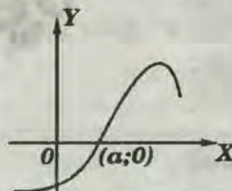
Como un polinomio $P(x)$ es una función continua, entonces las coordenadas de los puntos de la gráfica de un polinomio se determina dando valores reales a la variable x, luego calculamos los valores correspondientes a $P(x)$ y por lo tanto la gráfica del polinomio $P(x)$ es el conjunto de puntos:

$$\{(x; P(x)) / x \in R\}$$

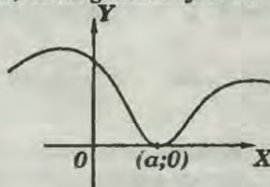
Ahora veremos algunos criterios que nos permita aproximar la gráfica de un polinomio evitando de esta manera la forma laboriosa de tabular los puntos $(x; P(x))$.

En primer lugar, los puntos de la gráfica que corresponde a los ceros o raíces reales de un polinomio $P(x)$ están sobre el eje X y son de la forma $(x;0)$.

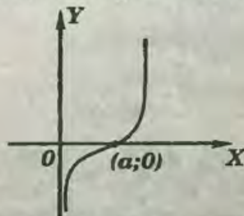
I) Si $x=a$ es una raíz real simple de la ecuación $P(x)=0$ la gráfica de $P(x)$ corta al eje X en el punto $(a;0)$.



I) Si $x=a$ es una raíz de multiplicidad m par, la gráfica de $P(x)$ es tangente al eje X en el punto $(a;0)$.



III) Si $x=a$ es una raíz de multiplicidad m impar, la gráfica de $P(x)$ es tangente y corta al eje X en el punto $(a; 0)$ en este caso se dice que $(a; 0)$ es un punto de inflexión de la gráfica de $P(x)$.



Mediante el criterio de los puntos críticos se determina en que intervalos la gráfica está sobre el eje X y en que intervalos está la gráfica debajo del eje X.

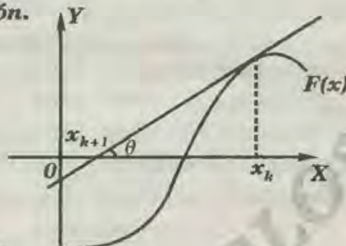
MÉTODO DE NEWTÓN-RAPHSON
(para aproximar raíces)

Uno de los métodos más usados para resolver ecuaciones es el método de Newton-Raphson, debido a sugran velocidad para obtener una buena aproximación a la raíz cuando un valor inicial es el elegido cercano a la raíz exacta . La figura da una descripción exacta. Para esto consideraremos la siguiente hipótesis:

"La función F es continua en $[a_0; b_0]$ y $F(a_0)\times F(b_0)<0$.

Partiendo de una estimación inicial x_0 *(esta estimación puede ser* $x_0=\frac{a_0+b_0}{2}$*)* , trazamos una recta tangente a la curva en el punto $(x_0; F(x_0))$ y la intersección de esta recta con el eje **X** es la nueva aproximación a la raíz de la ecuación. La repetición del proceso lleva al método de Newton–Raphson.

$$x_{k+1}=x_k-\frac{F(x_k)}{F'(x_k)}$$ ***donde "x_k" es la k–enésima aproximación.***



EJEMPLO:

Sea: $F(x)=x^3-x-4=0$ ahora estimando un intervalo adecuado mediante el teorema del valor intermedio, el cual puede ser $[1\ ;\ 2]$ y tomando $x_0=\frac{1+2}{2}=1,5$ calculamos:

k	x_k	$F(x_k)$	$F'(x_k)$
0	1,5	–2,125	5,75
1	1,8695625	0,6650774	9,485822
2	1,7994498	0,0272037	8,7140585
3	1,796328		

* Como se aprecia, en solamente *3* tabulaciones (iteraciones) hemos obtenido una aproximación a la raíz con *3* cifras significativas exactas: ***1,79***

ECUACIONES FRACCIONARIAS

Son aquellas que se reducen a la forma:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=0\ ;\forall Q(x)\neq 0$$

Para resolver estas ecuaciones se debe restringir el denominador (diferente de cero), luego resolver la ecuación y finalmente intersectar los conjuntos de valores obtenidos.

EJEMPLOS:

* $\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1}=2$ * $\frac{x^2-1}{x^3+2}-1=\frac{2}{x}$

RESOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN FRACCIONARIA

Para resolver esta ecuación, se sugiere seguir, los siguientes pasos:

I) Asegurar la existencia de la expresión $\frac{P(x)}{Q(x)}$, para lo cual se debe asegurar que $Q(x)\neq 0$. De aquí se obtiene un conjunto de valores que puede asumir la incógnita (conjunto de valores admisibles o campo de definición de la ecuación $Q(x)\neq 0$.

II) Procurar, en lo posible, transformar la fraccionaria, en una polinomial; cuya resolución la conocemos obteniéndose un conjunto solución.

III) Finalmente el conjunto solución de la ecuación fraccionaria, es la intersección de los conjuntos obtenidos en los pasos ***(I)*** y ***(II)***.

NOTA:

La resolución de las ecuaciones fraccionarias las realizaremos en el campo de los números complejos, a menos que se diga lo contrario.

EJEMPLO 1:

Resolver:

$$x^2-x+\frac{5}{x}=6+\frac{5}{x}$$

RESOLUCIÓN:

* Conjunto de valores admisibles ***(C.V.A.)***, o restricción: $x\neq 0$

* Luego reduciendo, resulta:

$$x^2-x-6=0$$

$$\Rightarrow (x-3)(x+2)=0\Rightarrow \{x_1=3\ \vee\ x_2=-2\}$$

* Como estas soluciones son admisibles (es decir ≠ de cero), entonces:

$$C.S.=\{3;-2\}$$

EJEMPLO 2:

Resolver: $$\frac{4x-8}{x^2+x}=\frac{3x-6}{x+1}$$

RESOLUCIÓN:

* Expresándola de otra manera:

$$\frac{4(x-2)}{x(x+1)}=\frac{3(x-2)}{x+1}$$

* Cuyas restricciones son $x \neq 0$ y $x \neq -1$.
* Además: $x-2=0 \Leftrightarrow x=2$ es una solución de la ecuación inicial.
* Simplificando se obtiene la nueva ecuación:

$$\frac{4}{x}=3 \rightarrow x=\frac{4}{3}$$

* Finalmente el conjunto solución será: $C.S.=\left\{2; \frac{4}{3}\right\}$

OBSERVACIÓN:

Si en ambos miembros de una ecuación fraccionaria reducida, se simplifica en los denominadores un mismo factor que contenga a la incógnita, no se pierden soluciones. Pero, si se simplifica en los numeradores, para no perder soluciones, previamente dicho factor deberá igualarse a cero.

EJEMPLO 3:

Resolver: $\frac{2}{x-3}-\frac{x}{x-2}=\frac{x}{x^2-5x+6}$

RESOLUCIÓN:

* Restringiendo: $x-3 \neq 0 \wedge x-2 \neq 0$

$\rightarrow x \neq 3 \wedge x \neq 2$ .... *(I)*

* Efectuando operaciones:

$$\frac{2x-4-x^2+3x}{x^2-5x+6}=\frac{x}{x^2-5x+6}$$

$\rightarrow 5x-4-x^2=x \rightarrow 0=x^2-4x+4$

$0=(x-2)^2 \rightarrow x=2$ .... *(II)*

* De *(I)* $\wedge$ *(II)*: Vemos que $x=2$ no satisface la ecuación:

$$\rightarrow C.S.=\phi$$

ECUACIÓN IRRACIONAL

Es aquella ecuación algebraica, donde por lo menos uno de sus miembros es una expresión irracional, la cual puede presentar la forma general elemental:

$$F(x)=\sqrt[n]{G(x)}$$

Donde F y G son expresiones algebraicas cualesquiera, y "n" es un número natural $(n \geq 2)$.

EJEMPLOS:

* $\sqrt{x-1}+\sqrt{1-x}=2$ * $\frac{3}{\sqrt{x^2-1}}+x=5$

Para su mejor estudio analizaremos por separado los radicales de índice impar y los redicales de índice par.

I) RADICALES DE ÍNDICE IMPAR :

Sea: $F(x)=\sqrt[2n+1]{G(x)}$ está definida para todo $G(x) \in \mathbb{R}, \wedge x \in \mathbb{R}$ ya que las ecuaciones irracionales sólo se estudian en $\mathbb{R}$.

PROPIEDAD:

$$\forall\, x \in \mathbb{R}; \sqrt[2n+1]{x}=r \Rightarrow x=r^{2n+1}$$

EJEMPLO:

Resolver: $\sqrt[3]{x^3+2}=-x$

RESOLUCIÓN:

* De la propiedad: $x^3+2=(-x)^3$

$\Rightarrow x^3+2=-x^3 \Rightarrow 2x^3=-2$

$\Rightarrow x^3=-1 \Rightarrow x=\sqrt[3]{-1} \Rightarrow x=-1$

II) RADICALES DE ÍNDICE PAR :

El estudio de las ecuaciones irracionales sólo se realiza en los reales, es decir:

Si $g(x)=\sqrt[2n]{f(x)}, n \in \mathbb{N}$, se dirá: $g(x)$ es real no negativo, si y sólo si $f(x) \geq 0$, además queda garantizada la definición de $g(x)$ si y sólo si $f(x) \geq 0$.

* Para resolver estas ecuaciones seguiremos el siguiente procedimiento.

1) La ecuación está bién definida si $g(x) \geq 0 \wedge f(x) \geq 0$ de donde obtenemos en campo de definición para la ecuación.

2) Garantizada la existencia, elevamos a la $2n$.

$$g^{2n}(x)=f(x)$$

3) La solución general estará formada por aquellos x que cumplen con *(1)* y *(2)*.

EJEMPLO:

Resolver: $2x-3=\sqrt{2x^2-3x+4}$

RESOLUCIÓN:

I) Definir y restringir la ecuación:

$2x-3 \geq 0 \wedge 2x^2-3x+4 \geq 0$

$\rightarrow 2x-3^30 \wedge \underbrace{x \in \mathbb{R}}_{\text{ver inecuaciones}}$

$\rightarrow x \geq \frac{3}{2}$

II) Elevando al cuadrado, resulta:

$(2x-3)^2=2x^2-3x+4$

$\Rightarrow 4x^2-12x+9=2x^2-3x+4 \Rightarrow 2x^2-9x+5=0$

$\Rightarrow x_1=\frac{9-\sqrt{41}}{4}; \ x_2=\frac{9+\sqrt{41}}{4}$

$\Rightarrow x_1 \approx 0{,}7; \ x_2 \approx 4, ...$

* Pero según *(I)*, $x \geq \frac{3}{2}$, entonces: $C.S.=\left\{\frac{9+\sqrt{41}}{4}\right\}$

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1:

Resolver: $2x^3 - 7x^2 + 7x - 2 = 0$

A) 1 y 2 B) 1; -1/2; 2 C) 1; 1/2; 2
D) 2 y 1/2 E) 1/2 y 1

RESOLUCIÓN:

* Si es de grado impar y de cuyos coeficientes de los términos equidistantes son iguales y de signo contrario; entonces admite la ecuación como raíz a $x=1$.

* Factorizando: $2(x^3 - 1) - 7x(x-1) = 0$

* Por diferencia de cubos:

$$2(x-1)(x^2+x+1) - 7x(x-1) = 0,$$

$$\Rightarrow (x-1)[2x^2+2x+2-7x]=0$$

$$\Rightarrow (x-1)(2x^2-5x+2)=0 \Rightarrow (x-1)(2x-1(x-2)=0$$

* Igualando cada factor a cero:

$$x-1=0 \vee 2x-1=0 \vee x-2=0$$

$$\rightarrow \quad x=1 \vee x=\frac{1}{2} \vee x=2$$

* Luego: $C.S.=\left\{1; \frac{1}{2}; 2\right\}$

RPTA: "C"

PROBLEMA 2:

La ecuación de segundo grado con coeficientes reales que admite como raíz el número complejo $2-i\sqrt{3}$ es:

A) $x^2-4x+7=0$ B) $x^2-4x+1=0$
C) $x^2+4x-1=0$ D) $x^2+4x+1=0$

RESOLUCIÓN:

* Por propiedad de las ecuaciones cuadráticas con coeficientes reales, se sabe que si admite como raíz a un número complejo, entonces su conjugada también es raíz de dicha ecuación cuadrática.

Si $(2-i\sqrt{3})$ es una raíz de la ecuación cuadrática; entonces $(2+i\sqrt{3})$ también lo es.

* Por tal razón:

$$x^2-(2+i\sqrt{3}+2-i\sqrt{3})x+(2+i\sqrt{3})(2-i\sqrt{3})=0$$

$$\rightarrow x^2-4x+7=0$$

RPTA: "A"

PROBLEMA 3:

Si x es un número complejo, la parte imaginaria de una de las soluciones de $x^2-2x+i=0$ es:

A) 1 B) −1 C) $\frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}$

D) $\frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{2}}}$ E) $\frac{1}{\sqrt{-2+2\sqrt{2}}}$

RESOLUCIÓN:

* Resolviendo la ecuación por la fórmula general:

$$x=\frac{2\pm\sqrt{(-2)^2-4(1)(i)}}{2(1)} \rightarrow x=1\pm\sqrt{1-i}$$

* Expresando $1-i$ en forma polar:

$$x=1\pm\sqrt{\sqrt{2}\left[\cos(3\pi/4)+i\,sen(3\pi/4)\right]}$$

* Extrayendo la raíz cuadrada del número complejo:

$$x=1\pm\sqrt[4]{2}\cos\left(\frac{3\pi/4}{2}\right)+i\sqrt[4]{2}sen\left(\frac{3\pi/4}{2}\right)$$

* La parte imaginaria es: $Im(x)=\sqrt[4]{2}sen\left(\frac{3\pi/4}{2}\right)$

$$\rightarrow Im(x)=\sqrt[4]{2}\cos\left(\frac{45^\circ}{2}\right)$$

$$\rightarrow Im(x)=\sqrt[4]{2}\left(\sqrt{\frac{1}{4-2\sqrt{2}}}\right) \text{.......(ver trigonometría)}$$

$$\rightarrow Im(x)=\frac{1}{\sqrt{-2+2\sqrt{2}}}$$

RPTA: "E"

PROBLEMA 4:

Determinar la suma de las raíces que resulten al resolver:

$$3x^3-13x^2+13x-3=0$$

A) 1/3 B) 1 C) 2/3 D) 4 E) 4 1/3

RESOLUCIÓN:

* Por el Teorema de Cardano –Viéte:

$$x_1+x_2+x_3=-\frac{-(13)}{3}=\frac{13}{3}=4\frac{1}{3}$$

RPTA: "E"

PROBLEMA 5:

El producto de las raíces del polinomio:

$P(x)=2x^4+3x^3-9x^2-8x+12$ es:

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

RESOLUCIÓN:

* Por el Teorema de Cardano – Viéte:

$$x_1x_2x_3x_4=(-1)^4\frac{12}{2}=6$$

RPTA: "D"

PROBLEMA 6:

Resolver: $x^5+3x^4-7x^3-21x^2+12x+36=0$

RESOLUCIÓN:

* Agrupando de dos en dos:

$$x^4(x+3)-7x^2(x+3)+12(x+3)=0$$

$\rightarrow (x+3)(x^4-7x^2+12)=0$

$\rightarrow (x+3)(x^2-4)(x^2-3)=0$

* Por diferencia de cuadrados:

$$(x+3)(x+2)(x-2)(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})=0$$

* Luego el conjunto solución, será:

$$C.S.=\{-3;-2;2;-\sqrt{3};\sqrt{3}\}$$

PROBLEMA 7:

Sean $x_1; x_2; x_3; x_4$ raíces de la ecuación:

$$2x^4-3x^3-12x^2+7x+6=0$$

Calcular luego las raíces y la suma de los productos dos a dos de sus raíces.

RESOLUCIÓN:

* Factorizando por aspa doble:

$$2x^4-3x^3-12x^2+7x+6=0$$

$2x^2$	$-5x$	-3
x^2	x	-2
	$-5x^2$	

* Luego: $(2x^2-5x-3)(x^2+x-2)=0$

$\rightarrow (2x+1)(x-3)(x+2)(x-1)=0$

$\rightarrow x_1=-1/2;\ x_2=3;\ x_3=-2;\ x_4=1$

* Luego para determinar los productos de dos en dos de las raíces, apliquemos Cardano - Viéte:

$$x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4=\frac{-12}{2}=-6$$

PROBLEMA 8:

Indique una solución de:

$$2x^4+x^3-5x^2-7x-6=0$$

A) 3/2 B) 2/3 C) -2 D) 2 E) 1

RESOLUCIÓN:

* Factorizando por aspa doble:

$$2x^4+x^3-5x^2-7x-6=0$$

$2x^2$	$-x$	-6
x^2	x	1
	$-x^2$	

$\dashrightarrow -4x^2$

$\rightarrow (2x^2-x-6)(x^2+x+1)=0$

$\rightarrow (2x+3)(x-2)(x^2+x+1)=0$

$\rightarrow x=-\dfrac{3}{2}$ ó $x=2$ ó $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$

RPTA: "D"

PROBLEMA 9:

Luego de resolver: $x^5-5x^4+9x^3-9x^2+5x-1=0$

Dar como respuesta la mayor solución de "x".

A) 5 B) $3+\sqrt{17}$ C) $\dfrac{3+\sqrt{5}}{4}$ D) $\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$

RESOLUCIÓN:

* Factorizando:

	1	-5	9	-9	5	-1
1	↓	1	-4	5	-4	1
	1	-4	5	-4	1	0

* El polinomio es:

$$(x-1)(x^4-4x^3+5x^2-4x+1)=0$$

Aspa Doble

x^2	$-3x$	1
x^2	$-x$	1

$$\rightarrow \underbrace{(x-1)}_{x_1=1}\underbrace{(x^2-3x+1)}_{x_2=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}}\underbrace{(x^2-x+1)}_{x_3=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}}=0$$

* La mayor solución es: $\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$

RPTA: "C"

PROBLEMA 10:

Al resolver: $x\left(1+\dfrac{36}{x^2+9}\right)=\dfrac{3}{x}(4x-3)$

dar como solución la raíz que tenga multiplicidad cuatro.

A) 1 B) 2 C) 3 D) -1 E) 0,5

RESOLUCIÓN:

* Efectuando se tiene:

$$x^2(x^2+45)=3(x^2+9)(4x-3)$$

* Efectuando queda:

$$x^4-12x^3+54x^2-108x+81$$

x^2	$-6x$	9
x^2	$-6x$	9

* Se tiene: $(x^2-6x+9)^2=0$

$\rightarrow (x-3)^4=0 \rightarrow x=3$

* Entonces 3 es una raíz de multiplicidad 4.

RPTA: "C"

PROBLEMA 11:

Resolver: $(x-5)(x-7)(x+4)(x+6)=504$

Dar como respuesta las raíces positivas.

A) 8 y 3 B) 7 y 2 C) 8 y 2 D) 7 y 3 E) 8; 3 y 2

RESOLUCIÓN:

* Efectuando:

$$(x-5)(x+4)(x-7)(x+6)=504$$

$$\rightarrow (x^2-x-20)(x^2-x-42)=504$$

* Haciendo: $x^2-x=y$ se obtiene:

$$(y-20)(y-42)=504$$

$$\rightarrow y^2-62y+840-504=0$$

$$\rightarrow y^2-62y+336=0$$

$$\rightarrow (y-56)(y-6)=0\begin{cases} y_1=56 \\ y_2=6 \end{cases}$$

* Reemplazando:

I) $x^2-x=56 \Rightarrow x^2-x-56=0$

$\rightarrow (x-8)(x+7)=0 \rightarrow x_1=8;\ x_2=-7$

II) $x^2-x=6 \Rightarrow x^2-x-6=0$

$\rightarrow (x-3)(x+2)=0 \rightarrow x_3=3;\ x_4=-2$

* Las raíces son: $8;-7;3;-2$

RPTA: "A"

PROBLEMA 12:

Luego de resolver: $2x^4+x^3-6x^2+x+2=0$

Dar como respuesta el valor real de x.

A) 2 B) 3 C) 4 D) 1 E) 5

RESOLUCIÓN:

* Factorizando:

$$x^2\left[2x^2+x-6+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}\right]=0$$

$$\rightarrow x^2\left[2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+\left(x+\frac{1}{x}\right)-6\right]=0$$

* Haciendo: $x+\dfrac{1}{x}=a$

$$\Rightarrow x^2\left[2(a^2-2)+a-6\right]=0$$

$$\rightarrow x^2\left[2a^2-10+a\right]=0$$

* Factorizando: $x^2(2a+5)(a-2)=0$

* Reemplazando:

$$\rightarrow x^2\left[2\left(x+\frac{1}{x}\right)+5\right]\left[\left(x+\frac{1}{x}\right)-2\right]=0$$

* Simplificando queda:

$$(2x^2+5x+1)(x-1)^2=0 \rightarrow x=1 \text{ ó } x=\frac{-5\pm\sqrt{17}}{4}$$

RPTA: "D"

PROBLEMA 13:

Hallar $(A+B)$ de $x^4-x^3-5x^2+Ax+B=0$ siendo A y B números racionales y $1+\sqrt{2}$ dos de sus raíces.

A) 5 B) 3 C) 1 D) −1 E) −3

RESOLUCIÓN:

* Las raíces son: $x_1=1+\sqrt{2}$ $x_2=1-\sqrt{2}$

* Luego sus factores son:

$$\underbrace{(x-1-\sqrt{2})(x-1+\sqrt{2})}_{x^2-2x-1}=0$$

* Dividiendo por Horner:

1	1	−1	−5	A	B
2		2	1		
1			2	1	
				−4	−2
	1	1	−2	0	0

$\rightarrow A-3=0$ y $B-2=0$ $\rightarrow A=3$ y $B=2$

* Se pide: $3+2=5$

RPTA: "A"

PROBLEMA 14:

Sean "m" y "n" números enteros.

Si: $(x-3+2\sqrt{2})$ es un factor del polinomio:

$$mx^3-11x^2-nx+1$$

Calcular (m^2+n^2+1) y el producto de las raíces.

A) 11 y 2 B) 21 y −1/2 C) 21 y 2

D) 11 y −1/2 E) 2 y 3

RESOLUCIÓN:

* En: $P(x)=mx^3-11x^2-nx+1$

* Si: $x=3-2\sqrt{2}$ También: $x=3+2\sqrt{2}$

$$\rightarrow (x-3+2\sqrt{2})(x-3-2\sqrt{2})=x^2-6x+1$$

* Osea que: x^2-6x+1 es factor del polinomio:

$$\Rightarrow \frac{mx^3-11x^2-nx+1}{x^2-6x+1} \text{ división exacta.}$$

* Dividiendo por Horner:

1	1	−n	−11	m
6		6	−1	
−1			36 − 6n	n − 6
	1	6 − n	0	0

* De donde:

$24-6n=0 \Rightarrow \boxed{n=4}$

$m-2=0 \Rightarrow \boxed{m=2} \rightarrow m^2+n^2+1=21$

* Producto de raíces $=-1/2$

RPTA: "B"

PROBLEMA 15:

Resolver: $x^3 - 15x - 126 = 0$

RESOLUCIÓN:

* Sea $x = y + z$ la solución de la ecuación, se tiene:

$$(y+z)^3 - 15x - 126 = 0$$

$$\Rightarrow y^3 + z^3 + 3yz\underbrace{(y+z)}_{x} - 15x - 126 = 0$$

$$\Rightarrow (y^3 + z^3 - 126) + (3yz - 15)x = 0$$

* Cumpliendo cuando $y^3 + z^3 = 126 \wedge yz = 5$
* De donde: $y^3 + z^3 = 126$; $y^3z^3 = 125$
* La ecuación resolvente (de raíces y^3, z^3) es :

$$r^3 - 126r + 125 = 0 \Rightarrow r = 125 \vee r = 1$$

* Entonces: $y^3 = 125,\ z^3 = 1 \Rightarrow y = 5,\ z = 1$
* Luego:

$x_1 = 5 + 1 = 6$

$$x_2 = 5w + w^2 = 5\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) + \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

$$x_3 = 5w^2 + w = 5\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) + \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

$$\Rightarrow C.S. = \{6; -3 + 2\sqrt{3}i; -3 - 2\sqrt{3}i\}$$

PROBLEMA 16:

Dada la ecuación $x^3 - 3x + 5 = 0$, si α es una solución real, calcule $\dfrac{\alpha(\alpha^2+2)}{\alpha - 1}$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

RESOLUCIÓN:

* Como α es solución, se cumple:

$$\alpha^3 - 3\alpha + 5 = 0 \quad \Rightarrow \alpha^3 + 2\alpha - 5\alpha + 5 = 0$$

$$\Rightarrow \alpha(\alpha^2 + 2) = 5(\alpha - 1) \rightarrow \frac{\alpha(\alpha^2+2)}{\alpha - 1} = 5$$

RPTA: "E"

PROBLEMA 17:

Si una raíz de la ecuación de coeficientes reales $x^4 - 5x^3 + 3x^2 + ax + b = 0$ es $x_1 = 3 - i$; calcule el valor de $a - b$.

A) 24 B) 25 C) 17 D) 0 E) 26

RESOLUCIÓN:

* Una raíz es: $x_1 = 3 - i \Rightarrow x_2 = 3 + i$

$$\Rightarrow x_1 + x_2 = 6 \wedge x_1x_2 = 10$$

* Luego: $x^2 - 6x + 10$ es factor de:

$$x^2 - 5x^3 + 3x^2 + ax + b$$

* Por Horner:

1	1	$-n$	-11	m
6		6	-1	
-1			$36-6n$	$n-6$
	1	$6-n$	0	0

$$\Rightarrow a = 16 \text{ y } b = -10$$

* Entonces: $a - b = 26$

RPTA: "E"

PROBLEMA 18:

Si α es una raíz irracional del polinomio:

$$P(x) = x^5 - (x^4 + 2x + 1)$$

Halle un valor de: $\dfrac{\alpha^3 + 1}{\alpha}$

A) -2 B) 1 C) -1 D) 0 E) 3

RESOLUCIÓN :

* Factorizando, resulta:

$$P(x) = x^5 - x^4 - 2x - 1 = (x^3 + x + 1)(x^2 - x - 1) = 0$$

$$\Rightarrow x^3 + x + 1 = 0 \vee x^2 - x - 1 = 0$$

* Sea α la raíz irracional de $x^3 + x + 1 = 0$

$$\Rightarrow \alpha^3 + \alpha + 1 = 0 \quad \Rightarrow \alpha^3 + 1 = -\alpha\ ;\ \alpha \neq 0$$

* Se pide: $\dfrac{\alpha^3 + 1}{\alpha} = \dfrac{-\alpha}{\alpha} = -1$

RPTA: "C"

PROBLEMA 19:

Si "m" es un número primo, indicar el menor valor de "m" para que la ecuación:

$$x^3 + 7x^2 + 13 + m = 0$$

Admita una solución racional.

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

RESOLUCIÓN:

* Las posibles raíces racionales son: $\pm 1; \pm m$
* Ahora evaluemos para $x = -m$, resulta:

$$-m^3 + 7m^2 - 13m + m = 0$$

* Factorizando resulta:

$$m(m-3)(m-4) = 0$$

* Cosa que de todas las raíces, se tiene que $m = 3$ es el menor número primo (comprobar).

RPTA: "C"

PROBLEMA 20:

Si la ecuación cúbica:

$x^3 - 2x^2 + x + 5 = 0$ tiene raíces a, b, c;

Calcular: $\dfrac{1}{a+1} + \dfrac{1}{b+1} + \dfrac{1}{c+1}$

A) 2 B) –8 C) 4 D) 0 E) 6

RESOLUCIÓN:

* Por Cardano –Viéte:

$a + b + c = 2;\ ab + ac + bc = 1;\ abc = -5$

* Nos piden: $\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}$

* Efectuando esto último:

$$=\frac{(b+1)(c+1)+(a+1)(c+1)+(a+1)(b+1)}{(a+1)(b+1)(c+1)}$$

$$=\frac{bc+ac+ab+2(b+c+a)+3}{1+(a+b+c)+(ab+ac+bc)+abc}$$

$$=\frac{1+2(2)+3}{1+2+1-5}=\frac{8}{-1}=-8$$

RPTA: "B"

PROBLEMA 21:

En la ecuación bicuadrada $x^4-(m-5)x^2+9=0$ el producto de tres de sus raíces es 3, entonces el valor de m, es:

A) 6 B) 8 C) 11 D) 13 E) 15

RESOLUCIÓN:

* Por Cardano: $\underbrace{x_1x_2x_3}_{3}x_4=9$

$\rightarrow x_4=3 \rightarrow x_3=-3$ ....*(raíces simétricas)*

* De donde se deduce que: $x_1=1$ y $x_2=-1$

* Luego la ecuación bicuadrada será:

$x^4-(3^2+1^2)x^2+(3)^2(1)^2=0$ ....*(ver teoría)*

$\rightarrow x^4-10x^2+9=0$

* Entonces: $m-5=10 \rightarrow m=15$

RPTA: "E"

PROBLEMA 22:

Si la ecuación bicuadrada: $x^4-(a+1)x^2+3a=12$ posee dos raíces reales de multiplicidad 2. Calcular el valor de "a".

A) 1 B) 3 C) 5 D) 7 E) 9

RESOLUCIÓN:

* Sean las raíces reales de multiplicidad 2: α y $(-\alpha)$

$\Rightarrow (x-\alpha)^2\cdot(x+\alpha)^2=x^4-(a+1)x^2+3(a-4)=0$

$\rightarrow x^4-2\alpha^2x^2+\alpha^4=x^4-(a-1)x^2+3(a-4)=0$

* Comparando obtenemos:

$$a-1=2\alpha^2 \wedge 3(a-4)=\alpha^4$$

* De donde obtendremos:

$(a-1)^2=12(a-4) \ \rightarrow a^2-14a+49=0$

$\rightarrow (a-7)^2=0 \rightarrow a=7$

RPTA: "D"

PROBLEMA 23:

La ecuación: $x^4-12x^2-5=0$ contiene a dos raíces cuya suma es igual a 2. Hallar la suma de las inversas de las otras dos raíces.

A) $\frac{1}{5}$ B) $\frac{2}{7}$ C) $-\frac{2}{7}$ D) $-\frac{2}{5}$ E) $\frac{7}{9}$

RESOLUCIÓN:

* Sea x_1 y x_2 raíces tales que $x_1+x_2=2$; también sean x_3 y x_4 las otras dos raíces, piden:

$$\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4}=\frac{x_3+x_4}{x_3x_4}$$

* Por Cardano:

$x_1+x_2+x_3+x_4=0 \Rightarrow x_3+x_4=-2$

$x_1x_2+x_1x_3+x_2x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4=0$

$\rightarrow x_1x_2+(x_3+x_4)(x_1+x_2)+x_3x_4=0$

$\rightarrow x_1x_2+(-2)(2)+x_3x_4=0$.........................*(I)*

* Observamos que $x_1x_2x_3x_4=-5 \Rightarrow x_1x_2=\frac{-5}{x_3x_4}$

* Reemplazamos en *(I)*:

$\frac{-5}{x_3x_4}-4+x_3x_4=0 \Rightarrow (x_3x_4)^2-4x_3x_4-5=0$

$\rightarrow (x_3x_4-5)(x_3x_4+1)=0$

$\rightarrow x_3x_4=5 \vee x_3x_4=-1$

* Entonces lo pedido, será: $\frac{x_3+x_4}{x_3x_4}=\frac{-2}{5}=-\frac{2}{5}$

RPTA: "D"

PROBLEMA 24:

Si la ecuación $x^4-10x^2+b=0$ tiene como raíz al número $\sqrt{a}+\sqrt{a+1}$, entonces el valor de $M=a+b$, es:

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

RESOLUCIÓN:

* Como tiene a la raíz: $x=\sqrt{a}+\sqrt{a+1}$

$\rightarrow x-\sqrt{a}=\sqrt{a+1} \rightarrow (x-\sqrt{a})^2=a+1$

$\rightarrow x^2-2\sqrt{a}x+a=a+1$

$\rightarrow x^2-1=2\sqrt{a}x \rightarrow (x^2-1)^2=4ax^2$

$\rightarrow x^4-2(2a+1)x^2+1=0$

* Comparando con la ecuación dada:

$2(2a+1)=10 \wedge b=1;\ (a>0)$

$\rightarrow a=2 \wedge b=1 \ \rightarrow M=a+b=3$

RPTA: "C"

PROBLEMA 25:

Al resolver la bicuadrada:

$$P(x)=x^4-(3n-1)x^2+n(2n-1)=0$$

si $n<0$, indicar cuántas raíces reales tiene la bicuadrada.

A) 4 B) 3 C) 2 D) 1 E) 0

RESOLUCIÓN:

* Factorizando:

$$x^4-(3n-1)x^2+n(2n-1)=0$$

$$\begin{matrix} x^2 & & -n \\ x^2 & & -(2n-1) \end{matrix}$$

$\rightarrow (x^2-n)[x^2-(2n+1)]=0$

$\rightarrow x^2=n \wedge x^2=2n-1$

* Como: $n<0 \rightarrow x^2<0 \rightarrow$ *(2 raíces complejas)*

$n<0 \rightarrow 2n-1<-1 \rightarrow x^2<-1$ (2 raíces complejas); Es decir sus cuatro raíces son complejas.

$\rightarrow$ Ninguna es real

RPTA: "E"

PROBLEMA 26:

Si $(x_1; x_2; x_3; x_4)$ son las raíces de la ecuación $18(x^4+1)-21x(x^2+1)=94x^2$, tal que x_1 y x_3 son las raíces de mayor y menor valor, entonces el valor de $T=x_1-x_3$ es:

A) $\frac{7}{2}$ B) $\frac{5}{2}$ C) $\frac{9}{2}$ D) $\frac{2}{3}$ E) $\frac{4}{3}$

RESOLUCIÓN:

* Al factorizar, resulta:

$(6x^2+13x+6)(3x^2-10x+3)=0$

$\Rightarrow (3x+2)(2x+3)(3x-1)(x-3)=0$

$\Rightarrow x_1=-\frac{2}{3} \vee x_3=-\frac{3}{2} \vee x_4=\frac{1}{3} \vee x_1=3$

* Luego: $T=x_1-x_3=3-\left(-\frac{3}{2}\right)=\frac{9}{2}$

RPTA: "C"

PROBLEMA 27:

Si las ecuaciones $\begin{cases} ax^4-bx^2-c=0 \\ bx^4-cx^2-a=0 \end{cases}$ son equivalentes, entonces la mayor solución real es:

A) $\frac{1}{2}\sqrt{2+2\sqrt{3}}$ B) $\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}$

C) $\frac{1}{2}\sqrt{2+2\sqrt{5}}$ D) $\frac{1}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$

RESOLUCIÓN:

* Como son equivalentes (tienen las mismas soluciones), entonces se cumple que:

$$\frac{a}{b}=\frac{-b}{-c}=\frac{-c}{-a} \rightarrow a=b=c$$

* Con esto, las ecuaciones se reducen a:

$$x^4-x^2-1=0$$

$\rightarrow x^2=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2} \quad \rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}}$

* De donde, la mayor solución real es:

$$x=\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}=\frac{1}{2}\sqrt{2+2\sqrt{5}}$$

RPTA: "C"

PROBLEMA 28:

Se sabe que las raíces de la ecuación : $x^3-12x^2+rx-28=0$ están en progresión aritmética. Hallar el valor de r.

A) 20 B) 24 C) 39 D) 16 E) – 20

RESOLUCIÓN:

* De: $x^3-12x^2+rx-28=0$ y raíces en P.A. se tiene $x_1-q; x_1; x_1+q$ de razón q; aplicando el teorema de Cardano-Vietta.

$x_1-q+x_1+x_1+q=12$

$\rightarrow 3x_1=12 \quad \rightarrow x_1=4$

* Reemplazando en la ecuación:

$4^3-12\times4^2+4r-28=0 \rightarrow r=39$

RPTA: "C"

PROBLEMA 29:

Si la siguiente ecuación $ax^3-7x^2+7x-a=0$ tiene 2 raíces enteras consecutivas, entonces el valor de "a", es:

A) 0,5 B) 2 C) 3 D) 4 D) 6

RESOLUCIÓN:

* La ecuación: $ax^3-7x^2+7x-a=0$ tiene dos raíces enteras consecutivas. Nótese que $x_1=1$ es raíz de la ecuación, además: $x_1x_2x_3=-\frac{-a}{a}$

$\rightarrow x_1x_2x_3=1 \rightarrow x_2x_3=1$

* Una de ellas debe ser entera, la otra será la recíproca de esta y por lo tanto fraccionaria. Sólo es posible que: $x_2=2 \wedge x_3=\frac{1}{2}$

* Luego:

$x_1+x_2+x_3=\frac{7}{a} \quad \rightarrow 1+2+\frac{1}{2}=\frac{7}{a} \rightarrow a=2$

RPTA: "B"

PROBLEMA 30:

Si $\{x_1; x_2; x_3\}$ son las raíces reales y $\{x_4; x_5\}$ son las raíces imaginarias de la siguiente ecuación recíproca $2x^5-7x^4+6x^3-6x^2+7x-2=0$, entonces el valor de la expresión $S=\frac{x_4+x_5}{x_1x_2x_3}$ es:

A) -2 B) $-\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{1}{2}$ E) 2

RESOLUCIÓN:

* Se deduce que $x_1=1$ es una raíz, luego por Ruffini:

	2	−7	6	−6	7	−2
1	↓	2	−5	1	−5	2
	2	−5	1	−5	2	0

* Las demás raíces se obtienen de:

$$2x^4-5x^3+x^2-5x+2=0$$

$$\begin{matrix} 2x^2 & & x & & 2 \\ x^2 & & -3x & & 1 \end{matrix}$$

$\rightarrow 2x^2+x+2=0 \vee x^2-3x+1=0$

* De:

$2x^2+x+2=0$; $(\Delta<0)$ las raíces son $x_4, x_5 \rightarrow x_4+x_5=-\frac{1}{2}$

* De:

$x^2-3x+1=0$; $(\Delta>0)$ las raíces son $x_2, x_3 \rightarrow x_2x_3=1$

* Luego: $S=\dfrac{x_4+x_5}{x_1x_2x_3}=\dfrac{-\frac{1}{2}}{1\times 1}=-\dfrac{1}{2}$

RPTA: "B"

PROBLEMA 31:

Si dos de las raíces del polinomio:

$$P(x)=x^5-7x^4+ax^3+bx^2+cx+d$$

de coeficientes racionales son $1+\sqrt{2}$; $3-\sqrt{2}$.

Halle el valor de $\dfrac{a-b}{c+1}$.

A) 1 B) 2 C) 0 D) -3

RESOLUCIÓN:

* Las raíces son:

$$x_1=1+\sqrt{2} \qquad x_3=3-\sqrt{2}$$
$$x_2=1-\sqrt{2} \qquad x_4=3+\sqrt{2}$$

porque sus coeficientes son racionales.

* Luego formando el polinomio $f(x)$ factor de $P(x)$.

$f(x)=(x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2)(x^2-(x_3+x_4)x+x_3x_4)$

$\rightarrow f(x)=(x^2-2x-1)(x^2-6x+7)$

$\rightarrow f(x)=x^4-8x^3+20x^2-8x-7$

* Dividiendo $\dfrac{P(x)}{f(x)}$ por Horner:

1	1	−7	a	b	c	d
8	↓	8	−20	8	7	
−20			8	−20	8	7
8						
7						
	1	1	0	0	0	0

$\rightarrow a=12$; $b=12$; $c=-15$; $d=-7$

* Se pide: $\dfrac{a-b}{c+1}=\dfrac{12-12}{-15+1}=0$

RPTA: "C"

PROBLEMA 32:

Si: $x_1=5+3\sqrt{2}$ es una raíz de la ecuación:

$2x^3-23x^2+mx+n=0$; calcular "m" si $m,n \in Q$

A) 28 B) 44 C) 36 D) 0 E) 12

RESOLUCIÓN:

$x_1=5+3\sqrt{2}$ es raíz $\Rightarrow x_2=5-3\sqrt{2}$ también es raíz,

luego: $x_1+x_2=10$

* Por Cardano:

$$x_1+x_2+x_3=\frac{23}{2} \Rightarrow 10+x_3=\frac{23}{2} \Rightarrow x_3=\frac{3}{2}$$

* Además:

$$\frac{m}{2}=x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3$$

$$\Rightarrow \frac{m}{2}=(5+3\sqrt{2})(5-3\sqrt{2})+(5-3\sqrt{2})\frac{3}{2}+(5+3\sqrt{2})\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{m}{2}=22 \Rightarrow \frac{m}{2}=22 \Rightarrow m=44$$

RPTA: "B"

PROBLEMA 33:

Si el polinomio: $P(x)=ax^3+bx^2-6x+c$; $a\neq 0$ admite como raíces $x_1=\dfrac{p^{10}-1}{p+1}$, $x_2=\dfrac{p^{10}+1}{p^{10}-p}$, $x_3=\dfrac{1}{2}$; donde $P\notin\{-1;1;0\}$

Halle "c".

A) 2 B) 3 C) 4 D) 0

RESOLUCIÓN:

* Del dato:

$$x_1=\frac{p^{10}-1}{p+1};\ x_2=\frac{p^{10}+1}{p^{10}-p};\ x_3=\frac{1}{2}$$

* Observamos que: $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}+\dfrac{1}{x_3}=3$

* Por propiedad la ecuación de raíces: $\left\{\dfrac{1}{x_1};\dfrac{1}{x_2};\dfrac{1}{x_3}\right\}$,

es: $cx^3-6x^2+bx+a=0$

* Por Cardano: $\underbrace{\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}+\dfrac{1}{x_3}}_{3}=\dfrac{6}{c}\rightarrow c=2$

RPTA: "A"

PROBLEMA 34:

Si P es una función polinomial de menor grado posible con coeficientes enteros , que admita como

raíces a $x=1+2i$; $x=1-\sqrt[5]{3}$ y $x=5$ entonces el grado del polinomio es:

A) 9 B) 8 C) 7 D) 5 E) 2

RESOLUCIÓN:

* $P(x)$ de menor grado posible y de coeficientes enteros, además de raíces:

$$x=1+2i,\ x=1-\sqrt[5]{3},\ x=5,$$

I) $x=1+2i$, proviene de: $x-1=2i$

$\rightarrow (x-1)^2=-4 \rightarrow (x-1)^2+4=0$

II) $x=1-\sqrt[5]{3}$, proviene de: $x-1=-\sqrt[5]{3}$

$\rightarrow (x-1)^5=-3 \rightarrow (x-1)^5+3=0$

III) $x=5$ proviene de $x-5=0$

* Luego, el polinomio será:

$P(x)=\left[(x-1)^2+4\right]\left[(x-1)^5+3\right](x-5)\times q(x)$

* Como $P(x)$ es de grado mínimo, entonces $q(x)$ es de grado cero, luego:

$P(x)=\left[(x-1)^2+4\right]\left[(x-1)^5+3\right](x-5)\times a_0;\ a_0\neq 0$

* Finalmente el grado de "P", será: $2+5+1=8$

RPTA: "B"

PROBLEMA 35:

Determinar cuál de los siguientes polinomios tiene como una de sus raíces al número:

$$\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}$$

A) $2x^6-3x^4+9x^3-12x^2+6x+1$

B) $x^6-6x^4-6x^3+12x^2-36x+1$

C) $2x^6-9x^4+3x^3-12x^2-36x+1$

D) $x^6-6x^4+12x^3-12x^2-6x+1$

RESOLUCIÓN:

* Como: $x=\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}$ es una raíz del polinomio, luego:

$x-\sqrt{2}=\sqrt[3]{3} \Rightarrow \left(x-\sqrt{2}\right)^3=\left(\sqrt[3]{3}\right)^3$

$\Rightarrow x^3-3x^2\left(\sqrt{2}\right)+3x\left(\sqrt{2}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^3=3$

$\Rightarrow x^3-3\sqrt{2}x^2+6x-2\sqrt{2}=3$

* Agrupando:

$x^3+6x-3=\sqrt{2}(3x^2+2)$

$\rightarrow (x^3+6x-3)^2=\left(\sqrt{2}\right)^2(3x^2+2)^2$

$\rightarrow x^6+36x^2+9+12x^4-6x^3-36x=2(9x^4+12x^2+4)$

* Simplificando y ordenando, tenemos:

$x^6-6x^4-6x^3+12x^2-36x+1=0$

RPTA: "B"

PROBLEMA 36:

En la siguiente ecuación:

$8x^4+30x^3+29x^2-2x-30=0$, determinar la suma de las raíces racionales.

A) $-\frac{13}{4}$ B) $-\frac{7}{4}$ C) $-\frac{1}{4}$ D) $\frac{7}{4}$ E) $\frac{13}{4}$

RESOLUCIÓN:

* Factorizando, resulta:

$$(8x^2+14x-15)(x^2+2x+2)=0$$

$4x^2$ ⟍⟋ -3

x^2 ⟋⟍ 5

$\rightarrow (4x-3)(2x+5)(x^2+2x+2)=0$

* $4x-3=0 \rightarrow x_1=\frac{3}{4}$

* $2x+5=0 \rightarrow x_2=-\frac{5}{2}$

* $x^2+2x+2=0$; no tiene raíces reales (en particular, racionales)

* Luego: $x_1+x_2=\frac{3}{4}-\frac{5}{2}=-\frac{7}{4}$

RPTA: "B"

PROBLEMA 37:

Dado un polinomio $P(x)=x^2-ax+b$ de coeficientes reales; si $P(x)<2$ tiene por conjunto solución $\langle 1-\sqrt{2};\ 1+\sqrt{2}\rangle$ encuentre ab.

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) -1

RESOLUCIÓN:

* Dato:

$P(x)<2 \Rightarrow x^2-ax+b<2 \Rightarrow x^2-ax+b-2<0$

* Como $\langle 1-\sqrt{2};1+\sqrt{2}\rangle$ es su **C.S.**

$\Rightarrow \left(1-\sqrt{2}\right)$ y $\left(1+\sqrt{2}\right)$ son raíces de:

$$f(x)=x^2-ax+b-2$$

* Por el Teorema de Cardano:

I) Suma de raíces: $\left(1-\sqrt{2}\right)+\left(1+\sqrt{2}\right)=2=a$

II) Producto de raíces:

$\left(1-\sqrt{2}\right)\left(1+\sqrt{2}\right)=-1=b-2 \Rightarrow b=1$

$\rightarrow ab=(2)(1)=2$

RPTA: "B"

PROBLEMA 38:

Si P es una función polinomial definida por $P(x)=-2x^7-ax^5+bx^3+1$ donde "a" es entero positivo y "b" entero negativo, entonces indicar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I) Una raíz de la ecuación $P(x)=0$ es $1/3$.

II) La ecuación $P(x)=0$ tiene una sola raíz real.

III) Si $x_1<x_2$, entonces $P(x_1)<P(x_2)$

A) VFV B) FVV C) VVF D) FVF E) FFV

RESOLUCIÓN:

I) Las posibles raíces racionales de $P(x)$ son:

$$\left\{+1;-1;\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right\}$$

De modo que $\frac{1}{3}$ no es raíz de $P(x)$............(FALSA)

II) $P(x)=-14x^6-5ax^4+3bx^2$ como $a>0$ y $b<0$

$\rightarrow P'(x)<0,\ \forall\ x\in\mathbb{R}$

$\rightarrow$ **P** es estrictamente decreciente. Luego, la gráfica de **P** intersecta al eje x en un sólo punto, con lo cual $P(x)=0$, sólo tiene una raíz real .... (VERDADERA)

III) Como "**P**" es estrictamente decreciente $\rightarrow \forall x_1,x_2\in\mathbb{R}$ con $x_1<x_2$ se cumple que:

$P(x_1)<P(x_2)$.......................(VERDADERA)

RPTA: "B"

PROBLEMA 39:

Si **P** es una función polinomial definida por $P(x)=x^5+x^4-5x^3-x^2+8x-4$, entonces la afirmación correcta es:

A) $P(x)=0$ tiene 5 ceros reales diferentes.

B) $P(x)=0$ tiene un cero racional.

C) La gráfica de P intersecta al eje x en 3 puntos diferentes.

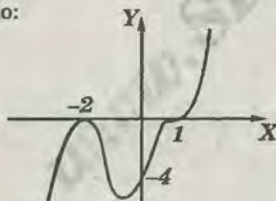
D) $P(x)<0,\forall\ x>1$

E) $P(x)<0,\forall\ x\in\langle-2;-1\rangle$

RESOLUCIÓN:

* Factorizando, resulta: $P(x)=(x-1)^3(x+2)^2$

* Graficando:



* De donde: $P(x)<0;\ \forall\ x\in\langle-\infty;1\rangle-\{-2\}$

* En particular: $\forall\ x\in\langle-2;-1\rangle$

RPTA: "E"

PROBLEMA 40:

Si **P** es una función polinomial definida por:

$P(x)=(x-1)(x-3)(x-5)(x-7)+(x-2)(x-4)(x-6)(x-8)$, entonces de la ecuación $P(x)=0$ la afirmación correcta es:

A) Tiene 2 ceros complejos.

B) Tiene 2 ceros complejos.

C) Todos sus ceros son negativos.

D) Todos sus ceros son positivos.

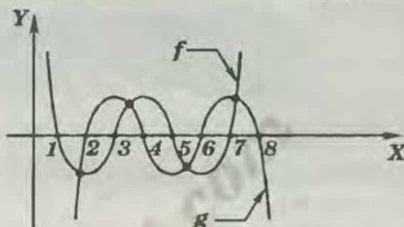
E) Tiene dos ceros positivos y dos ceros negativos.

RESOLUCIÓN:

* De: $P(x)=0$

* Lo acomodamos así:

$$\underbrace{(x-1)(x-3)(x-5)(x-7)}_{f(x)}=\underbrace{-(x-2)(x-4)(x-6)(x-8)}_{g(x)}$$



* Del gráfico: $f(x)=g(x)$ tiene 4 raíces reales positivas. Por lo tanto $P(x)=0$ tiene 4 raíces reales positivas.

RPTA: "D"

PROBLEMA 41:

Sea **P** una función polinomial definida por $P(x)=x^3+ax^2+bx+4$, con a y $b\in\mathbb{Q}$.

Si $1+\sqrt{7}$ es una raíz de la ecuación $P(x)=0$, entonces indicar el valor de verdad de las siguientes afirmaciones:

I) $ab>0$ **II)** $a^2+b^2=13$ **III)** $2a=b$

A) VFF B) FFF C) VVF D) FVF E) VVV

RESOLUCIÓN:

* Como: $x_1=1+\sqrt{7}\rightarrow x_2=1-\sqrt{7}$, luego:

$x^2-(1+\sqrt{7}+1-\sqrt{7})x+(1+\sqrt{7})(1-\sqrt{7})=x^2-2x-6$, será un factor de $P(x)$,

* Luego por Horner:

1	1	a	b	4
2		2	6	
6			$-\frac{4}{3}$	-4
	1	$-\frac{2}{3}$	0	0

$\rightarrow a+2=-\frac{2}{3}\rightarrow a=-\frac{8}{3},\ b+6-\frac{4}{3}=0\rightarrow b=-\frac{14}{3}$

* Luego:

I) $ab=\left(-\frac{8}{3}\right)\left(-\frac{14}{3}\right)>0$ ....(VERDADERA)

II) $a^2+b^2=\left(-\frac{8}{3}\right)^2+\left(-\frac{14}{3}\right)^2=\frac{300}{9}$ ......(FALSO)

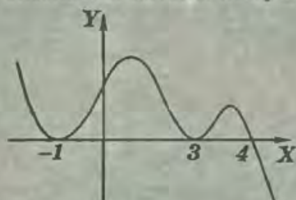
III) $2a=-\frac{16}{3}\neq-\frac{14}{3}=b$ ....(FALSO)

RPTA: "A"

PROBLEMA 42:

Sea P una función polinomial de grado 7 con coeficiente principal -1 y cuya gráfica se muestra en la figura adjunta.

Si $P(2)=18$. entonces el término independiente es:



A) 282 B) 292 C) 324 D) 325 E)372

RESOLUCIÓN:

* Según la gráfica de la función polinomial: -1 es una raíz de multiplicidad par; también 3 es de multiplicidad par; 4 es una raíz simple.

* Admitiendo que $P(x)=0$ sólo tiene raíces reales, el polinomio debe ser:

$$P(x)=a_0(x+1)^{2k}(x-3)^{2q}(x-4)$$

* Donde: $a_0=-1$

$G.A.(P)=2k+2q+1=7 \rightarrow k+q=3$

$\rightarrow (k=2 \wedge q=1) \vee (k=1 \wedge q=2)$

* Si : $k=2 \wedge q=1$, entonces :

$P(x)=-(x+1)^4(x-3)^2(x-4)$

$\rightarrow P(2)=-(3)^4(-1)^2(-2)=162$ ....(no cumple)

* Si : $k=1 \wedge q=2$,entonces :

$P(x)=-(x+1)^2(x-3)^4(x-4)$

$\rightarrow P(2)=-(3)^2(-1)^2(-2)=18$ ....(si cumple)

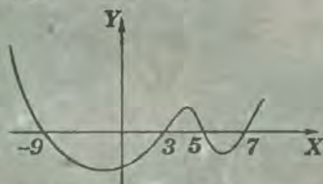
* Luego: $P(0)=-(1)^2(-3)^4(-4)=324$

RPTA: "C"

PROBLEMA 43:

En la figura adjunta se muestra la gráfica de una función polinomial P, mónico de cuarto grado.

La suma de las raíces reales de la ecuación $P(2|x+7|+1)=0$ es:



A) – 42 B) – 40 C) – 39 D) – 38 E) – 37

RESOLUCIÓN:

* De la figura, teniendo en cuenta que P es mónico y de cuarto grado:

$P(x)=(x+9)(x-3)(x-5)(x-7)$

$P(2|x+7|+1)=(2|x+7|+10)(2|x+7|-2)$
$(2|x+7|-4)(2|x+7|-6)=0$

* Nótese que: $2|x+7|+10=0$ no tiene soluciones reales, entonces:

I) $2|x+7|-2=0 \rightarrow |x+7|=1 \rightarrow x_1=-6 \vee x_2=-8$

II) $2|x+7|-4=0 \rightarrow |x+7|=2 \rightarrow x_3=-5, x_4=-9$

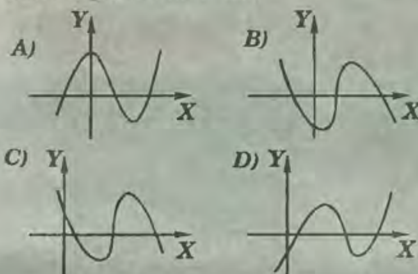
III) $2|x+7|-9=0 \rightarrow |x+7|=3 \rightarrow x_5=-4, x_6=-10$

* Luego: $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6=-42$

RPTA: "A"

PROBLEMA 44:

Si P es una función polinomial definida por $P(x)=x^3-6x^2+11x-6$ entonces la figura que mejor representa la gráfica de P es:



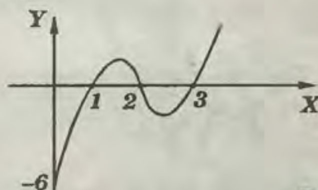
RESOLUCIÓN:

* De: $P(x)=x^3-6x^2+11x-6$

$\rightarrow P(x)=(x-1)(x-2)(x-3)$

* P tiene raíces: $1; 2; 3.$

Su gráfica es:



RPTA: "D"

PROBLEMA 45:

Indicar el valor de verdad de las siguientes afirmaciones:

I) Sea $P(x)$ un polinomio definido sobre $\mathbb{R}$, si una raíz es $2-\sqrt{7}$ entonces necesariamente $2+\sqrt{7}$ es también la otra raíz.

II) Un polinomio $P(x)$ de quinto grado definido sobre $\mathbb{R}$ puede tener exactamente 2 raíces reales.

III) El polinomio $P(x)=(x^2-4)(x+2)$ es tangente al eje X, en $x=-2$.

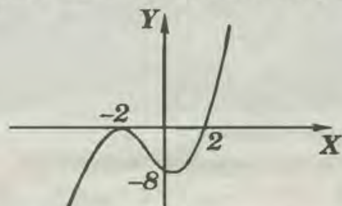
A) FVV B) VVV C) FFV D) VFV E) FFF

RESOLUCIÓN:

I) Para $P(x)$ definido en $\mathbb{R}$. Si una raíz es $2-\sqrt{7}$ → no necesariamente $2+\sqrt{7}$ también es raíz .... *(FALSA)*

II) Un polinomio $P(x)$ definido sobre $\mathbb{R}$ de quinto grado puede tener exactamente: *1; 3* ó *5* raíces reales .... *(FALSA*

III) $P(x)=(x^2-4)(x+2)=(x+2)^2(x-2)$ y su gráfica será:



* Como -2 es de multiplicidad 2, la gráfica de P es tangente al eje X en $x=-2$ .... *(VERDADERA)*

RPTA: "C"

PROBLEMA 46:

Resuelva en $\mathbb{Z}$:

$$\sqrt{x-1}+\sqrt{3-x}=x$$

Indique el cardinal del conjunto solución.

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 1

RESOLUCIÓN:

* Hallando el conjunto de valores admisibles

$x-1\geq 0$ y $3-x\geq 0$

$\Leftrightarrow x\geq 1$ y $3\geq x$ $\Leftrightarrow 1\geq x\leq 3$; si $x\in Z$

* Entonces: $x\in\{1;2;3\}$ este conjunto debe contener el conjunto solución de la ecuación, ahora al evaluarse sólo cumple el número 2, es decir **C.S.={2}**

→ Cardinal del **C.S.** es *1*.

RPTA: "E"

PROBLEMA 47:

Si T es el conjunto solución de la ecuación $\sqrt{2+\sqrt{x-5}}=\sqrt{13-x}$, entonces la afirmación correcta es:

A) $T\subset\langle 4;6\rangle$ *B)* $T\subset\langle 5;6\rangle$ *C)* $T\subset\langle 8;10\rangle$

D) $T\subset\langle 12;14\rangle$ *E)* $T\subset\langle 14;15\rangle$

RESOLUCIÓN:

* Nótese que: **CVA**: $x-5\geq 0 \wedge 13-x\geq 0$

→ **CVA:** $x\geq 5 \wedge x\leq 13$

→ **CVA:** $5\leq x\leq 13$ → **CVA**$=[5;13]$

* De la ecuación:

$2+\sqrt{x-5}=13-x$

→ $\sqrt{x-5}=11-x$; $11-x\geq 0$

→ $x-5=(11-x)^2$; $x\leq 11$

→ $x^2-23x+126=0$; $CVA_1=[5;11]$

→ $x_1=9$, $x_2=14$

* Pero: $x_2\notin CVA_1$ → $x=9$ es la única solución de la ecuación $(x_1\in CVA)$

* Luego: $T=\{9\}\subset\langle 8;10\rangle$

RPTA: "C"

PROBLEMA 48:

Dada la ecuación $\sqrt{x+1}+2x=0$ determinar el valor de verdad de cada una de las afirmaciones siguientes:

I) Si la ecuación tiene una solución esta debe estar en el intervalo $[-1;0]$.

III) La ecuación tiene una única solución.

A) VFV B) FVV C) VVF D) VFF E) VVV

RESOLUCIÓN:

1) $x+1\geq 0\Rightarrow x\geq -1$ *2)* $\underbrace{\sqrt{x+1}}_{+}=\underbrace{-2x}_{+}\Rightarrow x<0$

* Luego

I) La solución se encuentra en el intervalo *[-1; 0]* ....*(VERDADERO)*

II) La ecuación tiene una única solución *(FALSO)*

III) (VERDADERO)

RPTA: "A"

PROBLEMA 49:

Hallar el valor de x, que verifica:

$$\sqrt[3]{14+\sqrt{x}}+\sqrt[3]{14-\sqrt{x}}=4$$

A) 179 B) 165 C) 170 D) 169 E) 150

RESOLUCIÓN:

* Haciendo:

$a=\sqrt[3]{14+\sqrt{x}}$ y $b=\sqrt[3]{14-\sqrt{x}}$

* Luego: $a+b=4$ ....*(I)*

$a^3+b^3=28$ ....*(II)*

$ab=\sqrt[3]{14^2-x}$ ....*(III)*

* Elevando *(I)* al cubo, resulta:

$a^3+b^3+3ab(a+b)=4^3$

* Reemplazando en esta *(II)* y *(III)*:

$28+3\sqrt[3]{14^2-x}(4)=64$

* Despejando, resulta: $x=169$

RPTA: "D"

PROBLEMA 50:

Si A es el conjunto solución de la ecuación $x=\sqrt{x-\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}$, entonces el conjunto A es:

A) $\left\{\frac{1+\sqrt{5}}{2};\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right\}$ B) $\left\{\frac{2+\sqrt{5}}{2};\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}$

C) $\left\{\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}$ D) $\left\{\frac{1+\sqrt{5}}{2};\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right\}$

RESOLUCIÓN:

* CVA: $x>0 \wedge x-\frac{1}{x}\geq 0 \wedge 1-\frac{1}{x}\geq 0$

$\rightarrow x>0 \wedge x^2\geq 1 \wedge x\geq 1$

$\rightarrow x\geq 1 \rightarrow CVA=[1;+\infty\rangle$

* La ecuación puede ponerse así:

$$x\sqrt{x}=\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x-1}$$

$\rightarrow x^3=x^2-1+x-1+2\sqrt{(x^2-1)(x-1)}$

$\rightarrow x^3-x^2-x+1+1=2\sqrt{x^3-x^2-x+1}$

* Haciendo: $x^3-x^2-x+1=a$ se tiene:

$a+1=2\sqrt{a}$, de donde: $a=1$

* Luego: $x^3-x^2-x+1=1$

$\rightarrow \underbrace{x}_{+}(x^2-x-1)=0 \rightarrow x^2-x-1=0$

$\rightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$, pero $\frac{1-\sqrt{5}}{2}\notin CVA$

$\rightarrow A=\left\{\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}$

RPTA: "C"

PROBLEMA 51:

Resolver: $\frac{2\sqrt{x}}{6-\sqrt{x}}+\frac{6-\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}=\frac{5}{2}$

RESOLUCIÓN:

* Haciendo:

$$\frac{2\sqrt{x}}{6-\sqrt{x}}=y\Rightarrow\frac{6-\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{y}$$

* En la ecuación original: $y+\frac{1}{y}=\frac{5}{2}$

$\rightarrow 2y^2-5y+2=0 \rightarrow (2y-1)(y-2)=0$

$\rightarrow y=2$ ó $y=\frac{1}{2}$

* Para: $y=\frac{2\sqrt{x}}{6-\sqrt{x}}=2,\Rightarrow\sqrt{x}=6-\sqrt{x}$

$\rightarrow 2\sqrt{x}=6\Rightarrow \boxed{x=9}$

* Para: $y=\frac{2\sqrt{x}}{6-\sqrt{x}}=\frac{1}{2},\Rightarrow 4\sqrt{x}=6-\sqrt{x}$

$\rightarrow 5\sqrt{x}=6\Rightarrow \boxed{x=\frac{36}{25}}$

* Entonces: $C.S.=\left\{9;\frac{36}{25}\right\}$

PROBLEMA 52:

Al resolver la ecuación: $\frac{x^3+1}{x^2-1}=x+\sqrt{\frac{6}{x}}$

Indicar una solución.

A) $\frac{3}{2}$ B) $-\frac{2}{3}$ C) 1 D) 2 E) $\frac{3}{4}$

RESOLUCIÓN:

* Definiendo cada expresión matemática

$x^2-1\neq 0 \wedge x\neq 0 \Rightarrow x\neq\pm 1 \wedge x\neq 0$.....(C.V.A.)

* Efectuando:

$\frac{(x+1)(x^2-x+1)}{(x+1)(x-1)}=x+\sqrt{\frac{6}{x}}\Rightarrow\frac{x^2-x+1}{x-1}-x=\sqrt{\frac{6}{x}}$

$\frac{1}{x-1}=\sqrt{\frac{6}{x}};\ x-1>0 \wedge \frac{1}{(x-1)^2}=\frac{6}{x}$

$\rightarrow x=6x^2-12x+6 \wedge x>1$

$\rightarrow 0=6x^2-13x+6 \wedge x>1$

$\rightarrow \left(x=\frac{2}{3} \vee x=\frac{3}{2}\right)\wedge x>1$

$\rightarrow x=\frac{3}{2}$ $\rightarrow C.S.=\left\{\frac{3}{2}\right\}$

RPTA: "A"

PROBLEMA 53:

Si $x_1, x_2\in R$ y $\{x_1;x_2\}$ es el conjunto solución de la siguiente ecuación $\sqrt[4]{x+27}+\sqrt[4]{55-x}=4$, entonces el valor de, $T=x_1+x_2$ es:

A) 54 B) 32 C) 28 D) – 28

RESOLUCIÓN:

* C.V.A.: $x+27\geq 0 \wedge 55-x\geq 0$

$\rightarrow C.V.A.=[-27;55]$

* Sea: $\sqrt[4]{x+27}=y \rightarrow x=y^4-27 \wedge y\geq 0$

* Reemplazando en la ecuación:

$y+\sqrt[4]{55-(y^4-27)}=4 \rightarrow \sqrt[4]{82-y^4}=4-y$

$CVA_y=[0;\sqrt[4]{82}]$. A la cuarta :

$82-y^4=256-256y+96y^2-16y^3+y^4$

$\rightarrow y^4-8y^3+48y^2-128y+87=0$

$$\begin{matrix} y^2 & -4y & 29 \\ y^2 & -4y & 3 \end{matrix}$$

$\rightarrow y^2-4y+29=0 \vee y^2-4y+3=0$

* La primera no tiene soluciones reales

* De la segunda: $y_1=1 \vee y_2=3$ $(1;3 \in CVA_y)$.

Luego:

* Para $y_1=1$: $x_1=1^4-27=-26 \in C.V.A.$
* Para $y_2=1$: $x_2=3^4-27=54 \in C.V.A.$
* Se pide: $T=-26+54=28$

RPTA: "C"

PROBLEMA 54:

Si B es un conjunto definido por:

$B=\left\{x\in R/\sqrt{x}+\sqrt{x+5}+2x=25-2\sqrt{x^2+5x}\right\}$, entonces el cardinal del conjunto B, es:

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

RESOLUCIÓN:

* De la ecuación se obtiene:

$2x+\sqrt{x}+\sqrt{x+5}-25+2\sqrt{x^2+5x}=0$

$\underline{x+x+5+2\sqrt{x(x+5)}}+\sqrt{x}+\sqrt{x+5}-30=0$

$(\sqrt{x}+\sqrt{x+5})^2+(\sqrt{x}+\sqrt{x+5})-30=0$

$$\begin{matrix} \sqrt{x}+\sqrt{x+5} & 6 \\ \sqrt{x}+\sqrt{x+5} & -5 \end{matrix}$$

$\rightarrow \sqrt{x}+\sqrt{x+5}+6=0 \vee \sqrt{x}+\sqrt{x+5}-5=0$

* La primera no tiene solución, pues el primer miembro siempre es positivo.

* De la segunda: $\sqrt{x+5}=5-\sqrt{x}$ nótese que: para el CVA:

$x\geq 0 \wedge x+5\geq 0 \wedge 5-\sqrt{x}\geq 0$

$\rightarrow x\geq 0 \wedge x\leq 5 \rightarrow 0\leq x\leq 25$

$\rightarrow CVA=[0;25]$

* Luego, elevando al cuadrado:

$x+5=25+x-10\sqrt{x}\rightarrow \sqrt{x}=2$

$\rightarrow x=4$, $(4\in CVA)\rightarrow B=\{4\} \wedge n(T)=1$

RPTA: "B"

PROBLEMA 55:

Si T es el conjunto solución de la siguiente ecuación $\sqrt{3x-4}+\sqrt{2x-3}-\sqrt{5x-7}=0$, entonces la afirmación correcta es:

A) $T\subset\left\langle 0;\frac{3}{4}\right\rangle$ B) $T\subset\left\langle \frac{1}{2};1\right]$

C) $T\subset\left\langle 1;\frac{3}{2}\right]$ D) $T\subset\left\langle \frac{3}{2};2\right]$

RESOLUCIÓN:

* CVA: $3x-4\geq 0 \wedge 2x-3\geq 0 \wedge 5x-7\geq 0$

$\rightarrow x\geq\frac{4}{3} \wedge x\geq\frac{3}{2} \wedge x\geq\frac{7}{5}$

$\rightarrow x\geq\frac{3}{2}\rightarrow CVA=\left[\frac{3}{2};+\infty\right\rangle$

* En la ecuación, al cuadrado:

$3x-4+2x-3+2\sqrt{(3x-4)(2x-3)}=5x-7$

$\rightarrow 2\sqrt{(3x-4)(2x-3)}=0$

* De donde: $x_1=\frac{4}{3} \vee x_2=\frac{3}{2}$

* Pero: $x_1=\frac{4}{3}\notin CVA$; *sólo* $x_2\in CVA$

$x_1=\frac{4}{3}\notin CVA$; sólo $x_2\in CVA \rightarrow T=\left\{\frac{3}{2}\right\}\subset\left[\frac{3}{2};2\right\rangle$

RPTA: "D"

PROBLEMA 56:

Resuelva e indique la cantidad de soluciones:

$$\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}+\sqrt{x+3}+\sqrt{x+4}=4$$

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

RESOLUCIÓN:

* Hallando primero el conjunto de valores admisibles (C.V.A.), así:

$x+1\geq 0 \wedge x+2\geq 2 \wedge x+3\geq 3 \wedge x+4\geq 4$

$\rightarrow x\in[-1;\infty\rangle$

* Entonces como:

$x\geq -1\Rightarrow x+2\geq 1\Rightarrow \sqrt{x+2}\geq 1$

$\Rightarrow x+3\geq 2 \qquad \Rightarrow \sqrt{x+3}\geq\sqrt{2}$

$\Rightarrow x+4\geq 3\Rightarrow \sqrt{x+4}\geq\sqrt{3}$

$x+1\geq 0\Rightarrow \sqrt{x+1}\geq 0$

$\Rightarrow \sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}+\sqrt{x+3}+\sqrt{x+4}\Rightarrow 4{,}14...$

$\rightarrow$ Es imposible que la suma sea 4.

* Con lo que: $C.S.=\phi$

* Número de soluciones es igual a 0.

RPTA: "A"

PROBLEMA 57:

Si la fracción irreductible a/b es raíz del polinomio: $x^5+x-10=0$ entonces:

A) $\frac{a}{b}\in\left\langle 1;\frac{5}{4}\right\rangle$ B) $\frac{a}{b}\in\left\langle \frac{5}{4};\frac{3}{2}\right\rangle$ C) $\frac{a}{b}\in\left\langle \frac{3}{2};\frac{7}{4}\right\rangle$

RESOLUCIÓN:

* Aplicando el teorema de Bolzano:

$f(x)=x^5+x-10;\ \frac{a}{b}=x\Rightarrow f(0)<0$

$\Rightarrow f(1)<0$ cambio de signos entre 1 y 2
$\Rightarrow f(2)>0 \Rightarrow x \in <1;\ 2>$

* Realizamos una *1ra.* aproximación:

$$x=\frac{1+2}{2}=\frac{3}{2}$$

$\Rightarrow f(3/2)<0$ cambio de signo entre 2 y $3/2$ $\Rightarrow x \in <3/2;\ 2>$

* Realizamos una nueva aproximación:

$$x=\frac{2+3/2}{2}=7/4$$

$\Rightarrow f(7/4)>0$ cambio de signo entre $3/2$ y $7/4$ $\Rightarrow x \in <3/2;\ 7/4>$

$$\Rightarrow x \in \left\langle \frac{3}{2};\ \frac{7}{4} \right\rangle$$

* Entonces: $\frac{a}{b} \in \left\langle \frac{3}{2};\ \frac{7}{4} \right\rangle$

RPTA: "C"

PROBLEMA 58:

Resolver: $240x^5+572x^4-564x^3-1257x^2-31x+60=0$

RESOLUCIÓN:

Las posibles raíces racionales son de la forma: $r=p/q$, donde p es un divisor de 60 y q un divisor de 240.

* Vemos que: $P(1)<0$ y $P(2)>0$; luego , existe por lo menos una raíz real en $<1;\ 2>$.

* Tomamos las raíces racionales comprendidas en dicho intervalo; así $3/2$ es raíz, lo comprobaremos por ruffini:

	240	572	−564	−1257	−31	60
3/2		360	1398	1251	−9	−60
	240	932	834	−6	−40	0

*De manera similar encontramos: $x_2=-5/2;\ x_3=-1/4;\ x_4=3;\ x_5=-20$

PROBLEMA 59:

Resolver: $x^8+4x^6-4x^2-1=0$

* *Las posibles raíces racionales son: 1 y -1. Vemos que ambas satisfacen.* Luego:

$x^8+4x^6\ 4x^2-1=0$

$\Leftrightarrow (x-1)(x+1)(x^6+5x^4+5x^2+1)=0$

* pero: $x^6+5x^4+5x^2+1=(x^2+1)(x^4+4x^2+1)$

* *entonces* la ecuación resultará:

$(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+4x^2+1)=0$

cuyas raíces serán:

$x_1=1;\ x_2=-1;\ x_3=i;\ x_4=-i;\ x_5=\sqrt{\sqrt{3}-2};$

$x_6=-\sqrt{\sqrt{3}-2};\ x_7=\sqrt{-\left(2+\sqrt{3}\right)};\ x_8=-\sqrt{-\left(2+\sqrt{3}\right)}$

PROBLEMA 60:

Calcular aproximadamente una raíz quinta real de $-\pi$.

RESOLUCIÓN:

Calcular aproximadamente una raíz quinta real de $-\pi$.

* Sea : $z^5=-\pi \rightarrow x^5+\pi=0.$

* Por otro lado, sea : $P(x)=x^5+\pi \wedge P'(x)=5x^4$

Aplicamos el método de Newton - Raphson :

$$x_{n+1}=x_n-\frac{F(x_n)}{F'(x_n)}=x_n-\frac{x^5+\pi}{5x^4}=\frac{4}{5}\left[x_n-\frac{\pi}{4x^4}\right]$$

* Eligiendo $x_0=1$, obtenemos :

$x_1=-1,4283184;\ x_2=-1,29936208;$

$x_3=-1,25926;\ z_4=-1,2572804$

* Luego : $x=-1,26$ sera la raíz pedida con la aproximación deseada

PROBLEMA 61:

Sean los polinomios:

$P(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+1$

$Q(x)=x^4+cx^3+bx^2+ax+1.$

Hallar las condiciones que deben cumplir los parámetros reales a, b y c $(a\neq c)$ para que $P(x)$ y $Q(x)$ tengan dos raíces comunes .

RESOLUCIÓN:

* Las raíces comunes a ambos polinomios serán raíces de la diferencia:

$$P(x)-Q(x)=(a-c)x^3+(c-a)x$$

* Resolvemos la ecuación:

$P(x)-Q(x)=0$, sacando primero x factor común:

$$x[(a-c)x^2+(c-a)x]=0$$

* Las tres raíces son: $0;\ 1$ y -1, entre ellas tienen que estar las raíces comunes.

* Como 0 no es raíz ni de $P(x)$ ni de $Q(x)$, las dos raíces comunes tiene que ser 1 y -1.

* Sustituyendo estos valores en $P(x)$ y $Q(x)$ obtenemos el sistema:

$$\begin{cases} 2+a+b+c=0 \\ 2-a+b-c=0 \end{cases}$$

que nos da las condiciones: $b=-2$; $a=-c$

* Los polinomios quedan en la forma:

$$P(x)=x^4+ax^3-2x^2-ax+1$$

$Q(x)=x^4-ax^3-2x^2+ax+1$

* Para resolver las ecuaciones $P(x)=0$, $Q(x)=0$, separamos por Ruffini las raíces conocida 1 y -1 y quedan las ecuaciones en la forma:

$P(x)=(x+1)(x-1)(x^2+ax-1)=0$

$Q(x)=(x+1)(x-1)(x^2-ax-1)=0$

PRIMERA PRACTICA DIRIGIDA

01 Dada la ecuación cúbica de raíces x_1 ; x_2 y x_3: $ax^3-(2+a)x-2=0$, $a\neq 0$ determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

( ) $x_1+x_2+x_3=0$

( ) Una solución es -1

( ) $x_1^3+x_2^3+x_3^3=-\left(\frac{a}{6}\right)^{-1}$

A) FFV B) FVF C) VFV D) VVV E) VFF

02 Luego de resolver la ecuación:

$$6x^3-17x^2-31x+12=0$$

indique:

* La suma de las soluciones positivas.
* El producto de raíces.

A) 9/2 y 2 B) 13/3 y 2 C) 7/3 y 2 D) 8/3 y –2 E) 7/2 y-2

03 Si una solución de la ecuación cúbica: $(a-2)x^3+(2a+1)x^2-8=0$ es 2, calcular el producto de raíces de la misma.

A) –32/3 B) 30/2 C) –15/2 D) –9/2 E) –23/2

04 Si la ecuación cúbica:

$$x^3+9x^2+mx+15=0\ ,\ m\in Q$$

tiene raíces en progresión aritmética, calcular el valor de «m».

A) 21 B) 22 C) 23 D) 24 E) 25

05 En la ecuación: $x^3-7x+k=0$, una de las raíces es el doble de la otra raíz, entonces el valor de «k» es:

A) 7 B) 6 C) 5 D) 4 E) 3

06 Cuál será la ecuación cúbica cuyas raíces sean el duplo de los recíprocos de cada una de las raíces de la ecuación polinomial:

$$Ax^3-Bx+C=0\ ;\ C\neq 0$$

A) $Cx^3-Bx+A=0$ B) $Cx^3+2Bx^2+4A=0$

C) $Cx^3+2Bx^2-4A=0$ D) $Cx^3-2Bx^2+8A=0$

E) $Ax^3-2Bx+4C=0$

07 Sea el polinomio: $F(x)=x^3+3x^2-9$ además: $F(m)=F(n)=F(p)=0$

Calcular: $F\left(\frac{m}{np}+\frac{n}{mp}+\frac{p}{mn}\right)$

A) –5 B) –1 C) 2 D) –2 E) 4

08 Si las ecuaciones en «x»:

$x^3+2x^2-(4n+5)x-6=0$

$x^2+5x+a=0$

tienen dos raíces en común, calcule n^3.

A) 2 B) 8 C) 27 D) 125 E) 1

09 Dos raices de la ecuación: $2x^3-2ax^2+3x-9=0$ son opuestas.

Calcule el valor de: $\frac{a+3}{1-a}$

A) –2 B) –3 C) 4 D) – 5 E) 5

10 Si la ecuación: $x^3-x+1=0$, tiene soluciones m, n y p, calcular: $m^4+n^4+p^4$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

11 Si α es una raíz de la ecuación $(\alpha\in Z)$: $x^3-3x^2+4x-4=0$, determine la suma de los cuadrados de las otras dos raíces.

A) 4 B) –3 C) 9 D) 5 E) 2

12 Si x_0 es la solución positiva de la ecuación cúbica: $x^3-15x+4=0$, calcule el valor de: $x_0+\frac{1}{x_0}$

A) $\sqrt{2}$ B) $2\sqrt{2}$ C) $2+\sqrt{3}$ D) $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ E) 4

13 Si m; n y p son raíces de: $x^3-2x^2+3x=1$, entonces el valor de:

$$\frac{1}{m^2n^2}+\frac{1}{p^2n^2}+\frac{1}{m^2p^2}$$

es:

A) 2 B) 1 C) 0 D) –1 E) –2

14 ¿Cuántas de las siguientes ecuaciones:

* $3x^4-x^2-5=0$
* $2x^4+x+6=0$
* $x^4+4x^2+6x=0$
* $4x^8-x^4-3=0$

son bicuadradas?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) Ninguna

15 Calcular $\frac{m}{n}$, si la siguiente ecuación: $2x^m+9x^n+3=0$, es bicuadrada.

A) 2 B) 4 C) 8 D) 1/2 E) Más de una es correcta

16 Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

( ) Una ecuación bicuadrada y una cúbica pueden ser equivalentes.

( ) Una ecuación cúbica y una cuadrática pueden ser equivalentes.

( ) $x^2 = x^3$ y $x = 1$. son equivalentes.

A) FFV B) FVF C) VVF D) VFF E) FFF

17 Indique una de las ecuaciones bicuadradas, donde una de sus raíces es solución de la ecuación: $x^2 - 2x + 1 = 0$, y otra raíz es solución de la ecuación: $x^3 - 6x + 9 = 0$

A) $x^4 - 10x^2 + 5 = 0$ B) $x^4 + 6x^2 - 9 = 0$ C) $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$
D) $x^4 - 9 = 0$ E) $x^4 - 2x^2 + 1 = 0$

18 Sea la ecuación bicuadrada:

$$x^4 - mx^2 + 64 = 0,$$

donde una raíz es el doble de la otra. Calcule «m»

A) 70 B) 69 C) 50 D) 60 E) 20

19 En la ecuación bicuadrada:

$x^4 - (3n+4)x^2 + (n+1)^2 = 0$. sus soluciones están en progresión aritmética, además $n > -1$. Calcular el valor de: $n^2 + 1$.

A) 1 B) 2 C) 10 D) 17 E) 5

20 Si la siguiente ecuación de variable «x»: $4x^{\alpha} + 3x^{\beta} + 2 = 0$. es bicuadrada.

calcular $\dfrac{\alpha}{\beta}$.

A) 2 B) 1/4 D) Más de una de correcta
C) 1/2 E) 4

SEGUNDA PRACTICA DIRIGIDA

01 Indicar una raíz de: $x^4 + 1 = 0$

A) $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ B) $-i$ C) $\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}$ D) $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$ E) $1 - i$

02 Resolver la ecuación: $8x^6 - 65x^3 + 8 = 0$ e indicar una raíz.

A) $-1 + \sqrt{2}i$ B) $-1 - \sqrt{2}i$ C) $1 + \sqrt{3}i$
D) $1 - \sqrt{3}i$ E) $-1 - \sqrt{3}i$

03 De la ecuación polinomial: $x^7 - 5x^6 - x^4 + 5x^3 = 0$ podemos afirmar que:

A) La suma de sus raíces es -5.
B) El producto de sus raíces es 5.
C) Admite una raíz real $\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
D) Una de sus raíces imaginarias es $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$
E) Una raíz real es -1

04 El siguiente polinomio :

$P(x) = x^5 - 3x^4 - 6x^3 + 10x^2 + 21x + 9$; presenta:

A) 5 raíces diferentes
B) 2 raíces de multiplicidad 2
C) 1 raíz de multiplicidad 2 y otra de multiplicidad 3
D) 1 raíz de multiplicidad 4
E) 1 raíz de multiplicidad 5

05 Al resolver la ecuación recíproca:

$3x^5 - x^4 - x^3 + x^2 + x - 3 = 0$ una de sus raíces será:

A) -1 B) $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ C) $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$
D) $\frac{5}{6} + \frac{\sqrt{11}}{6}i$ E) $-\frac{5}{6} - \frac{\sqrt{11}}{6}i$

06 Dada la ecuación recíproca:

$ax^4 - 35x^3 + 62x^2 + bx + 6 = 0$; $a \neq 0$ admite 2 raíces de la forma:

$$m - 3;\ \frac{1}{m-3}$$

determinar el mayor valor de "m"

A) 6 B) 5 C) 4 D) 3 E) 2

07 Sea P un polinomio, tal que:

$$P(x) = x^3 P\left(\frac{1}{x}\right)$$

encuentre el término lineal de $P(x)$; sabiendo que su término independiente es 3 y la suma de sus coeficientes 10

A) 2 B) $2x$ C) 3 D) $3x$ E) $4x$

08 Dada la ecuación trinomial:

$$x^{3n-1} + x^{n+3} + 1 - 3n = 0$$

siendo su grado el menor posible, ¿cuántas raíces imaginarias posee?

A) 18 B) 12 C) 6 D) 4 E) 2

09 Resolver la ecuación: $x^2 + x - 7 = \dfrac{60}{x^2 + x}$

y dar como respuesta la suma de sus soluciones enteras.

A) 1 B) 2 C) -1 D) -2 E) -3

10 Formar una ecuación bicuadrada cuyas raíces se pueden determinar a partir de:

$$x^2 = 16 \wedge x^2 = 25$$

A) $x^4+31x^2-400=0$ B) $x^4+31x^2+400=0$
C) $x^4-41x^2+400=0$ D) $x^4-30x^2+29=0$
E) $x^4+13x^2+36=0$

11 Si la suma de las raíces positivas de la ecuación bicuadrada: $x^4-(3m-5)x^2+m^2=0$ es 5, calcular el valor de "m"

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

12 Formar la ecuación bicuadrada cuya dos de sus raíces son las raíces de la ecuación:

$$x^2-7x+5=0$$

A) $x^4+39x^2-25=0$ B) $x^4-25x^2+39=0$
C) $x^4-39x^2+25=0$ D) $x^4-47x^2+24=0$
E) $x^4+47x^2-24=0$

13 Sea: $P(x)=x^4-14x^2+16\sqrt{2}x-7$

Si : $P(r_0)=P(r_1)=P(r_2)=P(r_3)=0$ y $r_0<r_1<r_2<r_3$, entonces r_0+r_3 es:

A) 0 B) 8 C) $\sqrt{2}$ D) -2 E) 7

14 Resolver la siguiente ecuación recíproca:

$$x^6-10x^5+25x^4-25x^2+10x-1=0$$

y dar como respuesta la suma de los cuadrados de sus raíces.

A) 64 B) 81 C) 100 D) 50 E) 144

15 Si x_1 y x_2 son las soluciones reales de la ecuación recíproca:

$$ax^4+(b-3)x^3-10x^2+(5-a)x+b+6=0$$

proporcionar: $(x_1+x_2)x_1x_2$

A) 1 B) 2 C) 4 D) 9 E) 25

16 Dar una raíz imaginaria de:

$$(Z+3)^4+(Z+5)^4=16$$

A) $4+\sqrt{5}i$ B) $4-\sqrt{7}i$ C) $i\sqrt{7}+2$
D) $i\sqrt{7}-4$ E) $i\sqrt{5}-4$

17 Una raíz real de: $3\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)=4\left(x-\frac{1}{x}\right)+\frac{19}{4}$ es:

A) 1,5 B) 2 C) 0,6 D) 1 E) 3/4

18 Si la ecuación: $x^4+ax^2+b=0$

tiene 2 raíces reales que suman 3 y el producto de las mismas es positiva, dichas raíces son también raíces de la ecuación:

$$x^3+cx^2+cx+1=0$$

determine: $a+b+c$

A) -9 B) -8 C) -7 D) -6 E) 5

19 Resolver: $\sqrt{3x^2-16x+24}+\sqrt{3x^2-16x-3}=9$

e indicar el producto de sus raíces:

A) -2 B) -4 C) -3 D) -6 E) -8

20 Indicar la suma de dos de sus raíces de:

$$x^4+(a+b)x^3+(ab-1)x^2-(a+b)x-ab=0$$

A) a B) b C) $b-a$ D) $a+b$ E) 0

TAREA DOMICILIARIA

01 Indicar una raíz de la ecuación: $9x^4+4=0$

A) $\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}$ B) $\dfrac{\sqrt{3}(1+2i)}{2}$ C) $\sqrt{\dfrac{3}{2}}i$ D) $\dfrac{1+i}{\sqrt{3}}$

02 Resolver: $x^3-64=0$ e indicar la suma de sus raíces no reales

A) 2 B) -2 C) -4 D) 4 E) 3

03 Calcular "n" en la siguiente ecuación bicuadrada:

$$x^4+(n-25)x^2+4(n-3)=0$$

si el producto de sus raíces es 12

A) 1 B) 3 C) 6 D) 7 E) 9

04 Calcular la suma de las raíces de:

$$\frac{x^2-6}{x}-\frac{5x}{x^2-6}=4$$

A) 4 B) -4 C) 8 D) 6 E) 3

05 Calcular la suma de las raíces de:

$$\frac{x^2-6}{x}-\frac{5x}{x^2-6}=4$$

A) 4 B) -4 C) 8 D) 6 E) 3

06 Señalar una raíz de:

$$x^4+x^3-4x^2+x+1=0$$

A) -1 B) $\dfrac{\sqrt{5}-3}{2}$ C) $\dfrac{\sqrt{7}-5}{2}$
D) $\dfrac{4-\sqrt{5}}{2}$ E) $\dfrac{3+\sqrt{2}}{2}$

TERCERA PRACTICA DIRIGIDA

01 Sea $P(x)$ un polinomio mónico y de cuarto grado, tal que:

$$P(-7)=P(3)=P(-1)=0$$

además $P(-2)=75$. Calcular el término lineal de dicho polinomio.

A) $-106x$ B) $96x$ C) $-96x$ D) $116x$ E) $-86x$

02 ¿Cuál de las alternativas no corresponde a un cero del polinomio?

$$F(x) = x^5 + x^3 + x^2 + 1$$

A) $\frac{1-\sqrt{3}i}{2}$ B) $\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$ C) i D) $-i$ E) $\frac{2+\sqrt{3}i}{4}$

03 De la ecuación en "x":

$$9(x^2+5)^2(x-7)^3(x-\sqrt{3})^2=0$$

indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

( ) Tiene 9 raíces.

( ) Tiene 4 soluciones.

( ) 7 es una raíz triple y $\sqrt{3}$ es una raíz doble.

A) VFV B) VFF C) VVV D) FFV E) FFF

04 Si dos raíces de la ecuación:

$$nx^5+mx^4+16x^3-9x^2+x+10=0;\ n \neq 0$$

de coeficientes enteros, son: 1 y $-\frac{2}{3}$

calcule el valor de: $m^3 + n^3 + (m-n)^3$

A) 1 458 B) 729 C) –2 187 D) –729 E) –1 458

05 Calcular la suma de las raíces imaginarias de la ecuación:

$$x^4 + 2x^3 - x^2 + 2x + 1 = 0$$

A) –3 B) 2 C) 1 D) –2 E) 0

06 Si x_1, x_2 y x_3 son las raíces de la ecuación:

$$2x^3 - 6x^2 + 8x - 5 = 0$$

calcule el valor de:

$$E = \frac{1}{x_1^2-3x_1+4} + \frac{1}{x_2^2-3x_2+4} + \frac{1}{x_3^2-3x_3+4}$$

A) $\frac{2}{5}$ B) $\frac{4}{5}$ C) $\frac{6}{5}$ D) $\frac{1}{5}$ E) $\frac{3}{5}$

07 Sabiendo que las raíces de la ecuación:

$$x^3 - bx^2 + cx + 2a = 0;\ (ab \neq 0)$$

son a; b y c, calcular el valor de:

$$a^2 + b^3 + c^4$$

A) 10 B) 32 C) 16 D) 19 E) 25

08 Calcular $(a + b)$, para que en la ecuación:

$$x^4 + 2x^3 - 5x^2 + ax + b = 0;\ a, b \in \mathbb{Q}$$

una de sus raíces sea $(1 - \sqrt{3})$

A) 8 B) –8 C) 18 D) –28 E) 28

09 Si $(3 - i)$ es una raíz de la ecuación:

$$x^3 - mx^2 + nx - 20 = 0;\ m, n \in \mathbb{R} (i = \sqrt{-1})$$

calcular $(n - 2m)$

A) 2 B) 6 C) i D) 5 E) 3

10 Si un polinomio $P(x)$ de coeficientes enteros, admite por raíces a:

$2+i$: Raíz de multiplicidad 3.

$1-\sqrt{2}$: Raíz de multiplicidad 2.

-5: Raíz simple

$\sqrt{7}$: Raíz de multiplicidad 4.

podemos afirmar que:

A) $Gdo(P) = 19$ B) $Gdo(P) = 20$ C) $Gdo(P) = 13$

D) $Gdo(P) \geq 19$ E) $Gdo(P) \geq 20$

11 Si x_1; x_2 y x_3 son las raíces de:

$$x^3 + 2px + 3p = 0;\ p > 0$$

halle el equivalente de la expresión:

$$A = \frac{x_3^2}{(x_1-1)(x_2-1)} + \frac{x_1^2}{(x_2-1)(x_3-1)} + \frac{x_2^2}{(x_3-1)(x_1-1)}$$

A) $\frac{5p}{5p+1}$ B) $1+\frac{1}{5p}$ C) $5p-1$ D) $5p+1$ E) $p+5$

12 Sea la ecuación: $x^3 + 2x - 1 = 0$

de raíces x_1, x_2 y x_3 forme una ecuación cúbica cuyas raíces sean x_1^3; x_2^3 y x_3^3

A) $y^3 + 3y^2 - 11y + 1 = 0$ B) $y^3 - 3y^2 + 11y + 1 = 0$

C) $y^3 - 3y^2 - 11y - 1 = 0$ D) $y^3 - 3y^2 + 11y - 1 = 0$

E) $y^3 + 3y^2 - 12y + 1 = 0$

13 Dada la ecuación:

$$x^4 - 4x^2 + ax + b = 0;\ a, b \in \mathbb{R}$$

siendo $(2+\sqrt{3}i)$ una raíz, calcular la suma de los cuadrados de sus raíces.

A) –6 B) –4 C) 0 D) 4 E) 8

14 En la siguiente ecuación:

$$x^3 + 2x^2 + bx - 4 = 0$$

el cuadrado de la única raíz positiva, es igual a la diferencia de los cuadrados de las otras dos. Indicar dicha raíz.

A) 3 B) $2\sqrt{2}$ C) $\sqrt{3}$ D) $\sqrt{2}$ E) 1

15 De la ecuación polinomial:

$$x^7 - 5x^6 - x^4 + 5x^3 = 0$$

podemos afirmar que:

A) *La suma de sus raíces es –5.*

B) *El producto de sus raíces es 5.*

C) *Admite una raíz real* $\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

D)Una de sus raíces imaginarias es $\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

E)Una raíz real es -1.

16 Calcular la suma de los valores que admite "a" para que la ecuación:

$$x^3+(1-a)x^2+(7-2a)x+18=0$$

admita dos soluciones.

A) -2 B) -9,5 C) 7,5 D) 2 E) 13,5

17 Formar la ecuación de menor grado posible con coeficientes racionales, tal que tenga una raíz igual a: $\sqrt{3}-\sqrt[3]{2}$.

Indique la suma de sus coeficientes.

A) 36 B) 40 C) 18 D)32 E)12

18 Si a, b y c son raíces de: $x^3-3x-1=0$

además: $F(x)=\frac{1}{(x^3-1)^2}$

calcular: $F(a)+F(b)+F(c)$

A)1 B)3 C)$\frac{1}{3}$ D)9 E)$\frac{5}{3}$

19 Sean a, b y c raíces de la ecuación:

$$x^3-(a+b-abc)x^2+\left(\frac{a+b}{abc}-6\right)x+2=0$$

Calcular: $a(a+c-b)$, si $a>b$

A)1 B)$\sqrt{2}$ C)2 D)$2\sqrt{2}$ E)4

20 Sabiendo que la ecuación:

$$x^{12}-6x^8-6x^6+12x^4-36x^2+1=0$$

tiene una raíz de la forma:

$$\sqrt{\sqrt{a}+\sqrt[3]{b}};\ a,b\in Z^+$$

indicar verdadero *(V)* o falso *(F)*:

( ) La ecuación tiene una raíz real.

( ) $a+b=5$

( ) La ecuación es compatible determinada.

A) VFF B) VVV C) FFF D) VFV E) FVV

CUARTA PRACTICA DIRIGIDA

01 Resolver la ecuación: $16x^4-81=0$

Señalar una raíz.

A)9 B)$-\frac{2}{3}$ C)3i D)$-\frac{3i}{2}$ E)$\sqrt[4]{3}i$

02 Indicar una raíz al resolver:

$$x^6+19x^3-216=0$$

A)-2 B)$1+i$ C)$3+\sqrt{2}i$ D)$-2+\sqrt{3}i$ E)$-1-\sqrt{3}i$

03 Acerca del polinomio:

$P(x)=x^5-6x^4+6x^3+16x^2-15x-18$ presenta:

A) Raíces imaginarias.

B) 1 raíz real de multiplicidad 3.

C) 2 raíces reales de multiplicidad 2.

D) 1 raíz real negativa simple.

E) 1 raíz real de multiplicidad 4.

04 Si x_1, x_2, x_3 y x_4 son raíces de la ecuación bicuadrada:

$$(5t^2+2)x^4-(4t^4+9)x^2+3(t^2+2)=0$$

tal que el producto de sus cuatro raíces es 1, entonces la raíz de mayor valor absoluto es:

A)$\frac{\sqrt{3}}{2}$ B)$\sqrt{2}$ C)$\frac{2}{\sqrt{3}}$ D)$\frac{\sqrt{6}}{2}$ E)$\sqrt{3}$

05 Determine la menor raíz irracional de la ecuación recíproca:

$$x^4-(a-3)x^3+10x^2-(15-a)x+1=0$$

A)$5-\sqrt{3}$ B)$4-\sqrt{2}$ C)$3-\sqrt{2}$ D)$2-\sqrt{3}$ E)$2-\sqrt{5}$

06 Sí 2 raíces de la ecuación bicuadrada:

$$x^4+(a-3)x^3-(a+b)x^2+(2-b)x+1=0$$

son α y β, formar otra ecuación bicuadrada si 2 de sus raíces son α^2 y β^2.

A) $x^4+10x^2+1=0$ B) $x^4-20x^2+1=0$
C) $x^4-10x^2+10=0$ D) $x^4-23x^2+1=0$
E) $x^4+28x^2+14=0$

07 Dada la ecuación: $x^3-x^2-100=0$,

siendo x_1 una raíz y x_2, x_3 raíces imaginarias, calcular:

$$R=\frac{x_1}{x_2x_3}$$

A)$\frac{1}{4}$ B)$-\frac{1}{4}$ C)$\frac{1}{5}$ D)$-\frac{1}{5}$ E)$\frac{1}{10}$

08 Resolver la ecuación:

$$(x^2-7x+3)^2+10(x^2-7x+3)+21=0$$

Proporcione una raíz.

A)$1-i$ B)$2+\sqrt{3}i$ C)-10 D)$3i$ E)5

09 Resolver: $3\sqrt{x^2+x-2}-x=x^2$

Indicar la menor raíz.

A) -4 B) $\frac{-1-\sqrt{3}}{2}$ C) -3 D) 4 E) 6

10 Sí a, b y c son raíces de:

$$P(x) = x^3 - x^2 + 1$$

calcular: $\frac{a^2}{a^2-1}+\frac{b^2}{b^2-1}+\frac{c^2}{c^2-1}$

A) 5 B) 4 C) 3 D) 1 E) 0

11 Si 1 es raíz de multiplicidad 3 del polinomio:

$$P(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3 - 4x^2 + 72$$

calcular: $E = 10a + 6b + 3c$

A) 26 B) 32 C) 18 D) 8 E) 4

12 Formar la ecuación cuyas raíces sean las de:

$$x^4 + 3x^2 - x + 4 = 0$$

aumentadas en 2 unidades. Señale el término lineal.

A) $40x$ B) $36x$ C) $-28x$ D) $-45x$ E) $-20x$

13 Las raíces de la ecuación:

$$x^3 + x^2 - 3x + 5 = 0$$

son m, n y p. Hallar la ecuación cuyas raíces son:

$$\frac{m+1}{2};\frac{n+1}{2};\frac{p+1}{2}$$

A) $8x^3 + 12x^2 - 4x + 6 = 0$ B) $8x^3 + 6x^2 - 3x + 8 = 0$
C) $8x^3 - x^2 + 3x + 6 = 0$ D) $8x^3 - 8x^2 - 4x + 8 = 0$
E) $8x^3 + 4x^2 + 6x + 12 = 0$

14 Sabiendo que la suma de las inversas de las raíces de la ecuación:

$$x^3 + 4x^2 + (8 + a^2)x - (a - 1)(2a + 5) = 0;\ a > 0$$

es igual a $\frac{17}{22}$, ¿cuál es la raíz de menor módulo?

A) 1 B) 3 C) -5 D) -2 E) -1

15 En la ecuación bicuadrada:

$$x^4 - 20\left(m+\frac{p}{2}-2\right)x^2 + 9(p-m)^2 = 0;\ p > m$$

calcular "m" para que sus raíces estén en progresión aritmética.

A) 2 B) $\frac{4}{3}$ C) $\frac{1}{5}$ D) $\frac{2}{3}$ E) $-\frac{3}{4}$

16 Resolver la ecuación:

$$\frac{2(x^2-6x+9)}{(x^2-5x+6)(x-4)(x-3)}=\frac{1}{x^2-5x+6}+\frac{5}{x-3}$$

A) $\left\{2;\frac{21}{5}\right\}$ B) $\left\{\frac{21}{5};3\right\}$ C) $\{2;9\}$ D) $\left\{\frac{21}{5}\right\}$ E) $\{2\}$

17 Dada la ecuación:

$$\sqrt{\frac{x^2-2x-2}{x^2+4x+2}}+\sqrt{\frac{x^2+4x+2}{x^2-2x-2}}=2$$

el valor de "x" es:

A) 2 B) $\frac{1}{5}$ C) $\frac{1}{3}$ D) $-\frac{2}{3}$ E) $\frac{5}{3}$

18 En la ecuación:

$$2(x+\sqrt{x^2+7x}) = 35+\sqrt{x}+\sqrt{x+7}$$

dar un valor de "x".

A) 6 B) 8 C) 9 D) 10 E) 11

19 El polinomio:

$$P(x) = ax^5 + bx^3 - b + a$$

con $a \in Z^+$ y $P(1)<4$, tiene 2 raíces positivas iguales. Entonces un valor de $a - b$ es:

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

20 El conjunto solución de la ecuación:

$$\sqrt[3]{x+1}=\sqrt[6]{x^2-1}+\sqrt[3]{x-1}$$

es $\left\{\frac{\sqrt{a}}{b};-\frac{\sqrt{a}}{b}\right\}$. Calcular: $a^2 + b^2$.

A) 29 B) 25 C) 13 D) 14 E) 15

CLAVES DE LA PRIMERA PRACTICA									
1)D	2)B	3)A	4)C	5)B	6)D	7)A	8)B	9)B	10)B
11)B	12)E	13)E	14)A	15)E	16)B	17)C	18)E	19)E	20)A

CLAVES DE LA SEGUNDA PRACTICA				
01) B	02) E	03) D	04) C	05) E
06) A	07) B	08) E	09) C	10) C
11) E	12) C	13) D	14) D	15) B
16) D	17) A	18) A	19) B	20) E
01) D	02) C	03) C	04) A	05) B

NOTA :

La resolución de ecuaciones polinomiales es un tema que ha sido muy estudiado a lo largo de los años a causa de las distintas aplicaciones, provenientes de diversas áreas de la ciencia y de la tecnología, en las que este tipo de ecuaciones aparecen. Este tema ha recobrado

importancia en las últimas décadas con el surgimiento de la computación que, en particular, ha introducido la necesidad del estudio de los aspectos *algorítmicos* de distintos problemas en esta área.



OBJETIVOS:

* Valorar la importancia del álgebra matricial y la adquisición de estrategias para la simplificación de los cálculos.

* Identificar los tipos de matrices.

* Operar con matrices: suma y diferencia de matrices, producto de un número real por una matriz, producto de matrices. Conocer las propiedades de estas operaciones.

INTRODUCCIÓN:

Hablar de matrices hoy en día es hablar de una herramienta tan común en matemáticas, que con el tiempo apareció en forma independiente. La teoría de matrices y su proceso de formación fue a mediados del siglo pasado, pero su plenitud y elegancia la adquiere después. Hasta hoy la teoría de matrices es un instrumento de investigación apropiado a las necesidades prácticas y a las construccions abstractas de las matemáticas modernas.

Si se conoce la naturaleza de una matriz, es posible valerse de ella en el almacenamiento, presentación y manipulación de datos. Si los datos se guardan dentro de una matriz con algún patrón lógico, la recuperación de los elementos individuales o grupos de elementos puede ser relativamente fácil. A menudo, se necesita manipular datos que se almacenan en una matriz. Por ejemplo las tablas del impuesto sobre la renta, las calificaciones obtenidas por un grupo de estudiantes, los informes económicos de una compañía , y muchos otros datos.

En la actualidad, la principal utilidad de las matrices tiene que ver con aplicaciones computarizadas. Los programas de computación se valen periódicamente de matrices "arreglos" para guardar y procesar información.

Las matrices surgen de un gran número de situaciones de la vida diaria. Por ejemplo, al considerar los cursos del ***POLITÉCNICO*** de tu zona y analizar el número de estudiantes por especialidad.

	Ejemplos	Computadoras	Diseño Industrial	Electricidad
6º grado	12	35	5	14
7º grado	13	30	6	15
8º grado	17	32	10	14
9º grado	10	28	9	16
10º grad	9	36	15	20
11º grado	10	31	8	22

Se asigna a cada curso una fila y cada programa una columna.

De acuerdo con la tabla anterior se observa:

* Los cursos determinan ***6*** filas.

* Los programas de arquitectura, computadores, diseño industrial y electricidad, determinan ***4*** columnas.

* La intersección de una fila y una columna informa sobre el número de estudiantes de un curso que hay en el programa. Por ejemplo, el número colocado en la interseción de la quinta fila y la segunda columna indica que hay ***36*** estudiantes de décimo grado en el programa de computadoras.

Las matrices aparecen por primera vez hacia el año ***1850,*** introducidas por J.J. Sylvester

El desarrollo inicial de la teoría se debe al matemático W.R. Hamilton en ***1853***

En ***1858,*** A. Cayley introduce la notación matricial como una forma abreviada de escribir un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas.

Las matrices se utilizan en el cálculo numérico, en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales, de las ecuaciones diferenciales y de las derivadas parciales. Además de su utilidad para el estudio de sistemas de ecuaciones lineales, las matrices aparecen de forma natural en geometría, estadística, economía, informática, física, etc...

La utilización de matrices (arrays) constituye actualmente una parte esencial de los lenguajes de programación, ya que la mayoría de los datos se introdución en los ordenadores como tablas organizadas en filas y columnas : hojas de cálculo, bases de datos,...

MATRIZ

Una matriz es un ***arreglo*** o ***disposición rectangular*** de números. Si el arreglo tiene ***m filas (horizontales)*** y ***n*** *columnas* (verticales), se llama matriz de orden $m \times n$.

EJEMPLO 1:

$$\begin{pmatrix} 3 & 8 & 7 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \rightarrow \textit{Fila} \\ \rightarrow \textit{Fila} \end{matrix}$$

$$\downarrow \ \downarrow \ \downarrow$$

Columna

es una matriz 2×3, porque tiene dos filas y tres columnas.

* En la primera fila y primera columna aparece ubicado el número *3*.

* En la primera fila y segunda columna aparece el número *8*.

* En la segunda fila y tercera columna, el número *2*.

* A cada número en el arreglo se le denomina entrada.

EJEMPLO 2:

$$A=\begin{pmatrix}3 & 5\\ -9 & -4\end{pmatrix}\ ;\ B=\begin{pmatrix}2 & -\sqrt{3} & 5/7\\ 1 & -\dfrac{3}{4} & \pi\end{pmatrix}$$

$$C=\begin{pmatrix}2\\ -6\\ \dfrac{5}{9}\end{pmatrix}\ ;\ D=\begin{pmatrix}-4 & 2/7 & \sqrt[3]{4}\end{pmatrix}$$

DEFINICIÓN (MATRIZ):

Es un conjunto de elementos (números, funciones, vectores, etc.) dipuestos en forma rectangular y además ordenados en filas y columnas. A las matrices se les denota con letra mayúscula y se le encierra entre paréntesis o corchetes.

EJEMPLO 3:

$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 3 & 0\end{bmatrix}$ es una matriz de orden 2×3

$B=\begin{bmatrix}x^2 & 2x\\ x-1 & 3\end{bmatrix}$ es una matriz de orden 2×2

$C=[4]$ es de orden 1×1

* El siguiente arreglo $\begin{bmatrix} & 3\\ 4 & 5\end{bmatrix}$ no es una matriz, no es un arreglo rectangular.

OBSERVACIONES:

* ***Una matriz por ser un arreglo rectangular no posee valor numérico.***

* ***Es importante adquirir el hábito de enunciar siempre filas antes que las columnas (filas - columnas)***

NOTACIÓN GENERAL:

Se simboliza cada elemento con subíndices de la forma a_{ij}, donde i representa la fila donde se encuentra y j la columna.

Así la matriz de "m" filas y "n" columnas cuyos elementos son a_{ij} es:

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots\\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in}\\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}$$

Filas (→ rows); Columnas (↑ columns)

Que abreviadamente se representa por:

$A=(a_{ij})_{m\times n}$ — m: **número de filas**; n: **número de columnas**

Donde: $\{m;n\}\subset\mathbb{N}$

Siendo: $i=1;2;3;...;m.$ $j=1;2;3;...;n.$ y podemos leer así:

"A es la matriz de m filas y n columnas" a_{ij} es un elemento de la matriz A.

* Además:

$$a_{11};a_{12};...a_{21};...;a_{m1};a_{m2};...a_{mn}$$

se llaman elementos de la matriz "A". "a_{ij}" es el elemento ubicado en la fila "i", columna "j".

OBSERVACIONES:

* Las matrices usualmente se denotan por las letras mayúsculas **A , B , C , ...**

* Para la notación de una matriz en la forma general sus elementos se designan con letras mayúsculas que vienen acompañadas de dos subíndices (a_{ij}), donde el primer subíndice (i) indica el número de la fila y el segundo (j) el número de la columna en la cual se encuentran ubicados dichos elementos.

EJEMPLO:

Columna $j(j=2)$

$$A=\begin{pmatrix}3 & -2 & 0 & 2 & 1\\ 2 & -3 & -2 & 1 & 5\\ -1 & 4 & -5 & 3 & 4\\ 5 & 1 & 1 & 4 & 2\end{pmatrix}\leftarrow \textbf{Fila } i(i=3)$$

Fila *1*: $3;-2;0;2;1$

Fila *3*: $-1;4;-5;3;4$

Columna *1*: $3;2;-1;5$

Columna *3*: $0;-2;-5;3$

El *4* es el elemento que pertenece a la *3ra*. fila y a la *2da*. columna esto se denota por:

$4 = a_{33}$ → Letra de la matriz (minúscula); Número de columnas; Número de filas.

$a_{34} = 3$; $a_{25} = 5$

$a_{12} = -2$; $a_{11} = 3$

$a_{43} = 3$; $4_{44} = 4$

ORDEN O DIMENSIÓN DE UNA MATRIZ

Es una característica de toda matriz, viene dado por la multiplicación indicada del número de filas y el número de columnas de dicha matriz, así si la matriz tiene m filas y n columnas, diremos que la matriz es de orden $m\times n$.

$$\boxed{\text{Orden de "A"} = n \times m}$$

EJEMPLOS:

I) La matriz $\begin{pmatrix} 1 & a \\ b & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ tiene **3** filas y **2** columnas, entonces se dice que es de orden **3×2** (tres por dos).

II) La matriz $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 \\ 2 & 4 & 16 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ tiene **3** filas y **3** columnas, entonces será de orden **3×3** (tres por tres). Como el número de filas es igual al número de columnas podemos decir que la matriz de orden **3**.

OBSERVACIÓN:

Si el número de filas es igual al número de columnas entonces se dice que la matriz es cuadrada y que su orden es n.

EJEMPLOS:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$$

* **M** es una matriz cuadrada de orden **2**.

$$N = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 5 & -1 \\ \pi & 3 & 2/5 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

* **N** es una matriz cuadrada de orden **3**.

EJERCICIO 1:

En las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad C = (9\ 1\ 7)$$

I) ¿Cuál es el orden de las matrices **A, B** y **C**?

II) ¿Qué número está ubicado en la tercera fila y la segunda columna de la matriz **B**?

III) ¿Qué número está ubicado en la primera fila y la tercera columna de la matriz **C**?

RESOLUCIÓN:

I) 2×2 ; 3×3 y 1×3 *II)* 0 *III)* 7

EJERCICIO 2:

La siguiente información da cuenta del número de veces que tres amigos asistieron a tres cines diferentes durante este año.

* Mónica fue al cine Alambrito **13** veces, al cine Estación **7** veces y al cine Azul **10** veces.

* Roberto fue al cine Alambrito **17** veces, al cine Estación **8** veces y al cine Azul **11** veces.

* Teresa fue al cine Alambrito **5** veces, al cine Estación **9** veces y al cine Azul **16** veces.

A partir de los datos proporcionados:

I) Expresar la información en una matriz de datos ¿Cuál es el orden de la matriz?

II) Hallar el elemento a_{31}. ¿Qué significa este número?

III) Determinar cuál de los tres amigos asistió más veces al cine.

RESOLUCIÓN:

I) Si ubicamos en la primera, segunda y tercera fila a Mónica, Roberto y Teresa, respectivamente, y en la primera, segunda y tercera columna a los cines Alambrito, Estación y Azul, respectivamente, podremos representar la información en la siguiente matriz.

$$\begin{pmatrix} 13 & 7 & 10 \\ 17 & 8 & 11 \\ 5 & 9 & 16 \end{pmatrix}$$

El elemento **13**, que corresponde a la primera fila y primera columna, indica que Mónica fue al cine Alambrito **13** veces. El elemento **11**, correspondiente a la segunda fila y tercera columna, indica que Roberto fue al cine Azul **11** veces. La matriz es de orden **3×3**.

II) El elemento a_{31} es igual a **5** e indica que Teresa fue al cine Alambrito **5** veces.

III) Sumando las filas, podemos decir:

Mónica fue al cine **30** veces; Roberto, **36** veces y Teresa, **30** veces. *Luego, Roberto fue más veces al cine.*

EJERCICIO 3:

Escribir explícitamente la matriz:

$$A = (a_{ij})_{2\times 3} / a_{ij} = 2i - j$$

RESOLUCIÓN:

* Tabulando (Dando valores a "i" y "j"), obtenemos:

$a_{11} = 2(1) - 1 = 1$; $a_{21} = 2(2) - 1 = 3$

$a_{12} = 2(1) - 2 = 0$; $a_{22} = 2(2) - 2 = 2$

$a_{13} = 2(1) - 3 = -1$; $a_{23} = 2(2) - 3 = 1$

* Luego construimos la matriz, así:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 4:

Formar la matriz $A = [a_{ij}]_{3\times 3}$ tal que:

$$a_{ij}=\begin{cases} (-1)^{i+j} \; ; \; i \geq j \\ i+j \; ; \; i < j \end{cases}$$

RESOLUCIÓN:

* Tenemos que: $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

EJERCICIO 5:

Contestar:

I) Dada la matriz $B=\begin{pmatrix} 3 & 8 & 7 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ determina los elementos a_{11}, a_{22} y a_{23}.

II) Considerando los arreglos rectangulares:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} 3 & 6 & -8 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad C=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

describe el orden de las matrices y, para cada una, el elemento a_{22}, b_{22} y c_{22}.

III) Encuentra los componentes de la matriz $B=(b_{ij})$, si B es de 2×3 y $b_{ij}=2^i - 4^j$.

IV) Encuentra los componentes de la matriz $C=(C_{ij})$, si C es de orden 4×1 y $C_{ij}=i-j$.

RESOLUCIÓN:

I) $a_{11}=3$; $a_{22}=4$; $a_{23}=2$

II) 3×2 ; 2×3 ; 2×2

$a_{22}=2$; $b_{22}=1$; $c_{22}=0$

III) $B=\begin{pmatrix} -2 & -14 & -62 \\ 0 & -12 & -60 \end{pmatrix}$ *IV)* $C=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

IGUALDAD DE MATRICES

Dos matrices del mismo son iguales si todos sus elementos de la misma posición son respectivamente iguales.

Así: Sean las matrices

$$A=(a_{ij})_{m\times n} ; B=(b_{ij})_{m\times n}$$

$$\boxed{A=B \Leftrightarrow a_{ij}=b_{ij} \; ; \forall i, j}$$

EJEMPLO 1:

Si observamos las matrices **A** y **B** de orden 3×2:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} (3-1) & 7 \\ 3 & (4-1) \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

podemos verificar que todos los elementos que están en las mismas posiciones en ambas matrices son iguales.

EJEMPLO 2:

Las siguientes matrices: $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

no son iguales, porque el elemento que está en la primera fila y segunda columna de **A**, $a_{12}=3$ es diferente que su correspondiente en **B**, $b_{12}=5$.

EJEMPLO 3:

Si consideramos que las siguientes matrices:

$$M=\begin{pmatrix} 1 & a & 3 \\ 2 & (b-1) & 2 \end{pmatrix} \quad N=\begin{pmatrix} 1 & 4 & c \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

son iguales, entonces se tendrá que $a=4$; $b-1=1$ y $c=3$.

* Es decir:

$$a=4 \; ; b=2 \text{ y } c=3.$$

MATRICES ESPECIALES

De acuerdo a la disposición de sus elementos o de la naturaleza de estos.

Aquí veremos las matrices cuadradas, las rectangulares y sus tipos más usados.

1) MATRIZ COLUMNA :

Es aquella matriz, que tiene una sola columna, es decir es de orden "$m\times 1$".

$A=(a_{ij})_{m\times n}$ es una matriz columna si $n=1$ ó bien $A=(a_{ij})_{m\times 1}$.

$$A=\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}_{3\times 1}$$

2) MATRIZ FILA :

Es aquella, que tiene una sola fila, es decir es de orden "$1\times n$".

$A=(a_{ij})_{m\times n}$ es una matriz fila si $m = 1$ o bien $A=(a_{ij})_{1\times n}$

EJEMPLO:

$$B=(2\ \ -4\ \ \ 6)_{1\times 3}$$

NOTA:

En ocasiones, a las matrices filas y columnas se les llama ***vectores*** filas y columnas.

3) MATRIZ RECTANGULAR :

Son aquellas matrices donde el número de filas es distinta al número de columnas.

Esto es: la matriz $A=(a_{ij})_{m\times n}$ es rectangular si $m \neq n$

EJEMPLOS:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 8 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}$$

A es una matriz rectangular de orden 3×2.

4) MATRIZ NULA :

Es aquella matriz cuadrada o rectangular en donde todos sus elementos son ceros, es decir, una matriz $A=(a_{ij})_{m\times n}$ es nula, si $a_{ij}=0\ \forall i,j$.

EJEMPLOS:

$$\phi=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};\quad D=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

D es una matriz rectangular nula de orden 2×3.

5) MATRIZ CUADRADA :

Esta matriz se caracteriza por tener igual cantidad de filas y columnas, diciéndose que es una matriz de orden $n\times n$ o simplemente es una matriz de orden n, y se denota:

$$A=(a_{ij})_{n\times n} \text{ ó } A=(a_{ij})_n$$

EJEMPLOS:

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Diagonal Secundária   ***Diagonal Principal***

* Si es de orden n tendremos:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

TRAZA DE UNA MATRIZ CUADRADA

Es la suma de los elementos de su diagonal principal.

Sea la matriz:

$$A=(a_{ij}) \Rightarrow Traz(A)=\sum_{i=1}^{n} a_{ij}$$

* Así en el ejemplo anterior: $Traz(A)=2+4+0=6$

* En el caso de una matriz cuadrada de orden uno por uno, si: $A=[a_{11}]$. La traza de la matriz será a_{11}, esto ya que con un elemento no hay suma.

EJEMPLO:

Así:

$$B=\begin{pmatrix} 5 & -3 & 7 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow Traz(B)=5+4-2=7$$

DIAGONAL PRINCIPAL:

En una matriz cuadrada $A=(a_{ij})_{n\times n}$, la diagonal principal es el conjunto de elementos a_{ij} tal que $i=j$.

* En la matriz de orden n la diagonal principal es:

$$(a_{11}\ a_{22}\ a_{33} \dots a_{nn})$$

CASOS PARTICULARES DE UNA MATRIZ CUADRADA

I) MATRIZ DIAGONAL :

Una matriz cuadrada $A=(a_{ij})_{n\times n}$ es una matriz diagonal si $a_{ij}=0\ ;\forall i\neq j$, es decir, si todos sus elementos son ceros a excepción de por lo menos un elemento de la diaognal principal.

EJEMPLOS:

$$A=\begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\quad ;\quad B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

II) MATRIZ ESCALAR :

Es aquella matriz diagonal donde todos los elementos de la diagonal principal; son iguales a un número distinto de cero, así: la matriz $A=(a_{ij})_{n\times n}$ es una matriz escalar si:

$$a_{ij}=\begin{cases} k\ ;\ i=j \\ 0\ ;\ i\neq j \end{cases} \quad \text{ó} \quad A=\begin{pmatrix} k & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & k & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & k \end{pmatrix}$$

EJEMPLOS:

$$A=\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

III) MATRIZ IDENTIDAD :

Es una matriz cuadrada de orden n denotada por I ó I_n cuyos elementos de su diagonal principal son todos iguales a uno y los elementos fuera de la diagonal principal son todos iguales a cero.

$$I=I_n=[aij]_{n\times n}, \text{ donde: } a_{ij}=\begin{cases}1\ ;\ i=j\\0\ ;\ i\neq j\end{cases}$$

* es decir

$$I=I_n=\begin{bmatrix}1&0&0&\ldots&0\\0&1&0&\ldots&0\\0&0&1&\ldots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\ldots&1\end{bmatrix}$$

EJEMPLOS:

$$I_1=(1)\quad,\quad I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\quad,\quad I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

IV) MATRIZ TRIANGULAR :

Es aquella donde todos los elementos a un lado de la diagonal principal son ceros y al lado opuesto al menos uno no es cero.

EJEMPLO:

$$A=\begin{bmatrix}-2&0&0\\0&4&0\\11&-2&8\end{bmatrix}\qquad B=\begin{bmatrix}8&-2&12\\0&21&4\\0&0&0\end{bmatrix}$$

Triangular Inferior — Triangular Superior

MATRIZ TRIANGULAR SUPERIOR:

Una matriz cuadrada $A=(a_{ij})_{n\times n}$ es triangular superior si $a_{ij}=0,\ \forall i>j$, esto es, cuando los elementos que se encuentran por debajo de la diagonal principal son ceros.

EJEMPLOS:

$$A=\begin{pmatrix}1&-1\\0&2\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}4&5&3\\0&1&-9\\0&0&2\end{pmatrix}$$

MATRIZ TRIANGULAR INFERIOR :

Es aquella matriz, cuyos elementos que se encuentran encima de la diagonal principal, son iguales a cero. Es decir: $A=(a_{ij})_n$ es una matriz triangular inferior.

Si: $a_{ij}=0\ ;\ \forall i<j$

EJEMPLOS:

$$A=\begin{pmatrix}1&0\\2&4\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}5&0&0\\0&2&0\\7&1&6\end{pmatrix}$$

V) TRANSPUESTA DE UNA MATRIZ :

La transpuesta de una matriz A; se denota por A^t se define como aquella matriz construida a partir de la matriz A, intercambiando sus filas por sus respectivas columnas, conservando todos sus elementos.

Si:

$$A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}\Rightarrow A^t=\left[a_{ij}\right]_{n\times m};\forall\{i;j\}$$

OBSERVACIÓN:

Si la matriz "A" es de orden $m\times n$, su transpuesta (A^t) será de orden $n\times m$.

RESOLUCIÓN:

* Sea: $A=\begin{pmatrix}2&3\\5&4\\-1&6\end{pmatrix}\Rightarrow A^t=\begin{pmatrix}2&5&-1\\3&4&6\end{pmatrix}$

* Si: $A=\begin{pmatrix}2&-1&3\\x&2&y\\3&-1&x\end{pmatrix}\Rightarrow A^t=\begin{pmatrix}2&x&3\\-1&2&-1\\3&y&x\end{pmatrix}$

PROPIEDADES:

1) $(A\pm B)^t=A^t\pm B^t$ 2) $(A^t)^t=A$

3) $(kA)^t=kA^t\ /\ k$ es escalar   4) $(AB)^t=B^tA^t$

5) Traza A=Traza A^t

IV) MATRIZ SIMÉTRICA :

Una matriz cuadrada $A=(a_{ij})_{n\times n}$ es simétrica si $a_{ij}=a_{ji}$, esto es, los elementos dispuestos simétricamente a la diagonal principal son iguales.

OBSERVACIÓN:

Si una matriz es igual a su transpuesta, se llama matriz simétrica

Si: $A=-A^t\Rightarrow A$ es simétrica

EJEMPLO:

$$A=\begin{bmatrix}7&3&2\\3&-1&4\\2&4&-5\end{bmatrix}\rightarrow A^t=\begin{bmatrix}7&3&2\\3&-1&4\\2&4&-5\end{bmatrix}$$ Espejo

* Como: $A=A^t\rightarrow$ "A" es simétrica

VII) MATRIZ ANTISIMÉTRICA :

Una matriz cuadrada $A=(a_{ij})_{nxn}$ es antisimétrica si $a_{ij}=-a_{ji}, \forall i, j$, esto es, los elementos dispuestos simétriamente, con respecto a la diagonal principal, son de signos opuestos.

OBSERVACIÓN:

Si una matriz es igual al negativo de su transpuesta, se llama antisimétrica.

Si: $A=-A^t \Rightarrow A$ es antisimétrica

EJEMPLO:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & -4 \\ -3 & 4 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow A^T=\begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow -A^T=\begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & -4 \\ -3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

* Como: $A=-A^t \Rightarrow$ "A" es antisimétrica.

MATRICES OPUESTAS :

Dos matrices son opuestas si son del mismo orden y además sus respectivos elementos son opuestos.

EJEMPLO:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 6 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{su opuesta es}: -A=\begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 \\ 0 & -6 & 1 \\ -1 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

PROPIEDADES:

Sean **A** y **B** matrices cuadradas de orden "n".

1) Si: $B=\dfrac{A+A^t}{2} \Rightarrow B$ es simétrica

2) Si: $B=\dfrac{A-A^t}{2} \Rightarrow B$ es antisimétrica

3) Toda matriz cuadrada **A** se puede expresar como la suma de una simétrica y otra antisimétrica; así:

$$A=\underbrace{\frac{A+A^t}{2}}_{\text{simétrica}}+\underbrace{\frac{A-A^t}{2}}_{\text{antisimétrica}}$$

OBSERVACIÓN:

Todas las matrices diagonales son triangulares tanto superior como inferiormente. Por otra parte, para que una matriz sea a la vez triangular superior e inferior es preciso que sea diagonal. En particular las matrices identidad y nula (de orden n) son diagonales. Además, toda matriz diagonal es simétrica.

* De acuerdo con la definición de matriz antisimétrica, es claro que los elementos de la diagonal principal de una matriz de este tipo son iguales a cero. En particular, la única matriz diagonal antisimétrica es la matriz nula.

* La matriz identidad es diagonal y simétrica.

OPERACIONES FUNDAMENTALES CON MATRICES

Antes de definir las operaciones, veamos y analicemos el siguiente ejemplo:

La tienda Ventas del Futuro vende ropa deportiva. Las ventas (en soles) de tres de sus vendedores estrellas: Ernesto, Fabiola y Andrés, durante los días viernes y sábado de la última semana en los turnos mañana y tarde, aparecen en las tablas *1* y *2*.

El administrador de la tienda desea conocer:

* ¿Cuáles son las ventas totales efectuadas por cada uno de los vendedores en los dos días y en cada turno de trabajo?

* ¿Cuánto se incrementaron las ventas de cada vendedor de un día para otro y en cada turno?

TABLA 1: viernes

Vendedor	Mañana	Tarde
Ernesto	300	700
Fabiola	400	900
Andrés	500	800

TABLA 2: sábado

Vendedor	Mañana	Tarde
Ernesto	500	900
Fabiola	700	1000
Andrés	400	800

Si ordenamos la información anterior en forma matricial para facilitar las respuestas del administrador, y llamamos **V** a la matriz que contiene los datos de las ventas de cada vendedor del día viernes y por cada turno de trabajo y **S** a la matriz con la información de las ventas del día sábado, tenemos:

$$V=\begin{pmatrix} 300 & 700 \\ 400 & 900 \\ 500 & 800 \end{pmatrix};\ S=\begin{pmatrix} 500 & 900 \\ 700 & 1000 \\ 400 & 800 \end{pmatrix}$$

Si queremos ahora responder a la primera pregunta del administrador, debemos realizar la siguiente operación: sumar cada elemento de la matriz **V** con cada elemento que ocupa la misma posición en la

matriz **S**. De esta manera se obtiene otra matriz del mismo orden, a la que señalamos con la letra ***M***, donde cada elemento representará las ventas que realizó cada vendedor en los dos días en cada uno de los turnos.

La operación realizada se denomina ***adición de matrices***.

Supón que A y B son dos matrices del mismo tamaño. Por lo tanto, la suma A+B es otra matriz, obtenida al sumar cada elemento de A con el elemento que ocupa la misma posición en B.

En el caso de la tienda de ropa deportiva, la matriz M resulta:

$$M=\begin{pmatrix}300 & 700\\ 400 & 900\\ 500 & 800\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}500 & 900\\ 700 & 1000\\ 400 & 800\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}800 & 1600\\ 1100 & 1900\\ 900 & 1600\end{pmatrix}$$

A partir de la matriz ***M***, podemos concluir que:

* ***Durante el turno de la mañana***, Ernesto vendió en total, por los dos días, ***800*** nuevos soles; Fabiola vendió en total ***1 100*** nuevos soles, y Andrés, ***900*** nuevos soles.

* ***Durante el turno de la tarde***, Ernesto vendió en total, en los dos días, ***1 600*** nuevos soles; Fabiola vendió en total ***1 900*** nuevos soles, y Andrés ***1 600*** nuevos soles.

NOTAS:

* Para sumar dos matrices , el orden de ambas debe ser igual.

* La suma se denota $A+B=(a_{ij}\ b_{ij})$ y la matriz resultante será del mismo orden que la matriz ***A***.

I) ADICIÓN DE MATRICES :

Con dos matrices de un mismo orden se puede formar una nueva matriz, cuyos elementos se obtiene sumando las componentes correspondientes de las matrices (elementos homólogos).

Así si $A=(a_{ij})_{m\times n}$ y $B=(b_{ij})_{m\times n}$ la suma de ***A*** y ***B*** es la matriz ***A + B*** de orden $m\times n$ obtenida al sumar los elementos correspondientes de ***A*** y ***B***. La matriz ***A + B*** de $m\times n$ está dada por:

$$A+B=\left[a_{ij}+b_{ij}\right]=\begin{bmatrix}a_{11}+b_{11} & a_{12}+a_{12} \ldots & a_{1n}+b_{1n}\\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \ldots & a_{2n}+b_{2n}\\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} \ldots & a_{mn}+b_{mn}\end{bmatrix}$$

* La suma de matrices se puede efectuar si los sumandos tienen igual orden.

* Las matrices $\begin{bmatrix}x & y & z\\ n & m & p\end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ por ser del mismo orden se pueden sumar.

* En cambio, las matrices $\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\\ e & f\end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}$ por ser de diferente orden no se pueden sumar.

EJEMPLO:

* Sean:

$$A=\begin{bmatrix}4 & -1\\ 1 & 5\\ 3 & 2\end{bmatrix};\quad B=\begin{bmatrix}-5 & 6\\ 3 & 2\\ 2 & -4\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A+B=\begin{bmatrix}4-5 & -1+6\\ 1+3 & 5+2\\ 3+2 & 2-4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 5\\ 4 & 7\\ 5 & -2\end{bmatrix}$$

PROPIEDADES DE LA ADICIÓN DE MATRICES

Si ***A***, ***B***, ***C*** y ***0*** son matrices del mismo orden, además ***0*** representa la matriz nula , entonces:

1) ***A+B=B+A*** .... ***(Ley conmutativa)***

2) ***(A+B)+C=A+(B+C)*** ... ***(Ley asociativa)***

3) ***A+0=0+A=A*** .... ***(Elemento neutro aditivo)***

4) ***A+(–A)= 0*** .... ***(Inverso aditivo)***

* La primera propiedad indica que se obtienen los mismos resultados cualquiera sea el orden en que se sumen las matrices **A** y **B**.

EJEMPLO:

$$M=\begin{bmatrix}3 & 7 & 1\\ 4 & 9 & 3\\ 5 & 8 & 2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}6 & 9 & 2\\ 5 & 4 & 7\\ 1 & 0 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6 & 9 & 2\\ 5 & 4 & 7\\ 1 & 0 & 3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3 & 7 & 1\\ 4 & 9 & 3\\ 5 & 8 & 2\end{bmatrix}$$

* De igual modo, la segunda propiedad indica que, para sumar tres matrices, se pueden sumar las dos primeras y luego la tercera, o agregar a la primera la suma de la segunda y tercera matriz.

EJEMPLO:

$$\left(\begin{pmatrix}1 & 3\\ 4 & 7\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}8 & 2\\ 3 & 9\end{pmatrix}\right)+\begin{pmatrix}4 & 5\\ 6 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 4 & 7\end{pmatrix}+\left(\begin{pmatrix}8 & 2\\ 3 & 9\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4 & 5\\ 6 & 2\end{pmatrix}\right)$$

* La matriz nula , sumada con cualquier otra matriz **A**, da como resultado la misma matriz **A**.

EJEMPLO:

$$\begin{pmatrix}3 & 9 & 1\\ 4 & 1 & 3\\ 5 & 8 & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3 & 9 & 1\\ 4 & 1 & 3\\ 5 & 8 & 2\end{pmatrix}$$

SUSTRACCIÓN DE MATRICES:

(Caso particular de la adición)

Si A y B son matrices del mismo orden, entonces $A-B$ es la matriz en la que cada elemento es la resta de los elementos de la misma fila y columna de A y B.

* Si A y B son del mismo tamaño:

Osea: $A-B=A+(-1)B \qquad A-B=[a_{ij}-b_{ij}]_{m\times n}$

MULTIPLICACIÓN DE MATRICES

A) MULTIPLICACIÓN DE UN ESCALAR POR UNA MATRIZ

Dados una matriz $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ y un esclar k, el producto de k y A es la matriz.

$$kA=\begin{bmatrix} ka_{11} & .... & ka_{1n} \\ ka_{21} & .... & ka_{2n} \\ ka_{m1} & .... & ka_{mn} \end{bmatrix}$$

donde cada elemento de A se multiplica por el escalar k entonces el resultado es la matriz kA del mismo orden que A.

Sea: $A=(a_{ij})_{m\times n} \Rightarrow kA=(ka_{ij})_{m\times n} / k\in \mathbb{R}$

EJEMPLOS:

* Multipliquemos a la matriz $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 6 & 7 & -2 \end{pmatrix}$ por el escalar (-2):

$$(-2)\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 6 & 7 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3(-2) & 2(-2) & 4(-2) \\ 6(-2) & 7(-2) & -2(-2) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -6 & -4 & -8 \\ -12 & -14 & 4 \end{pmatrix}$$

* Si: $A=\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ y $k=3$, entonces:

$$3A=3\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3(2) & 3(7) \\ 3(3) & 3(1) \end{pmatrix}\Rightarrow 3A=\begin{pmatrix} 6 & 21 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}$$

B) MULTIPLICACIÓN DE UNA MATRIZ FILA POR UNA MATRIZ COLUMNA:

Sean las matrices:

$$A=(a_1\ a_2\ a_3 .... a_n);\ B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow A\times B=(a_1\times b_1+a_2\times b_2+...+a_n\times b_n)=\sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

EJEMPLO:

* Sean:

$$A=(1\ 3\ 2);\ B=\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow A\times B=1\times 4+3(-2)+2\times 5=8$$

Nótese que la operación hay que hacerla multiplicando la fila por la columna; cada elemento de la fila se multiplica por el correspondiente de la columna y, a continuación, se suman los productos obtenidos .Esta operación se llama ***producto escalar*** de la fila por la columna.

OBSERVACIÓN:

* El producto se define sólo si los vectores filas y columnas contienen el mismo número de elementos.

* Del producto de estas matrices resulta un escalar.

* El producto entre matriz se calcula multiplicando los elementos correspondientes de las dos matrices y haciendo la suma algebraica.

EJEMPLO:

Multiplicar:

$$AB=(2\quad -3)\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}=(2)(3)+(-3)(4)=(-6)$$

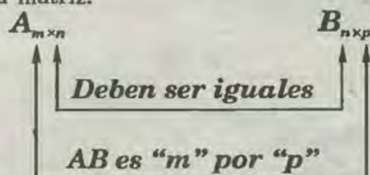
C) MULTIPLICACIÓN DE DOS MATRICES:

Dados dos matrices $A=(a_{ij})_{m\times n}$; $B=(b_{jk})_{n\times p}$ existe una tercera matriz $C=(c_{ik})_{m\times p}$ que representa el producto de multiplicar las matrices A y B; donde c_{ik} es el producto de multiplicar la fila i de la primera matriz por la columna "k" de la segunda matriz.

Es decir:

$$A\times B=(c_{ik})_{m\times p} / c_{ik}=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\times b_{jk}$$

* La multiplicación de la matriz A y la matriz B existe si y sólo si el número de columnas de la primera matriz es igual al número de filas de la segunda matriz.



REGLA DE CÁLCULO:

Si $AB=C$, un elemento de la matriz de producto será igual al producto de la fila i de la matriz A y de

la columna j de la matriz B (ver la figura).

$$\begin{pmatrix} \blacksquare \\ \blacksquare \\ i\ \blacksquare \\ \vdots \\ \blacksquare \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \blacksquare & \overset{j}{\blacksquare} & \cdots & \blacksquare \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} & \overset{j}{\vdots} & \\ \cdots & c_{ij} & \cdots \\ & \vdots & \end{pmatrix}$$

EJEMPLO 1:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}_{2\times 2} \begin{pmatrix} 2\times 4+1\times 6 \\ 3\times 4+5\times 6 \end{pmatrix} \Rightarrow AB=\begin{pmatrix} 14 \\ 42 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}_{2\times 1}$$

EJEMPLO 2:

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20+1 & 24+3 \\ 15+2 & 18+6 \end{pmatrix} \Rightarrow AB=\begin{pmatrix} 21 & 27 \\ 17 & 24 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

* Nótese que para obtener el producto AB se multiplica cada fila de A por todas y cada una de las columnas de B.

EJEMPLO 3:

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}_{2\times 2} \qquad B=\begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}_{2\times 3}$$

$$\to C=A\times B=\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \end{pmatrix}$$

$C_{11}=3\times 4+2(-1)=10$ $\quad C_{21}=(-1)(4)+4(-1)=-8$

$C_{12}=3\times 3+2\times 2=13$ $\quad C_{22}=(-1)(3)+4\times 2=5$

$C_{13}=3\times 1+2\times 2=7$ $\quad C_{23}=(-1)(1)+4\times 2=7$

* Entonces: $A\times B=\begin{pmatrix} 10 & 13 & 7 \\ -8 & 5 & 7 \end{pmatrix}$

EJEMPLO 4:

* Si: $R=\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $S=(2\ \ 3)$, calcular $R\,S$.

RESOLUCIÓN:

* Como R es de orden 3×1 y S de 1×2, el producto $R\,S$ tiene orden 3×2.

$$R\,S=\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}(2\ \ 3)=\begin{pmatrix} 3(2) & 3(3) \\ 1(2) & 1(3) \\ 2(2) & 2(3) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$$

EJEMPLO 5:

Si $M=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ y $N=\begin{pmatrix} -2 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$, calcular $M\,N$.

RESOLUCIÓN:

* Observa que M es una matriz de 2×2 y N una matriz de 2×3, por lo que $M\,N$ es una matriz de 2×3.

$$M\,N=\begin{pmatrix} (-2+9) & (5+12) & (1+0) \\ (-10+6) & (25+8) & (5+0) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 & 17 & 1 \\ -4 & 33 & 5 \end{pmatrix}$$

EJEMPLO 6:

Calcular $A\,B$ y $B\,A$ si: $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$

RESOLUCIÓN:

$$AB=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -6 & 16 \\ 1 & 9 \end{pmatrix}$$

$$BA=\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -4 & -7 \\ -6 & 7 \end{pmatrix}$$

* Observa que, aunque ambos productos AB y $B\,A$ están definidos, $AB\neq BA$.

PROPIEDADES DE LA MULTIPLICACIÓN DE MATRICES

EJEMPLO:

Sea: $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Calcular ABC.

RESOLUCIÓN:

* Agrupando BC se obtiene:

$$A(BC)=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$$

$$=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 & -5 \\ -14 & 11 \end{pmatrix}$$

* Agrupar ahora AB:

$$(AB)C=\left(\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ -11 & -4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 & -5 \\ -14 & 11 \end{pmatrix}$$

* Observa que : $A(BC) = (AB)C$

EJEMPLO:

Sea $A=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

* Efectuar:

$$A(B+C)=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 12 & 8 \end{pmatrix}$$

* Ahora, efectuar:

$$AB+AC=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 12 & 8 \end{pmatrix}$$

* Por tanto, $A(B+C)=AB+AC$.

Desde luego que un ejemplo no constituye una demostración; sin embargo nos hace pensar que; aunque el producto de matrices no es conmutativo, si es asociativo y distributivo con respecto a la suma.

A continuación se darán dos resultados que se pueden demostrar:

1) Si A es una matriz de $m\times n$, B una matriz de $n\times p$ y C una matriz de $p\times q$, entonces:

$(A\,B)\,C=A(BC)$........... ***(Ley asociativa)***

2) La multiplicación de matrices es distributiva con respecto a la adición. Para cualesquiera matrices **A, B** y **C** de tamaños apropiados se tiene:

I) $A(B+C)=AB+AC$ *II)* $(B+C)A=BA+CA$

PROPIEDADES:

Sean **A, B** y **C** matrices para los cuales están definidas las operaciones de adición y multiplicación k y r escalares.

1) $k(A+B)=kA+kB$

2) $(k+r)A=kA+rA$

3) $k(rA)=(kr)A$

4) $A(BC)=(AB)C$

5) $A(B+C)=AB+AC$

6) $AB=0$ *no implica que* $A=0 \vee B=0$

7) $AB=AC$ *no implica que* $B=C$

8) En general "AB" no es necesariamente igual a "BA"

DEFINICIONES:

1) Si $AB=BA$ se dice que A y B son matrices conmutativas.

2) Si $AB=-BA$ se dice que A y B son matrices anticonmutativas.

TEOREMAS SOBRE TRAZA:

Sean las matrices cuadradas **A** y **B** del mismo orden y λ un escalar.

I) $Traz(A\pm B) = Traz(A)\pm Traz(B)$

II) $Traz(\lambda\times A)=\lambda Traz(A)$

III) $Traz(AB)=Traz(BA)$

III) POTENCIACIÓN DE LA MATRICES :

Sea A una matriz cuadrada de orden $k\in N$ definimos:

$$A^n=\begin{cases} 1\ ;\ n=0 & ;A\doteq 0 \\ A;\ n=1 \\ \underbrace{A\cdot A\cdot A\ldots A}_{\text{"n" veces}};\ n\in N;\ n\geq 2 \end{cases}$$

EJEMPLO:

Sea: $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, calcular A^n

* Por inducción:

$$A^1=A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^2=A\times A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3=A^2\times A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^4=A^3\times A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$A^n=\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

PROPIEDADES:

La potenciación de matrices es ***conmutativa***. De donde se tendrá.

I) Si **A** es una matriz cuadrada

$\Rightarrow A^m\times A^n=A^n\times A^m/m;n\in N$

II) Si A y B conmutan $\Rightarrow A^m$ y B^n conmutan siendo m, n naturales.

III) Si A es una matriz cuadrada $(A^m)^n = A^{mn} = (A^n)^m; m; n \in N$

IV) $AI = IA = A$

V) $I^n = I$

VI) $(A \pm B)^T = A^T \pm B^T$

VII) $(A^T)^T = A$

VIII) $(\lambda A)T = \lambda AT$; λ es un escalar

IX) $(AB)^T = B^T \times A^T$

MATRICES RELACIONADAS CON LA POTENCIACIÓN

1) MATRIZ INVOLUTIVA :

Una matriz cuadrada es involutiva si su cuadrado es la matriz identidad ($A^2 = I$).

* Sea la matriz A_n:

$$\boxed{A \text{ es involutiva} \Rightarrow A^2 = I_n}$$

EJEMPLO:

* Si:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A^2 = I \Rightarrow A \text{ es involutiva}$$

2) MATRIZ NILPOTENTE :

Una matriz cuadrada A se dice nilpotente si y sólo si $A^n = 0$, para algún $n \in N$.

EJEMPLO:

$$\text{* Si: } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A^3 = 0$$

3) MATRIZ IDEMPOTENTE :

Una matriz cuadrada es idempotente si su cuadrado es la misma matriz.

Sea la matriz A_n: $\boxed{A^2 = A}$

EJEMPLO:

* Sea:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow A^2 = A \times A = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

* Obteniéndose que $A^2 = A$

* Luego diremos que A es una matriz idempotente.

4) MATRIZ REAL :

Es aquella matriz cuyos elementos son reales

$$A = \left[a_{ij}\right]_{n \times m} ; a_{ij} \in \mathbb{R} \Rightarrow A = \overline{A}$$

5) MATRIZ CONJUGADA :

Es aquella matriz donde sus elementos son el conjugado de los elementos de otra matriz

$$A = \left[a_{ij}\right]_{n \times m} \Rightarrow \overline{A} = \overline{a_{ij}}_{\,n \times m}$$

6) MATRIZ HERMITIANA :

Dada una matriz cuadrada de elementos complejos se llama hermitiana si dicha matriz es igual a la transpuesta de su matriz conjugada, es decir:

Sea $A = (a_{ij})_{n \times n}$ es hermitiana si $A = \left(\overline{a_{ij}}\right)^T_{n \times n}$. De donde se concluye que los elementos de la diagonal principal son necesariamente reales.

EJEMPLO:

Sea la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 3+i \\ 3-i & 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overline{A} = \begin{pmatrix} 6 & 3-i \\ 3+i & 2 \end{pmatrix}$$

$$(\overline{A})^T = \begin{pmatrix} 6 & 3+i \\ 3-i & 2 \end{pmatrix}$$

* Como $(\overline{A})^T = A \Rightarrow A$ es una matriz hermitiana.

7) MATRIZ ANTIHERMITIANA :

Una matriz cuadrada de elementos complejos se llama antihermitiana si es igual al negativo de la transpuesta de su matriz conjugada.

* Es decir:

$$\text{Si: } A = (a_{ij})_{n \times n} \wedge (\overline{A})^T = -\left(\left(\overline{a_{ij}}\right)\right)^T_{n \times n}$$

$\Rightarrow A$ es antihermitiana

De donde se concluye que los elementos de la diagonal principal son ceros.

EJEMPLO:

$$\text{* Sea: } A = \begin{pmatrix} 0 & 1+6i \\ -1+6i & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \overline{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1-6i \\ -1-6i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (\overline{A})^T = \begin{pmatrix} 0 & -1-6i \\ 1-6i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (\overline{A})^T = (-1)\begin{pmatrix} 0 & 1+6i \\ -1+6i & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow (\overline{A})^T = -A$$

* Luego se dirá que la matriz A es antihermitiana.

OBSERVACIONES:

Sea A una matriz cuadrada de elementos complejos.

I) $A+(\overline{A})^T$ es hermitiana

II) $A-(\overline{A})^T$ es antihermitiana

III) Toda matriz cuadrada de elementos complejos se puede escribir como la adición de una matriz hermitiana y otra antihermitiana.

$$A=\underbrace{\frac{A+(\overline{A})^T}{2}}_{hermitiana}+\underbrace{\frac{A-(\overline{A})^T}{2}}_{antihermitiana}$$

8) MATRIZ ESCALONADA :

Una matriz $A=(a_{ij})_{m\times n}$ es una matriz z escalonada si el número de ceros aumenta de fila a fila.

EJEMPLOS:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} & \pi \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 & 0 & e & \sqrt{3} & \sqrt{2} \\ 0 & 2 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

¡ RESUMEN !

* En matemáticas, una **matriz** es una tabla de números consistente en cantidades abstractas que pueden sumarse y multiplicarse. Las matrices se utilizan para describir sistemas de ecuaciones lineales, realizar un seguimiento de los coeficientes de una aplicación lineal y registrar los datos que dependen de varios parámetros. Las matrices se describen en el campo de la teoría de matrices. Pueden sumarse, multiplicarse y descomponerse de varias formas, lo que también las hace un concepto clave en el campo del álgebra lineal.

* Cuando el número de filas es igual al de columnas $(n = m)$ la matriz se llama *matriz cuadrada*.

* Cuando $n = 1$ la matriz se llama *matriz fila*.

* Cuando $m = 1$ la matriz se llama *matriz columna*.

* Las matrices fila y columna se llaman habitualmente *vectores*.

* Cuando en una matriz cuadrada son ceros todos los elementos que no estan en la *diagonal principal* (la que va desde el ángulo superior izquierdo al ángulo inferior derecho) la matriz se llama *matriz diagonal*.

* Si una matriz diagonal tiene todos los términos de la diagonal iguales se llama *matriz escalar*.

* Si una matriz diagonal tiene todos los términos de la diagonal iguales a *1* se llama *matriz unidad*.

* Las matrices cuadradas en las que $a_{ij} = 0$ siempre que $i > j$ o bien $a_{ij} = 0$ siempre que $i < j$ se llaman *matrices triangulares*.

* Para sumar dos matrices tienen que tener las mismas dimensiones. Para sumar dos matrices se suman los elementos que ocupan las mismas posiciones

* Para multiplicar un número por una matriz, se multiplica cada elemento de la matriz por el número.

* Para multiplicar dos matrices es indispensable que el número de columnas de la primera matriz sea igual al número de filas de la segunda matriz.

* Dada una matriz, su traspuesta es la formada al disponer la fila *1* como columna *1*, la fila **2** como columna 2... la fila n como columna n.

* La traspuesta de la matriz A se designa por A^t

HISTORIA :

El origen de las matrices es muy antiguo. Un cuadrado mágico, 3 por 3, se registra en la literatura china hacia el 650 a. C.

Es larga la historia del uso de las matrices para resolver ecuaciones lineales. Un importante texto matemático chino que proviene del año 300 a. C. a 200 a. C., *Nueve capítulos sobre el Arte de las matemáticas* (*Jiu Zhang Suan Shu*), es el primer ejemplo conocido de uso del método de matrices para resolver un sistema de ecuaciones simultáneas. En el capítulo séptimo, «*Ni mucho ni poco*», el concepto de determinante apareció por primera vez, dos mil años antes de su publicación por el matemático japonés Seki Kowa en 1683 y el matemático alemán Gottfried Leibniz en 1693.

Los «cuadrados mágicos» eran conocidos por los matemáticos árabes, posiblemente desde comienzos del siglo VII, quienes a su vez pudieron tomarlos de los matemáticos y astrónomos de la India, junto con otros aspectos de las matemáticas combinatorias. Todo esto sugiere que la idea provino de China. Los primeros «cuadrados mágicos» de orden 5 y 6 aparecieron en Bagdad en el 983, en la *Enciclopedia de la Hermandad de Pureza* (*Rasa'il Ihkwan al-Safa*).

Después del desarrollo de la teoría de determinantes por Seki Kowa y Leibniz, a finales del siglo XVII, Cramer presentó en 1750 la ahora denominada regla de Cramer. Carl Friedrich Gauss y Wilhelm Jordan desarrollaron la eliminación de Gauss-Jordan en el siglo XIX.

El término «matriz» fue acuñado en 1848, por J. J. Sylvester. En 1853, Hamilton hizo algunos aportes a la teoría de matrices. Cayley introdujo en 1858 la notación matricial, como forma abreviada de escribir un sistema de *m* ecuaciones lineales con *n* incógnitas. Grassmann, Frobenius y von Neumann están entre los matemáticos famosos que trabajaron sobre la teoría de matrices

Olga Taussky-Todd (1906 –1995), durante la II Guerra Mundial, usó la teoría de matrices para investigar el fenómeno de aeroelasticidad llamado *fluttering*.

Las matrices son utilizadas ampliamente en la computación, por su facilidad y liviandad para manipular información. En este contexto, son la mejor forma para representar grafos, y son muy utilizadas en el cálculo numérico.

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1:

Si A y B son iguales:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 5 & a & 3 \\ (b-1) & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} (c-3) & 4 & 0 \\ 5 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & d \end{pmatrix}$$

Calcular: $a+b+c+d$

A) 8 B) 9 C) 12 D) -1 E) 6

RESOLUCIÓN:

* Como A y B son iguales, entonces el elemento "a" que está en la segunda fila y segunda columna en la matriz A, es igual al elemento 0 que ocupa igual posición en la matriz B.
* De igual forma: $b-1=0$, entonces $b=1$
* También $c-3=0$, entonces $c=3$ y $d=2$
* Se pide: $a+b+c+d=0+1+3+2=6$

RPTA: "E"

PROBLEMA 2:

Dadas la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & m & -1 \\ 3 & 2 & n \end{pmatrix}$ y la matriz B de orden 2×3 en donde $b_{ij}=2i-j$, hallar m y n si se sabe que A y B son matrices iguales.

A) 1 y -1 B) 0 y 1 C) 2 y - 2
D) 4 y 3 E) 8 y 9

RESOLUCIÓN:

* Primero hallaremos los elementos de la matriz:

$$B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix}$$

$b_{11}=2(1)-1=1$; $b_{21}=2(2)-1=3$
$b_{12}=2(1)-2=0$; $b_{22}=2(2)-2=2$
$b_{13}=2(1)-3=-1$; $b_{23}=2(2)-3=1$

* De donde: $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

* Ahora, como $A=B$, entonces $m=0$ y $n=1$.

RPTA: "B"

PROBLEMA 3:

Dadas las matrices:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}; \ B=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}; \ C=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Calcular: $S=3A-2B+C$

A) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ B) $\begin{pmatrix} 3 & -7 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$ C) $\begin{pmatrix} 7 & 13 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$ D) I

RESOLUCIÓN:

* Reemplazando las matrices:

$$S=3\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}-2\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

* Efectuando:

$$S=\begin{bmatrix} 3 & 12 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow S=\begin{bmatrix} 5 & 12 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\rightarrow S=\begin{bmatrix} 7 & 13 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$$

RPTA: "C"

PROBLEMA 4:

Considere las matrices

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}; \ B=\begin{pmatrix} 2 & b \\ b & c \end{pmatrix} \text{ y } M=\begin{pmatrix} 2b+1 & 1 \\ 2c & a \end{pmatrix}$$

Si $A+B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, entonces el valor de la $traz(M)$ es:

A) -1 B) $-\frac{1}{2}$ C) 0 D) $\frac{1}{2}$ E) 1

RESOLUCIÓN:

* De: $A=\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \wedge B=\begin{pmatrix} 2 & b \\ b & c \end{pmatrix}$

$$\rightarrow A+B=\begin{pmatrix} a+2 & 2b \\ b & 2c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\rightarrow a+2=1 \wedge 2b=0 \wedge b=0 \wedge 2c=1$

$\rightarrow a=-1 \wedge b=0 \wedge c=\frac{1}{2}$

* Reemplazando en : $M=\begin{pmatrix} 2b+1 & 1 \\ 2c & a \end{pmatrix}$

$\rightarrow M=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow Traz(M)=1-1=0$

RPTA: "C"

PROBLEMA 5:

Sean las matrices:

$$A=\begin{pmatrix} x-3y & x \\ 1 & y \end{pmatrix}; \ B=\begin{pmatrix} 2 & 6-x \\ 1 & 6-x \end{pmatrix}; \ C=\begin{pmatrix} -4 & -8 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Si $A=B$, hallar $3A+2C$

A) $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$ B) $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$ C) $\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}$ D) $\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$

RESOLUCIÓN:

* Por dato:

$$A=B=\begin{pmatrix} x-3y & x \\ 1 & y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 6-y \\ 1 & 6-x \end{pmatrix}$$

* Entonces:
$$\begin{array}{l} x-3y=2 \\ 6-y=x \end{array} \Rightarrow \begin{cases} x=5 \\ y=1 \end{cases}$$

* Luego: $A=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

* Nos piden:
$$3A+2C=3\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}+2\begin{pmatrix} -4 & -8 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & 15 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -8 & -16 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$$

RPTA: "D"

PROBLEMA 6:

Sean las matrices: $A=\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}$ y $B=\begin{bmatrix} 2 & b \\ b & c \end{bmatrix}$ si se cumple que $A+B=I$, donde $I=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Hallar $a+b+2c$.

A) –1 B) –1/2 C) 0 D) 1/2 E) 1

RESOLUCIÓN:

* De: $A+B=1$
$$\Rightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 2 & b \\ b & c \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix} a+2 & 2b \\ b & 2c \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

* Luego: $a+2=1 \Rightarrow a=-1$

$b=0 \quad 2c=1 \Rightarrow c=\dfrac{1}{2}$

* Se pide: $-1+0+2\left(\dfrac{1}{2}\right)=0$

RPTA: "C"

PROBLEMA 7:

Si se tiene: $M=\sum_{k=1}^{10}\begin{pmatrix} k & 4 \\ 1 & -2k \end{pmatrix}$ Calcular: ***Traza(M)***

A) –55 B) 55 C) 45 D) 15 E) 4

RESOLUCIÓN:

* Desarrollando la sumatoria:
$$M=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -6 \end{pmatrix}-\ldots\ldots-\begin{pmatrix} 10 & 4 \\ 1 & -20 \end{pmatrix}$$
$$\to M=\begin{pmatrix} 1+2+3+\ldots+10 & 10(4) \\ 10(1) & -2(1+2+3+\ldots+10) \end{pmatrix}$$
$$\to M=\begin{pmatrix} \dfrac{10\times 11}{2} & 40 \\ 10 & 2\left(\dfrac{10\times 11}{2}\right) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 55 & 40 \\ 10 & -110 \end{pmatrix}$$

* Se pide: ***Traza (M) = 55 + (–110) = –55***

RPTA: "A"

PROBLEMA 8:

Si A y B son dos matrices definidas por:
$$A=\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$$
$$B=A+2A+3A+\ldots\ldots+nA,(n\in N)$$
Entonces, la suma de los elementos de la matriz B es:

A) 0 B) 1 C) $n(n+1)$ D) $2n(n+1)$

RESOLUCIÓN:

* Se deduce que:
$$B=(1+2+3+\ldots\ldots+n)A$$
$$\to B=\frac{n(n+1)}{2}\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -n(n+1) & 0 \\ 2n(n+1) & -n(n+1) \end{pmatrix}$$

* Se pide: $-n(n+1)+2n(n+1)+0+[-n(n+1)]=0$

RPTA: "A"

PROBLEMA 9:

Para toda matriz $A=(a_{ij})_{n\times m}$ se define
$$e^A=I+\frac{A}{1!}+\frac{A^2}{2!}+\frac{A^3}{3!}+\frac{A^4}{4!}+\ldots$$
Si $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, entonces la suma de todos los elementos de la matriz e^A es:

A) $\dfrac{15}{2}$ B) $\dfrac{13}{2}$ C) $\dfrac{11}{2}$ D) $\dfrac{9}{2}$ E) $\dfrac{7}{2}$

RESOLUCIÓN:

* De:
$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\to A^2=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$A^3=A^2\times A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\to A^3=0 \to A^4=A^5=\ldots\ldots=0$$

* Luego: $e^A=I+\dfrac{1}{1!}A+\dfrac{1}{2!}A^2$
$$e^A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\to e^A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

* De donde la suma de elementos de e^A es: $5+\frac{3}{2}=\frac{13}{2}$

RPTA: "B"

PROBLEMA 10:

Dado el polinomio: $f_{(x)}=3x^2-5x-2$ y además:

$A=\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 1\end{bmatrix}$. Hallar: $f_{(A)}$, e indicar su traza.

A) 0 B) -14 C) 28 D) -1 E) 7

RESOLUCIÓN:

* Reemplazando el valor: $x=A$, en el polinomio y la identidad 1 del polinomio por I (matriz identidad).

$$f_{(A)} = 3A^2 - 5A - 2I$$

* Calculamos:

$$A^2=A\times A=\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7 & 4\\6 & 7\end{bmatrix}$$

* Luego:

$$f_{(A)}=3\begin{bmatrix}7 & 4\\6 & 7\end{bmatrix}-5\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 1\end{bmatrix}-2\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\to f_{(A)}=\begin{bmatrix}21 & 12\\18 & 21\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-5 & -10\\-15 & -5\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-2 & 0\\0 & -2\end{bmatrix}$$

* Sumando las matrices:

$$f(A)=\begin{bmatrix}14 & 2\\3 & 14\end{bmatrix}\to Traza(f_{(A)})=14+14=28$$

RPTA: "C"

PROBLEMA 11:

Dado: $P(x)=x^2+x-1 \wedge A=\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}$

Calcular: $traza(P(A))$.

A) 3 B) 4 C) 2 D) 1 E) 5

RESOLUCIÓN:

* De: $P_{(A)}=A^2+A-1$

$$\to P(A)=\begin{pmatrix}2 & 2\\2 & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 3\\3 & 2\end{pmatrix}$$

$$\to Traz(P_{(A)})=2+2=4$$

RPTA: "B"

PROBLEMA 12:

Si A es una matriz triangular inferior:

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 7-p & q+3\\p+1 & 2 & m\\q & 1 & m+3\end{bmatrix}; \text{ calcular: } m+p+q$$

A) 1 B) -2 C) 7 D) 0 E) 4

RESOLUCIÓN:

* Si A es una matriz triangular inferior, entonces:

$7-p=0 \quad \to p=7$

$q+3=0 \quad \to q=-3$

$m=0$

* Se pide: $0+7+(-3)=4$

RPTA: "E"

PROBLEMA 13:

Si la matriz:

$$A=\begin{pmatrix}x & x+2y & 10\\5 & 2y & 3z+x\\2y+3z & 7 & 3z\end{pmatrix}$$

es simétrica, calcular $Traza(A)$

A) 12 B) 11 C) -10 D) 0 E) - 1

RESOLUCIÓN:

* Por simetría respecto a la diagonal, se obtiene (espejo):

$$\begin{aligned}x+2y&=5\\2y+3z&=10\\3z+x&=7\\\hline 2x+4y+6z&=22\end{aligned}$$

Sumando Miembro a miembro

$$\to x+2y+3z=11$$

* Se pide: $Traza(A)=x+2y+3z=11$

RPTA: "B"

PROBLEMA 14:

Si A es una matriz antisimétrica definida por

$A=\begin{pmatrix}a-b & d & c\\a & b+1 & -4\\e & 4 & c-2\end{pmatrix}$, entonces el valor de

$T=a+b+c+d+e$ es:

A) -1 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

RESOLUCIÓN:

* Como se traza de una matriz antisimétrica, entonces: $A=-A^T$

$$\to\begin{pmatrix}a-b & d & c\\a & b+1 & -4\\e & 4 & c-2\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}a-b & a & e\\d & b+1 & 4\\c & -4 & c-2\end{pmatrix}$$

* De donde se aprecia que:

$a-b=-(a-b) \quad \to a=b$

$a=-d$

$c=-e$

$b+1=-(b+1) \quad \to b=-1$

$c-2=-(c-2) \quad \to c=2$

* Se pide :

$a+b+c+d+e=-1+(-1)+2+1+(-2)=-1$

RPTA: "A"

PROBLEMA 15:

Si A y B son matrices de orden $n\times n$, entonces hallar el valor de verdad de las siguientes afirmaciones:

I) Si $A^2=I$, entonces $A=I$, $A=(a_{ij})_{n\times m}$

II) $(mA+nB)^T=mA^T+nB^T$; m y $n\in R$

III) $traz(A\times B)=traz(A)\times traz(B)$

A) FFF B) VVV C) VVF D) FVF E) VFV

RESOLUCIÓN:

I) FALSA: ya que tenemos el siguiente contra ejemplo:

Sea: $A\cdot A^{-1}=I$ ....(*ver matriz inversa*)

* Haciendo: $A^{-1}=A\rightarrow A^2=I$, y no necesariamente: $A=I$

II) VERDADERO: por propiedades:

$$(mA+nB)^T=(mA)^T+(nB)^T=mA^T+nB^T$$

III) FALSA: porque si: $B=A^{-1}$, entonces:

$$AB=I,\text{ y }\underbrace{traz(AB)=traz(I)=n}_{\text{no siempre es así}}$$

RPTA: "D"

PROBLEMA 16:

Definamos la matriz $A_n=\begin{pmatrix}1 & 1/2^n\\ 0 & 1\end{pmatrix}$. Entonces la matriz $B=A_1A_2A_3...A_nA_{n+1}....$ es: (Atención: nótese que n crece indefinidamente)

A) $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ B) $\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$ C) $\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}$ D) $\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$

RESOLUCIÓN:

* Calculando "B":

$$B=\underbrace{\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&\frac{1}{4}\\0&1\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}1&\frac{1}{8}\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&\frac{1}{16}\\0&1\end{pmatrix}....\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2^n}\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2^{n+1}}\\0&1\end{pmatrix}...$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix}1&\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&\frac{1}{8}\\0&1\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}1&\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\right)\\0&1\end{pmatrix}......$$

$$B=\begin{pmatrix}1&\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+....+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^{n+1}}+....\right)\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&\dfrac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}\\0&1\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow B=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$$

RPTA: "B"

PROBLEMA 17:

Sea $N=\begin{pmatrix}0&-\alpha\\ \alpha&0\end{pmatrix}$, entonces N^5 es:

A) $\begin{pmatrix}\alpha^5&0\\0&\alpha^5\end{pmatrix}$ B) $\begin{pmatrix}0&-\alpha^5\\ \alpha^5&0\end{pmatrix}$ C) $\begin{pmatrix}\alpha^5&0\\0&-\alpha^5\end{pmatrix}$ D) $\begin{pmatrix}0&\alpha^5\\-\alpha^5&0\end{pmatrix}$

RESOLUCIÓN:

* Primero:

$$N^2=\begin{pmatrix}0&-\alpha\\ \alpha&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-\alpha\\ \alpha&0\end{pmatrix}=-\alpha^2\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow N^2=-\alpha 2I\rightarrow N^5=\alpha^4I\times N$$

$$\rightarrow N^5=\alpha^4N\quad\rightarrow N^5=\begin{pmatrix}0&-\alpha^5\\ \alpha^5&0\end{pmatrix}$$

RPTA: "B"

PROBLEMA 18:

Si A es una matriz definida por $A=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$ y $B=A+A^3+A^5+....A^{19}-A^{20}$, entonces el valor de la traza de B^t es:

A) 1 B) 2 C) – 10 D) – 20 E) – 2

RESOLUCIÓN:

* Primero:

$$A^2=A\times A=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=I$$

$$\rightarrow A^3=A^2\times A=I\times A=A$$

$$\rightarrow A^4=A^3\times A=A\times A=A^2=I$$

* De donde:

$$A^n=\begin{cases}I\ ;\ n\ par\\ A;\ n\ impar\end{cases}$$

* Luego:

$$B=\underbrace{A+A+A+....+A}_{10\ sumandos}-I=10A-1$$

$$\rightarrow B=10\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&10\\10&-1\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow B^t=\begin{pmatrix}-1&10\\10&-1\end{pmatrix}\rightarrow traz(B^t)=-1-1=-2$$

RPTA: "E"

PROBLEMA 19:

Hallar la potencia enésima de la matriz: $A=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}$

E indicar la suma de sus elementos.

A) n^2 B) $n(n+1)$ C) $n+1$ D) $n+2$ E) n^3

RESOLUCIÓN:

* Primero:

$$A^2=A\times A=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix}$$

$$A^3=A^2\times A=\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&3\\0&1\end{bmatrix}$$

$$A^4=A^3\times A=\begin{bmatrix}1&3\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&4\\0&1\end{bmatrix}$$

* Así sucesivamente, se deduce que:

$$A^n=A^{n-1}\times A=\begin{bmatrix}1 & n\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

* Se pide: $1+0+n+1=n+2$

RPTA: "D"

PROBLEMA 20:

Si $A=(a_{ij})_{3\times 2}$ tal que $a_{ij}=\begin{cases} i-j\ ;\forall\, i<j\\ ij\ ;\forall\, i=j\\ i+j;\forall\, i>j\end{cases}$

Entonces, el valor de la traz $(A\times A^T)$ es:

A) – 3 B) 12 C) 24 D) 49 E)68

RESOLUCIÓN:

* Tabulando, se obtiene:

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 3 & 4\\ 4 & 5\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow A\times A^t=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 3 & 4\\ 4 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3 & 4\\ -1 & 4 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -1 & -1\\ -1 & 25 & 32\\ -1 & 32 & 41\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow Traz(A\times A^t)=2+25+41=68$$

RPTA: "E"

PROBLEMA 21:

Si A, B y C son matrices cuadradas del mismo orden, entonces indicar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I) Si $AB=AC$, entonces $B=C$

II) Si $AB=O$, entonces $A=O$ ó $B=O$

III) Si $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$, entonces las matrices A y B son conmutables.

A) VFV B) FFV C) VVV D) FVV E)VVF

RESOLUCIÓN:

I) **FALSA:** ya que de: $AB-AC=0\rightarrow A(B-C)=0$, no necesariamente $B-C=0\rightarrow B=C$

II) **FALSA:** ya que si $AB=0$, puede que ambas sean no nulas (propiedad)

III) **VERDADERA:** ya que de:

$(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$

$\rightarrow A^2+AB+BA+B^2=A^2+2AB+B^2$

$\rightarrow AB+BA=2AB\rightarrow BA=2AB-AB$

$\rightarrow BA=AB\rightarrow A$ y B son conmutables

RPTA: "B"

PROBLEMA 22:

Sean A y B dos matrices definidas por $A=\begin{pmatrix}0 & i\\ 0 & 0\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}w & o\\ 0 & w^2\end{pmatrix}$ tal que $w=\sqrt[3]{1}$ y $w\neq 1$, entonces al efectuar la siguiente operación matricial $(A^8+B^6)(A^4+B^3)(A^{12}+B^9)$ se obtiene:

A) 4I B) 6I C) I D) 9I E) 18I

RESOLUCIÓN:

* De:

$$A^2=\begin{pmatrix}0 & i\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & i\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\rightarrow A^2=0$$

$$\rightarrow A^3=A^4=A^5=.....=0$$

* De:

$$B=\begin{pmatrix}w & 0\\ 0 & w^2\end{pmatrix};\ w^3=1\ \wedge\ w^!1$$

$$B^2=\begin{pmatrix}w & 0\\ 0 & w^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}w & 0\\ 0 & w^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}w^2 & 0\\ 0 & w\end{pmatrix}$$

$$B^3=B^2\times B=\begin{pmatrix}w^2 & 0\\ 0 & w\end{pmatrix}\begin{pmatrix}w & 0\\ 0 & w^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=I$$

$$\rightarrow B^6=B^9=B^{12}=.....=B^{3k}=I$$

* Luego:

$$(A^8+B^6)(A^4+B^3)(A^{12}+B^9)=(B^6)(B^3)(B^9)=I\cdot I\cdot I=I$$

RPTA: "C"

PROBLEMA 23:

Dadas las matrices:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & -1 & 2\\ 3 & 2 & 1 & -2\\ 4 & 2 & 0 & -3\end{bmatrix};\ B=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 0 & -1\\ 2 & 2\\ 1 & 0\end{bmatrix}$$

Calcular "AB"

RESOLUCIÓN:

$$A_{3\times 4}\times B_{4\times 2}=C_{3\times 2}=\begin{bmatrix}C_{11} & C_{12}\\ C_{21} & C_{22}\\ C_{31} & C_{32}\end{bmatrix}$$

$$C_{11}=[1\ \ 0\ \ -1\ \ 2]\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 2\\ 1\end{bmatrix}=1+0-2+2=1$$

$$C_{12}=[1\ \ 0\ \ -1\ \ 2]\begin{bmatrix}3\\ -1\\ 2\\ 0\end{bmatrix}=3+0-2+0=1$$

$$C_{21}=[3\ \ 2\ \ 1\ \ -2]\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 2\\ 1\end{bmatrix}=3+0+2-2=3$$

$$C_{22}=[3\ \ 2\ \ 1\ -2]\begin{bmatrix}3\\-1\\2\\1\end{bmatrix}=9-2+2+0=9$$

$$C_{31}=[4\ \ 2\ \ 0\ -3]\begin{bmatrix}1\\0\\2\\1\end{bmatrix}=4+0+0-3=1$$

$$C_{32}=[4\ \ 2\ \ 0\ -3]\begin{bmatrix}3\\-1\\2\\0\end{bmatrix}=12-2+0+0=10$$

* Finalmente la matriz "**C**" resultante es:

$$AB=C=\begin{bmatrix}1&1\\3&9\\1&10\end{bmatrix}$$

PROBLEMA 24:

Dos tiendas T_1 y T_2 reciben diariamente televisores y videocaseteras de dos fábricas F_1 y F_2. Las recepciones o ventas se representan como sigue:

$$\begin{matrix} & TV & VIDEO \\ F_1 & 40 & 50 \\ F_2 & 70 & 80\end{matrix}$$

El precio en dólares, por artefacto eléctrico en cada tienda es:

$$\begin{matrix} & T_1 & T_2 \\ Precio\times TV & 200 & 250 \\ Precio\times Video & 300 & 280\end{matrix}$$

Se pide determinar, los ingresos de la segunda tienda por vender los electrodomésticos que proviene de la fábrica F_2.

A) 23 000 B) 24 000 C) 38 000 D) 39 900 E) 40 000

RESOLUCIÓN:

$$\begin{matrix} & TV & VIDEO \\ F_1 & 40 & 50 \\ F_2 & 70 & 80\end{matrix} \qquad \begin{matrix} & T_1 & T_2 \\ Precio\times TV & 200 & 250 \\ Precio\times Video & 300 & 280\end{matrix}$$

(N° unidades) (Precio) = Ingreso

$$\begin{pmatrix}40&50\\70&80\end{pmatrix}\begin{pmatrix}200&250\\300&280\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c_{11}&c_{12}\\c_{21}&c_{22}\end{pmatrix}$$

* Donde C_{ij} es el ingreso de la tienda j por vender los productos que provienen de la fábrica i. Se pide c_{22}.

$$c_{22}=(70\ 80)\begin{pmatrix}250\\280\end{pmatrix}=70\times250+80\times280\rightarrow c_{22}=39\,900$$

RPTA: "D"

PROBLEMA 25:

El 1° de Julio, la cantidad de acciones propiedad de Carlos y José está dada por la matriz:

$$A=\begin{matrix}Carlos\\José\end{matrix}\begin{bmatrix}2000&1000&500&5000\\1000&500&2000&0\end{bmatrix}$$

(columnas: x, y, z, w)

y los respectivos precios al cierre de x, y, z y w fueron **\$ 24, \$ 47, \$ 47, \$ 150** y **\$ 14** la acción. Hallar los valores del total de las acciones de cada uno en esta fecha.

RESOLUCIÓN:

* Sea:

$$B=\begin{bmatrix}24\\47\\150\\14\end{bmatrix}\rightarrow AB=\begin{matrix}Carlos\\José\end{matrix}\begin{bmatrix}2000&1000&500&5000\\1000&500&2000&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}24\\47\\150\\14\end{bmatrix}$$

$$\rightarrow AB=\begin{bmatrix}240\,000\\347\,500\end{bmatrix}\begin{matrix}Carlos\\José\end{matrix}$$

* El 1° de Julio las acciones de Carlos valían **\$ 240 000** y de José **\$ 347 500.**

PROBLEMA 26:

Dadas las matrices:

$$C=\begin{bmatrix}2&4\\-1&-2\end{bmatrix}\text{ y }D=\begin{bmatrix}4&0\\0&1\end{bmatrix}$$

hallar A^4, donde $A=C+D$.

RESOLUCIÓN:

* Tenemos $A^4=(A^2)^2=((C+D)^2)^2=(C^2+CD+DC+D^2)^2$, notemos que:

$$C^2=0\text{ y }D^2=\begin{bmatrix}16&0\\0&1\end{bmatrix}$$

* Como:

$$CD=\begin{bmatrix}8&4\\-4&-2\end{bmatrix}\text{ y }DC=\begin{bmatrix}8&16\\-1&-2\end{bmatrix}$$

$$\rightarrow CD+DC=\begin{bmatrix}16&20\\-5&-4\end{bmatrix}$$

* Luego:

$$A^4=\left(\begin{bmatrix}16&20\\-5&-4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}16&0\\0&1\end{bmatrix}\right)^2$$

$$\rightarrow A^4=\begin{bmatrix}32&20\\-5&-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}32&20\\-5&-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}924&580\\-145&-91\end{bmatrix}$$

PROBLEMA 27:

Sean las matrices $A=\begin{bmatrix}4&-2\\6&2\end{bmatrix}$ y $B=\begin{bmatrix}p&2\\q&10\end{bmatrix}$ son matrices conmutables . calcular el valor de la $Traz(A+B)$

A) 12 B) 20 C) 21 D) 24 E) 0

RESOLUCIÓN:

* Si A y B son matrices conmutables, se cumple que: $AB=BA$

$$\rightarrow \begin{bmatrix}4 & -2\\6 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p & 2\\q & 10\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}p & 2\\q & 10\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & -2\\6 & 2\end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix}4p-2q & 8-20\\6p+2q & 12+20\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4p+12 & -2p+4\\4q+60 & -2q+20\end{bmatrix}$$

* Identificando:

$-12=-2p+4 \rightarrow p=8$

$32=-2q+20 \rightarrow q=6$

* Entonces:

$$A=\begin{bmatrix}4 & -2\\6 & 2\end{bmatrix} \quad B=\begin{bmatrix}8 & 2\\-6 & 10\end{bmatrix}$$

* Se pide:

$$Traz(A+B)=Traz(A)+Traz(B)=6+18=24$$

RPTA: "D"

PROBLEMA 28:

Considere la matriz $A=(a_{ij})_{2\times 2}$, tal que $traz(A)=0$

$a_{12}+a_{21}=0 \qquad a_{11}=5 \qquad a_{21}=-4$

Si n es un número par entero positivo , entonces la matriz A^n es:

A) $9^{n}I$ B) $9^{n/2}I$ C) $9^{n/4}I$ D) $9^{n/8}I$ E) $9^{n/10}I$

RESOLUCIÓN:

* Reconstruyendo la matriz, se obtendrá:

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 4\\-4 & -5\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow A^2=\begin{pmatrix}5 & 4\\-4 & -5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5 & 4\\-4 & -5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9 & 0\\0 & 9\end{pmatrix}=9I$$

$$\rightarrow A^4=(A^2)(A^2)=(9I)(9I)=9^2I$$

$$\rightarrow A^6=(A^4)(A^2)=(9^2I)(9I)=9^3I$$

* De donde se deduce que: $A^n=9^{\frac{n}{2}}\times I$

RPTA: "B"

PROBLEMA 29:

Sea $A=(a_{ij})_{3\times 3}$; tal que $a_{ij}=\begin{cases}i+j; & i\neq j\\ ij \; ; & i=j\end{cases}$ entonces el valor de la traz (A^2) es:

A) 190 B) 194 C) 198 D) 200 E) 202

RESOLUCIÓN:

* Tabulando, se obtiene:

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\a_{21} & a_{22} & a_{23}\\a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 3 & 4\\3 & 4 & 5\\4 & 5 & 9\end{pmatrix}$$

$$A^2=\begin{pmatrix}1 & 3 & 4\\3 & 4 & 5\\4 & 5 & 9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3 & 4\\3 & 4 & 5\\4 & 5 & 9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_{11} \text{ ....} & & \\ \text{.....} & b_{22} \text{ ....} & \\ \text{............} & & b_{33}\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow b_{11}=(1\ 3\ 4)\begin{pmatrix}1\\3\\4\end{pmatrix}=1+9+16=26$$

$$b_{22}=(3\ 4\ 5)\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}=9+16+25=50$$

$$b_{33}=(4\ 5\ 9)\begin{pmatrix}4\\5\\9\end{pmatrix}=16+25+81=122$$

* Luego: $Traz(A^2)=b_{11}+b_{22}+b_{33}$

$$\rightarrow Traz(A^2)=26+50+122=198$$

RPTA: "C"

PROBLEMA 30:

Si $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\-1 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}$, entonces la matriz $M=2A^{10}+3B^{10}$ es equivalente a:

A) $\begin{pmatrix}5 & 0\\0 & 5\end{pmatrix}$ B) $\begin{pmatrix}5 & 30\\20 & 5\end{pmatrix}$ C) $\begin{pmatrix}5 & 30\\-20 & 5\end{pmatrix}$

D) $\begin{pmatrix}5 & -30\\20 & 5\end{pmatrix}$ E) $\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$

RESOLUCIÓN:

* Aplicando un razonamiento inductivo, se deduce que:

$$A^{10}=\begin{pmatrix}1 & 0\\-10 & 1\end{pmatrix} \text{ y } B^{10}=\begin{pmatrix}1 & 10\\0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow M=2A^{10}+3B^{10}=2\begin{pmatrix}1 & 0\\-10 & 1\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}1 & 10\\0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow M=\begin{pmatrix}5 & 30\\-20 & 5\end{pmatrix}$$

RPTA: "C"

PROBLEMA 31:

Si P, Q y X son matrices cuadradas de orden 3×3 tal que $P=\begin{pmatrix}1 & y+z & 0\\-2 & 5 & z\\y & z & 3\end{pmatrix}$ es simétrica, $Q=(q_{ij})_{3\times 3}$

$q_{ji}=2j-i$ si $i<j$ es antisimétrica.

Que satisfagan la siguiente ecuación matricial $2P-P^T+Q+Q^T=X+3P$, entonces la $TRAZ(X)$ es:

A) -18 B) -14 C) 0 D) 14 E) 18

RESOLUCIÓN:

* Como P es simétrica $\to P^T=P$
* Además Q es antisimétrica $\to Q^T=-Q$
* De: $2P-P^T+Q+Q^T=X+3P$

$\to X=-P-P^T+Q+Q^T$

$\to X=-P-P+Q-Q \to X=-2P$

$\to Traz(X)=Traz(-2P)=-2Traz(P)$

* Como: $Traz(P)=1+5+3=9$

$\to Traz(X)=-18$

RPTA: "A"

PROBLEMA 32:

Indicar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I) Si $(AB)^T$ es una matriz columna, entonces A es una matriz fila.

II) Si $(AB-A^TB)C$ es una matriz cuadrada de orden n, entonces cada matriz tiene que ser cuadrada de orden n.

III) Si $A=(a_{ij})_{n\times n}$ tal que $A=2A-A^T$, entonces la $traz(A)=0$

A) VVF B) FFV C) FVV D) FFF E) VFF

RESOLUCIÓN:

I) VERDADERA: $(AB)^T=C_{m\times 1} \to AB=C^T_{1\times m}$

$\to A_{p\times n}\times B_{n\times m}=(C^T)_{p\times m} \to p=1$

$\to A_{1\times m}$ ***es una matriz fila***

II) FALSA: $(AB-A^TB)C=(A-A^T)BC$

$A_{m\times n}-(A^T)_{n\times m}$ existe $\leftrightarrow m\times n$

* Es decir A es cuadrada de orden n.

$\to (A-A^T)_{n\times n}\times B_{n\times p}\times C_{p\times n}=D_{n\times n}$

* De donde $B\wedge C$ no necesariamente son matrices cuadradas.

III) FALSA : A es cuadrada de orden n tal que $A=2A-A^T \to A^T=A \to A$ es una matriz simétrica $\to Traz(A)$ no necesariamente es igual a 0.

RPTA: "E"

PROBLEMA 33:

Sean A, B y C matrices definidas por:

$$A=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$$

Determinar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I) $\exists n\in N / A^n=I$ *II)* $\exists m\in N / B^m=O$

III) $\forall n\in N / C^n=\begin{pmatrix}n&n\\n&n\end{pmatrix}$

A) VVV B) VVF C) VFV D) FVV E) FVF

RESOLUCIÓN:

I) VERDADERA: ya que:

$$A^2=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\to A^2=I$$

$\to \exists n=2\in N/A^n=I$

II) VERDADERA: puesto que:

$$B^2=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\to B^2=0$$

$\to \exists m=2\in N/B^m=0$

III) FALSA: Dado que:

$$C^2=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&2\\2&2\end{pmatrix}$$

$$C^3=C^2C=\begin{pmatrix}2&2\\2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&4\\4&4\end{pmatrix}$$

$\to$ no es cierto que : $\forall n\in N$: $C^n=\begin{pmatrix}n&n\\n&n\end{pmatrix}$

RPTA: "B"

PROBLEMA 34:

Sea A una matriz definida por $A=\begin{pmatrix}1&1\\2&3\end{pmatrix}$ tal que satisface la ecuación $AX=A^T$ y B es otra matriz que satisface la ecuación $B^T=X^T+A$, entonces indicar el valor de verdad de las siguientes afirmaciones:

I) $Traz(B)=7$

II) El elemento b_{12} de la matriz B es 5.

III) B es una matriz triangular inferior

A) VVF B) FFV C) VFV D) VVV E) FVF

RESOLUCIÓN:

* Sea: $X=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1\\2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\1&3\end{pmatrix}$

$\to \begin{pmatrix}a+c&b+d\\2a+3c&2b+3d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\1&3\end{pmatrix}$

$\to a+c=1;\ b+d=2\quad 2a+3c=1;\ 2b+3d=3$

$\to a=2\wedge c=-1\wedge b=3\wedge d=-1 \to X=\begin{pmatrix}2&3\\-1&-1\end{pmatrix}$

$B^T=X^T+A\to (B^T)^T=(X^T+A)^T$

$\to B=X+A^T=\begin{pmatrix}2&3\\-1&-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&2\\1&3\end{pmatrix}\to B=\begin{pmatrix}3&5\\0&2\end{pmatrix}$

* Luego:

I) FALSA II) VERDADERA III) FALSA

RPTA: "E"

PROBLEMA 35:

Si X es una matriz que satisface la siguiente ecuación matricial.

$$X\times\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -3 & 2\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

Entoncés, la suma de todos los elementos de la matriz X es:

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

RESOLUCIÓN:

* Sea: $X=\begin{pmatrix}a & b & c\\ d & e & f\end{pmatrix}$, entonces:

$$\begin{pmatrix}a & b & c\\ d & e & f\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -3 & 2\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

* Efectuando:

$$\begin{pmatrix}a & -a+b-c & c\\ d & -d+e-f & f\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -3 & 2\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow a=1 \wedge b=0 \wedge c=2$$
$$d=0 \wedge e=0 \wedge f=1$$

* Luego: $a+b+c+d+e+f=4$

RPTA: "C"

PROBLEMA 36:

San x_1 y x_2 las raices de la ecuación $x^2+x+1=0$ y A es una matriz definida por:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & x_1 & x_2\\ 1 & x_2 & x_1\end{pmatrix}$$

Si $M=A^{4n}, n\in Z^+$; entonces la afirmación correcta es:

A) $M=I$ B) $M=3^{-n}I$ C) $M=3^{2n}I$ D) $M=3^n A$

RESOLUCIÓN:

* Multiplicando, se obtiene:

$$A^2=\begin{pmatrix}3 & 1+x_1+x_2 & 1+x_1+x_2\\ 1+x_1+x_2 & 1+x_1^2+x_2^2 & 1+2x_1x_2\\ 1+x_2+x_1 & 1+2x_1x_2 & 1+x_2^2+x_1^2\end{pmatrix}$$

* Pero por propiedades de la ecuación cuadrática, se tiene que: $x_1+x_2=-1;\ x_1x_2=1;\ x_1^2+x_2^2=-1$

* Entonces:

$$A^2=\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 3\\ 0 & 3 & 0\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow A^3=A^2\times A=\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 3\\ 0 & 3 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & x_1 & x_2\\ 1 & x_2 & x_1\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow A^3=\begin{pmatrix}3 & 3 & 3\\ 3 & 3x_2 & 3x_1\\ 3 & 3x_1 & 3x_2\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & x_2 & x_1\\ 1 & x_1 & x_2\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow A^4=A^3\times A=3\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & x_2 & x_1\\ 1 & x_1 & x_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & x_1 & x_2\\ 1 & x_2 & x_1\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow A^4=3\begin{pmatrix}3 & 1+x_1+x_2 & 1+x_1+x_2\\ 1+x_1+x_2 & 1+2x_1x_2 & 1+x_2^2+x_1^2\\ 1+x_1+x_2 & 1+x_1^2+x_2^2 & 1+2x_1x_2\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow A^4=3\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}=3^2.I$$

* Luego: $M=A^{4n}=(A^4)^n=(3^2.I)^n \rightarrow M=3^{2n}.I$

RPTA: "C"

PROBLEMA 37:

Sean las matrices:

$$A=\begin{bmatrix}2 & -3 & -5\\ -1 & 4 & 5\\ 1 & -3 & -4\end{bmatrix};\ B=\begin{bmatrix}-1 & 3 & 5\\ 1 & -3 & -5\\ -1 & 3 & 5\end{bmatrix};\ C=\begin{bmatrix}2 & -2 & -4\\ -1 & 3 & 4\\ 1 & -2 & -3\end{bmatrix}$$

Donde: $AB=BA=0$, $AC=A$, $CA=C$

Hallar: ACB; CBA; A^2+B^2; $(A+B)^2$

RESOLUCIÓN:

I) Cálculo de ACB: $ACB=(AC)B=(A)B=AB=0$

II) Cálculo de CBA: $CBA=C(BA)=C(0)=0$

III) Cálculo de A^2+B^2:

* Por dato: $AC=A$ y $CA=C \Rightarrow A$ y C son idempotentes $\Rightarrow A^2=A$. Por otro lado se comprueba que $B^2=B$ es idempotente.

* Por lo tanto:

$$A^2+B^2=A+B=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=I_3$$

IV) Cálculo de $(A+B)^2$:

* De $(A+B)^2=(A+B)(A+B)=I_3 I_3=I_3$

PROBLEMA 38:

Si A es una matriz cuadrada de orden n tal que $A^k=0$ y se define la matriz:

$B=I+3A+6A^2+10A^3+15A^4+\ldots k$ términos; $k\in N$, entonces la matriz B es:

A) $I-A^{k-1}$ B) $kA-I$ C) 0 D) $(I-A)^{-3}$ E) $(I-A)^3$

RESOLUCIÓN:

* De:

$$B = I + 3A + 6A^2 + 10A^3 + ...$$

$$AB = A + 3A^2 + 6A^3 + 10A^4 + ...$$

$$B - AB = I + 2A + 3A^2 + 4A^3 + ... + \underbrace{KA^{K-1}}_{se\ reduce}$$

$$A(B - AB) = A + 2A^2 + 3A^3 + 4A^4 + ...$$

$$B - AB - A(B - AB) = I + A + A^2 + A^3 + ... + A^{K-1}$$

$$A[B - AB - A(B - AB)] = A + A^2 + A^3 + ... + A^K$$

$$B - AB - A(B - AB) - A[B - AB - A(B - AB)] = I$$

* Al reducir, se obtiene:

$$(I - A)^2B - A(I - A)^2B = I$$

$$(I - A)(I - A)^2B = I \rightarrow (I - A)^3 \cdot B = I$$

$$\rightarrow B = (I - A)^{-3}$$

RPTA: "D"

PRIMERA PRACTICA DIRIGIDA

01 $\begin{pmatrix} x-1 & z+3 \\ y & 2w-1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$

son iguales. Calcular: $(x+w)^{(y+z)}$

A) 81 B) 64 C) 16 D) 25 E) 32

02 Sea la matriz: $A = (a_{ij})_{2\times 3}$ donde: $a_{ij} = i + j$

Calcular la suma de los elementos de dicha matriz

A) 19 B) 20 C) 21 D) 22 E) 23

03 Si se cumple: $(a_{ij})_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}$

obtener: $\sqrt{a_{12} + a_{21} + a_{22}}$

A) 5 B) $\sqrt{5}$ C) 6 D) $\sqrt{6}$ E) 3

04 A partir de:

$$\begin{pmatrix} a & 2 \\ b & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & c \\ 2 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$$

calcular: $a + b + c + d$

A) 15 B) 5 C) 10 D) 20 E) 25

05 La siguiente matriz:

$$\begin{pmatrix} a & m-1 & n-2 \\ q+1 & b & p-3 \\ r+2 & s+3 & c \end{pmatrix}$$

es la matriz identidad. Calcular: $abc+mnp+qrs$

A) 0 B) 1 C) 35 D) 36 E) 37

06 Proporcionar la suma de los elementos de AB, si:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} ; \ B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A) 18 B) 23 C) 43 D) 29 E) 36

07 Sea: $A = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$

Determinar A^2

A) $7I$ B) $-7I$ C) $7\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

D) $-7\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ E) $7\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

08 Si se cumple

$$\begin{pmatrix} -1 & m \\ n & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 4p \\ 2q & -3 \end{pmatrix}$$

calcular: $-mn - pq$

A) 0 B) −12 C) 12 D) −13 E) 13

09 Dada: $A = \begin{pmatrix} m & -4 \\ 9 & n \end{pmatrix}$

Cumpliéndose que $A^2 = 0$

calcular: $m.n$

A) −18 B) −36 C) 72 D) 36 E) 6

10 Si se cumple

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

calcular: $x+y+z$

A) 0 B) 1 C) 2 D) −2 E) −1

11 Si las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} x & 1 \\ y & 5 \end{pmatrix}$$

son conmutables , calcular: $2x+3y$

A) −1 B) 1 C) 0 D) 5 E) −5

12 Proporcionar la traza de:

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 3 & 2 & 1 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix}^2$$

A) 4 B) −4 C) 0 D) 8 E) −8

13 Según la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

determinar A^2

A) θ B) A C) –A D) I E) –I

14 Si tenemos la matriz $A=\begin{pmatrix} Sen\theta & Cos\theta \\ Cos\theta & -Sen\theta \end{pmatrix}$

determinar el valor de verdad en:

( ) A^2 es la matriz nula.

( ) $A^3 = A$

( ) $A^T = A$

A) VVV B) FVV C) VFF D) VFV E) FVF

15 Dadas las matrices:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \text{ y } B=\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

hallar X en : $(A-B)^T+X=2(B^T+A)$

A) $\begin{pmatrix} -12 & -8 \\ 21 & -6 \end{pmatrix}$ B) $\begin{pmatrix} -12 & 8 \\ -21 & 6 \end{pmatrix}$ C) $\begin{pmatrix} 10 & -8 \\ 19 & -7 \end{pmatrix}$

D) $\begin{pmatrix} -11 & 9 \\ -17 & 7 \end{pmatrix}$ E) $\begin{pmatrix} -13 & 10 \\ 19 & -8 \end{pmatrix}$

16 Sea la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

Obtener A^n

A) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$ B) $\begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & 0^{2^n} \end{pmatrix}$ C) $\begin{pmatrix} 2n & 0 \\ 0 & 0^{2^n} \end{pmatrix}$

D) $\begin{pmatrix} n^2 & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$ E) $\begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & 2^{n+1} \end{pmatrix}$

17 Si **A, B** y **C** son matrices cuadradas y se cumplen:

$$A = BC$$
$$A + B = I$$

hallar: $AC - C$

A) θ B) I C) –I D) A E) –A

18 Determinar: $(A + B)(A - B)$ si: $A^2 = B^2 = I$

$$AB=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$BA=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

A) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ B) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ C) $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

D) $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ E) $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$

19 Sea: $P(x)=3x^2+4x+5$ Señalar: $Traz(P(A))$

$$Si : M=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

A) –10 B) –20 C) 30 D) 15 E) –25

20 Dada la matriz:

$$M=\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{pmatrix}$$

hallar : $Traz(M.M^T)$

A) 3abc B) $a^2+b^2+c^2$ C) $ab+bc+ac$

D) $3(a^2+b^2+c^2)$ E) $3(ab+bc+ac)$

SEGUNDA PRACTICA DIRIGIDA

01 Dada la matriz:

$$A=\begin{bmatrix} 3 & -6 & 5 & -2 \\ 4 & -7 & 6 & -3 \\ 5 & -8 & 7 & -4 \end{bmatrix}$$

Hallar: $a_{13}+a_{21}+a_{34}$

A) 4 B) 5 C) 7 D) 8 E) 9

02 Determinar la matriz:

$$B=(b_{ij})_{2\times3} \qquad b_{ij}=i+j$$

A) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

D) $\begin{bmatrix} 3 & 4 & 3 \\ 5 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

03 Determinar la traza:

$$A=\begin{bmatrix} 3-x & 5 \\ 6 & x+6 \end{bmatrix}$$

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 9

04 Dada la matriz:

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \\ -1 & 6 \end{bmatrix}$$

Determinar: A^t

A) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 5 & 4 & 2 \end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 3 & 4 & 6 \end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & -1 \end{bmatrix}$

D) $\begin{bmatrix} 5 & 4 & -1 \\ 2 & 3 & 6 \end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix} 5 & -1 & 4 \\ 6 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

05 Dada la matriz simétrica :

$$\begin{bmatrix} 7 & -3 & a \\ b & -1 & 4 \\ 5 & c & 2 \end{bmatrix}$$

Hallar: "$a+b-c$".

A) 10 B) 6 C) 4 D) 12 E) 8

06 Siendo:

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix};\ B=\begin{bmatrix} 7 & 5 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$$

Hallar: "$A+B$"

A) $\begin{bmatrix} 10 & 9 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix} 8 & 8 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix} 11 & 8 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$

D) $\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix} 10 & 1 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$

07 Sean:

$$A=\begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 \\ -1 & 5 & 2 \end{bmatrix};\ B=\begin{bmatrix} -5 & 3 & -2 \\ 6 & 2 & -4 \end{bmatrix}$$

Hallar: "$A-B$".

A) $\begin{bmatrix} 9 & -2 & 1 \\ -7 & 3 & 6 \end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix} -1 & 4 & 5 \\ 5 & 7 & -2 \end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix} 9 & 4 & 5 \\ 7 & 7 & 6 \end{bmatrix}$

D) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 6 & 7 & 6 \end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$

08 Sea:

$$A=(3\ 2\ 1);\ B=\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Hallar "$A\times B$".

A) 16 B) 14 C) 15 D) 11 E) 13

09 Dado:

$$B=\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix};\ A=\begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

Señalar: $3B+4A$

A) $\begin{bmatrix} 6 & -2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix} 6 & 9 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ D) $\begin{bmatrix} 7 & 29 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}$

10 Dada la matriz triangular superior:

$$A=\begin{bmatrix} 7 & b-1 & a+2 \\ a-2 & 6 & d-1 \\ b+3 & d-4 & 7 \end{bmatrix}$$

Hallar: "$a+b-d$"

A) –7 B) 3 C) –5 D) 4 E) –6

11 Si es una matriz escalar:

$$B=\begin{bmatrix} a-4 & 0 & 0 \\ 0 & b-2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Hallar: "ab"

A) 12 B) 6 C) 24 D) 18 E) 35

12 Calcular "$m-n$", si las matrices son iguales.

$$A=\begin{bmatrix} m-3n & m \\ 1 & n \end{bmatrix};\ B=\begin{bmatrix} 2 & 6 & -n \\ 1 & 6 & -m \end{bmatrix}$$

A) 4 B) 3 C) 2 D) 5 E) 1

13 Siendo: $A=\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

Hallar: $3A-12I$

A) $\begin{pmatrix} 12 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ B) $\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$ C) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ D) $\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$

14 Construir la matriz:

$$B=(b_{ij})_{2\times 3}\ /\ \begin{matrix} b_{ij}=i-j;\ si:\ i\geq j \\ b_{ij}=i+j;\ si:\ i<j \end{matrix}$$

A) $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 5 & 6 & 3 \end{pmatrix}$ B) $\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ C) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

D) $\begin{pmatrix} 7 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ E) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

15 Hallar: $(x-y)(z-w)$

Si: $\begin{pmatrix} 2x-z & w-y \\ z-x & w+y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & 5 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$

A) – 8 B) – 6 C) – 4 D) –10 E) – 12

16 Dados:

$$x=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix};\ y=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Si: $P_{(A;B)}=2A-B+3$

Determinar: $P_{(x;y)}$

A) $\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$ B) $\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ C) $\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

D) $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$ E) $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$

17 Dada la matriz "C", calcular: C^3-6C.

$$C=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

A) C B) 2C C) 2I D) 3I E) 4I

18 Si:

$$x+y=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix};\ x-y=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -4 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Hallar: "x".

A) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$ B) $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ C) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ D) $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

www.SIGLO21X

19 Hallar la suma de los elementos de "A" tal que:

$$A.\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$$

A) 5 B) -2 C) 0 D) 1 E) 3

20 Realizar: $\begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 4 & 15 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & 11 \\ 3 & 10 \end{pmatrix}$

A) $\begin{pmatrix} 41 & 112 \\ 73 & 194 \end{pmatrix}$ B) $\begin{pmatrix} 31 & 12 \\ 37 & 95 \end{pmatrix}$ C) $\begin{pmatrix} 47 & 110 \\ 72 & 19 \end{pmatrix}$

D) $\begin{pmatrix} 2 & 13 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$ E) $\begin{pmatrix} 111 & 40 \\ 70 & 190 \end{pmatrix}$

TAREA DOMICILIARIA

01 Sean las matrices:

$$A=\begin{pmatrix} x-2y & x \\ 3 & x-y \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} 2 & y+4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad C=\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Si: $A=B$, hallar "$A+3C$".

A) I_2 B) $2I_2$ C) $4I_2$ D) $-2I_2$ E) N.A.

02 Dada la matriz: $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

Hallar el valor de: $A^2 - 4A$.

A) I_2 B) $5I_2$ C) $3I_2$ D) $-2I_2$ E) N.A.

03 Si: $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$

Calcular "$x+y+z$".

A) -3 B) 6 C) 4 sD) 12 E) 8

04 Calcular "a", "b" y "c", si:

$$\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 11 & 4 \\ 5 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 21 \\ 15 & 14 \\ 8 & 19 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c-21 & a \\ b & a-10 \\ c-15 & c \end{pmatrix}$$

Señalar "$a+b-c$".

A) 25 B) 26 C) 27 D) 28 E) 29

05 Calcular el producto de:

$$M=\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -28 & 93 \\ 38 & -126 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Hallar la $Tr(M)$.

A) 1 B) -3 C) 5 sD) 0 E) N.A.

TERCERA PRACTICA DIRIGIDA

01 Construir la matriz:

$$A=\left[a_{ij}\right]_{2\times3} / \begin{matrix} a_{ij}=i+j; \ si: i \ge j \\ a_{ij}=ij; \ si: i < j \end{matrix}$$

A) $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 6 \end{bmatrix}$

D) $\begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 5 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix} 4 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 6 \end{bmatrix}$

02 Hallar: $(x-y)(z-w)$

Si: $\begin{bmatrix} 2x-z & w-y \\ z-x & w+y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$

A) 1 B) 2 C) 4 D) 6 E) 3

03 Dada:

$$A=\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Calcular: $3A - 2I$

A) $\begin{bmatrix} -5 & 6 & 3 \\ 9 & 4 & 3 \\ 3 & -6 & 0 \end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix} -5 & 4 & 1 \\ 7 & 4 & 1 \\ 1 & -8 & -2 \end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix} -5 & 6 & 1 \\ 9 & 4 & 2 \\ 1 & -6 & 0 \end{bmatrix}$

D) $\begin{bmatrix} -5 & 4 & 1 \\ 7 & 2 & 2 \\ 1 & -8 & -2 \end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$

04 Dados:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Si: $P_{(x,y)}=2x-y+3I$

Determinar: $P_{(A,B)}$

A) $\begin{bmatrix} 4 & 4 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix} 4 & 4 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$

D) $\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$

05 Dados:

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Determinar "AB"

A) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$

D) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$

06 Dada la matriz "A", calcular: A^3-6A.

$$A=\begin{bmatrix}2 & 2\\1 & 0\end{bmatrix}$$

A) A B) 2A C) 2I D) 3I E) 4I

07 Si:

$$X+Y=\begin{bmatrix}1 & 3\\2 & 1\\4 & -1\end{bmatrix} \quad X-Y=\begin{bmatrix}3 & -1\\-4 & -1\\2 & 3\end{bmatrix}$$

Hallar: X^t

A) $\begin{bmatrix}1 & 2 & 4\\3 & 1 & -1\end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix}-1 & 3 & 1\\2 & 1 & -2\end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix}2 & -1 & 3\\1 & 0 & 1\end{bmatrix}$

D) $\begin{bmatrix}-1 & -1 & 3\\3 & 0 & 2\end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\2 & -1 & 0\end{bmatrix}$

08 Hallar la suma de los elementos de "X" tal que:

$$X\times\begin{bmatrix}-2 & 1\\2 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & 5\\-4 & 0\end{bmatrix}$$

A) -2 B) 0 C) 1 D) 3 E) 5

09 Hallar la matriz inversa de: $A=\begin{bmatrix}8 & 2\\7 & 2\end{bmatrix}$

Señalar la traza de dicha matriz inversa.

A) 1 B) 2 C) 7 D) 5 E) 10

10 Hallar la matriz "X" que resuelve:

$$\begin{bmatrix}1 & 3\\2 & 1\end{bmatrix}\times X=\begin{bmatrix}11 & 4\\7 & 3\end{bmatrix}$$

Dar como respuesta la suma de sus elementos.

A) 2 B) 1 C) 3 D) 7 E) N.A.

11 Sean las matrices:

$$A=\begin{bmatrix}2x-1 & y\\3-y & 2\end{bmatrix};\ B=\begin{bmatrix}5-y & 2-x\\x+1 & 2\end{bmatrix} \text{ y } C=\begin{bmatrix}-2 & 5\\4 & -1\end{bmatrix}$$

Hallar $(A+C)$; si: $A=B$

A) $\begin{bmatrix}5 & 3\\3 & 1\end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix}5 & 3\\9 & 1\end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix}5 & 3\\9 & 1\end{bmatrix}$

D) $\begin{bmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{bmatrix}$ E) N.A.

12 Sean las matrices:

$$A=\begin{bmatrix}x-3y & x\\1 & y\end{bmatrix};\ B=\begin{bmatrix}2 & 6-y\\1 & 6-x\end{bmatrix} \text{ y } C=\begin{bmatrix}-4 & -8\\2 & 3\end{bmatrix}$$

Si: $A=B$; hallar: $(3A+2C)$

A) $\begin{bmatrix}-1 & -1\\7 & 9\end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix}-2 & 9\\6 & -9\end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix}-2 & -1\\7 & 6\end{bmatrix}$

D) $\begin{bmatrix}-2 & -1\\8 & 9\end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix}-2 & -1\\7 & 9\end{bmatrix}$

13 Sean las matrices:

$$A=\begin{bmatrix}2 & 3\\1 & 2\end{bmatrix} \text{ y } B=\begin{bmatrix}1 & -2 & 3\\4 & 1 & 2\end{bmatrix}$$

Hallar "AB"

A) $\begin{bmatrix}14 & -1 & 12\\9 & 0 & 7\end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix}11 & 0 & 12\\9 & 0 & 7\end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix}14 & -1 & 10\\9 & 0 & 1\end{bmatrix}$

D) $\begin{bmatrix}14 & -1 & 12\\9 & 0 & 8\end{bmatrix}$ E) N.A.

14 Hallar la matriz "A" de segundo orden tal que

$a_{22}=5$ y $A^2=\begin{bmatrix}7 & 7\\21 & 28\end{bmatrix}$ según ello

Hallar la suma de todos los elementos de la matriz "A"

A) 2 B) 1 C) 3 D) 11 E) N.A.

15 Hallar la matriz "X", que cumpla:

$$\begin{pmatrix}2 & 5\\1 & 3\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}4 & -6\\2 & 1\end{pmatrix}$$

Indicar: ***Traza(X)***

A) 2 B) 5 C) 8 D) 10 E) -2

16 Dada la matriz:

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\0 & 0 & 2\\3 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Calcular la suma de los elementos de: A^{40}

A) 6^{11} B) 6^{14} C) 6^{13} D) 6^{12} E) 6

17 Señalar el valor de verdad en cada caso:

I) Siempre $|AB|$ se puede calcular a través de $|A|$ y $|B|$.

II) $|A^n|=|A|^n$; $\forall n\in Z^+$

III) $|ABC|=|CBA|$ para "A", "B" y "C" de orden "n".

IV) $|KA|=K|A|$ para "K" escalar.

V) $|A^{-1}|=\dfrac{1}{|A|}$

18 Hallar los valores de "a", "b", "c" y "d" tal

$$A^t-A^2=\begin{pmatrix}a-2 & b+4\\2c-4 & \dfrac{3d-1}{2}\end{pmatrix} \quad A=\begin{pmatrix}2 & -1\\1 & 3\end{pmatrix}$$

Dar como respuesta "a+b+c+d"

A) 0 B) -1 C) 2 D) -2 E) 3

19 Dada la matriz:

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

Además: $P_{(x)}=x^2-5x\ 2$

Dar la suma de elementos de $P_{(A}$

A) 8 . B) – 6 C) – 4 D) 6 E) – 8

20 Dada la matriz:

$$A=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix}$$

Calcular la suma de elementos de "A^n"

A) 3.2^n B) 5.2^n C) 2.3^n D) 2^n E) 5.3^n

TAREA DOMICILIARIA

01 Escribir explicitamente la matriz A.

$$A=\left[a_{ij}\right]\in K_{3\times 2}/a_{ij}=i+2j$$

A) $\begin{bmatrix}3 & 5\\ 4 & 6\\ 5 & 7\end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix}3 & 7\\ 4 & 8\\ 5 & 9\end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix}5 & 7\\ 6 & 8\\ 7 & 9\end{bmatrix}$ D) $\begin{bmatrix}4 & 2\\ 0 & 0\\ 1 & 4\end{bmatrix}$ E) N.A.

02 Sean las matrices:

$$A=\begin{bmatrix}x-2y & x\\ 3 & x-y\end{bmatrix};\ B=\begin{bmatrix}2 & y+4\\ 3 & 4\end{bmatrix}$$

Hallar *(xy)*, si: A=B

A) 1 B) 2 C) 6 D) 12 E) N.A.

03 Si :

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & -2\end{bmatrix}\ \text{y}\ F_{(x)}=x^2-3x+2$$

Hallar la suma de elementos de la diagonal principal de $F_{(A)}$.

A) 2 B) 14 C) 16 D) 18 E) N.A.

04 Si:

$$\begin{bmatrix}0 & 1 & 2\\ 2 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8\\ 5\\ 3\end{bmatrix}$$

Hallar: $(x+y+z)$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 6 E) N.A.

05 Si la matriz:

$$\begin{pmatrix}1 & -y & 3\\ 2 & -1 & z\\ x & 5 & 6\end{pmatrix}$$

es simétrica. Hallar "$x-y+z$"

A) 6 B) 5 C) – 4 D) 10 E) 4

CUARTA PRACTICA DIRIGIDA

01 Calcular el producto:

$$(3\ \ -2\ \ 5)\times\begin{pmatrix}7\\ 9\\ 2\end{pmatrix}$$

A) 8 B) 9 C) 11 D) 13 E) 15

02 Hallar el valor de "x" si:

$$(1\ \ -3\ \ -3\ \ -1)\begin{pmatrix}x^3\\ x\\ x^2\\ 1\end{pmatrix}=(8)$$

A) 1 B) 3 C) 4 D) –2 E) 0

03 Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}0 & -\alpha\\ \alpha & 0\end{pmatrix}$ entonces A^4 tiene la forma:

A) $\begin{pmatrix}-\alpha^4 & 0\\ 0 & -\alpha^4\end{pmatrix}$ B) $\begin{pmatrix}\alpha^4 & 0\\ 0 & \alpha^4\end{pmatrix}$ C) $\begin{pmatrix}0 & \alpha^4\\ \alpha^4 & 0\end{pmatrix}$

D) $\begin{pmatrix}0 & -\alpha^4\\ -\alpha^4 & 0\end{pmatrix}$ E) $\begin{pmatrix}-\alpha^4 & 0\\ 0 & \alpha^4\end{pmatrix}$

04 Dadas las matrices:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -1 & 2 & 0\\ -1 & 2 & 3\end{pmatrix}\ \text{y}\ B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & -2 & 0\\ 1 & -2 & -3\end{pmatrix}$$

Hallar la traza *(AB)*

A) –14 B) –12 C) 36 D) –36 E) 10

05 Determinar $(A+B)^2$, sabiendo que:

$$A^2=\begin{pmatrix}3 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}\qquad B^2=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix}$$

$$AB=\begin{pmatrix}4 & -1\\ 2 & 3\end{pmatrix}\qquad BA=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -3 & 4\end{pmatrix}$$

Indicar como respuesta la suma de sus elementos:

A) 22 B) 18 C) 14 D) 26 E) 16

06 Dada la matriz: $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\\ 3 & 0 & 0\end{pmatrix}$ la suma de los elementos de A^{40} es:

A) 6^{40} B) 6^{20} C) 6^{15} D) 6^{10} E) 6^{14}

07 Sea la ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 5\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

donde X es una matriz cuadrada de orden 2. Hallar la suma de los elementos de la diagonal de la matriz **X**.

A) 1 *B) 5* *C) 8* *D) 10* *E) 15*

08 Sean las matrices: $A=\begin{pmatrix} x & 1 \\ -1 & y \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 4 & x \\ z & y \end{pmatrix}$ donde $x \neq 0,\ y \neq 0,\ z \neq 0$. Si AB es la matriz cero, hallar los valores de x, y, z.

A) 0, 1, 0 *B) 1, 1, 4* *C) −1, 1, 4*
D) 1, −1, 0 *E) 1, −1, −4*

09 Dada la matriz: $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, si $Ax=A'$.

Hallar "x"

A) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ B) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ C) $\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ D) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ E) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

10 Si A es una matriz de orden 2, tal que $a_{21}=3$: $a_{12}=1$ y $A^2=\begin{pmatrix} 7 & 7 \\ 21 & 28 \end{pmatrix}$. Hallar traza (A).

A) 7 *B) 5* *C) 2* *D) 35* *E) 74*

11 Calcula el producto:

$$(1\ \ 0\ \ 2\ \ -4)\times\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

A) 19 *B) −37* *C) −19* *D) 37* *E) −25*

12 Resuelve la ecuación:

$$(a^2\ \ a\ \ 1)\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}=(0)$$

A) S={−2;3} *B) S={2;−3}* *C) S={−2;−3}*
D) S={−2} *E) S{−3}*

13 Dadas las matrices:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 6 \end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcula la ***traza (AB)***

A) 28 *B) 58* *C) 48* *D) 40* *E) 38*

14 Dadas las matrices:

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix} 3 & -9 \\ 6 & 12 \\ 0 & 15 \end{pmatrix};\ C=\begin{pmatrix} 4 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcular d_{22}, si $D=\left(2A-\dfrac{1}{3}B\right)C$

A) 24 *B) 12* *C) −2* *D) −6* *E) 30*

15 Dado el polinomio: $P(x)=2x^{19}+2x-4$ y la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Halle la traza de: $P(A)$

A) −1 *B) 1* *C) 0* *D) 4* *E) −4*

16 Hallar la suma de los elementos de la matriz B donde: $B=A+A^2+A^3+.....+A^n;\ n>2;\ n \in N$

Siendo $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

A) $\dfrac{n(n-1)}{2}$ B) $n(n+1)$ C) $-n(n+1)$

D) $n(1-n$ E) $\dfrac{n(1-n)}{2}$

17 Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, entonces la suma de elementos de la matriz A^n es:

A) 3^n+2^n B) $2\cdot 3^n$ C) n^2+2^n D) 5^n+1 E) 2^n

18 Sea: $B=A+A^2+A^3+....+A^{200}$

Hallar la traza de B, si: $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

A) 200 *B) 300* *C) 400* *D) 500* *E) 600*

19 Sea: $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ y $A+I=K$, calcular: $K+A^{2002}$

A) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ B) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ C) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ D) $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ E) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

20 Hallar ab en:

$$\begin{pmatrix} 7 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 2 \\ 3 & 0 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 & 5 \\ 0 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 51 & 0 & 2 \\ 3 & 15 & 18 \\ 36 & 0 & -51 \end{pmatrix}$$

A) 64 *B) 2* *C) 15* *D) 7* *E) −66*

TAREA DOMICILIARIA

01 Realiza el siguiente producto:

$$(2\ \ -1\ \ 3)\times\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

A) (12) *B) (19)* *C) (23)* *D) (5)* *E) (16)*

02 Hallar el valor de "x" si:

$$(x\ \ 2\ \ 1)\times\begin{pmatrix} x \\ x \\ x \end{pmatrix}=(4)$$

Indicar el conjunto solución:

A) S={1} *B) S={-4}* *C) S={1;4}*
D) S={1;-4} *E) S={-1,4}*

03 Si: $A\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$

Calcular ***traza(A.B)***

A) -2 *B) 6* *C) 12* *D) 7* *E) -6*

04 Dadas las matrices: $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Si $AX=B$. Hallar la suma de los elementos de **X**.

A) -1 *B) 1* *C) 2* *D) 3* *E) 0*

05 Si $A=\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$. Hallar una fórmula para A^n.

Dar como respuesta ***traza(A)***.

A) $2a^n$ *B) a^n* *C) 0* *D) $3a^n$* *E) $4a^n$*

QUINTA PRACTICA DIRIGIDA

01 Si:

$$A^2=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix};\ B^2=\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}\text{ y } AB=\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Calcular la suma de los elementos de la matriz:

$$C=2A^2-5AB+B^2$$

A) -7 *B) 33* *C) 18* *D) 23* *E) -19*

02 Dadas las matrices:

$$A=\begin{pmatrix} x-3y & x \\ 1 & y \end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix} 2 & 6-y \\ 1 & 6-x \end{pmatrix};\ C=\begin{pmatrix} -4 & -8 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Si **A=B** calcular: ***3B+2C***

A) $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$ B) $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$ C) $\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$

D) $\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}$ E) $\begin{pmatrix} 9/4 & 7/2 \\ 3/4 & -1 \end{pmatrix}$

03 Una empresa fabrica refrigeradoras y produce tres modelos con distintas características en dos tamaños diferentes, la capacidad de producción (en miles) de la planta **A** es:

	Modelo I	Modelo II	Modelo III
Tamaño 1 ($12p^3$)	8	6	5
Tamaño 2 ($10p^3$)	3	4	6

La capacidad de la planta **B** es:

	Modelo I	Modelo II	Modelo III
Tamaño 1 ($12p^3$)	7	5	3
Tamaño 2 ($10p^3$)	4	6	8

Analiza el valor de verdad de las siguientes afirmaciones:

I) La planta **A** tiene una capacidad de producción de *2000* refrigeradoras más que la planta **B** en el modelo *III* de *12* pies cúbicos.

II) La empresa puede producir **60000** refrigeradoras entre las plantas **A** y **B**

III) La empresa puede producir *10000* refrigeradoras del modelo *II* de *10* pies cúbicos entre las dos plantas.

A) VFV *B) VVV* *C) VFF* *D) FVF* *E) FFF*

04 Indicar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

( ) $(A+B)^t=A^t+B^t$
( ) $Tr(A+B)=Tr(A)+Tr(B)$
( ) $(A^t)^n=(A^n)^t$

En todos los casos **A** y **B** son matrices cuadradas del mismo orden

A) FVV *B) VVV* *C) FFF* *D) FVF* *E) VFV*

05 Indicar el valor de verdad de :

( ) Si: **A** es simétrica entonces: $(A+A^t)$ es simétrica
( ) Si: **A** es involutiva entonces ***(I-A)*** es idempotente
( ) Si: **A** es simétrica, **B** es simétrica entonces $(A-B^t)$ es simétrica

A) VVV *B) FFV* *C) FVF* *D) VVF* *E) VFV*

06 Sea:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -9 & 0 & 8 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$ Si **A=B+C**, hallar la suma de elementos de la primera fila de **B** mas la suma de los elementos de la tercera fila de **C** donde **B** es una matriz simétrica y **C** es una matriz antisimétrica.

A) -1 *B) 0* *C) -2* *D) 1* *E) 2*

07 Indicar el valor de verdad de:

( ) Si: $AB=0$ entonces $A=0\vee B=0$

( ) Si: **A** es involutiva entonces $\dfrac{A+I}{2}$ es idempotente

( ) Si: $AB=-BA$ entonces $(A+B)^2=A^2+B^2$

Siendo **A** y **B** matrices cuadradas del mismo orden

A) FVV *B) FFV* *C) FFF* *D) VVV* *E) VFV*

08 Indicar el valor de verdad de:

( ) Si: $(AB)^t$ es una matriz columna, entonces A es una matriz fila

( ) Si: $AB=AC$ entonces $B=C$

( ) Si: $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$ entonces las matrices A y B son conmutables

A) VFV B) FFV C) VFF D) FFF E) VVV

09 Siendo A una matriz nilpotente de índice 2, hallar: $A(A+I)^{15}$

A) A+I B) A C) 2A+I D) A-I E) A-2I

10 Si la matriz: $A=\begin{pmatrix} 1 & a-b & -1 \\ 2 & 3 & b \\ b-x & a-x & 4 \end{pmatrix}$

Es simétrica, hallar $Tr(A^2)$

A) 30 B) 34 C) 38 D) 40 E) 42

11 Dada la matriz: $A=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$

Entonces podemos afirmar que es:

A) Involutiva B) Idempotente C) Nilpotente
D) Simétrica E) Antisimétrica

12 Señale que tipo de matriz es:

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

A) Periódica B) Idempotente C) Nilpotente
D) Involutiva E) Ortogonal

13 Sea la matriz $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & b \\ c & 3 & 2 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$ donde la traza $(A)=7$, el producto de los elementos de la primera fila es -2 y la suma de los cuadrados de los elementos de la primera columna es 54. Si $abc>0$, hallar la suma de todos los elementos de A.

A) 3 B) 5 C) 6 D) 2 E) 4

14 Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ y el polinomio $P(x)=4x+9$. Hallar la traza de la matriz $P(A)$.

A) 49 B) 51 C) 29 D) 41 E) 21

15 Sea $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ y las ecuaciones matriciales:

$$\begin{cases} x+2y=A \\ 2x-y=B \end{cases}$$

Hallar el producto de los elementos de la matriz x.

A) 63/25 B) 7/5 C) 16/5 D) 0 E) 2/5

16 Hallar el valor de xy en la siguiente ecuación:

$$A^tA^2=\begin{pmatrix} m & q & 10 \\ n & r & 24 \\ p & w & z \end{pmatrix} \text{ donde } A=\begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A) 6 B) 4 C) 8 D) 12 E) 16

17 Si A y B son matrices involutivas tales que:

$$AB=\begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 3 & -4 & 3 \\ -1 & -7 & 0 \end{pmatrix}; \; BA=\begin{pmatrix} 21 & -14 & 20 \\ -3 & 2 & -3 \\ -25 & 17 & -24 \end{pmatrix}$$

Hallar la traza de $(A+B)^2$

A) 3 B) 4 C) 8 D) 12 E) 0

18 Si $AB=BA$ entonces: A^3B^2 es igual a:

A) AB B) BA^3 C) A^2B^3 D) B^2A^3 E) A^4B^3

19 Sea A una matriz de orden dos de elementos reales tal que: $Tr(A\times A^t)=0$ entonces la traza de: $A+I$ es:

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 6

20 Si: $A^2=A$ Hallar el valor de: $(A+1)^5$

A) I+7A B) I+32A C) I+31A D) I+15A E) I

TAREA DOMICILIARIA

01 Si: $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$ además: $F(x)=x^2-5x+3$

Hallar la traza de $F(A)$

A) 0 B) 5 C) 8 D) 12 E) 24

02 Si A es una matriz cuadrada de orden 3 que verifica la igualdad: $A^2=2A+1$ y $P(x)=3x^2-6x+5$
Hallar la suma de los elementos de $P(A)$

A) 3 B) 8 C) 24 D) 6 E) 12

03 Dadas las matrices:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \text{ y } B=\begin{pmatrix} -4 & 7 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$$

Señalar la suma de los elementos de la matriz x, que se obtiene al resolver la ecuación:

$$3(x-2A+B) = 5(A-B)+2(x-A)$$

A) 110 B) 32 C) 48 D) -78 E) 78

04 Indicar el valor de verdad de:

( ) El producto de las matrices diagonales del mismo orden es otra matriz diagonal

( ) Toda matriz cuadrada se puede expresar como la suma de una matriz simétrica y una antisimétrica

( ) La matriz identidad es una matriz periódica

A) VVF B) VVV C) VFV D) FVV E) VFF

05 Si A y B son matrices cuadradas del mismo orden indicar el valor de verdad de:

( ) Si $A^2=I$ entonces $A=I$

( ) $(\alpha A+\beta B)^t=\alpha A^t+\beta B^t$; $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

( ) $Traz(AB)=Traz(A)\cdot Traz(B)$

A) FVF B) VVV C) FFF D) VVF E) FVV

SEXTA PRACTICA DIRIGIDA

01 Dada la matriz: $A=(a_{ij})_{4\times 4}$ definida por:

$$a_{ij}=\begin{cases} i; i>j \\ 1; i=j \\ j; i<j \end{cases}$$

Calcula la suma de elementos de la tercera fila y la segunda columna.

A) 20 B) 21 C) 22 D) 23 E) 24

02 Si se cumple que:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m & n \\ p & q \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} m & n \\ p & q \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

además: $mq-np=35$

$m+q=12$

calcular: $m+n+p+q$

A) 10 B) 11 C) 12 D) 13 E) 15

03 Dadas las matrices A y B que verifican:

$$A+2B=\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \text{ ..... (I)}$$

$$2A-B=\begin{pmatrix} 5 & -11 \\ -5 & 4 \end{pmatrix} \text{ ....(II)}$$

calcular: $Tr(3A+B)$

A) 13 B) 5 C) 10 D) −1 E) 4

04 Dada la matriz: $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, si:

$B=A+A^2+A^3+....+A^n / n\in N; n\geq 3$ indicar el valor de verdad de:

( ) Su traza es $2n$.

( ) La suma de los elementos es 0.

( ) La matriz $B=\begin{pmatrix} n & -\frac{n(n+1)}{2} \\ 0 & n \end{pmatrix}$

A) VVV B) VFV C) VVF D) FVF E) FFV

05 La matriz $A=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ satisface la ecuación:

$$x^3+5x^2+10x+10=0$$

donde $I=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Si B y C son matrices de coeficientes enteros que satisfacen: $5A=B^5+C^5$ halle: $B-C$.

A) A B) 2A C) A + 2I D) A − 2I E) I

06 Dadas las matrices:

$A=(a_{ij})_{23\times 2} / a_{ij}=i+j$

$B=(b_{ij})_{2\times 41} / b_{ij}=2i+3j$

si: $C=AB$ de elemento c_{ij}, calcular el elemento c_{34}

A) 136 B) 121 C) 114 D) 125 E) 134

07 Si: $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, hallar la matriz A^{49}

A) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 49 & 1 & 0 \\ 989 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ B) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 49 & 1 & 0 \\ 1080 & 49 & 1 \end{pmatrix}$ C) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 49 & 1 & 0 \\ 989 & 49 & 1 \end{pmatrix}$

D) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 49 & 1 & 0 \\ 1127 & 49 & 1 \end{pmatrix}$ E) $\begin{pmatrix} 1 & 9 & 0 \\ 49 & 1 & 0 \\ 1126 & 49 & 1 \end{pmatrix}$

08 Si: $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \wedge B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

calcular: $Tr(AB)+Tr(BA)$

A) 12 B) −12 C) 0 D) 11 E) −11

09 Dadas las matrices:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix} \wedge B=\begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

hallar: $(A+B)^2$

A) 5I B) 4I C) 3I D) 2I E) I

10 Dada la matriz: $A=(a_{ij})_{2\times 3}$ definida como:

$$a_{ij}=\begin{cases} -3; & i+j<4 \\ i-j; & i+j\geq 4 \end{cases}$$

Indicar la suma de elementos de dicha matriz.

A) −6 B) −8 C) −10 D) −12 E) −14

11 Si: $A=\begin{pmatrix}4 & 6\\ 2 & 4\end{pmatrix} \wedge B=\begin{pmatrix}2 & 6\\ 2 & 4\end{pmatrix}$

calcular **X** de la siguiente ecuación:

$$2(X-4A)=3(B-2A)$$

A) $\begin{pmatrix}14 & 30\\ 10 & 20\end{pmatrix}$ B) $\begin{pmatrix}-7 & 15\\ 5 & 10\end{pmatrix}$ C) $\begin{pmatrix}7 & 15\\ 5 & 10\end{pmatrix}$

D) $\begin{pmatrix}5 & 10\\ 15 & 7\end{pmatrix}$ E) $\begin{pmatrix}3 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix}$

12 Si: $\begin{pmatrix}2 & -2 & -4\\ -1 & 3 & 4\\ 1 & -2 & -3\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}m & . & .\\ . & n & .\\ . & . & p\end{pmatrix}$

calcular : $m+n+p$

A) 4 B) 5 C) 3 D) –8 E) 8

13 Si: $A^2=B$, donde: $A=\begin{pmatrix}1 & -3 & -4\\ -1 & 3 & 4\\ 1 & 3 & -4\end{pmatrix}$

calcular la suma de los elementos de la matriz B.

A) 4 B) 3 C) 2 D) 1 E) 0

14 Dada la matriz:

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\\ 3 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

calcular la suma de elementos de A^{40}

A) 6^{13} B) 6^{14} C) 6^{15} D) 6^{16} E) 6^{12}

15 Si: $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -4 & -3\end{pmatrix}$, además se cumple:

$$A\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}mx\\ my\end{pmatrix}$$

donde: $(x;y)\neq(0;0)$, determinar la suma de los cuadrados de los valores de "m".

A) 5 B) 7 C) 9 D) 15 E) 18

16 Sea $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$. Calcule:

$$B=A^{50}=(b_{ij})_{3\times3}$$

y dar como respuesta el valor de b_{13}

A) 1 000 B) 1 275 C) 1 800 D) 1 900 E) 2 100

17 Si: $A=(a_{ij})_{2\times2}$, tal que: $a_{ij}=\begin{cases}1; & i\neq j\\ 2; & i=j\end{cases}$

hallar la suma de elementos de A^n, $n\in N$

A) 2×2^n B) 2×3^n C) 5×2^n D) 4×3^n E) 5^n

18 Si:

$$A=\begin{pmatrix}-3 & 5\\ -2 & 2\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}2 & -3\\ 4 & 5\end{pmatrix}\wedge C=\begin{pmatrix}-7 & 3\\ 2 & -1\end{pmatrix}$$

Resolver:

$$3(X-A+B)=2(X-2(B+C)-(X+C)$$

Dar como respuesta la suma de elementos de la matriz **X**:

A) 10,5 B) 17,5 C) –10,5 D) –18,6 E) –17,5

19 Si: $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\end{pmatrix}$, determine $B=A^{50}$

A) $\begin{pmatrix}1 & 3^{50}-1\\ 0 & 3^{50}\end{pmatrix}$ B) $\begin{pmatrix}1 & 2^{50}\\ 0 & 2^{50}-1\end{pmatrix}$ C) $\begin{pmatrix}1 & 2^{50}+2\\ 0 & 2^{50}+1\end{pmatrix}$

D) $\begin{pmatrix}1 & 3^{40}-1\\ 0 & 3^{40}\end{pmatrix}$ E) $\begin{pmatrix}1 & 3^{50}+1\\ 0 & 3^{50}\end{pmatrix}$

20 Dadas:

$$A=(a_{ij})_{4\times3} \text{ tal que: } a_{ij}=i-j$$
$$B=(b_{ij})_{4\times3} \text{ tal que: } b_{ij}=i-2j$$

calcular la traza de: $B\,A^t$

A) 20 B) 22 C) 24 D) 25 E) 19

CLAVES DE LA PRIMERA PRACTICA

1)A	2)C	3)C	4)C	5)B	6)C	7)B	8)E	9)B	10)C
11)A	12)D	13)A	14)B	15)A	16)A	17)E	18)E	19)C	20)D

SEGUNDA PRACTICA (MATRICES)

01) B	02) A	03) E	04) B	05) C
06) A	07) A	08) E	09) D	10) C
11) E	12) A	13) B	14) C	15) A
16) C	17) B	18) C	19) A	20) A
01) C	02) E	03) E	04) B	05) E

TERCERA PRACTICA (MATRICES)

01) D	02) B	03) C	04) B	05) D
06) A	07) B	08) E	09) D	10) A
11) B	12) C	13) D	14) D	15) C
16) D	17) B	18) A	19) E	20) E

CUARTA PRACTICA (MATRICES)

01) D	02) C	03) A	04) B	05) E
06) A	07) A	08) E	09) B	10) C
11) A	12) B	13) E	14) B	15) D
16) A	17) B	18) D	19) B	20) C
01) A	02) C	03) B	04) B	05) A

CLAVES DE LA SEXTA PRACTICA

1)B	2)A	3)A	4)B	5)D	6)A	7)C	8)C	9)E	10)D
11)C	12)E	13)B	14)B	15)A	16)B	17)B	18)E	19)A	20)B



OBJETIVOS :

* Valorar la importancia de los determinantes, dentro del álgebra matricial.

* Calcular el determinante de una matriz cuadrada de cualquier orden.

* Conocer las propiedades de los determinantes y su contribución a la simplificación de los cálculos.

* Conocer métodos para calcular los determinantes y la matriz inversa.

* Calcular la inversa de una matriz cuadrada de orden 2 ó 3 por el método de Gauss.

* Calcular el rango de una matriz por el método de Gauss.

INTRODUCCIÓN :

Existen diferentes formas de asignar a una matriz un número , o sea , de establecer una función cuyo dominio sea el conjunto de todas las matrices cuadradas. Una de estas funciones es la que se conoce como determinante de una matriz.

El determinante de una matriz cuadrada es un número muy útil en la teoría del álgebra lineal y se puede calcular de manera directa.

Los determinantes fueron introducidos en Occidente a partir del siglo XVI, esto es, antes que las matrices, que no aparecieron hasta el siglo XIX. Conviene recordar que los chinos (Hui, Liu. *iuzhang Suanshu o Los nueve capítulos del arte matemático*.) fueron los primeros en utilizar la tabla de ceros y en aplicar un algoritmo que, desde el Siglo ***XIX***, se conoce con el nombre de *Eliminación gaussiana*.

En su sentido original, el determinante *determina* la unicidad de la solución de un sistema de ecuaciones lineales. Fue introducido para el caso de orden 2 por Cardano en 1545 en su obra *Ars Magna* presentado como una regla para la resolución de sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas. Esta primera fórmula lleva el nombre de *regula de modo*.

La aparición de determinantes de órdenes superiores tardó aún más de cien años en llegar. Curiosamente el japonés Kowa Seki y el alemán Leibniz otorgaron los primeros ejemplos casi simultáneamente.

Leibniz estudió los distintos tipos de sistemas de ecuaciones lineales. Al no disponer de la notación matricial, representaba los coeficientes de las incógnitas con una pareja de índices: así pues escribía ***ij*** para representar $a_{i,j}$. En ***1678*** se interesó por un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas y obtuvo, para dicho ejemplo, la fórmula de desarrollo a lo largo de una columna. El mismo año, escribió un determinante de orden ***4*** , correcto en todo salvo en el signo. Leibniz no publicó este trabajo, que pareció quedar olvidado hasta que los resultados fueron redescubiertos de forma independiente cincuenta años más tarde.

En el mismo periodo, Kowa Seki publicó un manuscrito sobre los determinantes, donde se hallan fórmulas generales difíciles de interpretar. Parece que se dan fórmulas correctas para determinantes de tamaño ***3*** y ***4***, y de nuevo los signos mal para los determinantes de tamaño superior. El descubrimiento se queda sin futuro a causa del cierre de Japón al mundo exterior por órdenes del shMgun, lo que se ve reflejado en la expulsión de los Jesuitas en ***1638***.

DETERMINANTES DE CUALQUIER DIMENSIÓN

En ***1748***, un póstumo tratado de álgebra de MacLaurin recupera la teoría de los determinantes al contener la escritura correcta de la solución de un sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas.

En ***1750***, Cramer formula las reglas generales que permiten la resolución de un sistema de *n* ecuaciones con *n* incógnitas, aunque no ofrece demostración alguna. Los métodos de cálculo de los determinantes son hasta entonces delicados debido a que se basan en la noción de signatura de una permutación.

Los matemáticos se familiarizan con este nuevo objeto a través de los artículos de Bézout en ***1764***, de Vandermonde en ***1771*** (que proporciona concretamente el calculo del determinante de la actual Matriz de Vandermonde). En ***1772***, Laplace establece las reglas de recurrencia que llevan su nombre. En el año siguiente, Lagrange descubre la relación entre el cálculo de los determinantes y el

de los volúmenes.

Gauss utiliza por primera vez el término « determinante », en las *Disquisitiones arithmeticae* en 1801. Lo empleaba para lo que hoy día denominamos discriminante de una cuádrica y que es un caso particular de determinante moderno. Igualmente estuvo cerca de obtener el teorema del determinante de un producto.

APARICIÓN DE LA NOCIÓN MODERNA DE DETERMINANTE

Cauchy fue el primero en emplear el término determinante con su significado moderno. Se encargó de realizar una síntesis de los conocimientos anteriores y publicó en 1812 la fórmula del determinante de un producto. Ese mismo año Binet ofreció una demostración para dicha fórmula. Paralelamente Cauchy establece las bases del estudio de la reducción de endomorfismos.

Con la publicación de sus tres tratados sobre determinantes en 1841 en la revista Crelle, Jacobi aporta a la noción una gran notoriedad. Por primera vez presenta métodos sistemáticos de cálculo bajo una forma algorítmica. Del mismo modo, hace posible la evaluación del determinante de funciones con instauración del jacobiano.

El cuadro matricial es introducido por los trabajos de Cayley y James Joseph Sylvester. Cayley es también el inventor de la notación de los determinantes mediante barras verticales y establece la fórmula para el cálculo de la inversa.

La teoría se ve reforzada por el estudio de determinantes que tienen propiedades de simetría particulares y por la introducción del determinante en nuevos campos de las matemáticas, como el wronskiano en el caso de las ecuaciones diferenciales lineales.

Para el cálculo de determinantes de matrices de cualquier orden, existe una regla recursiva (teorema de Laplace) que reduce el cálculo a sumas y restas de varios determinantes de un orden inferior. Este proceso se puede repetir tantas veces como sea necesario hasta reducir el problema al cálculo de múltiples determinantes de orden tan pequeño como se quiera. Sabiendo que el determinante de un escalar es el propio escalar, es posible calcular el determinante de cualquier matriz aplicando dicho teorema.

DETERMINANTE

Se llama determinante, a un valor escalar o número real que se le asocia a cada matriz cuadrada y se denota por: $|A|$ ó ***Det(A)*** para indicar el determinante de una matriz «*A*»:

1) MATRIZ DE ORDEN UNO :

Se llama determinante, de una matriz de primer orden, formada por el elemento a_{11}, al propio elemento a_{11}.

EJEMPLOS:

* Si: $A = (6) \Rightarrow |A| = 6$
* Si: $B = (-2) \Rightarrow |B| = -2$

2) MATRIZ DE ORDEN DOS :

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ se define su determinante.

$$\boxed{|A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

EJEMPLO :

Calcular el determinante de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -4 & -8 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -9 & -4 \\ -6 & -2 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} x & 4 \\ x & -2 \end{pmatrix}$$

RESOLUCIÓN :

$$|A| = (7)(2) - (3)(6) = 14 - 18 = -4$$

$$\det B = (-4)(7) - (5)(-8) = -28 + 40 = 12$$

$$|C| = (-9)(-2) - (-6)(-4) = -6$$

$$\det D = (x)(-2) - (x)(4) = -6x$$

OBSERVACIÓN :

* El determinante de *A* no debe confundirse con el valor absoluto de *A*. También se representa por: det *A*, es decir:

$$|A| = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\ a_{22} - a_{12}\ a_{21}$$

* Observa que el determinante es igual al producto de los elementos de la diagonal principal menos el producto de los elementos de la diagonal secundaria. Por lo tanto, la forma sencilla de calcular el determinante de una matriz 2×2 es como sigue:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \begin{matrix} (-) \\ \\ (+) \end{matrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

EJEMPLO :

Sea:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 7 & -4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 7 \times 2 - 3(-4) = 26$$

3) DETERMINANTE DE TERCER ORDEN :

El determinante de tercer orden es el desarrollo de una matriz cuadrada de tercer orden . Para calcular su valor se utiliza la regla de Sarrus o el método de menores complementarios , que es más general . Así:

El determinante de la matriz :

esta definido por $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{32}a_{21} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{22}a_{13}a_{31} - a_{33}a_{12}a_{21}$

La forma sencilla de calcular el determinante de una matriz 2×2 es análoga para las matrices 3×3. Este desarrollo se representa mediante la regla memotécnica denominada ***regla de Sarrus.***

EJEMPLO :

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \\ 6 & 5 & 2 \end{vmatrix} = [(-1)\times 4\times 2]-[(-1)\times 5\times 1]-[2\times 3\times 2]+[2\times 6\times 1]+[0\times 3\times 5]-[0\times 6\times 4]$$
$$= (-8)(-5) - 12 + 12 + 0 - 0 = -3$$

I) REGLA DE SARRUS :

REGLA DE SARRUS VERTICAL :

I) Se repiten las filas primeras y segunda a continuación de la tercera (formando dos filas adicionales).

II) Se toman con signo positivo la diagonal principal (hacia abajo) y las dos paralelas a ella y con signo negativo la diagonal secundaria (hacia arriba) y las dos paralelas a la misma.

III) Se efectúan los productos de los elementos de las diagonales y sus paralelas, considerando para cada producto el signo señalado en el paso anterior. Así:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

(–) (–) (–) (+) (+) (+)

EJEMPLO :

Encontrar el determinante de la matriz :

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 5 & 3 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

RESOLUCIÓN :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 5 & 3 \\ 2 & 0 & -4 \\ 1 & 2 & 3 \\ -2 & 5 & 3 \end{vmatrix} = (1)(5)(-4)+(-2)(0)(3)+(2)(2)(3)-(2)(5)(3)-(1)(0)(3)-(-2)(2)(-4)$$

$\Rightarrow \det A = -54$

REGLA DE SARRUS HORIZONTAL:

Se aplica la matriz trasladando las dos primeras columnas a la parte final y se aplican multiplicaciones en dirección de las diagonales, conforme se indica.

Sea: $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

– – – / + + +

$\rightarrow |A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{22}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$

EJEMPLO :

Calcular el determinante igual al: $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 1 & 8 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$

RESOLUCIÓN :

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 2 & 2 & -3 \\ 1 & 8 & 3 & 1 & 8 \\ 3 & -2 & 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 16-27-4-48+12+3=-48$$

– – – / + + +

II) MÉTODO DE LA ESTRELLA :

$$A = \begin{vmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{vmatrix}$$

+ –

ENGENERAL:

* Sea:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \rightarrow |A| = \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix} - \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}$$

* – **

$\Rightarrow |A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23}$

PROPIEDADES DE LOS DETERMINANTES

1) Una matriz cuadrada y su transpuesta tienen el mismo determinante.

Es decir : $|A| = |A^T|$ siendo A cuadrada.

EJEMPLO :

$$A = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} \to A^T = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$$

$$|A| = -14 \qquad |A^T| = -14$$

2) Si se intercambia dos filas o columnas consecutivas de una matriz cuadrada, su determinante sólo cambia de signo.

EJEMPLOS :

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 8 \qquad \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -8$$

* Si :

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ m & n & p \end{vmatrix} = 10 \Rightarrow \begin{vmatrix} m & n & p \\ d & e & f \\ a & b & c \end{vmatrix} = -10$$

3) Si una matriz cuadrada tiene los elementos de dos filas o dos columnas , respectivamente proporcionales ; se dirá que su determinante es cero.

EJEMPLOS :

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & 6 & 8 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 3 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

4) Si se multiplican todos los elementos de una fila (o columna) del determinante por un escalar, el mismo determinante queda multiplicado por dicho escalar.

EJEMPLO :

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 6 & 5 & 2 \\ 9 & 8 & 3 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 8 & 3 \end{vmatrix}$$

5) Un determinante en el cual todos los elementos de una fila o columna son ceros, es igual a cero.

6) El determinante de una matriz triangular superior o inferior, y de una matriz diagonal es igual al producto de los elementos de la diagonal principal.

EJEMPLO :

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 4 & 0 & 7 \end{vmatrix} \Rightarrow |A| = (1)(4)(7) = 28$$

7) El determinante no varía si a todos los elementos de una de sus filas (o columnas) se le añade el múltiplo de otra fila (o columna).

EJEMPLO :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 8 \\ 0 & 5 & 9 \end{vmatrix}$$

$$f_2 = 2f_1 + f_2$$
$$f_3 = 2f_1 + f_3$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 8 \\ 0 & 5 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1)(5)(1) = 5$$

$$f_3 = -f_2 + f_3$$

8) El determinante de una matriz antisimétrica de orden impar es igual a cero.

EJEMPLO :

* Sea:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -8 \\ -4 & 0 & 7 \\ 8 & -7 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = 0$$

9) $|AB| = |A||B|$

10) $|KA| = K^n|A|$; K es escalar ; n es el orden de la matriz A .

11) $|A^n| = |A|^n ; n \in N$

EJERCICIO 1 :

Hallar el determinante de la matriz :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ -2 & 3 & -4 & 1 \\ -1 & 4 & 2 & 3 \\ 3 & -5 & 7 & -9 \end{bmatrix}$$

RESOLUCIÓN :

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ -2 & 3 & -4 & 1 \\ -1 & 4 & 2 & 3 \\ 3 & -5 & 7 & -9 \end{vmatrix} \xrightarrow[f_4-3f_1]{f_2+2f_1,\ f+3f_1} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & -1 & 2 & -7 \\ 0 & 2 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & -7 \\ 2 & 5 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} \xrightarrow[f_3+f_1]{f_2+2f_1} \begin{vmatrix} -1 & 2 & -7 \\ 0 & 9 & -15 \\ 0 & 0 & -4 \end{vmatrix} \Rightarrow A = (-1)(9)(-4)$$

$$A| = 36$$

EJERCICIO 2 :

Hallar el determinante de :

$$A=\begin{bmatrix} a+1 & 3a & b+2a & b+1 \\ 2b & b+1 & 2-b & 1 \\ a+2 & 0 & 1 & a+3 \\ b-1 & 1 & a+2 & a+b \end{bmatrix}$$

RESOLUCIÓN :

$$\begin{vmatrix} a+1 & 3a & b+2a & b+1 \\ 2b & b+1 & 2-b & 1 \\ a+2 & 0 & 1 & a+3 \\ b-1 & 1 & a+2 & a+b \end{vmatrix} \quad \begin{array}{l} C_1+C_3 \\ C_2+C_4 \end{array}$$

Iguales

$$\begin{vmatrix} 3a+b+1 & 3a+b+1 & b+2a & b+1 \\ b+2 & b+2 & 2-b & 1 \\ a+3 & a+3 & 1 & a+3 \\ a+b+1 & a+b+1 & a+2 & a+b \end{vmatrix}$$

$$\rightarrow |A|=0$$

MENORES Y COFACTORES

EJEMPLO :

Considera la matriz cuadrada $A=\begin{bmatrix} 4 & 2 & 8 \\ 5 & 6 & 1 \\ 9 & 7 & 3 \end{bmatrix}_{3\times 3}$

* Si se toma el elemento a_{23} y se tacha su fila y su columna correspondiente $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 8 \\ 5 & 6 & 1 \\ 9 & 7 & 3 \end{vmatrix}$, resulta la matriz: $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 9 & 7 \end{bmatrix}$ que es la matriz 2×2 que se obtiene de la matriz A , al no considerar los elementos de la fila 2 y la columna 3.

El determinante correspondiente $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 9 & 7 \end{bmatrix}=10$, dicho determinante se denomina menor del elemento a_{23} de la matriz A.

DEFINICIÓN :

El menor complementario de un elemento a_{ij} de la matriz «A» es el determinante de la matriz que resulta al eliminar la fila i y la columna j de la matriz A.

EJEMPLO :

Sea :

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -1 & 8 & -4 \\ 6 & 5 & 9 \end{pmatrix}$$

* El menor complementario del elemento a_{32} es el determinante de la matriz que se obtiene al eliminar la fila 3 y la columna 2 de la matriz A y este será :

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -4 \end{vmatrix}=-3$$

COFACTOR :

Si a_{ij} es un elemento de una matriz cuadrada A de orden $n\times n$, y M_{ij} es el menor de a_{ij}, entonces el cofactor del elemento a_{ij}, denotado C_{ij}, se define por:

$$\boxed{C_{ij}=(-1)^{i+j}\,M_{ij}}$$

EJEMPLO :

Así , en la matriz : $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \\ 6 & 5 & 2 \end{bmatrix}$

Los cofactores de los elementos de la primera fila son :

$$C_{11}=(-1)^{1+1}M_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}=(-1)^2(8-5)=1\times 3=3$$

$$C_{12}=(-1)^{1+2}M_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix}=(-1)^3(6-6)=(-1)\times 0=0$$

$$C_{13}=(-1)^{1+3}M_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 5 \end{vmatrix}=(-1)^4(15-24)=1\times(-9)=-9$$

EN GENERAL:

Considérese la matriz cuadrada de orden n :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \rightarrow \textit{fila } i$$

columna j

Denotaremos por M_{ij} a la matriz cuadrada de orden $(n-1)$ que resulta de eliminar la fila i y la columna j de la matriz A , luego :

I) Al determinante de la matriz M_{ij} $(|M_{ij}|)$ se llamará menor del elemento a_{ij} de la matriz A.

II) Se define cofactor del elemento a_{ij} denotado por A_{ij}.

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}|M_{ij}|$$

OBSERVACIONES :

* La diferencia entre el menor $|M_{ij}|$ y el cofactor A_{ij} de un elemento a_{ij} es solamente el signo .

Así : $\underbrace{A_{ij}}_{cofactor}=(-1)^{i+j}\underbrace{|M_{ij}|}_{menor}$

de donde : $A_{ij} = \begin{cases} |M_{ij}|, \text{si } i+j \text{ es par} \\ -|M_{ij}|, \text{ si } i+j \text{ es impar} \end{cases}$

* El signo que relaciona a A_{ij} y $|M_{ij}|$ del elemento a_{ij} de la matriz A se puede hallar en forma práctica mediante el siguiente arreglo :

$$\begin{bmatrix} + & - & + & \dots \\ - & + & - & \dots \\ + & - & + & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix}$$

* Así el signo de a_{35} es positivo puesto a que $(3+5)$ es par .

* El signo del elemento a_{25} es negativo ya que $(2+5)$ es impar.

EJEMPLO :

Si: $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 6 \\ 0 & 2 & 5 \\ 2 & -4 & 7 \end{bmatrix}$

Obtener : M_{11}, M_{21}, M_{22}, A_{11}, A_{21} y A_{22}

RESOLUCIÓN :

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -4 & 7 \end{vmatrix} = 2(7) - 5(4) = 34$$

$$M_{21} = \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ -4 & 7 \end{vmatrix} = 3(7) - 6(-4) = 45$$

$$M_{22} = \begin{vmatrix} -1 & 6 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = (-1)(7) - 2(6) = -19$$

* Para obtener los cofactores nos basta anteponer a sus menores correspondientes el signos apropiado.

$A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = (1)(34) = 34$; $A_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = (-1)(45) = -45$

$A_{22} = (-1)^{2+2} M_{22} = (1)(-19) = -19$; $A_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = (-1)(-2) = 2$

Ahora podemos definir el determinante $|A|$ de una matriz cuadrada de orden *3*.

OBSERVACIÓN :

*Una manera sencilla de recordar el signo $(-1)^{i+j}$ asociado al cofactor A_{ij} es considerar el siguiente arreglo rectangular de signos.

$$\begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix}$$

*El cofactor es la clave para calcular determinantes de orden *3* o de orden mayor que *3*.

*El determinante de una matriz cuadrada de orden $n \times n$ se puede calcular mediante la siguiente regla:

Si A es una matriz cuadrada de orden $n \times n$ entonces el determinante de A es la suma de los n productos obtenidos al multiplicar cada elemento en cualqueir fila o columna por su cofactor.

Este proceso para calcular determinantes se llama expansión por cofactores. el siguiente ejemplo ilustra el proceso.

EJEMPLO :

Calcular el determinante de la siguiente matriz por cofactores : $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \\ 6 & 5 & 2 \end{bmatrix}$

RESOLUCIÓN:

* Se escoge una fila o columna para hacer la expansión por sus cofactores. En la práctica se escoge la fila o columna que contiene más ceros porque esto simplifica los cálculos. En este caso puede ser la ***1a.*** fila o la ***3ra.*** columna.

* Vamos a hacer la expansión por la ***3ra.*** columna. Se debe multiplciar cada elemento de la ***3ra.*** columna por su cofactor y sumar los productos así:

$$0 \times (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} + 1 \times (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} + 2 \times (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 0 + 1 \times (-1) + (-5 - 12) + 2 \times 1 \times (-4 - 6) = 0 + 17 - 20 = -3$$

* La expansión se puede hacer por cualquier fila o columna. La razón para escoger la fila o columna que contiene más ceros es que se simplifican los cálculos ya que al multiplicar el elemento *0* por su cofactor da *0* , y de esta forma no es necesario calcular el cofactor.

* Si se calcula el determinante de la matriz anterior al hacer la expansión por la primera fila, se tiene.

$$(-1)(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} + 2 \times (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} + 0 \times (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$(-1) \times 3 + 2 \times 0 + 0 = -3$$

*La expansión por cofactores por cualquier fila o columna da el mismo resultado. El proceso de calcular determinantes al hacer la expansión por cofactores funciona también para cualquier orden mayor que *3*.

CONCLUSIÓN :

El determinante de una matriz tres por tres es igual a la suma de los productos de las componentes de una misma fila o columna y los cofactores de esas componentes.

*Observa que el determinante se puede escribir así:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} +$$

$$+(-1)^{2+1} a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{3+1} a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

* En donde el signo del cofactor se halla mediante la potencia de base *(-1)* y exponente igual a la suma de ordenes de fila y columna.

EJEMPLOS :

Utilizando el método de cofactores calcular el determinante de la matriz

$$\begin{bmatrix} -2 & 4 & 3 \\ -1 & 2 & 5 \\ 6 & -7 & -3 \end{bmatrix}$$

RESOLUCIÓN :

*Utilizando las componentes de la primera fila:

$$\begin{vmatrix} -2 & 4 & 3 \\ -1 & 2 & 5 \\ 6 & -7 & -3 \end{vmatrix} = (-1^{1+1})(-2) \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -7 & -3 \end{vmatrix} + (-1)^{2+1}(4) \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 6 & -3 \end{vmatrix}$$

$$+(-1)^{3+1}(3) \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 6 & -7 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -2 & 4 & 3 \\ -1 & 2 & 5 \\ 6 & -7 & -3 \end{vmatrix} = -2(-6+35) - 4(3-30) + 3(7-12)$$

$$= -58 + 108 - 15 = 35$$

EN GENERAL:

TEOREMA DE LAPLACE

El determinante de una matriz $A=(a_{ij})_{m\times n}$ es igual a la suma de los productos obtenidos de multiplicar los elementos de cualquier fila (o columna) por sus respectivos cofactores.

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij}$$

$$|A| = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij}$$

OBSERVACIÓN :

Se elije la fila o columna de mayor cantidad de ceros.

EJEMPLO :

Hallar el determinante de : $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 5 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

RESOLUCIÓN :

* Ubicación de signos: $\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$

* Usando la fila *1*:

$$|A| = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

* Usando la fila *1*:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 5 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 5 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\to |A| = 4 - (-1) + 3(-4-10) = 5 + 3(-14)$$

$$\to |A| = -37$$

OBSERVACIÓN :

Esta regla se puede aplicar para calcular el determinante de una matriz de orden $n>3$.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 5 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 5 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\to |A| = 4 - (-1) + 3(-4-10) = 5 + 3(-14)$$

$$\to |A| = -37$$

EJEMPLO 2 :

Calcular : $\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

RESOLUCIÓN :

* Si se hace la expansión por los cofactores de los elementos de la cuarta fila, se tiene:

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1\times(-1)^{4+1} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 5 & 0 & -3 \end{vmatrix} + 1(-1)^{4+3} \begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -3 \end{vmatrix}$$

*Ahora se deben calcular cada uno de los determinantes de orden *3*:

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 5 & 0 & -3 \end{vmatrix} = (-1)^{2+2} \times 4 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = 1\times 4\times(3-10) = -28$$

(al hacer la expansión por la *2a.* fila)

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -3 \end{vmatrix} = (-1)^{2+1} \times 3 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = (-1)\times 3(3-10) = 21$$

(al hacer la expansión de la *1a.* fila)

* Luego :

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{aligned} &= 1\times(-1)^{4+1}\times(-28)+1\times(-1)^{4+3}\times 21 \\ &= 1\times(-1)\times(-28)+1(-1)\times 21 \\ &= 28-21=7 \end{aligned}$$

EJEMPLO 3 :

Calcular :
$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 4 & 5 & 2 & 1 \\ -2 & 4 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & -3 \end{vmatrix}$$

RESOLUCIÓN:

*Se expresa el determinante 4×4 por medio de las menores de las componentes de la primera columna:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 4 & 5 & 2 & 1 \\ -2 & 4 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 1\times\begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -3 \end{vmatrix} - 4\times\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -3 \end{vmatrix} +$$

$$+(-2)\times\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 5 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \end{vmatrix} - 1\times\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 5 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

* Se calcula cada uno de los deteminantes 3×3 que se han resultado:

* Se calculan los menores al tomar los cofactores de la primera fila:

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 5\times\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} - 2\times\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} + 1\times\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 17$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -4\times\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} + (-1)\times\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} - 3\times\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 7$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 5 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 0\times\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 2\times\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} + (-3)\times\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = -4$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 5 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -5\times\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} + 2\times\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} - 1\times\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = 12$$

* Luego :

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 4 & 5 & 2 & 1 \\ -2 & 4 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 1\times 17 - 4\times 7 + (-2)\times(-4) + (-1)\times(12) = -15$$

TRANSFORMACIONES ELEMENTALES DE FILAS Y COLUMNAS EN UNA MATRIZ (OPERACIONES ELEMENTALES):

Dada una matriz A, sólo está permitido realizar una o más de las operaciones siguientes:

I) Al intercambio de dos filas (o columnas)

II) A la multiplicación de una fila (o columna) por un escalar no nulo.

III) A una fila (o columna) le sumamos el múltiplo de otra fila (o columna)

* Para resolver sistemas de ecuaciones fundamentales interesará realizar transformaciones elementales de filas.

Notación	Operación sobre la fila correspondiente
$f_i \leftrightarrow f_j$	*Intercambiar las filas f_i y f_j*
kf_i	*Multiplicar la fila i por la constante k*
$f_j + kf_i$	*Sumar k veces la fila i a la fila j*

EJEMPLOS :

Transformar la matriz A usando las transformaciones elementales :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

RESOLUCIÓN:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_2 \leftrightarrow f_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{3f_1} \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{2f_3+f_2} \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ -2 & 10 & 11 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

MATRICES EQUIVALENTES

Se dice que una matriz A es equivalente, por fila o columna, a otra matriz B si esta última se ha obtenido de la primera por medio de una sucesión finita de operaciones elementales por filas o columnas.

CÁLCULO DEL DETERMINANTE DE UNA MATRIZ UTILIZANDO PROPIEDADES:

Supongamos que se quiere conocer el determinante de una matriz cuadrada de orden cuatro.

$$B = \begin{vmatrix} 2 & 16 & 17 & 4 \\ 0 & -3 & 22 & -3 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

*Debemos reducir la matriz cuadrada a una matriz triangular inferior o superior.

$$|A| = (2)(-3)(6)(1) = -36$$

*Es decir, el cálculo del determinante se reduce a

multiplicar la diagonal principal de la matriz B.

*Con este procedimiento debemos tener mucho cuidado porque no se cumple para todas las matrices.

*Para aprovechar este hecho convertimos la matriz original por medio de las transformaciones elementales por filas *(renglones)* a una matriz equivalente que tenga la forma triangular.

*Las propiedades nos permiten tener un método para calcular el determinante. Es posible transformar una matriz cuadrada A en una matriz triangular superior efectuando las siguientes operaciones entre filas (o entre columnas).

I) Intercambio de dos filas (o columnas).

II) Multiplicar una fila (o columna) por una constante.

III) Adicionar una fila (o columna) el múltiplo de otra fila (o columna)

*En cada caso es necesario tener en cuenta el posible cambio de valor que puede sufrir el determinante.

TEOREMA :

Sea A una matriz de $n \times n$

A) Si la forma escalonada de A reducida por renglones es una matriz diagonal, entonces :

$$\det A = a_{11}a_{22}\ldots a_{nn}$$

B) Si la forma escalonada de A reducida por renglones es una matriz triangular, superior o inferior, entonces :

$$\det A = a_{11}a_{22}\ldots a_{nn}$$

EJEMPLO 1 :

Calcular :

$$d = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & -4 \\ -1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

RESOLUCIÓN :

* Cuando la fila 2 se suma a la fila 1 y a la fila 4 el valor de la determinante se mantiene.

$$d = \begin{vmatrix} 0 & 4 & 0 & -8 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

* Multiplicando la fila 2 por (-1) :

$$d = -\begin{vmatrix} 0 & 4 & 0 & -8 \\ 1 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

* Intercambiando la fila 1 y la fila 2 :

$$d = (-1)(-1)\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & -8 \\ 0 & 4 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$d = (-1)(-1)(4)\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

* Restando a la fila 3, 4 veces la fila 2 y a la fila 4; 3 veces la fila 2 :

$$d = (-1)(-1)(4)\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & -1 & 8 \end{vmatrix} =$$

* Finalmente factorizando 2 en la fila 3 y luego la fila resultante sumar la fila 4 :

$$d = (-1)(-1)(4)(2)\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 7/2 \\ 0 & 0 & -1 & 23/2 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow d = (-1)(-1)(4)(2)(1)(1)(1)(23/2) = 92$$

EJEMPLO 2 :

Calcular :

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{vmatrix}$$

RESOLUCIÓN :

* Si a las tres últimas filas de A se les resta la primera y se desarrolla por esta fila, resulta:

$$|A| = \begin{vmatrix} b-a & b^2-a^2 & b^3-a^3 \\ c-a & c^2-a^2 & c^3-a^3 \\ d-a & d^2-a^2 & d^3-a^3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} b-a & (b-a)(b+a) & (b-a)(b^2+ab+a^2) \\ c-a & (c-a)(c+a) & (c-a)(c^2+ac+a^2) \\ d-a & (d-a)(d+a) & (d-a)(d^2+ad+a^2) \end{vmatrix}$$

* Por propiedad:

$$|A| = (b-a)(c-a)(d-a)\begin{vmatrix} 1 & b+a & b^2+ab+a^2 \\ 1 & c+a & c^2+ac+a^2 \\ 1 & d+a & d^2+ad+a^2 \end{vmatrix}$$

* Restando a la segunda y tercera fila la primera fila , desarrollando por la primera fila, resulta

$$|A|=(b-a)(c-a)(d-a)\begin{vmatrix} c-b & (c-b) & (c+b+a) \\ d-b & (d-b) & (d+b+a) \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow |A|=(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)\begin{vmatrix} 1 & c+b+a \\ 1 & d+b+a \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow |A|=(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)$$

* El determinante de esta matriz A se le conoce como el de Vandermonde.

CÁLCULO DEL DETERMINANTE VANDERMONDIANA

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-2} \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \cdots & x_3^{n-1} \\ & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = (-1)^n \prod_{i<j}(x_i - x_j)$$

Para una matriz de orden n

EJEMPLO :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{vmatrix} = b-a$$

DEFINICIÓN :

I) Si A es cuadrada $\wedge\ |A|\neq 0$; la matriz A toma el nombre de ***no singular o regular***.

II) Si A es cuadrada $\wedge\ |A|=0$; la matriz A toma el nombre de matriz ***singular***.

*Es decir una matriz cuadrada es singular si su determinante es cero , asi mismo si su determinante es diferente de cero la matriz se llama no singular.

MATRIZ INVERSA

En algunas matrices puede identificarse otra matriz denominada matriz inversa. La relación entre una matriz A y su inversa (denotada por A^{-1}) es que el producto de A por A^{-1}, en uno y otro orden , da origen a una matriz identidad, es decir : $AA^{-1}=A^{-1}A=I$

OBSERVACIONES :

* Para que una matriz pueda tener inversa debe ser cuadrada.

* La inversa de A también debe ser cuadrada y de la misma dimensión de A.

* No toda matriz cuadrada posee inversa.

* Si A posee inversa se le llama no singular o inversible.

* Si A no posee inversa se le llama singular o no inversible.

DEFINICIÓN :

Sea Auna matriz cuadrada no singular , si existe una única matriz B cuadrada del mismo orden, tal que $AB=BA=I$, entonces definimos B como matriz inversa de A y lo denotamos por A^{-1}

TEOREMA:

Una matriz cuadrada tiene inversa si y sólo si es una matriz no singular , en tal caso se dice que la matriz es inversible.

$$\boxed{\exists A^{-1} \Leftrightarrow |A|\neq 0} \qquad \boxed{A\times A^{-1}=A^{-1}\times A=1}$$

EJEMPLO :

Verifiquemos que la matriz B es inversa de la matriz A al obtener los productos AB y BA, siendo :

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 5 & -7 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

* Así:

$$AB=\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & -7 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$BA=\begin{pmatrix} 5 & -7 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

* Esto significa que B es la inversa de A, es decir $B=A^{-1}$

CÁLCULO DE LA MATRIZ INVERSA

1) ORDEN UNO :

$$\boxed{A=(a)\Rightarrow A^{-1}=\left(\frac{1}{a}\right);\quad a\neq 0}$$

2) ORDEN DOS:

$$\boxed{A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix};\quad |A|\neq 0}$$

EJEMPLO 1 :

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -5 & -3 \end{pmatrix}\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{-2}\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 1 \\ -\frac{5}{2} & -2 \end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix}4 & 1\\ 7 & 2\end{pmatrix}\Rightarrow B^{-1}=\frac{1}{1}\begin{pmatrix}2 & -1\\ -7 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -7 & 4\end{pmatrix}$$

EJEMPLO 2 :

Calcular la matriz inversa de:

$$A=\begin{pmatrix}5 & -7\\ -1 & 2\end{pmatrix}$$

RESOLUCIÓN:

- $|A|=5\times 2-7=3$

$$\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2 & 7\\ 1 & 5\end{pmatrix}\Rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{2}{3} & \frac{7}{3}\\ \frac{1}{3} & \frac{5}{3}\end{pmatrix}$$

OBTENCIÓN DE LA MATRIZ INVERSA (MÉTODO DE GAUSS – JORDÁN)

Hay diversos métodos para calcular la inversa de una matriz . Uno de ellos se basa en el procedimiento de eliminación gaussiana, que consiste en transformar la matriz inicial en una equivalente por medio de las transformaciones elementales explicadas en la sección anterior.

Para determinar la inversa de una matriz cuadrada **A**:

I) Se forma la matriz ampliada compuesta por la matriz **A** y la matriz identidad del mismo orden de **A** , lo cual da como resultado ***(A/I)***

II) Se efectúan las operaciones solo por filas en toda la matriz ampliada, de manera que **A** se transforme en una matriz identidad . La matriz resultante presentará la forma ***(I/A⁻¹)*** de donde A^{-1} se puede leer a la derecha de la línea punteada.

$$\boxed{(A:I)\xrightarrow{O.E.F.}(I:B)\rightarrow A^{-1}=B}$$

EJEMPLO 1:

Calcular la matriz inversa de :

$$A=\begin{pmatrix}3 & 7\\ 2 & 5\end{pmatrix}$$

RESOLUCIÓN :

$$\left(\begin{array}{cc:cc}3 & 7 & 1 & 0\\ 2 & 5 & 0 & 1\end{array}\right)\xrightarrow{\frac{1}{3}\times f_1}\left(\begin{array}{cc:cc}1 & \frac{7}{3} & \frac{1}{3} & 0\\ 2 & 5 & 0 & 1\end{array}\right)\xrightarrow{f_2-2f_1}$$

$$\left(\begin{array}{cc:cc}1 & \frac{7}{3} & \frac{1}{3} & 0\\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 1\end{array}\right)\xrightarrow{3\times f_2}\left(\begin{array}{cc:cc}1 & \frac{7}{3} & \frac{1}{3} & 0\\ 0 & 1 & -2 & 3\end{array}\right)\xrightarrow{f_1-\frac{7}{3}f_2}\left(\begin{array}{cc:cc}1 & 0 & 5 & -7\\ 0 & 1 & -2 & 3\end{array}\right)$$

$$\rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix}5 & -7\\ -2 & 3\end{pmatrix}$$

OBSERVACIONES :

* Si la matriz no tiene inversa , no será posible transformar **A** en una matriz identidad.

* No todas las matrices cuadradas poseen inversa , pero si la poseen , es única.

* La posibilidad de existencia de la matriz A^{-1} se denota de la siguiente manera:

a) A^{-1} existe $\Leftrightarrow A\sim I$ (Método de Gauss – Jordan)

b) A^{-1} existe $\Leftrightarrow A_{n\times n}X=B$ (tiene solución única)

c) Si el proceso de reducción conduce a una fila nula en la parte correspondiente a la matriz **A**, entonces A es singular.

* Recuerda que en el álgebra matricial la operación de división no existe ; esta es reemplazada de alguna forma por la inversión. Es decir , si se quiere despejar **X** en la ecuación matricial,

$$\boxed{AX=B\Rightarrow X=A^{-1}B}$$

EJEMPLO 2 :

Calcular la inversa de :

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 5 & 3\\ 1 & 0 & 8\end{pmatrix}$$

NOTA:

Se desea reducir **A** hacia la matriz identidad por operaciones sobre las filas y, simultaneamente , aplicar estas operaciones a **I** para producir A^{-1}.

RESOLUCIÓN :

* Formamos la matriz ampliada , adjuntando la matriz identidad a la derecha de **A**.

* Aplicamos las operaciones sobre las filas a ambos lados, hasta que el lado izquierdo se reduce a **I**.

* La matriz final tendrá esta forma : $[I:A^{-1}]$

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc}1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0\\ 2 & 5 & 3 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 8 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\xrightarrow[\text{A la fila 2 le restamos dos veces la fila 1 y a la fila 3 le restas la fila 1.}]{f_2-2f_1,\ f_3-f_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc}1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0\\ 0 & -2 & 5 & -1 & 0 & 1\end{array}\right)\xrightarrow[\text{A la fila 3 le sumas dos veces la fila 2.}]{f_3+2f_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc}1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1 & -5 & 2 & 1\end{array}\right)\xrightarrow[\text{Multiplicamos la fila 3 por -1.}]{-f_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc}1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1\end{array}\right)\xrightarrow[\text{A la fila 2 le sumas tres veces la fila 3 y la fila 1 le restas tres veces la fila 3.}]{f_2+3f_3,\ f_1-3f_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc}1 & 2 & 0 & -14 & 6 & 3\\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3\\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1\end{array}\right)\xrightarrow[\text{A la fila 1 le restas dos veces la fila 2.}]{f_1-2f_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc}1 & 0 & 0 & -40 & 16 & 9\\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3\\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1\end{array}\right)$$

* Por tanto la inversa de A es:

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}-40 & 16 & 9\\ 13 & -5 & -3\\ 5 & -2 & -1\end{pmatrix}$$

PROPIEDADES:

Sean A y B matrices cuadradas no singulares y λ un escalar distinto de cero.

1) $A\times A^{-1}=A^{-1}\times A=I$

2) $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$

3) $(A^{-1})^{-1}=A$

4) $(\lambda A)^{-1}=\lambda^{-1}A^{-1}$

5) $|A^{-1}|=|A|^{-1}=\dfrac{1}{|A|}$

6) Si: $A\times A^{T}=I$; se dice que A es ***ortogonal***

7) $(I^{-1})^{-1}=I$ 8) $(A^{\lambda})^{-1}=(A^{-1})^{\lambda}$

9) $(A^{T})^{-1}=(A^{-1})^{T}$

MATRIZ DE COFACTORES

Sea la matriz

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}$$

* Si A_{ij} es el cofactor del elemento A_{ij}, entonces la matriz:

$$Cof(A)=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12} & \cdots & \cdots & A_{1n}\\ A_{21} & A_{22} & \cdots & \cdots & A_{2n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & \cdots & A_{nn}\end{pmatrix}$$

A este matriz se le llama matriz de cofactores.

ADJUNTA DE UNA MATRIZ

A la transpuesta de la matriz de cofactores se le llama adjunta de la matriz A.

$$\Rightarrow \boxed{AdjA=[Cof(A)]^{t}}$$

EJEMPLO 1:

Sea la matriz : $A=\begin{pmatrix}8 & 6\\ 1 & 7\end{pmatrix}$

$$A_{11}=7\,;\,A_{12}=-1\,;\,A_{21}=-6\,;\,A_{22}=8$$

$$\text{matriz } cof\,A=\begin{pmatrix}7 & -1\\ -6 & 8\end{pmatrix}\Rightarrow Adj\,A=\begin{pmatrix}7 & -6\\ -1 & 8\end{pmatrix}$$

PROPIEDAD :

Sea A una matriz invertible, entonces la matriz inversa está dada por : $\boxed{A^{-1}=\dfrac{Adj\,A}{|A|}}$

OBSERVACIÓN :

$|Adj\,A|=|A|^{n-1}$; donde n es el orden de la matriz A

EJEMPLO 2 :

* Del ejemplo anterior :

Si : $A=\begin{pmatrix}8 & 6\\ 1 & 7\end{pmatrix}\rightarrow|A|=50$ y Adj $A=\begin{pmatrix}7 & -1\\ -6 & 8\end{pmatrix}$

* Luego :

$$A^{-1}=\frac{\text{Adj }A}{|A|}=\frac{\begin{pmatrix}7 & -6\\ -1 & 8\end{pmatrix}}{50}=\begin{pmatrix}\frac{7}{50} & -\frac{3}{25}\\ -\frac{1}{50} & \frac{4}{25}\end{pmatrix}$$

EJEMPLO 3 :

Calcular la inversa de :

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -2 & 1\\ 4 & 2 & 1\end{pmatrix}$$

RESOLUCIÓN:

* Sea la matriz de cofactores :

$$A_C=\begin{pmatrix}C_{11} & C_{12} & C_{13}\\ C_{21} & C_{22} & C_{23}\\ C_{31} & C_{32} & C_{33}\end{pmatrix}$$

* Calculamos :

$$C_{11}=+\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix}=-4\ ;\ C_{21}=-\begin{vmatrix}2 & 3\\ 2 & 1\end{vmatrix}=4$$

$$C_{31}=+\begin{vmatrix}2 & 3\\ -2 & 1\end{vmatrix}=8$$

$$C_{23}=-\begin{vmatrix}1 & 2\\ 4 & 2\end{vmatrix}=6\ ;C_{33}=+\begin{vmatrix}1 & 2\\ 0 & -2\end{vmatrix}=-2$$

* Luego : $A_C=\begin{pmatrix}-4 & 4 & 8\\ 4 & -11 & 6\\ 8 & -1 & -2\end{pmatrix}$

* La matriz $Adj(A)$ es la transpuesta de la matriz de cofactores (A_C) :

$$AdjA = A_C^t = \begin{pmatrix} -4 & 4 & 8 \\ 4 & -11 & -1 \\ 8 & 6 & -2 \end{pmatrix}$$

*Calculamos la determinante de la matriz «A».

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 28 \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{28}\begin{pmatrix} -4 & 4 & 8 \\ 4 & -11 & -1 \\ 8 & 6 & -2 \end{pmatrix}$$

PROPIEDAD :

Si los elementos de una fila o columna de un determinante son la suma algebraica de varias cantidades, la determinante se descompone en tantos determinantes como términos tiene la suma.

$$\begin{vmatrix} a_1+m_1 & b_1 & c_1 \\ a_2+m_2 & b_2 & c_2 \\ a_3+m_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} m_1 & b_1 & c_1 \\ m_2 & b_2 & c_2 \\ m_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

EJEMPLO:

M es una matriz cuadrada de orden n definida por :

$$M = \begin{pmatrix} a_1+b_1 & a_1+b_2 & \cdots & \cdots & a_1+b_n \\ a_2+b_1 & a_2+b_2 & \cdots & \cdots & a_2+b_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_n+b_1 & a_n+b_2 & \cdots & \cdots & a_n+b_n \end{pmatrix}$$

entonces el $det(M)$ es :

RESOLUCIÓN :

* por propiedad desdoblamos en sumandos :

$$det(M) = \begin{vmatrix} a_1 & a_1+b_2 & a_1+b_3 & \cdots & a_1+b_n \\ a_2 & a_2+b_2 & a_2+b_3 & \cdots & a_2+b_n \\ a_3 & a_3+b_2 & a_3+b_3 & \cdots & a_3+b_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n & a_n+b_2 & a_n+b_3 & \cdots & a_n+b_n \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} b_1 & a_1+b_2 & a_1+b_3 & \cdots & a_1+b_n \\ b_2 & a_2+b_2 & a_2+b_3 & \cdots & a_2+b_n \\ b_3 & a_3+b_2 & a_3+b_3 & \cdots & a_3+b_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & a_n+b_2 & a_n+b_3 & \cdots & a_n+b_n \end{vmatrix}$$

*En el primero: $C_2 - C_1$, $C_3 - C_1$, y en el segundo, luego de sacar factor b_1, hacemos $C_2 - b_2C_1 C_3 - b_3C_1$:

$$det(M) = \begin{vmatrix} a_1 & b_2 & b_3 & \cdots & a_1+b_n \\ a_2 & b_2 & b_3 & \cdots & a_2+b_n \\ a_3 & b_2 & b_3 & \cdots & a_3+b_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n & b_2 & b_3 & \cdots & a_n+b_n \end{vmatrix} + b_1 \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1 & \cdots & a_1+b_n \\ 1 & a_2 & a_2 & \cdots & a_2+b_n \\ 1 & a_3 & a_3 & \cdots & a_3+b_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n & \cdots & a_n+b_n \end{vmatrix}$$

* En la primera los elementos de $C_2 \wedge C_3$ son respectivamente proporcionales, por lo que su determinante es 0 ; y en el segundo los elementos de $C_2 \wedge C_3$ son iguales , también su determinante es 0.

Luego : $det(M) = 0 + b_1(0) = 0$

!RECUERDA¡

DETERMINANTE : Notación matemática formada por una tabla cuadrada de números, u otros elementos, entre dos líneas verticales; el valor de la expresión se calcula mediante su desarrollo siguiendo ciertas reglas. Los determinantes fueron originalmente investigados por el matemático japonés Seki Kowa alrededor de 1683 y, por separado, por el filósofo y matemático alemán Gottfried Wilhhelm Leibniz alrededor de 1693. Esta notación se utiliza en casi todas las ramas de las matemáticas y en las ciencias naturales.

Para calcular un determinante de orden superior a 3, el proceso anterior sería muy largo y engorroso En general el determinante de orden «n» sería el resultado de sumar todos los posibles productos de «n» elementos , uno de cada fila y de cada columna, afectado del signo + ó – segun si el número de inversiones es par ó impar. Así pues, para simplificar dicho cálculo se va reduciendo el orden del determinante, aplicando las siguientes propiededes :

1) El determinante de una matriz cuadrada es igual al determinante de su traspuesta, ya que al cambiar las filas por las columnas los productos quedan iguales y con igual signo.

2) Al intercambiar dos líneas paralelas consecutivas (filas o columnas) de una matriz, el determinante cambia de signo, pero no varía su valor absoluto (ya que todos los elementos cambian de índice en la permutación)

3) Si se multiplican por la constante k todos los elementos de una línea (fila o columna) de la matriz, el determinante de esta matriz queda multiplicada por k.

4) Si una matriz cuadrada tiene dos líneas peralelas iguales, entonces su determinante vale 0.

5) Si una matriz cuadrada tiene dos líneas paralelas (filas o columnas) proporcionales, su determinante vale 0.

6) Si todos los elementos de una fila (linea o columna) de una matriz cuadrada son cero, el determinante de dicha matriz es cero. (ya que en el desarrollo de un determinante, aparece un factor de cada fila y de cada columna, y por tanto, en cada término aparecerá un cero como factor).

7) Si cada elemento de una línea de una matriz cuadrada se escribe como suma de dos sumandos, el determinante de dicha matriz es igual a la suma de dos determinantes que tienen iguales todas las líneas, excepto la línea de la descomposición, en la que el primer determinante tiene el primer sumando de cada elemento del inicial y el segundo determinante tiene el segundo sumando.

8) Si una línea de una matriz cuadrada es combinación lineal de dos o más líneas paralelas a ella, entonces, el determinante de la matriz vale 0.

9) El determinante de una matriz cuadrada no cambia si se le suma a una línea cualquiera una combinación lineal de otras líneas paralelas a ella.

10) Todo determinante de una matriz cuadrada se puede convertir en otro del mismo valor que el dado, tal que todos los elementos de una línea, previamente elegida, sean cero excepto uno de ellos.

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1:

Resolver la ecuación: $\begin{vmatrix} x & 1 \\ 4 & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & 0 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + 8 = 0$

A)-2 B)3 C)0 D)-1 E)7

RESOLUCIÓN :

* Desarrollando las determinantes, se obtiene:
$(x^2-4)+(4x-0)+8=0 \Rightarrow x^2+4x+4=0$

$\Rightarrow (x+2)^2=0 \Rightarrow x=-2$

RPTA: "A"

PROBLEMA 2 :

Si : $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ Calcular : $det(A \cdot A^t)$

A)1 B)2 C)3 D) 4 E)5

RESOLUCIÓN :

* Primero : $A \,.\, A^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

* Luego : $det\ (A \times A^t) = 5 \times 1 - 1 \times 1 = 4$

RPTA: "D"

PROBLEMA 3 :

Calcular el resto de la división de polinomios equivalente a :

$$\frac{\begin{vmatrix} x & 0 \\ 1 & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x^2 & 1 \\ 1 & x \end{vmatrix} - 4}{x-1}$$

A)-2 B)-3 C)-4 D) 0 E)5

RESOLUCIÓN :

* Por el teorema del resto, se sigue los siguientes pasos :

I) Se iguala el divisor a cero :

$x-1=0 \rightarrow x=1$

II) Se reemplaza este valor en el dividendo, el resultado es el resto :

$\text{Resto} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1^2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 4 = 1 + 0 - 4 = -3$

RPTA: "B"

PROBLEMA 4 :

Sea la matriz $H=\begin{pmatrix} x^2 & -3 \\ x & 1 \end{pmatrix}$ tal que $det(H)=4$

Luego , H^2 es:

A) $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ B) $\begin{pmatrix} 16 & -3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$ C) $\begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$ D) $\begin{pmatrix} -2 & -6 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$

RESOLUCIÓN:

* Del dato : $det(H)=4$

$x^2(1)-x(-3)=4$

$\Rightarrow (x-1)(x+4)=0 \Rightarrow x=1$ ó $x=-4$

* Evaluando para $x=1$, resulta :

$H^2 = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -6 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$

RPTA: "D"

PROBLEMA 5 :

Calcular el valor de «m» de modo que la ecuación equivalente a:

$$\begin{vmatrix} \begin{vmatrix} x & 1 \\ 1 & m \end{vmatrix} & 0 \\ 4 & \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ x & 1 \end{vmatrix} \end{vmatrix} = 0$$

tenga raíces iguales.

A)2/5 B)-2/5 C)1/5 D) 1/3 E)4

RESOLUCIÓN:

* Desarrollando los determinantes internos, se obtiene : $\begin{vmatrix} xm-1 & 0 \\ 4 & 5-x \end{vmatrix} = 0$

* De aquí : $(xm-1)(5-x) - 0{,}4 = 0$
$\rightarrow mx^2-(1+5m)x+5=0$

* Como deben tener raíces iguales : $\boxed{\Delta=0}$

$(5m-1)^2=0$

* De aquí : $m=\dfrac{1}{5}$

RPTA: "C"

PROBLEMA 6 :

Determine todos los valores de k para $det(A)=0$, si : $A=\begin{pmatrix} k-1 & -2 \\ 1 & k-4 \end{pmatrix}$

A)2 ó 4 B) 3 ó 7 C) 2 ó 3 D) 7 ó 1

RESOLUCIÓN :

* Del dato : $\begin{vmatrix} k-1 & -2 \\ 1 & k-4 \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow (k-1)(k-4)+2=0 \Rightarrow k^2-5k+6=0$

$\Rightarrow (k-2)(k-3)=0 \Rightarrow k=2$ ó $k=3$

RPTA: "C"

PROBLEMA 7 :

Calcular el valor de : $E=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{vmatrix}$

A)1 B)2 C)3 D) 0 E)-1

RESOLUCIÓN:

* Restando columnas : C_4-C_3 y C_3-C_2

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3-2 & 4-3 \\ 2 & 3 & 4-3 & 5-4 \\ 3 & 4 & 5-4 & 6-5 \\ 4 & 5 & 6-5 & 7-6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

*La determinante es nula pues existen dos columnas idénticas : $E = 0$

RPTA: "D"

PROBLEMA 8 :

Calcular :

$$d(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

A)7 B)–16 C)–8 D) 6 E)4

RESOLUCIÓN :

* Restando la primera fila a todas las demás obtenemos:

$$d(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1-1 & -1-1 & 2-1 & 2-1 \\ 1-1 & 1-1 & -1-1 & 3-1 \\ 1-1 & 1-1 & 1-1 & -1-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

*La forma del determinante es triangular superior esto implica que $d(A)$ es igual producto de todos los elementos de la diagonal principal.

$$d(A) = (1)(-2)(-2)(-2) = -8$$

RPTA: "C"

PROBLEMA 9 :

Si M es una matriz definida por

$$M = \begin{pmatrix} 6 & 7 & 8 & 5 \\ 5 & 7 & 8 & 5 \\ 5 & 5 & 8 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$, entonces el valor del $det(M)$ es:

A)5 B)10 C)15 D) 25 E)30

RESOLUCIÓN :

* Aplicando sucesivamente : C_1-C_4; C_2-C_4 y C_3-C_4, resulta

$$det(M) = \begin{vmatrix} 6 & 7 & 8 & 5 \\ 5 & 7 & 8 & 5 \\ 5 & 5 & 8 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\rightarrow det(M) = 1 \times 2 \times 3 \times 5 = 30$$

RPTA: "E"

PROBLEMA 10:

Calcular :

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

A)2 B)3 C)4 D) 5 E)0

RESOLUCIÓN :

* Aplicando el método de cofactores, en la primera columna , resultando :

$$+(1)\underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}}_{-1} - (0)\begin{vmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} + (-1)\underbrace{\begin{vmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}}_{-6} - (0)\begin{vmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -1 + 6 = 5$$

RPTA: "D"

PROBLEMA 11 :

Calcular $det(A)$ siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 5 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

A)0 B)6 C)–16 D)8 E)14

RESOLUCIÓN :

* Eligiendo la fila 3 :

$$|A| = 0\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \rightarrow |A| = -16$$

RPTA: "B"

PROBLEMA 12 :

Calcular el valor de x , si:

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ 3 & -2 & -2 \\ -4 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 5$$

A)6 B)0 C)–6 D) 4 E)1

RESOLUCIÓN :

* Eligiendo la fila 1 , para desarrollar el determinante :

$$x\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} = 5$$

$$\Rightarrow x(-10-(-8))-(15-8) = 5$$

$$\Rightarrow -2x - 7 = 5 \Rightarrow x = -6$$

RPTA: "C"

PROBLEMA 13 :

Considere la matriz A tal que :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Dar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I) Su traza es múltiplo de 2

II) La determinante es 3

III) Es una matriz singular

A)VVF B)FFF C)FVF D) FFF E)FFV

RESOLUCIÓN:

I) Su traza es : $2+1+3=6=\overset{o}{2}$

....**VERDADERA)**

II) Calculando su determinante :

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} \xrightarrow[f_2-f_3]{f_1-f_3} \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3(1) = 3$$

....**(VERDADERA)**

III) Si $|A| \neq 0 \Rightarrow$ no es singular..............**(FALSA)**

RPTA: "A"

PROBLEMA 14 :

Dada la matriz A tal que :

$$A=\begin{vmatrix} x^2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & x \\ y & x-2 & -5 \end{vmatrix}$$

Se tiene que su traza es *1* y el producto de sus elementos de la diagonal secundaria es *–16*. Halle su determinante *(x > 0)*

A)8 *B)–36* *C)0* *D) 40* *E)80*

RESOLUCIÓN :

I) $\text{Traza}(A)=x^2+2-5=1 \rightarrow x^2=4$

$$\text{como } x>0 \Rightarrow x=2$$

II) Producto de elementos de la diagonal secundaria:

$$y\times 2\times 1=-16 \Rightarrow y=-8$$

III) $|A|=\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ -8 & 0 & -5 \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ -8 & 0 & -5 & -8 & 0 \end{vmatrix}$$

(– – – arriba; + + + abajo)

$$=-40-32+0-(-16)-0-(-10)=-72+36=-36$$

RPTA: "B"

PROBLEMA 15 :

Calcular

$$|A|, \text{ si } |A|=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

A)0 *B)1* *C)5* *D) -7* *E)8*

RESOLUCIÓN :

* Todos los elementos de la tercera fila, salvo uno, son ceros, de este modo el cálculo de $|A|$ conviene hacerlo por la fila *3* , resultando :

$$-5\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$ desarrollamos este determinante ahora por la primera columna

$$=-5\left\{(1)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}+(-2)\left(-\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}\right)+0\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix}\right\}$$

$$=-5\{5-2(3)+0\}=5$$

RPTA: "C"

PROBLEMA 16 :

Si $det(A)=5$, donde $|A|=\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$, encuentre:

$I)\det\begin{vmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ a & b & c \end{vmatrix}$ $\quad II)\det\begin{vmatrix} 3a & 3b & 3c \\ d & e & f \\ 4g & 4h & 4i \end{vmatrix}$

RESOLUCIÓN :

I) Como aqui se han efectuado **2** intercambios de filas , entonces : $det(A_1)=(-1)^2|A|=5$

II) La primera fila se multiplica por *3* , entonces $|A|$, queda multiplicada por **3** , y como la tercera fila se multiplica por *4* , entonces $|A|$ queda multiplicada por *4.*

* Luego $det(A_2)=3\times 4\times 5=60$

PROBLEMA 17 :

Determinar los valores del número real x para que la matriz : $A=\begin{bmatrix} \sqrt{x+3} & 1 \\ 3 & \sqrt{x-5} \end{bmatrix}$ sea invertible.

A)$x\leq 5$ *B)$x\geq 0$* *C)$x\geq 5$*
D)$x\geq -3$ *E)$x\geq 5$ y $x\neq 6$*

RESOLUCIÓN :

* Para que sea invertible : $det(A)\neq 0$

$$\sqrt{x-5}\sqrt{x+3}-3\neq 0 \text{ y } \forall x\geq 5$$

$$\Rightarrow (x-5)(x+3)\neq 9 \Rightarrow x^2-2x-15\neq 9$$

$$x^2-2x-24\neq 0$$

$x \quad -6$
$x \quad 4$

$$\Rightarrow x\neq 6 \wedge x\neq -4 \Rightarrow x\geq 5 \wedge x\neq 6$$

RPTA: "E"

PROBLEMA 18 :

Sea la matriz $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & \frac{bc+x}{a} \end{bmatrix}$. Los valores de todos

los x para los cuales existe una matriz B tal que $AB = BA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ son:

A)0 B)1 C)Todo número real
D) Todo real no nulo E)Todo real positivo

RESOLUCIÓN :

* Del último dato , se obtiene : $B = \frac{1}{A} = A^{-1}$

$\Rightarrow det(A) \neq 0$, para que $\exists B$

$\Rightarrow |A| = a\frac{(bc+x)}{a} - cb \neq 0 \Rightarrow bc + x - cb \neq 0$

$\Rightarrow x \neq 0 \Rightarrow x \in R - \{0\}$

RPTA: "D"

PROBLEMA 19 :

Si $x \in R^2$ es solución del sistema $Ax = b$ calcular $TRAZ(x^t b)$

Donde: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}; b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

A)0 B)1 C)2 D)3 E)1/2

RESOLUCIÓN :

* Como : $|A| = (1)(1) - (2)(1) = -1 \neq 0$

$\Rightarrow$ A tiene inversa

$$A^{-1} = \frac{1}{(-1)}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

* Además de : $Ax = b$

$$\Rightarrow x = A^{-1}b \Rightarrow x = -\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

* Transpuesta de x : $x^t = [-1 \;\; 3]$

$$\Rightarrow x^t b = [-1 \;\; 3]\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = (-1)(2) + (3)(1)$$

$\Rightarrow Traza(x^t b) = 1$

RPTA: "B"

PROBLEMA 20 :

Halle la matriz inversa de :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

RESOLUCIÓN :

* Por el método de Gauss – Jordan :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \frac{2f_1 + f_2}{3f_1 + f_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\frac{1f_2 + f_1}{1f_3 + f_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 6 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

PROBLEMA 21 :

Sea $f(x) = x + \frac{1}{x} + 1$. Halle la traza de $f(A)$ tal que: $A = |A|\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

A)6 B)-2 C)0 D)4 E) $\sqrt{2}$

RESOLUCIÓN:

* Como : $f(x) = x + \frac{1}{x} + 1 \Rightarrow \boxed{f(A) = A + A^{-1} + I}$

* De $A = |A|\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ tomando determinante

$$A = |A|^2\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow |A| = |A|^2(3) \Rightarrow |A| = 0 \vee |A| = \frac{1}{3}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow f(A) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow f(A) = \begin{pmatrix} \frac{8}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{10}{3} \end{pmatrix} \Rightarrow Traz(f(A)) = 6$$

RPTA: "A"

PROBLEMA 22 :

Si A es una matriz definida mediante: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, entonces el valor de la $traz(A^{-1})$ es:

A)2 B)-2 C)0 D) -1 E)1

RESOLUCIÓN :

* Por el método de Gauss – Jordan :

$$[A \mid I] = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underline{f_2 \times f_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \frac{f_1 - 2f_2}{\frac{1}{2}f_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{array}\right) \underline{f_1 - f_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{array}\right) = [I \mid B]$$

$$\Rightarrow B = A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

* Luego : $traz(A^{-1}) = 1$

RPTA: "E"

PROBLEMA 23 :

Si A es una matriz definida por : $A=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&1&3\\3&0&0\end{pmatrix}$, entonces el valor de la $traz(A^{-1})$ es:

A) $\frac{1}{9}$ B) $\frac{2}{9}$ C) $\frac{4}{9}$ D) $\frac{5}{9}$ E) $\frac{7}{9}$

RESOLUCIÓN:

$$[A\,|\,I]=\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&1&0&1&0&0\\0&1&3&0&1&0\\3&0&0&0&0&1\end{array}\right)\ \underline{f_1\times\frac{1}{3}f_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&0&0&\frac{1}{3}\\0&1&3&0&1&0\\2&1&0&1&0&0\end{array}\right)\ \underline{f_3-2f_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&0&0&\frac{1}{3}\\0&1&3&0&1&0\\0&1&0&1&0&-\frac{2}{3}\end{array}\right)\ \underline{f_2\times f_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&0&0&\frac{1}{3}\\0&1&0&1&0&-\frac{2}{3}\\0&1&3&0&1&0\end{array}\right)\ \underline{f_3-f_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&0&0&\frac{1}{3}\\0&1&0&1&0&-\frac{2}{3}\\0&0&3&-1&1&\frac{2}{3}\end{array}\right)\ \underline{\frac{1}{3}f_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&0&0&\frac{1}{3}\\0&1&0&1&0&-\frac{2}{3}\\0&0&1&-\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{2}{9}\end{array}\right)=[I\,|\,A^{-1}]\Rightarrow Traz(A^{-1})=\frac{2}{9}$$

RPTA: "B"

PROBLEMA 24 :

Si: $A^TB^T=I$, $A=\begin{vmatrix}0&0&3\\0&2&-1\\1&-1&4\end{vmatrix}$; calcular $|B|$; donde I: matriz identidad.

A) 5 B) $-\frac{1}{6}$ C) 2 D) 4 E) −5

RESOLUCIÓN:

* De : $|A^TB^T|=|I|\Rightarrow|A^T||B^T|=1$

$$\Rightarrow|A||B|=I\Rightarrow|B|=\frac{1}{|A|}$$

*Pero :

$$|A|=\begin{vmatrix}0&0&3\\0&2&-1\\1&-1&4\end{vmatrix}=0\begin{vmatrix}2&-1\\-1&4\end{vmatrix}+0\begin{vmatrix}0&3\\-1&4\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}0&3\\2&-1\end{vmatrix}=-6$$

* Entonces : $|B|=-\frac{1}{6}$

RPTA: "B"

PROBLEMA 25 :

Hallar B^{-1}, si $B=|B|\begin{pmatrix}2&4&6\\3&5&6\\2&4&5\end{pmatrix}$, $|B|>0$.

RESOLUCIÓN :

* Del dato , se obtiene : $B^{-1}=\frac{1}{|B|}\begin{pmatrix}2&4&6\\3&5&6\\2&4&5\end{pmatrix}^{-1}$ ...(α)

* Además :

$$|B|=|B|^3\begin{vmatrix}2&4&6\\3&5&6\\2&4&5\end{vmatrix}=|B|^3\times(2)\Rightarrow|B|=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

*Reemplazando en (α) : $B^{-1}=\sqrt{2}\begin{pmatrix}2&4&6\\3&5&6\\2&4&5\end{pmatrix}^{-1}$

$$\Rightarrow B^{-1}=\sqrt{2}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&2&-3\\-\frac{3}{2}&-1&3\\1&0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}&2\sqrt{2}&-3\sqrt{2}\\-\frac{3\sqrt{2}}{2}&-\sqrt{2}&3\sqrt{2}\\\sqrt{2}&0&-\sqrt{2}\end{pmatrix}$$

PROBLEMA 26 :

Calcular el valor del determinante de la matriz A:

$$A=\begin{pmatrix}1^2&2^2&3^2&4^2\\2^2&3^2&4^2&5^2\\3^2&4^2&5^2&6^2\\4^2&5^2&6^2&7^2\end{pmatrix}$$

A) 1 B) 2006 C) 11 D) 0 E) −1

RESOLUCIÓN:

$$A=\begin{vmatrix}1&4&9&16\\4&9&16&25\\9&16&25&36\\16&25&36&49\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&3&5&7\\4&5&7&9\\9&7&9&11\\16&9&11&13\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&3&2&2\\4&5&2&2\\9&7&2&2\\16&9&2&2\end{vmatrix}=0$$

C_2-C_1 ; C_3-C_2 ; $C_4-C_3C_3-C_2$; C_4-C_3 idéntica

RPTA: "D"

PROBLEMA 27 :

Si A es una matriz definida por

$$A=\begin{pmatrix}a-1&4a+1&3a+2&2a+3\\x+2&3-x&1-2x&5x-2\\y+6&3y+6&1+2y&4-y\\z+a&3z+a+b&2z+b&2b+z-1\end{pmatrix}$$, entonces el

www.SIGLO21X.blogspot.com

valor del $det(A)$ es:

A) $y+2z-a$ B) $a+2x-1$ C) 1 D) 0 E) $y+b$

RESOLUCIÓN:

* Haciendo primero : $C_2 - C_1$

$$det(A)=\begin{vmatrix} a-1 & 3a+2 & 3a+2 & 2a+3 \\ x+2 & 1-2x & 1-2x & 5x-2 \\ y+5 & 2y+1 & 1+2y & 4-y \\ z+a & 2z+b & 2z+b & 2b+z-1 \end{vmatrix}$$

* $C_2 - C_3$:

$$det(A)=\begin{vmatrix} a-1 & 0 & 3a+2 & 2a+3 \\ x+2 & 0 & 1-2x & 5x-2 \\ y+5 & 0 & 1+2y & 4-y \\ z+a & 0 & 2z+b & 2b+z-1 \end{vmatrix}=0$$

RPTA: "D"

PROBLEMA 28 :

Si A es una matriz definida por :

$$A=\begin{vmatrix} h & -1 & 0 & 0 \\ hx & h & -1 & 0 \\ hx^2 & hx & h & -1 \\ hx^3 & hx^2 & hx & h \end{vmatrix}$$, entonces el valor del $det(A)$ es :

A) $h^3(x+h)^3$ B) $x^3(x+h)$ C) $(x+h)^3$

D) $x(x+h)^3$ E) $h(x+h)^3$

RESOLUCIÓN:

* Haciendo : $C_2 - xC_3$

$$det(A)=\begin{vmatrix} h+x & -1 & 0 & 0 \\ 0 & h & -1 & 0 \\ 0 & hx & h & -1 \\ 0 & hx^2 & hx & h \end{vmatrix} \underrightarrow{c_2 - xc_3}$$

$$det(A)=\begin{vmatrix} h+x & -1 & 0 & 0 \\ 0 & h+x & -1 & 0 \\ 0 & 0 & h & -1 \\ 0 & 0 & hx & h \end{vmatrix} \underrightarrow{c_3 - xc_4}$$

$$det(A)=\begin{vmatrix} h+x & -1 & 0 & 0 \\ 0 & h+x & -1 & 0 \\ 0 & 0 & h+x & -1 \\ 0 & 0 & 0 & h \end{vmatrix}$$

$\Rightarrow det(A)=(h+x)(h+x)(h+x)h=(h+x)^3h$

RPTA: "E"

PROBLEMA 29 :

Si A es una matriz definida por :

$$A=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & -5 & 7 \\ 2 & 0 & -1 & -5 & 6 \\ 4 & 7 & 3 & -9 & 4 \\ 3 & 1 & -2 & -2 & 3 \\ -5 & -1 & 3 & 7 & -9 \end{vmatrix}$$, entonces el valor del $det(A)$ es:

A) 35 B) -45 C) 16 D) 14 E) 0

RESOLUCIÓN :

* Haciendo :

$$\begin{matrix} \underline{f_2-2f_1} \\ \underline{f_3-4f_1} \\ \underline{f_4-3f_1} \\ \underline{f_5+4f_1} \end{matrix} \quad |A|=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & -5 & 7 \\ 0 & 4 & -7 & 5 & -8 \\ 0 & 15 & -9 & 11 & -24 \\ 0 & 7 & -11 & 13 & -18 \\ 0 & -11 & 18 & -18 & 26 \end{vmatrix}$$

* Luego :

$$\underline{f_5+(f_2+f_4)}\,|A|=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & -5 & 7 \\ 0 & 4 & -7 & 5 & -8 \\ 0 & 15 & -9 & 11 & -24 \\ 0 & 7 & -11 & 13 & -18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}=0$$

RPTA: "E"

PROBLEMA 30 :

Si A es una matriz definida por

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$, entonces el valor del $det(A)$ es:

A) $-3(5^4)$ B) 5^4 C) $2(5^4)$ D) $3(5^4)$ E) $5(3^4)$

RESOLUCIÓN :

* Sumando todas las columnas a la primera, resulta:

$$|A|=\begin{vmatrix} 1+2+3+4+5 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1+2+3+4+5 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1+2+3+4+5 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 1+2+3+4+5 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 1+2+3+4+5 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{vmatrix}$$

* Luego :

$$|A|=\left(\frac{5\times6}{2}\right)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \underline{f_5-f_4} \\ \underline{f_4-f_3} \\ \underline{f_3-f_2} \\ \underline{f_2-f_1} \end{matrix}$$

$$\Rightarrow |A|=5\times3\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 4 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & -1 \end{vmatrix}$$

* Por menores complementarios:

$$|A| = 15\begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ 4 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 4 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \underrightarrow{c_4 - c_3} \\ \underrightarrow{c_3 - c_2} \\ \underrightarrow{c_2 - c_1} \end{matrix}$$

$$\Rightarrow |A| = 15\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -5 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & -5 & 0 \\ -1 & 0 & 5 & -5 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow |A| = 15(-1)(-5)(-5)(-5) = 3(5^4)$$

RPTA: "D"

PROBLEMA 31 :

Si A es una matriz definida por

$$A = \begin{pmatrix} a & 2a & 3a & 4a & 5a \\ -a & 0 & 3a & 4a & 5a \\ -a & -2a & 0 & 4a & 5a \\ -a & -2a & -3a & 0 & 5a \\ -a & -2a & -3a & -4a & 0 \end{pmatrix}$$, entonces el valor del $det(A)$ es:

A) 0 B) $6a^5$ C) $24a^5$ D) $120a^5$ E) $1720a^5$

RESOLUCIÓN:

* Haciendo $F_2+F_1; F_3+F_1; F_4+F_1$ y F_5+F_1, resulta:

$$det(A) = \begin{vmatrix} a & 2a & 3a & 4a & 5a \\ 0 & 2a & 6a & 8a & 10a \\ 0 & 0 & 3a & 8a & 10a \\ 0 & 0 & 0 & 4a & 10a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5a \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow det(A) = a(2a)(3a)(4a)(5a) = 120a$$

RPTA: "D"

PROBLEMA 32:

Sean A y B dos matrices cuadradas definidas por :

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 6 \\ 4 & 9 & 25 & 36 \\ 8 & 27 & 125 & 216 \end{vmatrix} ; B = \begin{vmatrix} 101 & 102 & 103 & 104 \\ 102 & 103 & 104 & 105 \\ 103 & 104 & 105 & 106 \\ 104 & 105 & 106 & 107 \end{vmatrix}^5$$

además: $M = |A|$ y $N = |B|$ Entonces la correcta relación entre los valores de M y N es:

A) $N > M$ B) $2N = M$ C) $N < M$ D) $MN < 0$ E) $5N > M$

RESOLUCIÓN :

* Se aprecia que el determinante de «A», es un caso particular de Vandermonde :

$$\Rightarrow M = |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 6 \\ 2^2 & 3^2 & 5^2 & 6^2 \\ 2^3 & 3^3 & 5^3 & 6^3 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow M = (3-2)(5-2)(5-3)(6-2)(6-3)(6-5)$$

$$M = 1 \times 3 \times 2 \times 4 \times 3 \times 1 = 72$$

* Luego en el segundo determinante: $f_2 - f_1 \wedge f_4 - f_3$, resulta:

$$N = \begin{vmatrix} 101 & 102 & 103 & 104 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 103 & 104 & 105 & 106 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

* Entonces: $M > N$

RPTA: "C"

PROBLEMA 33 :

Si M es una matriz definida por :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & sec^2x & tan^2x & 3 \\ 4 & 4cos^2x & -4sen^2x & 1 \\ 5 & 5sen^2x & -5cos^2x & 7 \\ 6 & 6 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$, entonces el valor del $det(M)$ es:

A) $senx cosx$ B) $(secx tanx)^2$ C) $(senx cosx)^2$ D) 0

RESOLUCIÓN :

* Haciendo $C_1 + C_3$, resulta :

$$|B| = \begin{vmatrix} 1+tan^2x & sec^2x & tan^2x & 3 \\ 4-4sen^2x & 4cos^2x & -4sen^2x & 1 \\ 5-5cos^2x & 5sen^2x & -5cos^2x & 7 \\ 6+0 & 6 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow |B| = \begin{vmatrix} sec^2x & sec^2x & tan^2x & 3 \\ 4cos^2x & 4cos^2x & -4sen^2x & 1 \\ 5sen^2x & 5sen^2x & -5cos^2x & 7 \\ 6 & 6 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

* Como $C_1 = C_2 \Rightarrow |B| = 0$

RPTA: "D"

PROBLEMA 34 :

En la siguiente igualdad :

$$\begin{vmatrix} a+b+c & a+b & a+b & a+b \\ a+b & a+b+c & a+b & a+b \\ a+b & a+b & a+b+c & a+b \\ a+b & a+b & a+b & a+b+c \end{vmatrix} = (3a+3b+1)c^3 ; c \neq 0$$

La relación correcta entre los valores de a, b y c es:

A) $a + b = c$ B) $a + b + c = 0$ C) $a + b + c = 1$

RESOLUCIÓN :

* Haciendo $c_1 + (c_2 + c_3 + c_4)$, $f_2 - f_1$, $f_3 - f_1$, $f_4 - f_1$,

Resulta :

$$\begin{vmatrix} 4(a+b)+c & a+b & a+b & a+b \\ 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c \end{vmatrix} = (3a+3b+1)c^3$$

$\Rightarrow [4(a+b)+c]c^3 = (3a+3b+1)c^3 \Rightarrow a+b+c=1$

RPTA: "C"

PROBLEMA 35 :

Si A y B son dos matrices definidas por :

$$A=(a_{ij})_{2\times3}=\begin{cases} i \ ; \ i\le j \\ j \ ; \ i>j \end{cases}; \quad B=(b_{ij})_{3\times2}=\begin{cases} j \ ; \ i\le j \\ i \ ; \ i>j \end{cases}$$

entonces la *traz* $\left((AB)^{-1}\right)$ es:

A) $-\frac{18}{5}$ B) $-\frac{7}{5}$ C) $\frac{3}{5}$ D) $\frac{9}{5}$ E) $\frac{12}{5}$

RESOLUCIÓN :

* Tabulando , resulta : $AB=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 11 & 12 \end{pmatrix}$

* Como $|AB|=-5$, entonces :

$$(AB)^{-1}=\frac{1}{-5}\begin{pmatrix} 12 & -7 \\ -11 & 6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\frac{12}{5} & \frac{7}{5} \\ \frac{11}{5} & -\frac{6}{5} \end{pmatrix}$$

* Finalmente :

$$traz[(AB)^{-1}]=-\frac{12}{5}-\frac{6}{5}=-\frac{18}{5}$$

RPTA: "A"

PROBLEMA 36 :

Si A, B y C son matrices definidas por:

$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$ que satisfacen la ecuación $AXB=C$, entonces el valor de la *traz(X)* es:

A) -7 B) -3 C) 0 D) 2 E) 5

RESOLUCIÓN:

* De: $AXB=C \to A^{-1}AXB=A^{-1}C$

$\to XB=A^{-1}C \to XBB^{-1}=A^{-1}CB^{-1}$

$\to X=A^{-1}CB^{-1}$

* Pero:

$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \wedge |A|=-1 \Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{-1}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$B=\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \wedge |B|=1 \Rightarrow B^{-1}=\frac{1}{1}\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

* Reemplazando :

$X=\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow X=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -5 & -9 \end{pmatrix}$

* Finalmente : $Traz(X)=2-9=-7$

RPTA: "A"

PROBLEMA 37 :

Se tienen las 6 matrices :

$A=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -6 \end{vmatrix}$, $B=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$, $C=\begin{vmatrix} 7 & 1 \\ x & 2 \end{vmatrix}$, $D=ABC$, $M=A^2B^2C^4Q=AB^{-1}$. El valor de x para que tres de las seis matrices no sean inversibles es:

A) 8 B) 3 C) 4 D) -14 E) 14

RESOLUCIÓN :

* Nos piden x para que tres de las 6 matrices no sean inversibles.

* Por teoría de matrices, para que una matriz sea inversible su determinante tiene que ser diferente de cero; por lo tanto:

$$|A|=-12\ne0 \ ; \ |B|=-2\ne0$$

* Propiedad de determinantes :

$$|A\times B|=|A||B| \ ; \ |B^{-1}|=\frac{1}{|B|}|Q|=|A||B^{-1}|=6\ne0$$

* Como hay 3 matrices inversibles, **A, B, Q** entonces **C, D** y **M** no son inversibles.

* Por lo tanto : $|C|=0 \ ; |D|=0$ y $|M|=0$

* Ahora de: $|C|=0 \to 7(2)-x=0 \Rightarrow x=14$

RPTA: "E"

PROBLEMA 38 :

Si A y B son dos matrices cuadradas definidas por $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ que satisfacen la ecuación matricial $AX=BX$, entonces de la matriz X se puede afirmar que:

A) Tiene inversa B) La $traz(X)=1$
C) La $traz(X)=2$
D) $X=0$ (Matriz nula) E) El elemento X_{12} es 1

RESOLUCIÓN:

* Como : $AX=BX \Rightarrow AX-BX=0$

$$\Rightarrow (A-B)X=0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2a-2c & 2b-2d \\ -a+2c & -b+2d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

* De donde: $2a=2c \ ; \ 2b=2d \ ; \ a=2c \ ; \ b=2d$

$$\Rightarrow a=b=c=d=0$$

* Entonces «X» es una matriz nula.

RPTA: "D"

PROBLEMA 39 :

Si A es una matriz definida por $A=\begin{pmatrix} p & q & r \\ t & -p & q \\ 0 & 0 & 82 \end{pmatrix}$ que satisface la ecuación matricial $A^2-13A-69I=0$, entonces el valor de la $traz(A-17I)^{-1}$ es:

A)93 B)94 C)95 D) 96 E)97

RESOLUCIÓN :

* De: $A^2-13A-69I=0 \Rightarrow A^2-13A-68I=I$

$\Rightarrow (A-17I)(A+4I)=I \Rightarrow (A-17I)^{-1}=A+4I$

$\Rightarrow Traz\left[(A-17I)^{-1}\right]=Traz(A+4I)$

$\Rightarrow Traz\left[(A-17I)^{-1}\right]=Traz(A)+4Traz(I)$

$=(p-p+82)+4(1+1+1)=94$

RPTA: "B"

PROBLEMA 40 :

Sea $i=\sqrt{-1};\ w=\sqrt[3]{1};\ w\neq 1.$ Si A, B y M son matrices definidas por :

$$A=\begin{pmatrix}0 & i\\ i & 0\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}w & 0\\ 0 & w^2\end{pmatrix} \text{ y } M=\sum_{k=1}^{40}(A^{4k}+B^{3k}),$$

entonces el valor de la $traz(M^{-1})$ es:

A) $\frac{1}{80}$ B) $\frac{1}{40}$ C) $\frac{1}{20}$ D) $\frac{1}{10}$ E) 1

RESOLUCIÓN:

*Aplicando un razonamiento inductivo, obtendremos que : $A^{4k}=I$ y $B^{3k}=I$

* Luego : $M=\sum_{k=1}^{40}(A^{4k}+B^{3k})=\sum_{k=1}^{40}(I+I)$

$\Rightarrow M=2\sum_{k=1}^{40}I=2(40I)=80I \Rightarrow \frac{1}{80}M=I$

$\Rightarrow M\times\left(\frac{1}{80}I\right)=I \Rightarrow M^{-1}=\frac{1}{80}I$

* Luego :

$Traz(M^{-1})=Traz\left(\frac{1}{80}I\right)=\frac{1}{80}\underbrace{Traz(I)}_{2}$

$\Rightarrow Traz(M^{-1})=\frac{1}{40}$

RPTA: "B"

PROBLEMA 41 :

Si A es una matriz cuadrada de orden *n* tal que $A^2-3A+2I_n=0$ y B es otra matriz definida por $B=A^4-5A^2-3I_n$, entonces la afirmación correcta es:

A) La matriz B no tiene inversa

B) La matriz B tiene inversa

C) det(B) > 1

D) det(B) < 0

E) No se puede afirmar nada de la matriz B.

RESOLUCIÓN:

* De: $A^2-3A+2I_n=0$

$\Rightarrow A^2=3A-2I \Rightarrow A^4=(3A-2I)(3A-2I)$

* Pero como A e I son conmutables , se tiene :

$A^4=9A^2-12A+4I$

* Luego : $B=9A^2-12A+4I-5A^2-3I$

$\Rightarrow B=4(A^2-3A)+I \Rightarrow B=4(-2I)+I=-7I$

* Entonces : $|B|=(-7)^n|I|=(-7)^n$

* Observando que $|B|\neq 0 \Rightarrow B$ tiene inversa

RPTA: "B"

PROBLEMA 42 :

Indicar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I) Si A y B son conmutables, entonces A^{-1} y B también son conmutables.

II) Si A y B tienen inversas , entonces $(A^TB^T)^{-1}=(A^{-1}B^{-1})^T$.

III) Si $A^2=I$, entonces $(I-A)(I+A)=0$

IV) Si $A^5=I$, entonces la matriz A^2 es la inversa de A^3, $(|A|\neq 0)$

V) Si $|A-\lambda I|=0$, entonces $|A^T-\lambda I|=0,\ \lambda\in R$

VI) Si $M=|A|A^{2n},\ n\in N$, entonces $|M|=|A|^{3n}$

RESOLUCIÓN :

I) VERDADERA : ya que si:

$AB=BA \Rightarrow A^{-1}AB=A^{-1}BA \Rightarrow B=A^{-1}BA$

$\Rightarrow BA^{-1}=A^{-1}BAA^{-1} \Rightarrow BA^{-1}=A^{-1}B$

II) VERDADERA : ya que de :

$(A^tB^t)^{-1}=\left[(BA)^t\right]^{-1}=\left[(BA)^{-1}\right]^t=\left[A^{-1}B^{-1}\right]^t$

III) VERDADERA : ya que:

Si: $A^2=I \Rightarrow I-A^2=0 \Rightarrow I^2-A^2=0$

* Pero como A e I se conmutan , entonces:

$(I+A)(I-A)=0$

IV) VERDADERA : ya que si: $A^5=I \Rightarrow A^3A^2=I,$ entonces A^2 es la matriz inversa de A^3.

V) VERDADERA : porque de:

$|A-\lambda I|=\left|(A-\lambda I)^t\right|=\left|A^t-(\lambda I)^t\right|$

$=\left|A^t-\lambda I^t\right|=\left|A^t-\lambda I\right|$

VI) VERDADERA : puesto que de :

$|M|=|A|^n\times\left|A^{2n}\right|=|A|^n\times|A|^{2n} \Rightarrow |M|=|A|^{3n}$

PROBLEMA 43 :

Si $A=(a_{ij})_{3\times 3}$ y $B=(b_{ij})_{2\times 2}$ son dos matrices que satisfacen las condiciones

$$B=\begin{pmatrix}|A| & 2|A|^2\\ 3|A| & 4|A|\end{pmatrix}\ ;\ \begin{pmatrix}2 & 1 & 17\\ 0 & 3 & 5\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\times A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Entonces, el valor del $det(B)$ es:

A) 1036 B) –726 C) –1152 D) –576 E) 832

RESOLUCIÓN :

* De segundo dato, se obtiene que:

$$A=\begin{pmatrix}2&1&17\\0&3&5\\0&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow det(A)=|A|=6$$

* Luego:

$$B=\begin{pmatrix}|A|&2|A|^2\\3|A|&4|A|\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&2\times6^2\\3\times6&4\times6\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow det(B)=6^2\begin{vmatrix}1&12\\3&4\end{vmatrix}=6^2(4-36)\Rightarrow det(B)=-1152$$

RPTA: "C"

PROBLEMA 44 :

Si B es una matriz definida por:

$$B=\begin{pmatrix}1&a&a&a\\a&1&a&a\\a&a&1&a\\a&a&a&1\end{pmatrix},$$ entonces ¿para qué valores reales de «a» la matriz B tiene inversa?

A) $\forall a\in\mathbb{R}$ B) $\forall a\in\mathbb{R}-\{1\}$ C) $\forall a\in\mathbb{R}-\left\{-\frac{1}{3};1\right\}$

RESOLUCIÓN:

*Al calcular el determinante por Gauss – Jordan, se obtendrá: $det(B)=(3a+1)(1-a)^3$

*Pero como «B» tiene inversa, entonces:

$|B|\neq0\Rightarrow(3a+1)(1-a)^3\neq0$

$\Rightarrow a\neq-\frac{1}{3}\wedge a\neq1\Rightarrow a\in\mathbb{R}-\left\{-\frac{1}{3};1\right\}$

RPTA: "C"

PROBLEMA 45 :

Considere que $m\in\mathbb{R}, a_i\in\mathbb{R}$ y la siguiente ecuación:

$$x^{2m}+a_1x^{2m-1}+a_2x^{2m-2}+...+a_{2m-1}x+a_{2m}=0$$

no tiene raíces reales. Si A es una matriz cuadrada de orden n que verifica la ecuación anterior y definimos la matriz $B=A^{2m}+a_1A^{2m-1}+...+a_{2m}I_n$, entonces la afirmación correcta es:

A) $|B|=0$ B) $|B|=0$ C) B siempre tiene inversa

D) $|B|\geq0$ E) B no tiene inversa

RESOLUCIÓN:

*Como A es una matriz que la verifica, entonces:

$$A^{2m}+a_1A^{2m-1}+a_2A^{2m-2}+...+a_{2m-1}A+a_{2m}I_n=0$$

* Pero:

$$B=A^{2m}+a_1A^{2m-1}+a_2A^{2m-2}+...+a_{2m-1}A+a_{2m}I_n$$

$\Rightarrow B=0$..(matriz nula).

* Luego: B no tiene inversa

RPTA: "E"

PROBLEMA 46:

Si $A=(a_{ij})_{n\times n}$ tal que $|A|\neq0$ y se definen las funciones:

$$f(x)=|A-xI|$$
$$g(x)=|A^{-1}-xI|$$
$$g(x)=h(x)\times f\left(\frac{1}{x}\right)$$

Entonces la regla de correspondencia de la función h es:

A) $\frac{x^n}{|A|^n}$ B) $x^n|A|$ C) $\frac{(-1)^nx^n}{|A|}$

RESOLUCIÓN :

* De:

$$f(x)=|A-xI|\Rightarrow f(\tfrac{1}{x})=\left|A-\frac{1}{x}\times I\right|=\left|A-\frac{1}{x}A\times A^{-1}\right|$$

$$\Rightarrow f(\tfrac{1}{x})=\left|-\frac{1}{x}A(A^{-1}-x\times I)\right|=\left|-\frac{1}{x}A\right|\times|A^{-1}-xI|$$

$$\Rightarrow f(\tfrac{1}{x})=\left(-\frac{1}{x}\right)^n\times|A|\times|A^{-1}-xI|$$

$$\Rightarrow f(\tfrac{1}{x})=\frac{|A|}{(-1)^n\times x^n}\times|A^{-1}-xI|$$

$$\Rightarrow\frac{(-1)^n\times x^n}{|A|}\times f(\tfrac{1}{x})=|A^{-1}-xI|=g(x)$$

* Pero: $g(x)=h(x)\times f\left(\frac{1}{x}\right)$

* De donde: $h(x)=\frac{(-1)^n\times x^n}{|A|}$

RPTA: "C"

PROBLEMA 47 :

Si A, B y C son matrices de orden 4×4 que satisfacen las siguientes condiciones:

$det(A)>0;\ det(B)>0\ ;det(C)>0$

$det(A^2B^3C)=1;\ det(2A)=32;det(B^3C^2)=\frac{27}{16}$

Entonces, el valor de: $T=2det(A)+3det(B)+4det(C)$ es:

A) 16 B) 28 C) 30 D) 32 E) 48

RESOLUCIÓN:

* Teniendo en cuenta que:

$$det(A\times B)=det(A)\times det(B)$$
$$det(A^m)=[det(A)]^m;\ m\in\mathbb{N}$$
$$det(kA)=k^n\times det(A);\ k\text{ escalar}$$

* Luego:

$$det(2A)=2^4\times det(A)=16\,det(A)=32$$
$$\Rightarrow det(A)=2$$

* $det(A^2B^3C)=1 \Rightarrow (det(A))^2(det(B))^3 \times det(C)=1$

$\Rightarrow (det(B))^3 \times det(C)=\dfrac{1}{4}$......................(I)

* $det(B^3C^2)=\dfrac{27}{16} \Rightarrow (det(B))^3 \times (det(C))^2=\dfrac{27}{16}$.......(II)

* De (I) y (II): $det(C)=\dfrac{27}{4}$ y $det(B)=\dfrac{1}{3}$

* Se pide: $T=2(2)+3\left(\dfrac{1}{3}\right)+4\left(\dfrac{27}{4}\right)=32$

RPTA: "D"

PROBLEMA 48 :

Si T es el conjunto solución de la siguiente inecuación :

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 & a^3 \\ 3 & a+2 & 2a+1 & 3a \\ 3 & 2a+1 & a^2+2a & 3a^2 \end{vmatrix}>0,$$ entonces el conjunto T es :

A) $\langle -1;0\rangle$ B) $\langle 0;1\rangle$ C) $\mathbb{R}-\{1\}$ D) $\langle -\infty;0\rangle \cup \langle 1;\infty\rangle$ E) $\mathbb{R}$

RESOLUCIÓN :

* Haciendo: F_2-F_1 ; F_3-3F_1 ; F_4-3F_1, se obtiene:

$$A=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & a^2-1 & a^3-1 \\ 0 & a-1 & 2a-2 & 3a-3 \\ 0 & 2a-2 & a^2+2a-3 & 3a^2-3 \end{vmatrix}$$

* Sacando factor $(a-1)$ de : F_2, F_3 y F_4:

$$A=(a-1)^3 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a+1 & a^2+a+1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & a+3 & 3(a+1) \end{vmatrix}$$

* Ahora F_3-F_2 y F_4-2F_2:

$$A=(a-1)^3 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a+1 & a^2+a+1 \\ 0 & 0 & 1-a & 2-a-a^2 \\ 0 & 0 & 1-a & 1+a-2a^2 \end{vmatrix}$$

* F_4-F_3:

$$A=(a-1)^3 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a+1 & a^2+a+1 \\ 0 & 0 & 1-a & 2-a-a^2 \\ 0 & 0 & 0 & -a^2+2a-1 \end{vmatrix}$$

$\Rightarrow A=(a-1)^3 \times 1 \times 1 \times (1-a)(-a^2+2a-1)$

$\Rightarrow A=(a-1)^3 \times (a-1)(a^2-2a+1)=(a-1)^6$

$\Rightarrow A>0 \Rightarrow (a-1)^6>0 \Rightarrow a \neq 1 \Rightarrow T=\mathbb{R}-\{1\}$

RPTA: "C"

PROBLEMA 49 :

Dada la matriz $A=(a_{ij})_{n\times n}$ tal que:

$$a_{ij}=\begin{cases} 0; & si\ i=j \\ i-j; & si\ i\neq j \end{cases}$$

Entonces el valor del $det(A)$ es:

A) 0 B) 1 C) $(-1)^{n+1}n!$ D) $(-1)^n n$

RESOLUCIÓN:

* Aplicando una tabulación , se obtiene :

$$A=\begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 & -3 & \cdots & -n+1 \\ 1 & 0 & -1 & -2 & \cdots & -n+2 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & \cdots & -n+3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & \cdots & -n+4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n-1 & n-2 & n-3 & n-4 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{n\times n}$$

* En el $det(A)$, hagamos las transformaciones sucesivas : F_n-F_{n-1};

luego $F_{n-1}-F_{n-2};...;F_4-F_3;F_3-F_2 \wedge F_2-F_1$:

$$det(A)=\begin{vmatrix} 0 & -1 & -2 & -3 & \cdots & -n+1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

*De donde se aprecia que hay dos filas iguales, por ejemplo $F_2 \wedge F_4$, se tiene : $det(A)=0$

RPTA: "A"

PROBLEMA 50 :

Hallar el valor del siguiente determinante

$$|A|=\begin{vmatrix} 10 & 9 & 8 & \cdots & 3 & 2 & 1 \\ 9 & 8 & 7 & \cdots & 2 & 1 & 2 \\ 8 & 7 & 6 & \cdots & 1 & 2 & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 3 & 2 & 1 & \cdots & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 2 & \cdots & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 8 & 9 & 10 \end{vmatrix}$$

A) 8×2^{11} B) 11×2^8 C) 9×2^{12} D) 11×2^9

RESOLUCIÓN:

* Haciendo f_1-f_2, se obtiene:

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & -1 \\ 9 & 8 & 7 & \cdots & 2 & 1 & 2 \\ 8 & 7 & 6 & \cdots & 1 & 2 & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 3 & 2 & 1 & \cdots & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 2 & \cdots & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 8 & 9 & 10 \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} \\ C_1+C_{10} \\ C_2+C_{10} \\ C_3+C_{10} \\ \vdots \\ C_9+C_{10} \\ \\ \end{matrix}$$

www.SIGO21X.blogspot.com

$$|A|=\begin{vmatrix}0&0&0&\cdots&0&0&-1\\11&10&9&\cdots&4&3&2\\11&10&9&\cdots&4&5&3\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots&\vdots\\11&10&9&\cdots&14&15&8\\11&10&11&\cdots&16&17&9\\11&12&13&\cdots&18&19&10\end{vmatrix}\begin{matrix}C_2-C_3\\C_3-C_4\\C_4-C_5\\\vdots\\C_9-C_{10}\end{matrix}$$

$$|A|=\begin{vmatrix}0&0&0&\cdots&0&0&-1\\0&0&0&\cdots&0&-2&-1\\0&0&0&\cdots&-2&-2&-1\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots&\vdots\\0&0&-2&\cdots&-2&-2&-1\\0&-2&-2&\cdots&-2&-2&-1\\11&12&13&\cdots&18&19&10\end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow |A|=\underbrace{11(-2)(-2)(-2)...(-2)(-1)}_{10\ factores}=11\times 2^8$$

RPTA: "B"

PROBLEMA 51 :

Calcular : $\begin{vmatrix}a+b&a&a&\cdots&a\\a&a+b&a&\cdots&a\\a&a&a+b&\cdots&a\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\a&a&a&\cdots&a+b\end{vmatrix}_n$

RESOLUCIÓN:

* Haciendo: $C_1:C_1+C_2+C_3+...+C_n$. A lo largo de la primera columna se obtiene : $(na+b)$. Extrayendo este factor del determinante :

$$D=(na+b)\begin{vmatrix}1&a&a&\cdots&a\\1&a+b&a&\cdots&a\\1&a&a+b&\cdots&a\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\1&a&a&\cdots&a+b\end{vmatrix}_n=(na+b)\begin{vmatrix}1&a&a&\cdots&a\\0&b&0&\cdots&0\\0&0&b&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&b\end{vmatrix}_n$$

* Efectuando : $D=(na+b)b^{n-1}$

PROBLEMA 52 :

Calcular : $\begin{vmatrix}1&a&a^2&a^3\\a^2&1&a&a^2\\x&a^3&1&a\\y&z&a^3&1\end{vmatrix}$

RESOLUCIÓN:

* Haciendo :

$C_4:C_4-aC_3;\ C_3:C_3-aC_2;\ C_2:C_2-aC_1$

* Se tiene : $D=\begin{vmatrix}1&a&0&0\\a^2&1-a^3&0&0\\x&a^3-ax&1-a^4&0\\y&z-ay&a^3-az&1-a^4\end{vmatrix}$

* De donde se obtiene : $D=(1-a^3)(1-a^4)^2$

PROBLEMA 53 :

Haciendo uso de la matriz inversa , calcular la matriz **X** si se sabe que :

$$\begin{bmatrix}1&2&-3\\3&2&4\\2&-1&0\end{bmatrix}X=\begin{bmatrix}1&-3&0\\10&2&7\\10&7&8\end{bmatrix}$$

RESOLUCIÓN :

$$AX=B\Rightarrow X=A^{-1}B..................(\alpha)$$

* Haciendo :

$$(A\times I)=\begin{bmatrix}1&2&-3&1&0&0\\3&2&4&0&1&0\\2&-1&0&0&0&1\end{bmatrix}$$

* Mediante operaciones elementales de filas, se tiene:

$$(I\times A^{-1})=\begin{bmatrix}1&0&0&4/41&3/41&14/41\\0&1&0&8/41&6/41&-13/41\\0&0&1&-7/41&5/41&-4/41\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{41}\begin{bmatrix}4&3&14\\8&6&-13\\-7&5&-4\end{bmatrix}$$

*Reemplazando en (α): $X=\frac{1}{41}\begin{bmatrix}174&92&133\\-62&-103&-62\\3&3&3\end{bmatrix}$

PROBLEMA 54 :

Calcular el determinante de la siguiente matriz : $\begin{bmatrix}2&1&0&0&\cdots&0\\1&2&1&0&\cdots&0\\0&1&2&1&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0&0&\cdots&2\end{bmatrix}$

RESOLUCIÓN:

* Multiplicando $f_1\times 1,\ f_2\times 2,\ f_3\times 3, ...f_n\times n$; el determinante no cambia su valor si se divide simultaneamente por el producto :

$$1\times 2\times 3\times 4\times 5\times ...\times n=n!$$

*Entonces :

$$|A|=\frac{1}{n!}\begin{vmatrix}2&1&0&0&\cdots&0\\2&4&2&0&\cdots&0\\0&3&6&3&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0&0&\cdots&2n\end{vmatrix}$$

* Luego : $f_2-f_1;\ f_3-f_2;\ ...;f_n-f_{n-1}$

$$|A|=\frac{1}{n!}\begin{vmatrix}2&1&0&0&\cdots&0\\0&3&2&0&\cdots&0\\0&0&4&3&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0&0&\cdots&n+1\end{vmatrix}$$

*Como el determinante de una matriz triangular es igual al producto de los elementos de su diagonal principal , entonces :

$$|A|=\frac{1}{n!}(2\times3\times4\times...\times n\times(n+1)$$

$$\Rightarrow |A|=\frac{(n+1)!}{n!}=\frac{n!(n+1)}{n!}=n+1$$

PROBLEMA 55 :

Si A es una matriz cuadrada de orden n definida por:

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3&\cdots&n\\1&2^3&3^3&\cdots&n^3\\1&2^5&3^5&\cdots&n^5\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\1&2^{2n-1}&3^{2n-1}&\cdots&n^{2n-1}\end{pmatrix}$$, entonces el valor del $det(A)$ es:

A) $n!$ B) $1!3!5!...(2n-1)!$ C) $(2n-1)!$ D) $(n^n)!$ E) $(n^2)!$

RESOLUCIÓN:

* Aplicando un razonamiento :
* Para $n = 1: (1)=1=1!$
* Para $n = 2$: $\begin{pmatrix}1&2\\1&8\end{pmatrix}\xrightarrow{f_2-f_1}\begin{pmatrix}1&2\\0&6\end{pmatrix}=1\times6=1!\times3!$
* Para $n = 3$:

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&8&27\\1&32&243\end{pmatrix}\xrightarrow{f_2-f_1}\begin{pmatrix}1&2&3\\0&6&24\\1&32&243\end{pmatrix}\xrightarrow{f_3-f_1-5f_2}$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\0&6&24\\0&0&120\end{pmatrix}=1\times6\times120=1!\times3!\times5!$$

* Luego para «n»: $det|A|=1!\times3!\times5!\times7!\times...\times(2n-1)!$

RPTA: "B"

PRIMERA PRACTICA DIRIGIDA

01 Calcular : $\begin{vmatrix}1&2\\3&4\end{vmatrix}$

A)2 B)–2 C)3 D)0 E)8

02 Calcular : $\begin{vmatrix}0&1\\-1&\sqrt{7}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}2&3\\2&5\end{vmatrix}$

A)5 B)3 C)8 D)–3 E)4

03 Calcular el determinante de la matriz :

$$B=\begin{pmatrix}21&22&23\\24&25&26\\27&28&29\end{pmatrix}$$

A)0 B)1 C)2 D)24 411 E)28 824

04 Calcular el valor de : $\begin{vmatrix}3&0&0\\0&-2&3\\0&0&5\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}2&0&0\\3&5&0\\1&0&4\end{vmatrix}$

A)20 B)10 C)12 D)15 E)30

05 Determinar : $\begin{vmatrix}1&2&3\\2&4&6\\3&6&9\end{vmatrix}$

A)1 B)2 C)3 D)4 E)0

06 Calcular el valor del determinante :

$$\begin{vmatrix}10&30&1\\5&15&4\\3&9&379\end{vmatrix}$$

A)3 000 B)2 000 C)1 000 D)0 E)500

07 Calcular : $\begin{vmatrix}1&2&3\\1&2^2&3^2\\1&2^3&3^3\end{vmatrix}$

A)108 B)54 C)12 D)24 E)216

08 Hallar el valor del determinante de la matriz cuadrada : $A=\begin{pmatrix}335&700&932\\300&350&500\\25&350&432\end{pmatrix}$

A)10 000 B)20 000 C)30 000
D)40 000 E)0

09 Calcular el valor de : $\sum_{k=1}^{20}\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&4&k^2\end{vmatrix}$

A)2 240 B)2 420 C)2978 D)2730 E)2750

10 Si se cumple que :

$$\begin{vmatrix}m+n&p-m&p\\n+p&m-n&m\\p+m&n-p&n\end{vmatrix}=k(pmn)-p^3-m^3-n^3$$

Calcular "k".

A)1 B)0 C)3 D)–3 E)2

11 Calcular el valor de : $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 8 & 10 \\ 16 & 64 & 100 \end{vmatrix}$

A)48 B)36 C)12 D)60 E)72

12 Efectuar : $\begin{vmatrix} \sqrt{3} & 2 \\ 1 & \sqrt{12} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sqrt{5} & 3 \\ 2 & \sqrt{20} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sqrt{7} & 4 \\ 3 & \sqrt{28} \end{vmatrix}$

A)12 B)11 C)9 D)10 E)13

13 Si : $\begin{vmatrix} x & y \\ z & w \end{vmatrix} = 0$

Calcular : $\begin{vmatrix} x+y & y \\ z+w & w \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & x+y \\ z & z+w \end{vmatrix}$

A) 0 B)1 C)3 D)2 E)-1

14 Hallar : $\begin{vmatrix} m & n \\ p & 2 \end{vmatrix}$ si la matriz: $A = \begin{vmatrix} 2 & m & 5 \\ 2 & 4 & n \\ p & 3 & 1 \end{vmatrix}$ es simétrica.

A) 7 B)-7 C)11 D)-11 E)15

15 Señalar el valor de verdad en cada caso.

I) $\begin{vmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0$

II) $\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$

III) $\begin{vmatrix} 10 & 20 \\ 20 & 30 \end{vmatrix} = 100\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$

A) VVV B)VVF C)FVF D)FFV E)FFF

16 Calcular el valor de : $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 3 & 2 \end{vmatrix}$

A) 14 B) 16 C)5 D)4 E)8

17 Efectuar : $\begin{vmatrix} 4 & x & x-4 \\ 5 & y & y-5 \\ 6 & z & z-6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 6 & x-6 & x \\ 7 & y-7 & y \\ 8 & z-8 & z \end{vmatrix}$

A) 1 B)2 C)0 D)3 E)4

18 Calcular : $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 5 & 10 & 25 & 1 \\ 10 & 20 & 100 & 1 \\ 15 & 31 & 225 & 1 \end{vmatrix}$

A) 180 B)150 C)160 D)170 E)140

19 Sea : $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -3$

Calcular : $\begin{vmatrix} -2a & 10c & -2b \\ d & -5f & e \\ 3g & -15i & 3h \end{vmatrix}$

A)-60 B)60 C)-90 D)90 E)100

20 Indicar un factor de : $\begin{vmatrix} a & a^2 & a^3 \\ b & b^2 & b^3 \\ c & c^2 & c^3 \end{vmatrix}$

A)a+b B)a+c C)b+c D)b – c E)2a

TAREA DOMICILIARIA

01 Calcular : $\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 7 & 6 \end{vmatrix}$

A) 5 B)6 C)7 D)8 E)9

02 Calcular :

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + ... + \begin{vmatrix} n & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

A) $\frac{(n-1)n}{2}$ B) $\frac{(n+1)n}{2}$ C) $\frac{n+1}{2}$ D) $\frac{n}{2}$ E) n

03 Calcular : $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$

A) 1 B)-1 C)-2 D)0 E)2

04 Determinar "x", en: $\begin{vmatrix} x & 3 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} = 11$

A) -2 B)-3 C)-4 D)-1 E)-5

05 Si se cumple : $\begin{vmatrix} x & 1 \\ 2 & x \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x & 3 \\ 4 & (x+1) \end{vmatrix} = 12$

Hallar "x".

A) 1 B)2 C)-2 D)-1 E)0

SEGUNDA PRACTICA DIRIGIDA

01 Si la matriz x satisface la ecuación :

$$x + 2\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$$

Hallar $|x|$

A)-24 B)-15 C)9 D)-9 E)-33

02 Si : $A^2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$ y $B^2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$

Calcular el determinante de: $C = (A+B)(A-B)$

A)2 B)4 C)-2 D)-4 E)0

03 Dada la matriz : $A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -10 & k & 2 \\ 7 & -3 & -1 \end{vmatrix}$

Si: $|A| = 2$; hallar el valor de «k»

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{11}{3}$ C) 11 D) 1 E) 8

04 Dada la matriz : $M=\begin{vmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & x & -2 \end{vmatrix}$

Si: $|M|=0$; hallar el valor de «x»

A) 1 B) 2 C) 3 D) –2 E) –1

05 Dada la matriz : $H=\begin{vmatrix} x^2 & -3 \\ x & 1 \end{vmatrix}$

Si: $|H|=4$. Hallar H^2

A) $\begin{vmatrix} 268 & -51 \\ -68 & 13 \end{vmatrix}$ B) $\begin{vmatrix} 244 & -45 \\ -68 & 11 \end{vmatrix}$ C) $\begin{vmatrix} 268 & -45 \\ -68 & 13 \end{vmatrix}$

D) $\begin{vmatrix} 244 & -51 \\ -60 & 13 \end{vmatrix}$ E) $\begin{vmatrix} 268 & -45 \\ -68 & 11 \end{vmatrix}$

06 Dada la matriz : $A=\begin{vmatrix} 2x^2 & x \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$

Si: $|A|=3$. Hallar $|2A+3A^t|$

A) 100 B) –125 C) 25
D) –100 E) Ninguna anterior

07 Si : $A=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$

Calcular A

A) 40 B) 20 C) 30 D) 0 E) 10

08 Dada la matriz : $B=\begin{vmatrix} x & -3 & 5 \\ 3 & -2 & x+4 \\ 1 & -7 & -5 \end{vmatrix}$

Si $|B|=100$; ¿cuál es el valor de x?

A) 7 B) 6 C) 4 D) 2 E) 1

09 Calcular : $E=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 \\ 1 & 1 & 1+y \end{vmatrix}$

A) y B) x C) $x-y$ D) xy E) $xy+x+y$

10 Calcular : $R=\begin{vmatrix} x+2 & 3 & 4 \\ 2 & x+3 & 4 \\ 2 & 3 & x+4 \end{vmatrix}$

A) $x^2(x+9)$ B) $x(x+9)$ C) $x(x^2+9)$
D) $x(x^2-9)$ E) $x(x+3)(x-3)$

11 Calcular el siguiente determinante :

$$R=\begin{vmatrix} a+b & b+c & a+c \\ c & a & b \\ 4 & 4 & 4 \end{vmatrix}$$

A) $a+b$ B) $a+c$ C) $b+c$ D) 1 E) 0

12 Calcular el valor de : $E=\begin{vmatrix} 75 & 84 & 80 \\ 90 & 96 & 96 \\ 60 & 36 & 64 \end{vmatrix}$

A) 4780 B) 3600 C) 0 D) 1 E) 2496

13 Resolver la ecuación : $E=\begin{vmatrix} 2 & -x & x \\ -x & 2 & x \\ x & -x & 2 \end{vmatrix}=0$

Dar como respuesta la suma de sus raíces.

A) 4 B) 2 C) 0 D) 3 E) 1

14 Calcular el valor de :

$$E=\begin{vmatrix} -26 & 15 & 11 \\ 17 & -35 & 18 \\ 25 & 13 & -38 \end{vmatrix}$$

A) 225 B) 324 C) 0 D) 729 E) 385

15 Hallar «x» si: $\begin{vmatrix} x+2 & 3 & 4 \\ 2 & x+3 & 4 \\ 2 & 3 & x+4 \end{vmatrix}=0$

A) 2 B) –3 C) 4 D) 6 E) –9

16 Calcular el valor de : $E=\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 10 \\ 4 & 10 & 20 \end{vmatrix}$

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

17 Calcular el valor del determinante :

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 3 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 3 & 3 & 3 \end{vmatrix}$$

A) 54 B) 108 C) 81 D) 243 E) 27

18 Calcular : $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}$

A) 0 B) 3 C) –9 D) 9 E) 81

19 Si: $a=b+c+d$, hallar el valor de :

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ b & 0 & 1 & 1 \\ c & 1 & 0 & 1 \\ d & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

A) $-2a$ B) $2a$ C) $-a$ D) a E) $3a$

20 Calcule : $\begin{vmatrix} -4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -4 \end{vmatrix}$

www.SIGLO21X.blogspot.com

A)4 B)44 C)43 D)0 E)42

TAREA DOMICILIARIA

01 Calcular el valor de : $E=\begin{vmatrix} 54 & 46 & 75 \\ 126 & 69 & 175 \\ 90 & 92 & 125 \end{vmatrix}$

A)3426 B)7210 C)0 D)29 E)1800

02 Calcular el determinante de la siguiente matriz : $A=\begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 4 & a & 4 \\ 0 & 3 & a \end{vmatrix}$

A)a^2+16 B)$a(a^2+16)$ C)$a(a^2-16)$
D)a^3-16 E)a^3+16

03 Calcular el determinante de la siguiente matriz:

$$B=\begin{vmatrix} 1 & x+1 & x^2+x+1 \\ 2 & x+2 & x^2+2x+4 \\ 3 & x+3 & x^2+3x+9 \end{vmatrix}$$

A)0 B)1 C)2x D)x E)-2x

04 Calcular : $\begin{vmatrix} 0 & a_1 & a_2 \\ -a_1 & 0 & a_3 \\ -a_2 & -a_3 & 0 \end{vmatrix}$

A)1 B)0 C) $-a_1a_2$ D)a_3a_1 E)$a_1a_2a_3$

05 Indicar un factor de : $\begin{vmatrix} x+y & y & x \\ x & x+y & y \\ y & x & x+y \end{vmatrix}$

A)y B)x C)x^2y^2 D)x+y E)x-1/y

TERCERA PRACTICA DIRIGIDA

01 Hallar el determinante de la matriz :

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

A)0 B)5 C)-5 D)4 E)N.A.

02 Resolver : $\begin{vmatrix} 3 & x & -x \\ 2 & -1 & 3 \\ x+10 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0$

A)$-2\pm\sqrt{22}$ B)± 4 C)$-2\pm\sqrt{11}$
D)$-4\pm\sqrt{22}$ E)N.A.

03 Calcular : $\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$

A)$a^3+b^3+c^3$ B)$a^3bc+b^3ca+c^3ab$ C)$a^2+b^2+c^2$
D)$a^3+b^3+c^3-3abc$ E)$a^3+b^3+c^3+3abc$

04 Si : $\begin{vmatrix} 8 & 2 & -1 \\ -3 & x & -6 \\ 1 & 7 & 2 \end{vmatrix}=425$ Obtener «$x+1$»

A)4 B)5 C)6 D)7 E)8

05 Obtener«$2x+1$» , a partir de : $\begin{vmatrix} 1 & x & x \\ 4 & 5 & 0 \\ 16 & 25 & 81 \end{vmatrix}=20$

A)1 B)2 C)3 D)4 E)N.A.

06 Si : $A=\begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 5 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$ y además: $|A|=1$

Obtener : $|A^t|$

A)1 B)-1 C)1^t D)t E) N.A.

07 Hallar : $\begin{vmatrix} 5 & 4 & 5 & -1 \\ 8 & -2 & 8 & 2 \\ 6 & 3 & 6 & 5 \\ 3 & 1 & 3 & 7 \end{vmatrix}$

A)376 B)425 C)-1 D)0 E)N.A.

08 Hallar los valores de «k» para los cuales :

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 7 \\ k & k+2 & k-2 \\ 4 & k & 8 \end{vmatrix}=0$$

A)$-\frac{4}{3};3$ B)$\frac{4}{3};-3$ C)$\frac{3}{4};-4$ D)$-\frac{3}{4};4$ E)N.A.

09 Si: $x\in Z$, hallar «$3x+2$» a partir de :

$$\begin{vmatrix} x & 3 & 4 \\ 4 & 6 & 2x+3 \\ x-3 & 2 & 5 \end{vmatrix}=7$$

A)2 B)4 C)6 D)8 E)-2

10 Si $k\in N$, obtener «$3k+5$» sabiendo que :

$$\begin{vmatrix} -2 & k-3 & -k \\ 1 & 1 & 2 \\ k-1 & 1 & k+2 \end{vmatrix}=0$$

A)4 B)5 C)19 D)11 E)17

11 Si «W» es raíz cúbica imaginaria de la unidad, hallar el valor de :

$$\begin{vmatrix} 1 & W & W^2 \\ W & W^2 & 1 \\ W^2 & 1 & W \end{vmatrix}$$

A) W B) 4 C) 3 D) W^2 E) 0

12 Hallar «x» en : $\begin{vmatrix} a & a & x \\ m & m & m \\ b & x & b \end{vmatrix} = 0$

A) m B) a C) b D) Hay dos correctas E) N.A.

13 Resolver : $\begin{vmatrix} 15-2x & 11 & 10 \\ 11-3x & 17 & 16 \\ 7-x & 14 & 13 \end{vmatrix} = 0$

A) 5 B) 3 C) 4 D) 6 E) 2

14 A qué es igual : $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$

A) $(b-c)(c-a)(a-b)$ B) $abc(a+b+c)$
C) $a^2+b^2+c^2$ D) $ab+ac+bc$
E) $abc(ab+ac+bc)$

15 Calcular : $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 35 & 37 & 34 \\ 23 & 26 & 25 \end{vmatrix}$

A) 8 B) 6 C) 7 D) -14 E) -16

16 Calcular : $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 \\ 1 & 1 & 1+y \end{vmatrix}$

A) y B) x C) $x-y$ D) xy E) $xy+x+y$

17 Calcular : $\begin{vmatrix} 1 & z & -y \\ -z & 1 & x \\ y & -x & 1 \end{vmatrix}$

A) $x+y+z$ B) $-(x+y+z)$ C) $x^2+y^2+z^2+1$
D) $x^2+y^2+z^2$ E) $x^2+y^2+z^2-1$

18 Hallar «x» en el determinante : $\begin{vmatrix} x & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0$

A) 1 B) 2 C) 3 D) -1 E) -2

CUARTA PRACTICA DIRIGIDA

MATRIZ INVERSA

01 Si A es una matriz triangular inferior:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 7-p & q+3 \\ p+1 & 2 & m \\ q & 1 & m+3 \end{pmatrix}$$

calcular: $m+p+q$

A) 5 B) 4 C) 3 D) 2 E) 1

02 Sea la matriz diagonal:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 0 & b+c-4 \\ a+b-3 & b & 0 \\ 0 & c+a-9 & c \end{pmatrix}$$

Indicar la $Traz(A)$

A) 13 B) 14 C) 11 D) 15 E) 16

03 Sea la matriz triangular superior:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 13 & a+b+c \\ a^3+ma-p & 7 & a+7 \\ b^3+mb-p & c^3+mc-p & 13 \end{pmatrix}$$

Según ello, indicar $\dfrac{ab+bc+ca}{abc}$ en función de m y p.

A) $p+m$ B) mp C) p^2+m D) $\dfrac{m}{p}$ E) $\dfrac{p}{m}$

04 Sea A una matriz cuadrada. Señalar el valor veritativo en los enunciados:

( ) $A+A^t$ es simétrica.

( ) $A-A^t$ es antisimétrica.

( ) Si A es involutiva, entonces $\dfrac{1}{2}(I-A)$ es idempotente.

A) VFV B) VVV C) FFV D) VVF E) FVV

05 Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, además: $A^2X = A^t$, hallar la matriz X.

A) $\begin{pmatrix} 1 & -7 \\ 2 & -19 \end{pmatrix}$ B) $\begin{pmatrix} 7 & 33 \\ -4 & -19 \end{pmatrix}$ C) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 19 \end{pmatrix}$

D) $\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -4 & -9 \end{pmatrix}$ E) $\begin{pmatrix} 1 & -33 \\ 0 & 19 \end{pmatrix}$

06 Sea la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} a & 2-x^{x^2+1} & -3y \\ x^{x^2+1} & b & 1 \\ y^2 & z^2 & c \end{pmatrix}$$

simétrica. Si $x<0$, $y<0$ y $z<0$, indicar: $x+y+z$

A) -3 B) -4 C) -5 D) -31 E) -20

07 Si A es una matriz antisimétrica definida por:

$$A = \begin{pmatrix} a-b & d & c \\ a & b+1 & -4 \\ e & 4 & c-2 \end{pmatrix}$$

entonces el valor de $T = a + b + c + d + e$ es:

A) –1 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

08 Resolver la ecuación:

$$3x-2\left[\begin{pmatrix}3 & 2\\1 & 4\end{pmatrix}-x\right]=5\left[\begin{pmatrix}2 & 1\\-1 & 3\end{pmatrix}-x\right]$$

A) $\begin{pmatrix}1 & 2\\4 & 1,5\end{pmatrix}$ B) $\begin{pmatrix}1,6 & 0,9\\-0,3 & 2,3\end{pmatrix}$ C) $\begin{pmatrix}1,5 & 3\\4 & 2,3\end{pmatrix}$ D) $\begin{pmatrix}1,2 & 6\\0,3 & 0,1\end{pmatrix}$ E) $\begin{pmatrix}-2 & 6\\-1,3 & 0,1\end{pmatrix}$

09 Si $A=\begin{pmatrix}2 & 5\\1 & 3\end{pmatrix}$, determinar la suma de los elementos de la matriz A^{-2}

A) –1 B) –3 C) –5 D) –7 E) –9

10 Si $A = 2I$; $B = 3I$, entonces:

$$\left(A^{-1}B^{-1}+2AB-\frac{1}{6}I\right)$$

es igual:

A) 6I B) 12I C) I D) 2I E) 3I

11 Sea la matriz $B=\begin{pmatrix}0 & -1\\1 & 1\end{pmatrix}$, además el polinomio $F(x) = x^{34} - 2x^9 + 1$. Calcular la suma de los elementos de la matriz $F(B)$.

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

12 Calcule la traza de la matriz inversa de A, tal que:

$$2A=|A|\begin{pmatrix}3 & 2\\5 & 4\end{pmatrix}^{-1}$$

A) 11 B) 12 C) 14 D) 15 E) 17

13 Si A es una matriz definida $A=\begin{pmatrix}p & q & r\\t & -p & q\\0 & 0 & 82\end{pmatrix}$ que satisface la ecuación $A^2 - 13A - 69I = 0$, entonces el valor de $Traz(A - 17I)^{-1}$ es:

A) 93 B) 94 C) 95 D) 96 E) 97

14 Dada la matriz $A = (a_{ij})_2$ donde la traza de A es igual a cero y la suma de la diagonal secundaria también es igual a cero, además $a_{11} = 5$ y $a_{21} = -4$. Halle A^n si $n \in N$ y "n" es par siendo I la matriz identidad.

A) $9^{\frac{n}{2}}I$ B) $9^{\frac{n}{8}}I$ C) $9^{\frac{n}{4}}I$ D) $9^{\frac{n}{10}}I$ E) $9^{\frac{n}{6}}I$

15 Siendo m y n raíces de la ecuación:

$$x^2 - 2x + 3 = 0$$

calcular: $A^{15} + A^{11} - 2A + I$

donde: $A=\begin{bmatrix}1 & m^2+2n+7\\0 & 3(m+n)-2mn\end{bmatrix}$

siendo I: matriz identidad de orden "2".

A) $\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}$ B) I C) 0 D) $2I$ E) A

16 Si A y B son matrices cuadradas de orden n, entonces indicar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

( ) Si A y B tienen inversa, entonces:

$$(A+B)A^{-1}(A-B)=(A-B)A^{-1}(A+B)$$

( ) Si $A^n = 0, n \in N$, entonces:

$$(I-A)^{-1}=I+A+A^2+A^3+....+A^{n-1}$$

( ) Si $|A| \neq 0 \wedge |B| \neq 0$, entonces:

$$(A.B)^{-1}=B^{-1}.A^{-1}$$

A) FVV B) VFV C) VVV D) VFF E) FFF

17 Si A es una matriz definida por $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\1 & 2\end{pmatrix}$ y X es una matriz que satisface la siguiente ecuación matricial $AX^{-1} = ((A^{-1})^2 - A^{-1})^{-1}$, entonces la $Tr(X)$ es:

A) –12 B) –7 C) –5 D) 4 E) 6

18 Se define la Matriz $M=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\0 & 2 & 1\\1 & 0 & 2\end{pmatrix}$

Determinar la suma de los elementos de la primera columna de la matriz. $M^n (n \in Z^+)$

A) $2^{n-1}(n^2 + n + 2)$ B) $2^n(n^2 - n - 2)$
C) $2^n(n^2 + n)$ D) $2^{n-3}(n^2 + 3n + 8)$

19 Si: $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\3 & 0\end{bmatrix}$ y $B=e^A$, calcular: $\dfrac{b_{21}}{1-e}$

sabiendo que: $e^x=1+\dfrac{x}{1!}+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^4}{4!}+...$

A) 3 B) 4 C) –3 D) –4 E) 2

PRIMERA PRACTICA- DETERMINANTE				
01) B	02) A	03) A	04) B	05) E
06) D	07) A	08) E	09) D	10) C
11) A	12) D	13) A	14) D	15) A
16) D	17) C	18) A	19) D	20) D
01) E	02) A	03) D	04) E	05) C

SEGUNDA PRACTICA- DETERMINANTE				
01) B	02) E	03) B	04) A	05) A
06) B	07) A	08) C	09) D	10) A
11) E	12) C	13) C	14) C	15) E
16) E	17) E	18) D	19) D	20) D
01) C	02) C	03) E	04) B	05) D

CLAVES DE LA CUARTA PRACTICA									
1)B	2)C	3)D	4)B	5)B	6)C	7)B	8)B	9)D	10)B
11)D	12)C	13)B	14)A	15)B	16)C	17)C	18)D	19)C	



SISTEMA DE ECUACIONES

19

OBJETIVOS :

* Reconocer un sistema de ecuaciones como dos ecuaciones con dos incógnitas relacionadas entre sí.

* Conocer los distintos métodos de resolución de sistemas de ecuaciones lineales.

* Clasificar y resolver sistemas cuadrados con determinante asociado distinto de cero aplicando la Regla de Cramer.

* Aplicar los conocimientos de matriz inversa para resolver sistemas cuadrados. justificando bajo qué condiciones esto es posible.

* Analizar las ventajas y desventajas de estos métodos.

* Aplicar el método de Gauss Jordan en la clasificación y resolución de sistemas de ecuaciones lineales.

* Modelar problemas específicos de su área mediante sistemas de ecuaciones lineales, aprendiendo a interpretar correctamente las soluciones de los mismos, lo que le permitirá desarrollar su imaginación y capacidad de razonamiento y observación.

INTRODUCCIÓN :

En este capítulo aprenderemos a expresar problemas de aplicación como sistemas de ecuaciones lineales es decir , como conjuntos finitos de ecuaciones a resolver estos sistemas desde el punto de vista analítico y geométrico. Veamos un problema muy sencillo de traducir al lenguaje algebraico. De este modo introduciremos los conceptos fundamentales relacionados con el tema

«Un caballo y una mula caminaban juntos llevando sobre sus lomos pesados sacos. Lamentábase el caballo de su enojosa carga , a lo que la mula le dijo ¿De qué te quejas? Si yo te tomara un saco , mi carga sería el doble de la tuya . En cambio si te doy un saco , tu carga se igualaría a la mía» . ¿cuántos sacos llevaba el caballo? ¿Y la mula?

Si representas por x la cantidad de sacos que lleva el caballo y por y los que lleva la mula, obtendrás las ecuaciones siguientes :

$$y+1=2(x-1) \text{ e } y-1=x+1$$

Estas ecuaciones tienen dos variables y para resolver el problema debemos hallar los valores de x e y que satisfagan simultaneamente las dos ecuaciones. Cuando buscamos una solución común a dos o más ecuaciones lineales, estamos en presencia de un sistema de ecuaciones lineales.

SISTEMA DE ECUACIONES

Se llama así al conjunto de ecuaciones lineales con dos o más incógnitas , las cuales pueden verificarse para algunos valores asignados a sus incógnitas o tal vez nunca se verifique.

EJEMPLOS :

$$\begin{cases} x+y=7 \\ x-y=1 \end{cases} \Rightarrow$$

Es un sistema lineal de dos ecuaciones con 2 incógnitas, se verifican simultaneamente para : $x=4; y=3$

$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ 2x-y+z=5 \\ 3x+2y-z=-1 \end{cases} \Rightarrow$$

Es un sistema lineal de 3 ecuaciones con 3 incógnitas, se verifican simultaneamente para : $x=1; y=-1; z=2$

SOLUCIÓN DE UN SISTEMA

La solución de un sistema de ecuaciones, si existe, depende de la cantidad de incógnitas, es decir:

*Si el sistema tiene 2 incógnitas, una solución del sistema de existir será de la forma (x_0, y_0), llamado par ordenado.

*Si el sistema tiene 3 incógnitas, una solución será de la forma $(x_0; y_0; z_0)$ llamada terna ordenada.

*Así en general, si el sistema tiene n incógnitas, una solución será de la forma $(x_0; y_0; \dots; w_0)$ de n elementos, llamada n-ada ordenada.

CONJUNTO SOLUCIÓN (C.S) :

Es el conjunto formado por todas las soluciones del sistema.

SISTEMAS EQUIVALENTES :

Son aquellas que a pesar de tener ecuaciones

diferentes aceptan las mismas soluciones.

* Las siguientes transformaciones permiten pasar de un sistema a otro equivalente.

I) Si una ecuación del sistema se multiplica por un número real, no nulo, se obtiene un sistema equivalente al primero.

* Observa el siguiente ejemplo:

$$\left.\begin{array}{l} x-y=1 \\ x+3y=5 \end{array}\right\} \text{sistema equivalente} \underset{\Leftrightarrow}{} \left\{\begin{array}{l} 3x-3y=3 \\ x+2y=5 \end{array}\right.$$

Solución: $x=2\ ;\ y=1$

II) Si una ecuación de un sistema se sustituye por la suma de ella con otras ecuaciones del sistema previamente multiplicadas por números cualesquiera, se obtiene un sistema equivalente al primero.

* Observa el ejemplo:

$$\left.\begin{array}{l} x-y=1 \\ x+3y=5 \end{array}\right\} \text{sistema equivalente} \underset{\Leftrightarrow}{} \left\{\begin{array}{l} x-y=1 \\ 4x=8 \end{array}\right.$$

Solución: $x=2\ ;y=1$

* Se ha sumado a la segunda ecuación la primera multiplicada por tres.

III) Si un sistema de ecuaciones se despeja una variable en una de las ecuaciones y la expresión resultante se sustituye en las demás, el sistema que resulta es equivalente al primero.

* Observa el ejemplo:

$$\begin{array}{l} x-y=1 \\ x+3y=5 \end{array} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=1+y \\ x+3y=5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=1+y \\ (1+y)+3y=5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=1+y \\ 4y=4 \end{array}\right.$$

Solución: $x=2\ ;y=1$

IV) Si en un sistema hay una ecuación que es consecuencia de otras varias, se puede suprimir y resulta un sistema equivalente al dado.

*Observa este sistema de tres ecuaciones con dos variables.

$$\left.\begin{array}{l} x+y=1 \\ 2x+y=3 \\ 4x+3y=5 \end{array}\right]$$

La tercera ecuación se obtiene multiplicando a la primera por dos y sumándole la segunda . Se dice que la tercera ecuación es consecuencia de las primeras, o también que la tercera ecuación es combinación lineal de las otras dos.

* La tercera ecuación se puede suprimir y el sistema que queda es equivalente al primero.

$$\left.\begin{array}{l} x+y=1 \\ 2x+y=3 \end{array}\right] \text{Solución; } x=2;\ y=-1$$

TRANSFORMACIONES QUE SE PUEDE REALIZAR SIN ALTERAR EL SISTEMA:

* *Permutar dos ecuaciones del sistema.*

* *Multiplicar una ecuación cualquiera del sistema por un número distinto de cero.*

* *Sumar o restar miembro a miembro las ecuaciones de un sistema.*

CLASES DE SISTEMAS DE ECUACIONES

Se clasificará de acuerdo a ciertas características:

I) DE ACUERDO A LA SOLUCIÓN :

Los sistemas se clasifican en compatibles o incompatibles dependiendo si existe o no solución.

A) SISTEMA COMPATIBLE :

Es aquel sistema que presenta solución y a su vez puede ser:

1) COMPATIBLE DETERMINADO :

Un sistema se llamará compatible determinado si presenta al menos una solución o hay un número finito de soluciones.

EJEMPLO :

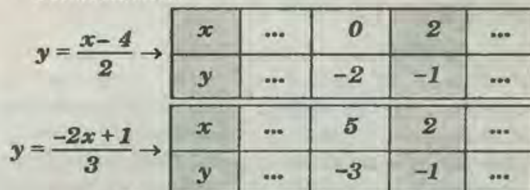
* Sea el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{l} x-2y=4 \\ 2x+3y=1 \end{array}\right.$$

Este sistema tiene una única solución que es:

$$x=2\ ;y=-1$$

* Gráficamente:

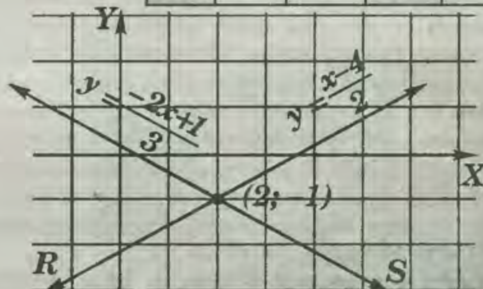


$y=\dfrac{x-4}{2} \rightarrow$

x	...	0	2	...
y	...	−2	−1	...

$y=\dfrac{-2x+1}{3} \rightarrow$

x	...	5	2	...
y	...	−3	−1	...



* Observa que los gráficos de estas dos ecuaciones determinan dos rectas que se cortan en el punto de

coordenadas *(2 ; –1)*.

2) SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO

Es aquel sistema que tiene infinitas soluciones :

EJEMPLO :

* Sea el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ 2x - 2y = 4 \end{cases}$$

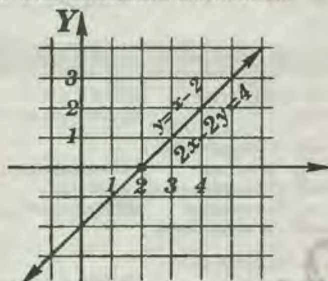
* Estas dos ecuaciones son equivalentes y quedan reducidas a una sola ecuación $y = x - 2$, cuyas soluciones encontramos tabulando:

x	...	0	2	...
y	...	-2	0	...

* Cuyo conjunto solución será :

C.S. = {(0; –2), (2; 0), ...}

* El sistema tiene infinitas soluciones.



* Observa que los gráficos de estas dos ecuaciones determinan dos rectas que coinciden ; por lo tanto, cualquier punto de la recta es la solución del sistema.

B) SISTEMA INCOMPATIBLE O INCOSISTENTE :

Es aquel sistema que no tiene solución , se dirá que su conjunto solución es el vacío.

EJEMPLO 1 :

* Observa que el conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales puede ser vacío. En efecto, el sistema:

$$x + y = 1$$
$$x + y = 7$$

* No tiene solución, porque no es posible encontrar dos números reales cuya suma dé *1* y, a la vez , dé *7*.

En este caso decimos que el sistema no tiene solución, o que es un sistema incosistente o incompatible.

EJEMPLO 2 :

* Sea el siguiente sistema de ecuaciones :

$$\begin{cases} x + 2y = 4 \\ -2x - 2y = 0 \end{cases}$$

* Este sistema no tiene solución.

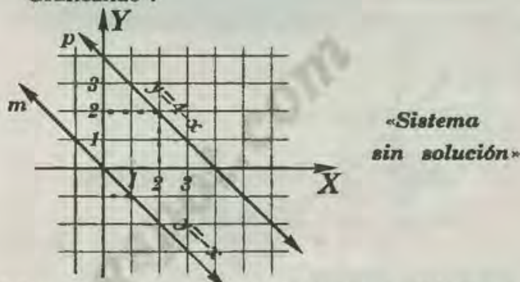
* Tabulando : $x + y = 4 \Rightarrow y = 4 - x$

x	...	0	2	...
y	...	4	2	...

$-2x - 2y = 0 \Rightarrow y = -x$

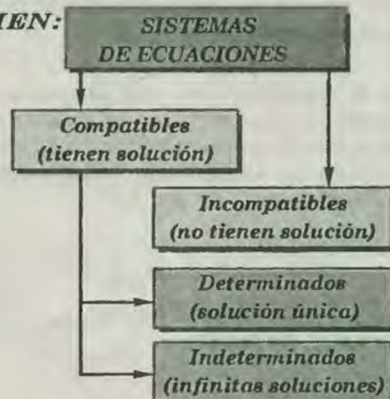
x	...	0	1	...
y	...	0	-1	...

* Graficando :



* Los gráficos de estas dos ecuaciones determinan dos rectas paralelas.

*** RESUMEN:***



INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA

(SISTEMA DE 2 INCÓGNITAS)

Toda ecuación lineal de la forma $ax + by = c$ representa una recta en el plano cartesiano R^2, por lo tanto la interpretación geométrica de un sistema de 2 ecuaciones con 2 variables se reduce a interpretación algebraica de las posibles posiciones que adopten dos rectas en el plano y sabemos que dos rectas son secantes (si se intersectan en un solo punto) o paralelas (si no se intersectan) o coincidentes (se superponen). Veremos que cada una de estas posiciones relativas tiene una interpretación algebraica en términos del número de soluciones del sistema.

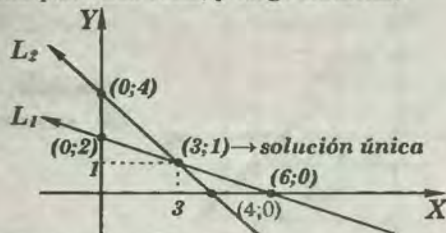
i) Si las rectas se cortan , el sistema de ecuaciones tiene una solución dada por el punto de intersección. En este caso el sistema es consistente y las ecuaciones son independientes.

EJEMPLO :

Resolver : $\begin{cases} x+3y=6 .....L_1 \\ x+y=4 ......L_2 \end{cases}$

RESOLUCIÓN:

* Graficando (para ello solo se necesita tabular dos puntos para cada recta, y luego trazarlas)



OBSERVACIÓN :

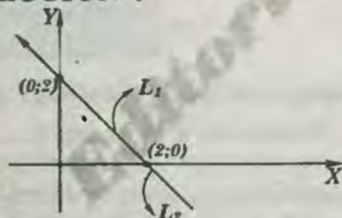
* Se denomina ***ecuaciones independientes*** si los coeficientes de una misma incógnita no son proporcionales.

ii) Si las rectas son coincidentes el sistema de ecuaciones tiene infinitas soluciones representadas por todos los puntos sobre la recta, en este caso el sistema es consistente y las ecuaciones son dependientes.

EJEMPLO :

Resolver : $\begin{cases} x+y=2 ....L_1 \\ 3x+3y=6 ......L_2 \end{cases}$

RESOLUCIÓN :

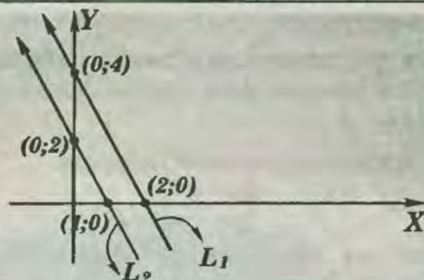


iii) Si las rectas son paralelas el sistema de ecuaciones no tiene solución ya que las rectas nunca se cortan, el sistema en este caso es inconsistente.

EJEMPLO :

Resolver : $\begin{cases} 2x+y=4 .....L_1 \\ 2x+y=2 ......L_2 \end{cases}$

RESOLUCIÓN:



OBSERVACIÓN :

Solucionar un sistema de ecuaciones con dos incógnitas consiste en encontrar valores para x e y que satisfagan ambas ecuaciones. Gráficamente, resolver un sistema de ecuaciones consiste en establecer el punto de corte de las rectas.

*A continuación presentamos un cuadro comparativo entre el aspecto geométrico y algebraico.

EN GEOMETRÍA	EN ÁLGEBRA
Si las rectas se intersectan en un solo punto.	El sistema tiene solución única. El sistema es compatible.
Si las rectas son coincidentes, es decir las rectas se intersectan en un infinito número de puntos. Las dos ecuaciones corresponden a la misma recta.	El sistema tiene infinitas soluciones. El sistema es compatible.
Si las rectas son paralelas, es decir las rectas no se interceptan porque no hay puntos en común.	El sistema no tiene solución. El sistema es incompatible.

II) DE ACUERDO AL TIPO DE ECUACIONES :

Los sistemas pueden ser lineales o no lineales.

A) SISTEMAS LINEALES :

Son aquellos sistemas donde cada una de las ecuaciones son lineales. Esta denominación se debe a que, en la geometría analítica, estas ecuaciones determinan una recta.

EJEMPLO : $\begin{cases} -x+3y-2z=-17 \\ -2x-3y=14 \\ -3x-y-2z=2 \end{cases}$

* Es un sistema lineal determinado y su solución es ***(-1; -4; 3)***

B) SISTEMA NO LINEAL :

Es aquel sistema donde, al menos, una de las ecuaciones es no lineal.

EJEMPLO :

$$\begin{cases} x^2+y^2=13 \\ x-y=1 \end{cases}$$

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES CON DOS INCÓGNITAS

Un sistema de dos ecuaciones con dos variables es de la forma : $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$

RESOLUCIONES DE SISTEMAS LINEALES (2 INCÓGNITAS):

El método que mayormente se utiliza es el denominado método algebraico que consiste en realizar transformaciones lineales con las ecuaciones del sistema para eliminar progresivamente las incógnitas.

* La forma en que se lleva a cabo dicha eliminación genera 4 procedimientos:

I)SUSTITUCIÓN

II)IGUALACIÓN

III)REDUCCIÓN

IV) REGLA DE CRAMER

I) MÉTODO DE SUSTITUCIÓN:

Se resume en los siguientes pasos:

* En una ecuación, suponiendo conocida una incógnita, hallar el valor de la otra (esta operación se llama despejar una incógnita).

* Sustituir la incógnita despejada en la otra ecuación del sistema, obteniendo así una ecuación con una incógnita.

* Resolver la ecuación obtenida.

* Sustituir la solución obtenida en la expresión de la otra incógnita.

EJEMPLO 1:

Resolver : $\begin{cases} x+3y=5 \\ 2x+2y=6 \end{cases}$

RESOLUCIÓN :

* Despejamos x de la primera ecuación por lo que tenemos $x = 5 - 3y$. Sustituimos este resultado en la segunda ecuación y tenemos una ecuación con una sola variable.

$$2(5-3y)+2y=6 \Rightarrow 10-6y+2y=6$$
$$\Rightarrow -4y=-4 \Rightarrow y=1$$

* Con $y = 1$ mediante sustitución regresiva es decir sustituyendo 1 en vez de «y» en las eccuaciones originales. Tenemos el valor de x o sea: $2x+2(1)=6$ tenemos $2x = 4$ entonces $x = 2$.

* La solución del sistema vendrá dada por el par $\{2; 1\}$.

EJEMPLO 2 :

Resolver : $\begin{cases} 2x-3y=-13 \\ 4x+2y=-2 \end{cases}$

RESOLUCIÓN:

*Se despeja en la segunda ecuación el valor de y:

$$y=-1-2x$$

* Se reemplaza la expresión en la primera ecuación:

$$2x-3(-1-2x)=-13$$
$$\Rightarrow 2x+3+6x=-13$$
$$\Rightarrow 8x=-16 \Rightarrow x=-2$$

* Se reemplaza en cualquiera de las dos ecuaciones y se calcula el valor de y: $y=-1-2(-2)=3$

* Entonces: $C.S. = (-2; 3)$

II) MÉTODO DE IGUALDAD :

Podríamos resumir este método de igualación en los siguientes pasos.

* Despejar en las ecuaciones la misma variable.

* Igualar las dos expresiones de la variable despejada.

* Resolver la ecuación obtenida.

* Sustituir la solución obtenida en cualquiera de las expresiones de la otra incógnita.

EJEMPLO :

Resolver : $\begin{cases} 2x-3y=-5 \\ 3x+4y=1 \end{cases}$

RESOLUCIÓN :

* Al aplicar este método también conveniente observar cuál es la incógnita que más fácilmente se despeja en las dos ecuaciones.

* Se despeja la misma variable en las dos ecuaciones:

$$y=\frac{2x-5}{3}$$
$$y=\frac{1-3x}{4}$$

* Como $y = y$, entonces :

$$\frac{2x-5}{3}=\frac{1-3x}{4} \Rightarrow 4(2x-5)=3(1-3x)$$
$$\Rightarrow 8x-20=3-9x \Rightarrow 17x=23 \Rightarrow x=\frac{23}{17}$$

*Se reemplaza el valor de x en cualquiera de las dos

ecuaciones y se resuelve la ecuación para *y*:

$$y=\frac{2\left(\frac{23}{17}\right)-5}{3}=-\frac{13}{17}$$

* Luego la solución es : $\left(\frac{23}{17};-\frac{13}{17}\right)$

III) MÉTODO DE REDUCCIÓN (EL MÁS UTILIZADO) :

Este método llamado también de eliminación se resumen en los siguientes pasos:

* Multiplicar los dos miembros de las dos ecuaciones por ciertos números, de tal forma que los coeficientes de una incógnita sean opuestos.

* Sumar las dos ecuaciones miembro a miembro.

* Resolver la ecuación obtenida.

* Sustituir la solución obtenida en cualquiera de las dos ecuaciones iniciales y hallar la otra incógnita.

EJEMPLO 1 :

Resolver : $\begin{cases}2x+3y=5\\2x-3y=7\end{cases}$

RESOLUCIÓN:

* Comos los coeficientes de *y* son iguales pero de signo contrario , no es necesario multiplicar ninguna de las ecuaciones . Al sumar las dos ecuaciones se obtiene :

$$\begin{array}{r}2x+3y=5\\ 2x-3y=7\\ \hline \rightarrow 4x=12\rightarrow x=3\end{array}\ (+)$$

* Sustituyendo «*x*» en la primera ecuación:

$$2(3)+3y=5\Rightarrow y=-\frac{1}{3}$$

* Entonces : C.S. = $(3;-\frac{1}{3})$

EJEMPLO 2 :

Resolver : $\begin{cases}3x+5y=11 \text{ ....(I)}\\2x+3y=7 \text{ ....(II)}\end{cases}$

RESOLUCIÓN :

* Eliminaremos la variable «*y*» para esto multiplicamos por *3* a *(I)* y por *5* a *(II)*, resultando:

$$\begin{array}{r}9x+15y=33\\ 10x+15y=35\\ \hline \Rightarrow x=2\end{array}\ (-)$$

"Restando miembro a miembro"

* Sustituyendo $x=2$ en *(I)*:

$$3(2)+5y=\Rightarrow 11\ y=1$$

* Entonces : C.S. = *(2; 1)*

EJEMPLO 3 :

Resolver : $\begin{cases}x+y=6\\2x-y=3\end{cases}$

RESOLUCIÓN :

*Observe que una ecuación contiene +*y* y la otra – *y*. Al sumar las ecuaciones, podemos eliminar la variable *y* obtener una ecuación que contiene una incógnita :

$$\begin{array}{r}x+y=6\\ 2x-y=3\\ \hline \Rightarrow 3x=9\end{array}\ (+)$$

* Ahora despejamos la variable restante , x: $x=3$

* Por último, determinamos *y* sustituyendo $x=3$ en la ecuación original. $3+y=9\Rightarrow\ y=6$

* Entonces: C.S. = *(3; 6)*

EJEMPLO 4 :

Resolver : $\begin{cases}2x+y=3\\4x+2y=12\end{cases}$

RESOLUCIÓN:

* Se puede eliminar la varibale *y* multiplicando la primera ecuación por –2, después sumamos las ecuaciones :

$$\begin{array}{r}-4x-2y=-6\\ 4x+2y=12\\ \hline 0=6...falso\end{array}\ (+)$$

* Como $0=6$ es un enunciado falso, este sistema no tiene solución. Este sistema es inconsistente y las rectas serán paralelas cuando se las grafique.

EJEMPLO 5 :

Resolver : $\begin{cases}2x+y=6\\3x+y=5\end{cases}$

RESOLUCIÓN:

* El objetivo de la reducción, es obtener dos ecuaciones cuya suma sea una ecuación que contenga sólo una variable. Si sumáramos estas dos ecuaciones, no eliminamos variable alguna. Sin embargo, si multiplicamos una de las ecuaciones por *–1* y después sumamos, lograremos nuestro objetivo. Multiplicamos la ecuación $2x+y=6$ por *–1*, da como resultado $-2x-y=-6$.

* Recuerde que debemos multiplicar ambos lados de la ecuación por *–1*. Este proceso tiene el efecto de modificar el signo de cada término de la ecuación que es multiplicada, sin cambiar la solución del sistema de ecuaciones. Ahora, sumamos las dos ecuaciones de la derecha.

$$\begin{array}{r}-2x-y=-6\\ 3x+y=5\\ \hline x=-1\end{array}\ (+)$$

* Despejamos *y* en cualquiera de las ecuaciones

originales. $-2(-1) + y = 6 \Rightarrow y = 8$

* Entonces : $C.S. = (-1; 8)$

IV) REGLA DE CRAMER (TEOREMA) :

La solución del sistema de ecuaciones.

$$a_1x + b_1y = c_1$$
$$a_2x + b_2y = c_2$$

* Esta dado por :

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta_s} = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_2};$$

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta_s} = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

* Donde:

Δ_x = Determinante de x

Δ_y = Determinante de y

Δ_s = Determinante del sistema

* Siempre que :

$$\Delta_s = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$$

* Es decir este teorema nos proporciona una condición necesaria y suficiente para que un sistema sea compatible determinado, esta condición es que el determinante del sistema sea diferente de cero.

EJEMPLO 1 :

Resolver el sistema : $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x + 3y = 18 \end{cases}$

RESOLUCIÓN:

* Los determinantes de las variables y del sistema son:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 18 & 3 \end{vmatrix} = (3)(3) - (18)(1) = -9$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 18 \end{vmatrix} = (2)(18) - (1)(3) = 33$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = (2)(3) - (1)(1) = 5$$

* Luego aplicando la Regla de Cramer

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-9}{5}, \; y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{33}{5}$$

* el conjunto solución: $C.S. \left(\frac{-9}{5}; \frac{33}{5}\right)$

EJEMPLO 2 :

Resolver : $\begin{matrix} 3x + 2y = 4 \\ x - y = 1 \end{matrix}$

RESOLUCIÓN :

* Tenemos que :

$$\Delta_s = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3 - 2 = -5 \neq 0$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -4 - 2 = -6$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 4 = -1$$

* Entonces :

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-6}{-5} = \frac{6}{5} \Rightarrow x = \frac{6}{5}$$

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-1}{-5} \Rightarrow y = \frac{1}{5}$$

EJEMPLO 3 :

Calcular «x» en el sistema : $\begin{cases} 5x - 3y = 11 \\ 4x - 5y = 1 \end{cases}$

RESOLUCIÓN:

* De acuerdo a la teoría :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 11 & -3 \\ 1 & -5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 4 & -5 \end{vmatrix}} = \frac{-55 + 3}{-25 + 12} = \frac{-52}{-13} \Rightarrow x = 4$$

EJEMPLO 4 :

Calcular «y» en el sistema : $\begin{cases} -7x + 5y = -45 \\ 4x - 3y = 26 \end{cases}$

RESOLUCIÓN :

* Para el cálculo de «y» tenemos :

$$y = \frac{\begin{vmatrix} -7 & -45 \\ 4 & 26 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -7 & 5 \\ 4 & -3 \end{vmatrix}} = \frac{-182 + 180}{21 - 20} = \frac{-2}{1} \Rightarrow y = -2$$

EJEMPLO 5 :

$\begin{cases} 4x + 5y = 3 \\ 8x + 10y = 6 \end{cases}$

RESOLUCIÓN :

* El determinante de la matriz de coeficientes es:

$$\Delta_s = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 8 & 10 \end{vmatrix} = 40 - 40 = 0$$

* Como el determinante del sistema es 0 y este determinante es el denominador de las expresiones para x y y, entonces no se puede usar la regla de Cramer. En este caso se dice que el sistema no tiene solución única. El sistema es inconsistente o dependiente.

* La regla de Cramer se puede aplicar para resolver cualquier sistema de ecuaciones lineales en el que el número de ecuaciones sea igual al número de incógnitas y en el que el determinante de la matriz de coeficientes sea diferente a 0.

ANÁLISIS DE UN SISTEMA LINEAL DE 2 ECUACIONES CON 2 INCÓGNITAS

Consideremos el siguiente sistema :

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1; & a_2;b_2;c_2\neq 0 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$$

I) El sistema será compatible determinado, es decir posee solución única, si se cumple:

$$\boxed{\Delta_s \neq 0} \quad ó \quad \boxed{\frac{a_1}{a_2}\neq\frac{b_1}{b_2}}$$

II) Para que el sistema dado sea compatible indeterminado (infinitas soluciones), se debe cumplir :

$$\boxed{\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}}$$

* Si: $\Delta_x=0;\ \Delta_y=0 \wedge \Delta_s=0$, el sistema es compatible indeterminado y tiene infinitas soluciones.

III) El sistema es incompatible o inconsistente debe cumplirse :

$$\boxed{\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2}}$$

* Si: $\Delta_x\neq 0;\ \Delta_y\neq 0$ y $\Delta_s=0$, el sistema es incompatible, no tiene solución.

EJEMPLO 1 :

El sistema lineal : $\begin{cases} 3x+y=7 \\ 5x+4y=-1 \end{cases}$

Se tiene : $\frac{3}{5}\neq\frac{1}{4}\Rightarrow$ el sistema tiene solución única.

EJEMPLO 2 :

El sistema lineal : $\begin{cases} 2x+3y=1 \\ 6x+9y=3 \end{cases}$

Se tiene : $\frac{2}{6}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}\Rightarrow$ el sistema lineal tiene infinitas soluciones.

EJEMPLO 3 :

El sistema lineal : $4x-5y=4$
$8x-10y=14$

Se tiene : $\frac{4}{8}=\frac{-5}{-10}\neq\frac{4}{14}\Rightarrow$ el sistema lineal no tiene solución.

EJEMPLO 4 :

Dado el sistema : $\begin{cases} 2x+ky=5k \\ 5x-4y=-27 \end{cases}$

Para qué valor de «k»; es incompatible

RESOLUCIÓN:

* Calculando «x» vemos que:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 5k & k \\ -27 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & k \\ 5 & -4 \end{vmatrix}}=\frac{-20k+27k}{-8-5k}=\frac{7k}{-5k-8}$$

* Para que no exista solución debe cumplirse que :

$$-5k-8=0\Rightarrow k=\frac{-8}{5}$$

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES CON TRES INCÓGNITAS

Tienen la siguiente forma:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \end{cases}$$

Al igual que en el sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables, un sistema de tres ecuaciones lineales con tres variables también tiene exactamentes una solución, infinitas soluciones o no tener solución.

MÉTODOS DE SOLUCIÓN :

Los métodos más usados para este tipo de sistemas es el algebraico y el método de las determinantes. Veamos como funciona el método de reducción en un sistema de tres ecuaciones con tres variables.

EJEMPLO 1:

Resolver : $\begin{cases} x+y-z=-1 \ldots\ldots\ldots(I) \\ 4x-3y+2z=16 \ldots\ldots\ldots(II) \\ 2x-2y-3z=5 \ldots\ldots\ldots(III) \end{cases}$

RESOLUCIÓN:

*Para un sistema de tres ecuaciones debemos eliminar una variable a la vez formando pares con las ecuaciones dadas.

*Por ejemplo eliminamos la variabla «z» de las ecuaciones *(I)* y *(II)* , multiplicando la ecuación *(I)* por «2» tenemos :

$$\begin{cases} -2x+2y-2z=-2 \\ 4x-3y+2z=16 \end{cases} \oplus$$
$$6x-y=14\ldots\ldots(\alpha)$$

* Ahora eliminamos «z» de las ecuaciones *(I)* y *(II)* para esto multiplicamos la ecuación *(I)* por «3» y sumando tenemos:

$$\begin{cases} -3x-3y+3z=3 \\ 2x-2y-3z=5 \end{cases} \oplus$$
$$-x-5y=8\ldots\ldots(\beta)$$

* Luego resolvemos de (α) y (β), resulta: $x = 2$; $y = -2$, con estos valores hallamos «z», reemplazando en la ecuación (I) tenemos:

$$2 - 2 - z = -1 \Rightarrow z = 1$$

* Entonces : C.S. = (2; –2; 1)

EJEMPLO 2 :

Resolver :

$$5x - 3y + 7z = 31 \ldots\ldots\ldots\ldots (I)$$
$$4x - 5y + 9z = 23 \ldots\ldots\ldots\ldots (II)$$
$$-3x + 5y + 7z = -1 \ldots\ldots\ldots\ldots (III)$$

RESOLUCIÓN :

* Sumando (II) y (III), se obtiene :

$$x + 16z = 22 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\alpha)$$

* Luego de 5(I) + 3(III), se obtendrá:

$$\begin{array}{r} 25x - 15y + 35z = 155 \\ -9x + 15y + 21z = -3 \\ \hline 16x + 56z = 152 \ldots\ldots (\beta) \end{array} \oplus$$

* Ahora de (α) y (β) :

$$\begin{array}{r} x + 16z = 22 \quad (\times 16) \\ 16x + 56z = 152 \\ \hline 200z = 200 \end{array} \ominus$$

$$\Rightarrow z = 1 \Rightarrow x = 6$$

* Reemplacemos estos valores en (I) :

$$5(6) - 3y + 7(1) = 31 \Rightarrow y = 2$$

* Finalmente : C.S. = (6; 2; 1)

REGLA DE CRAMER PARA RESOLVER SISTEMA DE ECUACIONES CON TRES VARIABLES

La Regla de Cramer (llamada así en honor a Gabriel Cramer de Ginebra , *1770-1752)* usa determinantes para resolver un sistema de ecuaciones lineales.

Un sistema de n–ecuaciones lineales con n–incógnitas tiene una sola solución, si y solamente si el determinante Δ formado por los coeficientess de las incógnitas no es igual a cero.

* Sea :

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1$$
$$a_2x + b_2y + c_2z = d_2$$
$$a_3x + b_3y + c_3z = d_3$$

* Su resolución por la regla de Cramer, (donde $\Delta_s \neq 0$) es:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta_s} = \frac{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}} \qquad y = \frac{\Delta_y}{\Delta_s} = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}$$

$$z = \frac{\Delta_z}{\Delta_s} = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}$$

Donde:

Δ_s : Se forma con los coeficientes de las incógnitas.

Δ_x : Se forma cambiando en Δ los coeficientes de x por los términos independientes.

Δ_y : Se forma cambiando en Δ los coeficientes de y por los términos independientes.

Δ_z : Se forma cambiando en Δ los coeficientes de z por los términos independientes.

EJEMPLO 1 :

Resolver :
$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 8 \\ 2x + y - z = 3 \\ -2x - y + 2z = 1 \end{cases}$$

RESOLUCIÓN :

* Se halla el determinante de coeficientes :

$$\Delta_s = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 1 - 2(7) - 2(-5) = -3$$

* Se halla luego Δ_x, Δ_y, Δ_z :

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 8 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -18 \qquad \Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 8 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 15$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 2 & 1 & 3 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 12$$

* Luego :

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta_s} = \frac{-18}{-3} = 6$$

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta_s} = \frac{15}{-3} = -5$$

$$z = \frac{\Delta_z}{\Delta_s} = \frac{-12}{-3} = 4$$

* Entonces : C.S. = (6; –5; 4)

EJEMPLO 2 :

Resolver : $\begin{aligned} x-2y-3z&=4\\ x-2y-4z&=3\\ 2x+y-z&=3 \end{aligned}$

RESOLUCIÓN :

* Primero :

$$\Delta=\begin{vmatrix}1&-2&-3\\1&-2&-4\\2&1&-1\end{vmatrix}=5\neq 0$$

* Entonces el sistema tiene solución única, además tenemos :

$$\Delta_x=\begin{vmatrix}4&-2&-3\\3&-2&-4\\3&1&-1\end{vmatrix}=15 \qquad \Delta_y=\begin{vmatrix}1&4&-3\\1&3&-4\\2&3&-1\end{vmatrix}=10$$

$$\Delta_x=\begin{vmatrix}1&-2&4\\1&-2&3\\2&1&3\end{vmatrix}=5$$

*Entonces los valores de x , y , z son dadas por :

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta_s}=\frac{15}{5}=3\ ;\ y=\frac{\Delta_y}{\Delta_s}=\frac{-10}{5}=-2\ ;\ z=\frac{\Delta_z}{\Delta_s}=\frac{5}{5}=1$$

EJEMPLO 3 :

Calcular el valor de «y» en el sistema :

$$\begin{cases}5x-2y+3z=6\\7x+3y-4z=6\\2x+4y+3z=5\end{cases}$$

RESOLUCIÓN :

* Por determinantes , se tendría :

$$y=\frac{\begin{vmatrix}5&6&3\\7&6&-4\\-2&5&3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}5&-2&3\\7&3&-4\\-2&4&3\end{vmatrix}}=\frac{5(38)-6(13)+3(47)}{5(25)+2(13)+3(34)}$$

$$\Rightarrow y=\frac{190-78+141}{125+26+102}=\frac{253}{253}=1$$

PROPIEDADES:

I) Si: $\Delta_x,\Delta_y,\Delta_z\in\mathbb{R}\ \wedge\ \Delta_s\neq 0$,el sistema es compatible determinado.

Luego :

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta},\ y=\frac{\Delta_y}{\Delta},\ z=\frac{\Delta_z}{\Delta},\text{..... (solución única)}$$

II) Si: $\Delta_x=0;\Delta_y=0;\Delta_z=0\ \wedge\ \Delta_s=0$, el sistema es compatible indeterminado y tiene infinitas soluciones (pudiendo ser incluso incompatible)

III) Si $\Delta_s=0$ y por lo menos algún $\Delta_x\neq 0\wedge\Delta_y\neq 0\vee\Delta_z\neq 0$, entonces necesariamente el sistema dado es incompatible.

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE UNA ECUACIÓN CON TRES INCÓGNITAS

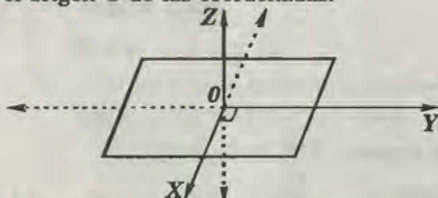
La terna ordenada ***(1 ; –2 ; 2)*** es una solución de la ecuación $x-2y+5z=15$ porque $1-2(-2)+5(2)=15$

Otras triplas ordenadas que satisfacen la ecuación son ***(0; –5; 1), (5; 0; 2), (23; 4; 0)***. Hay muchas más. El conjunto solución de la ecuación es un conjunto infinito.

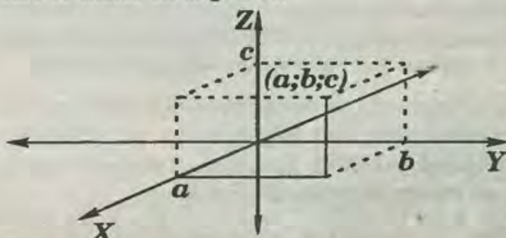
La gráfica de una ecuación en tres variables es un conjunto de puntos representados por ternas ordenadas de números reales . Tales puntos se representan en un sistema de coordenadas de tres dimensiones.

Así:

Para representar gráficamente la posición de un punto en el espacio es necesario considerar tres rectas mutuamente perpendiculares que se intersectan en un punto. Estas rectas se llaman el eje **X**, el eje **Y** y el eje **Z**. El punto de intersección se llama el origen O de las coordenadas.



* La terna de números reales ***(a; b; c)*** corresponde a un punto particular en el espacio y se representa como se indica en el gráfico.



EJEMPLO 1 :

Representa la terna : $P=(3;4;-2)$

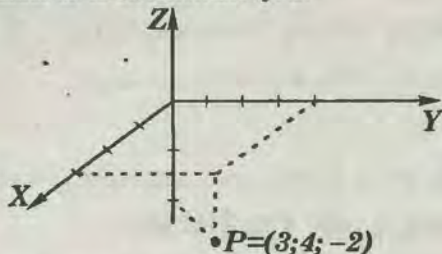
RESOLUCIÓN :

* Se traza el sistema coordenado de tres ejes.

*Se representa la pareja ***(3; 4)*** en el plano **X, Y**.

* Desde el punto $P = (3; 4)$ se buscan 2 unidades en el sentido negativo de la z .

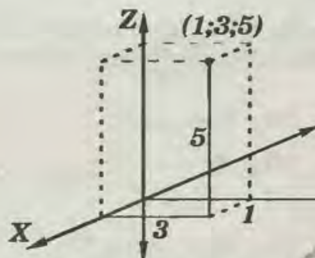
* P ha sido desplazado 3 unidades en la dirección del eje X, 4 unidades en la dirección del eje Y, y -2 unidades en la dirección del eje Z.



EJEMPLO 2 :

Reepresentar la terna: $(1; 3; 5)$

RESOLUCIÓN :



REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE ECUACIONES

Mientras las ecuaciones lineales de dos dimensiones representan rectas, las ecuaciones lineales con tres variables : $ax + by + cz = d$, representan planos.

Para representar un plano se necesitan tres puntos que no estén en una misma recta. Y éstos se determinan encontrando tres soluciones de la ecuación a representar.

EJEMPLO 1 :

Representar gráficamente la ecuación :

$$4x + 3y + 2z = 12$$

RESOLUCIÓN :

* Buscamos tres ternas que satisfagan la ecuación.

* Las ternas más fáciles de encontrar son las correspondientes a los puntos de intersección del plano con cada uno de los ejes. Estas se obtienen al hacer que dos de las tres variables sean cero y resolviendo la ecuación para la otra.

* Punto de intersección del plano con el eje X:

Hacemos $y = 0, z = 0$ y despejamos x:

$$4x + 3(0) + 2(0) = 12 \Rightarrow x = 3$$

$\Rightarrow$ El punto de intersección del plano con el eje X es: $P_1 = (3; 0; 0)$

* Punto de intersección del plano con el eje Y :

Hacemos $x = 0, z = 0$ y despejamos Y :

$$4(0) + 3y + 2(0) = 12 \Rightarrow y = 4$$

$\Rightarrow$ El punto de intersección del plano con el eje$Y$ es:

$$P_2 = (0; 4; 0)$$

* Punto de intersección del plano con el eje Z:

Hacemos $x = 0, y = 0$ y despejamos z:

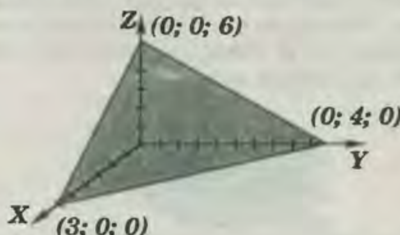
$$4(0) + 3(0) + 2z = 12 \Rightarrow z = 6$$

$\Rightarrow$ El punto de intersección del plano con el eje X es: $P_3 = (0; 0; 6)$

* Ubicamos en el eje de tres coordenadas y trazamos el plano determinado por la ecuación

$$4x + 3y + 2z = 12$$

* Todos los puntos que pertenezcan a este plano son soluciones de la ecuación.



EJEMPLO 2 :

Representar gráficamente la ecuación :

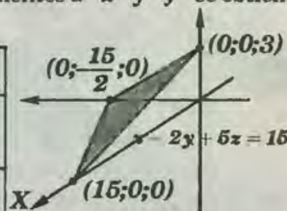
$$x - 2y + 5z = 15$$

RESOLUCIÓN:

* Se despeja z , es decir : $z = \dfrac{15 - x + 2y}{5}$

* Dando valores convenientes a "x" y "y" se obtiene la tabla:

x	0	-15	0
y	0	0	$-\dfrac{15}{2}$
z	3	0	0

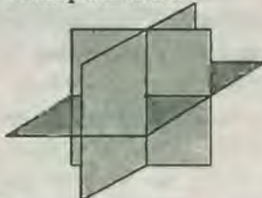


* La grafica de una ecuación lineal en tres variables es un plano.

* Si se tiene el siguiente sistema de ecuaciones lineales en las variables x, y y z:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \end{cases}$$

El conjunto solución del sistema es la intersección de los conjuntos solución de las tres ecuaciones. Como la gráfica de cada una de las ecuaciones en el sistema es un plano, el conjunto solución se puede interpretar gráficamente como la intersección de tres planos. Cuando esta intersección da un único punto, las ecuaciones del sistema se dice que son consistentes e independientes.

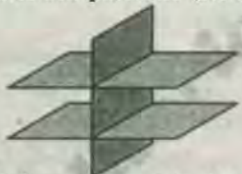


SOLUCIONES DE LOS SISTEMAS DE TRES ECUACIONES CON TRES VARIABLES

En un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas. Cada una de las ecuaciones representa un plano. De acuerdo con las posibles relaciones que se dá entre los tres planos , se determina el tipo de solución que tiene el sistema.



* Los tres planos son paralelos (No hay solución)



* Dos de los planos son paralelos (No hay solución)



* La intersección de los tres planos es una recta (hay infinitas soluciones).



* Los tres planos se interceptan en un punto (la solución es única)

SISTEMAS LINEALES DE «n» ECUACIONES CON «n» INCÓGNITAS

$$\begin{cases} a_1x_1+b_1x_2+\dots\dots\dots c_1x_n=d_1 \\ a_2x_2+b_2x_2+\dots\dots\dots c_2x_n=d_2 \\ \vdots \\ a_nx_1+b_nx_2+\dots\dots\dots c_nx_n=d_n \end{cases}$$

REGLA DE CRAMER:

Dado un sistema lineal de «*n*» ecuaciones en «*n*» incógnitas, el valor de una letra cualquiera es una fracción que tiene por denominador al determinante en la que la columna de los coeficientes de la letra se ha cambiado por la columna de términos independientes.

* El determinante de la matriz de los coeficientes de las incógnitas es distinto de cero. (Determinante del sistema).

$$\Delta_s=\begin{vmatrix} a_1 & b_1\dots\dots\dots c_1 \\ a_2 & b_2\dots\dots\dots c_2 \\ \vdots & \\ a_n & b_n\dots\dots\dots c_n \end{vmatrix}\neq 0$$

* La solución viene dada por :

$$\boxed{x_i=\frac{\Delta_i}{\Delta_s}}\;;\; i=1,2,3,\dots\dots,n$$

* Δ_i es la matriz que se obtiene a partir de la matriz A, cambiando los elementos de la columna ***i*** por los términos independientes.

* Para resolver un sistema de ***n*** ecuaciones con ***n*** incógnitas por la regla de Cramer es preciso calcular ***n + 1*** determinantes de orden ***n***.

PROPIEDADES :

I) Tiene solución única si $\Delta_s\neq 0$

II) Tiene infinitas soluciones si $\Delta_s=0\wedge\Delta_i=0$ para cada ***i ; i = 1; 2; ...;n***

III) No tiene solución si $\Delta_s=0\wedge\Delta_i\neq 0$ para algún ***i ; i = 1; 2; ... ;n***

SISTEMA LINEAL HOMOGÉNEO

Son aquellos sistemas lineales donde cada ecuación tiene término independiente nulo.

$$a_1x + b_1y + ... + c_1z = 0$$
$$a_2x + b_2y + ... + c_2z = 0$$
$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$
$$a_nx + b_ny + ... + c_nz = 0$$

* Siempre es compatible dado que al menos una solución es: $x = y = ... = z = 0$, donde es trivial o impropia.

SOLUCIÓN TRIVIAL :

Son las soluciones de la forma $\{(0;\ 0;\ ....;0)\}$ Un sistema lineal homogéneo siempre tiene una solución trivial o impropia. El estudio de los sistemas lineales homogéneos siempre se centrará en investigar si existen otras soluciones aparte de la trivial (solución propia).

ANALIZANDO (SISTEMA HOMOGÉNEO)

I) $\Delta_s \neq 0$; el sistema tiene única solución la trivial *(0; 0; 0)*; se deduce de Cramer.

II) $\Delta_s = 0$; el sistema tiene infinitas soluciones; es decir es compatible indeterminado.

SISTEMA LINEAL DE «n» ECUACIONES CON «m» INCÓGNITAS (n > m)

Un sistema de más ecuaciones que incógnitas es; en general, incompatible o imposible.

Habra solución solo si al resolver el sistema formado por «*m*» ecuaciones y «*m*» incógnitas; los valores hallados verifiquen las «*n* − *m*» ecuaciones restantes ; entonces la solución encontrada será la solución de todo el sistema.

CASO PARA «n» ECUACIONES y «n − 1» INCÓGNITAS

Sea : $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \\ a_3x + b_3y = c_3 \end{cases}$

SISTEMA LINEAL DE «n» ECUACIONES CON «m» INCÓGNITAS (n < m)

Un sistema de más incógnitas que ecuaciones es por lo general un sistema compatible indeterminado.

Estos tipos de sistema reciben el nombre de ***Ecuaciones Diofánticas.***

La resolución de un sistema de este tipo dependerá de las incógnitas restantes las cuales se hallarán usando parámetros adecuados las cuales se les asignarán los valores que uno requiera.

TEOREMA :

En un sistema de ecuaciones de **2** incógnitas , si el grado de la primera es «*n*» y de la segunda «*m*» entonces el máximo número de soluciones será «*m×n*»

EJEMPLO :

Resolver :

$x + y - 3z = 2$ ....(I)

$-3x + y + z = 6$ ....(II)

RESOLUCIÓN :

* De *(II)* + *3(I)*: $4y - 8z = 12 \Rightarrow y = 3 + 2z$
* Al reemplazar en *(I)* se obtiene : $x = z - 1$
* El conjunto solución es $C.S. = \{z - 1;\ 3 + 2z;\ z\}$
* Como vemos en la solución general, las variables x e y dependen de la variable z. Esto significa que para cualquier valor de la variable z se obtienen valores diferentes de x e y, en consecuencia el sistema tiene infinitas soluciones.

MÉTODO DE GAUSS PARA RESOLVER SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Uno de los métodos más empleados (por su sencillez) en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales es el método de eliminación de Gauss. El método, como su nombre lo indica, consiste en realizar determinadas transformaciones elementales en el sistema de ecuaciones lineales, de modo que los sistemas equivalentes que se van obteniendo contengan menos incógnitas.

Como veremos a continuación, cuando el sistema de ecuaciones lineales está dado en su forma matricial, el método se reduce a escalonar la matriz ampliada del sistema.

*Dado que nuestro objetivo es trabajar con matrices equivalentes formalicemos una definición para las transformaciones equivalentes entre matrices .

DEFINICIÓN :

Dada una matriz *A* , a las operaciones:

1) Permutar dos filas de *A*.

2) Multiplicar todos los elementos de una fila de A por un número diferente de cero.

3) Sustituir una fila por el resultado de sumarle a

ella un múltiplo de culaquier otra fila.

Se les llamará ***TRANSFORMACIONES ELEMENTALES*** por filas en ***A***.

EJEMPLO :

Sea : $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

* Si realizamos las operaciones: $f_3 + 2f_1 + f_2$

* Obtendremos la matriz ***B*** :

$$B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 11 \end{pmatrix}$$

* Entonces : $A \sim B$

DEFINICIÓN:

Dos matrices ***A*** y ***B*** son equivalentes($A \sim B$) si una se obtiene a partir de la otra mediante transformaciones elementales.

* En el proceso de encontrar las soluciones de un sistema de ecuaciones lineales la última matriz equivalente tiene una forma especial en su construcción, estas matrices se conocen como ***matrices escalón.***

* Ejemplos de matrices escalón :

$$A=\begin{pmatrix} 7 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Las matrices escalón son muy importantes.

DEFINICIÓN:

Una matriz ***M*** es ***escalonada*** por filas o simplemente escalón , si se cumplen las siguientes condiciones:

1) Si existe una fila nula (fila constituida sólo por ceros), al final de la matriz.

2) Si el primer número de izquierda a derecha es diferente de cero, en cualquier fila no nula.

3) Si existen dos filaas consecutivas no nulas (por ejemplo las filas ***i*** e ***i +1***) tal que tiene menor cantidad de ceros delante del primer número no nulo ocupa la posición ***i***.

EJEMPLO :

$$\begin{bmatrix} 1 & * & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

0 = elementos nulos
1 = elemento unidad
* = elementos cuales quiera (todos los que están sobre cada uno de los elementos ***1*** pueden hacerse nulos; en este caso, la matriz se conoce comoescalón reducido)

*Observa que la matriz :

$$D=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

No es una matriz escalón , ¿Por qué? Porque el primer elemento diferente de cero en la fila tres no se encuentra a la derecha del primer elemento no nulo de la fila dos.

MÉTODO DE GAUSS

Consideremos, para simplificar notaciones y hacer más comprensibles la exposición, un sistema de tres ecuaciones lineales con cuatro incógnitas :

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = b_2$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{35}x_3 + a_{34}x_4 = b_3$$

A la matriz ***A*** , conformada con los coeficientes del sistema :

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{35} & a_{34} \end{pmatrix}$$ la llamaremos matriz del sistema.

A la matriz columna ***X*** , cuyos elementos son las incógnitas del sistema :

$$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

la llamamos matriz de las incógnitas.

* Finalmente, denotamos por ***B*** a la matriz columna de los términos independientes del sistema :

$$B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

* Si efectuamos el producto matricial $A \cdot X$ e igualamos el resultado a la matriz ***B***; esto es,

$A \cdot X = B$, y además utilizamos la definición de igualdad de matrices , se obtiene el sistema de ecuaciones lineales dado inicialmente , por lo que a la relación $A \cdot X = B$ la llamaremos representación matricial del sistema de ecuaciones lineales.

* El sistema de ecuaciones lineales :

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 - \quad x_4 &= 1 \\ 2x_1 - \quad x_3 + x_4 &= 0 \\ x_2 + x_3 - 2x_4 &= 3 \end{aligned}$$

* Puede escribirse como el producto :

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

* Ahora bien, si se quiere resolver el anterior sistema de ecuaciones en lugar de operar el sistema en sí, trabajamos con la matriz ampliada $(A|B)$, es decir :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 3 \end{array}\right)$$

DEFINICIÓN :

Dado el sistema de ecuaciones lineales :

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 &= b_3 \end{aligned}$$

denotaremos por $(A|B)$ a la matriz ampliada del sistema, definida por :

$$A = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & b_3 \end{array}\right)$$

OBSERVACIÓN :

De las definiciones de matriz ampliada, sistemas de ecuaciones lineales equivalentes y matrices equivalentes , se tiene que si M es la matriz ampliada de un sistema dado, y M_1 es la matriz ampliada de un sistema equivalente al dado, entonces M y M_1 son equivalentes.

* Al usar las operaciones elementales en las filas se busca transformar una matriz aumentada en una matriz de un sistema en forma triangular. La matriz resultante tendrá la siguiente forma para un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{array}\right]$$

*Los siguientes ejemplos ilustran el procedimiento.

EJEMPLO 1 :

Resolver : $\begin{cases} 4x - 3y = 5 \\ 6x + 2y = 1 \end{cases}$

RESOLUCIÓN:

* Se forma la matriz aumentada del sistema, es decir:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 4 & -3 & 5 \\ 6 & 2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{2f_2 + 3f_1} \left[\begin{array}{cc|c} 4 & -3 & 5 \\ 0 & 13 & -13 \end{array}\right]$$

* La última fila de la matriz indica que :

$$13y = -13 \Rightarrow y = -1$$

* Si se sustituye este valor de y en la primera fila :

$$4x - 3(-1) = 5 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

* conjunto solución : $\left(\frac{1}{2}; -1\right)$

EJEMPLO 2 :

* Calcular «z» del sistema :

$$\begin{cases} x - 3y + 2z = 12 \\ 2x + y - 4z = -1 \\ x + 3y - 2z = -8 \end{cases}$$

RESOLUCIÓN :

* Se forma la matriz aumentada del sistema, es decir:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 12 \\ 2 & 1 & -4 & -1 \\ 1 & 3 & -2 & -8 \end{array}\right] \begin{array}{c} \xrightarrow{f_2 - 2f_1} \\ f_3 - f_1 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 12 \\ 0 & 7 & -8 & -25 \\ 0 & 6 & -4 & -20 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{7f_3 - 6f_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 12 \\ 0 & 7 & -8 & -25 \\ 0 & 0 & 20 & 10 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{20} \times f_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 12 \\ 0 & 7 & -8 & -25 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 \end{array}\right]$$

* De la tercera fila de la matriz se tiene que $z = \frac{1}{2}$.

TEOREMA :

Dado un sistema de m ecuaciones lineales y n incógnitas $A \cdot X = B$, denotaremos por M y M_1, las matrices escalón equivalentes a las matrices A y $(A; B)$, respectivamente. Entonces:

I) El sistema es consistente si y sólo si el número p de las filas nulas en M es igual al número q de filas nulas en M_1.

II) Si el sistema es consistente y $m - p = n$, es determinado.

III) Si el sistema es consistente y $m - p - n = 0$, es indeterminado y tiene $m - p - n$ variables libres.

* Si, por ejemplo, la matriz escalón asociada a un cierto sistema de ecuaciones lineales es:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

entonces el sistema es evidentemente inconsistente. Nótese que en este caso $p \neq q$

NOTA:

Si en la matriz escalón aparece una fila con todos los elementos correspondientes a la matriz del sistema iguales a cero, excepto el término independiente $[0\ 0\ \ldots\ 0 \mid b]$, entonces el sistema es incompatible.

CONCLUSIONES:

1) Un sistema de n ecuaciones con n incógnitas tiene una solución única si y sólo si la forma escalonada reducida por renglones de su matriz de coeficientes es I_n.

2) Si en la matriz escalonada el número de filas diferentes de cero es menor que el número de incógnitas, entonces el sistema es compatible indeterminado.

3) Si en la matriz escalón del sistema de ecuaciones aparece una fila de la forma $[0\ 0\ \ldots\ 0 \mid c]$ y $c \neq 0$, entonces el sistema es incompatible.

4) Todo sistema homogéneo es compatible.

* En resumen, el procedimiento consiste en reducir la matriz ampliada por operaciones elementales en las filas, a una matriz equivalente en la que la solución del sistema sea inmediata. Se pueden presentar estos casos:

i) En la matriz resultante no hay ninguna fila en la que el primer elemento no nulo esté en la última columna, entonces el sistema tiene una única solución o infinitas soluciones.

ii) En la matriz resultante aparece una fila con su primer elemento distinto de cero en la última columna, entonces el sistema no tiene solución.

EJEMPLO 2 :

Resolver el sistema por el método de la matriz ampliada ; e indicar el valor de «w»

$$\begin{cases} 2w + x - 3y - 3z = 4 \\ x + 2y + z = -3 \\ 2w - x + 3z = -3 \\ 5w - y + z = -6 \end{cases}$$

RESOLUCIÓN :

* El sistema anterior se puede escribir así :

$$\begin{cases} 2w + x - 3y - 3z = 4 \\ 0w + x + 2y + z = -3 \\ 2w - x + 0y + 3z = -3 \\ 5w + 0x - y + z = -6 \end{cases}$$

* La matriz ampliada del sistema es :

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -3 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 0 & 3 & -3 \\ 5 & 0 & -1 & 1 & -6 \end{array}\right] \xrightarrow[2f_4 - 5f_1]{f_3 - f_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -3 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & 3 & 6 & -7 \\ 0 & -5 & 13 & 17 & -32 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[f_4 + 5f_1]{f_3 + 2f_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -3 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 7 & 8 & -13 \\ 0 & 0 & 23 & 22 & -47 \end{array}\right] \xrightarrow[\text{y luego } \left(-\frac{1}{30}\right)f_4]{7f_4 - 23f_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -3 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 7 & 8 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

* De donde se obtiene : $w = 1$

EJEMPLO 3 :

Resolver el sistema por el método de la matriz ampliada:

$$\begin{cases} 2w + 3x - 4y - z = 3 \\ 3w + x + y + 2z = 1 \\ w - 2x + 3y - z = 0 \\ w - 2x - y - 9z = 5 \end{cases}$$

RESOLUCIÓN :

* La matriz ampliada del sistema es :

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & -4 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & -9 & 5 \end{array}\right] \xrightarrow{f_3 \times f_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -4 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & -1 & -9 & 5 \end{array}\right]$$

*y siguiendo con las transformaciones, llegaremos a :

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 7 & -8 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

* De donde la última fila de la matriz conduce a la ecuación : $0w + 0x + 0y + 0z = 1 \Rightarrow 0 = 1$

* Entonces el sistema no tiene solución (ϕ)

EJEMPLO 4 :

Resolver el sistema:

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 6 \\ 2x - y + 4z = 2 \\ 4x + 3y - 2z = 14 \end{cases}$$

RESOLUCIÓN:

* La matriz ampliada del sistema es:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 6 \\ 2 & -1 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & 14 \end{array}\right] \xrightarrow[f_3-4f_1]{f_2-2f_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 6 \\ 0 & -5 & 10 & -10 \\ 0 & -5 & 10 & -10 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{f_3-f_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 6 \\ 0 & -5 & 10 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

*La última fila de la matriz anterior conduce a la ecuación $0x + 0y + 0z = 0$ entonces el sistema tiene infinitas soluciones. El sistema original es equivalente al sistema:

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 6 \\ -5y + 10z = -10 \end{cases}$$

*Las ecuaciones de este sistema son dependientes. Si $(r\,;\,s\,;\,t)$ es una solución del sistema, entonces :

$$r + 2s - 3t = 6$$
$$-5s + 10t = -10$$

*Si se resuelve la ecuación $-5s + 10t = -10$, para s se obtiene : $s = \dfrac{10+10t}{5} = 2 + 2t$

* Al sustituir este valor de s en la ecuación :

$r + 2s - 3t = 6$, se obtiene :

$r + 2(2 + 2t) - 3t = 6 \Rightarrow r = 2 - t$

*Luego cualquier terna de la forma $(2 - t\,;\,2+2t\,;\,t)$ es solución del sistema o el conjunto solución del sistema es: $\{(2;-t;2+2t;t)/t \in \mathbb{R}\}$.

SISTEMAS DE ECUACIONES NO LINEALES

Un sistema no lineal es aquel sistema que no es lineal.

Para resolver un sistema no lineal de ecuaciones no existe un procedimiento general. Se puede eliminar variables, se puede sustituir y hasta puede graficar las ecuaciones para encontrar la solución, es decir sólo la experiencia le dirá a Ud. qué hacer.

Presentamos problemas resueltos para móstrarles algunos métodos que se puede utilizar.

EJEMPLO 1 :

Calcular «x» en :

$x + y = 2$ ....(I)

$xy = -1$ ....(II)

RESOLUCIÓN :

* De (I) : $y = 2 - x$
* Reemplazando en (II) : $x(2 - x) = -1$

$$\Rightarrow x^2 - 2x - 1 = 0 \Rightarrow (x-1)^2 = 2$$
$$\Rightarrow x - 1 = \pm\sqrt{2} \Rightarrow x = 1 \pm \sqrt{2}$$

EJEMPLO 2 :

Resolver :

$$\begin{cases} x + y = 1 \text{ ....(I)} \\ x^2 + y^2 = 25 \text{ ....(II)} \end{cases}$$

RESOLUCIÓN :

* De (I) : $y = 1 - x$; reemplazando en (II)

$x^2 + (1-x)^2 = 25 \Rightarrow x^2 + 1 + x^2 - 2x = 25$

* Simplificando , obtenemos :
  $x^2 - x - 12 = 0$
* Factorizando $(x - 4)(x + 3) = 0$
* Igualando cada factor a cero.
* Para : $\boxed{x = 4} \Rightarrow \boxed{y = -3}$
* Para: $\boxed{x = -3} \Rightarrow \boxed{y = 4}$

EJEMPLO 3 :

Resolver :

$$\begin{cases} x^2 - 2xy + 3y^2 = 19 \text{ ....(I)} \\ 2x^2 - xy + 4y^2 = 38 \text{ ....(II)} \end{cases}$$

RESOLUCIÓN :

* Cuando se trata de polinomios homogéneos se puede hacer : $y = kx$, de donde resulta.

Dividiendo Miembro a miembro

$$\begin{cases} x^2 \quad 2x \times kx + 3k^2x^2 = 19 \\ 2x^2 \quad x \times kx + 4k^2x^2 = 38 \end{cases} (\div)$$

$$\frac{1 - 2k + 3k^2}{2 - k + 4k^2} = \frac{19}{38}$$

$$\Rightarrow 2 - 4k + 6k^2 = 2 - k + 4k^2 \Rightarrow 2k^2 - 3k = 0$$

$$\Rightarrow k(2k - 3) = 0 \Rightarrow k = 0 \text{ ó } k = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow y = 0 \quad \text{ó } y = \frac{3}{2}x$$

* Luego para $y = 0$, en el sistema original, resulta:

$$\left.\begin{array}{r} x^2 = 19 \\ 2x^2 = 38 \end{array}\right] \Rightarrow x = \pm\sqrt{19}$$

* Finalmente para $y = \dfrac{3}{2}x$:

$$x^2 - 2x \cdot \frac{3x}{2} + 3 \cdot \left(\frac{3x}{2}\right)^2 = 19 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm\, 2$$

* De donde:

Para : $\boxed{x = 2} \Rightarrow \boxed{y = 3}$

Para : $x=-2$ ⇒ $y=-3$

* El conjunto solución final , será :

$$\{(\sqrt{19};0),(-\sqrt{19};0),(2;3),(-2;-3)\}$$

EJEMPLO 4 :

Dado el sistema :

$$\begin{cases}\sqrt{x+y}+\sqrt{y+z}+\sqrt{z+x}=18\\ \sqrt{x+y}-\sqrt{y+z}+\sqrt{z+x}=6\\ 2\sqrt{x+y}-\sqrt{y+z}+\sqrt{z+x}=11\end{cases}$$

Hallar la suma : $x+y+z$

RESOLUCIÓN :

* Haciendo uso de la transformación :

$$\begin{cases}\sqrt{x+y}=u\\ \sqrt{y+z}=v\\ \sqrt{z+x}=w\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}u+v+w=18\ldots\ldots\ldots(I)\\ u-v+w=6\ldots\ldots\ldots(II)\\ 2u-v+w=11\ldots\ldots\ldots(III)\end{cases}$$

* De *(I) – (II)* , resulta :

$2v=12 \Rightarrow v=6 \Rightarrow u=5$ y $w=7$

* Luego :

$$\begin{cases}\sqrt{x+y}=5\\ \sqrt{y+z}=6\\ \sqrt{z+x}=7\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x+y=25\\ y+z=36\\ z+x=49\end{cases} \oplus$$

$$2x+2y+2z=110$$

$$\Rightarrow x+y+z=55$$

EJEMPLO 5 :

Resolver el sistema :

$$\begin{cases}(x^2-y^2)(x-y)=5\\ (x^2+y^2)(x+y)=65\end{cases}$$

Siendo «x» e «y» números enteros

RESOLUCIÓN :

* Haciendo : $x=my$; se obtiene :

$$\begin{cases}(m^2-1)y^2(m-1)y=5\ldots\ldots\ldots(I)\\ (m^2+1)y^2(m+1)y=65\ldots\ldots\ldots(II)\end{cases}$$

* Dividiendo miembro a miembro :

$$\frac{(m^2+1)(m+1)}{(m+1)(m-1)(m-1)}=\frac{65}{5}=\frac{13}{1}$$

* Por proporciones :

$$m^3+1=13m^2-26m+13$$

* Simplificando :

$6m^2-13m+6=0 \Rightarrow (2m-3)(3m-2)=0$

$$\Rightarrow m=\frac{3}{2} \quad ó \quad m=\frac{2}{3}$$

* Reemplazando en *(I)* , resulta :

$$y^3=8 \quad ó \quad y^3=27$$

* Pero como $y\in\mathbb{Z}$, entonces : $y=2$ ó $y=3$

* Luego :

Si: $y=2 \Rightarrow x=\frac{3}{2}(2)=3$

Si: $y=3 \Rightarrow x=\frac{2}{3}(3)=2$

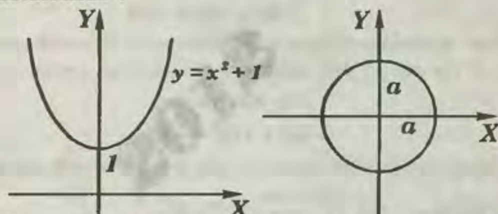
EJEMPLO 6 :

Calcular el valor de «a» para que el siguiente sistema tenga solución única:

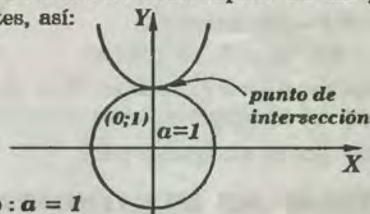
$$\begin{cases}y=x^2+1\\ x^2+y^2=a;\ a>0\end{cases}$$

RESOLUCIÓN :

*Graficando :



* Para que el sistema tenga solución única, las gráficas se deben interceptar en un punto o tangentes, así:



* Luego : $a=1$

EJEMPLO 7 :

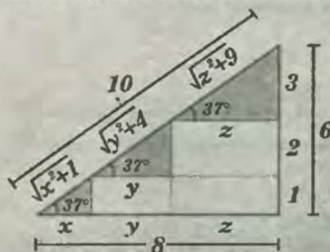
Resolver :

$$\begin{cases}\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+4}+\sqrt{z^2+9}=10\\ x+y+z=8\end{cases}$$

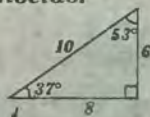
$$\{x,y,z\}\subset\mathbb{R}^+$$

RESOLUCIÓN :

* Construyamos un triángulo rectángulo donde intervengan las ecuaciones del sistema :



Vemos que este es un triángulo conocido.



* Tomemos la contangente de $37°$ en cada triángulo sombreado :

$$ctg37° = \frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3} = \frac{4}{3} \Rightarrow x = \frac{4}{3};\ \ y = \frac{8}{3};\ \ z = 4$$

EJEMPLO 8:

Resolver :
$$\begin{cases} xy + x + y = 7 \\ xz + x + z = 11 \\ yz + y + z = 5 \end{cases}$$

RESOLUCIÓN :

* Factorizando cada ecuación :

$$(x+1)(y+1) = 8$$
$$(x+1)(z+1) = 12$$
$$(y+1)(z+1) = 16$$

* Multiplicando miembro a miembro :

$$(x+1)^2(y+1)^2(z+1)^2 = 24^2$$

$$\Rightarrow (x+1)(y+1)(z+1) = \pm 24 \text{ ....} (\alpha)$$

* Reemplazando (α) :

$$8(z+1) = \pm 24 \Rightarrow z = 2 \ \vee \ z = -4$$
$$12(y+1) = \pm 24 \Rightarrow y = 1 \ \vee \ y = -3$$
$$6(x+1) = \pm 24 \Rightarrow x = 3 \ \vee \ x = -5$$

MÉTODOS GRÁFICOS

Los métodos gráficos son didácticos e ilustrativos, aunque en general carecen de interés práctico en las aplicaciones técnicas de importancia. Además están restringidos generalmente a sistemas de dos o tres ecuaciones reales.

Dos sistemas de ecuaciones con dos incógnitas de valor real, suelen aparecer como uno de los cinco tipos diferentes mencionados a continuación. Tienen una relación con el número de soluciones:

* Aquellos sistemas de ecuaciones que representan graficamente rectas y curvas que se intersectan entre si. Este tipo de sistema de ecuación es considerado como el normal. Suele tener un número de soluciones finito cada uno formado por las coordenadas de los punto de intersección.

* Sistemas que tienen simplificaciones falsas. Por ejemplo: $1 = 0$. Graficamente se representan como un conjunto de líneas que nunca se intersectan entre si, como líneas paralelas.

* Sistemas de ecuaciones en las que ambos simplifican a una identidad (por ejemplo, $x = 2x - y$; $yx=0$). Cualquier asignación de valores a las variables desconocidas satisface las ecuaciones. Por lo tanto, hay un número infinito de soluciones, que graficamente, se representa como todos los puntos del plano que representa la solución.

* Sistemas en los que las dos ecuaciones representan el mismo conjunto de puntos: son matemáticamente equivalentes (una ecuación general puede ser transformada en otra a través de la manipulación algebraica). Estos sistemas representan completamente la superposición de líneas o curvas, etc Una de las dos ecuaciones es redundante y puede ser desechada. Cada punto de la serie de puntos corresponde a una solución. Generalmente, esto significa que hay un número infinito de soluciones.

* Sistemas en los que una (y sólo una) de las dos ecuaciones se simplifica a una identidad. Por lo tanto, es redundante y puede ser descartada, según el tipo anterior. Cada punto de la serie de puntos representados por los demás es una solución de la ecuación de los que hay a continuación, por lo general un número infinito.

La ecuación $x^2 + y^2 = 0$ puede ser pensada como la ecuación de un círculo cuyo radio se ha reducido a cero, por lo que representa un único punto: $(x = 0,\ y = 0)$, a diferencia de una normal de un círculo que contiene infinito número de puntos. Este y otros casos similares muestran la razón por la cual los dos últimos tipos anteriormente descritos necesitan la calificación de «normalmente». Un ejemplo de un sistema de ecuaciones del primer tipo descrito anteriormente, con un número infinito de soluciones viene dada por $x = |x|$. $y = |y|$ (donde la notación | | indica el valor absoluto de la función), cuyas soluciones se forma un cuadrante de la x–y plano. Otro ejemplo es $x = |y|$. $y = |x|$, cuya solución representa un rayo.

UN POCO DE HISTORIA :

El primer sistema de ecuaciones lineales del que se tiene noticia cierta es el de Thimaridas de Paros, un pitagórico de la primera época, autor de una aritmética que ha llegado hasta nuestros días. He aquí el problema junto con su solución.

« Si se conoce la suma de varias incógnitas, así cómo también las sumas parciales de una de ellas con cada una de las otras, y se suman todas estas sumas parciales , restando después la primera suma total y se divide la diferencia por el número de incógnitas disminuido en 2, se obtiene el valor de la primera; y de éste se deducen los demás.»

Traté de plantear este *sencillo* sistema de ecuaciones llegando a la solución indicada por el autor hace apenas 2500 años !!!!

Durante cientos de años los matemáticos no supieron darle diferentes nombres a las incógnitas cómo lo hacemos hoy en día. Diofanto resolvió multitud de sistemas de ecuaciones luchando con la dificultad de tener un sólo símbolo para llamar a lo que tenía que calcular, que denominaba ***arithmos***, que quiere decir **número**.

El primer sistema de ecuaciones con un método para su resolución, el de reducción, fue ideado por Juan Buteo, monje francés (1492–1572) . La notación, en aquel tiempo, era esta:

1A,	$\frac{1}{3}$B,	$\frac{1}{3}$C	[14
1B,	$\frac{1}{4}$A,	$\frac{1}{4}$C	[8
1C,	$\frac{1}{5}$A,	$\frac{1}{5}$B	[8

Hoy en día hay que sustituir las comas por signos de adición y los medios paréntesis rectos por signos de igualdad y ya tendremos el sistema de ecuaciones listo y actualizado para ser resuelto.

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1:

Dado el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 5x-2y=m \\ x+9y=m \end{cases}$$

Determine m, de modo que y sea menor que x en 7 unidades.

A)47 B)37 C)11 D) 4 E)74

RESOLUCIÓN :

* Como $m = m$, entonces : $5x-2y = x+9y$

$$\Rightarrow 4x = 11y$$

* Pero por dato: $x = y + 7$

$$\Rightarrow 4(y+7) = 11y \Rightarrow 4y + 28 = 11y$$

$$\Rightarrow y = 4 \quad x = 11$$

* Reemplazando en la primera ecuación dada:

$$5(11) - 2(4) = m \Rightarrow m = 47$$

RPTA "A"

PROBLEMA 2 :

Al resolver el sistema :

$$\begin{cases} (a+b)x+(a-b)y=3(a^2+b^2) \text{.........................}(I) \\ \quad ax-by=2(a^2+b^2) \text{...............................}(II) \end{cases}$$

el valor de x es:

A)2a B)2b C)a + b D) 2a + b E)a + 2b

RESOLUCIÓN :

* Haciendo (I) – (II):

$$bx+ay=a^2+b^2 \text{...}(III)$$

$$ax-by=2(a^2+b^2) \text{......................................}(II)$$

* Luego de (b) × (III) + (a) × (II), se obtendrá :

$$\begin{cases} b^2x+aby=b(a^2+b^2) \\ a^2x-aby=2a(a^2+b^2) \end{cases} \oplus$$

$$(a^2+b^2)x=(a^2+b^2)(2a+b)$$

$$\Rightarrow x = 2a + b$$

RPTA "D"

PROBLEMA 3 :

Calcular «$m^2 + n^2$» , si el sistema :

$$\begin{cases} mx+ny=4 \\ 2x+y=1 \end{cases}$$

es compatible indeterminado.

A)50 B)60 C)70 D) 80 E)90

RESOLUCIÓN :

* Para que sea compatible indeterminado (por propiedad) : $\dfrac{m}{2}=\dfrac{n}{1}\neq\dfrac{4}{1}\Rightarrow m=8 \wedge n=4$

* Luego : $m^2 + n^2 = 8^2 + 4^2 = 80$

RPTA "D"

PROBLEMA 4 :

el valor de «a» para que el sistema :

$$\begin{cases} x+2y=18 \\ 3x-ay=54 \end{cases}$$

sea posible e indeterminado es:

A)3/2 B)–6 C)–2 D) 2

RESOLUCIÓN :

* Como el sistema es indeterminado , entonces:

$$\frac{1}{3}=\frac{2}{-a}=\frac{18}{54}\Rightarrow a=-6$$

RPTA "B"

PROBLEMA 5 :

Determinar «k» de modo que el sistema:

$$\begin{cases} (k+1)x+y=3 \\ 2x+(k-1)y=1 \end{cases}$$

sea incompatible.

A)$\sqrt{3}$ B)$-\sqrt{3}$ C)$A\vee B$ D)$A\wedge B$ E)$\varnothing$

RESOLUCIÓN :

* Para que el sistema sea incompatible por propiedad se debe cumplir que :

$$\frac{k+1}{2}=\frac{1}{k-1}\neq\frac{3}{1}\Rightarrow k^2-1=2\Rightarrow k=\pm\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow k=\sqrt{3} \qquad ó \qquad k=-\sqrt{3}$$

RPTA "C"

PROBLEMA 6 :

Dado el sistema :

$$\begin{cases} \alpha x+y=-1-\alpha \\ x+\alpha y=1+\alpha \end{cases}$$

Hallar la suma de los valores de α para los cuales el sistema tenga más de una solución.

A)–2 B)0 C)1 D) 2 E)–1

RESOLUCIÓN :

* Sumando las ecuaciones, se tiene:

$$\underline{(\alpha+1)}x+\underline{(1+\alpha)y}=0$$

$$\rightarrow (\alpha+1) \quad (x+y)=0$$

OBSERVACIÓN

$ax = b$ tiene más de una solución si $a = b = 0$

* En el problema : $\alpha + 1 = 0$

$$\Rightarrow \alpha = -1 \text{ ....}(\textit{Único valor})$$

RPTA "E"

PROBLEMA 7 :

Calcular «k» de modo que el sistema :

$$\begin{cases} (k-1)x=-y \text{..............................}(I) \\ \quad x=2y \text{..............................}(II) \end{cases}$$

presente infinitas soluciones:

A)-1/2 *B)1* *C)1/2* *D) 0*

RESOLUCIÓN :

* Como tiene infinitas soluciones :

$$k-1\neq 0 \Rightarrow k\neq 1$$

* (II) en (I) : $-y=2y(k-1)\Rightarrow y(2k-1)=0$
* Luego como «y» toma infinitos valores, entonces :

$$2k-1=0\Rightarrow k=\frac{1}{2}$$

RPTA "C"

PROBLEMA 8 :

Determinar λ, en el sistema de modo que:

$$\begin{cases}\lambda x+y=0.......................................(I)\\ x+\lambda y=0.......................................(II)\end{cases}$$

tenga infinitas soluciones:

A)1 *B)0* *C)-1* *D) A ó C* *E)ϕ*

RESOLUCIÓN :

* Como posee infinitas soluciones , entonces:

$$\text{(I)}\times\lambda:\ \lambda^2x+y\lambda=0$$
$$\text{(II)}:\ x+\lambda y=0 \quad (-1)$$

$$\underbrace{x(\lambda^2-1)}_{0}=0 \text{ .... (Pués toma infinitos valores)}$$

* Entonces : $\lambda=1 \vee \lambda=-1$

RPTA "D"

PROBLEMA 9 :

Determinar «$a+p$», de modo que el sistema:

$$\begin{cases}(a-1)x+4y=10\\ 2x+(p+1)y=5\end{cases}$$

posea infinitas soluciones.

A)4 *B)6* *C)7* *D)-1* *E)4*

RESOLUCIÓN:

* Ya que el sistema presenta infinitas soluciones, entonces por propiedad se obtendrá :

$$\frac{a-1}{2}=\frac{4}{p+1}=\frac{10}{5}\Rightarrow a=5 \text{ y } p=1$$

* Se pide : $5+1=6$

RPTA "B"

PROBLEMA 10 :

Si x e y son las variables del siguiente sistema:

$$\begin{cases}(m^2+m-5)x-3y=12\\ 6y+(3m-2m^2)x=-24\end{cases}$$

determinar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I) $\exists m\in R/$ el sistema es incompatible

II) $\forall m\in R$; el sistema es determinado

III) $\nexists m\in R/$ el sistema sea indeterminado

A)VVF *B)FFF* *C)VFV* *D) FFV* *E)VFF*

RESOLUCIÓN:

I) FALSO : ya que será incompatible si:

$$\frac{m^2+m-5}{3m-2m^2}=\underbrace{\frac{-3}{6}\neq\frac{12}{-24}}_{\text{esto es falso}}$$

II) FALSO: porque será determinado, si:

$$\frac{m^2+m-5}{3m-2m^2}\neq\frac{-3}{6}\Rightarrow 2m^2+2m-10\ \ 2m^2-3m$$

$$\Rightarrow 5m\neq 10\Rightarrow m\neq 2$$

$$\Rightarrow \forall m\in R-\{2\}\text{........(no es }\forall m\in R)$$

III) FALSO: dado que será indeterminado si:

$$\underbrace{\frac{m^2+m-5}{2m-m^2}=\frac{-3}{6}}=\frac{12}{-24}$$

$$\Rightarrow m=2$$

$$\Rightarrow \exists m=2\text{............(si existe } m\in R)$$

RPTA "B"

PROBLEMA 11 :

En el sistema : $\begin{cases}mx+2y=5\\ 3x+(5-m)y=2+m\end{cases}$

Si N es el valor de m para que el sistema tenga infinitas soluciones P es el valor de m para que el sistema no tenga solución entonces el valor de $N-P$ es :

A)-1 *B)0* *C)1* *D)2* *E)3*

RESOLUCIÓN :

* El sistema tiene infintas soluciones , si :

$$\frac{m}{3}=\underbrace{\frac{2}{5-m}=\frac{5}{2+m}}$$

$$\rightarrow 2(2+m)=5(5-m)\ \rightarrow\ m=3$$

* Además : $\frac{3}{3}=\frac{2}{5-3}$ .....(se cumple)

Luego : $N=3$

* El sistema no tiene solución si :

$$\underbrace{\frac{m}{3}=\frac{2}{5-m}}\neq\frac{5}{2+m}$$

$$\rightarrow m(5-m)=6\ \rightarrow\ m=3 \vee m=2$$

* Pero con $m=3$ se está en el caso anterior. Para $m=2$: $\frac{2}{3}\neq\frac{5}{4}$ .... (cumple)
* Luego : $P=2$
* Se pide : $N-P=3-2=1$

RPTA "C"

PROBLEMA 12 :

Si el sistema de ecuaciones lineales :

$$\begin{cases}x+(2-a)y=-1\\ ax+(a-2)(a+1)y=-2\end{cases}$$

www.SIGLO21...

Tiene infinitas soluciones para $a = a_1$ y es incompatible para $a = a_2$, entonces el valor de $M = a_1 + a_2$ es :

A) $-\frac{1}{2}$ B) $\frac{3}{2}$ C) $\frac{5}{2}$ D) $-\frac{3}{2}$ E) -2

RESOLUCIÓN:

* Tiene infintas soluciones , entonces :

$$\frac{1}{a} = \frac{2-a}{(a-2)(a+1)} = \frac{-1}{-2} \Rightarrow a = 2$$

* Luego : $a_1 = 2$
* Es incompatible , entonces :

$$\frac{1}{a} = \frac{2-a}{(a-2)(a+1)} \neq \frac{-1}{-2}$$

$$\Rightarrow a \neq -2 \wedge (a-2)(a+1) = a(2-a)$$

$$\Rightarrow a \neq -2 \wedge a+1 = -a \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$$

* Luego : $a_2 = -\frac{1}{2}$
* Se pide : $M = a_1 + a_2 = \frac{3}{2}$

RPTA "B"

PROBLEMA 13 :

Calcular los valores de λ para que el sistema: $5x + 2y = \lambda x \wedge 3x + y = \lambda y$, tenga infinitas soluciones, dar como respuesta la suma de los cuadrados de dichos valores.

A)25 B)37 C)28 D) 38 E)26

RESOLUCIÓN :

* De: $\begin{cases} 5x + 2y = \lambda x \\ 3x + y = \lambda y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (5-\lambda)x + 2y = 0 \\ 3x + (1-\lambda)y = 0 \end{cases}$
* Por teoría ($\Delta_s = 0$):

$$\Delta_s = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 \\ 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} \Rightarrow \Delta_s = (5-\lambda)(1-\lambda) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 6 \ ; \ \lambda_2 = 1$$

* Se pide : $6^2 + 1^2 = 37$

RPTA "B"

PROBLEMA 14 :

Encontrar el intervalo de α para que el sistema

$$2x - 5y = 1$$
$$\alpha x + 10y = 4$$

se satisfaga : $\forall x \in R^+$ y $\forall y \in R^-$

RESOLUCIÓN :

* Usando cramer :

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta_s} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 4 & 10 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ \alpha & 10 \end{vmatrix}} = \frac{30}{20+5\alpha} > 0 \text{.................(I)}$$

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta_s} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ \alpha & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ \alpha & 10 \end{vmatrix}} = \frac{8-\alpha}{20+5\alpha} < 0 \text{.........................(II)}$$

* Resolviendo **(I)** y **(II)** resulta:

$$\alpha \in \langle 8; +\infty \rangle \text{ ....(ver inecuaciones)}$$

PROBLEMA 15 :

Si el siguiente sistema:

$$\begin{cases} (k+3)x + (2k+3)y = 75 \\ (k-3)x + (k-1)y = 25 \end{cases}$$

no tiene solución, entonces el valor de k es:

A) -1 B)0 C)1/2 D)2 E)3

RESOLUCIÓN:

* Como no tiene solución , entonces :

$$\underbrace{\frac{k+3}{k-3}}_{(I)} = \underbrace{\frac{2k+3}{k-1}}_{(II)} \neq \underbrace{\frac{75}{25}}_{(III)=3}$$

* De **(I)** y **(III)** se obtiene :

$$k^2 - 5k - 6 = 0 \Rightarrow (k-6)(k+1) = 0$$
$$\Rightarrow k = 6 \quad ó \quad k = -1$$

* Luego evaluemos en **(II y III)** :

Para $k = 6$, resulta: $\frac{15}{5} \neq 3$ .... **(FALSO)**

Para $k = -1$, resulta: $\frac{1}{-2} \neq 3$ ....**(VERDADERO)**

* Finalmente : $k = -1$

RPTA "A"

PROBLEMA 16 :

Para qué valores de m el sistema de ecuaciones

$$2x + 7y = m$$
$$3x + 5y = 13$$

tiene soluciones positivas

A) $\frac{26}{3} \leq m < \frac{91}{5}$ B) $\frac{26}{3} < m \leq \frac{91}{5}$ C) $\frac{26}{3} \leq m \leq \frac{91}{5}$ D) $\frac{26}{3} < m < \frac{91}{5}$

RESOLUCIÓN :

* Resolviendo el sistema de ecuaciones por determinantes tenemos :

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta_s} = \frac{\begin{vmatrix} m & 7 \\ 13 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{5m-91}{10-21} = \frac{5m-91}{-11} > 0 \text{ ....(I)}$$

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta_s} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & m \\ 3 & 13 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{26-3m}{-11} > 0 \text{.................................(II)}$$

* De **(I)** : $5m - 91 < 0 \Rightarrow 5m < 91 \Rightarrow m < \frac{91}{5}$

* De *(II)* :

$$26-3m<0 \Rightarrow 3m-26>0 \Rightarrow m>\frac{26}{3}$$

* Luego : $\frac{26}{3}<m<\frac{91}{5}$

RPTA "D"

PROBLEMA 17 :

Si el sistema : $\begin{cases} x+y=-3 \\ 2x-5y=k \end{cases}$

tiene solución única en la región M definida por $M=\{(x;y)\in R\times R / x<0 \wedge y<0\}$, entonces el conjunto de valores reales que puede admitir «k» es:

A) $\langle 0;5\rangle$ B) $\langle -9;0\rangle$ C) $\langle -9;15\rangle$ D) $\langle -9;5\rangle$ E) $\langle -3;3\rangle$

RESOLUCIÓN :

* Resolviendo : $x=\frac{k-15}{8} \wedge y=\frac{-k-9}{8}$

* Como $(x,y)\in M=\{(x;y)\in R^2 / x<0 \wedge y<0\}$

$$\Rightarrow \frac{k-15}{8}<0 \wedge \frac{-k-9}{8}<0$$

$$\Rightarrow k<15 \wedge k>-9 \Rightarrow -9<k<15$$

$$\Rightarrow k\in\langle -9;15\rangle$$

RPTA "C"

PROBLEMA 18 :

Si el sistema: $\begin{cases} 6x+3y=\beta \\ 3x+y=8 \end{cases}$ tiene soluciones positivas entonces el conjunto de valores reales que admite β es :

A) $\beta\in\langle 16;24\rangle$ B) $\beta\in\langle 2;6\rangle$ C) $\beta\in R^+$

D) $\beta=0$ E) $\beta\in R-\{0\}$

RESOLUCIÓN :

* Resolviendo resulta :

$$x=\frac{24-\beta}{3} \wedge y=\beta-16$$

* Pero por condición :

$$x>0 \wedge y>0 \Rightarrow 24-\beta>0 \wedge \beta-16>0$$

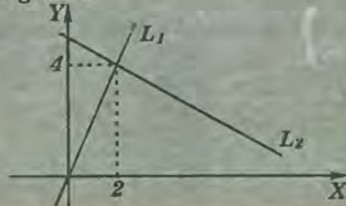
$$\Rightarrow 24>\beta \wedge \beta>16 \Rightarrow 16<\beta<24$$

RPTA "A"

PROBLEMA 19 :

Si el sistema $\begin{cases} 5x+ay=2 \text{............} L_1 \\ 4x+3y=b \text{............} L_2 \end{cases}$

Se representa geométricamente mediante la siguiente gráfica



Entonces , el valor de $T=a-b$ es:

A) -22 B) -1 C) 4 D) 10 E) 12

RESOLUCIÓN :

* De acuerdo al gráfico, se nota que $(2;4)$ es la solución del sistema lineal :

$$\begin{cases} 5x+ay=2 \\ 4x+3y=b \end{cases}$$

$$\Rightarrow 5(2)+a(4)=2 \wedge 4(2)+3(4)=b$$

$$\Rightarrow a=-2 \wedge b=20$$

* Se pide : $T=-2-20=-22$

RPTA "A"

PROBLEMA 20 :

La solución del sistema :

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \text{ es } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}+t\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dar el valor de verdad de:

I) $\det A\neq 0$ y el sistema corresponde a dos rectas que se intersecan en un punto.

II) $\det A\neq 0$ y el sistema corresponde a dos rectas que no se intersecan.

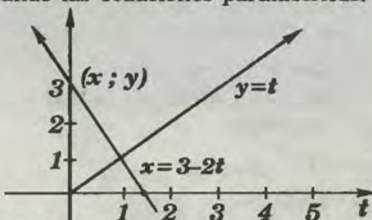
III) $\det A\neq 0$ y el sistema corresponde a dos rectas que coinciden.

A) FVV B) VFF C) VVF D) FFV E) FVF

RESOLUCIÓN :

* De : $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3-2t \\ 0+t \end{pmatrix} \Rightarrow x=3-2t \wedge y=t$

* Graficando las ecuaciones paramétricas:



* Del gráfico:

I) VERDADERA

II) FALSO

III) FALSO

RPTA "B"

PROBLEMA 21 :

Al resolver el sistema :

$$\begin{cases} x+y+2z=-1 \text{..................} (I) \\ 2x-y+2z=-4 \text{..............} (II) \\ 4x+y+4z=-2 \text{..............} (III) \end{cases}$$

El valor de y es:

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3

RESOLUCIÓN :

* De $(III)-2(II)$, resulta :

$$\begin{array}{r} 4x+y+4z=-2 \\ 4x-2y+4z=-8 \\ \hline 3y=6 \\ \Rightarrow y=2 \end{array}$$

PROBLEMA 22 :

Al resolver el siguiente sistema :

$$\begin{cases} a+b+c=2 & \text{..............(I)} \\ -a+b+c=0 & \text{..............(II)} \\ 3a-5b-4c=0 & \text{..............(III)} \end{cases}$$

El valor de $T=2a-\dfrac{5}{b}+c$ es:

A)13 B)12 C)11 D) 0 E)9

RESOLUCIÓN :

* De $(I)+(II)$, resulta :

$$2(b+c)=2\Rightarrow b+c=1\Rightarrow a=1$$

* De (III) :

$$3a-b-4(b+c)=0\Rightarrow 3(1)-b-4(1)=0$$
$$\Rightarrow b=-1\Rightarrow c=2$$

* Se pide : $T=2(1)-\dfrac{5}{-1}+2=9$

RPTA "E"

PROBLEMA 23 :

Al resolver el siguiente sistema :

$$\begin{cases} 2x+y-z=3 & \text{..............(I)} \\ 5x-y+2z=1 & \text{..............(II)} \\ x+2y-3z=-2 & \text{..............(III)} \end{cases}$$

el valor de $M=x+y+z$ es:

A)28 B)26 C)25 D) 20 E)15

RESOLUCIÓN:

* De $(I)+(II)$: $7x+z=4$
* De $2(I)-(III)$:

$$\begin{array}{r} 3x+z=8 \\ \Rightarrow 4x=-4 \\ \Rightarrow x=-1\Rightarrow z=11 \end{array}$$

* Reemplazando en (I) :

$$2(-1)+y-11=3\Rightarrow y=16$$

* Se pide : $-1+16+11=26$

RPTA "B"

PROBLEMA 24 :

Resolver el sistema de ecuaciones :

$$-x_1+2x_2+x_3=-2$$
$$3x_3+6x_2+3x_1=6$$
$$3x_1-x_3=4$$

El resultado de $(x_1+x_2+x_3)$ es:

A)3 B)4 C)7 D) 10 E)15

RESOLUCIÓN :

* Reescribiendo el problema :

$$-x_1+2x_2+x_3=-2$$
$$3x_1+6x_2+3x_3=6$$
$$3x_1+0x_2-x_3=4$$

* Aplicando Cramer : $\Delta=\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 3 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix}=12$

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 6 & 6 & 3 \\ 4 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{12}=2 \quad x_2=\frac{\begin{vmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 3 & 6 & 3 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}}{12}=-1$$

$$x_3=\frac{\begin{vmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 3 & 6 & 6 \\ 3 & 0 & 4 \end{vmatrix}}{12}=2$$

* Finalmente : $x_1+x_2+x_3=2-1+2=3$

RPTA "A"

PROBLEMA 25 :

Al resolver el siguiente sistema :

$$\begin{cases} (1+i)x-(1-i)y+2iz=3 & \text{..............(I)} \\ (1-i)x-(1+i)y-2z=i & \text{..............(II)} \\ x+3iy+2iz=1-i & \text{..............(III)} \end{cases}$$

el valor del $|z|$ es :

A)0 B)i C)2 D)3

RESOLUCIÓN :

* De $(1-i)(I)-(1+i)(II)$:

$$\begin{array}{r} 2x+2iy+2i(1-i)z=3(1-i) \\ 2x+2iy-2(1+i)z=i(1+i) \\ \hline \Rightarrow 4(1+i)z=4(1-i) \end{array}$$

$$\Rightarrow z=-i\Rightarrow |z|=i$$

RPTA "B"

PROBLEMA 26 :

Al resolver el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 11xy=15(7x-2y) \\ -15(8y-7z)=yz \\ -7xz=6(3x-5z) \end{cases}$$

el valor de z es:

A)2 B)3 C)4 D)5 E)6

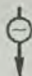
RESOLUCIÓN :

* Transformando adecuadamente :

$$\begin{cases} 11xy=15(7x-2y)\Rightarrow \dfrac{7}{y}-\dfrac{2}{x}=\dfrac{11}{15} & \text{..............(I)} \\ -15(8y-7z)=yz\Rightarrow \dfrac{7}{y}-\dfrac{8}{z}=\dfrac{1}{15} & \text{..............(II)} \\ -7xz=6(3x-5z)\Rightarrow \dfrac{5}{x}-\dfrac{3}{z}=\dfrac{7}{6} & \text{..............(III)} \end{cases}$$

* De $5(I-II)$ y $2(III)$, resulta :

$$\frac{40}{z}-\frac{10}{x}=\frac{10}{3}$$
$$\frac{10}{x}-\frac{6}{z}=\frac{7}{3}$$



$$\frac{34}{z}=\frac{17}{3}\Rightarrow z=6$$

RPTA "E"

PROBLEMA 27 :

Si $abc\neq 0$ y se tiene el sistema :

$$\begin{cases} cx+az=b & \text{..........(I)} \\ bz+cy=a & \text{..........(II)} \\ ay+bx=c & \text{..........(III)} \end{cases}$$

entonces el valor de z, en función de a, b y c, es :

RESOLUCIÓN :

* De (I): $cx=b-az$
* De (II): $cy=a-bz$
* De $(c)\times(III)$: $a(cy)+b(cx)=c^2$

$\Rightarrow a(a-bz)+b(b-az)=c^2$

$\Rightarrow a^2-abz+b^2-abz=c^2$

$\Rightarrow a^2+b^2-c^2=2abz\Rightarrow z=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

PROBLEMA 28 :

Una compañía fabrica tres tipos de muebles: sillas, mecedoras y sofás. Para la fabricación de estos muebles se necesita la utilización de unidades de madera, plástico y aluminio tal como se indica en la tabla:

	Madera	Plástico	Aluminio
Silla	1	1	2
Mecedora	1	1	3
Sofá	1	2	5

Si se dispone de una existencia de 110 unidades de madera, 130 unidades de plástico y 340 unidades de aluminio. ¿Cuántas sillas, mecedoras y sofás en ese orden se podrán fabricar?

A) 50; 60; 30 B) 30; 60; 20 C) 40; 40; 30
D) 10; 30; 70 E) 24; 60; 26

RESOLUCIÓN :

* Sean: x, y, z los números de sillas, mecedoras y sofás que se pueden fabricar respectivamente, con el material disponible . Entonces , según el cuadro:

Madera : $x+y+z=110$ ....(I)

Plástico : $x+y+2z=130$..........(II)

Aluminio : $2x+3y+5z=340$..........(III)

* De $(II)-(I)$: $z=20\Rightarrow x+y=90$
* De (III): $2(x+y)+y+5z=340$

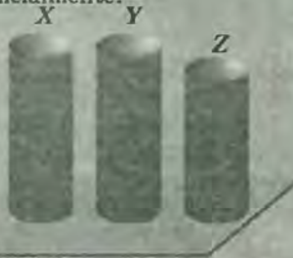
$\Rightarrow 2(90)+y+5(20)=340\Rightarrow y=30$

* Entonces se pueden fabricar: 30 sillas, 60 mecedoras y 20 sofás.

RPTA "B"

PROBLEMA 29:

Dispones de tres pilas de monedas . Duplicamos las monedas de la segunda pila , tomando las necesarias de la primera. Duplicamos después las monedas de la tercera pila , a costa de la segunda . Y , por último duplicamos las monedas de la primera pila tomando algunas de la tercera. Tras este trasvase de monedas las pilas quedan equilibradas. ¿Cuál es el mínimo número de monedas que puede haber y cómo están distribuidas inicialmente?



RESOLUCIÓN :

* Sean x, y, z el número de monedas que hay en cada pila inicialmente.

Hagamos los trasvases :

Inicio	x	y	z
Primer trasvase	$x-y$	$2y$	z
Segundo trasvase	$x-y$	$2y-z$	$2z$
Tercer trasvase	$2(x-y)$	$2y-z$	$2z-(x-y)$

* Por condición del problema :

$$2(x-y)=2y-z=2z-(x-y)$$

* De aquí resultan dos ecuaciones :

$$2(x-y)=2y-z\ \wedge\ 2(x-y)=2z-(x-y)$$

* o equivalentemente :

$$2x-4y+z=0$$
$$3x-3y-2z=0$$

* Como hay que minimizar el total de monedas, llamemos n a ese número . Tendremos entonces el sistema :

$$x+y+z=n$$
$$2x-4y+z=0$$
$$3x-3y-2z=0$$

* Usando el método de Gauss – Jordan:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & n \\ 2 & -4 & 1 & 0 \\ 3 & -3 & -2 & 0 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & n \\ 0 & -6 & -1 & -2n \\ 0 & -6 & -5 & -3n \end{array}\right)$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & n \\ 0 & -6 & 1 & -2n \\ 0 & 0 & -4 & -n \end{array}\right)$$

* Entonces: $z=\frac{n}{4};y=\frac{7n}{24};x=\frac{11n}{24}$

* Como x, y, z deben ser naturales positivos, entonces para que sea el menor valor posible $n=24$ con lo que obtenemos: $z=6\ ;\ y=7\ ;\ x=11$.

PROBLEMA 30 :

Resolver el sistema por el método de la matriz ampliada, llevándolo a una matriz en la que la solución sea inmediata :

$$\begin{cases}\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y+\frac{1}{4}z=2\\ \frac{1}{4}x-\frac{2}{3}y-\frac{1}{4}z=\frac{1}{2}\\ \frac{1}{6}x+\frac{1}{9}y+\frac{1}{2}z=4\end{cases}$$

RESOLUCIÓN :

* Inicialmente se reemplaza cada ecuación por una ecuación equivalente en la que los coeficientes y los términos independientes sean enteros. Así, se multiplica la primera ecuación por 12, la segunda por 12 y la tercera por 18.

Se obtiene el sistema equivalente:

$$\begin{cases}6x+4y+3z=24\\ 3x-8y-3z=6\\ 3x+2y+9z=72\end{cases}$$

* La matriz ampliada de este sistema es :

$$\left(\begin{array}{ccc|c}6&4&3&24\\3&-8&-3&6\\3&2&9&72\end{array}\right)\xrightarrow[-2f_3+f_1]{-2f_2+f_1}\left(\begin{array}{ccc|c}6&4&3&24\\0&20&9&12\\0&0&-15&-120\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{Luego}\ \left(-\frac{1}{15}\right)f_3\ y\ \left(\frac{1}{2}\right)f_2]{f_3+\frac{9}{15}f_2}\left(\begin{array}{ccc|c}6&4&3&24\\0&1&0&-3\\0&0&1&8\end{array}\right)\xrightarrow[\text{Luego}\ \left(\frac{1}{6}\right)\times f_1]{f_1-4f_2-3f_3}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&2\\0&1&0&-3\\0&0&1&8\end{array}\right)$$

* De esta última matriz se obtiene inmediatamente la solución del sistema, así: $x=2; y=-3$ y $z=8$.

PROBLEMA 31 :

En el siguiente sistema $\begin{cases}3x+4y+5z=a & ....(I)\\ 4x+5y+6z=b & ....(II)\\ 5x+6y+7z=c & ....(III)\end{cases}$

tiene infinitas soluciones, entonces la relación que debe existir entre los coeficientes a, b y c es:

A) $2a=b+c$ B) $2c=a+b$ C) $2b=a+c$
D) $2a=b+2c$ E) $2c=a-b$

RESOLUCIÓN :

* De (III) – (II) y (II) – (I), se obtiene :

$$\begin{cases}x+y+z=b-a\\ x+y+z=c-b\end{cases}$$

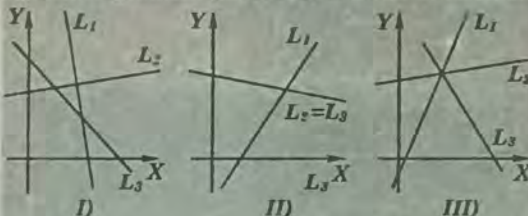
* El sistema tendrá infinitas soluciones si:

$$b-c=c-b\Rightarrow 2b=a+c$$

RPTA "C"

PROBLEMA 32 :

Si un sistema lineal de 3 ecuaciones con dos incógnitas tiene solución única. ¿Cuál de las siguientes gráficas podría representar el sistema?



A) Solo I B) Solo III C) II y III
D) I, II, III E) I y III

RESOLUCIÓN :

* Geométricamente el sistema lineal tiene solución única y existe un único $(x; y)$, tal que :

$$L_1\cap L_2\cap L_3=(x;y)$$

* Es decir las tres rectas se intersectan en un sólo punto. Esto ocurre en los casos II y III

RPTA "C"

PROBLEMA 33 :

Si el siguiente sistema $\begin{cases}x+mz=1\\ 2y-z=7\\ 2x+2z=n\end{cases}$

es indeterminado, entonces los valores de m y n respectivamente son :

A) 1; 2 B) 2; 1 C) 3; 2 D) 2; 3 E) 3; 1

RESOLUCIÓN :

* Usando la matriz ampliada :

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&m&1\\0&2&-1&7\\2&0&2&n\end{array}\right)\xrightarrow{f_3-2f_1}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&m&1\\0&2&-1&7\\0&0&2-2m&n-2\end{array}\right)$$

* Luego para que el sistema sea indeterminado se debe cumplir que :

$$2-2m=0\ \wedge\ n-2=0\Rightarrow m=1\ y\ n=2$$

RPTA "A"

PROBLEMA 34 :

Si el siguiente sistema :

$$\begin{cases}x+y+z=5 & ....(I)\\ 2x+3y-2z=4 & ....(II)\\ ax+(a+2)y-3z=13 & ....(III)\end{cases}$$

tiene más de 2 soluciones, entonces el valor de «a» es:

A) 1 B) 3 C) 5 D) 6 E) 7

RESOLUCIÓN :

* Tiene más de dos soluciones entonces tiene infinitas soluciones , luego :

* De 2(I) + (II) y 3(I)+(III) se obtendrá :

$$4x + 5y = 14$$
$$(a+3)x + (a+5)y = 28$$

* Este último sistema también tiene infinitas soluciones , por lo que :

$$\frac{4}{a+3} = \frac{5}{a+5} = \frac{14}{28} \Rightarrow a = 5$$

RPTA "C"

PROBLEMA 35 :

Considere el siguiente sistema homogeneo :

$$\begin{cases} x + (m+1)y + z = 0 \\ x + y + (m+1)z = 0 \\ (m+1)x + y + z = 0 \end{cases}$$

¿Para qué valores de m el sistema tendrá soluciones distintas de la trivial?

A) -3 B) $\{-3; 0\}$ C) 0 D) $\mathbb{R} - \{1\}$ E) $\mathbb{R}^+$

RESOLUCIÓN :

*Tiene soluciones distintas de la trivial *($x=y=z=0$)* si: $\Delta S = 0$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & m+1 & 1 \\ 1 & 1 & m+1 \\ m+1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \ldots \left(\begin{array}{c}\text{Sumando las} \\ \text{columnas a} \\ \text{la primera}\end{array}\right)$$

$$\begin{vmatrix} m+3 & m+1 & 1 \\ m+3 & 1 & m+1 \\ m+3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (m+3) \begin{vmatrix} 1 & m+1 & 1 \\ 1 & 1 & m+1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[f_2-f_1]{f_3-f_1} = (m+3) \begin{vmatrix} 1 & m+1 & 1 \\ 1 & -m & m \\ 0 & 0 & -m \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (m+3)m^2 = 0$$

$$\Rightarrow m = 0 \lor m = -3 - \ m \in \{0; -3\}$$

RPTA "B"

PROBLEMA 36 :

Al resolver el sistema :

$$\begin{cases} x + ay + a^2z + a^3 = 0 \\ x + by + b^2z + b^3 = 0 \\ x + cy + c^2z + c^3 = 0 \end{cases}$$

El valor de y es:

A) $a + 2b + c$, B) $2a + 3c$ C) $ab + ac + bc$

RESOLUCIÓN :

* Sea : $P(t) = x + ty + t^2z + t^3$

$$P(a) = x + ay + a^2z + a^3 = 0$$

$\Rightarrow$ «a» es una raíz de P.

* Análogamente, «b» y «c» son raíces de P con lo cual: $P(t) = (t-a)(t-b)(t-c)$

$$\Rightarrow P(t) = t^3 - (a+b+c)t^2 + (ab+bc+ca)t - abc$$

$$\Rightarrow P(t) = t^3 - zt^2 + yt + x$$

* De donde : $z = -(a + b + c)$

$$y = ab + bc + ca \land x = -abc$$

RPTA "C"

PROBLEMA 37 :

Al resolver el siguiente sistema :

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 1 & \ldots\ldots\ldots(I) \\ 3y + z + 4w = 4 & \ldots\ldots\ldots(II) \\ z + 4w + 2x = 7 & \ldots\ldots\ldots(III) \\ 4w + 2x + 3y = 6 & \ldots\ldots\ldots(IV) \end{cases}$$

Dar el valor de «w»

A) 1 B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{3}{4}$ D) $\frac{5}{4}$ E) $\frac{4}{3}$

RESOLUCIÓN :

* De (I) + (IV) : $2(2x+3y) + (z+4w) = 7$

* De (II) + (III): $(2x+3y) + 2(z+4w) = 11$

* Sumando estas dos últimas , resulta :

$$3(2x+3y) + 3(z+4w) = 18$$
$$\Rightarrow (2x+3y) + (z+4w) = 6$$

* Arreglando (II) + (III) :

$$\underbrace{(2x+3y)+(z+4w)}_{6} + (z+4w) = 11$$
$$\Rightarrow z + 4w = 5 \ \land \ 2x + 3y = 1$$

* En (IV) : $4w + 1 = 6 \Rightarrow w = \frac{5}{4}$

RPTA "D"

PROBLEMA 38 :

Al resolver el siguiente sistema :

$$\begin{cases} ax + y + z + w = 1 & \ldots\ldots\ldots(I) \\ x + ay + z + w = a & \ldots\ldots\ldots(II) \\ x + y + az + w = a^2 & \ldots\ldots\ldots(III) \\ x + y + z + aw = a^3 & \ldots\ldots\ldots(IV) \end{cases}$$

El valor de z es:

RESOLUCIÓN :

* Sumando las cuatro ecuaciones :

$$(a+3)(x+y+z+w) = 1 + a + a^2 + a^3$$

$$\Rightarrow x + y + z + w = \frac{(1+a)+(1+a^2)}{a+3}$$

* De (III) : $x + y + z + w + (a-1)z = a^2$

$$\Rightarrow \frac{(1+a)+(1+a^2)}{a+3} + (a-1)z = a^2 \Rightarrow z = \frac{2a+1}{a+3}$$

PROBLEMA 39 :

Al resolver el sistema de ecuaciones :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 6 \\ 4x_1 + 9x_2 + 16x_3 + 25x_4 = 36 \\ 8x_1 + 27x_2 + 64x_3 + 125x_4 = 216 \end{cases}$$

El valor de x_1 es :

A) -3 B) -2 C) -1 D) 1

RESOLUCIÓN :

* Por la regla de Cramer, el determinante del sistema es:

$$\Delta_s=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\2&3&4&5\\4&9&16&25\\8&27&64&125\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\2&3&4&5\\2^2&3^2&4^2&5^2\\2^3&3^3&4^3&5^3\end{vmatrix}$$

* Por ***Vandermonde*** :

$$\Delta_s=(3-2)(4-2)(4-3)(5-2)(5-3)(5-4)=12$$

* El determinante de x_1 será :

$$\Delta_{x_1}=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\6&3&4&5\\36&9&16&25\\216&27&64&125\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\6&3&4&5\\6^2&3^2&4^2&5^2\\6^3&3^3&4^3&5^3\end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \Delta_{x_1}=(3-6)(4-6)(4-3)(5-6)(5-3)(5-4)=-12$$

* Entonces : $\Rightarrow x_1=\dfrac{\Delta_{x_1}}{\Delta_S}=\dfrac{-12}{12}=-1$

RPTA "C"

PROBLEMA 40 :

Al resolver el sistema :

$$\begin{cases}2x+y+5z+w=5\\x+y-3z-4w=-1\\3x+6y-2z+w=8\\2x+2y+2z-3w=2\end{cases}$$

El valor de x es :

A)4 B)-2 C)1/2 D) -1 E)2

RESOLUCIÓN :

* Formando la matriz ampliada :

$$\left(\begin{array}{cccc|c}2&1&5&1&5\\1&1&-3&-4&-1\\3&6&-2&1&8\\2&2&2&-3&2\end{array}\right)$$

* Luego de aplicar operaciones elementales de fila, en forma adecuada, llegaremos :

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&0&0&2\\0&1&-11&-9&-7\\0&0&-3&0&0\\0&0&8&5&4\end{array}\right)$$

* Luego , de la primera fila : $x=2$

RPTA "E"

PROBLEMA 41 :

Al resolver el siguiente sistema :

$$\begin{cases}2x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=2\\x_1+2x_2+x_3+x_4+x_5=0\\x_1+x_2+3x_3+x_4+x_5=3\\x_1+x_2+x_3+4x_4+x_5=-2\\x_1+x_2+x_3+x_4+5x_5=5\end{cases}$$

Determinar el valor de x_4, es:

A)-1 B)0 C)1 D)2 E)4

RESOLUCIÓN :

* Formando la matriz ampliada :

$$\left(\begin{array}{ccccc|c}2&1&1&1&1&2\\1&2&1&1&1&0\\1&1&3&1&1&3\\1&1&1&4&1&-2\\1&1&1&1&5&5\end{array}\right)\begin{array}{c}\xrightarrow{f_2+f_1}\\\xrightarrow{f_4-f_3}\\\xrightarrow{3f_3}\\\xrightarrow{f_5-f_4}\end{array}\left(\begin{array}{ccccc|c}2&1&1&1&1&2\\3&3&2&2&2&2\\3&3&9&3&3&9\\0&0&-2&3&0&-5\\0&0&0&-3&4&7\end{array}\right)\xrightarrow{f_3-f_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c}2&1&1&1&1&2\\3&3&2&2&2&2\\0&0&7&1&1&7\\0&0&-2&3&0&-5\\0&0&0&-3&4&7\end{array}\right)\xrightarrow{7f_4+2f_3}\left(\begin{array}{ccccc|c}2&1&1&1&1&2\\3&3&2&2&2&2\\0&0&7&1&1&7\\0&0&0&23&2&-21\\0&0&0&-3&4&7\end{array}\right)\xrightarrow{f_5-3f_4}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c}2&1&1&1&1&2\\3&3&2&2&2&2\\0&0&7&1&1&7\\0&0&0&23&2&-21\\0&0&0&-49&0&49\end{array}\right)$$

* Luego de la última fila se tiene:

$$-49x_4=49\Rightarrow x_4=-1$$

RPTA "A"

PROBLEMA 42 :

Si : $xy+x=12$ ....(I)

$xy+y=15$ ....(II)

Hallar la suma de valores de x.

A)-4 B)-2 C)6 D)2 E)6

RESOLUCIÓN :

* De (II) - (I) : $y-x=3\Rightarrow y=x+3$
* Reemplazando en (I):

$$x(x+3)+x=12-\ x^2+4x-12=0$$

* Por propiedad de la suma de raíces de la ecuación cuadrática : $x_1+x_2=-\dfrac{4}{1}=-4$

RPTA "A"

PROBLEMA 43 :

Si : $\sqrt{x}-\sqrt{y}=2\,;x+y=20\,;x>10$

Entonces: $\dfrac{x}{y}$ es:

A) $\dfrac{1}{4}$ B) $\dfrac{1}{2}$ C)1 D)2 E)4

RESOLUCIÓN :

* Elevando al cuadrado la primera ecuación :

$$\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2=2^2\Rightarrow \underbrace{x+y}_{20}-2\sqrt{xy}=4$$

$$\Rightarrow 20-2\sqrt{xy}=4\Rightarrow xy=64 \ ....(\alpha)$$

* De la segunda ecuación en (α), resulta :

$$x(20-x)=64\Rightarrow x^2-20x+64=0$$

$$\begin{array}{ll}x & -4\\x & -16\end{array}$$

* Si: $x-4=0\rightarrow x=4$ (No es posible , por condición)

* Si : $x - 16 = 0 \Rightarrow x = 16 \Rightarrow y = 4$
* Se pide : $\frac{16}{4} = 4$

RPTA "E"

PROBLEMA 44 :

Dado el siguiente sistema de ecuaciones :

$$xy(x+y) = 420$$

$$x^3 + y^3 = 468$$

Hallar : $2x + 2y$

A)12 B)22 C)16 D) 18 E)24

RESOLUCIÓN :

* Multiplicando por 3 a la primera ecuación:

$$3[xy(x+y)] = 420 \times 3$$

$$x^3 + y^3 = 468$$

* Sumando miembro a miembro :

$$(x+y)^3 = 468 + 420 \times 3 \Rightarrow (x+y)^3 = 1728$$

$$\Rightarrow x + y = 12$$

* Se pide : $2(x + y) = 24$

RPTA "E"

PROBLEMA 45 :

Hallar $(x+y+z)$, si x, y, z son las soluciones positivas del sistema :

$$x + y = 12 \text{ ....(I)}$$

$$y + z = 8 \text{ ....(II)}$$

$$xz = 21 \text{ ....(III)}$$

A)18 B)20 C)12 D) 25 E)15

RESOLUCIÓN :

* De (I) – (II), resulta :

$$x - z = 4 \Rightarrow z = x - 4 \text{......}(\alpha)$$

* Reemplazando en la tercera ecuación :

$$x(x-4) = 21 \Rightarrow x^2 - 4x - 21 = 0$$

* O sea :

$$(x-7)(x+3) = 0 \Rightarrow x = 7 \text{ ó } \underbrace{x = -3}_{\text{Descartado}}$$

* Reemplazando en (α) : $z = 3$
* En la primera ecuación : $y = 5$
* Se pide : $x+y+z=7+5+3=15$

RPTA "E"

PROBLEMA 46 :

Si el sistema :

$$\begin{cases} x^2 + ax = y \text{............(I)} \\ x + y = 1 \text{...............(II)} \end{cases}$$

tiene solución única, indicar la suma de valores de «a».

A)–2 B)2 C)5 D) 0

RESOLUCIÓN :

* De (I) + (II), resulta :

$$x^2 + (a+1)x = 1 \Rightarrow x^2 + (a+1)x - 1 = 0$$

* Como el sistema posee solución única (dato)

$$\Rightarrow x \text{ es único} : \Delta = 0$$

* Es decir: $\Delta = a^2 + 2a + 5 = 0$
* Suma valores (por Cardano) de $a = -2$

RPTA "A"

PROBLEMA 47 :

En el sistema de ecuaciones simultáneas :

$$x^2 - y^2 + z^2 = 16$$

$$x - y + z = 4$$

Cuál es el valor de $x + y$.

A)$z + 2$ B)No puede calcularse C)$z + 1$
D) $4 + z$ E)4

RESOLUCIÓN :

* Transformando la primera ecuación:

$$(x+y)(x-y) = 16 - z^2$$

$$\Rightarrow (x+y)(x-y) = (4+z)(4-z) \text{ ...}(\alpha)$$

* De la segunda ecuación : $x - y = 4 - z$
* Reemplazando en (α) : $x + y = 4 + z$

RPTA "D"

PROBLEMA 48 :

Si: $x \neq y$, calcular la suma de valores de «x» en:

$$\begin{cases} x^2 = 13x + 4y \text{ ....(I)} \\ y^2 = 4x + 13y \text{ ....(II)} \end{cases}$$

A)3 B)6 C)9 D)–9 E)0

RESOLUCIÓN :

* De (I) – (II) :

$$x^2 - y^2 = 9x - 9y \; ; \; x \neq y$$

$\Rightarrow x + y = 9$ despejando «y» : $y = 9 - x$

* Reemplazando en (I) : $x^2 = 13x + 4(9-x)$

$\Rightarrow x^2 - 9x - 36 = 0$ de raíces $x_1, x_2 / x_1 \neq x_2$

$$\Rightarrow (x-12)(x+3) = 0$$

* Luego : $x = 12 \vee x = -3$
* Se pide : $x = 12 \vee x = -3$

RPTA "C"

PROBLEMA 49 :

¿Cuántas ternas de números naturales $(x; y; z)$ verifican el sistema de ecuaciones?

$$\begin{cases} xy + yz = 84 \\ xz + yz = 43 \end{cases}$$

A)1 B)2 C)3 D)4 E)6

RESOLUCIÓN :

* Tenemos el sistema:

$$\begin{cases} y(x+z) = 84 \text{ ....(I)} \\ z(x+y) = 43 \text{ ....(II)} \end{cases}$$

* De (I) – (II) :

$$xy - xz = 41$$
$$\Rightarrow x(y-z) = 41 = 41\times 1 = 1\times 41$$
$$x = 41 \wedge y - z = 1$$

* Reemplazando en (I) :

$$(z+1)(41+z) = 84 \Rightarrow (z+43)(z-1) = 0$$
$$\Rightarrow z = 1;\ y = 2 \Rightarrow (41;\ 2;\ 1)$$

es una solución $x = 1 \wedge y - z = 41$

* Reemplazando en (I) :

$$(z+41)(1+z) = 84 \Rightarrow (z+43)(z-1) = 0$$
$$\Rightarrow z = 1;\ y = 42;\ x = 1 \Rightarrow (1;\ 42;\ 1)$$

es otra solución

RPTA "B"

PROBLEMA 50 :

La suma de todas las «x» más la suma de todas las «y» que satisfacen al sistema de ecuaciones:

$$3x^2 + 3y^2 + x - 2y = 20$$
$$2x^2 + 2y^2 + 5x + 3y = 9$$

es:

A)1 B)0 C)2 D) -1 E)-2

RESOLUCIÓN :

* Multiplicando la primera ecuación (2) y la segunda ecuación por (–3) :

$$6x^2 + 6y^2 + 2x - 4y = 40$$
$$-6x^2 - 6y^2 - 15x - 9y = -27 \quad (+)$$

* Sumando: $-13x - 13y = 13x + y = -1$
* De donde: $x = -y - 1$......................(α)
* Reemplazando x en la primera ecuación se tendrá:

$$3(-y-1)^2 + 3y^2 + (-y-1) - 2y = 20$$
$$\Rightarrow 6y^2 + 3y - 18 = 0 \text{ ó } 2y^2 + y - 6 = 0$$
$$\Rightarrow (2y-3)(y+2) = 0 \Rightarrow y = \frac{3}{2}, \text{en } \alpha : x = -\frac{5}{2}$$
$$\Rightarrow y = -2, \text{ en } \alpha : x = 1$$

* Se pide la suma de todas las x mas la suma de todas las y : $-\frac{5}{2} + 1 + \frac{3}{2} + (-2) = -2$

RPTA "E"

PROBLEMA 51 :

Si $a\cdot b\cdot c \neq 0$, entonces al resolver el sistema :

$$\begin{cases} \frac{xy}{x+y} = a \\ \frac{xz}{x+z} = b \\ \frac{yz}{y+z} = c \end{cases}$$

el valor de x es:

A) $\frac{ab}{2}$ B) $\frac{2abc}{ac+bc-ab}$ C) $\frac{ac}{b+c}$ D) 1

RESOLUCIÓN :

* Dándole forma al sistema :

$$\frac{xy}{x+y} = a \Rightarrow \frac{x+y}{xy} = \frac{1}{a} \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{a}$$
$$\frac{zx}{x+z} = b \Rightarrow \frac{x+z}{xz} = \frac{1}{b} \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{z} = \frac{1}{b}$$
$$\frac{yz}{y+z} = c \Rightarrow \frac{y+z}{yz} = \frac{1}{c} \Rightarrow \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{c}$$

* Sumando las tres últimas :

$$2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \Rightarrow \frac{1}{x} + \underline{\frac{1}{y} + \frac{1}{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{c} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right) = \frac{ac+bc-ab}{2abc}$$

$$\Rightarrow x = \frac{2abc}{ac+bc-ab}$$

RPTA "B"

PROBLEMA 52 :

Al resolver el sistema en R^+

$$\begin{cases} x + y = \frac{1}{15}xyz \\ x + z = \frac{11}{120}xyz \\ z + y = \frac{13}{120}xyz \end{cases}$$

El valor de $T = x + y + z$ es:

A)3 B)8 C)16 D) 14 E)12

RESOLUCIÓN :

* Dándole una forma adecuada :

$$\begin{cases} x + y = \frac{1}{15}xyz \to \frac{1}{yz} + \frac{1}{xz} = \frac{1}{15} \\ x + z = \frac{11}{120}xyz \to \frac{1}{yz} + \frac{1}{xy} = \frac{11}{120} \\ z + y = \frac{13}{120}xyz \to \frac{1}{xy} + \frac{1}{xz} = \frac{13}{120} \end{cases}$$

* Sumando las tres ecuaciones :

$$2\left(\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{xz}\right) = \frac{1}{15} + \frac{11}{120} + \frac{13}{120} = \frac{4}{15}$$
$$\Rightarrow \frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{xz} = \frac{2}{15}$$

* Luego : $\frac{1}{xy} + \frac{1}{15} = \frac{2}{15} \Rightarrow xy = 15 = 3\times 5$

$$\wedge \frac{1}{yz} + \frac{13}{120} = \frac{2}{15} \Rightarrow yz = 40 = 5\times 8$$
$$\wedge \frac{1}{xz} + \frac{11}{120} = \frac{2}{15} \Rightarrow xz = 24 = 3\times 8$$

* De donde : $x = 3 \wedge y = 5 \wedge z = 8$

$$\Rightarrow T = x + y + z = 16$$

RPTA "C"

PROBLEMA 53 :

Si A es un conjunto definido por :
$A=\{(x;y;z)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R} / \text{satisfacen el sistema } (*)\}$

$$(*)\begin{cases}\dfrac{4x^2}{1+4x^2}=y\\ \dfrac{4y^2}{1+4y^2}=z\\ \dfrac{4z^2}{1+4z^2}=x\end{cases}$$

entonces el $n(A)$ es:

A)0 B)1 C)2 D)3 E)4

RESOLUCIÓN :

* Nótese que $(0;0;0)\in A$ (una primera solución).

Suponiendo ahora que $xyz\neq 0$, se tiene :

$$\begin{cases}\dfrac{4x^2}{1+4x^2}=y\rightarrow\dfrac{1}{x^2}+4=\dfrac{4}{y}\\ \dfrac{4y^2}{1+4y^2}=z\rightarrow\dfrac{1}{y^2}+4=\dfrac{4}{z}\\ \dfrac{4z^2}{1+4z^2}=x\rightarrow\dfrac{1}{z^2}+4=\dfrac{4}{x}\end{cases}$$

* Sumando las tres ecuaciones :

$$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}+3(4)=\frac{4}{x}+\frac{4}{y}+\frac{4}{z}$$

$$\underline{\frac{1}{x^2}-\frac{4}{x}+4}+\underline{\frac{1}{y^2}-\frac{4}{y}+4}+\underline{\frac{1}{z^2}-\frac{4}{z}+4}=0$$

$$\left(\frac{1}{x}-2\right)^2+\left(\frac{1}{y}-2\right)^2+\left(\frac{1}{z}-2\right)^2=0$$

* En $\mathbb{R}:\dfrac{1}{x}=2\wedge\dfrac{1}{y}=2\wedge\dfrac{1}{z}=2\Rightarrow x=y=z=\dfrac{1}{2}$

* Luego : $A=\left\{(0;0;0),\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right)\right\}$

RPTA "C"

PROBLEMA 54 :

Si $a\neq 0, b\neq 0,$ entonces al resolver el sistema :

$$\begin{cases}\dfrac{x-2a}{x-3a}+\dfrac{y-4b}{y-3b}=2 \text{ ....(I)}\\ \dfrac{x+2a}{x+a}=\dfrac{y+5b}{y+3b} \text{ ....(II)}\end{cases}$$

el valor de x es:

A) a B) b C) $a+b$ D) $2a+b$

RESOLUCIÓN :

* Aplicando las propiedades de razones y proporciones en *(II)* obtendremos :

$$\frac{a}{x-3a}=\frac{2b}{y-5b} \text{ ....}(\alpha)$$

* Además de *(I)*, se obtiene :

$$1+\frac{a}{x-3a}+1-\frac{b}{y-3b}=2$$

$$\Rightarrow\frac{a}{x-3a}=\frac{b}{y-3b} \text{ ....}(\alpha)$$

* De (α) y (β) $\dfrac{2b}{y-5b}=\dfrac{b}{y-3b}\Rightarrow y=b$

*Reemplazando en (α) : $x=a$

RPTA "A"

PROBLEMA 55 :

Después de resolver el siguiente sistema :

$$\begin{cases}2x+y+z=xy+yz\\ 2y+x+z=xz+xy\\ 2z+x+y=xz+yz\\ x^2+y^2+z^2=2\end{cases}$$

el valor positivo de $(x+y+z)$ es:

A) $5-\sqrt{6}$ B) $2+\sqrt{6}$ C) $4-\sqrt{6}$

RESOLUCIÓN :

* Sumando las cuatro ecuaciones , resulta :

$$4(x+y+z)+2=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)$$

$$4(x+y+z)+2=(x+y+z)^2$$

$$\Rightarrow 2+4=(x+y+z)^2-4(x+y+z)+4$$

$$\Rightarrow 6=(x+y+z-2)^2\Rightarrow x+y+z=2\pm\sqrt{6}$$

* Pero : $x+y+z>0\Rightarrow x+y+z=2+\sqrt{6}$

RPTA "B"

PROBLEMA 56 :

Al resolver el sistema de ecuaciones :

$$\begin{cases}x^2-y^2-x+y=0 \text{ ....(I)}\\ x^2+y-2=0 \text{ ....(II)}\end{cases}$$

Obtenemos :

A) Cuatro soluciones, con (–2; –2) una solución

B) Tres soluciones, con (1; 1) una solución

C) Dos soluciones, con (1; 1) una solución

D) No hay soluciones reales

E) Podemos encontrar muchas soluciones variando x e y

RESOLUCIÓN :

* De *(II)* : $y=2-x^2$

* En *(I)* : $x^2-(2-x^2)^2-x+2-x^2=0$

$$\Rightarrow (x^2-2)^2+x-2=0\Rightarrow x^4-4x^2+x+2=0$$

$$\Rightarrow x^2(x^2-4)+(x+2)=0\Rightarrow (x+2)[x^2(x-2)+1]=0$$

$$\Rightarrow (x+2)(x-1)(x^2-x-1)=0$$

* Existen 4 soluciones y $(-2; -2)$ es una de ellas.

RPTA "A"

PROBLEMA 57 :

Si M es el conjunto solución del siguiente sistema :

$$\begin{cases} 2x^2+xy-y^2=20 \text{ ....(I)} \\ x^2-xy+y^2=7 \text{ ....(II)} \end{cases}$$

Entonces la afirmación correcta es:

A) El conjunto M es vacío
B) El conjunto M tiene un elemento
C) El conjunto M tiene dos elementos
D) El conjunto M tiene tres elementos
E) El conjunto M tiene cuatro elementos

RESOLUCIÓN:

* De (I) + (II) : $3x^2=27 \Rightarrow x=3$ ó $x=-3$
* Para $x=3$ en (II):

$9-3y+y^2=7 \Rightarrow y^2-3y+2=0 \Rightarrow y=1 \vee y=2$

$\Rightarrow (3;1),(3;2)$ son dos soluciones del sistema.

* Para $x=-3$ en (II): $9+3y+y^2=7$

$$\Rightarrow y^2+3y+2=0 \Rightarrow y=-1 \vee y=-2$$

$\Rightarrow (-3;-1),(-3;-2)$ son otras dos soluciones más.

* Luego M tiene 4 elementos.

RPTA "E"

PROBLEMA 58 :

Con respecto al conjunto solución del sistema :

$$\begin{cases} x^2+y^2+8=6x \text{ ....(I)} \\ x^2+y^2=1 \text{ ....(II)} \\ x^2+4=y \text{ ....(III)} \end{cases}$$

La afirmación correcta es :

A) Sólo tiene soluciones reales positivas
B) Tiene infinitas soluciones reales
C) No tiene solución
D) Una solución es $x=1$ e $y=\sqrt{5+\sqrt{2}}$
E) Sólo tiene soluciones reales negativas

RESOLUCIÓN :

* De (I) y (II) : $6x-8=1 \Rightarrow x=\dfrac{3}{2}$
* En (II) : $\dfrac{9}{4}+y^2=1 \Rightarrow y^2=-\dfrac{5}{4} \Rightarrow y \notin R$
* En (III) : $\dfrac{9}{4}+4=y \Rightarrow y=\dfrac{25}{4} \in R$
* Lo cual es un absurdo. Esto indica que el sistema no tiene solución, el sistema es incompatible.

RPTA "C"

PROBLEMA 59 :

Si x, y, z son enteros no negativos, entonces con respecto a las soluciones del sistema :

$$x^3-y^3-z^3=3xyz$$
$$x^2=2(y+z)$$

se concluye que :

A) Existen cuatro soluciones.
B) Existen tres soluciones.
C) Existen dos soluciones.
D) No existen soluciones enteras.
E) Existen más de cuatro soluciones.

RESOLUCIÓN :

* En la primera ecuación del sistema se puede hacer

$$x^3+(-y)^3+(-z)^3=3x(-y)(-z)$$

* Transponiendo términos

$$x-y-z=0 \Rightarrow x=y+z \text{ ....(I)}$$
$$\text{ó} : x=-y=-z \text{ ....(II)}$$

* La relación (II) no se cumple porque, por condición, x, y y z son enteros no negativos.
* Reemplazando (I) en la segunda ecuación del sistema propuesto. $x^2=2(y+z)=2x$
* Resolviendo se obtiene:

$$x=0 \text{ ....(III)}$$
$$\vee \ x=2 \text{ ....(IV)}$$

* Igualando los segundos miembros de (I) y (III)

$$y+z=0 \Rightarrow y=z=0$$

* Igualando los segundos miembros de (I) y (IV)

$$y+z=0$$

* De donde se deduce :

$$y=0 \wedge z=2$$
$$y=1 \wedge z=1$$
$$y=2 \wedge z=0$$

* En consecuencia, las soluciones son :

$$(0; 0; 0),(2; 0; 2),(2; 1; 1),(2; 2; 0)$$

RPTA "A"

PROBLEMA 60 :

Los números x e y satisfacen el sistema

$$(x+1)^2+(1+y)^2=(10-x-y)^2 \text{ ....(I)}$$
$$xy+x+y=11 \text{ ....(II)}$$

Entonces, el valor de $x+y$, es:

A)5 B)6 C)16 D) 14 E)10

RESOLUCIÓN :

* Simplificando (I) , se obtiene :

$$22(x+y)-2xy=98 \text{ ....}(\alpha)$$

* De la segunda ecuación :

$$xy+x+y=11$$
$$xy=11-(x+y) \text{ ....}(\beta)$$

* Reemplazando (β) en (α) :

$$22(x+y)-2[11-(x+y)]=98$$

* De donde : $x+y=5$

RPTA "A"

PROBLEMA 61 :

Si el sistema :

$$\begin{cases} y^2+1=-x \ \ldots\ldots\ldots\ldots(I) \\ x^2-4+a^2+y^2=2ax \ \ldots\ldots\ldots\ldots(II) \end{cases}$$

Tiene solución única, entonces el valor de «a» es:

A)2 B)1 C)0 D) -1 E)-2

RESOLUCIÓN :

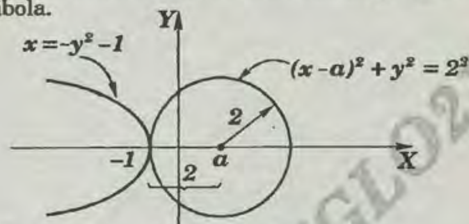
* De *(II)* : $x^2-2ax+a^2+y^2=4$

$$\Rightarrow (x-a)^2+y^2=2^2 \ldots\ldots \left(\text{Ecuación de una circunferencia}\right)$$

* De *(I)* :

$$x=-y^2-1 \ldots\ldots\ldots\ldots \left(\text{Ecuación de una parábola}\right)$$

*Para que el sistema tenga solución única (en la figura), la circunferencia debe ser tangente a la parábola.



* Para lo cual: $-1+2=a \Rightarrow a=1$

RPTA "B"

OBSERVACIÓN

Ver los temas de relaciones y funciones para familiarizarse con las gráficas.

PROBLEMA 62 :

Para que el sistema de ecuaciones :

$$\begin{cases} 4x^2+5xy-2y^2=6a \ \ldots\ldots\ldots\ldots(I) \\ -x^2-2xy+y^2=-a \ \ldots\ldots\ldots\ldots(II) \end{cases}$$

tenga raíces reales el conjunto de valores reales admitidos por «a» es:

A)R B)$\langle -\infty;0\rangle$ C)$[0;\infty\rangle$ D)$\langle 0;1\rangle$ E)$\langle -1;1\rangle$

RESOLUCIÓN :

* De *(I) + 6(II)* : $-2x^2-7xy+4y^2=0$

$$\Rightarrow (-2x+y)(x+4y)=0$$

$$\Rightarrow 2x=y \ \text{ó} \ x=-4y$$

* En *(I)*: Si $2x=y$ entonces :

$$4x^2+5x(2x)-2(2x)^2=6a \Rightarrow 6x^2=6a \Rightarrow x^2=a$$

* Luego: $x\in R \Rightarrow a\geq 0 \Rightarrow a\in[0;+\infty\rangle$

RPTA "C"

PROBLEMA 63 :

Determinar el número de soluciones del sistema no lineal

$$\begin{cases} x^4+y^4+2x^2y^2-6x^3-6xy^2+4x^2+4y^2+6x-5=0 \ldots(I) \\ x=y^2 \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(II) \end{cases}$$

A) 2 B) 4 C) 6 D) 8 E)10

RESOLUCIÓN :

* De *(II)* en *(I)* :

$$y^8+y^4+2y^6-6y^6-6y^4+4y^4+4y^2+6y^2-5=0$$

$$\Rightarrow y^8-4y^6-y^4+10y^2-5=0$$

Esta ecuación tiene *8* raíces en **y**. Para cada «y» hay un correspondiente «x».

* Luego , el sistema tiene *8* soluciones.

RPTA "D"

PROBLEMA 64 :

Si $x\in Z$, entonces al resolver el sistema :

$$\begin{cases} 2x^2+xy+3y^2=16 \ \ldots\ldots\ldots\ldots(I) \\ 3x^2-5xy+2y^2=1 \ \ldots\ldots\ldots\ldots(II) \end{cases}$$

el número de soluciones es:

A)4 B)3 C)2 D) 1 E)0

RESOLUCIÓN :

* De *(II) en (I)* :

$$2x^2+xy+3y^2=16(3x^2-5xy+2y^2)$$

$$\Rightarrow 46x^2-81xy+29y^2=0$$

$$\begin{matrix} 23x & & -29y \\ 2x & & -y \end{matrix}$$

$$\Rightarrow 23x=29y \ \vee \ 2x=y$$

* Luego evaluemos para $y=2x$ en *(II)*:

$$\Rightarrow (3x-4x)(x-2x)=1$$

$$\Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=1 \ \vee \ x=-1$$

* Luego, las soluciones son : $(1;2)$; $(-1;-2)$

OBSERVACIÓN

Si evaluamos para: $23x=29y$ no encontraremos soluciones enteras.

RPTA "C"

PROBLEMA 65 :

$$\forall x\in\mathbb{R}; [\![x]\!]=n \Leftrightarrow n\leq x<n+1;\ n\in Z$$

Entonces al resolver el sistema :

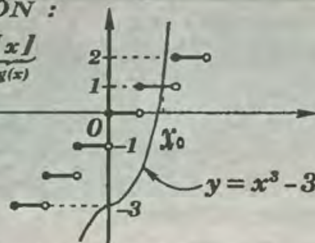
$$\begin{cases} x^3+y+z=4 \ \ldots\ldots\ldots\ldots(I) \\ x^3+y-z=5 \ldots\ldots\ldots\ldots(II) \\ x^3-[\![x]\!]=3 \ \ldots\ldots\ldots\ldots(III) \end{cases}$$

el valor de $H=x+y+z$ es :

A) $\sqrt[3]{4}+\dfrac{1}{2}$ B) $-\sqrt[3]{4}+\dfrac{3}{2}$ C) $\sqrt[3]{4}$

RESOLUCIÓN :

* De: $\underbrace{x^3-3}_{f(x)}=\underbrace{[x]}_{g(x)}$
* Graficando :



* Nótese que : $f(x_0)=1=g(x_0)$

$$\Rightarrow x_0^3-3=1\Rightarrow x_0^3=4\Rightarrow x_0=\sqrt[3]{4}$$

* Reemplazando en *(I)* :

$$4+y+z=4\Rightarrow y+z=0\Rightarrow H=x+y+z=\sqrt[3]{4}$$

RPTA "C"

PROBLEMA 66 :

Si S es el conjunto solución del sistema :

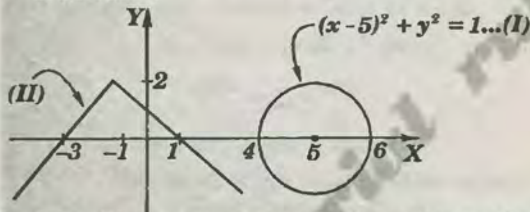
$$\begin{cases}x^2+y^2=10x-24 \text{ ....}(I)\\ |x+1|=2-y \text{ ....}(II)\end{cases}$$

entonces la afirmación correcta es :

A) *S tiene un elemento* B) *S tiene dos elementos*
C) *S tiene tres elementos* D) *S tiene cuatro elementos*
E) $S=\phi$

RESOLUCIÓN :

* Graficando :



* Del gráfico se aprecia que no hay intersección, entonces : $S=\phi$

RPTA "E"

PROBLEMA 67 :

Luego de resolver el sistema de ecuaciones en los reales

$$\begin{cases}x_1^2+ax_1+\left(\dfrac{a-1}{2}\right)^2=x_2\\ x_2^2+ax_2+\left(\dfrac{a-1}{2}\right)^2=x_3\\ x_3^2+ax_3+\left(\dfrac{a-1}{2}\right)^2=x_4\\ \vdots\\ x_{2001}^2+ax_{2001}+\left(\dfrac{a-1}{2}\right)^2=x_{2001}\\ x_{2002}^2+ax_{2002}+\left(\dfrac{a-1}{2}\right)^2=x_{2002}\end{cases}$$

Calcule : $x_1+x_2+...+x_{2002}$

A) 0 B) 1 C) 2 002 D) 1 001(1 − a) E) 1 001(a − 1)

RESOLUCIÓN :

* Sumando todas las ecuaciones :

$$x_1^2+x_2^2+...+x_{2002}^2+(x_1+x_2+...+x_{2002})a+2002\left(\frac{a-1}{2}\right)^2$$
$$=x_1+x_2+...+x_{2002}$$

* Agrupando convenientemente :

$$\left(x_1^2+(a-1)x_1+\left(\frac{a-1}{2}\right)^2\right)+...+\left(x_{2002}^2+(a-1)x_{2002}+\left(\frac{a-1}{2}\right)^2\right)=0$$

$$\Rightarrow\left(x_1+\frac{a-1}{2}\right)^2+\left(x_2+\frac{a-1}{2}\right)^2+......+\left(x_{2002}+\frac{a-1}{2}\right)^2=0$$

$$\Rightarrow x_1=\frac{1-a}{2}\quad x_2=\frac{1-a}{2}\quad x_{2002}=\frac{1-a}{2}$$
$$\vdots$$
$$\Rightarrow x_1+x_2+...+x_{2002}=1001(1-a)$$

RPTA "D"

PROBLEMA 68 :

Si $a>0$, resolver el siguiente sistema en los reales:

$$x_2=\frac{1}{2}\left(x_1+\frac{a}{x_1}\right)$$
$$x_3=\frac{1}{2}\left(x_2+\frac{a}{x_2}\right)$$
$$\vdots$$
$$x_n=\frac{1}{2}\left(x_{n-1}+\frac{a}{x_{n-1}}\right)$$
$$x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{a}{x_n}\right)$$

indicando el número de soluciones.

A) 0 B) 1 C) 2 D) 4

RESOLUCIÓN :

* Supongamos que $x_n>0$. Por la propiedad: $MA\geq MG$, se tiene :

$$\frac{x_n+\dfrac{a}{x_n}}{2}\geq\sqrt{a}\Rightarrow x_1\geq\sqrt{a}>0$$

$$\Rightarrow x_1^2\geq a\Rightarrow x_1\geq\frac{a}{x_1}\Rightarrow 2x_1\geq x_1+\frac{a}{x_1}$$

$$\Rightarrow x_1\geq\frac{1}{2}\left(x_1+\frac{a}{x_1}\right)\Rightarrow x_1\geq x_2$$

* Análogamente : $x_2\geq\sqrt{a}\Rightarrow x_2^2\geq a$

$$\Rightarrow x_2\geq\frac{a}{x_2}\rightarrow 2x_2\geq x_2+\frac{a}{x_2}$$

$$\Rightarrow x_2\geq\frac{1}{2}\left(x_2+\frac{a}{x_2}\right)\Rightarrow x_2\geq x_3$$

* Y así sucesivamente ; luego :

$$x_1\geq x_2\geq x_3\geq...\geq x_n\geq x_1\Rightarrow x_1=x_2=x_3=...=x_n$$

* Luego de la 1ra : $x_1^2 = a \Rightarrow x_1 = \sqrt{a}$
* Del mismo modo , suponiendo $x_n < 0$

$$x_1 = x_2 = x_3 = ... = x_n = -\sqrt{a}$$

* Por lo tanto :

$$C.S. = \{(\sqrt{a};\sqrt{a};...\sqrt{a}),(-\sqrt{a};-\sqrt{a};...;-\sqrt{a})\}$$

$$\Rightarrow n(C.S.) = 2$$

RPTA "C"

PROBLEMA 69 :

Si $\{a_1, a_2, a_3, ..., a_n\} \subset R^+$ es el conjunto solución del siguiente sistema :

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + ... + a_n = 96 \quad ....(I) \\ a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2 = 144 \quad ....(II) \\ a_1^3 + a_2^3 + ... + a_n^3 = 216 \quad ....(III) \end{cases}$$

entonces el número de soluciones del sistema es:

A)0 B)1 C)2 D) n E)n!

RESOLUCIÓN :

* De la desigualdad de *Cauchy* para números reales no negativos :

$$(a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2) \leq (a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n)^2$$

* Donde la igualdad se da si : $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = ... = \frac{a_n}{b_n}$
* Ahora consideremos los números positivos :

$$\sqrt{a_1}, \sqrt{a_2}, ..., \sqrt{a_n} \text{ y } \sqrt{a_1^3}, \sqrt{a_2^3}, ... \sqrt{a_n^3},$$

* Por la desigualdad de Cauchy–Schwartz :

$$(a_1 + a_2 + ... + a_n)(a_1^3 + a_2^3 + ... + a_n^3)$$

$$\leq (a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2)^2 96(216) \leq 144^2$$

* Pero : $96(216) = 144^2$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{a_1}}{\sqrt{a_1^3}} = \frac{\sqrt{a_2}}{\sqrt{a_2^3}} = ... = \frac{\sqrt{a_n}}{\sqrt{a_n^3}} \Rightarrow a_1 = a_2 = ... = a_n$$

* Luego en *(I)* : $na_1 = 96 \Rightarrow a_1 = \frac{96}{n}$
* Entonces el sistema presenta *1* solución.

RPTA "B"

PROBLEMA 70 :

¿Cuántas ternas de números reales no negativos $(x ; y ; z)$ satisfacen el siguiente sistema de ecuaciones?

$$\begin{cases} 3(x^2 + y^2 + z^2) = 1 \\ x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 = xyz(x + y + z)^3 \end{cases}$$

A) 2 B) 4 C) 6 D)7 E)8

RESOLUCIÓN :

* Por desigualdades se puede demostrar que :

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + xz + yz$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} \geq xy + xz + yz ....(\alpha)$$

* También :

$$(xy)^2 + (xz)^2 + (yz)^2 \geq (xy)(xz) + (xy)(yz) + (xz)(yz)$$

$$\Rightarrow xyz(x + y + z)^3 \geq xyz(x + y + z)$$

$$\Rightarrow xyz(x + y + z) = 0 \vee (x + y + z)^2 \geq 1$$

I) Si $(x + y + z)^2 \geq 1$

$$\Rightarrow \underbrace{x^2 + y^2 + z^2}_{\frac{1}{3}} + 2(xy + xz + yz) \geq 1 \Rightarrow xy + xz + yz \geq \frac{1}{3} ...(\beta)$$

* De (α) y (β) : $xy + xz + yz = \frac{1}{3}$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = xy + xz + yz \Rightarrow x = y = z$$

* Reemplazando en la primera ecuación :

$$x^2 = \frac{1}{9} \Rightarrow x = \frac{1}{3}; y = \frac{1}{3}; z = \frac{1}{3}$$

II) Si $xyz(x + y + z) = 0$

$$\Rightarrow x = 0 \text{ ó } y = 0 \text{ ó } z = 0 \text{ ó } x + y + z = 0$$

a) Si $x = 0$ reemplazando en la primera y segunda ecuación. $\begin{cases} y^2 + z^2 = \frac{1}{3} \\ y^2z^2 = 0 \end{cases}$

* Obtenemos:

$$\Rightarrow y = 0 \Rightarrow z = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ ó } \Rightarrow z = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \left(0; 0; \frac{1}{\sqrt{3}}\right); \left(0; \frac{1}{\sqrt{3}}; 0\right)$$

son dos soluciones análogamente.

* Si: $y = 0 \Rightarrow$ hay una solución $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}; 0; 0\right)$ y

$z = 0 \Rightarrow$ hay soluciones repetidas

b) Si $x + y + z = 0$

* Reemplazando en la segunda ecuación

$$x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 = 0$$

$\Rightarrow x = y = z = 0$ ....(no es solución)

* Finalmente hay *4* soluciones

RPTA "B"

PRIMERA PRACTICA DIRIGIDA

01 Dar "xy" si : $x + y = 7$; $x - y = 1$

A)21 B)22 C)23 D)4 E)12

02 Efectuar : $2x + y = 10$; $x - y = 2$ dar "$x - y$"

A) 0 B)2 C)3 D)7 E)11

03 Hallar "$x+y$" si : $2x + y = 12$ $3x + y = 17$

A) 4 B)5 C)7 D)11 E)N.A.

04 Hallar "xy" si: $x+y=9 \quad 3x+y=21$

A) 21 B)14 C)16 D)18 E)N.A.

05 Hallar "x – y" si : $x+y=9$
$3x+3y=20$

A) 5 B)6 C)7 D)8 E)N.A.

06 Hallar "xy" al resolver : $2x+y=11$
$3x-2y=6$

A) 8 B)10 C)12 D)14 E)16

07 Efectuar y dar "x – y" $x=2y$
$x+y=6$

A)1 B)2 C)7 D)9 E)10

08 Sabiendo que : $y=2x-1$ además : $x+2y=23$

dar : x^2+y^2

A)106 B)108 C)110 D)120 E)N.A.

09 Calcular "x" si : $x=2y-1$ además : $x-y=2$

A)2 B)6 C)4 D)5 E)7

10 Calcular el valor de "y^2" , si : $x+y=9$
$2x-3y=8$

A) 0 B)2 C)4 D)5 E)7

11 Efectuar y dar "y" en : $y=2x+1$

Además : $2x+3y=59$

A) 15 B)13 C)17 D)20 E)N.A.

12 Calcular "xy" sabiendo : $x=2y-2$
$x+3y=13$

A) 8 B)10 C)12 D)14 E)N.A.

13 Calcular "x^2-y^2" sabiendo que : $x+y=10$
$x-y=6$

A)50 B)60 C)70 D)80 E)N.A.

14 Efectuar y dar "x^2-y" si : $2x+y=12$
$x-2y=1$

A) 19 B)21 C)23 D)25 E)N.A.

15 Hallar "x^2+y^2" si : $2x+y=6$
$x-2y=3$

A) 6 B)7 C)9 D) 5 E)4

16 Dar el par ordenado $(x\,;\,y)$, si : $2x+y=18$
$x-2y=-1$

A) (6 ; 3) B)(4 ; 7) C)(3 ; 6)
D) (2 ; 7) E)(7 ; 4)

17 El par ordenado $(-x\,;\,y)$ es luego de resolver:
$3x+y=21$
$x-2y=0$

A) (3 ; 6) B)(–6 ; 3) C)(3 ; 6)
D) (2 ; 7) E)(7 ; 4)

18 Dar "x^2+y" sabiendo: $y=3x+1$
$x+2y=23$

A)15 B)17 C)19 D)22 E)N.A.

19 Dar "$x+y^2$" sabiendo: $x=2y+1$

Además: $2x-3y=5$

A) 51 B)52 C) 32 D)27 E)16

20 Calcular $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}$, sabiendo que : $\frac{x}{2}-\frac{y}{3}=1$
$\frac{3x}{2}+\frac{y}{3}=7$

A) 7 B)5 C)3 D)4 E)N.A.

21 Dar "xy" si : $\frac{x}{3}+\frac{y}{2}=4$

A)20 B)22 C)24 D)26 E)N.A.

22 Dar "x – y" si : $\frac{2x}{3}+\frac{y}{2}=6$
$\frac{y}{2}-\frac{x}{3}=0$

A) 0 B)2 C)4 D)6 E)8

23 Dar "xy" si : $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=4$
$\frac{2y}{3}-\frac{x}{2}=-1$

A) 17 B)18 C)16 D)15 E)12

24 Dar "xy" : $2x+y=7$
$x-y=2$

A) 4 B)2 C)3 D)5 E)1

25 Resolver y dar "x^2+y^2" : $3x+2y=11$
$2x-y=5$

A) 8 B)9 C)10 D)7 E)6

26 Resolver y dar "$x+y$" $2x+3y=15$
$2x-3y=3$

A)4 B)3 C)2 D)1 E)0

27 Resolver y dar "x – y" $3x+2y=21$
$2x-y=7$

A) 12 B)21 C)1 D)0 E)2

28 Dar $\frac{x}{y}$: $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=4$
$\frac{x}{2}-\frac{y}{3}=0$

A)$\frac{3}{2}$ B)$\frac{4}{3}$ C)$\frac{2}{3}$ D)1 E)N.A.

29 Dar "x^2+y^2" en : $2x+y=5$
$3x-y=5$

A) 5 B)4 C)3
D) 2 E) N.A.

Editorial Rubiños 2012

30 Hallar "xy" $3x+2y=5$
$2x-y=1$

A) 0 B)1 C)3 D)4 E)6

TAREA DOMICILIARIA

01 Resolver : $2x-y=8$ dar "xy".
$x+y=7$

A) 5 B)2 C)10 D)12 E)N.A.

02 Resolver : $2x-3y=7$
$3x+y=5$

Dar valor de "x^2y^2".

A) 25 B)16 C)4 D)26 E)9

03 Resolver: $3x+y=16$
$3x-y=14$

Hallar "m", si se cumple que : $mx+y=16$

A) 1 B)2 C)3 D)4 E)5

04 Resolver si : $x-y=2$ dar "x+y".
$x^2-y^2=24$

A) 10 B)11 C)12 D)13 E)N.A.

05 Resolver : $x^3+y^3=60$ dar: "x + y"
$x^2-xy+y^2=20$

A) 1 B)2 C)3 D)4 E)5

06 Hallar "a" en la ecuación : $ax+3y=12$
$3x-2y=6$

cuando : $x=y$

A) 1 B)-1 C)2 D)-2 E)6

07 Resolver : $\frac{a}{b}+\frac{m}{n}=3$ Hallar : "$\frac{a^2}{b^2}$"
$\frac{2a}{b}-\frac{m}{n}=6$

A) 2 B)3 C)4 D)16 E)9

08 Resolver: $2x+y=10$ dar "xy".
$2x-y=-2$

A) 10 B)-12 C)12 D)-10 E)4

09 Resolver y dar "$\frac{x}{y}$" $3x+4y=28$
$5x+2y=28$

A) 0 B)2 C)1 D)3 E)4

10 Siendo : $x+y=12$ dar "x − y"
$x^2-y^2=24$

A) 6 B)0 C)4 D)8 E)2

SEGUNDA PRACTICA DIRIGIDA

01 Para que valores de «k» el sistema :

$(2k+1)x+5y=7$
$(k+2)x+4y=8$

tiene solución única

A) $k\neq 2$ B) $k\neq 3$ C) $k\neq -3$ D) $k\neq 1;2$ E) $k\neq 6$

02 Hallar «m» para que el sistema:

$(m-3)x+3y=5$
$2x+(m-2)y=7$

sea inconsistente

A)1 B)3 C)8 D) 7 E)5

03 Si el sistema $(m-2)x+5y=6$
$3x+5my=18$

admite infinitas soluciones, el valor de «m» es:

A)2 B)3 C)4 D) 5 E)6

04 Resolver: $x+y+z=10$
$y+z+w=15$
$x+z+w=14$
$x+y+w=12$

e indicar el valor de z

A)3 B)4 C)5 D) 6 E)7

05 Resolver el sistema:

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=5$
$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=7$
$\frac{1}{x}+\frac{1}{z}=6$

indicar el valor de z

A)1/2 B)1/3 C)1/4 D) 1/5 E)1/6

06 Si el sistema: $2x+3y=m+1$
$4x+5y=6$

tiene soluciones positivas, indicar los valores de «m»

A) $2<m<13/4$ B) $2<m<7/3$ C) $1<m<5/2$
D) $2<m<13/5$ E) $m\in\mathbb{R}^+$

07 Resolver : $5\sqrt{x}-3\sqrt{y}=3$
$25x-9y=27$

e indicar el valor de «y»

A)1 B)9 C)25 D) 16 E)36

08 Resolver el sistema : $2x + 3y = 5\sqrt{2} - 1$

$3x - 2y = \sqrt{2} + 5$

e indicar el valor de «x»

A) $\sqrt{2}$ B) $3\sqrt{2}-1$ C) $\sqrt{2}-1$ D) $2-\sqrt{2}$ E) $\sqrt{2}+1$

09 Resolver el sistema : $13x + y = 33$

$11x + 17y = 141$

e indicar el valor de «x»

A) 3 B) 2 C) 1 D) -2 E) 7

10 Resolver : $(x + 1)(y + 1) = 72$

$(x + 1)(z + 1) = 12$

$(y + 1)(z + 1) = 54$

e indicar la suma de los cuadrados de los valores de «x»

A) 33 B) 34 C) 35 D) 36 E) 37

11 Resolver : $\dfrac{5}{\sqrt{x}} - \dfrac{3}{\sqrt{y}} = \dfrac{3}{2}$

$\dfrac{4}{\sqrt{y}} - \dfrac{2}{\sqrt{x}} = \dfrac{1}{3}$

e indicar «xy»

A) 6 B) 12 C) 36 D) 18 E) 24

12 Resolver : $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$

$\dfrac{x}{b} - \dfrac{y}{a} = 1$

e indicar el numerador del valor de «x»

A) $ab(a+b)$ B) a^2+b^2 C) $ab-1$
D) $ab+1$ E) $a+b$

13 Resolver el sistema : $x + y + z = 10$

$2x + y + z = 12$

$x - y + 2z = 9$

indicar xyz

A) 30 B) 24 C) 34 D) 18 E) 22

14 Resolver : $\begin{cases} \dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z}{4} \\ 2x + 3y - z = 27 \end{cases}$

e indicar el valor de xy

A) 27 B) 54 C) 81 D) 32 E) 24

15 Resolver : $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{5}{6}$

$\dfrac{7}{x} - \dfrac{5}{y} = \dfrac{11}{6}$

e indicar xy

A) 2 B) 3 C) 15 D) 6 E) 12

16 Resolver : $\dfrac{x}{a+b} + \dfrac{y}{a-b} = a + b$

$\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 2a$

e indicar el valor de «x»

A) a^2+b B) a^2+ab C) a^2-ab D) $b-a$ E) $a-b$

17 Resolver : $\dfrac{x}{a+b} + \dfrac{y}{a-b} = 2$

$(a+b)y + (a-b)x = 2(x^2 - y^2)$

e indicar el valor de «x»

A) $a+2b$ B) $2a-b$ C) $3a+2b$ D) $a-b$ E) $a+b$

18 Resolver : $5x + 4y = \dfrac{xy}{6}$

$3x + 2z = \dfrac{xz}{8}$

$3y - 5z = \dfrac{yz}{6}$

e indicar el valor de «z»

A) –32 B) –34 C) –36 D) –40 E) 42

19 Resolver el sistema : $\dfrac{x+y-1}{x-y+1} = a$

$\dfrac{y-x+1}{x-y+1} = ab$

e indicar el valor de «x»

A) $a+1$ B) $ab+1$ C) $ab-1$ D) $\dfrac{a+1}{ab+1}$ E) $ab+2$

20 Resolver : $\dfrac{x}{a+b} + \dfrac{y}{a-b} = 2a$

$x - y = 4ab$

e indicar el valor de «y»

A) $a-b$ B) $a+b$ C) $(a-b)^2$ D) $(a+b)^2$ E) ab

TAREA DOMICILIARIA

01 Hallar «m» para que el sistema :

$(3 - m)x + 5y = 4$

$2y - (2 - m)x = 6$

sea incompatible

A) 2 B) 3 C) 4/3 D) 16/7 E) 6

02 Hallar «n» si el sistema : $3nx + 7y = 2$

$2nx + 5y = 6$

es determinado

A) $n \in R - \{1\}$ B) $n \in R - \{0\}$ C) $n \in \langle -2;0 \rangle$ D) $n \in R - \{2\}$

03 Resolver : $x + y + 9z = 83$

$5x + 12y + 9z = 155$

$x + 2y + 4z = 47$

e indicar el valor de «x»

A)6 B)5 C)4 D) 7 E)9

(04) Si el sistema : $(m-3)x + (m+2)y = 2m + 3$

$(m-1)x + (3m-1)y = 5m+1$

es indeterminado, hallar «m», si $m>1$

A)3 B)4 C)5 D) 6 E)7

(05) Resolver el sistema : $\frac{5x}{0,7}+\frac{0,3}{y}=6$

$\frac{10x}{7}+\frac{9}{y}=31$

e indicar el valor de «y»

A)0,3 B)0,2 C)0,1 D) 0,6 E)0,7

TERCERA PRACTICA DIRIGIDA

SISTEMA DE ECUACIONES NO ELEMENTALES

(01) Resolver : $3x + y = 7$ .... (I)

$xy = -6$ .... (II)

Indicar el menor valor de «x»

A)1/3 B)-1/3 C)2/3 D) -2/3 E)3

(02) Resolver : $5x + y = 16$

$xy = 12$

Indicar el cociente de valores de «y»

A)2/3 B)3/2 C)3/4 D) 4/3 E)5/3

(03) Luego de resolver el sistema

$3x^2 + 5y^2 = 21$ .... (I)

$7x^2 + 9y^2 = 41$ .... (II)

Hallar el producto de valores de «y»

A)3 B)-3 C)2 D) -2 E)6

(04) Resolver el sistema : $2x^2 + 3y^2 = 30$

$xy = -6$

Señalar un valor de x

A)1/2 B)3 C)2/3 D) 7 E)9

(05) Indicar la cantidad de soluciones reales al resolver el sistema

$x^2-xy-2y^2 = -8$ .... (I)

$x^2 + 3xy + y^2 = -5$ .... (II)

A)1 B)2 C)3 D) 4 E)5

(06) Resolver :

$x^2-xy=3$ .... (I)

$3xy+y^2=-2$ .... (II)

Indique el producto del mayor y menor valor de «x»

A)15 B)-10 C)30 D) -1 E)-9/4

(07) Calcular x/y al resolver: $3x - 2y - 5 = 0$

$x^2-y^2=5$

A)0,2 B)1,5 C)0,5 D) 2,5 E)0,25

(08) Hallar el producto de los valores de «x + y» que resuelve el sistema:

$x^2+y^2=113-xy$ .... (I)

$x+y=43-xy$ .... (II)

A)112 B)121 C)171 D) -156 E)-171

(09) Indicar el menor valor de «y» al resolver:

$xy = 24$ .... (I)

$xz = 18$ .... (II)

$yz = 12$ .... (III)

A)-2 B)2 C)-4 D) 4 E)-6

(10) Calcular «x» en :

$xy+xz = 7-x^2$ .... (I)

$xy + yz = 25-y^2$ .... (II)

$xz + yz = 4-z^2$ .... (III)

A) $\pm 2/3$ B) $\pm 7/6$ C) $\pm 1/6$ D) $\pm 3/4$ E) $\pm 7/4$

(11) Indicar el valor de «xy» al resolver:

$x^2+y^2=40$

$x-y=4$

A)6 B)8 C)10 D) 12 E)15

(12) Indicar un valor de «x+y+z» al resolver:

$xy-2x-2y=26$

$xz-2x-2z=16$

$yz-2y-2z=20$

A)19 B)21 C)15 D) 30 E)24

(13) Hallar «x» en el sistema $x+y=8$

$x^3+y^3=224$

A)2 B)4 C)5 D) 7 E)8

(14) Indicar un valor de «$\frac{x-1}{y}$» al resolver:

$\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}=8$ .... (I)

$x^2+y^2=353$ .... (II)

A)1 B)3 C)-2 D) -4 E)0

(15) El valor positivo de «x+y+z» deducido del sistema: $z+x+y=xz+yz$

$x^2+y^2+z^2=2$

Es:

A)$1+\sqrt{6}$ B)$2+\sqrt{6}$ C)$3-\sqrt{6}$ D)$-2+\sqrt{6}$ E)$4+\sqrt{6}$

(16) Calcular el valor de «x» en:

$xy + yz = 5$ .... (I)

$yz + xz = 9$ .... (II)

$xy + xz = 8$ .... (III)

A) ± 0 B) ± 1 C) ± 2 D) ± 3 E) ± 5

17 Resolver el sistema:

$$xy + x + y = 23$$
$$xz + x + z = 41$$
$$yz + y + z = 27$$

Indicar un valor de «y»

A) 6 B) –6 C) –5 D) –8 E) –7

18 Resolver el sistema:

$$x^2 + xy + xz - x = 2$$
$$y^2 + xy + yz - y = 4$$
$$z^2 + xz + yz - z = 6$$

Indicar el valor de una incógnita

A) 3/2 B) –3/2 C) 1 D) 1/2 E) –2

19 Indicar la suma de mayor valor con el menor valor que asume «x» del sistema:

$x^2 + y^2 + x + y = 8$ .... (I)

$(x+1)(y+1) = \dfrac{12}{xy}$ .... (II)

A) 1 B) –1 C) 2 D) –3 E) 3

20 Calcular un valor de «xy» al resolver:

$\sqrt{x+y} + \sqrt{x-y} = 4$ .... (I)

$x^2 - y^2 = 9$ .... (II)

A) 18 B) –18 C) 12 D) 20 E) 24

TAREA DOMICILIARIA

01 Dado el sistema :

$2x + y = 11$ .... (I)

$xy = 14$ .... (II)

Indicar el mayor valor de «x»

A) 2 B) 3 C) 3,5 D) 4 E) 4,5

02 Luego de resolver :

$4x + y = 14$ .... (I)

$xy = 12$ .... (II)

Indicar el número de soluciones :

A) 4/3 B) 5/3 C) 5/4 D) 3/2 E) 2

03 Resolver el sistema:

$2x^2 + 3y^2 = 30$ .... (I)

$4x^2 + 5y^2 = 56$ .... (II)

Indicando el número de soluciones

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

04 Indicar un valor de y al resolver:

$x^2 + 3y^2 = 52$ .... (I)

$xy = 15$ .... (II)

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 3/4

05 Luego de resolver el sistema:

$$\begin{cases} x^2 - xy = -3 \\ y^2 - xy = 4 \end{cases}$$

Calcular la suma de elementos de una solución

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 10

06 Si $\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\} \subset \mathbb{R}^+$ es el conjunto solución del siguiente sistema :

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 96 \quad \ldots\ldots (I) \\ a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 = 144 \quad \ldots\ldots (II) \\ a_1^3 + a_2^3 + \ldots + a_n^3 = 216 \quad \ldots\ldots (III) \end{cases}$$

entonces el número de soluciones del sistema es:

A) 0 B) 1 C) 2 D) n E) n!

07 Si x, y, z son enteros no negativos, entonces con respecto a las soluciones del sistema :

$$x^3 - y^3 - z^3 = 3xyz$$
$$x^2 = 2(y+z)$$

se concluye que :

A) *Existen cuatro soluciones.*

B) *Existen tres soluciones.*

C) *Existen dos soluciones.*

D) *No existen soluciones enteras.*

E) *Existen más de cuatro soluciones.*

08 Después de resolver el siguiente sistema :

$$\begin{cases} 2x + y + z = xy + yz \\ 2y + x + z = xz + xy \\ 2z + x + y = xz + yz \\ x^2 + y^2 + z^2 = 2 \end{cases}$$

el valor positivo de $(x + y + z)$ es:

A) $5 - \sqrt{6}$ B) $2 + \sqrt{6}$ C) $4 - \sqrt{6}$

CUARTA PRACTICA DIRIGIDA

01 Dar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

( ) $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad + bc$

( ) $\begin{vmatrix} a & -c \\ b & d \end{vmatrix} = ad + bc$

( )Sea I la matriz identidad, entonces $Det(I)=1$

A) VVV B) VFV C) FVF D) FVV E) FFF

02 Resolver:

$$\begin{vmatrix} x+1 & x+2 \\ x+3 & x+4 \end{vmatrix} = x+5$$

A) {-3} B) {2} C) {-2} D) {0} E) {-7}

03 Calcular:

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 7 & 9 & 0 \\ 11 & 13 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -13 & -11 & -9 \\ -7 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

A)1 B)49 C)48 D)98 E)0

04 El valor del determinante:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 6 & 0 \\ 8 & 0 & 10 \end{vmatrix}$$

es:

A)0 B)120 C)192 D)70 E)–70

05 Se conoce que:

$$AB = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$$

Calcular $|B|$, si: $|A|=4$

A)1 B)–1 C)2 D) –2 E) 1/2

06 Dada una matriz cuadrada A, tal que: $A^3=A$ determinar el menor valor de $|A|$

A) 0 B) 1 C) 2 D) –1 E) –2

07 Averiguar el valor del determinante:

$$\begin{vmatrix} -a & b & c \\ a & -b & c \\ a & b & -c \end{vmatrix}$$

A)0 B) 3abc C) –3abc D) 6abc E) –6abc

08 Encontrar el valor de:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 11 & 13 & 15 \\ 121 & 169 & 225 \end{vmatrix}$$

A)16 B)–16 C)32 D)–32 E)64

09 Si: $\begin{vmatrix} 2a & 2b & 6c \\ m & n & 3p \\ r & s & 3t \end{vmatrix} = y$

hallar: $\begin{vmatrix} a & b & c \\ m & n & p \\ r & s & t \end{vmatrix}$

A)y B)6y C)y/6 D)y/2 E)y/3

10 Sean las matrices A_2 y B_3 con determinantes: $|A| = 3$ y $|B| = 2$. Calcular: $|3A| + |2B|$

A)27 B)16 C)13 D)35 E)43

11 Resolver:

$$\begin{vmatrix} x+1 & x & x \\ x & x+2 & x \\ x & x & x+3 \end{vmatrix} = 0$$

Dar como respuesta $11x$

A)3 B)–3 C)6 D)–6 E)1

12 La inversa de la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ es la matriz A^{-1}, tal que: $A.A^{-1} = A^{-1}.A = I$; se demuestra que: $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} d & -b \\ c & a \end{pmatrix}$, entonces para que exista A^{-1}. debe ocurrir:

A) $\frac{a}{b} \neq \frac{c}{d}$ B) $\frac{a}{c} \neq \frac{d}{b}$ C) $\frac{a}{d} \neq \frac{b}{c}$

D) $a+d \neq b+c$ E) $a \neq b \neq c \neq d$

13 Si $(\alpha;\beta)$ es la solución de sistema:

$$\begin{cases} 3x+y \\ 2x-3y=-4 \end{cases}$$

calcular: $T = \alpha^{\alpha} + \beta^{\alpha} - \alpha\beta$

A)5 B)4 C)3 D)2 E)1

14 Luego de resolver el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 2x+5y=-24 \text{ ....(1)} \\ 8x-3y=19 \text{ ....(2)} \end{cases}$$

determinar x^y

A) –32 B) 16 C) 27 D) 81 E) 32

15 Luego de resolver el sistema:

$$\begin{cases} 2x+y+z=3 \\ 5x-3y+2z=17 \\ 7x+y+3z=14 \end{cases}$$

calcular: $\begin{vmatrix} x & y \\ z & y+z \end{vmatrix}$

A)–7 B)6 C)–6 D)7 E)5

www.SIGLO21X.blogspot.com

16 Del sistema :

$$\begin{cases} \dfrac{x}{7}+\dfrac{y}{8}=0 \\ \dfrac{x}{7}-\dfrac{3y}{4}=7 \end{cases}$$

Determinar: $\sqrt[3]{x+y}$

A) 1 B) 2 C) $\sqrt[3]{-4}$ D) -1 E) -2

17 Calcular «m» con la condición que los sistemas

$$\begin{cases} mx-32y=1 \\ x-2my=3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+my=1 \\ m^2x+64y=3 \end{cases}$$

sean incompatibles y con solución única, respectivamente.

A) $m=4$ B) $m=-4$ C) $m=2$ D) $m=-2$ E) $m=64$

18 Si el sistema adjunto:

$$\begin{cases} (n-2)x-\dfrac{n}{2}y=2 \\ 2nx-9y=\sqrt[n-4]{36} \end{cases}$$

es compatible indeterminado, calcule: $T=\sqrt[3]{n}$

A) 1 B) 2 C) $\sqrt[3]{6}$ D) $\sqrt[3]{-6}$ E) -2

19 Del sistema:

$$\begin{cases} mx-(m-1)y=1 \\ x+y=2m+1 \end{cases}$$

proporcionar «y»

A) m B) $-m$ C) $m+1$ D) $m-1$ E) $1-m$

20 Luego de resolver:

$$\begin{cases} 2x+y-z=8 \\ x-3y+2z=-11 \\ 3x+2y+5z=21 \end{cases}$$

calcule: x^{y^z}

A) 1 B) 1024 C) 25 D) 32 E) 64

QUINTA PRACTICA DIRIGIDA

01 ¿Para qué valores de "m" el sistema:

$$\begin{cases} 2x+7y=m \text{ ......(1)} \\ 3x+5y=13 \text{ ......(2)} \end{cases}$$

tiene solución de componentes positivas?

A) $\dfrac{26}{3}\le m<\dfrac{91}{5}$ B) $\dfrac{26}{3}<m\le\dfrac{91}{5}$ C) $\dfrac{26}{3}\le m\le\dfrac{91}{5}$

D) $\dfrac{26}{3}<m<\dfrac{91}{5}$ E) $9<m<11$

02 Sea "m" un entero, tal que el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2x+3y=8 \text{ ......(1)} \\ mx-y=37 \text{ .....(2)} \\ 3x+8y=m \text{ .....(3)} \end{cases}$$

sea compatible, Si $(x_0;\, y_0)$ es la solución de dicho sistema, calcular: $m-(x_0+y_0)$

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

03 Si $(a;\, b;\, c)$ es la solución del sistema:

$$\begin{cases} 7x+4y-4z=7 \text{ ....(1)} \\ 7y+5z=12 \text{ ....(2)} \\ 11y+8z=10 \text{ ....(3)} \end{cases}$$

calcular: $b+c$

A) -100 B) -112 C) 1 D) 80 E) 96

04 Determinar la suma de valores que asume "k" de tal manera que el sistema lineal homogéneo:

$$\begin{cases} (1-k)x+y-z=0 \text{ ....(1)} \\ 2x-ky-2z=0 \text{ ....(2)} \\ x-y-(1+k)z=0 \text{ ....(3)} \end{cases}$$

admita también soluciones no triviales,

A) 12 B) -2 C) 4 D) -9 E) 0

05 Hallar:

$$\begin{vmatrix} a+3 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & a+3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & a+4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & a+5 \end{vmatrix}$$

A) a^3 B) $a+14$ C) 0 D) a^4 E) $a^3(a+14)$

06 Si:

$$\begin{vmatrix} a & -b & 0 & 0 \\ 0 & b & -c & 0 \\ 0 & 0 & c & -d \\ 1 & 1 & 1 & 1+d \end{vmatrix} = abcd$$

calcular: $a^{-1}+b^{-1}+c^{-1}+d^{-1};\ abcd\neq 0$

A) -1 B) 1 C) 0 D) 2 E) -2

07 ¿Para qué valor del parámetro λ el sistema:

$$\begin{cases} x+\lambda y=1 \text{ ......(1)} \\ \lambda x+y=\lambda^2 \text{ .....(2)} \end{cases}$$

es compatible determinado?

A) Únicamente si $\lambda=-1$ B) Sólo si $\lambda=0$

C) $\lambda=-1;\ \lambda=0$ D) Únicamente $\lambda=1;\ \lambda=-1$

E) Sólo cuando $\lambda=1$

08 Dada la matriz:

$$Adj(A)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -10 & k & 2 \\ 7 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

si $|A|=2$, determine "k"

A) 4 B) 2 C) 3 D) $\frac{10}{3}$ E) 5

09 Determine la suma de todos los valores "x" que hacen que la matriz:

$$\begin{pmatrix} 2(x-3) & x & -1 \\ x & x & -1 \\ 4 & 4 & x-4 \end{pmatrix}$$

sea singular.

A) 6 B) 8 C) 10 D) –3 E) 16

10 Si: $|A|=2 \wedge |Adj(Adj(2A))|=(8^{16})^2$, ¿cuál es el orden de A?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

11 Calcular:

$$\begin{vmatrix} 2\,003 & 2\,004 & 2\,005 \\ 2\,005 & 2\,006 & 2\,007 \\ 2\,007 & 2\,008 & 2\,009 \end{vmatrix}$$

A) 2010 B) 2008 C) 0 D) 2007 E) 2009

12 Hallar:

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{vmatrix}$$

A) $(af+be-cd)^2$ B) $(af-be+cd)^2$ C) $(af-bd+ce)^2$
D) $(ad+bf-ce)^2$ E) $(ad-bf+ce)^2$

13 Hallar:

$$\begin{vmatrix} x & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & x & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & (x-1) & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & x & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & x \end{vmatrix}$$

A) $(x^2+x+1)(x^3+x+1)$ B) $(x^2-x+1)(x^3+1)$
C) $(x^2-x+1)(x^3-x-1)$ D) $(x^2-x-1)(x^3-x-1)$
E) $(x^2-x+1)(x^3-x+1)$

14 Cuántas soluciones tiene el sistema:

$$\begin{cases} 2x+8y=3 \,........(1) \\ 3x+12y=6 \,.......(2) \end{cases}$$

A) 1 B) 2 C) 3 D) Infinitos E) Ninguna

15 A partir del sistema:

$$\begin{cases} x+y+z=0 \,........(1) \\ ax+by+cz=0 \,........(2) \\ bcx+acy+abz=0 \,........(3) \end{cases}$$

hallar "x".

A) $a-c$ B) $a-b$ C) $(a-b)(a-c)$
D) $(b-a)(b-c)$ E) $(c-a)(c-b)$

16 En el sistema:

$$\begin{cases} 5x-2y=m \,........(1) \\ x+9y=m \,........(2) \end{cases}$$

el valor de "m" para que "x" exceda en 7 a "y" es:

A) 40 B) 47 C) 53 D) 55 E) 63

17 ¿Para qué valor de "m", el sistema:

$$\begin{cases} mx-6y=5m-3 \,........(1) \\ 2x+(m-7)y=29-7m \,........(2) \end{cases}$$

es inconsistente?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

18 Hallar:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & .... & n \\ 1 & 2^3 & 3^3 & .... & n^3 \\ 1 & 2^5 & 3^5 & .... & n^5 \\ \vdots & \vdots & \vdots & .... & \vdots \\ 1 & 2^{2n-1} & 3^{2n-1} & .... & n^{2n-1} \end{vmatrix}$$

A) $n!$ B) $1!\times2!\times3!\ ...\ (2n-1)!$ C) $(2n-1)!$
D) $(n^n)!$ E) $(n^2)!$

CLAVES DE LA PRIMERA PRACTICA

01) E	02) B	03) C	04) D	05) A
06) C	07) B	08) A	09) D	10) C
11) A	12) C	13) B	14) C	15) C
16) E	17) B	18) C	19) E	20) C
21) C	22) B	23) B	24) C	25) C
26) A	27) E	28) C	29) A	30) B
01) C	02) C	03) C	04) C	05) C
06) B	07) E	08) C	09) C	10) E

CLAVES DE LA PRIMERA PRACTICA

01) A	02) E	03) B	04) C	05) C
06) D	07) A	08) E	09) B	10) B
11) C	12) A	13) A	14) B	15) D
16) B	17) E	18) C	19) D	20) C
01) D	02) B	03) D	04) C	05) A

CLAVES DE LA TERCERA PRACTICA

01) D	02) E	03) B	04) B	05) B
06) E	07) B	08) D	09) C	10) B
11) D	12) B	13) A	14) C	15) B

CLAVES DE LA CUARTA PRACTICA

1)B	2)E	3)E	4)E	5)D	6)D	7)D	8)A	9)C	10)E
11)D	12)A	13)E	14)E	15)D	16)D	17)B	18)C	19)C	20)D

CLAVES DE LA QUINTA PRACTICA

1)D	2)A	3)B	4)E	5)E	6)C	7)E	8)A	9)B	10)D
11)C	12)B	13)B	14)E	15)C	16)B	17)D	18)B		

www.SIGLO21X.blogspot.com

PLANTEO DE ECUACIONES

20

OBJETIVOS :

* Traducir situaciones del lenguaje natural al algebraico y viceversa.

* Utilizar símbolos que sustituyan a objetos con el fin de representar una situación y comunicar información sobre ella.

* Apreciar el lenguaje algebraico por su capacidad para expresar relaciones de situaciones y fenómenos de la realidad, así como por su facilidad para representar y resolver problemas.

* Plantear y resolver problemas del mundo real o de situaciones matemáticas (geométricas, por ejemplo) que sirvan para motivar y aplicar la teoría, donde se ponga de manifiesto la potencia del lenguaje algebraico, justificando así el uso de símbolos.

* Valorar de la precisión, simplicidad y utilización del lenguaje algebraico para representar, comunicar o resolver diferentes situaciones de la vida cotidiana.

* Valorar el lenguaje algebraico para expresar relaciones de todo tipo, así como por su facilidad para representar y resolver problemas.

INTRODUCCIÓN:



En nuestro quehacer cotidiano, podemos observar la relación que existe entre la matemática y la realidad ... ¿cómo "traducir" una situación real que involucre el aspecto matemático al lenguaje propio de la matematica? Esto no es sencillo, requiere de una gran, capacidad de observacion y abstraccion.

Ciertos problemas reales pueden ser traducidos al lenguaje algebraico mediante una expresión numerica llamada ecuación, en la que una o más cantidades son desconocidas. Para encontrar dichas cantidades debemos ejercitarnos previamente en diferentes cuestiones básicas, y una de ellas es desarrollar la capacidad de abstracción cuantitativa, es decir la capacidad pare representar simbólicamente las cantidades y las relaciones existentes entre ellas. El meollo del asunto , sin embargo, es la dificultad que un estudiante encuentra al momento de afrontar un problema enunciado en forma de texto, cuya solución requiere indudablemente la transformación de aquello que está en forma verbal a la forma matemática cuyo lenguaje es simbólico. No es tarea sencilla pero puede serlo si ponemos en su realización voluntad y constancia .

PLANTEO DE ECUACIONES

Para resolver un problema relativo a números o cantidades desconocidas se debe expresar una información escrita en idioma normal, en el simplificado idioma de las proposiciones matemáticas, las cuales nos permiten operar con más comodidad y rapidez que otros procedimientos. Esto implica realizar una especie de traducción de situaciones de la vida real, al simbolismo matemático, tarea que constituye el argumento más útil en todo el proceso de solución.

PLANTEAMIENTO DE UNA ECUACIÓN

El planteamiento es el proceso que implica transformar el lenguaje literal de un enunciado en un lenguaje formal simbólico, en tal forma que la presentación nos permita enfocar la solución de un problema, lléguese o no a obtenerla. La solución de las estructuras algebraicas con independencia de sus realizaciones concretas se efectúa a partir de haber realizado dicho planteamiento.

A continuación presentamos un listado de frases típicas que suelen aparecer en los problemas, y a un costado su respectiva traducción matemática

El resultado de sumar un número a 7 → $7+x$

La suma de algún número y 13 → $\square+13$

El resultado de restar a 18 algún número → $18-Z$

Dos veces la suma de un número y 5 → $2(\Delta+5)$

Nótese que cada vez que nos hemos referido a un número o algún número, en la traducción matemática, ésta se ha representado por una Letra $(x\,;y\,;z)$ o un símbolo: $\square\,;\Delta$

Ahora, cuando tengas que traducir una frase a una

ecuación, debes determinar el significado de cada parte y asimismo tendrás que reconocer qué es lo que vas a reemplazar por una variable.

EJEMPLOS:

Un número, aumentado en 5 da como suma 23

$n + 5 = 23$

S/.6 menos que, el costo de un sombrero es S/ 17

$\Rightarrow x - 6 = 17$

El arte de plantear ecuaciones consiste en interpretar y transformar enunciados del lenguaje literal (vernáculo) a un lenguaje matemático es decir:

Es uno de los temas más importantes en la resolución de problemas estableciendo para ello una o más ecuaciones con el empleo de símbolos, variables y operaciones.

EJEMPLOS:

1) "A" es el doble de "B" "A" es dos veces "B"

2) "A" es dos veces más que "B" $\Rightarrow A=2B+B \rightarrow A=3B$

3) "A" es dos más que "B" $\Rightarrow A=B+2$

4) "A" es dos menos que "B" $\Rightarrow A=B-2$

5) "A" es el doble de "B"; más diez $\Rightarrow A=2B+10$

6) "A"'es el doble de "B" más diez $\Rightarrow A=2(B+10)$

7) "A" excede a "B" en 20 "B" es excedido por "A" en 20 $\Rightarrow A-B=20$ El exceso de "A" sobre "B" es 20

8) Lo que le falta a "A" para "B" es treinta $\Rightarrow B-A=30$

9) Lo que le sobra a "A" para "B" es treinta $\Rightarrow A-B=30$

10) Tres números enteros consecutivos $\Rightarrow (x);(x+1);(x+2)$

11) "A" y "B" están en relación como 5 es a 7 $\Rightarrow \frac{A}{B}=\frac{5}{7}$

12) Tres números están en relación a 3, 5 y 8

$$\Rightarrow \frac{A}{3}=\frac{B}{5}=\frac{C}{7}=k$$

Luego: $A=3k\ ;\ B=5k\ ;\ C=8k$

13) Gastó los tres quintos de lo que no gastó

$$\Rightarrow G=\frac{3}{5}(NG)$$

Luego: $\frac{G}{NG}=\frac{3k}{5k} \Rightarrow \begin{matrix} G=3k \\ NG=5k \end{matrix}$

14) El cuadrado de la suma de dos números $\Rightarrow (x+y)^2$

Suma de los cuadrados de dos números $\Rightarrow x^2+y^2$

¡Importante!: Las palabras: ***de, del, de los*** *y* ***veces*** *indican que debo multiplicar*

PROCEDIMIENTO PARA RESOLVER PROBLEMAS

La experiencia nos permite proponer que lo esencial para resolver un problema planteando ecuaciones, consiste en la habilidad para seguir cada uno de los siguientes pasos:

I) Representación de las cantidades desconocidas o incógnitas por variables ***(x, y, z, ... etc:).***

II) Planteo de las ecuaciones que relacionan a las incógnitas con los datos del problema .

III) Solución de las ecuaciones planteadas; esto es, determinar los valores de las variables.

No está demás afirmar que las etapas de representación y planteo, requieren la mayor concentración posible, pues al realizarlas correctamente se asegura una solución del problema. Es por eso que a estas etapas les daremos mayor énfasis en los ejemplos que presentaremos a continuación:

EJEMPLO 1:

El cuadrado de un número , disminuido en 9 equivale a 8 veces el exceso del número sobre 2. Determinar el número.

RESOLUCIÓN:

* Sea "N" el número buscado e interpretando la información, tenemos:

$N^2-9=8(N-2)$

$\rightarrow N^2-9=8N-16 \qquad \rightarrow N^2-8N+7=0$

$\rightarrow (N-7)(N-1)=0 \qquad \rightarrow N-7=0$ ó $N-1=0$

$\rightarrow N=7$ ó $N=1$

EJEMPLO 2:

El exceso de 8 veces un número sobre 60 equivale al exceso de 60 sobre 7 veces el número . Determinar el número.

RESOLUCIÓN:

* Sea "x" el número.
* Del primer párrafo obtenemos: $8x-60$
* Del segundo párrafo obtenemos: $60-7x$
* Los cuales son equivalentes:

$$8x-60=60-7x \rightarrow 15x=120 \rightarrow x=8$$

EJEMPLO 3:

Compré el cuádruple del número de caballos que

vacas, si hubiera comprado **5** caballos más y **5** vacas más, el número de caballos sería **2** veces mayor que el número de vacas. ¿Cuántos caballos compré?

RESOLUCIÓN:

* Del primer dato encontramos (lo real):
  Caballos: $4x$; Vacas: x
* Del segundo dato obtenemos(lo supuesto):
  Caballos: $4x + 5$; Vacas: $x + 5$

Caballos sería $\underbrace{\text{2 veces mayor}}_{3}$ que vacas

$$\rightarrow 4x+5=3(x+5) \rightarrow 4x+5=3x+15 \rightarrow x=10$$

$\Rightarrow$*caballos comprados son:* $4(10)=40$

EJEMPLO 4:

En cada día, de lunes a jueves, gané **$6** más que lo que gané el día anterior. Si el jueves gané el cuádruplo de lo que gané el lunes,

¿Cuánto gané el miércoles?.

RESOLUCIÓN:

* Del primer dato obtenemos que:

Lunes :	x
Martes :	$x+6$
Miércoles :	$x+12$
Jueves :	$x+18$

* Además lo del Jueves es el cuádrupie del Lunes; Es decir: $x+18=4x \rightarrow 3x=18 \rightarrow x=6$

* entonces el miércoles gané: $6+12=18$

EJEMPLO 5:

La longitud de una sala excede a su ancho en **4m**. Si cada dimensión aumentara **4 m**, el área aumentaría al doble. Hallar las dimensiones de la sala.

RESOLUCIÓN:

* Haciendo el esquema del piso de una sala, para la primera condición (lo real), tenemos (área=largo× ancho):

Rectángulo de lados x y $x+4$

$$\rightarrow A_1 = x(x+4)$$

* Si las dimensiones aumentara en **4 m** tendríamos (lo supuesto):

Rectángulo de lados $x+4$ y $x+8$

$$A_2 = (x+4)(x+8)$$

* Del dato final tenemos que: $A_2=2A_1$

$$\Rightarrow (x + 4)(x+8)=2x\ (x + 4)$$

$$\Rightarrow x+8 = 2x \Rightarrow x = 8$$

* luego las dimensiones pedidas son : ***8cm*** y ***12 cm***

EJEMPLO 6 :

Una mecanógrafa escribe **85** palabras por minuto . Empieza su trabajo a las ***8 :00 am*** ; y **40** minutos después , empieza otra mecanógrafa que escribe **102** palabras por minuto .

¿A qué hora habrán escrito estas mecanógrafas el mismo número de palabras?

RESOLUCIÓN :

* Como la **1°** mecanógrafa escribe **85** palabras por minuto , entonces : en x minutos escribirá : $85x$
* La **2°** mecanógrafa escribe **102** palabras por minutos , y empieza **40** min después , entonces : en $(x-40)$ min. escribirá : $102\ (x-40)$
* Como se pide la hora en que las mecanógrafas hayan escrito el mismo número de palabras ,luego :

$$102(x - 40) = 85x$$
$$\rightarrow 102x - 4080 = 85x$$
$$\rightarrow 17x = 4080$$
$$\rightarrow x = 240\,min <> (4\,horas)$$

* Entonces la hora deseada será :

$$8a.m. + 4h = 12h = 12a.m.$$

EJEMPLO 7 :

En un aula los alumnos están agrupados en bancas de **6** alumnos por banca ; si se les coloca en bancas de **4** alumnos por banca se necesitarían **3** bancas más , cuántos alumnos hay en el aula?

RESOLUCIÓN :

* Sea N el número de alumnos en el aula y «x» el número de bancas .
* Al agruparlos de **6** en **6** tenemos : $N=6x$
* Al agruparlos de **4** en **4** tenemos : $N = 4(x+3)$

Como son iguales entonces :

$$6x = 4x + 12$$
$$\rightarrow 2x = 12$$
$$\rightarrow x = 6$$

* Finalmente : $N = 6 \times 6 = 36$ ***alumnos***

EJEMPLO 8 :

Con **950** ladrillos se han hecho tres tabiques . En el primero entran una tercera parte más que el segundo , y en este la cuarta parte de los que entran en el tercero. ¿Cuántos ladrillos se emplearon en cada tabique ?

RESOLUCIÓN :

*Si la cantidad de ladrillos en el segundo tabique lo consideramos como $3x$, entonces su tercera parte

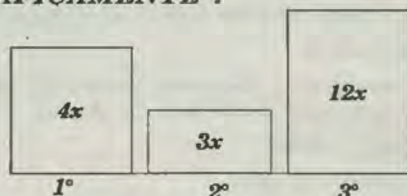
será x ; por to tanto :

Segundo tabique : $3x$

Primer tabique : $3x + x = 4x$

* Los ladrillos del , segundo tabique son la cuarta parte de los del tercer tabique ; esto quiere decir también que lo que hay en el tercero es el cuadrúple de lo que hay en el segundo ; es decir : $4(3x) = 12x$.

GRÁFICAMENTE :



* Sumando todos los ladrillos debemos tener el total, es decir : **950**.

$$4x + 3x + 12x = 950$$
$$\rightarrow 19x = 950$$
$$\rightarrow x = 50$$

* Finalmente lo pedido será :

Primer tabique : **200**

Segundo tabique : **150**

Tercer tabique : **600**

EJEMPLO 9 :

Se tiene tres números tales que el segundo es $\frac{4}{5}$ del primero , el tercero es $\frac{3}{4}$ del segundo y el producto de los tres números es **3840** . Determinar el menor

RESOLUCIÓN :

* Sea N_1, N_2 y N_3 los tres números :

$$N_2 = \frac{4}{5}N_1 \Rightarrow \frac{N_2}{N_1} = \frac{4}{5}$$
$$N_3 = \frac{3}{4}N_2 \Rightarrow \frac{N_3}{N_2} = \frac{3}{4}$$

* De esta proporcionalidad obtenemos que :

$$N_2 = 4K$$
$$N_1 = 5K$$
$$N_3 = 3K$$

* Además como el producto es **3840** , entonces :

$$\Rightarrow (5K)\,(4K)\,(3K) = 3840$$
$$\rightarrow 60K^3 = 3840$$
$$\rightarrow K^3 = 64$$
$$\rightarrow K = 4$$

* finalmente el menor es : $N_3 = 3\,(4) = 12$

EJEMPLO 10 :

Se reparte **3000** soles entre **4** personas de tal manera que a la primera le corresponda **400** soles más que a la segunda ; a esta , **4/5** de lo que le corresponde a la tercera ; y esta **100** soles más de lo que le corresponde a la cuarta . ¿Cuánto recibió la segunda persona?.

RESOLUCIÓN :

*Al repartir los **S/.3000** entre **4** personas y empezando el análisis entre la 2da y 3^{era} persona, luego entre la 1^{era} y la 2da y finalmente la 3^{era} y la 4ta tendremos :

$$3000\begin{cases} P_1 = 4K + 400 \\ P_2 = 4K \\ P_3 = 5K \\ P_4 = 5K - 100 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 4k + 400 + 4k + 5k + 5k - 100 = 3000$$
$$\rightarrow 18k = 2700$$
$$\rightarrow k = 150$$

* Finalmente la segunda persona recibió :

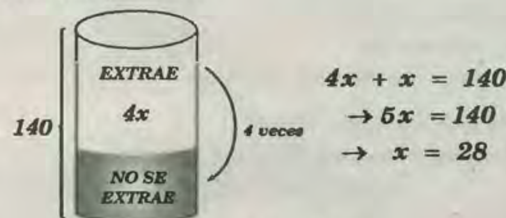
$$4(150) = S/.\ 600$$

EJEMPLO 11 :

De un tonel de **140** titros se extrae tanto : como **4** veces no se extrae, de lo que queda se extrae tanto como no se extrae. ¿Cuánto queda en el tonel?.

RESOLUCIÓN :

Graficando un tonel e interpretando la primera condición, tenemos



$$4x + x = 140$$
$$\rightarrow 5x = 140$$
$$\rightarrow x = 28$$

$\Rightarrow$ *Ha quedado 28 litros*

* al final de esos **28** litros que no se extrae , se deduce que se sacó su mitad , quedando su otra mitad , es decir : *14* litros

EDADES

Este tema corresponde esencialmente al planteamiento de ecuaciones .

La solución a este tipo de problema involucra reconocer cada uno de los siguientes elementos :

* **SUJETOS :** Debemos identificar el número de sujetos que intervienen .

* **TIEMPO :** (verbo) debemos tener presente si la acción del problema se desarrolla en distintos tiempos , por ejemplo :

"Hace 5 años"......................PASADO
"Actualmente"....................PRESENTE
"Dentro de 8 años"............FUTURO

* **CONDICIONES :** relación entre las edades de los personajes , en el tiempo .

EJEMPLOS :

«Hace 5 años su edad era el triple de la edad que tengo»

«Dentro de 10 años mi edad será el doble de la que tenías hace 3 años»

SITUACIONES SOBRE EDADES

TIPO I :

" CUANDO INTERVIENE LA EDAD DE UN SOLO SUJETO "

Analicemos en tres tiempos :

Hace "m" años (Pasado)	actualmente (presente)	Dentro de "n" años (Futuro)
$E-m$	E	$E+n$

EJEMPLO 1 :

Dentro de **20** años Pedro tendrá el doble de la edad que tenía hace **10** años. ¿Qué edad tendrá dentro de **2** años?

RESOLUCIÓN :

Edad actual : E

Edad dentro de **20** años : $E+20$

Edad hace **10** años : $E-10$

⇒ pero según enunciado ....el doble .... :

$$E+20=2(E-10)$$
$$\rightarrow E+20 = 2E-20$$
$$\rightarrow E = 40$$

* por lo tanto dentro de **2** años tendrá : ***42 años***

EJEMPLO 2 :

Si al cuádruplo de la edad que tendré dentro de **10** años ; le restamos el triple de la edad que tenía hace **5** años , resulta el doble de mi edad actual. ¿Qué edad tenía hace **5** años ?

RESOLUCIÓN:

* Edad actual : E

* Dentro de **10** años : $E+10$

* Hace **5** años : $E-5$

⇒ pero de .... si al cuádruplo ....le restamos el triple ....resulta el doble ....:

$$4(E+10)-3(E-5)=2E$$
$$\rightarrow 4E+40-3E+15=2E$$
$$\rightarrow E=55$$

* Luego la edad que tenía hace **5** años fue **50 años**

EJEMPLO 3 :

Pedro tiene **45** años . Dentro de cuántos años tendrá el doble de la edad que tenía hace **15** años?

RESOLUCIÓN :

* Edad actual : **45** años

* Hace **15** años tenía : **45 – 15 = 30** años

* El doble de esa edad es **2(30) = 60** años

* Luego El tendrá **60** años dentro de :

$$60-45=15 \text{ años}$$

TIPO II :

«CUANDO INTERVIENEN LAS EDADES DE DOS ó MÁS SUJETOS»

Es conveniente para la solución de este tipo de problema el uso de un cuadro . Por ejemplo , analicemos un caso para tres sujetos en tres tiempos y luego completamos el cuadro :

TIEMPOS

SUJETOS	PASADO	PRESENTE	FUTURO
A	25	30	38
B	15	20	28
C	29	34	42

HACE 5 AÑOS — DENTRO AÑOS

Se observa que :

La diferencia de edades entre dos personas, en el transcurso del tiempo no varía (idea fundamental para resolver problemas de edades)

EJEMPLO 4:

El le dice a Ella : «Yo tengo el triple de la edad que tu tenías cuando yo tenía la edad que tu tienes» . ¿Cuántos años tienen ambos , si sus edades suman **50** años?

RESOLUCIÓN :

* Empleando un cuadro para **2** personajes , en dos tiempos , tenemos :

	Pasado	Presente
EL	y	$3x$
ELLA	x	y

* Aplicando diferencia de edades , en el pasado y el presente , y teniendo en cuenta que no varía , tenemos :

$$y - x = 3x - y$$
$$\rightarrow y + y = x + 3x$$
$$\rightarrow 2y = 4x$$
$$\rightarrow y = 2x$$

* Del dato, que sus edades actuales suman **50** años

$$3x + y = 50$$
$$\rightarrow 3x + 2x = 50$$
$$\rightarrow x = 10$$

$\Rightarrow$ El tiene $3x$: $3(10) = 30$ ***años***

$\Rightarrow$ Ella tiene y : es decir ***20 años***

EJEMPLO 5 :

Dentro de *20* años , la edad de María será a la de Diana como *4* es a *3* . ¿Cuál es la edad de ambas si hace *13* años la edad de María era el quíntuplo de la de Diana?

RESOLUCIÓN :

*Empleando un cuadro de doble entrada , para dos personajes y tres tiempos. Partiendo de la información en el futuro (dentro de *20* años) , tenemos :

	Pasado	Presente	Futuro
María			$4k$
Diana			$3k$

* Con este dato completamos el cuadro , para el presente y el pasado (hace *13* años).

	Pasado	Presente	Futuro
María	$4k - 33$	$4k - 20$	$4k$
Diana	$3k - 33$	$3k - 20$	$3k$

*Teniendo en cuenta que hace 13 años la edad de María era el quíntuplo del de Diana , planteamos la siguiente ecuación :

$$4k - 33 = 5(3k - 33)$$
$$\rightarrow 4k - 33 = 15k - 165$$
$$\rightarrow 11k = 132$$
$$\rightarrow k = 12$$

$\Rightarrow$ Edad de María : $4(12) - 20 = 28$ **años**

$\Rightarrow$ Edad de Diana : $3(12) - 20 = 16$ **años**

EJEMPLO 6:

Roberto tiene *24* años ; su edad es el séxtuplo de la edad que tenía Betty cuando Roberto tenía la tercera parte de la edad que tiene Betty . ¿Qué edad tiene Betty ?

RESOLUCIÓN:

	Pasado	Presente
Roberto	x	$24 = 6 \times 4$
Betty	4	$3x$

* Por diferencia de edades : $24 - x = 3x - 4$

$$\Rightarrow x = 7$$

$\Rightarrow$ Edad de Betty : $3x = 3(7) = 21$ años

EJEMPLO 7:

Hallar la edad de un padre y la de su hijo sabiendo que hace *8* años la edad del primero fue el cuádruple de la del segundo ; dentro de *12* años sólo será el doble de la de su hijo.

RESOLUCIÓN:

* De acuerdo a los datos , emplearemos un cuadro para dos personas en tres tiempos :

	Hace 8 años	Presente	Dentro de 12 años
Padre			
Hijo			
	$P=4H$		$P=2H$

* Digamos que hace *8* años el hijo tenía «x» años ; en tanto que el padre tenía "$4x$".

* En la actualidad el hijo tendrá "$x+8$" y el padre "$4x + 8$".

* Dentro de *12* años tendrán "$x+20$" y "$4x+20$".

* Ubicando esta información en el cuadro tenemos :

	Hace 8 años	Presente	Dentro de 12 años
Padre	$4x$	$4x + 8$	$4x + 20$
Hijo	x	$x + 8$	$x + 20$

*De la segunda condición :

$$P = 2H$$
$$\rightarrow 4x + 20 = 2(x + 20)$$
$$\rightarrow 4x + 20 = 2x + 40$$
$$2x = 20 \rightarrow x = 10$$

$\Rightarrow$ Edad del Padre : $4(10) + 8$

$= 48$ ***años***

$\Rightarrow$ Hijo $= 18$ ***años***

EJEMPLO 8:

José le dice a Pablo : "Yo tengo el doble de la edad que tu tenías cuando yo tenía la edad que tienes; pero cuando tu tengas la edad que yo tengo, la suma de nuestras edades será **63** años". Determinar ambas edades actuales.

RESOLUCIÓN:

* Empleando cuadro para dos personas y en tres tiempos ; asi como ubicando la información de la primera condición del problema , tenemos:

	Pasado	Presente	Futuro
José	y	$2x$	
Pablo	x	y	

*De la segunda condición: «nuestras edades sumarán **63** años»

Si Pablo tendrá $2x$, entonces José tendrá $63-2x$

	Pasado	Presente	Futuro
José	y	$2x$	$63-2x$
Pablo	x	y	$2x$

* Por diferencia de edades (no cambia con el transcurso del tiempo):

* Tiempos pasado y presente :

$$y-x=2x-y$$
$$\rightarrow 2x=3y \text{ ....(I)}$$

* Tiempos presente y futuro :

$$2x-y=(63-2x)-2x$$
$$\rightarrow 2x-y=63-4x$$
$$\rightarrow y=6x-63 \text{ ....(II)}$$

* Reemplazando en ***(I)*** tenemos :

$$2(6x-63)=3x \Rightarrow 12x-126=3x \Rightarrow x=14$$

* En ***(II)*** :

$$y=6(14)-63=21$$

$\Rightarrow$ las edades son:

José : $2(14)=28$ ***años***

Pablo : ***21 años***

TIPO III :

USO DEL CRITERIO ARITMÉTICO

Aplicaremos la siguiente relación:

E = Año de referencia - Año de nacimiento

EJEMPLO 9:

Una persona nació en $\overline{19ab}$ y en $\overline{19ba}$ cumplió $(a+b)$ años . ¿En que cumplió $a\times b$ años?

RESOLUCIÓN:

* Empleando :

E = Año de referencia - Año de nacimiento

* Tenemos:

$$a+b=\overline{19ba}-\overline{19ab}$$

* descomponiendo polinomicamente :

$$a+b=1900+10b+a-(1900+10a+b)$$
$$\rightarrow a+b=1900+10b+a-1900-10a-b$$

* desarrollando encontramos que:

$$10a=8b \rightarrow 5a=4b$$

* Teniendo en cuenta que a y b son números de una cifra , esta igualdad cumple para: $a=4$ y $b=5$

$\Rightarrow$ Año de Nacimiento : ***1945***

* luego para saber en que año cumplio $a(b)$ años, es decir: $4(5)=20$ años

a esta edad le sumaremos a su año de nacimiento ; es decir: $1945+20=1965$

EJEMPLO 10:

Una persona tiene en ***1988*** tantos años como el producto de las dos últimas cifras del año de su nacimiento. ¿Cuál es su edad actual, considerando que este año ya celebro su onamástico?

RESOLUCIÓN:

* Considerando año de nacimiento: $\overline{19ab}$ Tendremos que :

$$a\times b=1988-\overline{19ab}$$
$$\rightarrow a\times b=1988-1900-10a-b$$

* ordenando :

$$10a+b+a(b)=88$$
$$\rightarrow 10a+b(1+a)=88$$

* Esta igualdad cumple para :

$$a=6 \text{ y } b=4$$

* ya que : $10(6)+4(1+6)=88$

$\Rightarrow$ Año de nacimiento : ***1964***

Edad actual = ***2001 - 1964***

= ***37 años***

EJEMPLO 11:

Un profesor nació en $\overline{19ab}$ y en ***1990*** tuvo $(a+b)$ años . En que año llegó a tener $(2a+b)$ años?

RESOLUCIÓN:

$$Edad = \text{Año de ref.} - \text{Año de nac.}$$
$$\rightarrow a+b=1990-\overline{19ab}$$
$$\rightarrow a+b=1990-1900-10a-b$$

* ordenando : $11a+2b=90$
* esta igualdad cumple para:

$a=8$ y $b=1$

* porque : $11(8)+2(1)=90$
* Año de nacimiento : 1981

→ Llegó a tener : $2a+b=2(8)+1=17$ años en $1981+17=1998$

EJEMPLO 12:

Juan le dice a José : Cuando tu tenías **7** años menos de la edad que yo tengo , yo tenía **3** años menos de la edad que tu tienes y cuando tenga el doble de la edad que tu tienes , nuestras edades sumarán **66** años . ¿Qué edad tiene José?

RESOLUCIÓN:

*Como el problema relaciona a tres tiempos, entonces hacemos el esquema para el primer párrafo

	Pasado	Presente	Futuro
Juan	$y-3$	x	
José	$x-7$	y	

* Según el segundo párrafo tenemos:

	Pasado	Presente	Futuro
Juan		x	$2y$
José		y	$66-2y$

* De los dos esquemas , aplicando diferencia de edades , tenemos :

$$(y-3)-(x-7)=x-y \Rightarrow x=y+2$$

$$2y-(66-2y)=x-y \Rightarrow x=5y-66$$

* Igualando :

$$5y-66=y+2$$

$$\to 4y=68$$

$$\to y=17$$

⇒ José tiene ***17 años***

MÓVILES

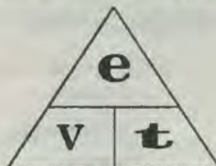
Los problemas referentes a móviles consideran a autos , trenes , aviones o personas ; asimismo , hacen mención a metros por segundo , kilómetros por hora o a cualquier otra terminología relacionada con el movimiento.

Estos problemas se resuelven básicamente con la fórmula :

DISTANCIA = RAPIDEZ× TIEMPO

que corresponde a un movimiento uniforme.

*Además



de donde :

$$\boxed{e=Vt} \quad \boxed{V=\frac{e}{t}} \quad \boxed{t=\frac{e}{V}}$$

e = espacio o distancia recorrida
V = rapidez empleada
t = tiempo empleado

RAPIDEZ (V):

Característica física de un móvil que nos informa que tan rápido este móvil pasa de una posición a otra. Se expresa en :

unidades de longitud por tiempo (e/t).

Ejemplos: m/s ; m/min ; km/h.

VELOCIDAD ($\vec{V}$):

Es un magnitud vectorial que nos indica la rapidez con la que se mueve un objeto (móvil) y la dirección en que lo hace.

Para la solución de estos problemas debemos tener cuidado que las unidades sean consistentes; por ejemplo si la rapidez esta expresada en *m/s*, el tiempo debe estar en segundos y la distancia en metros.

EJEMPLO 1:

Cinco horas demora un auto en viajar de Lima a Huancayo a razón de ***80 km/h***. Si cada ***10 km*** en la carretera que une ambas ciudades se desea colocar un banderín, ¿Cuántos banderines se requieren, considerando que debe haber uno al principio y otro al final?

RESOLUCIÓN :

* Debemos primero calcular la distancia entre Lima y Huancayo , para lo cual contamos con la rapidez con que viaja el auto y el tiempo que emplea ; por lo tanto :

$$d=V\times t=\frac{80km}{h}\times 5h$$

$$\to d=400\ km$$

* Cálculo del número de banderines a colocar ; para lo cual tenemos :

$$d_{TOTAL}=400\ km \ ;\ d_{UNITARIA}=10\ km$$

$$\Rightarrow N^\circ \text{ banderines}=\frac{400}{10}+1=41$$

RAPIDEZ PROMEDIO:

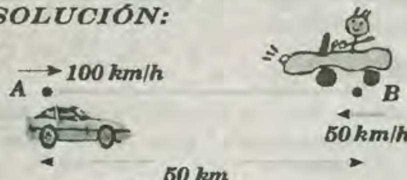
Se refiere a la distancia total recorrida dividida entre el tiempo total empleado :

$$V_p = \frac{Distancia_{Total}}{Tiempo_{Total}}$$

EJEMPLO 2:

Un auto viaja de una ciudad **A** a otra **B** , distantes **500km** , a razón de **100km/h** y regresa hacia **A** con una rapidez de **50km/h** . Hallar la rapidez promedio durante el viaje de ida y vuelta .

RESOLUCIÓN:



* Tiempo de viaje de ida :

$$t_i = \frac{500km}{100km/h} = 5h$$

* Tempo de viaje de regreso :

$$t_r = \frac{500km}{50km/h} = 10h$$

⇒*Tiempo total = 5 + 10 = 15 h.*

* Distancia total recorrida = **500 + 500=1000 km**

* finalmente :

$$V_{prom} = \frac{1000km}{15\ h} = \frac{200}{3} = 66\frac{2}{3}km/h$$

TIEMPO DE ENCUENTRO(T_e):

Si dos móviles parten simultáneamente de diferentes puntos y viajan en la misma dirección pero en sentidos opuestos , una al encuentro del otro, se encontrarán en un tiempo t_e , definido por :

$$t_e = \frac{d}{V_2 + V_1}$$

donde:

t_e : *tiempo de encuentro*

d : *distancia que los separa al inicio*

V_2; V_1: *rapidez con la que viajan los móviles.*

EJEMPLO 3:

La distancia entre dos ciudades es de **400km**. Un auto parte de la ciudad **A** hacia **B** a razón de **50km/h** y en el mismo instante parte de **B** hacia **A** otro auto a razón de **30 km/h**. Después de cuánto tiempo se encontrarán y a que distancia del punto **B** ?.

RESOLUCIÓN:

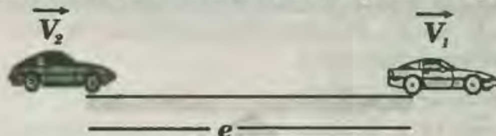
* Cálculo del tiempo de encuentro :

$$t_e = \frac{400km}{(50+30)km/h} = \frac{400km}{80km/h} = 5h$$

* Cálculo de la distancia de **B** hasta el punto de encuentro: $d_B = V_B \times t_e = 30\ km/h \times 5h = 150\ km$

TIEMPO DE ALCANCE (T_a):

Si dos móviles parten simultáneamente y viajan en la misma dirección ; en el mismo sentido y el segundo viaja con mayor rapidez , entonces lo alcanzará el primero en un tiempo t_a , definido por:



$$t_a = \frac{d}{V_2 - V_1}$$

donde:

t_a : *tiempo de alcance*

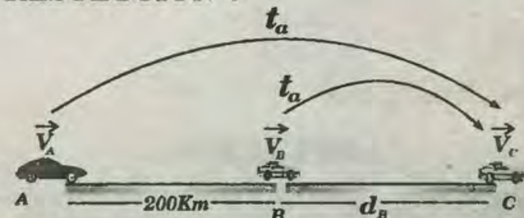
d : *distancia que los separa al inicio*

V_2; V_1: *rapidez con la que viajan los móviles.*

EJEMPLO 4:

La distancia entre dos ciudades es de **200 Km**. Un auto parte de la ciudad **A** hacia otra **C**, situada a **350 km** al Este de **B**, a razón de **50 km/h**; en el mismo instante parte de **B** otro auto hacia **C**; a razón de **30 km/h**. Después de cuánto tiempo alcanzará el móvil que partió de **A** al que partió de **B** y a que distancia de **C** ?.

RESOLUCIÓN :



* Cálculo de tiempo de alcance :

$$t_a = \frac{200km}{(50-30)km/h} = \frac{200}{20} = 10h$$

*Distancia recorrida por **B** :

$$d_B = \frac{30km}{h} \times 10h = 300k$$

⇒Se da el alcance a **50 Km** de **C**

EJEMPLO 5:

Un Tren de **120** metros de longitud se demora en pasar por un puente, de **240** metros de largo, **6** minutos. ¿Cuál es la rapidez del tren?

RESOLUCIÓN



* La distancia total que recorre el tren para cruzar es(se deduce del gráfico): **240 m+120m=360m**

* En un tiempo de **6 min (360 seg)** :

$$V = \frac{360m}{360seg} = 1m/seg$$

EJEMPLO 6:

Luis viajó de Lima a Huancayo empleando **8** horas . Si al regreso aumenta su rapidez en **15km/h** llegando en **6** horas, ¿cuál es la distancia total recorrida ?.

RESOLUCIÓN

* A la ida recorre una distancia «*D*» con una rapidez de **V** *km/h* llegando en **8 h.**

$$\Rightarrow D = 8V\text{................}(I)$$

* A la vuelta recorre la misma distancia «*D*» con una rapidez de *(V +15) km/h* llegando en **6 h**.

$$\Rightarrow D = 6(V+15)\text{ .... }(II)$$

* Como *(I)* y *(II)* son iguales , tenemos :

$$8V = 6\ (V+15)$$
$$\Rightarrow 8V = 6V + 90$$
$$\Rightarrow 2V = 90V = 45km/h$$

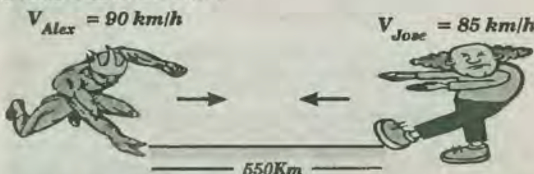
* distancia total recorrida **: 2D**

* En *(I)* **: 2 (8×45) = 720 km.**

EJEMPLO 7:

La distancia entre ***T*** y ***L*** es de **550 km**. Alex sale de ***T*** a ***L*** y José de ***L*** a ***T***, ambos simultaneamente a las **10 pm**. El ómnibus en que viaja Alex recorre a un promedio de **90km** por hora y el de José a **85km** por hora ¿A qué hora y a qué distancia de ***T*** se cruzarán?

RESOLUCIÓN:



* Para saber a que hora se cruzan, aplicaremos tiempo de encuentro:

$$t_e = \frac{550km}{(90+85)km/h} = 3h09\ min.$$

$\Rightarrow$ Se cruzarán a:

10 pm +3 h 9 minutos =1: 09 am

$$D_T = 90 \times 3{,}14 = 282km\ 857m$$

EJEMPLO 8:

Un ladronzuelo corre a razón de **8m/s**. Un policía que se encuentra a **150m** de distancia empieza a perseguirlo y logra alcanzarlo luego de **4min**. Con qué rapidez corrió el policía.

RESOLUCIÓN :

* Aplicando tiempo de alcance :

$$\boxed{t_a = \frac{d}{V_p - V_e}}$$

$$t_a = 4\ min$$

$$\Rightarrow (4 \times 60)seg = \frac{150m}{(Vp-8)m/s}$$

$$\Rightarrow 240 = \frac{150}{Vp-8} \Rightarrow 8 = \frac{5}{Vp-8}$$

$$\Rightarrow 8V_p - 64 = 8$$

$$\Rightarrow V_p = \frac{69}{8} m/seg = 8{,}62\ m/s$$

EJEMPLO 9:

«Vladi» sale de su casa con una rapidez de **«a»km/h** y dos horas más tarde «Fuji» sale a buscarlo siguiendo la misma ruta, con una rapidez de **«a+b»km/h**. ¿En cuántas horas lo alcanzará?

RESOLUCION:

*«Vladi». en 2 horas le a tomado una ventaja de:

$$d = Vt \rightarrow d = 2a$$

* Que «fuji» debe descontarlo en:

$$t_a = \frac{d}{V_f - V_v} = \frac{2a}{(a+b)-a} = \frac{2a}{b}$$

EJEMPLO 10 :

Dos motociclistas parten de un punto ***A*** , en el mismo sentido , a razón de **30** y **50 km/h**. ¿Que tiempo deberá transcurrir para que estén separados **100 km**?

RESOLUCIÓN :

* Conforme pasa el tiempo el motociclista que viaja con mayor rapidez se va separando más. Para determinar el tiempo que emplean para estar separados **100 km** aplicamos(análogo al tiempo de alcance o tiempo de separación):

$$t_s = \frac{d_s}{V_2 - V_1} = \frac{100km}{(50-30)km/h} = 5h$$

EJEMPLO 11:

Dos ciclistas están separados por **200** metros y avanzan en sentidos contrarios con velocidades de **15** y **10** *m/s* separandose cada vez más. En qué tiempo estarán separado **3400m**?

RESOLUCIÓN:

*Ambos ciclistas , el que parte de **A** hasta **C** y el que parte de **B** hasta **D** , emplean el mismo tiempo para separarse adicionalmente:

$$3400 - 200 = 3200m$$

$$t_s = \frac{d}{V_A + V_B} = \frac{3200m}{(10+15)m/s} = 128seg$$

$$\rightarrow t_s = 2 \text{ min con } 8 \text{ seg}$$

EJEMPLO 12:

Una auto parte de Piura a las **5pm** y llega a Lima el día siguiente a las **2 pm** otro auto sale de Piura a las **7pm** y llega a Lima el día siguiente a las **9 am**. ¿A qué hora el segundo auto pasó al primero?.

RESOLUCIÓN:

*Ambos autos recorren la misma distancia, **D** entre Piura y Lima , empleando diferentes tiempos :

$$t_1 = 21 \text{ horas}$$

$$t_2 = 14 \text{ horas}$$

* la rapidez con la que viajan son :

$$V_1 = \frac{D}{21} \quad ; \quad V_2 = \frac{D}{14}$$

* Como el auto *1* partió dos horas antes que el auto *2* , le toma una ventaja «*d*» equivalente a :

$$d = Vt = \frac{D}{21} \times 2 \quad \Rightarrow d = \frac{2D}{21}$$

*El auto 2 que es más veloz lo alcanzará y lo pasará en un tiempo t_a:

$$t_a = \frac{d}{V_2 - V_1} = \frac{\frac{2D}{21}}{\frac{D}{14} - \frac{D}{21}} = \frac{\frac{2D}{21}}{\frac{3D-2D}{42}} = 4h$$

*el 2° auto pasó al 1° a las: **7pm + 4h = 11pm**

RELOJES

Acápite relacionado en gran parte con el tema de planteo de ecuaciones y Razonamiento Lógico.

Los relojes y su utilidad para la medición del tiempo son motivo de una gran variedad de problemas y acertijos que para un mejor estudio se trata en esta parte , teniendo en cuenta los siguientes objetivos específicos.

I) ANALIZAR Y COMPRENDER LA RALACIÓN ENTRE EL TIEMPO TRANSCURRIDO Y EL TIEMPO NO TRANSCURRIDO, PARA UN TIEMPO DETERMINADO

Tiempo Total

Tiempo Transcurrido	Tiempo No Transcurrido

EJEMPLO 1:

¿Qué hora es cuando la parte transcurrida del día es igual a los **3/5** de lo que falta para terminar el día?.

RESOLUCIÓN:

* Un día : **24 horas**
* Tiempo transcurrido : x
* Tiempo que falta transcurrir : $24 - x$
* Gráficamente :

Tiempo Total<>24 horas

Tiempo Transcurrido : x	Tiempo No Transcurrido : $24 - x$

* Planteando una ecuación , tenemos :

«parte transcurrida» «es» $\frac{3}{5}$ («falta para terminar»)

$$x = \frac{3}{5}(24 - x)$$

$$\rightarrow 5x = 72 - 3x$$

$$\rightarrow 8x = 72 \rightarrow x = 9$$

$\Rightarrow$ Hora : **9 am**

Otra forma: $\frac{\text{tiempo transcurrido}}{\text{t. que falta transcurrir}} = \frac{3}{5}$

$$3k + 5k = 24$$

$$\rightarrow k = 3$$

$\Rightarrow$ Hora: **3(3) = 9horas**

EJEMPLO 2:

A que hora de la mañana el tiempo que marca un reloj es igual a **5/4** de lo que falta para las **12** del mediodía.

RESOLUCIÓN

* En el primer ejemplo el intervalo de tiempo involucrado era todo el día (**24** horas); en este caso es solo el medio día ; es decir:

$$\frac{\text{Tiempo Transcurrido}}{\text{Tiempo que falta t.}} = \frac{5}{4}$$

Tiempo Total<>12 horas

Tiempo Transcurrido : $5k$	Tiempo No Transcurrido : $4k$

$$\rightarrow 9k = 12 \rightarrow k = 4/3$$

$\Rightarrow$ Las Horas transcurridas son:

$5(4/3) = 20/3 = 6\ 2/3\,h = 6$ ***Horas 40 min.***

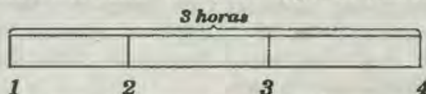
⇒La Hora que marca el reloj será : ***6:40 am.***

EJEMPLO 3:

Son más de las **2** sin ser las **3** de esta tarde , pero dentro de **40** minutos faltarán para las **4** el mismo tiempo que ha transcurrido desde la **1** hasta hace **40** minutos. ¿Qué hora es?.

RESOLUCIÓN :

* De acuerdo a la información, el intervalo a considerar es entre la ***1*** y las ***4***; por lo tanto:

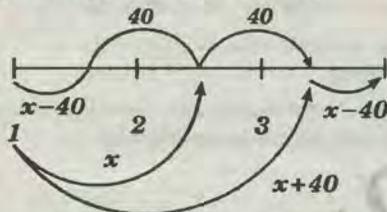


* Consideramos tiempo transcurrido a partir de ***1*** pm: «x» min.

* Dentro de ***40 min*** : $x + 40$

* Desde la ***1*** hasta hace ***40 min*** : $x - 40$

⇒ lo que falta para las 4 es : $(x - 40)$



* Planteando la ecuación , tenemos :

$$(x+40)+(x-40) = 3h <> 180\,min$$

$$\rightarrow x + 40 + x - 40 = 180$$

$$\rightarrow x = 90\,min$$

* Significa que desde la ***1pm*** han transcurrido ***90 min <> 1h 30 min***

* por lo tanto serán las : ***2: 30 pm***

PROBLEMAS SOBRE ADELANTOS Y ATRASOS

Para desarrollar estos problemas , se puede aplicar criterios lógicos y regla de tres ; teniendo en cuenta lo siguiente:

- ***Hora marcada (hora falsa)***
- ***Hora correcta (hora real)***

* Mediante las siguientes expresiones :

$$\boxed{HM = HR - Atraso}$$

$$\boxed{HM = HR + Adelanto}$$

EJEMPLO 4:

Un reloj se adelanta ***2min*** cada ***15min.*** , Si este desperfecto ocurre ya hace ***7*** horas , que hora marcará las agujas de tal reloj si la hora exacta es ***3h 58min.***

RESOLUCIÓN :

*Aplicando «regla de tres simple».

Si se adelanta ***2min*** en ***15min*** ; en ***7*** horas ***(7×60=420min)***, ¿Cuánto se habrá adelantado?

Se adelanta ***2 min*** —— ***15 min***

x —— ***420 min***

$$\rightarrow x = \frac{2 \times 420}{15} = 56\,min$$

⇒ La hora marcada, aplicando :

$$HM = HR + Adelanto$$

será: $HM = 3h\ 58\,min + 56\,min$

$$\rightarrow HM = 4h\ 54\,min$$

EJEMPLO 5 :

Hace ***10 horas*** que un reloj se atrasa ***3min*** cada media hora . ¿Cuál es la hora exacta si el reloj indica que son las ***11h 28 min***?

RESOLUCIÓN :

* Aplicando «Regla de Tres Simple»:

Se atrasa ***3 min*** —— ***1/2 hora***

x —— ***10 horas***

$$\rightarrow x = \frac{3 \times 10}{1/2} = 60\,min = 1\,hora$$

* luego aplicamos :

$$\boxed{HR = HM + atraso}$$

$$\Rightarrow HR = 11h\ 28\,min + 1h$$

$$\Rightarrow HR = 12h\ 28\,min$$

EJEMPLO 6 :

Un reloj se adelanta ***5min*** cada ***18*** horas a partir de las ***8 am***. ¿Cuánto tiempo deberá transcurrir para que vuelva a dar la hora correcta?.

RESOLUCIÓN :

* Para resolver este problema debemos tener presente que : ***para que un reloj vuelva a marcar l.. hora correcta deberá adelantarse (o atrasarse) en total 12horas (720 min).***

* Entonces, resolviendo por «Regla Tres Simple», tenemos:

Se adelanta ***5 min*** —— ***18 h***

720 min —— x

$$\rightarrow x = \frac{720 \times 18}{5} = 144 \times 18\ horas$$

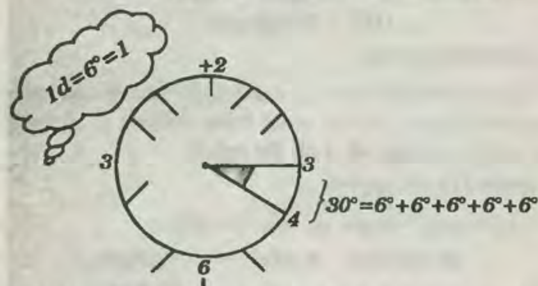
* Qué en días será :

$$\frac{144\times18}{24}=108$$

ESTUDIO DEL RELOJ Y SUS MANECILLAS

Equivalencia entre espacio, ángulo y tiempo (*1* vuelta):

Espacio(div)		*Ángulo*		*Tiempo(min)*
60	<>	360°	<>	60
30	<>	180°	<>	30
15	<>	90°	<>	15
5	<>	30°	<>	5
1div	<>	6°	<>	1min



RELACIÓN ENTRE EL ESPACIO RECORRIDO POR LA MANECILLA DEL HORARIO Y MINUTERO (EN 1 HORA)

El minutero recorre *60* divisiones en el mismo tiempo que el horario recorre *5* divisiones, por lo tanto se puede escribir una relación:

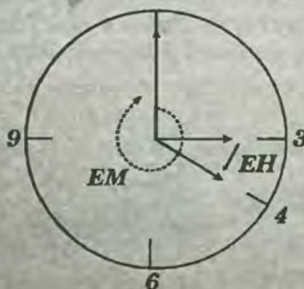
$$\boxed{\frac{EH}{EM}=\frac{5div.}{60div}} \Rightarrow \boxed{\frac{EH}{EM}=\frac{1}{12}=\frac{x}{12x}}$$

EH = Espacio recorrido por el horario

EM = Espacio recorrido por el minutero (en *1* hora)

EJEMPLO:

* Desde las *3* en punto hasta las *4* en punto :



* También :

* En *60* min el horario avanza $\left(\frac{60}{2}\right)=30°$

* En *M* min el horario avanza $\left(\frac{M}{2}\right)$

ÁNGULO QUE FORMAN LAS MANECILLAS DEL RELOJ (HORARIO - MINUTERO)

Cuando el reloj marca las «*H*» horas «*M*» minutos o abreviadamente *H: M* el ángulo «α» formado por el horario y el minutero se determina directamente con la siguiente fórmula:

$$\boxed{\alpha=\mp 30H\pm\frac{11}{2}M}$$

Donde:

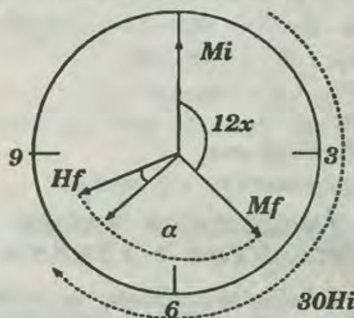
H : hora de referencia $(0\le H\le 12)$

M : # de minutos transcurridos a partir de la hora de referencía

$\alpha \Rightarrow$ *Medida del ángulo que forman las manecillas del reloj (en grados sexagesimales)*

CASO I :

Cuando el horario adelanta al minutero.



*Para las *H* horas y *M* minutos , de la figura se observa que :

$$12x+\alpha=30\underline{H}+x$$

↑ *Última hora pasada por el horario*

* Transponiendo términos , obtenemos:

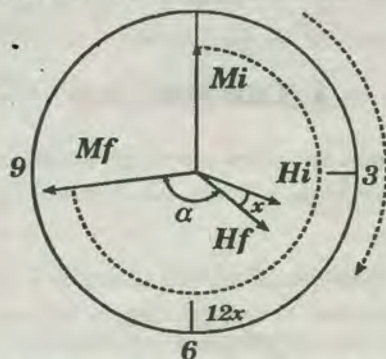
$$\alpha=30H-11x$$

* Teniendo en cuenta que "*x*" es lo que avanza el horario en *M* minutos , entonces :

$$\alpha = 30\,H - 11\left(\frac{M}{2}\right)$$

CASO II :

Cuando el minutero adelanta al horario



* Para las *H* horas y *M* minutos , de la figura se observa que :

$$30H + x + \alpha = 12x$$
$$\Rightarrow \alpha = 11x - 30H$$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha = 11\left(\frac{M}{2}\right) - 30H}$$

CONCLUSIÓN:

El signo negativo acompañará a la manecilla que se encuentra rezagada y el positivo al que se encuentra adelantada (tomando en cuenta siempre el movimiento de las manecillas del reloj).

NOTAS :

I) Dado un tiempo determinado la hora referencial será la hora exacta anterior a la hora que nos dan.

II) Cuando se pregunta por el ángulo que forman las manecillas del reloj ; se entiende que es por el menor ángulo.

EJEMPLO 7:

¿Qué ángulo forman las agujas de un reloj en cada caso?

A) 4h 40 min ***B) 8h 25 min*** ***C) 12 h 36 min***

RESOLUCIÓN :

* Para estos casos , aplicamos la expresión general:

$$\alpha = \pm 30\,H \mp \frac{11}{2}M$$

* Sin necesidad de emplear los signos ; ya que el ángulo debe ser positivo.

A) $\alpha = 30(4)\ \frac{11}{2}(40)$

$$\Rightarrow \alpha = -120 + 220$$
$$\Rightarrow \alpha = 100^\circ$$

B) $\alpha = 30(8) - \frac{11}{2}(25)$

$$\Rightarrow \alpha = 240 - \frac{275}{2}$$
$$\Rightarrow \alpha = \frac{480 - 275}{2} = \frac{205}{2}$$
$$\Rightarrow \alpha = 102^\circ\,30'$$

C) Cuando son las ***12h*** , en la expresión , ***H*** se reemplaza por ***0*** (cero)

$$\alpha = 30(0) + \frac{11}{2}(36)$$
$$\Rightarrow \alpha = 0 + 198^\circ$$

* Como debe considerarse el menor ángulo :

$$\Rightarrow \alpha = 360 - 198$$
$$\Rightarrow \alpha = 162^\circ$$

EJEMPLO 8:

Indicar cuántos minutos después de la 1 forman un ángulo recto las manecillas de un reloj.

RESOLUCIÓN :

* Empleando la expresión :

$$\alpha = \pm H \mp \frac{11}{2}M$$

* y reemplazando los datos tendremos 2 situaciones: (en ambos casos el Minutero adelanta al Horario ; es decir, el *H* esta rezagado , por lo que a esta manecilla le asignaremos signo negativo).

I) Cuando el menor ángulo es ***90°*** :

$$90 = -30(1) + \frac{11}{2}M$$
$$\Rightarrow 90 = -30 + \frac{11}{2}M$$
$$\Rightarrow M = \frac{240}{11} = 21\frac{9}{11}\,min$$

II) Cuando el ángulo sea ***270°*** (mayor ángulo) :

$$270 = -30(1) + \frac{11}{2}M$$
$$\Rightarrow 300 = \frac{11}{2}M$$
$$\Rightarrow M = \frac{600}{11} = 54\frac{6}{11}\,min$$

* Habrán dos situaciones entre la *1* y las *2* en que las agujas del reloj formarán ángulo recto.

Por primera vez a la 1 con $21\frac{9}{11}$; y

Por segunda vez a la 1 con $54\frac{6}{11}$

EJEMPLO 9:

A qué hora entre las 8 y las 9 el menor ángulo formado por las manecillas del reloj es la quinta parte del mayor ángulo?

RESOLUCIÓN

* Los dos ángulos (menor y mayor)suman 360^0

$$\Rightarrow Mayor + Menor = 360^o$$
$$\Rightarrow 5x + x = 360^o$$
$$\Rightarrow x = 60$$

* Este ángulo lo formaron cuando eran las ***8h M min.***

* Para calcular «*M*» aplicamos:

$$\alpha = \mp 30H \pm \frac{11}{2}M$$
$$\Rightarrow 60 = \mp 30(8) \pm \frac{11}{2}M$$

* Considerando signos, puede darse dos situaciones:

I) $60 = -240 + \frac{11}{2}M$

$\Rightarrow 300 = \frac{11}{2}M$

$\Rightarrow M = \frac{600}{11} = 54\frac{6}{11}$

II) $60 = 240 - \frac{11}{2}M$

$\Rightarrow \frac{11}{2}M = 180$

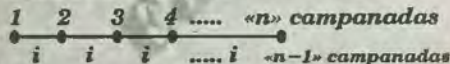
$\Rightarrow M = \frac{360}{11} = 32\frac{8}{11}$

La hora en que formarán 60° las manecillas será por primera vez a las $8h\ 32\frac{8}{11}$ min y por segunda vez a las $8h\ 54\frac{6}{11}$ min .

PROBLEMAS SOBRE CAMPANADAS

El tiempo que se mide al tocar una cantidad «*n*» de campanadas siempre es a partir de una que «marca inicial »; es decir que lo medimos por intervalos.

GRAFICAMENTE:



i : tiempo que demora cada intervalo

EJEMPLO 10:

Un reloj señala la hora con igual número de campanas . Para indicar las ***6 am***. demoró ***15seg.*** ¿Cuánto demorará para indicar las ***9 am***?

RESOLUCIÓN :

*La solución a este tipo de problemas se hace aplicando «regla de tres simple», tomando en cuenta los intervalos generados entre campanada y campanada.

* Es decir:

6 am <> 6 camp ⇒ 5 int _____ 15 seg
9 am <> 9 camp ⇒ 8 int _____ x

$$\Rightarrow x = \frac{8 \times 15}{5} = 24 \text{ seg.}$$

⇒ se demorará ***24*** segundos

EJERCICIOS

01 Calcula un número que cumple que si a su doble se le resta ***17*** da lo mismo que si al número se le suma ***5***.

02 Si al doble de un número se le resta **6** , resulta el número más ***6***. Halla el número planteando la ecuación correspondiente, y resolviéndola.

03 Halla un número cuya tercera parte más su doble más 14 sea igual a su triple.

04 ¿Qué número multiplicado por ***2*** y aumentado en ***7*** da ***6*** unidades menos que su triple?

05 Las edades de un padre y un hijo suman ***51***. Si el hijo tiene ***27*** años menos que su padre. ¿Qué edad tiene cada uno?

06 La suma de dos números es ***32*** y su diferencia ***2***. Plantea la ecuación para calcular dichos números y resuélvela por tanteo.

07 Plantea la ecuación que verifica la siguiente frase: 'La edad del padre es ***30*** años mayor que la del hijo y entre las dos suman ***50*** . Resuelve por tanteo la ecuación.

08 El perímetro de un rectángulo mide ***30*** cm, y el ancho mide el doble que el largo, ¿cuáles son las dimensiones del rectángulo?

09 Se reparten ***128*** Euros entre ***2*** chicos y ***5*** chicas de manera que cada chica recibe las dos terceras partes de lo que recibe un chico. ¿Cuánto recibe cada chico y cada chica?

10 Entre Pablo y Mar cobran al mes ***3600*** euros. Si Pablo se gasta 100 euros entonces tendrá ***500*** euros más que Mar. ¿Cuánto cobra cada uno mensualmente?

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1 :

Beatriz compró *10* manzanas . Al preguntar en otra tienda se da cuenta que en ésta cada manzana cuesta *5* céntimos menos y además por la misma suma de dinero hubiera recibido 2 manzanas más . ¿Cuánto costó cada manzana?

A)S/.0,20 B)S/.0,25 C)S/.0,30 D)S/.0,40 E)S/.0,60

RESOLUCIÓN :

* Costo de cada manzana : x
* Suma de dinero :

$$10x = (10+2)(x-5)$$
$$\Rightarrow 10x = 12x - 60$$
$$\Rightarrow 30 = x$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 2 :

Un estudiante salió de vacaciones por n días, tiempo durante el cual :

* llovió *13* veces en la mañana o en la tarde .
* Cuando llovía en la tarde la mañana había sido despejada .
* Hubo *8* mañanas despejadas .
* Hubo *7* tardes despejadas .

Hallar «n» .

A) 14 B) 12 C) 16 D) 10 E) 15

RESOLUCIÓN :

* Sea : x : # de mañanas lluviosas .
  $13-x$: # de tardes lluviosas .
* Luego:

$$n = \underline{\text{Total de mañanas}} = \underline{\text{Total de tardes}}$$
$$\Rightarrow x + 8 = 13 - x + 7$$
$$\Rightarrow 2x = 12$$
$$\Rightarrow x = 6$$
$$\Rightarrow n = 6 + 8 = 14$$

RPTA : "A"

PROBLEMA 3 :

En un baile Emilio le dice a Verónica, somos el doble o el triple de ustedes . Ella le dice: «Mira allí vienen mis *5* amigas con los cuales nadie se quedará sin bailar. ¿Cuántos hombres hay en la fiesta?

A) 10 B) 12 C) 13 D) 14 E) 50

RESOLUCIÓN :

* Número de mujeres : x
* Luego : $2x = x + 5$ ó $3x = x + 5$

$$x = 5 \quad \text{ó} \quad x = \frac{5}{2}$$

* Pero la cantidad de mujeres es un número entero , entonces la cantidad de hombres es *10*.

RPTA : "A"

PROBLEMA 4 :

Mi enamorado es *22* años menor que yo, dice cierta dama solterona , y el producto de nuestras edades , excede en *662* a la suma de las edades ¿Qué edad tiene mi enamorado?

A)19 años B)15 años C)18 años D)16 años E)20años

RESOLUCIÓN :

	De la dama	Enamorado
Edad	$x + 22$	x

* Según enunciado :

$$x(x+22) - (x + x + 22) = 662$$
$$\Rightarrow x_2 + 20x - 684 = 0$$
$$\Rightarrow (x-18)(x+38) = 0$$
$$\Rightarrow x = 18$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 5 :

En un salón de clase si se da un premio a cada uno , sobraría «x» premios , pero si se entrega «x» premios a cada alumno , entonces «x» alumnos no recibirán premios ¿Cuántos alumnos hay en tota?

A) x_2 B) $x(x-1)$ C) $\frac{x^2}{x-1}$ D) $\frac{x(x+1)}{x-1}$ E) $\frac{x}{x-1}$

RESOLUCIÓN :

* Sea «n» el número de alumnos.
* «Si se entrega *1* premio a cada alumno, sobrarán «x» premios».

$\Rightarrow$ *Número de premios* : $n + x$ .... (I)

* Pero «si se entregan «x» premios a cada uno, quedan «x» alumnos sin premio».

$\Rightarrow$ *Número de premios* : $(n - x)\,x$ ......(II)

* Luego : (I) = (II)

$$n + x = (n - x)\,x$$
$$\Rightarrow \quad n = \frac{x(x+1)}{x-1}$$

RPTA : "D"

PROBLEMA 6 :

La fachada de una casa tenía *25* huecos entre puerta, balcones y ventanas, *3* de las ventanas se transformaron en balcones y entonces el doble del número de balcones era igual al quíntuplo de ventanas. ¿Cuántos huecos de cada clase había primitivamente en la fachada , sabiendo que el

número de ventanas era múltiplo de 3 ? . Dar como respuesta el menor .

A) 3 B) 4 C) 9 D) 12 E) 6

RESOLUCIÓN :

$P + B + V = 25$ ....(Inicio)

$2(B + 3) = 5(V - 3)$ .... (Luego)

(Tanteando)

$$V = \frac{2B + 21}{5} = \overset{\circ}{3}$$

$$B = \frac{\overset{\circ}{15} - 21}{2} \; ; \; B < 25$$

$$\Rightarrow B = \frac{45 - 21}{2} \text{ (Tanteando)}$$

$B = 12$; $V = 9$; $P = 4$

RPTA : "B"

PROBLEMA 7 :

En una reunión , unos empiezan jugando , otros charlando y el resto bailando . Los que bailan son la cuarta parte de los reunidos . Después 4 de ellos dejan el juego por el baile, 1 deja la charla por el juego y 2 dejan el baile por la charla con lo cual resulta entonces que bailan tantos como juegan y juegan tantos como charlan ¿Cuántas personas asistieron a la reunión?

A) 5 B) 12 C) 24 D) 25 E) 30

RESOLUCIÓN :

	Jugando	Charlando	Bailando	Reunidos
Inicio	$3x-y$	y	x	$4x$
Después	$3x-y-4+1$	$y-1+2$	$x+4-2$	

* Según el último dato :

$$3x - y - 3 = y + 1 = x + 2$$

$$x = 6$$

⇒ Los reunidos serán : $4(6) = 24$

RPTA : "C"

PROBLEMA 8 :

Un tren al final de su trayecto llega con 40 adultos y 30 niños , con una recaudación de S/.200. Cada adulto y cada niño pagan pasajes únicos de S/.2 y S/.1 respectivamente . ¿Con cuántos pasajeros salió de su paradero inicial si en cada paradero por cada 3 adultos que subían , también subían 2 niños y bajaban 2 adultos junto con 5 niños?

A) 90 B) 100 C) 60 D) 80 E) 120

RESOLUCIÓN :

* Luego :

* Recaudación total : 200

$$2(40 + 2k) + 1 \times (30 + 5k) = 200$$

$$\Rightarrow k = 10$$

⇒ subieron en el paradero inicial :

Total – (suben en el trayecto)

$$(70 + 7k) - (3k + 2k) = 70 + 2k = 90$$

RPTA : "A"

PROBLEMA 9 :

Juan se dirige al mercado y compra la misma cantidad en dinero de plátanos , naranjas y manzanas, comprando un total de 55 frutas. El precio de una naranja excede en S/.1 al precio de un plátano , el precio de una manzana excede en S/.1 al precio de una naranja . Si el número de naranjas excede al número de manzanas en tantos plátanos como se pueden comprar con S/. 5 . Calcular el número de cada fruta . Dar como respuesta la diferencia entre plátanos y manzanas .

A) 15 B) 20 C) 25 D) 5 E) 12

RESOLUCIÓN :

	PLÁTANO	NARANJA	MANZANA
Precio de cada	x	$x+1$	$x+2$
Gasto por los	y	y	y
Cantidad de	$\frac{y}{x}$	$\frac{y}{x+1}$	$\frac{y}{x+2}$

* Según enunciado :

$$\frac{y}{x} + \frac{y}{x+1} + \frac{y}{x+2} = 55$$

$$\frac{y}{x+1} - \frac{y}{x+2} = \frac{5}{x}$$

$$\rightarrow \frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2}}{\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}}$$

$$\rightarrow 4x^2 - 3x - 1 = 0$$

$$\rightarrow (4x + 1)(x - 1) = 0 \Rightarrow x = 1$$

* Reemplazando : $y = 30$

* Luego la expresión a calcular será :

$$\frac{30}{1} - \frac{30}{3} = 20$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 10 :

Una sala tiene 3 metros más de largo que de ancho . Si el largo fuese 3 metros más de lo que es y el ancho fuese 2 metros menos . La superficie sería la misma . ¿Cuál es el área de dicha superficie?

A) $180\ m^2$ B) $200\ m^2$ C) $240\ m^2$ D) $120\ m^2$ E) $150\ m^2$

RESOLUCIÓN :

* Sabemos que :

* Largo × Ancho = Área del Rectángulo

$$\underline{Area = (x+3)x = (x+6)(x-2)}$$
$$x^2+3x = x^2 + 4x-12$$
$$\rightarrow 12 = x$$
$$\Rightarrow Área = 15 \times 12 = 180$$

RPTA : "A"

PROBLEMA 11 :

En una caja C_1 hay 5 bolas negras y en otra caja C_2 hay 8 bolas blancas. Se escogen 3 bolas de C_2 y se las coloca en C_1. Después de este procedimiento, sea b el número de bolas blancas en C_1 y n el número de bolas negras en C_2. Entonces

A) $b=n-2$ b) $b=n+2$ C) $b=n+1$ D) $b=n-1$ E) $b=n$

RESOLUCIÓN :

- De los datos

$$I)\begin{cases} C_1 : 5_N \\ C_2 : 8_B \end{cases}$$

$$II)\begin{cases} C_1 : 5_N - 3_N = 2_N \\ C_2 : 8_B + 3_N = 8_B + 3_N \end{cases}$$

III) Se escogen $x_B + y_N$ tal que $x_B + y_N = 3$ de C_2 y se colocan en C_1.

$$\rightarrow \begin{cases} C_1 : 2_N + x_B + y_N \\ C_2 : 8_B + 3_N - (x_B + y_N) \end{cases}$$

- Del dato:

$$b = x_B$$
$$n = 3 - y_N$$

- Restando las ecuaciones :

$b - n = x_B + y_N - 3 = 0$ ya que $x_B + y_N = 3$

$\rightarrow b = n$

RPTA: "E"

PROBLEMA 12 :

Se reparte cierta cantidad de dinero entre cierto número de personas . La primera recibe *S/. 100* y *1/12* del resto ; la segunda *S/. 200* y *1/12* del resto la tercera *S/.300* y *1/12* del resto ; y así sucesivamente . De esta manera todas ellas han recibido la misma suma y se ha repartido la cantidad íntegra. Hallar el número de personas .

A) 12 B) 9 C) 11 D) 13 E) 15

RESOLUCIÓN :

- Cantidad ha repartir : $12x + 100$

(Suposición adecuada)

- El primero recibe : $100 + x$
- Resto: $11x$
- El segundo recibe: $200 + \frac{1}{12}(11x - 200)$
- Como todos han recibido la misma suma , luego :

$$100 + x = 200 + \frac{11x-200}{12}$$
$$\rightarrow 1200 + 12x = 2400 + 11x - 200$$
$$\rightarrow x = 1000$$

- Luego :

$$\text{número de personas} = \frac{12(1000)+100}{100+1000} = 11$$

RPTA: "C"

PROBLEMA 13 :

Un ejército «A» presentó batalla a otro «B», de los soldados del ejército «A» murieron todos menos los que murieron y de todos los sobrevivientes del mismo ejército , quedaron heridos todos menos los que quedaron heridos . De modo que murieron *100* soldados más de los que quedaron heridos . Si el ejército «B» tenía al principio *200* soldados más que «A» . ¿Cuántos soldados tenía el ejército «B» al inicio de la batalla?

A) 400 B) 200 C) 300 D) 500 E) 600

RESOLUCIÓN :

Ejercio "A" / x:

- murieron: y
- Según enunciado : $y = x - y \Rightarrow 2y = x$
- Sobrevivientes : $x - y = y$
- Según enunciado :
- Heridos = y − heridos
- $y - 100 = y - (y - 100)$
- $y = 200$; $x = 400$

- Ejército «B» : $x + 200 = 600$

RPTA: "E"

PROBLEMA 14 :

Un extranjero se aloja en un hotel pagando *$24* diarios por el cuarto y *$60* diarios por el cuarto y la comida. Al cabo de *36* días el extranjero se retira del hotel pagando *$1890,* suma en la cual está incluido *$192* de gastos extras efectuados durante su estadía. Si el administrador le había hecho una rebaja de *$1* por cada *$10,* ¿cuántos días comió el extranjero en el hotel?

A) 27 días B) 32 días C) 29 días
D) 30 días E) 31 días

RESOLUCIÓN :

- De cada $9x = 1890$ que pago , debía pagar $10x = 10 \times 210 = 2100$

Número de días	Días que comió	Días que sólo se alojó
36	n	36 - n

* Gasto Total :

$$60n + 24(36-n) + 192 = 2100$$
$$\Rightarrow 60n + 864 - 24n + 192 = 2100$$
$$\Rightarrow 36n = 1044$$
$$\Rightarrow n = 29$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 15 :

Tres parejas de esposos: los García , los Suárez y los Campos van de compras . Cada persona compra tantos objetos idénticos como los soles que paga por cada uno de ellos . Cada esposa gastó 75 soles más que su esposo . Si Ana compró un objeto más que José García , Betty uno menos que Juan Suárez. ¿Cuál es el apellido de Carmen y cuantos artículos compró?

A) Campos -11 B) Suárez -11 C) Campos -14
D) García -10 E) Suárez -14

RESOLUCIÓN :

Costo de cada objeto	Número de objetos	Gasto por «x» objetos
x	x	x^2

* Para cada pareja se tendrá :

$$x^2 - y^2 = 75$$
$$\rightarrow (x+y)(x-y) = 25\times3 = 15\times5 = 75\times1$$

* Posibles parejas :

$$\{14 ; 11\} , \{10 ; 5\} , \{38 ; 37\}$$

Según enunciado , se tendrá :

• Ana compró 38 objetos y su esposo José García 37

• Betty compró 10 objetos y Juan Suárez 11, se deduce que este último tiene como esposa a Carmen que ha comprado 14 objetos .

RPTA : "E"

PROBLEMA 16 :

En dos habitaciones hay un total de 180 focos , de los cuales hay un cierto número de focos prendidos, luego se encienden tantos focos como los prendidos exceden al de los apagados , resultando el número de focos prendidos el triple de los apagados . ¿Cuántos focos estaban prendidos inicialmente?

A)100 B)105 C)110 D)115 E)120

RESOLUCIÓN :

Total	Prendidos	Apagados
180	x	180 - x

* Después:

$$x + [x - (180 - x)] = 3(180 - x - [x - (180 - x)])$$
$$\rightarrow 3x - 180 = 540 - 3x - 3x + 540 - 3x$$
$$\rightarrow x = 105$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 17 :

Cory y Eva fueron de compras y cada una compró tantos artículos como soles pagó por cada uno . Si Cory gastó S/.600 menos que Eva y compraron 30 artículos en total . ¿Cuanto gastó Cory?

A) S/.100 B) S/.81 C) S/.25 D) S/.625 E) S/.400

RESOLUCIÓN :

	Cantidad	Precio	Valor
Cory	x	x	x^2
Eva	$(30-x)$	$(30-x)$	$(30-x)^2$

$$x_2 - (30-x)^2 = 600$$
$$\rightarrow x^2 - 900 + 60x - x^2 = 600$$
$$\rightarrow x = 25$$

$\Rightarrow$ Gastó Cory = $(25)^2 = 625$ soles .

RPTA : "D"

PROBLEMA 18 :

Sabiendo que 75 bueyes se han comido en 12 días la hierba de un prado de 60 áreas y que 81 bueyes se han comido la de un prado de 72 áreas en 15 días. Se pide, ¿cuántos bueyes serán necesarios para comer en 18 días la hierba de un prado de 96 áreas? Se supone que en los tres prados la hierba está a la misma altura y que continúa creciendo uniformemente.

A) 90 B) 100 C) 120 D) 102 E) 98

RESOLUCIÓN :

*Sea «k» el crecimiento de la hierba por área y por día, además que el consumo de un buey en 1 día es constante , luego :

# de bueyes	# de días	Consumo
75	12	$60 + 60\times12k$
81	15	$72 + 72\times15k$
x	18	$96 + 96\times18k$

* Consumo por 1 buey en un día :

$$\frac{60(1+12k)}{12\times75} = \frac{72(1+15k)}{15\times81} = \frac{96(1+18k)}{18x}$$

* De donde : $x = 100$

RPTA : "B"

PROBLEMA 19 :

Perdí el doble de lo que aún tengo ; de no ser así, cuando compre un libro de S/.32 me hubiera sobrado

tanto como hoy me falta. ¿Cuánto tenía?
A) S/.36 B) S/.48 C) S/.32 D) S/.42 E) S/.50

RESOLUCIÓN :

Perdí $\longrightarrow 2x$

No perdí $\longrightarrow x$...... (aún tengo)

Tenía $\longrightarrow (2x+x)=3x$

$$\underbrace{\overbrace{3x - 32}^{\text{Cuando no perdí}}}_{\text{sobra}} = \underbrace{\overbrace{32 - x}^{\text{Cuando perdí}}}_{\text{falta}}$$

$\rightarrow 4x = 64$

$\rightarrow x = 16$

*Finalmente , Tenía : $3(16) = S/.48$

RPTA : "B"

PROBLEMA 20 :

Un capitán razona «Si ordeno a mis soldados del alma mater, en filas de *10* , me sobrarán *8* soldados, pero si los ordeno en filas de *9* , me faltarán *7* para forma *6* filas más . ¿Cuántos soldados hay en el alma mater?
A) 370 B) 74 C) 68 D) 398 E) 215

RESOLUCIÓN :



$\Rightarrow 10x + 8 = 9(x+6) - 7$

$\rightarrow x = 39$

* Total de soldados : $10(39) + 8 = 398$

RPTA : "D"

PROBLEMA 21 :

De los *S/.60* que tenía ; si no hubiera comprado un regalo que me costó *S/.16* tan sólo hubiera gastado los $\frac{2}{3}$ de lo que no hubiera gastado. ¿Cuánto gasté?
A) S/.20 B) S/.32 C) S/.40 D) S/.24 E) S/.36

RESOLUCIÓN :

Tenía: S/. 60

Gasté: S/. x

No gasté: S/. $(60 - x)$

• Si no hubiera comprado el regalo :

$$x = \frac{2}{3}(60 - x)$$

$\rightarrow 3x = 120 - 2x$

$\rightarrow 5x = 120$

$\rightarrow x = S/.24$

• Pero realmente gasté *S/.16* , luego gasté en total $24 + 16 = 40$ soles .

RPTA : "C"

PROBLEMA 22 :

Se poseen *28* palitos de fósforos repartidos en tres montoncitos . Si del primero se pasan al segundo tantos como hay en éste , si del primero se vuelven a pasar al segundo tantos como hay en el segundo , si del segundo se pasan al tercero tantos como hay en éste, resulta que en el segundo hay el doble que en el primero ¿Cuántos palitos tenía cada montoncito al inicio?
A) 16 ; 4 ; 8 B) 12 ; 8 ; 8 C) 14 ; 6 ; 4
D) 14 ; 6 ; 8 E) 16 ; 6 ; 6

RESOLUCIÓN :

• Al inicio :

$$\overbrace{\text{1er.} \quad \text{2do.} \quad \text{3ro.} \quad \text{Grupos}}^{28}$$

$x \quad y \quad z$

$\Rightarrow x + y + z = 28$ ....(I)

• Del *1ro* . se pasan al segundo tantos como hay en éste, entonces quedarán :

$x - y \; ; \; 2y \; ; \; z$

• Del *1ro.* se vuelve a pasar al *2do* . tantos como hay en este , entonces quedarán con :

$x - 3y \; ; \; 4y \; ; \; z$

• Del *2do.* se pasa al *3ro.* , tantos como hay en éste, entonces resultará :

$x - 3y \; ; \; \underbrace{4y - z}_{} \; ; \; 2z$

(DOBLE) (DATO)

$\Rightarrow 4y - z = 2x - 6y$

$\rightarrow z = 10y - 2x$ ....(II)

• De (I) y (II), se tendrá :

$\rightarrow x + y + 10y - 2x = 28$

$$\Rightarrow y = \frac{28 + x}{11}$$

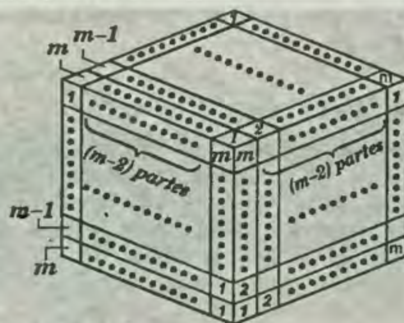
• Tanteando adecuadamente , llegaremos a que :

$y = 4 \; ; \; x = 16 \; ; \; z = 8$

RPTA : "A"

PROBLEMA 23 :

Un carpintero pintó la superficie de un cubo de madera , luego hizo marcas en cada arista del cubo, de tal manera que , ésta quedaba dividida en *«m»* partes iguales . Una vez seca la pintura serruchó el cubo por las marca y obtuvo *488* cubitos de al menos una cara pintada. Hallar *«m»* .
A) 6 B) 8 C) 10 D) 14 E) 12



RESOLUCIÓN :

• Observando y analizando la figura , se tendrá que:

Cubitos con al menos una cara pintada = 488

Sólo 1 cara pintada + *Sólo 2 caras pintadas* = *Sólo 3 caras pintadas*

$6(m-2)2 + 12(m-2) + 8 = 488$

$\rightarrow 6(m-2)2 + 12(m-2) - 480 = 0$

$\rightarrow (m-2)2 + 2(m-2) - 80 = 0$

$m-2 \qquad +10 \Rightarrow m-2+10=0$

$m-2 \qquad -8 \Rightarrow m-2-8=0$

* Luego : $m = -8$ ó $m = 10$....(solución)

RPTA : "C"

PROBLEMA 24 :

Una compañía de aviación compra *13* avionetas por *16 , 5* millones de nuevos soles. Las avionetas que compra son del tipo *A* a un precio de *1, 1* millones , del tipo *B* a un precio de *1,3* millones y del tipo *C* a *1, 8* millones . ¿Cuántas avionetas compró de cada tipo?

A) 2, 11, 0 B) 3, 7, 3 C) 5, 6, 2 D)7, 4, 2 E) 8, 4, 1

RESOLUCIÓN :

* Sea :

a : # aviones del tipo *A* (*1,1* millones *c/u*)

b : # aviones del tipo *B* (*1,3* millones *c/u*)

c : # aviones del tipo *C* (*1,8* millones *c/u*)

• Como se compra al menos uno de cada tipo, entonces a , b y c son diferentes de cero .

• Si todos los aviones fueran del tipo *A* , se habría gastado $13 \times 1,1 = 14,3$ millones.

• Pero en realidad se gastó *2 , 2* millones más , esto se debe a que :

• Por cada avión del tipo *B* se gastó *0, 2* millones más

• Por cada avión del tipo *C* se gastó *0, 7* millones más :

$$0,2b + 0,7c = 2,2$$

$$\underset{\downarrow\,4}{2b} + \underset{\downarrow\,2}{\overset{PAR}{7c}} = 22 \Rightarrow a = 7 \ , \ b = 4 \ , \ c = 2$$

RPTA : "D"

PROBLEMA 25 :

En una sucesión de *5* números enteros consecutivos y positivos , la suma de los cuadrados de los *3* primeros es igual a la suma de los cuadrados de los *2* últimos . Entonces el segundo término de la sucesión es :

A) 8 B) 9 C) 10 D) 11 E)12

RESOLUCIÓN :

* Sean : $x-2$; $x-1$; x ; $x+1$; $x+2$; los términos (enteros positivos) de la sucesión , luego :

• Suma de cuadrados de los *3* primeros :

$$(x-2)^2 + (x-1)^2 + x^2$$

• Suma de cuadrados de los *2* últimos :

$$(x+1)^2 + (x+2)^2$$

* Por condición :

$$(x-2)^2 + (x-1)^2 + x^2 = (x+1)^2 + (x+2)^2$$

* Resolviendo : $x = 12$

* Piden : $x - 1 = 11$

RPTA : "D"

PROBLEMA 26 :

Se compran dos piezas de tela : una a «*x*» soles el metro y otra , que tiene «*x*» metros más , a «*y*» soles el metro : si por cada pieza se pagó lo mismo . ¿Cuántos metros se compraron en total?

A) $\dfrac{x(x+y)}{(y-x)}$ B) $\dfrac{x+y}{x-y}$ C) $\dfrac{y(x+y)}{x-y}$ D) $\dfrac{x(x+y)}{(x-y)}$

RESOLUCIÓN :

* Por «*z*» metros a «*x*» soles cada metro se paga «*zx*» soles.

* Por «*z+x*» metros a «*y*» soles cada metro se paga « *(z+x) y*» soles .

* Como se pagó lo mismo por cada pieza tenemos :

$$zx = (z+x)\ y \ \text{ de donde } \ z = \frac{xy}{x-y}$$

*El total de metros es :

$$2z + x = 2\frac{(x\,y)}{x-y} + x = \frac{x(x+y)}{x-y}$$

RPTA : "D"

PROBLEMA 27 :

Se compra un recipiente que lleno , pesa *9. 5kg* . y vacío pesa *2 . 5kg* . Se vende el contenido en vasijas

que llenas pesan **290 g** y vacías pesan **40g** . ¿Cuántas de éstas vasijas se ha podido llenar?

A) 28 *B) 30* *C) 56* *D) 14* *E)37*

RESOLUCIÓN :

R : Peso del recipiente

L : Peso del líquido del recipiente

V : Peso de una vasija

L_1 : Peso del líquido de una vasija

$$\begin{cases} R + L = 9500 \\ R = 2500 \end{cases} \Rightarrow L = 7000$$

$$\begin{cases} V + L1 = 290 \\ V = 40 \end{cases} \Rightarrow L1 = 250$$

n : número de vasijas que se llenan con el líquido del recipiente .

$$n = \frac{L}{L_1} = \frac{7000}{250} = 28$$

RPTA : "A"

PROBLEMA 28 :

Un grupo de abejas , cuyo número era igual a la raíz cuadrada de la mitad de todo su enjambre , se pozo sobre un jazmín , habiendo dejado muy atrás a *8/9* del enjambre; sólo una abeja del mismo enjambre revoloteaba en torno a un loto , atraída por el zumbido de una de sus amigas que cayó imprudentemente en la trampa de la florecilla de dulce fragancia . ¿Cuántas abejas formaban el enjambre?

A) 70 *B) 71* *C) 72* *D) 98* *E)200*

RESOLUCIÓN :

* Total de abejas : x

* Según enunciado : $x = \sqrt{\frac{x}{2}} + \frac{8x}{9} + 2$

* Considerando : $x = 18k^2$

$$18k^2 = \sqrt{\frac{18k^2}{2}} + \frac{8 \cdot 18k^2}{9} + 2$$

$$\rightarrow 2k^2 = 3k + 2$$

$$\rightarrow 2k^2 - 3k - 2 = 0$$

$$\rightarrow (2k + 1)(k - 2) = 0$$

$$\Rightarrow k = 2$$

$$\rightarrow x = 18 \times 22$$

$$\rightarrow x = 72$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 29 :

A **10** parejas de novios le va a entregar **2** panes por persona . En el momento de la entrega se observó que faltaban algunos panes, por lo que se ordenó traer tantos panes como la mitad de lo que hay , más un pan ; para cumplir la entrega. ¿Cuántos panes se ordenó traer?

A) 11 *B) 12* *C) 13* *D) 14* *E)15*

RESOLUCIÓN :

de panes : ***x.........(faltan)***

mando a traer

* Luego :

* Quedaron : $40 - x$ ***(hay)***

$$\Rightarrow 40 - x + \frac{40 - x}{2} + 1 = 40$$

$$\rightarrow x = 14$$

PROBLEMA 30 :

Un edificio tiene **4** pisos , el número de habitaciones de cada piso son números consecutivos crecientes y cada habitación del edificio tiene tantas ventanas como habitaciones hay en el respectivo piso . Si el número de ventanas del último piso y el número de habitaciones del primer piso suman **69**. ¿Cuántas habitaciones hay en el último piso?

A) 8 *B) 7* *C) 9* *D) 6* *E) 4*

RESOLUCIÓN :

* Sea «x» el número de habitaciones del último piso del edificio :

PISO	# DE HABITACIONES	# VENTANAS/HAB	TOTAL DE VENTANAS
4°	x	x	x^2
3°	$x-1$	$x-1$	$(x-1)^2$
2°	$x-2$	$x-2$	$(x-2)^2$
1°	$x-3$	$x-3$	$(x-3)^2$

* Ahora sumamos el número de ventanas del último piso con el número de habitaciones del primer piso

* Resolviendo : $x^2 + (x-3) = 69$

* Factorizando : $x^2 + x - 72 = 0$

$$\rightarrow x + 9 \text{ ó } x - 8$$

* De donde : $x + 9 = 0 \Rightarrow x = -9$

$x - 8 = 0 \Rightarrow x = 8$

RPTA : "A"

PROBLEMA 31 :

Si subo una escalera de **3** en **3** , doy **4** pasos más que subiendo de **5** en **5** ¿Cuántos escalones tiene la escalera?

A) 30 *B) 60* *C) 100* *D) 120* *E)90*

RESOLUCIÓN :

* Sea «n» el número total de escalones .

* Luego:

$$\begin{pmatrix} \#\ pasos \\ de\ 3\ en\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \#\ pasos \\ de\ 5\ en\ 5 \end{pmatrix} = 4$$

$\frac{n}{3} - \frac{n}{5} = 4 \Rightarrow n = 30$

RPTA : "A"

PROBLEMA 32 :

En el mes de agosto , Karyn sumó a los años que tiene los meses que ha vivido, obteniéndose como resultado *147*. ¿En qué mes nació Karyn? .

A) Abril B) Mayo C) Marzo D) Junio E) Febrero

RESOLUCIÓN :

* Según el enunciado :

$$\underset{x}{\underline{\text{Años}}} + \underset{12x}{\underline{\text{Meses}}} = 147 \quad (\times 12)$$

$$13x = 147$$

$$x = \frac{147}{13} \Rightarrow 147 \;\underline{|13}$$

$$4 \quad 11$$

4 → Meses ; 11 → Años

$x = 11$ años 4 meses.

• En agosto Karyn tenía aproximadamente *11* años y *4* meses , quiere decir que hace *4* meses celebró su cumpleaños número *11* (o sea en agosto − *4* meses = abril)

⇒ Nació en Abril :

RPTA : "A"

PROBLEMA 33 :

Inocencia tuvo su primer hijo a los *17* años, *2* años después a su segundo hijo y *3* años después a su tercer hijo . Si en el *2002* las edades de los *4* sumaban *42* años . ¿En qué año nació Inocencia?

A) 1980 B) 1965 C) 1942 D) 1977 E)1982

RESOLUCIÓN :

Incógnita: $+x$ (2000); $+2$; $+3$

Inocencia	17	19	22	22 + x
1er. Hijo	0	2	5	5 + x
2do. Hijo		0	3	3 + x
3er. Hijo			0	x

Suman : 42 ← Dato

$\Rightarrow 22 + x + 5 + x + 3 + x + x = 42$

Despejando : $x = 3$

• Entonces inocencia en el *2002* tiene :

$$22 + 3 = 25 \text{ años}$$

* Luego nació en el :

$$2002 - 25 = 1\,977$$

RPTA : "D"

PROBLEMA 34 :

Yo tengo tantas «semanas» como mi hijo «días», si tuviera *20* años más tendría tantos «años» como mi hijo «meses». ¿Cuántos años tiene mi padre; si cuando yo nací , el tenía los años que yo tengo ahora?

A) 35 B) 49 C) 98 D) 70 E)56

RESOLUCIÓN :

• Lo real es que si yo tuviese una semana (*7* días) , mi hijo tendría *1* día; es decir mi edad (en años) será *7* veces su edad (en años), luego si la edad de mi hijo es «x», yo tengo «$7x$».

• Ahora , si tuviera «$7x+20$», mi edad sería *12* veces su edad , que es «x» (porque yo tendría tantos años como él meses) , por consiguiente :

$$7x + 20 = 12x$$

$$\rightarrow 4 = x$$

• Entonces yo tengo $7(4) = 28$ años , que fue la edad que tuvo mi padre cuando yo nací, es decir, el me lleva *28* años , de donde se deduce que actualmente mi padre tiene : $28 + 28 = 56$ años

RPTA : "E"

PROBLEMA 35 :

Pitonizo dice «Ya no soy tan joven porque paso los *80*, pero todavía mi edad no llega a *144* años . Cada una de mis hijas me ha dado tantas nietas como hermanas tiene, mi edad es el cuádruplo de hijas y nietas ¿Cuántas hijas tiene Pitonizo y cuál es su edad?».

A) 5 ; 95 B) 6 ; 140 C) 7 ; 108 D) 5 ; 100 E)6 ; 100

RESOLUCIÓN :

* Según el enunciado :

$$80 < \text{Edad de Pitonizo} < 144$$

de Hijas : 1ra. , $\overbrace{\text{2da. , 3ra. , ... , nva.}}^{\text{«n - 1» Hermanos de la 1ra.}}$

$$\underbrace{n-1 \,;\, n-1 \,;\, n-1 \,;\, ...\,;\, n-1}_{\text{Total de nietas : } n(n-1)}$$

$$\Rightarrow : \text{Edad de Pitoniso} : 4(\overbrace{n}^{\text{Hijos}} + \overbrace{n(n-1)}^{\text{Nietas}}) = 4n^2$$

* Reemplazando en la condición inicial :

$$80 < 4n^2 < 144$$

$$4,... < n < 6$$

cumple para $n = 5 \rightarrow$ *# de hijas*

• Luego su edad será : $4(5)^2 = 100$ años

RPTA : "D"

PROBLEMA 36 :

La edad de Levy más dos veces su edad , más 3 veces su edad , y así sucesivamente hasta tantas veces su edad , como su edad , sumaran al igual que 2 menos que si tomáramos su edad , tantas veces como el cuadrado de su edad . ¿En qué año nació Levy , si el año actual es el 2002?

A) 2001 B) 1997 C) 1980 D) 2000 E) 1991

RESOLUCIÓN :

*Sea «x» la edad de Levy , luego según el enunciado

$$x + 2x + 3x + ... + x(x) = \underbrace{x^2(x)} - 2$$

....Tomaremos su edad como el cuadrado de su edad ....

$$\Rightarrow x(1+2+3+ ....+ x) = x^3 - 2$$

$$\Rightarrow x\left[\frac{x(x+1)}{2}\right] = x^3 - 2$$

$$\Rightarrow x^2(x+1) = 2x^3 - 4$$

$$\rightarrow x^3 + x^2 = 2x^3 - 4$$

$$\rightarrow 4 = x^3 - x^2$$

$$\rightarrow 4 \times 1 = x^2(x-1)$$

* Por simple tanteo : $x = 2$

♦ Entonces en el **2002** , Lenín tiene **2** años, luego nació en el año **2000** .

RPTA : "D"

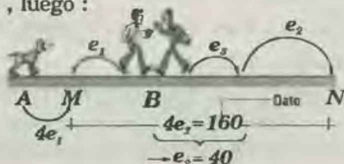
PROBLEMA 37 :

Un perrito parte de un punto «A» a otro punto «B» y simultáneamente dos peatones parten del punto «B» en sentidos opuestos . El perrito encuentra a uno de ellos en el punto «M» y al otro en el punto «N» ; luego , se pide calcular la distancia que hay entre «A» y «B», sabiendo que los dos peatones tienen la misma rapidez y que la rapidez del perrito es el cuádruplo de la de los peatones , sabiendo además que la distancia entre «M» y «N» es **160m** .

A) 200m B) 300m C) 400m D) 350m E) 150m.

RESOLUCIÓN :

• Como el perrito tiene el cuádruplo de rapidez de los peatones , entonces , para un mismo tiempo el perrito recorre siempre **4** veces lo que recorren los peatones , luego :



• Del gráfico :

$$2e_1 + e_2 = 160$$

$$\rightarrow 2e_1 + 40 = 160$$

$$\rightarrow e_1 = 60$$

* Piden :

$$AB \; : 4e_1 + e_1 = 4(60) + 60 = 300\,m$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 38 :

Carlos sale todas las tardes de su trabajo a las **4: 35** sube puntualmente al microbús que pasa a la misma hora y llega a su cada a una misma hora . Un día sale más temprano y se va caminando a su casa , luego cambia de opinión y toma un microbús , después de caminar **18** minutos. llega a su cada **16** minutos antes de lo acostumbrado . ¿A qué hora salió Carlos de su trabajo?.

Velocidad del microbús es ocho veces más la velocidad de Carlos .

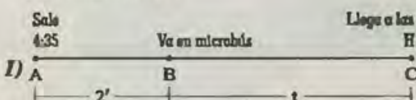
A) 4: 08 B) 4: 09 C) 4: 10 D) 4: 12 E) 4: 03

RESOLUCIÓN :

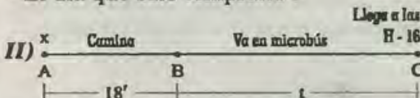
* Se cumple : $V_{MICROBÚS} = 9V_{CARLOS}$

* Luego cuando José demora ***18 min.*** , el microbús demorará : ***2min*** .

* Normalmente :



* El día que sale temprano :



* De los gráficos :

$$I : H = 4:35 + 2' + t$$

$$II : H - 16 = x + 18' + t$$

$$Restando : 16 = 4:35 - x - 16$$

* Resolviendo : $x = 4:03$

RPTA : "E"

PROBLEMA 39 :

En una pista circular de **240m** de longitud, dos jinetes **A** y **B** partieron desde un mismo punto en direcciones opuestas. Se encontraron por vez primera **17** segundos después de la partida de **A; 20** segundos más tarde se encontraron por segunda vez. Sabiendo que **B** partió **6** segundos antes que **A**, entonces la velocidad de **A** en ***m/s*** es .

A) 3m/s B) 4,5m/s C) 5m/s D) 5,5m/s E) 6m/s

RESOLUCIÓN :

* Como el primer encuentro ocurre *17* segundos después que partió *A*, luego vuelven a encontrarse a los *20* segundos después (*3* segundos más), se deduce que el espacio recorrido por *B* en *6* segundos; entonces:

$$\rightarrow V_B \times 6(V_A + V_B) \times 3$$

$$\rightarrow V_A = V_B$$

$$\rightarrow V_A \times V_B = \frac{240m}{20s} = 12m/s$$

$$\rightarrow V_B = 6m/s$$

RPTA : "E"

PROBLEMA 40:

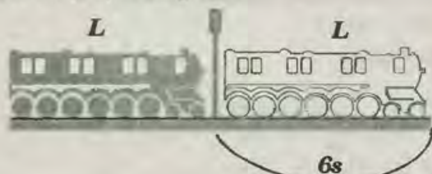
Un tren tardó *6* segundos en pasar por un semáforo y *24* segundos en atravesar un túnel de *240* metros de longitud. ¿Cuánto tardará en cruzar una estación de *160m*. de longitud?

A) 30 s. *B) 20 s.* *C) 18 s.* *D) 24 s.* *E) 16 s*

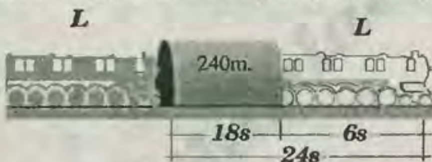
RESOLUCIÓN:

* Analizando cada uno de los tres casos presentados:

I) El tren cruza el semáforo en *6* segundos. (El tren recorre su propia longitud)



II) El tren cruzó el tunel de *240m*. en *24s*. (El tren recorre la longitud del túnel y su propia longitud)



III) $\Rightarrow V_{TREN} = \frac{240}{18} = \frac{40}{3}\ m/s.$

* Piden el tiempo para pasar un túnel de *160m.*, el cual será:

$$\frac{160m}{\frac{40}{3}m/s.} + 6\ \ s. = 18\ s.$$

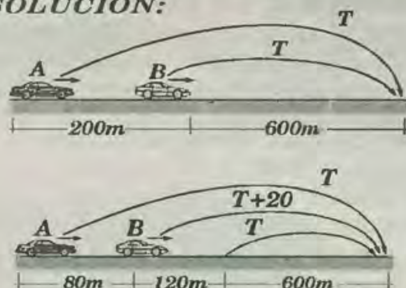
RPTA : "C"

PROBLEMA 41:

Dos móviles *A* y *B* disputan una carrera de *800 m* . Si *"A"* da a *"B"* *200m*. de ventaja llegan al mismo tiempo a la meta ; en cambio se le da *80m*. de ventaja le gana por *20* segundos. ¿Cuál es la rapidez de *"A"*?

A) 8 m/s. *B) 6 m/s.* *C) 12 m/s.* *D) 10 m/s.* *E) 14 m/s.*

RESOLUCIÓN:



De los gráficos se deduce que *"A"*, demoró *20s*. en recorrer:

$$200 - 80 = 120\ m. \quad \Rightarrow V_A = \frac{120\,m}{20\,s} = 6\ m/s.$$

RPTA : "B"

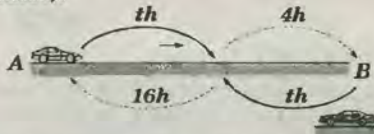
PROBLEMA 42:

Dos móviles parten de los puntos *A* y *B* distantes *900 km*. en sentidos contrarios. Suponiendo que se encuentran en un punto *"E"* y que a partir de ese momento uno demora *4h*. en llegar a *"B"* y el otro demora *16h* . en llegar a *"A"*. Hallar la rapidez del más veloz.

A) 70 km/h *B) 80 km/h* *C) 85 km/h*
D) 75 km/h *E) 60 km/h*

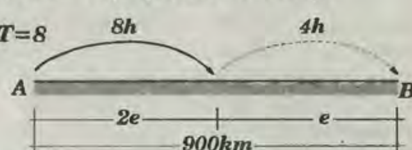
RESOLUCIÓN:

* Graficando según las condiciones (hasta encontrarse):



• Aprovecharemos la proporción de tiempo:

$$\frac{T}{16} = \frac{4}{T} \Rightarrow T = 8$$



• Luego, analizando el recorrido del más veloz:

* Del gráfico:

$$2e + e = 900 \longrightarrow e = 300$$

$$V_{MAS\ VELOZ} = \frac{300\,km}{4h.} = 75km/h.$$

RPTA : "D"

PROBLEMA 43:

Usted me pregunta ¿qué hora es? y yo amablemente le respondo: "son las once y falta poco para las doce además dentro de *13* minutos faltará para las *13*

horas la misma cantidad de minutos que había pasado desde las once hasta hace **7** minutos pues bien esa es la hora. ¿Qué hora es?

A) 11: 53 B) 11: 55 C) 11: 57 D) 11: 47 E) 11: 48

RESOLUCIÓN:

* Del esquema: $y+7'+13'+y=120' \rightarrow y=50$

* Entonces la hora pedida será:

$$x=11{:}00+y+7'=11{:}\ 57$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 44:

¿A qué hora inmediatamente después de las ***15: 00 h.*** el minutero adelantará al horario, tanto como el horario adelanta a la marca de las ***12***?

A) 15: 35 h. B) 15: 36 h. C) 15: 37 h.
D) 15: 18 h. E) 15: 15 h.

RESOLUCIÓN:

OJO: Para el minutero ***1div.=1min.***

* Sabemos que: $M=12\,H$

$$\rightarrow 30 + 2x=12x \rightarrow x=3$$

$\Rightarrow$ Serán las: ***15 H.*** con $30+2x=30+2(3)=36$ divisiones ó ***36*** minutos.

RPTA: "B"

PROBLEMA 45:

¿Qué hora es en la figura?

A) 2h 33' 30"
B) 2h 31' 12"
C) 2h 30' 40"
D) 2h 31' 52"
E) 2h 31' 33"

RESOLUCIÓN:

* Del gráfico:

Recorrido del horario: $(5-2x)$ *div.*

* Recorrido del minutero: $(30+x)$ *div.*

* Sabemos que:

$M=12\,H$

$\rightarrow 30+x=12(5-2x)$

$\rightarrow 30+x=60-24x \rightarrow 25x=30$

$\rightarrow x=\frac{6}{5}$ *división ó* $\frac{6}{5}$ *min.*

$\rightarrow x=1\frac{1}{5}\,min.$

$\rightarrow x=1min+\frac{1}{5}(60s)$

$\rightarrow x=1\ min+12s=1\ min.\ 12\ s$

* Entonces la hora será:

$$2H+30'+x=2H+30'+1'\ 12^2$$

$$\Rightarrow \quad x=2H\ 31'\ 12''$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 46:

¿Qué hora marca el reloj de la figura, si $\theta°-\alpha°=3{,}75°$?

A) 4 : 35' 35"
B) 4 : 36' 30"
C) 4 : 37' 30"
D) 4 : 38' 30"
E) 4 : 39' 30"

RESOLUCIÓN:

* Recorrido del horario: $(60-\alpha)°$

* Recorrido del minutero: $(180+\theta)°$

* Sabemos: $M=12H$

$180+\theta=12(60-a)$ .... ***(I)***

• Del dato: $\alpha°=\theta°-3{,}75°$

• Reemplazando ***"a"*** en ***(I)***:

$180+\theta=12(60-(\theta-3{,}75))$

$\rightarrow 180+\theta=720-12\theta+45$

$\rightarrow \quad 13\theta=585°$

$\rightarrow \quad \theta=45°$

* Entonces el minutero recorrió:

$$180°+\theta=180°+45°=225°$$

• Pero sabemos que para el minutero:

$$1' \text{ ——— } 6°$$
$$x \text{ ——— } 225°$$

Por regla de tres: $6x=225' \rightarrow x=37'\,30''$

• La hora será: **4: 37' 3"**

RPTA : "C"

PROBLEMA 47:

Toledo salió de su casa por la mañana cuando su reloj de pared coincidía con el gráfico ***I*** y llegó por la noche del mismo día cuando su reloj coincidía con el gráfico ***II***. ¿Qué tiempo estuvo fuera de casa?

Gráfico I



Gráfico II



A) $11h27\dfrac{3}{11}min.$ *B) 11 h30 min.* *C) 12 h.*
D) 11 h. *E) 10 h.*

RESOLUCIÓN:

♦ Para el reloj ***(I)***:

$$M=12H$$

$\rightarrow 40+x=12x$ ....*(en divisiones)*

$$\rightarrow x=3\frac{7}{11}div.=3\frac{7}{11}min$$

$\rightarrow$ Su hora será : $8\left(40+3\dfrac{7}{11}\right)'=8:\ 43\dfrac{7}{11}$

♦ Para el reloj ***(II)***:

$$M=12H$$

$$\rightarrow 10+y=12y \rightarrow y=\frac{10}{11}$$

* Su hora será: $8:\ \left(10+\dfrac{10}{11}\right)'=8:\ 10\dfrac{10}{11}$

♦ El tiempo que estuvo fuera de su casa será:

$$\overbrace{12+8}^{De\ Noche}:\ 10\frac{10}{11}-8:\ 43\frac{7}{11}=11H\ 27\frac{3}{11}min$$

RPTA : "A"

PRACTICA DE EJERCICIOS #1

01 Hallar dos números enteros consecutivos cuya suma sea ***103***.

A) 48 y 49 *B) 50 y 51* *C) 51 y 52*
D) 52 y 53 *E) 63 y 64*

02 Tres números enteros consecutivos suman ***204***. Hallar el mayor.

A) 70 *B) 68* *C) 71* *D) 72* *E) 69*

03 Hallar cuatro números enteros consecutivos cuya suma sea ***74***. El mayor es:

A) 21 *B) 20* *C) 24* *D) 26* *E)28*

04 La suma de tres números es ***200***. El mayor excede al del medio en ***32*** y al menor en ***65***. Hallar el término intermedio.

A) 69 *B) 67* *C) 60* *D) 62* *E) 65*

05 Tres cestos contienen ***575*** manzanas. El primer cesto tiene ***10*** manzanas más que el segundo y ***15*** más que el tercero. ¿Cuántas manzanas hay en el segundo cesto?

A) 190 *B) 188* *C) 176* *D) 197* *E) 181*

06 Hallar dos números consecutivos, si sabemos que los ***5/6*** del menor al ser sumados con los ***7/9*** del mayor, nos da ***33*** de resultado. Dar el menor de ellos.

A) 19 *B) 21* *C) 24* *D) 26* *E) 20*

07 Hallar el mayor de tres enteros consecutivos, si se sabe que la diferencia de cuadrados entre el medio y el menor, excede al mayor en tres unidades.

A) 8 *B) 7* *C) 6* *D) 5* *E) 4*

08 Hallar el menor de tres enteros consecutivos, si sabemos que los ***3/4*** del menor sumados con la tercera parte del número medio, equivale al mayor.

A) 22 *B) 21* *C) 24* *D) 18* *E) 20*

09 Hallar tres números consecutivos, si se sabe que los ***8/15*** del intermedio sumados con la mitad del mayor, equivale al menor de ellos aumentado en tres. El menor de ellos es:

A) 42 *B) 41* *C) 44* *D) 46* *E) 43*

10 Se tienen tres números consecutivos. Si dividimos al menor entre ***17***, el intermedio entre ***7***, y el mayor entre ***9***, observamos que la suma de los dos primeros cocientes excede en ***3*** al tercer cociente que obtuvimos. ¿Cuál es el menor de los consecutivos?

A) 34 B) 32 C) 37 D) 35 E) 38

11 Debo pagar *2050* soles con *28* billetes de *S/.50* y *S/.100*. ¿Cuántos billetes de *S/.100* debo emplear?
A) 15 B) 17 C) 13 D) 14 E) 18

12 El doble de un número excede al triple de otro en *4*. Si la suma de ambos es el triple del menor. ¿Cuál es el mayor número?
A) 4 B) 20 C) 10 D) 12 E) 8

13 Un número excede al cuadrado más próximo en *39* unidades y es excedido por el siguiente cuadrado en *16* unidades. Hallar la suma de cifras del número.
A) 20 B) 19 C) 21 D) 23 E) 18

14 Un sapo recorrió *20m* dando *4* saltos; en cada salto avanzó *2m* menos que en el salto anterior. ¿Cuántos metros avanzó en el tercer salto?
A) 8m B) 6 C) 4 D) 2 E) 10

15 Caperucita Roja va por el bosque llevando una cesta con manzanas para su abuelita; si en el camino la detiene el lobo y le pregunta; "¿Cuántas manzanas llevas en tu cesta?". Caperucita le responde: "llevo tantas decenas como el número de docenas más uno". ¿Cuántas manzanas llevaba Caperucita en su cesta?
A) 30 B) 6 C) 120 D) 60 E) 180

16 A cierto encuentro futbolístico, asistió cierto número de espectadores, pagando cada uno *S/.5* por entrada. En el encuentro de revancha asistió el triple que la primera vez y cada uno pagó ahora **S/.8** por entrada. Si en la segunda recaudación se recibió *S/.380000* más que en la primera. ¿Cuántos espectadores asistieron al segundo encuentro?
A) 6000 B) 20000 C) 60000 D) 40000 E) 45000

17 Tito y Raúl se ponen a jugar a los dados, teniendo ambos una cierta cantidad de dinero; en cierta jugada, Tito tiene *S/.24* que es el doble de lo que tenía Raúl cuando Tito tenía el triple de lo que ahora tiene Raúl. ¿Cuánto tiene ahora Raúl?
A) S/.9 B) 6 C) 18 D) 10 E) 15

18 Un padre de familia compró por navidad una botella de champagne y un panetón, costando este *S/.6 más* que la botella; al año siguiente compró otra botella de champagne y otro panetón resultando este *S/.2 más* caro que el del año pasado, y la botella resultó *S/.2 más* barata que la del año pasado, entonces ahora resultó que el precio del panetón era el doble que el de la botella de champagne. ¿Cuánto costó el segundo panetón?
A) S/.20 B) 12 C) 18 D) 10 E) 15

19 Tengo *120* nuevos soles y gasto *2/3* de lo que no gasto. Si hubiese gastado *5/7* de lo que no gastaría. ¿Cuánto más hubiese gastado?
A) 6 B) 3 C) 2 D) 9 E) 7

20 Entre *4* personas tienen *13604* dólares; la segunda tiene el triple de lo que la cuarta más un dólar; la tercera tiene el doble de lo que tienen la segunda y cuarta juntas; y la primera tiene tanto como lo que le falta a la segunda para tener lo de la tercera. ¿Cuánto tiene la tercera?
A) 4001 B) 2401 C) 6402 D) 800 E) 3501

PRACTICA DE EJERCICIOS #2

01 Hallar dos números, si sabemos que su suma es *730* y que cuando se divide el mayor entre el menor el cociente es *4* y el residuo es *80*. El mayor es:
A) 600 B) 630 C) 500 D) 430 E) 530

02 Hallar dos números, tales que uno excede al otro en *70* unidades, y al dividirlos entre sí el cociente es *5* y el resto es *10*. El mayor es:
A) 80 B) 81 C) 85 D) 75 E) 60

03 Dividir *260* en dos partes, tales que el duplo del mayor dividido entre el triple del menor nos da *2* de cociente y *40* de residuo. Hallar el mayor de ellos.
A) 170 B) 180 C) 150 D) 190 E) 195

04 Repartir *285* en *2* partes, tales que *2/3* de la mayor divididos entre *4/9* de la menor nos da *1* de cociente y *40* de residuo. Hallar la parte menor.
A) 167 B) 137 C) 140 D) 120 E) 118

05 Si dividimos el mayor de dos números entre el menor, el cociente es *2* y el resto es *2*. Además si dividimos cinco veces el menor entre el mayor obtenemos *1* de cociente y *7* de residuo. Hallar el mayor.
A) 6 B) 12 C) 8 D) 10 E) 9.

06 El cociente de una división es *156* y el resto es *6*. Si se agregan *1000* unidades al dividendo y se repite la división entonces el cociente es *173* y el nuevo resto es *54*. Hallar el menor.
A) 48 B) 62 C) 56 D) 40 E) 65

07 La suma de dos números es *74*. Su diferencia

dividida entre el menor da *3* por cociente y *4* por residuo. Hallar el mayor.

A) 44 B) 62 C) 60 D) 54 E) 48

08 El dividendo en una cierta división es *1081*. Si el cociente y el residuo son iguales y el divisor es el doble del cociente. ¿Cuál es el divisor?

A) 23 B) 46 C) 48 D) 24 E) 21

09 El denominador de una fracción excede al duplo del numerador en *1*. Si al numerador se resta *4*, el valor de la fracción es *1/3*. Hallar la fracción.

A) 4/9 B) 12/19 C) 13/27 D) 7/9 E) 4/13

10 El denominador de una fracción excede al duplo del numerador en *6*. Si el numerador se aumenta en *15* y el denominador se disminuye en *1*, el valor de la fracción es *4/3*. Hallar la fracción

A) 5/11 B) 5/16 C) 6/11 D) 6/13 E) 5/13

11 El denominador de una fracción excede al numerador en *1*. Si al denominador se añade *4*, la fracción que resulta es *2* unidades menor que el triple de la fracción primitiva. Hallar la fracción.

A) 8/11 B) 4/5 C) 6/11 D) 7/8 E) 5/6

12 El denominador de una fracción es *1* menos que el triple del numerador. Si el numerador se aumenta en *8* y el denominador en *4*, el valor de la fracción es *11/12*. Hallar la fracción.

A) 3/8 B) 2/5 C) 11/12 D) 13/17 E) 4/11

13 El numerador de una fracción excede al denominador en *22*. Si al numerador se resta *15*, la diferencia entre la fracción primitiva y la nueva fracción es *3*. Hallar la fracción primitiva.

A) 27/5 B) 36/5 C) 27/4 D) 18/5 E) 20/3

14 La suma de tres números es *175*. Si el mayor excede al intermedio en *37* y al menor en *49*, indicar el mayor de ellos.

A) 42 B) 82 C) 87 D) 47 E) 26

15 En tres cestos hay *61* naranjas. El más grande tiene *30* más que el pequeño y el mediano *29* menos que el grande. ¿Cuántas naranjas hay en el cesto mediano?

A) 10 B) 12 C) 11 D) 14 E) 13

16 Flora tiene el doble de dinero que Carla. Si Flora le diera a Carla *2000* soles, tendría los *4/5* de lo que tendría Carla. ¿Cuánto tiene Flora?

A) 3000 B) 6000 C) 9000 D) 12000 E) 1000

17 La edad de Carlos es tal que: si al doble de su edad le quitan *17*, resultaría lo que le falta para cumplir *100* años, ¿cuál será su edad dentro de *13* años?

A) 41 B) 51 C) 61 D) 52 E) 31

18 Un niño tiene un cierto número de caramelos. En cada hora se come la mitad de lo que tiene más medio caramelo; si luego de tres horas se le acabó. ¿Cuántos tenía al inicio?

A) 3 B) 7 C) 15 D) 31 E) 63

19 En una pequeña quinta el número de damas adultas es al de varones adultos como *3* es a *2*. Si el número de damas no adultas y el de varones no adultos son respectivamente el triple y el doble de las damas adultas y los varones adultos respectivamente y en total viven *36* personas. Indique el número de adultos.

A) 12 B) 10 C) 8 D) 14 E) N.A.

20 Se quiere dividir *60* en dos partes tales que el triple de la mitad de una parte aumentado en el doble de la tercera parte de la segunda es igual a *50*; dar una de las partes.

A) 12 B) 16 C) 42 D) 31 E) 15

PRACTICA DE EJERCICIOS #3

01 La cifra de las decenas de un número de dos cifras excede en *1* a la cifra de las unidades. Si el número se multiplica por *3* este producto equivale a *21* veces la suma de sus cifras. Hallar el número.

A) 24 B) 36 C) 21 D) 28 E) 32

02 La suma de la cifra de las decenas y la cifra de las unidades de un número de dos cifras es *7*. Si el número, aumentado en *8*, se divide por el duplo de la cifra de las decenas el cociente es *6*. Hallar el número.

A) 52 B) 56 C) 58 D) 42 E) 41

03 La cifra de las decenas de un número de dos cifras excede en *2* a la cifra de las unidades y el número excede en *27* a *10* veces la cifra de las unidades. Hallar el número.

A) 83 B) 74 C) 92 D) 97 E) N.A.

04 La cifra de las decenas de un número de dos cifras es el duplo de la cifra de las unidades, y si el número disminuido en *4* se divide por la diferencia entre la cifra de las decenas y la cifra de las unidades, el cociente es *20*. Hallar el número.

A) 86 B) 76 C) 49 D) 84 E) 92

05 Las cifras de las centenas y decenas de un número de tres cifras son *2* y *8*. El resultado de repetir la cifra de las centenas tantas veces por factor como indica la cifra de las unidades, aumentada en *3*, es el mismo que el de repetir la cifra de las decenas tantas veces por factor como mitad de unidades tiene la última cifra del número. ¿Cuál es ésta?

A) 7 *B) 6* *C) 5* *D) 4* *E) 2*

06 Si a un número de tres cifras, que empieza con *9*, se suprime esta cifra queda *1/21* del número. ¿Cuál es éste?

A) 954 *B) 963* *C) 937* *D) 981* *E) 945*

07 Jaime tiene *200* soles más que Marcela. La razón entre las cantidades que tienen es como *1* es a *9*. ¿Cuánto tiene Marcela?

A) S/.125 *B) 45* *C) 225* *D) 150* *E) 25*

08 Hallar un número, cuyo duplo aumentado en *5* es a su décuplo disminuido en *5* como *5* es a *7*.

A) 10 *B) 20* *C) 15* *D) 12* *E) N.A.*

09 En un corral hay gallinas de varios colores, pero notamos que las gallinas de color blanco que son *2/5* del total y las gallinas de color negro que son la mitad del total más *10*, son entre sí como *2* es a *3*. ¿Cuál es el total de gallinas?

A) 150 *B) 120* *C) 100* *D) 180* *E) 200*

10 Las cantidades que tendría si pierdo *5000* soles, y si ganara *40000* están en la misma razón que *1* a *4*. ¿Cuánto tengo?

A) 12000 *B) 15000* *C) 8000* *D) 3000* *E) N.A.*

11 ¿Qué edad tengo si la edad que tenía hace *10* años es a la edad que tendré dentro de *50* años como *1* es a *4*?

A) 18 *B) 24* *C) 32* *D) 40* *E) 30*

12 En cada día, de lunes a viernes, gané *10* soles más que el día anterior. Lo que gané el lunes y lo que gané el viernes están en la misma razón que *5* y *9*. ¿Cuánto gané el miércoles?

A) S/.60 *B) 50* *C) 70* *D) 80* *E) N.A.*

13 Repartir *80000* cruzeiros entre Armando y Rosa de modo que ambas cantidades estén en la misma razón que *1* a *5*. (Armando recibe más que Rosa) ¿Cuánto le toca a Rosa?

A) 16000 *B) 12000* *C) 40000* *D) 3000* *E) N.A.*

14 La razón entre lo que tienen Roberto y Alicia es *1/5* (en el orden indicado). Si Roberto perdiera *5000* soles y Alicia ganara *10000* soles, la razón entre lo que ambos tendrían sería *1/12*. ¿Cuánto tiene Alicia?

A) 30000 *B) 20000* *C) 12000* *D) 18000* *E) N.A.*

15 La razón entre *2* números es como *3* y *8*. Si agregamos al menor *3/8* del mayor y al mayor le agregamos *2/3* del menor, la razón será ahora *3/5*. ¿Cuál es la diferencia entre ambos números?

A) 8 *B) 9* *C) 10* *D) 1* *E) 12*

16 Se tienen *3* objetos, los *2* primeros pesan juntos *50g*, el segundo y tercero pesan juntos *70g* y el primero y tercero pesan juntos *60g*. ¿Cuánto pesa el tercero?

A) 20G *B) 30* *C) 50* *D) 25* *E) 60*

17 En una fiesta habían inicialmente tantos hombres como tres veces el número de mujeres. Después que se retiran *8* parejas el número de hombres que quedan es igual a *5* veces el de mujeres. ¿Cuántos hombres habían?

A) 16 *B) 40* *C) 48* *D) 32* *E) 64*

18 El número *108* puede descomponerse en *4* sumandos de manera que sumando *5* al primero, restando *5* al segundo, multiplicando por *5* al tercero y dividiendo por *5* al cuarto, se obtiene siempre el mismo resultado. ¿Cuál es el promedio del mayor y menor?

A) 36 *B) 39* *C) 42* *D) 25* *E) 50*

19 Dos individuos pesan *179kg* y las *3/4* partes del peso de uno de ellos excede al del otro en *3kg*. ¿Cuánto pesa uno de ellos?

A) 75 *B) 85* *C) 65* *D) 60* *E) 95*

20 Ayer gané *S/.20* más que hoy. Si lo que gané hoy son los *5/6* de lo que gané ayer. ¿Cuánto gané hoy?

A) 80 *B) 100* *C) 150* *D) 120* *E) 90*

PRACTICA DE EJERCICIOS #4

01 La edad de Víctor es el doble de la de Pedro y hace *15* años la edad de Víctor era el triple de la de Pedro. ¿Cuál es la edad actual de Pedro?

A) 25 años *B) 40* *C) 45* *D) 28* *E) 30*

02 La edad de Gladys es *1/2* de los *2/3* de la edad de Norma. Si esta tiene *24* años, ¿cuántos años tendrá Gladys dentro de *4* años?

A) 8 años *B) 12* *C) 10* *D) 14* *E) 6*

03 En *1980* la edad de Jorge era *4* veces la edad de Ricardo; en *1988* la edad de Jorge fue el doble de la edad de Ricardo, ¿cuál fue la edad de Jorge en *1992*?

A) 50 años B) 48 C) 28 D) 54 E) 56

04 Un auto tiene ahora la mitad de años que tenía Luis cuando el auto era nuevo. Luis tiene ahora *36* años. ¿Cuántos años tiene el auto?

A) 12 B) 8 C) 16 D) 18 E) 14

05 Hace *6* años Gerardo era *4* veces mayor que David. Hallar la edad actual de Gerardo sabiendo que dentro de *4* años, la edad de éste sólo será *2* veces mayor que David.

A) 52 años B) 56 C) 60 D) 40 E) 46

06 Yo tengo el doble de la edad que tú tenías, cuando yo tenía la edad que tú tienes y cuando tú tengas la edad que yo tengo, mi edad será *30* años. ¿Qué edad tengo?

A) 12 B) 24 C) 18 D) 36 E) 54

07 Yo tengo el triple de la edad que tú tenías, cuando yo tenía la edad que tú tienes y cuando tengas la edad que tengo, mi edad será *40* años. ¿Qué edad tienes?

A) 30 B) 20 C) 40 D) 10 E) 60

08 Carla le dice a Miguel: "yo tengo los *5/3* de la edad que tú tenías, cuando yo tenía la edad que tú tienes y cuando tengas el doble de mi edad, mi edad será *44* años". Calcular la edad de Miguel.

A) 16 B) 20 C) 12 D) 44 E) 40

09 Pedro tiene su primer hijo a los *26* años y su segundo hijo a los *32* años. ¿Cuál será la edad de Pedro, cuando la suma de las edades de sus hijos sea *30*?

A) 40 B) 41 C) 42 D) 43 E) 44

10 Timo y su abuelo tenían en *1928* tantos años como indicaban las dos últimas cifras del año de su nacimiento. ¿Cuál era la edad del abuelo, cuando nació Timo?

A) 40 B) 60 C) 80 D) 48 E) 50

11 La edad de Katy en *1975* era tanto como la mitad de las dos últimas cifras del año de su nacimiento. ¿Qué edad tendrá en *1999*?

A) 48 B) 46 C) 49 D) 47 E) 52

12 Si Luis hubiera nacido en el año $\overline{19ba}$, en el año *2030* tendría $\overline{ba}$ años. Sin embargo nació en el año $\overline{19aa}$. ¿Cuántos años tendrá en el año *1999*?

A) 40 B) 42 C) 43 D) 45 E) 44

13 En *1977* la edad de Roxana era el inverso de las dos últimas cifras del año de su nacimiento. Lo mismo sucede con Pepe. Si la diferencia de sus edades es *45* años, y la edad de Pepe en *1977* también era la inversa de la de Roxana. ¿En qué año nació Pepe?

A) 1959 B) 1957 C) 1963 D) 1961 E) 1965

14 ¿A qué horas del día, las horas transcurridas son el cuádruple de las horas que faltan transcurrir?

A) 19h 20' B) 19h 12' C) 9h 12'
D) 7h 12' E) 9h 20'

15 ¿A qué horas del día, las horas transcurridas son la tercera parte de las horas que faltan transcurrir?

A) 6 p.m. B) 8 a.m. C) 4 p.m. D) 3 a.m. E) 6 a.m.

16 ¿A qué horas del día, las horas transcurridas son *2/3* de las que faltan transcurrir?

A) 7h 6min B) 7h 36min C) 9h 6min
D) 9h 36min E) 5h 36min

17 Son las *2h 36* minutos. ¿Qué ángulo forman las agujas de un reloj?

A) 138° B) 117° C) 72° D) 142° E) 146°

18 ¿Cuánto mide el ángulo que determinan las agujas de un reloj, a las *4h 40min*?

A) 120° B) 90° C) 100° D) 110° E) 105°

18 Entre las *15:00h* y *16:00h*, ¿a qué hora se superponen las agujas del reloj?

A) $3h\ 1\frac{4}{11}min$ B) $3h\ 2\frac{6}{11}min$ C) $3h\ 4\frac{1}{11}min$

D) $3h\ \frac{1}{11}min$ E) $3h\ \frac{9}{11}min$

20 Luego de las *18:00h*, ¿cuál es la hora más cercana en la que las manecillas del reloj, forman un ángulo recto?

A) $18h\ 2\frac{7}{11}min$ B) $18h\ 16\frac{4}{11}min$ C) $18h\ 9\frac{1}{11}min$

D) $18h\ 5\frac{9}{11}min$ E) $18h\ 9\frac{7}{11}min$

PRACTICA DE EJERCICIOS #5

01 Un tren de *80* metros de longitud con una velocidad de *36km/h* demora en pasar por una estación de *20* metros de longitud, un tiempo de:

A) 10seg *B) 5* *C) 20* *D) 30* *E) 15*

02 Un tren de ***100m*** de largo demora ***15*** segundos en cruzar un puente de medio kilómetro de longitud. ¿Cuál es la velocidad del tren?

A) 25m/s *B) 42* *C) 40* *D) 45* *E) 50*

03 Un tren viene raudo a ***108*** kilómetros por cada hora que transcurre. ¿En cuánto tiempo cruzará un puente de ***550*** metros de longitud sabiendo además que el largo del tren es de ***80*** metros?

A) 21seg *B) 18* *C) 23* *D) 25* *E) 28*

04 Un tren de ***85*** metros de largo viaja a una velocidad de ***60km/h***. Calcular la longitud de un puente si el referido tren lo cruza en ***30*** segundos.

A) 500m *B) 450* *C) 415* *D) 465* *E) 675*

05 Un tren de ***180*** metros de longitud demora ***18*** segundos en cruzar un puente de ***450*** metros de largo. En el instante que empieza a cruzar dicho puente pasa por el final del mismo un auto por el costado del riel a una velocidad de ***72km/h***. ¿En qué tiempo alcanzará el tren al auto?

A) 18seg *B) 25* *C) 28* *D) 30* *E) 32*

06 ¿A qué hora alcanzará un auto que sale de Lima a las ***11 a.m.*** a ***50km/h*** hacia Arequipa a otro auto que va en la misma dirección y que pasa por Lima a las ***5 a.m.*** a ***30km/h***?

A) 8 p.m. *B) 7* *C) 9* *D) 10* *E) 6*

07 Un hombre sale de su casa en automóvil a ***20 km/h***; luego de cierto tiempo de recorrido regresa a pie a su casa a ***5km/h***, llegando a ella después de ***5*** horas. ¿Cuántos ***km*** recorrió a pie?

A) 18 km *B) 15* *C) 25* *D) 10* *E) 20*

08 Dos móviles se dirigen uno al encuentro del otro. Inicialmente se encuentran separados ***195km*** y la velocidad de uno de ellos es ***35km/h***; si se encuentran luego de ***2,5h***, ¿cuál es la velocidad del otro?

A) 80km/h *B) 50* *C) 60* *D) 40* *E) 43*

09 Un móvil recorre ***200km*** a una velocidad constante. Si aumentara esta velocidad en ***10 km/h***, el viaje duraría una hora menos, ¿cuál es la velocidad del móvil?

A) 45km/h *B) 50* *C) 60* *D) 40* *E) 35*

10 Rubén se dirige de Huancayo a Lima, llegando en auto, en un tiempo de ***30*** horas. Si al regreso aumenta su velocidad en ***4km/h***, llegaría en ***6*** horas menos que a la ida. ¿Cuál es el espacio total recorrido?

A) 480km *B) 650* *C) 960* *D) 820* *E) N.A.*

11 Paul se va de ***A*** a ***B*** en 2 horas. Al volver, como él ha recorrido ***11m*** más por minuto, ha hecho el trayecto en ***105*** minutos. Hallar la distancia.

A) 9,24km *B) 11,5* *C) 11,58* *D) 10,75* *E) N.A.*

12 Julio demora en llegar a la Academia ***30*** minutos; si al regreso aumenta su velocidad en ***3m/min*** llegará ***10*** minutos antes que a la ida. ¿Qué espacio recorrió en total?

A) 360m *B) 180* *C) 720* *D) 540* *E) N.A.*

13 Viajando a ***100km/h*** un piloto llegaría a su destino a las ***19*** horas. Viajando a ***150km/h*** llegaría a las ***17*** horas. ¿Con qué velocidad debe viajar si desea llegar a las ***18*** horas?

A) 125km/h *B) 120* *C)130*
D) 135 *E) N.A.*

14 Yazmín, el primer día, fue al colegio a ***6km/h*** y llegó ***15*** minutos retrasada. El segundo día fue a ***12 km/h*** llegando ***15*** minutos adelantada. ¿A qué velocidad debe viajar para que saliendo a la misma hora llegue puntualmente?

A) 7km/h *B) 8* *C) 9* *D) 9 1/2* *E) 8 1/2*

15 Al comprar ***20*** naranjas, me sobran ***480*** soles, pero al adquirir ***24*** naranjas; me faltarían ***120*** soles. ¿Cuánto cuesta cada naranja?

A) S/.150 *B) 300* *c) 15* *D) 30* *E) 120*

16 Una institución va a rifar una casa, emitiendo para esto un determinado número de acciones. Si cada acción es vendida a ***100*** soles, pierde ***S/.98000***, pero si cada una es vendida a ***S/.120***, obtiene como ganancia ***S/.75000***. Hallar el precio de la casa.

A) 846000 *B) 963000* *C) 973000*
D) 863000 *E) 849000*

17 Hallar el mayor de tres números consecutivos, si sabemos que los ***4/5*** del mayor excede a los ***3/4*** del intermedio en una cantidad igual a la sexta parte del menor, disminuida en ***1/5***.

A) 8 *B) 9* *C) 10* *D) 11* *E) 12*

18 Un comerciante tenía una determinada suma de dinero; el primer año se gastó ***S/.100*** aumentando el resto con un tercio de este; al año siguiente volvió a gastar ***S/.100*** y aumentó la suma restante en un tercio de ella. El tercer año gastó de nuevo ***S/.100*** y después que hubo agregado su tercera parte, el capital llegó al doble del inicial. ¿Cuál era la cantidad inicial?

A) S/.14800 *B) 1270* *C) 1480*
D) 1615 *E) 1148*

19 En una fiesta habían **76** personas. Se notó que el número de hombres era igual a la raíz cuadrada del número de mujeres que habían y el número de niños era igual a la raíz cúbica del número de mujeres. ¿Cuántos hombres habían en total?

A) 8 *B) 6* *C) 10* *D) 12* *E) 14*

20 Si se forman filas de **7** niños sobran **5**, pero faltarían **7** niños para formar **3** filas más de **6** niños cada uno. ¿Cuántos niños son?

A) 43 *B) 47* *C) 49* *D) 50* *E) 48*

PRACTICA DE EJERCICIOS #6

01 En una partida de ajedrez hay **150** jugadores si cada uno jugó una sola vez, resultaron igual número de ganadores que de empatadores. ¿Cuántas partidas terminaron empatadas?

A) 28 *B) 25* *C) 30* *D) 36* *E) 32*

02 Un grupo de personas gastaron **120** soles, como **4** de ellas no pagan, cada una de las restantes deben abonar **5** soles más. ¿Cuál era el total de personas?

A) 10 *B) 11* *C) 12* *D) 13* *E) 14*

03 Un hombre compró un reloj y una cadena a igual precio. Pasado algún tiempo, volvió a comprar otro reloj y otra cadena, esta **90** soles más barata que la primera y aquel **60** soles más caro que el primero, resultando el precio del reloj el doble que el de la cadena. ¿Cuánto costó la segunda cadena?

A) S/.150 *B) 180* *C) 110* *D) 200* *E) 210*

04 ¿Qué hora es?, si la mitad del tiempo transcurrido desde las **8: 00** horas es igual a la tercera parte del tiempo que falta transcurrir para ser las **22: 00 h**.

A) 11:15 *B) 1:18* *C) 10:25* *D) 9:30* *E) 11:30*

05 En un terreno de forma rectángular el largo excede en **6** metros al ancho, si el ancho se duplica y el largo disminuye en **8** metros el área del terreno no varía. ¿Cuál es el perímetro del terreno?

A) 50cm *B) 51* *C) 52* *D) 54* *E) 55*

06 Compré el cuádruple de caballos que de vacas. Si hubiera comprado **5** caballos más y **5** vacas más, tendría triple número de caballos que de vacas. ¿Cuántos caballos y vacas compré?

A) 60 *B) 50* *C) 56* *D) 45* *E) 48*

07 Hallar la cantidad de dinero en el bolsillo de Pablo. Sabiendo que al sumar sus **3/8** y su quinta parte, dicha suma excede en **149** al doble de la diferencia entre **1/6** y **1/2** del número de soles.

A) 100 *B) 140* *C) 120* *D) 180* *E) 240*

08 En una fiesta se observa **8** mujeres sentadas y tantas parejas bailando como hombres sentados. En la siguiente pieza se observa que todas las mujeres se encuentran bailando y **8** hombres se encuentran sentados. ¿Cuántas personas hay en la fiesta?

A) 48 *B) 64* *C) 60* *D) 56* *E) 52*

09 En una reunión hay **5** hombres más que mujeres, luego llegaron un grupo de personas cuyo número es igual al de los hombres inicialmente presentes, de modo que en la reunión todos están en pareja; y hay **50** hombres en total. Hallar el número de mujeres inicialmente presentes.

A) 16 *B) 24* *C) 18* *D) 12* *E) 10*

10 En **2** habitaciones hay un total de **90** focos, de los cuales hay un cierto número de focos prendidos. Luego se prenden tantos focos como el número de focos prendidos excede al de los apagados; resultando el número de focos prendidos el doble de los apagados. ¿Cuántos estaban prendidos inicialmente?

A) 50 *B) 56* *C) 48* *D) 42* *E) 24*

11 Gerson tenía **S/.120** y Manuel **S/.90**. Después que Gerson le dio a Manuel cierta suma, Manuel tiene **11/10** de lo que le queda a Gerson. ¿Cuánto le dió Gerson a Manuel?

A) S/.10 *B) 20* *C) 25* *D) 15* *E) 12*

12 Se ha pagado una deuda de **S/.265** con monedas de **S/.5.00** y **S/.2.00**. El número de monedas de **S/.2.00** es mayor que el de **S/.5.00** en **17** monedas. ¿Cuánto suman las monedas de **S/.5.00** y de **S/.2.00**?

A) 83 *B) 59* *C) 72* *D) 80* *E) 78*

13 El perímetro de un rectángulo es de **84m**, si el largo excede en **8m** al ancho. ¿Cuál es el área del rectángulo?

A) 400m² *B) 420* *C) 240* *D) 360* *E) 425*

14 Isabel le pregunta la hora a Karen y ésta le responde: "El duplo de las horas transcurridas es igual al cuádruplo de las que faltan por transcurrir en este día". ¿Qué hora es?

A) 16:00 *B) 16:20* *C) 20:00* *D) 14:00* *E) 18:30*

(15) Federico compra la mitad de un rollo de alambre menos *12* metros, Fernando compra un tercio del mismo rollo más *4* metros, con lo cual recibe *8* metros menos que Federico. ¿Cuántos metros compró Federico?

A) 72m B) 60 C) 64 D) 70 E) 80

(16) Ayer gané *20* soles más que hoy. Si lo que gané hoy son los *5/6* de lo que gané ayer. ¿Cuánto gané hoy?

A) 100 B) 120 C) 80 D) 110 E) 90

(17) Un libro cuesta *500* soles menos que un televisor; si a la cuarta parte del precio del libro se le aumenta *60* soles, se obtiene la quinta parte del precio del televisor. ¿Cuál es el precio del televisor?

A) 1200 B) 1250 C) 1300 D) 1500 E) 1450

(18) A una fiesta donde habían *40* hombres y *30* mujeres, llegaron cierto número de parejas, de modo que los *3/5* del número de hombres es igual a *1/3* de las personas presentes. ¿Cuál es el número de parejas presentes?

A) 10 B) 20 C) 30 D) 40 E) 50

(19) Luis André tiene *90* bolitas y regaló *8* veces tantas bolitas como las que no regaló. Calcular la quinta parte de las bolitas que le quedan.

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 6

(20) Al dar una práctica de Matemáticas: "Observé que fallé tantas preguntas como acerté, pero no contesté tantas preguntas como puntaje saqué". Las prácticas tienen *20* preguntas que se califican así:

- *10* puntos si está bien respondida
- *– 2* puntos si está mal respondida
- *0* puntos no contestada

¿Qué puntaje alcancé?

A) 8ptos B) 10 C) 16 D) 12 E)20

PRIMERA PRACTICA DIRIGIDA

(01) En una granja, por cada gallina hay tres pavos y por cada pavo hay *4* patos. Si en total se han contado *160* patas de animales, ¿cuántos pavos hay?

A) 14 B) 10 C) 15 D) 20 E) 8

(02) Un caminante ha recorrido *1 000* metros unas veces avanzando otras retrocediendo. Si solo ha avanzado *350* metros, ¿cuántos metros recorrio retrocediendo?

A) S/.120 B) S/.180 C) S/.110 D) S/.140 E) S/.220

(03) Dos depósitos contienen *2587* y *1850* litros de agua y con una bomba se traslada del primero al segundo *4* litros por segundo. ¿Después de cuánto tiempo uno contendrá el doble de litros que el otro?

A) 4 min 37 s B) 3min 21 s C) 4 min 38 s
D) 5 min 24 s E) 3 min 42 s

(04) Un maestro y su ayudante trabajan juntos. El primero gana *25* soles por día más que el segundo. Si después de trabajar cada uno el mismo número de días, el primero recibe *1 050* soles y el segundo, *875* soles. ¿Cuál es el jornal del ayudante?

A) S/.120 B) S/.115 C) S/.152 D) S/.125 E) S/.130

(05) Tres jugadores ***A, B*** y ***C*** convienen en que el perdedor de cada partida; duplicará el dinero de los otros dos. Pierden una partida cada uno en orden alfabético y al final cada uno se queda con *40* soles. ¿Con cuánto dinero empezo cada uno?

A) 65 ; 35 y 20 soles. B) 100 ; 30 y 18 soles.
C) 80 ; 45 y 23 soles. D) 96 ; 30 y 14 soles.
E) 41 ; 23 y 16 soles.

(06) La regla de juego de cierta competencia de azar es que el perdedor de cada partida duplique el dinero de los otros participantes y además les dar ***S/.10***. Si hay *3* personas que estan jugando y cada uno pierde una partida y al final tienen cada uno ***S/.70***, halle el dinero inicial del participante que tuvo mayor cantidad.

A) 300m B) 425m C) 325m D) 280 m E) 345 m

(07) Maribel va al cine con sus primas y al querer sacar entradas para mezanine de *30* soles cada una, observa que le falta dinero para *3* de ellas, por tal motivo tiene que sacar entradas de *15* soles cada una, entrando todas al cine y sobrándole aún *30* soles para las gaseosas. ¿Cuántas primas fueron al cine con Maribel?

A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

(08) Si compro *2* revistas gastaria *2* soles más que si comprará *3* periódicos. Pero si comprará *5* periódicos gastaría *2* soles más que si comprará *2* revistas. ¿Cuánto cuesta cada periódico?

A) S/. 4 B) S/. 3 C) S/. 5 D) S/. 1,5 E) S/. 2

(09) Entre pollos, patos y pavos un granjero tiene en total *75* aves. Si tuviera *12* pavos más, *4* patos más y 7 pollos menos, tendría la misma cantidad de aves de cada especie. El número de pollos que tiene es:

A) 42 *B) 33* *C) 39* *D) 35* *E) 40*

10 Si al doble de la edad que tendré dentro de 2 años, le resto el doble de la edad que tenía hace 2 años, se obtiene la edad que tengo. ¿Qué edad tendré dentro de 2 años?

A) 12 años *B) 14 años* *C) 20 años*
D) 15 años *E) 10 años*

11 Una persona tiene, en ***1988***, tantos años como el producto de las **2** últimas cifras del año de su nacimiento. ¿Cuál es la suma de cifras de la edad que tenía en ***1980***?

A) 6 *B) 4* *C) 5* *D) 7* *E) 8*

12 Los *5/7* de la edad de una persona menos ***4*** años, es igual a la edad que tenía hace ***12*** años. ¿Cuál era su edad hace ***12*** años?

A) 14 años *B) 18 años* *C) 16 años*
D) 20 años *E) 22 años*

13 Laura al ser interrogada por su edad responde: Si al año en que cumplí ***14*** años le suman el año en que cumpliré ***23*** años y, si a este resultado le restan la suma del año en que nací con el año actual, obtendrán ***19***. ¿Cuál es la edad de Laura?

A) 18 años *B) 23 años* *C) 19 años*
D) 16 años *E) 22 años*

14 Alfred nació en el presente siglo y en este año cumplirá tantos años como la suma de cifras, del año en que nació y el año actual. ¿Cuál será la edad actual de Arturo, si este año cumple tanto como la quinta parte del producto de cifras del año de nacimiento de Alfredo?

OBSERVACIÓN: Considerar año actual: ***1995***

A) 27 años *B) 25 años* *C) 23 años*
D) 19 años *E) 30 años*

15 La edad que tenía hace ***"a"*** años es, a lo que tendré dentro de ***"a"*** años, como *2* es a ***3***. ¿Qué edad tendré dentro de ***"2a"*** años?

A) 5a años *B) 6a años* *C) 7a años*
D) 8a años *E) 9a años*

16 Le preguntan a un individuo por su edad y el contesta: "Mi edad, más dos veces mi edad, más tres veces mi edad y asi sucesivamente hasta tantas veces mi edad como la edad que tengo, suman en total ***4200***". Hallar la edad de dicho individuo.

A) 20 años *B) 25 años* *C) 16 años*
D) 24 años *E) 18 años*

17 Hace ***5*** años, la edad de un padre fue cuatro veces la edad de su hijo; y dentro de ***5*** años será solamente el doble de la de su hijo. ¿Qué edad tendrá el padre, cuando el hijo tenga los años que tuvo el padre cuando nació el hijo?

A) 40 años *B) 50 años* *C) 30 años*
D) 45 años *E) 35 años*

18 Hace ***10*** años tenía la mitad de la edad que tendré dentro de ***8*** años. Si tú naciste cuando yo tenía ***15*** años, ¿cuál sera la suma de nuestras edades cuando yo tenga el doble de la edad que tuve hace ***11*** años?

A) 53 *B) 62* *C) 36* *D) 57* *E) 72*

19 Dentro de ***10*** años tú tendrás la edad que yo tenía cuando tú tenías la edad que yo tuve hace ***34*** años. ¿Cuántos años tengo si dentro de ***20*** años la suma de nuestras edades será ***98***?

A) 32 años *B) 38 años* *C) 40 años*
D) 43 años *E) 37 años*

20 La rapidez respectiva de dos móviles está en la relación de ***3*** es a ***4***. ¿Dentro de cuánto tiempo estarán separados una distancia de ***60 Km***, si partieron juntos en el mismo sentido, sabiendo, además, que la diferencia de la rapidez de ambos es de ***10 km/h***?

A) 4h *B) 7h* *C) 5h* *D) 8h* *E) 6h*

21 Un ciclista viaja, desde **A** hacia **B**, a ***80 km/h*** y retorna por el mismo camino a ***70 km/h***. Si hace el recorrido, en forma continua, y en un tiempo total de ***6*** horas; determine la distancia de **A** hasta **B**.

A) 214 km *B) 218 km* *C) 220 km*
D) 224 km *E) 216 km*

22 Un carro sale, de ***A*** hacia ***B***, a ***80 km/h*** y regresa a ***50 km/h*** después de ***16*** horas. Si el carro se detuvo en ***B*** por ***2*** horas y luego se detuvo ***1*** hora en el camino de regreso, determine la distancia ***AB***.

A) 450 km *B) 600 km* *C) 400 km*
D) 550 km *E) 480 km*

23 Juana se dirige , desde su casa a la academia , en bicicleta, empleando un tiempo de ***30*** minutos; para volver, aumenta su rapidez inicial en ***4 m/min***, demorándose esta vez ***6*** minutos minutos menos. ¿Cuál es el espacio que recorrió en total?

A) 960 m *B) 860 m* *C) 880 m* *D) 920 m* *E) 940 m*

24 Para ir de ***A*** a ***B***, un movil emplea ***20*** horas, si quisiera hacerlo en ***25*** horas tendría que disminuir su rapidez en ***8 Km/h***. ¿Cuánto mide el tramo ***AB***?

A) 720 km *B) 820 km* *C) 400 km*
D) 600 km *E) 800 km*

25 Al ir de mi casa a la academia me doy cuenta que si voy a ***40 km/h*** demoro ***20*** minutos más que si fuera a ***60 km/h***. ¿Cuál es la distancia entre mi casa y la academia?

A) 42 km ***B) 40 km*** ***C) 52 km*** ***D) 48 km*** ***E) 47 km***

26 Un motociclista observa que ***1/5*** de lo que ha recorrido equivale a los ***3/5*** de lo que falta recorrer. ¿Cuántas horas habrá empleado haste el momento, si todo el viaje lo hace en ***12*** horas?

A) 8 ***B) 9*** ***C) 10*** ***D) 11*** ***E) 12***

27 Dos moviles distan ***200 km***, salen al encuentro, desde dos puntos ***A*** y ***B***, con una rapidez de ***60 km/h*** y ***40 km/h***, respectivamente. ¿En qué tiempo se encontrarán y a que distancia de ***A***?

A) 4 h y ***30 km*** ***B) 1h*** y ***1km*** ***C) 6 h*** y ***100 km***
D) 2 h y ***120 km*** ***E) 10 h*** y ***120 km***

28 Si el duplo de las horas transcurridas en un día es igual al cuádruplo de las que faltan para terminar el día; ¿qué hora será dentro de ***4*** horas?

A) 8:00 p.m. ***B) 6:00 p.m.*** ***C) 7:20 p.m.***
D) 4:00 p.m. ***E) 9:00 p.m.***

29 ¿Qué hora será dentro de ***5 1/4 h***, si se sabe que en estos momentos el tiempo transcurrido es excedido en ***5*** horas por lo que falta transcurrir del día?

A) 2:.20 p.m. ***B) 1:45 p.m.*** ***C) 3:25 p.m.***
D) 2:45 p.m. ***E) 3:20 p.m.***

30 Son más de las ***2***, sin ser las ***3*** de esta madrugada; pero dentro de ***40*** minutos faltará, para las ***4***, el mismo tiempo que faltaba desde la ***1*** hasta hace ***40*** minutos. ¿Qué ángulo forman las agujas en este preciso instante?

A) 85° ***B) 120°*** ***C) 95°*** ***D) 100°*** ***E) 105°***

31 Son más de las seis, sin ser las ocho de esta mañana, y hace diez minutos los minutos que habían transcurrido desde las seis eran iguales a ***1/9*** del tiempo que faltará transcurrir hasta las ocho, dentro de diez minutos. ¿Qué hora es?

A) 6:30 a.m. ***B) 7:20 a.m.*** ***C) 5:45 a.m.***
D) 8:10 a.m. ***E) 6:20 a.m.***

32 Son más de las ***4***, pero aún no son las ***6*** de la tarde. Si el tiempo que había transcurrido, desde las ***4*** hasta hace ***15*** minutos, es igual a ***1/5*** del tiempo que faltará transcurrir hasta las ***6***, pero dentro de ***15*** minutos. ¿Qué hora es en este instante?

A) 4:20 p.m. ***B) 4:30 p.m.*** ***C) 5:10 p.m.***
D) 3:20 p.m. ***E) 3:40 p.m.***

33 Si fuera ***3*** horas más tarde de lo que es, faltaría para acabar el día los ***5/7*** de lo que faltaría si es que fuera ***3*** horas más temprano; ¿qué hora es?

A) 7:00 a.m. ***B) 6:20 a.m.*** ***C) 6:00 a.m.***
D) 8:00 a.m. ***E) 7:14 a.m.***

34 ¿Qué hora es?; para saberlo, basta con sumar la mitad del tiempo que falta para las doce del mediodia, más los ***2/3*** del tiempo transcurrido desde las doce de la noche.

A) 7:12 a.m. ***B) 5:30 a.m.*** ***C) 9:10 a.m.***
D) 10:30 a.m. ***E) 7:20 a.m.***

35 Un campanario señala las horas con igual número de campanadas. Si para indicar las ***5:00 a.m.*** demora ***6*** segundos, ¿cuánto demorara para indicar las ***12 m.***?

A) 15 s ***B) 12 s*** ***C) 33/2 s*** ***D) 14 s*** ***E) 16 s***

36 Sabiendo que ***75*** bueyes se han comido en ***12*** días la hierba de un prado de ***60*** áreas y que ***81*** bueyes se han comido la de un prado de ***72*** áreas en ***15*** días. Se pide, ¿cuántos bueyes serán necesarios para comer en ***18*** días la hierba de un prado de ***96*** áreas? Se supone que en los tres prados la hierba está a la misma altura y que continúa creciendo uniformemente.

A) 90 ***B) 100*** ***C) 120*** ***D) 102*** ***E) 98***

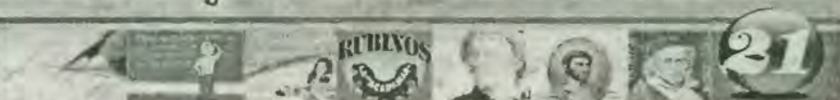
37 Un perrito parte de un punto ***"A"*** a otro punto ***"B"*** y simultáneamente dos peatones parten del punto ***"B"*** en sentidos opuestos. El perrito encuentra a uno de ellos en el punto ***"M"*** y al otro en el punto ***"N"***; luego, se pide calcular la distancia que hay entre ***"A"*** y ***"B"***, sabiendo que los dos peatones tienen la misma rapidez y que la rapidez del perrito es el cuádruplo de la de los peatones, sabiendo además que la distancia entre ***"M"*** y ***"N"*** es ***160m***.

A) 200m. ***B) 300m.*** ***C) 400m.*** ***D) 350m.*** ***E) 150m.***

CLAVES DE LA PRIMERA PRACTICA DIRIGIDA				
01) C	02) C	03) A	04) D	05) A
06) A	07) B	08) E	09) D	10) E
11) D	12) C	13) A	14) A	15) C
16) A	17) C	18) C	19) C	20) E
21) D	22) C	23) A	24) E	25) B
26) B	27) D	28) A	29) D	30) E
31) E	32) B	33) C	34) A	35) C



LOGICA y TEORIA DE CONJUNTOS



OBJETIVOS :

*Conocer y comprender las nociones básicas del análisis lógico del lenguaje, y en concreto del análisis mediante sistemas formales;

* Conocer y comprender las herramientas que proporciona la lógica proposicional para ese análisis del lenguaje, y dominar el vocabulario técnico conectado con ellas;

* Establecer los conceptos de proposición, argumento, así como estudiar el valor de verdad del primero y determinar la validez del último.

*Manejar el concepto de conjunto, así como sus propiedades.

*Identificar los elementos que pertenecen y los que no pertenecen a un conjunto

* Interpretar correctamente la notación simbólica en la definición de conjuntos.

* Representar conjuntos en Diagramas de Venn

* Realizar operaciones entre conjuntos (unión, intersección, diferencia y diferencia simétrica)

INTRODUCCIÓN :

En nuestro quehacer diario , constantemente hacemos deducciones , esto significa que cada conclusión que establecemos se deduce de «algo» ; este algo o punto de partida se llama «premisa» . Por ejemplo , si exponemos un trozo de hielo al calor, se deduce que el hielo se derrite , o cuando un campesino ve una densa nube en el cielo , deduce que va a llover , o también de «todos los mamíferos son vertebrados» se puede concluir en que «algunos seres vertebrados son mamíferos». De esta manera, se puede afirmar que constantemente existe un criterio lógico para el análisis de situaciones que permitirán establecer una noción científica de la realidad.

«La Logica , justamente , es una ciencia que estudia los métodos o procedimientos que aplican definiciones y leyes o reglas con el propósito de determinar la validez de las inferencias , razonamientos o argumentos».

La Lógica , como conocimiento orgánico y sistemático , aparece por primera vez con Aristóteles ***(S. IV A. C.)*** quien la define como un «instrumento» que ayuda al hombre a razonar correctamente mejorando la investigación de la naturaleza («Organón»). Su objetivo quedó definido como el análisis formal de los razonamientos.

LA LÓGICA FORMAL

Es una ciencia que busca hallar los esquemas universales y válidos en todo momento , según los cuales suele y debe pensar el hombre para alcanzar la verdad . Esto quiere decir que , el objeto de estudio de la lógica formal es investigar la estructura o forma de los conceptos , juicios y raciocinios , sus relaciones de validez , métodos y principios que la determinan. Actualmente , la lógica formal se ha tornado en Lógica Matemática (o simbólica) cuyo objetivo es demostrar la «validez» de los argumentos simbólicos o formalizados («La Lógica es la ciencia de la inferencia formalmente válida»).

INFERENCIA Y SU VALIDEZ

Es una estructura de proposiciones donde a partir de una o más de ellas llamadas ***«Premisa(s)»*** se obtiene otra proposición que se llama ***«Conclusión»;*** serán válidas cuando las premisas impliquen a la conclusión ; cuando existe relación coherente entre sus componentes , es decir , la conclusión se deduce lógicamente de las premisas.

La ***«IMPLICACIÓN»*** significa lo siguiente :

*De premisas verdaderas , se deduce necesariamente una conclusión verdadera.

*De premisas falsas , se deduce necesariamente una conclusión o bien verdadera o bien falsa.

Las inferencias pueden clasificarse como :

I) INFERENCIAS INDUCTIVAS :

Son aquellas donde la conclusión es probable en relación a las premisas . Para obtener una inferencia inductiva , se parte de premisas particulares y luego se establece una conclusión general. Estas inferencias, desde el punto de vista de la Lógica , no son válidas ni inválidas.

EJEMPLOS :

* Yhony es psicólogo y ayuda a las personas .

* Erica es psicóloga y ayuda a las personas .

* Alan es psicólogo y ayuda a las personas

Probablemente , todos los psicólogos ayuden a las personas .

II) INFERENCIAS DEDUCTIVAS :

Son aquellas cuya conclusión es necesaria en relación a las premisas . Para obtener una inferencia deductiva , se parte de premisas generales obteniéndose una conclusión particular.

EJEMPLOS :

* *Todos los humanos son mortales.*
* *Alan es un ser humano , Alan es mortal.*

A su vez , estas inferencias se clasifican como :

A) INFERENCIAS INMEDIATAS :

Tienen una premisa y una conclusion.

B) INFERENCIAS MEDIATAS :

Tienen dos o más premisas y una conclusión.

LA LÓGICA PROPOSICIONAL

Es una parte de la Lógica Matemática , llamada también «Lógica de las proposiciones sin analizar», trata a cada proposición como un todo en su conexión lógica con otras proposiciones . Esta lógica desarrolla el cálculo de proposiciones que se orienta a analizar la corrección de los razonamientos mediante procedimientos decisorios como las tablas de verdad y el método de reducción al absurdo.

PROPOSICIONES :

Las «proposiciones» son expresiones del lenguaje informativo que tienen la cualidad de ser verdaderas ***(V)*** o falsas ***(F)***, es decir , tienen valor veritativo.

EJEMPLOS:

* La licuadora es un artefacto eléctrico.
* Fujimori nació en el Perú.
* $4 + 3 = 7$
* Las aves son acuáticas.

Es necesario resaltar que , lo que interesa fundamentalmente de las proposiciones es su sentido de verdad o falsedad , dado que enunciados distintos pueden expresar una misma proposición.

EJEMPLOS :

* *Dante y Sergio son hermanos.*
* *Dante es hermano de Sergio.*
* *Sergio es hermano de Dante.*

Además , se debe tener en cuenta que expresiones en diferentes idiomas , también pueden presentar una misma proposición.

EJEMPLO :

* *Mary y Ricky son estudiantes.*
* *Mary and Ricky are students.*

Las proposiciones pueden clasificarse en : Proposiciones Simples o Atómicas (Predicativas y Relacionales) y Proposiciones Compuestas o Moleculares (Conjuntivas , Disyuntivas , Bicondicionales , Condicionales y Negativas)

EL CONCEPTO DE LA VERDAD

La definición clásica sobre la «verdad» pertenece a Aristóteles , quien en su libro «Metafísica» escribe : «Decir de lo que es que no es , o de lo que no es que es , es falso ; mientras que decir que lo que es , es o de lo que no es que , no es , no es verdadero» . En general , lo anterior alude a la teoría de verdad por correspondencia establecido por el estagirita.

Más adelante, quien desarrolló esta tarea en el presente fue A. Tarsky, estableciendo, entre otras cosas , un paradigma muy sencillo para el empleo de la palabra «verdad» («falsedad»): «La nieve es blanca» es verdadera si y solo si «la nieve es blanca».

Es decir , la verdad y falsedad solo se expresan en el metalenguaje de las oraciones a las que se aplican (No debe ocultarse que la noción de verdad es de las más discutidas para la lógica).

LA VERDAD PARA LAS CIENCIAS FÁCTICAS :

* Es una categoría que se define como correspondencia con la realidad.
* Es producto de un proceso : reflejo de la realidad en el cerebro del hombre , y su posterior verificación en la misma realidad.
* Es la correspondencia íntima entre la realidad y su reflejo en nuestro cerebro.

LA VERDAD PARA LAS CIENCIAS FORMALES :

Alfred Tarsky define la verdad para las ciencias formales (Lógica y Matemática) señalando : Formalmente , un enunciado es verdad, cuando se dice que es de tal manera determinada , siendo de tal manera determinada (repetir las cosas tal como son).

CARACTERÍSTICAS DE LA VERDAD

* La verdad no es lo mismo que la afirmación (la verdad se puede afirmar o negar).
* La falsedad no es lo mismo que la negación (la falsedad se puede afirmar o negar).

* Solo la proposición , el enunciado puede ser verdadero o falso ; jamás verdadero y falso, pues estaría contra el principio de no contradicción.

LA VALIDEZ

Es el producto de un proceso racional , caracterizado por la aplicación de un conjunto determinado de reglas : si se respetan todas ellas el razonamiento (inferencia) es válido; si se viola una de ellas , se inválida .

CARACTERÍSTICAS DE LA VALIDEZ :

* Todo razonamiento (inferencia) es válido o inválido.

* Todo razonamiento es correcto o incorrecto : Tiene que ver con la estructura del razonamiento:

CORRECTO: Si es que está bien estructurado.

INCORRECTO: Si está mal estructurado.

* No es lo mismo correcto que válido , ni incorrecto que inválido.

* La verdad o falsedad de las proposiciones que forman un razonamiento , no tiene nada que ver con la validez o invalidez del mismo.

* Un razonamiento incorrecto es necesariamente inválido.

CLASES DE VERDAD

La lógica clasifica la verdad de manera particular:

1) VERDADES EMPÍRICAS :

(Llamadas también: fácticas, objetivas aposteriori , sintéticas , etc.) Aquellas que se toman y comprueban en la realidad.

* ***A POSTERIORI :*** Se dan después de la experiencia, luego de haber practicado , luego de haber conocido.

* ***SINTÉTICAS :*** Se comprueban en la realidad, en la experiencia.

Las Verdades Empíricas se pueden clasificar en:

A)RELATIVÁS :

Es producto de la suma , la relación de varias verdades particulares.

EJEMPLO :

- Los mamíferos son cordados.
- Todos los pianistas son músicos.
- Ningún insecto es vivíparo.
- Algunos limeños son médicos.

B) ABSOLUTAS :

Se definen como percepción inmediata , se nos dan inmediatamente, directamente a los sentidos.

EJEMPLO:

- Puerta de madera.
- Olor agradable.
- Gato pequeño.
- Pared blanca.

2) VERDADES LÓGICAS :

(Llamada también : formales , racionales, abstractas, a priori , analíticas , etc.) Aquellas que sólo se obtienen y comprueban racionalmente , a nivel mental.

* ***APRIORI :*** Se dan antes de la experiencia, antes de haber conocido.

****ANALITICAS :*** Sólo se comprueban a nivel racional, a nivel mental.

Se pueden clasificar en:

A) INTRÍNSECAS:

Se aceptan como verdad, no se discuten , tienen carácter axiomático.

EJEMPLO:

- El triángulo tiene tres lados.
- $2 + 4 = 6$
- La suma de los ángulos internos de un triángulo , da $180°$.
- El todo es mayor que la parte.

B) DERIVADAS :

Producto de la relación entre proposiciones . Son razonamientos.

EJEMPLOS :

- Los animales son seres vivos , el león es un animal . De ahí que el león es un ser vivo.
- Todo número par es divisible entre **2** ; **6** es divisible entre **2** . Luego **6** es un número par.
- Los caballos vuelan , los unicornios son caballos. De ahí que los unicornios vuelan.

FUNCIONES BÁSICAS DEL LENGUAJE:

Lenguaje → Materialización del Pensamiento.

1) FUNCIÓN INFORMATIVA REFERENCIAL O DESCRIPTIVA :

Es aquella que se encarga de comunicar información que proviene de la realidad que nos rodea , hace referencia o describe al Mundo Objetivo , mediante el uso de oraciones verdaderas o falsas (proposiciones). Es el lenguaje utilizado por las ciencias:

EJEMPLOS :

- La lógica es una ciencia abstracta.
- Todo mamífero es un ser vivo.

- Trujillo es la capital de la primavera.
- Me preparo en «*MARTE*».
- Francia es un país latino.

2) FUNCIÓN EXPRESIVA:

Se encarga de comunicar acontecimientos que ocurren en el Mundo Subjetivo , es decir vivencias.

EJEMPLOS :

* La vida es hermosa y vale la pena vivirla.
* ¡Oh más dura que el mármol , Galatea!.
* Dios mío , estoy llorando el ser que vivo.
* Me gusta el vestido que compraste.
* Te amo , ven a mis brazos.

3) FUNCIÓN DIRECTIVA . APELATIVA O ACTITUDINAL :

Se encarga de modificar , inducir o impedir la realización de acción determinada utilizando para ello oraciones exclamativas, clasificándose en órdenes, pedidos, sugerencias, preguntas, consejos, mandatos, súplicas, insinuaciones , etc.

EJEMPLOS :

* *Siéntate y escucha lo que to digo.*
* *Prohibido arrojar basura bajo pena de arresto.*
* *¿Cuándo será el examen de la UNI ?.*
* *«Más vale ser cabeza de ratón que cola de león»*

EL LENGUAJE LÓGICO

Es un lenguaje formal , porque es sintáctico , es decir, es una estructura formal . Está constituido por conectivos o constante lógicas (enlaces lógicos).

EJEMPLO:

Si.......entonces........ : ....si y solo si................... ; etc.

Es un lenguaje simbólico artificial , convencional , escrito , constituido por un conjunto de signos cuyo objetivo principal es la precisión y la operatividad .

El lenguaje simbólico es todo un cálculo compuesto por signos primitivos, reglas de formacion y reglas de transformación.

EJEMPLOS :

* Si es invierno y llueve , entonces hace frío.

Si ***(p* y *q)*** *entonces* ***r***

Donde : ***p , q*** y ***r*** son variables proposicionales

Si *(... y ...)* entonces ...... son consonantes logicas.

Por lo tanto: $(p \wedge q) \rightarrow r$ es una fórmula lógica , exacta y operativa.

El lenguaje Lógico es unívoco , porque a cada término le corresponde un solo significado.

LOGICA MATEMÁTICA

Es llamada también lógica de las proposiciones sin analizar , tiene por objeto de estudio a las proposiciones y su formalización con la finalidad de determinar sus valores lógicos.

ENUNCIADO:

es cualquier frase u oración que expresa una idea .

PROPOSICIÓN :

Se denomina así a las expresiones linguísticas de las cuales se puede afirmar que son verdaderas o falsas.

CARACTERÍSTICAS :

* Toda proposisión es una oración aseverativa , pero no toda oración es una proposición.
* Toda proposición o es verdadera *(V)* o falsa *(F)* (no puede ser ambas al mismo tiempo , ni ninguna)
* Dentro del razonamiento la proposición puede ser premisa o conclusión.
* La proposición verdadera o falsa se puede afirmar o negar.
* Los enunciados matemáticos tienen el rango de proposición.

EJEMPLO :

- Los futbolistas son deportistas..........................*(V)*
- Todo africano es asiático ....*(F)*
- La botánica estudia a las plantas.........................*(V)*

ENUNCIADOS NO PROPOSICIONALES

No toda expresión es proposición y hay que considerarla para evitar errores .
entre los enunciados que no son consideradas proposiciones tenemos :

I) ORACIONES DEL TIPO :

A) DESIDERATIVAS :

Expresan deseos , anhelos.

EJEMPLO :

!cuanto daría por tenerlo ¡

B)IMPERATIVAS:

Expresan exhortación , mandato o prohibición.

EJEMPLO :

te prohíbo que salgas con él.

C)INTERROGATIVAS :

son aquellas en las cuales se pregunta algo .

EJEMPLO :

¿has pensado que carrera vas a seguir ?

D)EXCLAMATIVAS :

Expresan sorpresa o admiración que nos causa una cosa o hecho.

EJEMPLO :

¿y dale **CIENCIANO** *?*

II) SEUDO PROPOSICIONES :

son expresiones aseverativas de las cuales no tiene sentido decir si son verdaderas o falsas

EJEMPLO :

mi perro está enamorado

III) DESCRIPCIÓN DEFINIDA :

son expresiones que se pueden reemplazar por un nombre propio.

EJEMPLO :

«el cantor de américa»

IV) PARADOJAS :

son expresiones del lenguaje , de tipo contradictorio o sin sentido son ***V*** y ***F*** a la vez.

EJEMPLO :

« yo siempro miento »

V) FRASES:

«Dádme un punto de apoyo y moveré el mundo»

VI) POEMAS:

«Hay golpes en la vida tan fuertes yo no sé
golpes como el odio de Dios ....»

VII) REFRANES:

«Camarón que se duerme , se lo lleva la corriente »

VIII)FUNCIONES PROPOSICIONALES

son oraciones aseverativas que no son ***V*** ni ***F*** porque en ellas figura una o más letras no interpretadas .

EJEMPLO :

$x+a=11$

ENUNCIADOS ABIERTOS :

son enunciados que pueden tomar cualquiera de los dos valores de verdad.

EJEMPLO :

*Si $P(x): x>6$ se cumple que :

$P(9)=9>6$............................***es verdadero*** ;

$P(2)=2>6$............................***es falso***

el valor de verdad de $P(x)$ depende del valor de x , también , se le conoce como función proposicional.

CLASES DE PROPOSICIONES

Las proposiciones se clasifican básicamente en : simples y compuestas.

PROPOSICIONES SIMPLES (ATÓMICAS)

Son siempre afirmativas y no se pueden descomponer. Pueden ser :

A) PREDICATIVAS :

Aquellas que presentan , en su estructura, sólo un sujeto y un solo predicado (el sujeto puede hallarse tácito).

EJEMPLO :

* Los huancaínos son alegres.
* Las ballenas son mamíferos.
* Camina.

B) RELACIONALES (COMPARATIVAS):

Presentan en su estructura dos sujetos o más, que se comparan entre sí con una sola característica , a partir de los llamados términos relacionales : más que , menos que , parecido a , etc.

EJEMPLO :

* Jonás es más leal que Judas.
* La Trigonometría es más compleja que la Geometría.

COMPUESTAS (MOLECULARES , COLIGATIVAS):

Está constituída por más de una proposición simple unida por las conectivas «***y***» , «***o***» , «***entonces***» , «***si y sólo si***» o la negación (***no***). Son las siguientes:

A) NEGATIVAS :

Son las que presentan la negación (no , no es cierto que , es falso que , es mentira que , no ocurre que , etc.)

EJEMPLO:

* Rocío no es menor de edad.
* Es falso que el gallo y la gallina sean acuáticos.

B) CONJUNTIVAS :

Presentan como conectiva a la «***y***». La conjunción puede hallarse tácita, o puede ser reemplazada por sus sinónimos : Como , pero , a la vez , además ,

incluso , también , aunque , a pesar , sin embargo , ni , etc.

EJEMPLO:

* Nelly y Roger son médicos
* Ruby es matemática también literata.

C) DISYUNTIVAS :

Presentan como conectiva a la *«o»*; *«u»*; *«o ... o...»*, son de dos tipos:

INCLUSIVA O DÉBIL :

Cuando de las alternativas que se proponen se cumplen todas ellas , ya sea al mismo tiempo o de manera alternada.

EJEMPLO :

* Jennifer es cantante o abogada .
* La mesa es un mueble o es de madera .

EXCLUSIVA O FUERTE :

(«o»; «u»): Cuando de las alternativas que se proponen se cumple solo una y se excluye la otra.

EJEMPLO :

* César Vallejo murió en Lima o en París.
* o corremos o caminamos.

D) CONDICIONAL (IMPLICATIVA)

(«o ... o...») : Presentan como conectiva la palabra «Entonces» o sus equivalentes: luego , por lo tanto , en conclusión , en consecuencia , de ahí , etc. Esta proposición indica una relación de causa – efecto , (antecedente – consecuente) La condicional se puede hallar tácita, sobrentendida.

Su esquema básico es:

Si .... entonces ....
Antecendente (A) — *Consecuente (C)*

Se divide en:

I) CONDICIONAL DIRECTA (ORDENADA):

Aquí se presenta primero el antecedente y luego el consecuente (***causa – efecto***).

EJEMPLO:

Si estudio entonces aprendo.
Antecendente (A) — *Consecuente (C)*

II) CONDICIONAL INDIRECTA (DESORDENADA) :

Aquí se presenta primero el consecuente luego el antecedente. Se usa las conectivas: dado que, puesto que , ya que , porque , si, siempre que , cada vez que , etc.

EJEMPLO :

Alex trabaja ***porque*** necesita dinero
Antecendente (A) — *Consecuente (C)*

E) BICONDICIONAL (DOBLE IMPLICACIÓN, EQUIVALENCIA):

Presentan como conectiva a «Si y sólo si», o sus equivalentes: cuando y sólo cuando, entonces y sólo entonces, etc.

EJEMPLO :

* Edwin corre si y sólo si quiere llegar a la meta.
* Héctor se baña cuando y sólo cuando lo invitan a un matrimonio.

FORMALIZACION EN LA LÓGICA PROPOSICIONAL (SIMBOLIZACIÓN)

La simbolización de proposiciones , consiste en la representación del lenguaje ordinario mediante el lenguaje artificial (convencional). Formalizar , significa reemplazar cada proposición por una variable y cada conectivo (término de enlace) o modificador (la negación) por un operador lógico , todo ello correctamente jerarquizado mediante signos de agrupación.

VARIABLES :

Se utilizan para representar a las proposiciones simples. Son las letras minúsculas:

$$p\ ;\ q\ ;\ r\ ;\ s\ ;\ t\ ;\ etc.$$

EJEMPLO :

* ***Juan Pablo es compositor.*** (p)
* ***Rosario es empresaria*** (p) así Como ***estudiante universitaria.*** (q)

OPERADORES LÓGICOS :

Son de dos tipos:

A) DIÁDICOS :

Se utilizan para representar a las conectivas (términos de enlace)

Conectivas	...y...	... o ...	o... o ...	si...entonces...	...si y solo si...
Operador	$\wedge$	$\vee$	Δ	$\rightarrow$	$\leftrightarrow$

Operadores en el sistema Scholz

EJEMPLO :

* ***Si practicamos*** ***entonces*** ***aprendemos.*** (entonces: $\rightarrow$)

* ***Los leones son salvajes y carnívoros .*** (y: $\wedge$)

B) MONÁDICO :

Sirve para reemplazar al modificador «***no***» o sus expresiones equivalentes (no es cierto , es falso que, no es el caso que, etc.)

Modificador	no
Operador	$\sim$

EJEMPLO :

* Marte no es una estrella .

* ***No es cierto que,*** ***las gallinas tengan 2 patas y no sean aves.*** (No es cierto que: $\sim$; no: $\sim$)

SIGNOS DE AGRUPACIÓN :

Se utilizan para agrupar a las variables y operadores asi como , darles jerarquía . Son los siguientes:

* *Paréntesis ( )* * *Corchetes [ ]*
* *Llaves { }* * *Barras | |*

JERARQUIZACIÓN:

Jerarquizar significa agrupar las variables y los operadores dentro de los signos de colección , llamados también de agrupación.

Para jerarquizar hay que tener en cuenta los siguientes requisitos:

* Sólo presentan jerarquía los conectivos lógicos (y , o , entonces , si y solo si , etc.)

* Para realizar una correcta jerarquización hay que tener en cuenta los signos de puntuación del texto a jerarquizar , en cuanto ellos indican la ubicación de los signos de colección.

* En el texto , el punto seguido tiene mayor jerarquía, le sigue en *2do.* lugar el punto y coma , y en *3er.* lugar la coma.

REGLAS PARA JERARQUIZAR :

I) Donde esté ubicado el signo de puntuación más importante del texto , ahí se encuentra ubicado el conectivo principal.

II) Donde se encuentre un signo de puntuación ahí se abre o cierra un signo de colección (paréntesis , corchete o have)

III) El conectivo que se encuentre fuera o en la parte más externa de los signos de colección es el que tiene mayor jerarquía.

IV) Si encontramos un texto donde se presente una sucesión de idénticos signos de puntuación , será mayor el que presente como conectivo entonces , luego o cualquiera de sus sinónimos.

V) La negación antecede a la variable $(\sim p)$, no enlaza proposiciones , pues no es conectivo $(p \sim q)$

EJEMPLO :

* ***Esther estudia física*** $_p$ ***y*** ***química*** $_q$ ***, o*** ***estudia lógica.*** $_r$

Sin embargo ***estudia matemática*** $_s$.

* ***p y q , o r .*** Sin embargo ***s*** (reemplazando proposiciones)

* $p \wedge q \boxed{\cdot} \vee \boxed{\cdot} \wedge s$ (reemplazando conectivos) jerarquia 2 jerarquia 1

$[(p \wedge q) \vee r] \wedge s$ ....(jerarquizando)

FÓRMULAS :

Es el resultado de la correcta formalización y jerarquización de las proposiciones o inferencias.

EJEMPLO :

* ***Newton fue físico*** $_p$ $\boxed{y}$ $_\wedge$ ***matemático.*** $_q$

Fórmula : $p \vee q$

Nombre : fórmula conjuntiva

* ***Si el agua del río es dulce*** $_p$ ***, entonces*** $_\rightarrow$ ***puede ser para el consumo humano*** $_q$ $\boxed{o}$ $_\vee$ ***servir para regar los sembríos de tomate.*** $_r$

Fórmula: $p \rightarrow (q \vee r)$

Nombre: Fórmula condicional

NOTA : Si al formalizar , encontramos al condicional inverso, se debe permutar las proposiciones que conforman el condicional.

EJEMPLO :

* ***Lucy participa en el curso de actualización*** $_p$ ***porque*** (Condicional Inverso) ***tiene dinero*** $_q$

Fórmula: $q \rightarrow p$

Nombre : Fórmula condicional inverso

FÓRMULAS BIEN FORMADAS (fbf)

Obedecen a las siguientes reglas de formación:

I) Cada variable proposicional es una ***f bf***

EJEMPLO :

$p , q , r ,$............

II) Si A es una ***f bf*** entonces $\sim A$ es una ***f b f.***

EJEMPLO:

* p * $\sim p$
* q * $\sim q$

III) Si **A** y **B** son ***fbfs*** entonces $A \wedge B; A \vee B; A\Delta B; A \rightarrow B; A \leftrightarrow B$ son ***fbfs***.

EJEMPLO:

* $p \wedge q$ * $p\Delta q$ * $(p \wedge q) \vee (r \rightarrow s)$
* $p \vee q$ * $p \leftrightarrow q$ * $(p \rightarrow) q) \leftrightarrow [r \vee (p \rightarrow q)]$
* $p \rightarrow q$ * $(p \vee q) \rightarrow r$ * $p \wedge q \wedge r$
* $p \vee q \vee r$

IV) Ninguna otra es una ***fbf***. en caso contrario son fórmulas mal formadas ***(fmf)***

EJEMPLO:

* $p \sim q$ ——► Es una ***fmf*** porque la negación no es un operador diádico.

* $\leftrightarrow p \wedge q$ ——► Es una ***fmf*** porque el operador « $\leftrightarrow$ », no es monádico y debe estar entre variables (Ejemplo : $p \leftrightarrow q$)

* $p \vee q \wedge r$ ——► Es una ***fmf*** porque no se puede determinar cuál de los operadores tiene mayor jerarquía , dado que le falta el signo de agrupación.

EJEMPLO:

$p \vee q) \vee r$

JERARQUIZACIÓN DE FÓRMULAS

En cualquier fórmula lógica , el operador que tiene mayor jerarquia es aquel operador diádico fuera o en la parte más externa de los signos de agrupación (divide a la fórmula en dos) o en todo caso la negación libre.

EJEMPLO :

* $(p \wedge q) \vee r$

② ①
① ——► *Mayor jerarquía*
② ——► *Menor jerarquía*

* $(p \vee q) \Rightarrow [(p \wedge r) \Rightarrow (r \vee s)]$

2 ① 3 2 3
① ——► *Mayor jerarquía*

① ——► *Mayor jerarquía*

* $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (r \Rightarrow s)$

② ① ②
Menor Jerarquía

* $\sim \{p \Rightarrow [(q \vee p) \wedge \sim (q\Delta r)]\}$

① 2 4 3 4 5
① ——► *Mayor jerarquía*

USO DE LOS PUNTOS AUXILIARES :

Se utilizan dentro de la simbología . Estos puntos auxiliares, sirven para determinar la jerarquía de los opedores diádicos en reemplazo de los signos de agrupación.

Proposición	Operador	Estructura formal	fórmula
Conjunción	$\wedge$ ó .	*p y q*	$p \wedge q$
Disyunción inclusiva	$\vee$	*p o q*	$p \vee q$
Disyunción exclusiva	Δó $\neq$	*o p o q*	$p\Delta q$
Condicional	$\rightarrow$ ó $\supset$	*si p entonces q*	$p \rightarrow q$
Bicondicional	$\leftrightarrow$ ó $\equiv$	*p si solo si q*	$p \leftrightarrow q$
Negación	$\sim$	*no p*	$\sim p$

EJEMPLO :

* *El alcohol* (p) [y] ($\wedge$) *el cigarro son dañinos para la salud* (q) = $p \wedge q$

[Si] *Noriega es astronauta* (p) [entonces] *viaja a la luna* (q) = $p \rightarrow q$

REGLAS PARA EL USO DE PUNTOS AUXILIARES

I) La conjunción tiene mayor jerarquía que cualquier otro operador que no tenga o este afectado por puntos.

EJEMPLO :

① ► *Mayor jerarquía*

$p \wedge (q \rightarrow r)$

$(p \rightarrow q) \wedge (r \leftrightarrow s)$

② ① ②
① ► *Mayor jerarquía*

II) El operador diádico con mayor número de puntos es el de mayor jerarquía , si y solo si no esté limitado por los signos de agrupación.

EJEMPLO :

* $p \equiv q \cdot \supset \cdot r$

② ①
① ► *Mayor jerarquía*

* $r : \equiv : p \cdot \supset \cdot p \vee r \cdot q$

① ② ④ ③
① ► *Mayor jerarquía*

3) Al operador monádico (negación) no se le puede asignar puntos auxiliares, porque estos se asignan solamente a los operadores diádicos. De ahí que cuando se trata de una negación libre, es necesario utilizar los signos de agrupación.

EJEMPLO:

$^{*}\sim (p \vee q \, . \, r)$

① ③ ②

→*Mayor jerarquía*

$^{*}\sim \left[\sim (p \vee q) : \supset : q \, . \supset . r \, . s\right]$

① ③ ④ ② ③ ④

→*Mayor jerarquía*

FUNCIONES VERITATIVAS TABLAS DE VERDAD

I) FUNCIONES VERITATIVAS :

Son interpretaciones semánticas de las posibilidades de verdad o falsedad de las proposiciones moleculares en base a sus conectivas o el modificador.

Son las siguientes:

A) NEGACION(~):

Lógicamente se rige por la siguiente regla: «La negación de una proposición verdadera es falsa . La negación de una proposición falsa es verdadera». Esquemáticamente, se representa por la siguiente tabla de verdad:

p	$\sim p$
V	F
F	V

Esto significa que si «*p*» es **V**, su negación **F** o viceversa.

B) CONJUNCIÓN(∧):

La función veritativa de la conjunción se rige por la siguiente regla: «Una proposición conjuntiva es verdadera cuando todas sus proposiciones componentes son verdaderas , siendo falsa en los demás casos».

Esquematicamente, se tiene:

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

C) DISYUNCIÓN INCLUSIVA O DÉBIL(∨)

En este caso es: «Es falsa sólo cuando todos sus componentes son falsos, en los demás casos es verdadera ». Esquematicamente , se tiene:

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

D) DISYUNCIÓN EXCLUSIVA O FUERTE (Δ):

La regla que lo rige es : «Una proposición disyuntiva fuerte es falsa cuando sus componentes tienen valores iguales, en los demás casos es verdadera».

Esquematicamente, se representa:

p	q	$p \Delta q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

NOTA:

La disyunción al igual que la conjunción , goza de las propiedades conmutativa, asociativa e idempotencia.

E) CONDICIONAL (→):

La regla que lo rige es: «Una proposición condicional es falsa sólo cuando el antecedente es verdadero y el consecuente es falso, siendo verdadero en los demás casos».

La función veritativa se expresa en *el siguiente esquema*:

p	q	$p \to q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

F) BICONDICIONAL(↔) :

La regla que rige es: «Una proposición bicondicional es verdadera cuando sus dos componentes tienen valores iguales , y es falsa cuando sus dos componentes tienen valores distintos».

Esquematicamente, se tiene :

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

G) NEGACIÓN CONJUNTA(↓):

La regla que rige es: «Una proposición negativa conjunta es verdadera cuando sus dos componentes tienen valores falso*(F)*».

Esquematicamente, se tiene :

p	q	$p \downarrow q$
V	V	F
V	F	F
F	V	F
F	F	V

EJEMPLO:

ni picasso pintó la gioconda , ni fujimori es peruano

II) NEGACIÓN ALTERNA (|):

La regla que rige es: «Una proposición negativa ALTERNA es falsa cuando sus dos componentes tienen valores verdaderos *(V)*».

Esquematicamente, se tiene :

p	q	p | q
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	V

EJEMPLO:

la imitación no es exclusiva del hombre o no es exclusivo del mono.

	Conjunción	Disyutiva débil	Disyutiva fuerte	condicional	222	Negación
Schols	$\wedge$	$\vee$	Δ	$\rightarrow$	$\leftrightarrow$	~
Russell	•	$\vee$	$\not\equiv$	$\supset$	$\equiv$	~
p q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Delta q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$	~ p
V V	V	V	F	V	V	F
V F	F	V	V	F	F	V
F V	F	V	V	V	F	F
F F	F	F	F	V	V	V

EJEMPLOS 1:

Si: $p = F, q = V$ y $r = F$; indicar el valor de verdad (verdadero o falso) de las siguientes fórmulas:

I) $(q \vee p) \leftrightarrow (r \leftrightarrow p)$ *II)* $\sim [r \supset q . \vee . \sim (p . q)]$

RESOLUCIÓN :

I) $(q \vee p) \leftrightarrow (r \leftrightarrow p)$

*** PASOS A SEGUIR :**

1) Asignar los valores correspondientes a cada variable:

$$(q \vee p) \leftrightarrow (r \leftrightarrow p)$$

V F F F

2) Evaluar las fórmulas de acuerdo a las reglas de las funciones veritativas :

$$(q \vee p) \leftrightarrow (r \leftrightarrow p)$$

V F F F

V V

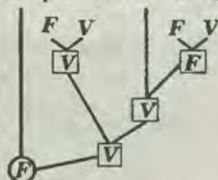
V

3) El valor final se obtiene del operador principal (mayor jerarquía).

Resultado = *V*..............................*(VERDADERO)*.

NOTA :

Para resolver el ejercicio siguiente procedemos en forma directa , porque ya conocemos los pasos que se siguen. *II)* $\sim [r \supset q . \vee . \sim (p . q)]$



Resultado: *F*...*(FALSO)*.

EJEMPLOS 2:

Si la fórmula (proposición simbolizada) $(p \wedge q) \rightarrow (p \vee s)$, es falsa, halle los valores de p; q y r; respectivamente:

RESOLUCIÓN :

*** PASOS A SEGUIR :**

1) El valor de verdad de la fórmula se ubica en el operador principal (mayor jerarquía).

$$(p \wedge q) \vee (p \rightarrow r)$$

F

2) Se procede a dar el valor correspondiente a cada fórmula o variable de acuerdo al valor dado del operador principal , que cumpla con las reglas de las funciones veritativas.

$$(q \wedge p) \vee (r \rightarrow p)$$

V F F F V F F

3) Luego obtenemos el valor de cada *AyB* variable.

p=V *q=F* *r=F*

* Resultado : **VFF.**

TABLAS DE VERDAD Y ESQUEMAS LÓGICOS

TABLAS DE VERDAD :

Llamadas también de valores, tablas veritacionales, método de las matrices o Algoritmos. Son gráficos en los que se representan todos los valores de verdad o falsedad que pueden asumir las distintas interpretaciones de un esquema o fórmula lógica.

FORMULA :

$C = 2^n$

C = Número de líneas o arreglos que tendrá las tabla.

2 = Constante numérica

n = Número de variables

GRÁFICO :

Variables de la fórmula	Fórmula Lógica
Combinaciones de V y/o F	(matriz (ces))
Margen Izquierdo	Cuerpo

NOTA:

Para hallar los valores de Verdad o Falsedad de la matriz principal de una fórmula lógica, en la Tabla de Verdad , es necesario emplear las funciones veritativas.

FUNCIONES VERITATIVAS

		Conjuntivo	Disyuntivo inclusivo	Disyuntivo Exclusivo	Condicional	Equivalente	Negativo		
		V V = (V)	F F = (F)	V V, F F > (F)	V F = (F)	V V, F F > (V)	V será F, F será V		
$C=2^n$	p q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \triangle q$	$p \rightarrow q$	$p \equiv q$	$\sim p$		
	V V	V **V** V	V **V** V	V **F** V	V **V** V	V **V** V	F V	V	$C=2^n$
$C=2^2$	V F	V **F** F	V **V** F	V **V** F	V **F** F	V **F** F			$C=2^1$
	F V	F **F** V	F **V** V	F **V** V	F **V** V	F **F** V	V F	F	
$C=4$	F F	F **F** F	F **F** F	F **F** F	F **V** F	F **V** F			$C=2$

└► *Matriz principal o cifra tabular*

PASOS A SEGUIR PARA EVALUAR LAS FÓRMULAS LÓGICAS

1) Ubicar la fórmula en el lugar correspondiente de la Tabla.

2) Jerarquizar la fórmula.

3) Determinar el número de arreglos mediante la fórmula respectiva.

4) Evaluar la fórmula de acuerdo a las reglas de las funciones veritativas , procediendo de la matriz de menor jerarquía , hasta llegar a la matriz de mayor jerarquía.

EJEMPLOS:

Determinar la matriz principal de las siguientes fórmulas:

I) $p \rightarrow q \sim$ ***II)*** $(p \vee q) \wedge (r \vee p)$ ***III)*** $\sim p$

RESOLUCIÓN :

A) 1

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

\# de arreglos:

$C = 2^n$

$C = 2^2 = 4$

B)

p	q	r	(p	∨	q)	∧
				MATRIZ		
V	V	V		V		V
V	V	F		V		V
V	F	V		V		V
V	F	F		V		V
F	V	V		V		V
F	V	F		V		F
F	F	V		F		F
F	F	F		F		F

\# de arreglos

$C=2^n$

$C=2^3=8$

C)

p	$\sim p$
V	F
F	V

\# de arreglos

$C = 2n$

$C = 21=2$

ESQUEMAS LÓGICOS (E. L.) :

Son fórmulas lógicas (proposiciones formalizadas) las cuales pueden asumir funciones veritativas determinadas . Pueden ser :

1) TAUTOLÓGICOS (T):

Son aquellos cuya matriz principal contiene únicamente valores de verdad . Se le llama también «Principios Lógicos».

EJEMPLO :

p q	[(p → q)	∧	∼ q]	→	∼ p
	1	2	3	1	2
		F		V	F
		F		V	F
		F		V	V
		V		V	V

E. L. Condicional Tautológico

2) CONSISTENTES (Q):

Llamados también esquemas contingentes . En estas fórmulas lógicas , la matriz principal de su tabla veritativa presentan por lo menos un valor de verdad y uno de falsedad.

EJEMPLO:

p	q	[(p → q)	∧	q]	↔	∼ p
		3	2		1	2
V	V	V	V		F	F
V	F	F	F		V	F
F	V	V	V		V	V
F	F	V	F		F	V

E. L. Bicondicional Contingente

CONTRADICTORIOS :

Son fórmulas formalmente falsas , la matriz principal de su tabla de verdad solo contiene valores falsos.

EJEMPLO :

p q	[(p ∧ q)	∧	~ (p ∨ q)]
		F	
		F	
		F	
		F	

E. L. conjuntivo contradictorio .

IMPLICACIÓN (⇒) y EQUIVALENCIA (≡) DE PROPOSICIONES – INFERENCIAS

I) LA IMPLICACIÓN y LA EQUIVALENCIA:

La implicación y la equivalencia son funciones de la Lógica que se utilizan para relacionar dos o más fórmulas lógicas (proposiciones) con la finalidad de establecer una tautología.

LA IMPLICACIÓN (⇒):

Se dice que «*A* implica a *B*» cuando unidos por el condicional, «*A*» como antecedente y «*B*» como consecuente , la relación es válida o lógicamente verdadera.

EJEMPLO :

$A = p \wedge q \qquad B = p \vee q$

«A implica a B» $= A \Rightarrow B$

p	q	$(p \wedge q)$	$\Rightarrow$	$(q \vee p)$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	V
F	V	F	V	V
F	F	F	V	F

PROPIEDADES DE LA IMPLICACIÓN

* *REFLEXIVA :* «Cualquier fórmula *(A)* se implica a sí misma $A \Rightarrow$ «A»
* *TRANSITIVA : Si* «A implica a B» y «B implica a C» entonces: «A implica a C»

$$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$$

* Cualquier fórmula implica a una tautológica

$$(T): A \Rightarrow T$$

* Una contradicción (*F*) implica a cualquier fórmula: $F \Rightarrow A$

LA EQUIVALENCIA (≡):

Se dice que «*A*» equivale a *B*» cuando unidas «*A*» y «*B*» por la bicondicional se obtiene una relación lógicamente verdadera o una tautología.

EJEMPLO:

$A = p \rightarrow q \qquad B = q \vee \sim p$

$A \equiv B$: «A equivale a B»

PROPIEDADES DE LA EQUIVALENCIA

* **REFLEXIVA:**

Cualquier fórmula equivale a sí misma : $A \equiv A$

* **SIMETRICA:**

«Si *A* equivale a *B*», entonces «*B* equivale a *A*»:

$$(A \equiv B) \rightarrow (B \equiv A)$$

* **TRANSITIVA:**

«Si *A* equivale a *B*» y «*B* » equivale a *C*», entonces «*A* equivale a *C*»

$$(A \equiv B) \wedge (B \equiv C) \rightarrow A \equiv C$$

* Todas las tautológicas son equivalentes: $T_1 \equiv T_n$

* Todas las fórmulas contradictorias son equivalentes: $f_1 \equiv f_n$

LAS INFERENCIAS

El objetivo de la Lógica es estudiar el analisis formal de validez de las inferencias . Es decir , que el análisis formal permite simbolizar las inferencias en esquemas moleculares y demostrar con seguridad (mediante diversos métodos veritativos) su validez o invalidez. Se desprende que el objetivo más importante de la Lógica en su aplicación a la ciencia y al discurso cotidiano es la "justificación y crítica de la inferencia" Una inferencia, llamada también argumento o razonamiento es una estructura de proposiciones en la que a partir de una o más proposiciones llamadas «premisas» (antecedentes), se obtiene otra , llamada «conclusión» (consecuente). De tal modo que , la inferencia tendrá forma condicional.

EJEMPLO:

Premisas ↓
{ P_1 *: Si es temporada veraniega, entonces hace calor*
{ P_2 *: No hace calor*

Conclusión {*C : No es temporada veraniega*

CLASES DE INFERENCIAS :

Esta clasificacion se hace teniendo en cuenta alas Inferencias Deductivas.

I) INFERENCIAS INMEDIATAS :

Cuando sólo están formadas por dos proposiciones: premisa y conclusión.

P_1 : Todo cuadrúpedo es vertebrado

C : Algunos vertebrados son cuadrúpedos

II) INFERENCIAS MEDIATAS :

Cuando están formadas por más de dos proposiciones: $\lfloor P_1 \wedge P_2 \wedge \cdots\cdots \wedge P_n \rfloor \Rightarrow$ Conclusión

EJEMPLOS:

* P(1) : Todos los cuerpos caen
  P(2) : Las rocas son cuerpos
  C : La rocas caen

* P(1) : Todos los peruanos son emprendedores
  P(2) : Raúl es Peruano
  C : Raúl es Peruano es emprendedor

* **P(1) :** Si un satélite gira alrededor de la Luna, entonces gira también alrededor de la tierra.

* **P(2):** Si gira alrededor de la Tierra , también gira alrededor del Sol.

* **P(3) :** Si gira alrededor del Sol , entonces gira alrededor de la constelación de la Lira.

C : Si un satélite gira alrededor de la luna, entonces gira alrededor de la constelación de la Lira.

B) CRITERIOS PARA FORMALIZAR INFERENCIAS :

Para simbolizar una inferencia se debe tener en cuenta los siguientes pasos :

I) Se debe distinguir las premisas de la conclusión ; por lo general , la conclusión se halla al final del argumento (pero no siempre).

II) Las premisas siempre están separadas por signos de puntuación y forman el antecedente del argumento , la conclusión es el consecuente del mismo.

III) Las premisas se unen con la conclusión a partir del enlace condicional directo o indirecto.

IV) Se simbolizan las premisas y la conclusión respectivamente , considerando los conectores lógicos.

EJEMPLO 1:

« Si las pistas están mojadas entonces ocurren los accidentes ; pero , no ocurren accidentes. En consecuencia, las pistas no están mojadas».

* Las premisas están separadas por signos de puntuación y la conclusión se halla al final del argumento:

P(1): Si las pistas están mojadas ocurren los accidentes.

P(2): Pero no ocurren los accidentes

C: En consecuencia , las pistas no están mojadas

* *SIMBOLIZANDO:*

P_1 : Si p entonces q	$P_1 : p \rightarrow q$
P_2 : Pero $\sim q$	$P_2 : \sim q$
C : En consecuencia $\sim p$	$C : \sim p$

* *TRASLADANDO A LA FORMA HORIZONTAL :*

$$\lfloor P_1 \wedge P_2 \wedge \cdots\cdots \wedge P_n \rfloor \Rightarrow C$$

$$\lfloor (p \rightarrow q) \boxed{\wedge} \sim q \rfloor \boxed{\Rightarrow} \sim p$$

* Nótese que las premisas se unen mediante el enlace conjuntivo a su uez , las premisas se unen a la conclusión mediante el enlace condicional.

EJEMPLO 2 :

«Emelly cantará en público si y sólo si asisten muchas personas al teatro. Ocurre que asisten muchas personas al teatro si y sólo si la entradas han sido rebajadas. Por lo tanto. Emelly cantará en público si y sólo si las entradas han sido rebajadas»

* *SIMBOLIZANDO :*

P_1 : p [Si y sólo si] q	$P_1 : p \equiv q$
P_2 : q [Si y sólo si] r	$P_2 : q \equiv r$
C : p [Si y sólo si] r	$C : p \equiv r$

$$[(p \equiv q) \wedge (q \equiv r)] \Rightarrow (q \equiv r)$$

P_1 ∧ P_2) C

Antecedentes ⇒ Consecuente

EJEMPLO 3 :

« Sebastián no irá de campamento si se portó mal. Sí se portó mal, se quedará ayudando en casa.

Entonces , Sebastián no irá de campamento y se quedará ayudando en casa

* *SIMBOLIZANDO :*

$P_1 : \sim p$ si q	$P_1 : q \rightarrow \sim q$
P_2 : si q, r	$P_2 : q \rightarrow r$
C : $\sim p$ y r	$C : \sim p \wedge r$

* *TRASLADANDO A LA FORMA HORIZONTAL :*

$$[(q \rightarrow \sim p) \wedge (q \rightarrow r)] \Rightarrow (\sim p \wedge r)$$

EL MÉTODO ABREVIADO O MÉTODO DE REDUCCIÓN AL ABSURDO

Es un procedimiento decisorio , es decir nos permite determinar la validez o la invalidez de un razonamiento o inferencia. Se utiliza con el propósito de abreviar el método de las Tablas de Verdad.

REGLAS :

I) Se coloca el valor de verdad a las premisas y el valor falso a la conclusión. Es decir:

$$\underbrace{P_1}_{V} \wedge \underbrace{P_2}_{V} \wedge \underbrace{P_3}_{V} \cdots\cdots \wedge \underbrace{P_n}_{V} \Rightarrow \underbrace{C}_{F}$$

II) Se debe deducir el valor de las variables y operadores del esquema , trasladando los valores encontrados.

EJEMPLO :

$$\begin{array}{l} * \ P(1): p \equiv q \rightarrow (r \rightarrow q) \rightarrow [(p \equiv q) \wedge r] \\ P(2): r \qquad\qquad V \qquad V \qquad F \\ \hline C: r \rightarrow q \end{array}$$

III) Si cada una de las variables u operadores del esquema cumple una sola función veritativa , es :

MONOVALENTE (V ó *F* todo el tiempo*)*, entonces la inferencia será inválida.

IV) Si cualquiera de las variables u operadores del esquema cumple un doble valor veritativo , es *BIVALENTE (V* y *F* al mismo tiempo), entonces la inferencia es válida o correcta.

Operando: $[(p \equiv q) \wedge r] \longrightarrow (r \rightarrow q)$

$$\begin{array}{l} \downarrow \ VF \quad V \quad VFF \\ F \end{array}$$

Nótese que todas las variables y operadores son monovalentes , es decir cumplen una sola función veritativa . Por lo tanto , dicha inferencia es válida o no correcta.

OTRO EJEMPLO :

$$\left.\begin{array}{l} P_1: p \rightarrow q \\ P_2: \sim q \\ \hline C: \sim q \end{array}\right| \begin{array}{l} [(p \rightarrow q) \wedge \sim q] \longrightarrow \sim p \\ \downarrow \quad V\ F \quad V \ \downarrow F \qquad \downarrow \\ F \qquad\qquad F \qquad\quad V \end{array}$$

* Nótese que la variable «*p*» cumple un doble valor a la vez (bivalencia) , por lo tanto la inferencia es válida.

$$\left.\begin{array}{l} P_1: p \rightarrow q \\ P_2: q \rightarrow r \\ P_3: r \rightarrow s \\ \hline C: (p \rightarrow s) \end{array}\right| \begin{array}{l} [(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \wedge (r \rightarrow q)] \rightarrow (p \rightarrow s) \\ \ \ VF \quad FVF \qquad VF \qquad VFF \\ \ \ \downarrow \qquad\qquad\quad \downarrow \\ \ \ F \qquad\qquad\quad F \end{array}$$

Bivalencia = Válido

$$\left.\begin{array}{l} P_1: (q \rightarrow r) \\ P_2: (\sim r \rightarrow \sim p) \\ \hline C: (q \rightarrow p) \end{array}\right| \begin{array}{l} [(q \rightarrow r) \wedge (\sim r \rightarrow \sim p)] \rightarrow (q \rightarrow p) \\ \ \ VV \downarrow \qquad\qquad\qquad VFF \\ \qquad V \end{array}$$

Monovalencia = Inválido o incorrecto

VALIDEZ DE LAS INFERENCIAS POR TABLAS DE VERDAD

Las Tablas de Verdad , también , se utiliza como método decisorio , para determinar si una inferencia es válida o inválida . Luego de formalizar una inferencia , se evalúa en la tabla y , si su matriz principal es una Tautológia , la inferencia es válida, en los demás casos es inválida.

EJEMPLO :

Determinar si la siguiente inferencia es válida:

«Si Jennifer compra el auto , se irá de paseo ; pero , no se irá de paseo , consecuentemente, Jennifer no compra el auto»

* *FORMALIZANDO :*

I) REEMPLAZANDO LAS PROPOSICIONES :

Jennifer compra el auto = ***p***

Jennifer se irá de paseo = ***q***

II) ESTRUCTURA FORMAL :

Si: ***p*** , ***q*** pero , no ***q*** consecuentemente , no ***p***.

III) FORMULA FINAL : $[(p \rightarrow q) \wedge \sim q] \rightarrow \sim p$

* **EVALUANDO POR TABLAS DE VERDAD :**

p	q	(p → q) 3	∧ 2	~ q	→ 1	~ p
V	V	V	F	F	V	F
V	F	F	F	V	V	F
F	V	V	F	F	V	V
F	F	V	V	V	V	V

\# de arreglos

C = 2n

C = 22 = 4

Matriz Principal

* **RESPUESTA :** *Esquema lógico condicional Tautológico*

PRINCIPIOS LÓGICOS

Un Principio Lógico , es el fundamento de toda verdad lógica (Tautología) . De un principio lógico podemos generar tautológias indefinidamente , y , a la vez , cualquier tautológia del universo lógico puede reducirse a un principio lógico . Son conocidos los tres principios.

PRINCIPIOS LÓGICOS CLÁSICOS

I) PRINCIPIO DE IDENTIDAD :

Establece que si se afirma una proposición, se concluye la misma ; si una proposición es verdadera

Leyes Equivalentes	Con valores de esquema	Con variables proporcionales
1) Doble Negación (DN)	$\sim\sim A \equiv A$ $\sim\sim A \equiv A$	$\sim\sim p \equiv p$ $\sim\sim p \equiv p$
2) Idempotencia (Idem)	$A \vee B \equiv A$ $A \wedge A \equiv A$	$p \vee p \equiv p$ $p \wedge p \equiv p$
3) Conmulativa (Conm)	$A \wedge B \equiv B \wedge A$ $A \vee B \equiv B \vee A$ $A \Delta B \equiv B \Delta A$ $A \leftrightarrow B \equiv B \leftrightarrow A$	$p \vee p \equiv p \wedge p$ $p \wedge p \equiv p \vee p$ $p \Delta q \equiv q \Delta p$ $p \leftrightarrow q \equiv q \leftrightarrow p$
4) Asociativa (Asoc.)	$A \wedge (B \wedge C) \equiv (A \wedge B) \wedge C$ $A \wedge (B \vee C) \equiv (A \vee B) \vee C$ $A \leftrightarrow (B \leftrightarrow C) \equiv (A \leftrightarrow B) \leftrightarrow C$	$p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge q \wedge r$ $p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r \equiv p \vee q \vee r$ $p \leftrightarrow (q \vee r) \equiv (p \rightarrow q) \leftrightarrow r \equiv p \leftrightarrow q \leftrightarrow r$
5) Distributiva (Dist.)	$A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ $A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ $A \rightarrow (B \wedge C) \equiv (A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow C)$ $A \rightarrow (B \vee C) \equiv (A \rightarrow B) \vee (A \rightarrow C)$	$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ $p \rightarrow (q \wedge r) \equiv (p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)$ $p \rightarrow (q \vee r) \equiv (p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r)$
6) De Morgan (DM)	$\sim (A \wedge B) \equiv \sim A \vee \sim B$ $\sim (A \vee B) \equiv \sim A \wedge \sim B$	$\sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$ $\sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$
7)Defnición del Condicional (DC)	$A \rightarrow B \equiv \sim A \vee B$ $A \rightarrow B \equiv \sim A \wedge \sim B$	$p \rightarrow q \equiv \sim p \wedge \sim q$ $p \rightarrow q \equiv \sim (p \wedge \sim q)$
8) Bicondicional (DB)	$A \leftrightarrow B \equiv (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$ $A \leftrightarrow B \equiv (A \wedge B) \vee (\sim A \wedge \sim B)$	$p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ $p \leftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$
9) Absorción (Abs)	$A \wedge (A \vee B) \equiv A$ $A \vee (A \wedge B) \equiv A$ $A \wedge (\sim A \vee B) \equiv A \wedge B$ $A \vee (\sim A \wedge B) \equiv A \vee B$	$p \wedge (p \vee q) \equiv p$ $p \vee (p \wedge q) \equiv p$ $p \wedge (\sim p \vee q) \equiv p \wedge q$ $p \vee (\sim p \wedge q) \equiv p \vee q$
10) Transposición	$A \rightarrow B \equiv \sim B \rightarrow \sim A$ $A \leftrightarrow B \equiv \sim B \leftrightarrow \sim A$	$p \rightarrow q \equiv \sim q \rightarrow \sim p$ $p \leftrightarrow q \equiv \sim q \leftrightarrow \sim p$
11) Exportación	$(A \wedge B) \rightarrow C \equiv A \rightarrow (B \rightarrow C)$	$(p \wedge q) \rightarrow r \equiv p \rightarrow (q \rightarrow r)$

entonces es verdadera , una proposición sólo es idéntica a sí misma . En el plano de la realidad , toda cosa es idéntica a sí misma.

Simbólicamente se expresa por : $A \rightarrow A \,;\, A \leftrightarrow A$

$$p \rightarrow p \,;\, p \leftrightarrow p$$

EJEMPLO :

«S» el libro es de matemática se deduce que el libro es de matemática.

II) PRINCIPIO DE NO CONTRADICCIÓN

Establece que inadmisiblemente una cosa sea y no sea a la vez. Es imposible que una proposición sea verdadera y falsa a la vez , que una cosa exista y no exista al mismo tiempo. Su formulación simbólica es:

$$\sim (A \wedge \sim A) \;;$$

$$\sim (p \wedge \sim p)$$

EJEMPLO:

Es falso que la jirafa sea mamífero y no sea mamífero.

III) PRINCIPIO DEL TERCIO EXCLUIDO:

Establece que una cosa es o no es , no existe una tercera alternativa . Una proposición es verdadera o falsa , no existe una tercera posibilidad .

Simbólicamente se expresa:

$$A \vee \sim A \;;$$

EJEMPLO : $p \vee \sim p$

el pisco es peruano o no es peruano.

LEYES DEL ÁLGEBRA PROPOSICIONAL

Son leyes que permiten la transformación y simplificación de los esquemas moleculares en esquema más simples y se denominan equivalencias porque tanto la expresión original como la expresión simplificada tienen la misma matriz principal en sus respectivas tablas de verdad. A continuación las leyes equivalentes.

Determinar el equivalente de la siguiente proposición :

«Si Federico decide quedarse en la biblioteca después de las clases , entonces repasará la lección de hoy».

RESOLUCIÓN :

Pasos a seguir :

1) REEMPLAZANDO LAS PROPOSICIONES SIMPLES :

p = Federico decide quedarse en la biblioteca después de las clases .

q = Repasará la lección de hoy.

2) ESTRUCTURA FORMAL :

Si **p** entonces **q**

3) REEMPLAZANDO LOS CONECTIVOS OBTENEMOS :

$$p \rightarrow q$$

4) APLICANDO LA DEFINICIÓN DEL CONDICIONAL :

$$p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q$$

$$p \rightarrow q \equiv \sim (p \wedge \sim q)$$

5) REEMPLAZANDO SU EQUIVALENTE RESULTA :

* Federico no decide quedarse en la biblioteca después de las clases o repasará la leccion de hoy

$$\equiv \sim p \vee q$$

* Es imposible que Federico decida quedarse en la biblioteca después de las clases y no repase la lección de hoy $\equiv \sim (p \wedge \sim q)$

EJEMPLO 2 :

simplificar las siguientes fórmulas :

I) $[p \wedge (p \wedge q)]$

II) $\{\sim p \rightarrow [q \vee \sim (q \vee p)]\} \wedge q$

RESOLUCIÓN :

I) $[p \wedge (p \wedge q)]$

$\left[\underbrace{(p \wedge p)} \wedge q\right]$ ....Asociativa

$p \wedge q$............... Idempotencia

	Fórmula	Justificación
II)	$\{\sim p \rightarrow [q \vee \sim (q \vee p)]\} \wedge q$	....
	$\{\sim\sim p \vee [q \vee \sim (q \vee p)]\} \wedge q$	por Condicional
	$\{p \vee [q \vee \sim (q \vee p)]\} \wedge q$	Doble negación

LÓGICA INFORMÁTICA

La lógica constituye el fundamento teórico de la informática , en cuanto le proporciona las herramientas , para la construcción de lenguajes de programación . Entre sus múltiples aplicaciones , la lógica se aplica a la tecnología. En este campo, la lógica se aplica a la construcción de circuitos lógicos y entre ellos los circuitos eléctricos, compuertas lógicos, los diagramas de flujo, etc.

CIRCUITOS LÓGICOS

Para cualquier fórmula proposicional podemos construir un circuito eléctrico , que resultará más fácil en tanto la fórmula tenga sólo operadores "$\wedge$","$\vee$" y/o "$\sim$".

Los circuitos lógicos están formados por conmutadores o interruptores que son los órganos lógicos que dejan pasar o no dejan pasar la corriente eléctrica.

Estado lógico	Interruptor	Lámpara
V	*Cerrado*	*Encendida*
F	*Abierto*	*Apagada*

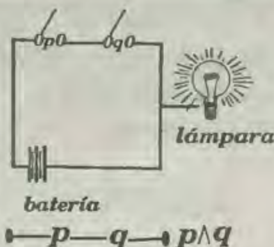
Ahora podemos construir los circuitos . El procedimiento que se sigue es el mismo que se emplea en la construcción de computadoras electrónicas . Estos circuitos son de dos clases : en serie y en paralelo.

CIRCUITOS EN SERIE :

Los circuitos en serie constan de dos o más interruptores donde un interruptor está después de otro y así sucesivamente

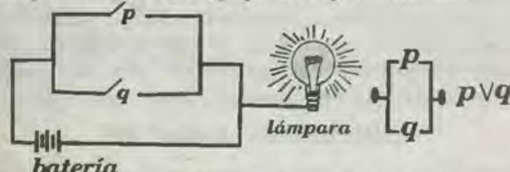
* El gráfico de un circuito en serie es la representación de una fórmula proposicional conjuntiva, cuya expresión más simple es « $p \wedge q$ », y que se representa de la siguiente manera:

Para que este circuito quede cerrado y lá lámpara se encienda, «p» y «q» deben estar cerrados , esto es, «p» y «q» deben ser verdaderos a la vez. En otros términos , es la aplicación de la tabla de verdad de la fórmula «$p \wedge q$».



CIRCUITOS EN PARALELO :

Los circuitos en paralelo constan de dos o más interruptores , donde un interruptor están en la otra línea y así sucesivamente. El gráfico de un circuito en paralelo es la representación de una fórmula proposicional disyuntiva , cuya expresión más simple es «$p \vee q$» , y que se representa así :



Para que este circuito quede cerrado y la lámpara se encienda , bastará que uno de los interruptores esté cerrado . Esto es , el circuito quedará cerrado , o bien cuando «p» sea verdadero o cuando «q» sea verdadero , o bien cuando ambos sean verdaderos. Solamente no se encenderá la lámpara cuando los dos interruptores estén abiertos , o sea , cuando «p» y «q», ambos, sean falsos a la vez. Este caso, es la aplicación de la tabla de verdad de «$p \vee q$»

OBSERVACIÓN :

Los circuitos lógicos, proporcionan una idea precisa sobre la forma como la lógica proposicional puede ser aplicada al diseño de computadoras electrónicas. Dichos circuitos que son conocidos como circuitos o conmutadores , llaves o switches, han sido, sin embargo, reemplazados por dispositivos más ágiles, conocidos como ***circuitos lógicos a compuertas,*** que son más acordes con las exigencias de la tecnología contemporánea. La necesidad de diseñar compuertas está ligada al hecho de que la computadora actual se encuentra en la práctica muy alejada de las llaves o switches, a los que ha sustituido gradualmente por relays, transistores y circuitos integrados (chips). Pero esto no debe llevar a la creencia de que las compuertas complican el manejo lógico de los circuitos, pues la situación es exactamente al revés. Lo facilitan y permiten visualizar mejor la aplicación de las fórmulas lógicas. Una compuerta es un artefacto que , en general , tiene entradas y una salida, las mismas que se representan con líneas. El artefacto mismo se representa convencionalmente por una media luna o por un triangulito y su función es dejar o no pasar un tipo de impulso eléctrico , bajo ciertas condiciones.

COMPUERTAS LÓGICAS

Las compuertas lógicas son bloques de circuitos que producen señales de salida de «lógica 1» o «lógica 0» si se satisfacen las condiciones de las entradas lógicas; «*1*» y «*0*» son las señales binarias o estados binarios de un variable , y los circuitos lógicos que ejecutan las operaciones lógicas de las compuertas *NOT* , *AND* , *OR* («*no*», «*y*», «*d*» respectivamente en español) son representados en función de sus respectivos estados binarios. A continuación , cada una de ellas.

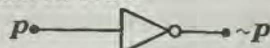
COMPUERTA «NOT» :

La compuerta *NOT* o inversor responde a los siguientes estados binarios :

p	$\sim p$
1	0
0	1

Si «$p=x$», entonces«$\sim p$»en función algebráica es «$\bar{x}$»
El circuito completo se representará gráficamente como sigue:

Compuerta NOT



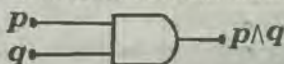
Como se puede apreciar , la compuerta *NOT* tiene una sola entrada que es la proposición «p»,y una salida que es la proposición «$\sim p$». La corriente pasará al exterior de la compuerta cuando la lámpara se encienda , pero si la lámpara no se enciende , la corriente no pasará la compuerta .

COMPUERTA «AND»:

Podemos identificar la compuerta *AND* con los conmutadores "p" y "q". La función binaria responde a la fórmula "$p \wedge q$" tal como sigue:

Compuerta AND de dos entradas.

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0



«$p \wedge q$» en función algebraica es "$x \times y$"y el diseño gráfico que la representa es:

La compuerta *AND* , en este caso , tiene dos entradas , «*p*» y «*q*», pero puede tener más de dos entradas. En el gráfico , la única salida es «$p \wedge q$» y representa a la lámpara en el diseño de un circuito eléctrico.

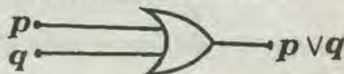
COMPUERTA «OR» :

La función binaria de la compuerta *OR* corresponde a la fórmula «$p \vee q$» como sigue.

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

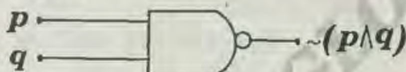
«$p \vee q$» en función algebraica es «$x + y$» y el diseño gráfico que la representa es:

Compuerta OR de dos entradas.

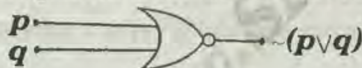


el gráfico muestra 2 entradas , «*p*» y «*q*» , para la compuerta *OR* . en este caso , la salida es «$p \vee q$»,que representa a la lámpara en el circuito .

Compuerta NAND de dos entradas.



Compuerta NOR de dos entradas.



IMPLICACIONES NOTABLES

Llamadas también Leyes Implicativas . Son esquemas condicionales tautológicos , por lo que representan inferencias válidas. En consecuencia , teniendo la(s) premisa(s) podemos derivar inmediatamente su respectiva conclusión.

Las más importantes son las siguientes:

1) MODUS PONENDO PONENS (MPP):

Si se afirma el antecedente de una premisa condicional , se concluye la afirmación del consecuente de dicha premisa.

Regla:

$$\begin{array}{l} A \to B \\ \underline{A \qquad} \\ \therefore B \end{array}$$

Ley:

$$[(p \to q) \wedge p] \Rightarrow q$$

EJEMPLO :

P_1 : Si llueve en la noche , las pistas están mojadas.

P_2 : Llueve en la noche.

C : Luego, las pistas están mojadas.

Formalizando:

$$\begin{array}{l} P_1 : \to q \\ \underline{P_2 : P} \\ C \therefore 9 \end{array}$$

2) MODUS TOLLENDO TOLLENS (MTT):

Si se niega el consecuente de una premisa condicional, se concluye la negación del antecedente de dicha premisa.

Regla :

$$\begin{array}{l} A \to B \\ \underline{\sim B} \\ \therefore \sim A \end{array}$$

Ley :

$$[(p \to q) \wedge \sim q] \Rightarrow \sim p$$

EJEMPLO:

P_1: Si eres estudiante de marte , te están preparando adecuadamente.

P_2: No te estan preparando adecuadamente.

C : Consecuentemente, no eres estudiante de marte.

Formalizando:

$$\begin{array}{l} P_1 : p \to q \\ \underline{P_2 : \sim q} \\ C \therefore \sim p \end{array}$$

3) SILOGISMO DISYUNTIVO (SD):

Si se niega uno de los elementos de una premisa disyuntiva , se concluye la afirmación del otro elemento.

Regla :

$$\begin{array}{l} A \vee B \\ \underline{\sim A} \\ \therefore B \end{array} \qquad \begin{array}{l} A \vee B \\ \underline{\sim B} \\ \therefore A \end{array}$$

Ley :

$$[(p \vee q) \wedge \sim p] \Rightarrow q$$
$$[(p \vee q) \wedge \sim q] \Rightarrow p$$

EJEMPLO:

P_1 : Estudio Contabilidad o Economía.

P_2 : No estudio Economía.

C : Estudio Contabilidad.

Formalizando:

$$\begin{array}{l} P_1 : p \vee q \\ \underline{P_2 : \sim q} \\ C \therefore p \end{array}$$

4) SILOGISMO HIPOTETICO PURO(SHP):

Si de un conjunto de dos premisas condicionales , el consecuente de una de las premisas es la afirmación del antecedente de la otra premisa , entonces del

antecedente de una de las premisas se deriva el consecuente de la otra premisa.

Regla:

$$\frac{\begin{array}{c}A \to B\\ B \to C\end{array}}{\therefore A \to C} \qquad \frac{\begin{array}{c}B \to C\\ A \to B\end{array}}{\therefore A \to C}$$

Ley:

$$[(p \to q) \wedge (q \to r)] \Rightarrow (p \to r)$$
$$[(q \to r) \wedge (p \to q)] \Rightarrow (p \to r)$$

EJEMPLO :

Si Carnap fue neopositivista , conformó el Círculo de Viena ; y si conformó el Círculo de Viena , confiaba en la Lógica Simbólica. Por lo tanto , si Carnap fue neopositivista, confiaba en la Lógica Simbólica.

Formalizando:

$$\frac{\begin{array}{l}P_1:\ p \to q\\ P_2:\ q \to r\end{array}}{C \therefore p \to r}$$

5) CONJUNCIÓN :

De un conjunto de premisas , se puede concluir la Conjunción de las mismas.

Regla:

$$\frac{\begin{array}{c}A\\ B\end{array}}{\therefore A \wedge B}$$

Ley:

$$(p) \wedge (q) \Rightarrow p \wedge q$$

EJEMPLO:

Juan es escritor (p) , ***Juan es poeta*** (q) ; ***Luego ,***

Juan es escritor (p) [y] ($\wedge$) ***poeta*** (q)

Formalizando :

$$\frac{\begin{array}{l}P_1:\ p\\ P_2:\ q\end{array}}{C \therefore p \wedge q}$$

6) SIMPLIFICACIÓN :

De una premisa conjuntiva de puede concluir cualquiera de sus componentes.

Regla:

$$\frac{A \wedge A}{\therefore B} \qquad \frac{A \wedge B}{\therefore A}$$

Ley:

$$(p \wedge q) \Rightarrow q$$
$$(p \wedge q) \Rightarrow p$$

EJEMPLO :

P_1 : Copérnico fue Astrónomo y Físico.

C ∴ Copérnico fue Astronomo.

Formalizando:

$$\frac{P_1:\ p \wedge q}{C \therefore p}$$

7) ADICIÓN :

De una premisa se puede concluir la disyunción de la misma con cualquier otra fórmula.

Regla:

$$\frac{A}{\therefore A \vee B}$$

Ley:

$$\frac{p}{\therefore p \vee q}$$

EJEMPLO :

Los estudiantes son inteligentes (p) ***. Luego ,***

los estudiantes son inteligentes (q) [o] ($\vee$) ***respevtuosos.*** (q)

Formalizando :

$$\frac{P_1:\ p}{C \therefore p \vee q}$$

8) TRANSITIVIDAD SIMETRICA(TS):

Si de un conjunto de dos premisas bicondicionales uno de los componentes de una premisa bicondicional es la afirmación de uno de los componentes de la otra premisa , entonces el otro componente de la primera premisa se da si y sólo si se dá el otro componente de la segunda premisa bicondicional.

Regla:

$$\frac{\begin{array}{c}A \leftrightarrow B\\ B \leftrightarrow C\end{array}}{\therefore A \leftrightarrow C} \qquad \frac{\begin{array}{c}B \leftrightarrow C\\ A \leftrightarrow B\end{array}}{\therefore A \leftrightarrow C}$$

Ley:

$$[(p \leftrightarrow q) \wedge (q \leftrightarrow r)] \Rightarrow (p \leftrightarrow r)$$
$$[(q \leftrightarrow r) \wedge (p \leftrightarrow q)] \Rightarrow (p \leftrightarrow r)$$

9) DILEMA CONSTRUCTIVO COMPUESTO (DCC):

De la disyunción de los antecedentes de dos premisas condicionales se concluye la disyunción de los consecuentes de dichas premisas condicionales.

Regla:

$$\frac{\begin{array}{c}A \to B\\ C \to D\\ A \vee C\end{array}}{\therefore B \vee D}$$

Ley:

$$[(p \to q) \wedge (r \to s) \wedge (p \vee r)] \Rightarrow (q \vee s)$$

10) DILEMA DESTRUCTIVO COMPUESTO (DDC) :

Si, disyuntivamente , negamos los consecuentes de dos premisas condicionales , se concluye disyuntivamente la negación de los antecedentes :

Regla:

$$\frac{\begin{array}{c}A \to B\\ C \to D\\ \sim B \vee \sim D\end{array}}{\therefore \sim A \vee \sim C}$$

Ley:

$$[(p \to q) \wedge (r \to s) \wedge (\sim q \vee \sim s)] \Rightarrow (\sim p \vee \sim r)$$

DERIVACIÓN O DEDUCCIÓN NATURAL

Es un procedimiento formal que sirve para demostrar que la conclusión se deduce lógicamente de las premisas o de un conjunto de premisas.

Este procedimiento consiste en obtener la conclusión deseada mediante la aplicación de leyes lógicas en una secuencia finita de pasos . Entonces,

dado un conjunto de premisas , la deducción lógica debe permitirnos sacar consecuencias que sólo se deriven lógicamente de las premisas ; en otros términos, consecuencias que son implicadas por las premisas.

EJEMPLO 1 :

Sean las premisas y su conclusión respectivamente:

$P_1 : \sim p \rightarrow (q \wedge \sim r)$

$P_2 : \sim p$

$P_3 : s \rightarrow r$

$C_3 \therefore \sim s$

Indique qué pasos se han efectuado para obtener la conclusión: « $\sim s$ ».

RESOLUCIÓN:

$P_1 : \sim p \rightarrow (q \wedge \sim r)$

$P_2 : \sim p$

$P_3 : s \rightarrow r // \therefore \sim s$

4) $q \wedge \sim r$: se deduce de la P_1 y P_2 mediante (M. P. P.)

5) $\sim r$:se obtiene al utilizar Simplificación en la P_4

6) $\sim s$: se deduce de la P_3 y P_5 mediante *(M. T. T.)*

De esta manera , la derivación queda lógicamente justificada por los pasos efectuados, resultando su validez.

EJEMPLO 2 :

Sea el razonamiento:

«Si hay sol , entonces es verano o iremos a la playa . Hay sol pero no es verano. Por lo tanto , vamos a la playa ».

* Para facilitar la demostración , es necesaria la formalización:

$P_1 : p \rightarrow (q \vee r)$

$P_2 : p \wedge \sim q$

$\therefore r$

* Ahora efectuamos la derivación:

$P_1 : p \rightarrow (q \vee r)$

$P_2 : p \wedge \sim q // \therefore r$

3) p ....(2) × *simplificacion*

4) $q \vee r$ ....(1) y (3) × M. P. P.

5) $\sim q$ ....(2) × *simplificacion*

6) r ....(4) y (5) × S. D.

CUANTIFICADORES

I)CUANTIFICADOR UNIVERSAL :

Sea la funcion proposicional $f_{(x)}$ sobre un conjunto A , el cuantificador ∀ («para todo») indica que todos los valores del conjunto A hacen que la funcion proposicional $f_{(x)}$ sea verdadera. ∀ se lee:«Para todo»

EJEMPLO :

Sea : $f_{(x)} : x^3+2>5$ donde $x \in N$ La proposición cuantificada es : $\forall x \in N ; x^3+2>5$ es falsa.

II)CUANTIFICADOR EXISTENCIAL :

Sea $f_{(x)}$ una funcion proposicional sobre un conjunto A el cuantificador ∃ (existe algún) indica que para algún valor del conjunto A , la funcion proposicional $f_{(x)}$ es verdadera. ∃ se lee : «Existe algún »

EJEMPLO 1 :

Sea $f_{(x)} : x^2 - 5 < 8$, donde : $x \in Z^+$, la proposición $\exists\ x \in Z^+ / x^2 - 5 < 8$ es verdadera.

EJEMPLO 2 :

$P_{(x)} : x + 5 > 7$..................*(función proposicional)*

$\exists\ x : p(x)$

$\exists\ x : x + 5 > 7$.......................*(proposición lógica)*

para verificar que es una proposición lógica , podemos darnos cuenta que si $x = 13$, se cumple la desigualdad , ya hemos encontrado por lo menos un «x», que verifique $P_{(x)}$, por lo tanto es una proposición lógica , cuyo valor es verdadero.

NEGACIÓN DE PROPOSICIONES QUE TIENEN CUANTIFICADORES

* Sea la proposición: $\forall x : p(x)_{x)}$

* su negación será: $\sim [\forall x : P_{(x)}] = \exists x : \sim P_{(x)}$

* de la misma forma, si tenemos la proposición :

$\exists\ x : P_{(x)}$

* Su negación será : $\sim [\exists x : P_{(x)}] = \forall x : \sim P_{(x)}$

EJEMPLO:

I) $\exists x : x = 1 : [\ \exists\ x : x = 1] = \forall\ x : x \neq 1$

II) $\exists\ x$: «x» es un número par. $\sim[\exists x : x$ es un número impar $] = \forall\ x$: «x» no es un número impar.

III) $\forall x : x^2 > 0 \sim [\forall x : x^2 > 0] = \exists x : x^2 \leq 0$

TEORÍA DE CONJUNTOS

OBJETIVOS :



*Establecer correctamente la noción de conjuntos , su determinación y su cardinal.

*Utilizar adecuadamente la relación de pertenencia e inclusión y representar los conjuntos gráficamente.

*Distinguir las clases de conjuntos , así como los conjuntos especiales.

*Realizar correctamente las operaciones de conjuntos.

*Utilizar de manera eficaz las (leyes y propiedades del Álgebra de conjuntos.

INTRODUCCIÓN :

Se inicia aquí el bloque dedicado a la Teoría de conjuntos , con el enunciado de los conceptos más elementales de dicha teoría: definición de conjunto, relaciones de pertenencia y de orden , operaciones entre conjuntos, etc... Se trata de lograr una cierta soltura en el manejo de estos conceptos elementales, su simbolismo y representación, puesto que constituyen la base de un gran número de conocimientos matemáticos.

Cuando en el siglo ***XIX*** el análisis adquirió cierto auge , comenzó a ocuparse de problemas profundos y difíciles . Se sintió entonces necesitado de una base sistemática y cuidadosamente razonada en la que apoyarse. Estas necesidades del análisis son el origen de la moderna teoría de conjuntos , que Cantor desarrolló como una rama autónoma de las matemáticas. Sobre la base de estas ideas se abrió un nuevo capítulo del análisis, el de la llamada teoría de las funciones de variable real ; pero además , las ideas generales de la Teoría de conjuntos penetraron en todas las ramas de las matemáticas, dando lugar a una nueva etapa en el desarrollo de ésta.

NOCIÓN DE CONJUNTO

En matemáticas , se dice que un concepto es primario cuando no es posible definirlo utilizando otros más sencillos. Así , si se tratase de definir el concepto de ***conjunto*** se diría que es una agrupacion cualquiera de objetos , o una colección , o una reunión...; sin embargo, los terminos agrupación , colección o reunión son conceptos del mismo nivel de dificultad que el de conjunto. Por ello se dice que el concepto de conjunto es un concepto primario. Forman un conjunto , por ejemplo



* Los libros de una biblioteca.
* Los jugadores de un equipo de futbol.

Cada uno de Los objetos que forma parte de un conjunto se llama ***elemento*** de dicho conjunto.

EJEMPLOS :



* ***a*** es un elemento del conjunto formado por las letras vocales.
* El pulgar es un elemento del conjunto de Los dedos de la mano derecha.

NOTACIÓN DE UN CONJUNTO

Por convención un conjunto es denotado con letras mayúsculas y sus elementos con letras minúsculas, números u otros símbolos, separados por punto y coma, además de agruparse a todas ellos mediante llaves.

EJEMPLOS:

A ={Taty ; Dany ; Eryca ; Karyn }

RELACIÓN DE PERTENENCIA ($\in$)

Cuando un elemento forma parte de un conjunto , se dice que pertenece($\in$) al conjunto y , en caso contrario , que no pertenece($\notin$).

«.............pertenece a.................»: $\in$

«..............no pertenece a...........»: $\notin$

* Esto quiere decir que dado un «integrante u elemento» y un conjunto

$$\begin{matrix}\textit{Integrante}\\ \textit{u elemento}\end{matrix} \xrightarrow[\in]{\in} \textit{Conjunto}$$

✦ Si «*x*» es elemento del conjunto «*A*»: $x \in A$.

✦ Si «*x*» no es elemento del conjunto «*A*»: $x \notin A$.

EJEMPLO :

* ***dado*** $B=\{3 ; 7 ; 11 ; 15 ; 19\}$ ***entonces :***

$7 \in B$	$9 \notin B$
$3 \in B$	$0 \in B$

OBSERVACIÓN :

«La pertenencia sólo se da entre elemento y conjunto».

CARDINAL DE UN CONJUNTO :

Es el número de elementos diferentes que posee el conjunto considerado .

NOTACIÓN :

n(A) : número de elementos diferentes de ***A***

$A =\{a ; e ; i ; o ; u\} \rightarrow n(A) = 5$

$P =\{4 ; 4 ; 1 ; 1 ; 1 ; 0 ; 12 ; 102\} \rightarrow n(P) = 5$

NÚMERO ORDINAL :

Teniendo en cuenta una disposición de los elementos dentro del conjunto del cual forma parte , cada uno determina su número ordinal como el lugar que ocupa en el orden establecido. *Ord (x)* : número ordinal de *x*

✦ $S = (m ; n ; \pi ; q)$ $Ord(\pi) = 3$ $Ord(n) = 2$

DETERMINACIÓN DE CONJUNTOS

Un conjunto se dice que esta bien definido cuando se puede determinar , sin ningun error , cuales son los elementos que lo forman.

Un conjunto puede determinarse de dos maneras:

I) POR EXTENSIÓN (O EN FORMA TABULAR) :

Nombrando todos y cada uno de los elementos que lo forman. Para escribirlo, se encierran Los elementos entre llaves y separados por comas:

EJEMPLO:

* $A=\{a ; e ; i ; o; u\}$ y se lee «*A* es el conjunto formado por las letras *a ; e ; i ; o ;u*»

* $B = \{2 ; 4 ; 6 ; 8 ; 10\}$

Es evidente que el orden en el cual son listados los elementos del conjunto no afecta el hecho de que pertenezcan a el. De este modo en el conjunto.

$$B = \{2; 4; 6; 8; 10\} = \{10; 6; 8; 2; 4\}$$

No todos los conjuntos pueden ser determinados por extensión , entonces se recurre a otra forma de determinación.

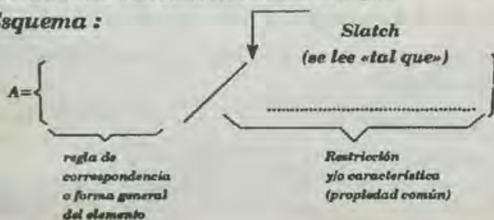
II) POR COMPRENSIÓN (O EN FORMA CONSTRUCTIVA)

Nombrando una propiedad que cumplan todos los elementos del conjunto y solo ellos.

EJEMPLO:

El conjunto de las letras vocales esta bien definido porque se puede decir sin error si un elemento pertenece o no a él. La propiedad letras vocales la cumplen unas determinadas letras y solo ellas. A la propiedad que define un conjunto se La llama propiedad característica del conjunto. El conjunto del ejemplo anterior, definido por comprensión, se escribe : $V = \{x \,/\, x$ *es letra vocal*$\}$
Y se lee: «V es el conjunto de los elementos *x*, tal que *x* es letra vocal». El símbolo / se lee: *tal que*

Esquema :



EJEMPLOS:

* El conjunto de «Las personas que viven en una ciudad H» se define por comprensión :

$A=\{x/x$ = *persona que vive en la ciudad H*$\}$

Para definirlo por extensión sería necesario nombrar a todas las personas que viven en la ciudad *H* , una por una , lo cual , obviamente , es complicado.

* El conjunto formado por una pera , un bolígrafo y un canario , se define mejor por extensión:

B={pera ; bolígrafo ; canario}

Pues para definirlo por comprensión sería necesario buscar una propiedad que cumplan los tres elementos y solo ellos. A veces un conjunto con muchos elementos se expresa por extensión citando solo alguno de ellos y sustituyendo al resto por puntos suspensivos (llamados elipsis) indicando que hay más elementos y que siguen la norma de Los anteriores.

EJEMPLOS:

* El conjunto de los números pares se puede expresar: $P=\{2 ; 4 ; 6 ; 8 ; 10 ; 12 ; ...\}$

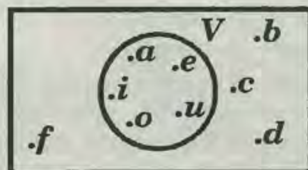
* El conjunto de los números impares menores que *100* se podría escribir así :

$$I = \{1 ; 3 ; 5 ; 7 ; ... ; 97 ; 99\}$$

REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE UN CONJUNTO

Para representar conjuntos generalmente se utilizan los diagramas de Venn. Los elementos se representan por puntos y alrededor de ellos se traza una línea cerrada. Los elementos que estan dentro de la línea pertenecen al conjunto y los que están fuera no pertenecen al conjunto.

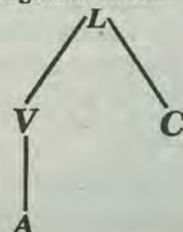
EJEMPLO:



Otra forma , aunque menos usual, de representar conjuntos es por medio de un diagrama lineal.

EJEMPLO:

«*A*» es el conjunto de las vocales abiertas
«*V*» es el conjunto de las vocales.
«*C*» es el conjunto de las consonantes.
«*L*» es el conjunto de las letras del alfabeto.



CLASES DE CONJUNTOS

CONJUNTO FINITO :

Un conjunto es finito (tiene fin) , si posee una cantidad limitada de elementos. Es decir , el proceso de contar sus diferentes elementos tendra fin en algún instante . El conjunto $V=\{a ; e ; i ; o ; u\}$ es finito.

Al cardinal de un conjunto finito se le denomina *NÚMERO NATURAL*.

CONJUNTO INFINITO :

Un conjunto es infinito (no tiene fin) si posee una cantidad ilimitada de elementos. Es decir , el proceso de contar sus diferentes elementos no tendra fin.

El conjunto de los numeros pares , el de números naturales , el de numeros enteros, el de números racionales, son todos conjuntos infinitos.

Al cardinal de un conjunto infinito se le denomina *NÚMERO TRANSFINITO.*

RELACIONES ENTRE CONJUNTOS

RELACION DE INCLUSIÓN($\subset$)

Un conjunto **A** en otro conjunto **B** cuando todo elemento de **A** es etemento de **B**. Se dice que **A** es subconjunto de **B**.

Se representa:

•$A \subset B$, y se lee: «*A* es subconjunto de *B*» o «*A* esta contenido en *B*» o «*A* esta incluido en *B*» o «*B* contiene a *A*»:

•$A \supset B$

«*B*» incluye a «*A*»

«*B*» contiene a «*A*»

«*B*» es Súper conjunto de «*A*»

Simbolicamente , se expresa :

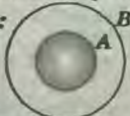
$$\boxed{A \subset B \Leftrightarrow (\forall x \in A \rightarrow x \in B)}$$

Para representar que un conjunto no es subconjunto de otro , se utiliza el símbolo $\not\subset$ $H \not\subset D$ significa que H no es subconjunto de D .

NOTA :

Los símbolos $\subset$ y $\not\subset$ se utilizan solo entre conjuntos, nunca entre un elemento y un conjunto.

* *GRAFICAMENTE :*



Se considera a todo conjunto incluido en si mismo.

Es decir: $\boxed{A \subset A \; ; \forall A \; Conjunto}$ El conjunto vacio , ϕ , es subconjunto de cualquier conjunto.

EJEMPLOS :

* El conjunto $A=\{x/x$ es un paralelogramo$\}$ es un subconjunto del conjunto $C=\{$cuadrilateros$\}$, porque todos los paralelogramos son cuadriláteros: $A \subset C$. Sin embargo, $C \not\subset A$, porque hay cuadriláteros (Los trapecios , por ejemplo) que no son paralelogramos.

* EL conjunto $M=\{x/x$ es una letra de la palabra «*matemática*»$\}$ está contenido en el conjunto $E=\{c ; i ; t ; a ; m ; e\}$, porque todos los elementos de M pertenecen a E: $M \subset E$. Además , también es cierto que $E \subset M$, puesto que todos los elementos de E son elementos de M. Se concluye entonces que $E=M$.

En estos casos , en los que ambos conjuntos son iguales , se dice que son ***subconjuntos impropios***.

A los subconjuntos que no cumplen esto se denominan ***subconjuntos propios***.

* El conjunto $P=\{1; 2; 4 ;8\}$ no es subconjunto del conjunto $N=\{0 ; 2; 4; 6 ; 8\}$ porque existe un elemento , 1 , que pertenece a P y no pertenece a N: $P \not\subset N$.

Y además $N \not\subset P$, porque $0 \notin M$ pero $0 \notin P$ y $6 \in N$ pero $6 \notin P$.

Esta relación que se establece entre conjuntos se llama ***relación de inclusión***.

Si sólo uno de los conjuntos está incluido en el otro , se dice que son conjuntos comparables.

NOTA :

A y **C** son comparables. **M** y **E**, así como **P** y **N** no son comparables.

IGUALDAD DE CONJUNTOS

Dos conjuntos, **A** y **B** , son iguales si tienen los mismos elementos ; es decir , si todos los elementos que pertenecen a **A** pertenecen también a **B** , y viceversa .

Se escribe : $A = B$.

Simbolicamente : $\boxed{A = B \Leftrightarrow (A \subset B \wedge B \subset A)}$

Es decir : $A = B \Leftrightarrow [\forall x \in A \Rightarrow x \in B \wedge \forall z \in B \Rightarrow z \in A]$

Para expresar la no igualdad utiliza el símbolo $\neq$ entre ambos.

EJEMPLOS :

* Los conjuntos $A = \{1; 3; 5;7; 9\}$ y $B = \{1; 5; 3; 7; 9\}$ son iguales . EL orden de colocación no importa.

* Los conjuntos $A = \{1; 6; 3; 9\}$ y $B = \{1; 3; 9\}$ no son iguales porque existe un elemento, **6**, que pertenece a A y no pertenece a B: $6 \in A$ y $6 \notin B \to A \neq B$.

CONJUNTO ESPECIALES

CONJUNTO VACÍO O CONJUNTO NULO :

Es aquel conjunto que no tiene elementos. El conjunto vacío se representa por { } o por ϕ.

EJEMPLO :

* El conjunto M de meses que en el año **2000** tuvieron solo **28** días es un conjunto vacío, porque **2000** fue un año bisiesto , luego : $M = \{\ \}$ o $M = \phi$.

El cardinal de un conjunto vacío es cero, así: $n(M) = 0$

NOTA :

Se considera al conjunto vacío incluido en todo conjunto: $\boxed{\phi \subset A;\ \forall A \text{ conjunto}}$

CONJUNTO UNITARIO O CONJUNTO SINGLETÓN

Es aquel conjunto que tienen un solo elemento .

EJEMPLO :

* El conjunto T de los satélites naturales de la Tierra es un conjunto unitario porque solo tiene un elemento : la Luna .
El cardinal de un conjunto unitario es uno. Así , del conjunto T mencionado , $n(T)=1$

NOTA :

A Los conjuntos que tienen solo dos elementos se llaman binarios .

CONJUNTO UNIVERSAL :

Se llama conjunto universal , o referential , o total al conjunto que contiene , como subconjuntos , a todos los conjuntos que intervienen en el contexto del problema que se esté tratando . Generalmente el conjunto universal se representa por la letra U.

EJEMPLO :

Si se está trabajando con números , el conjunto universal será el conjunto de todos los números .

CONJUNTO DE CONJUNTOS O FAMILIA DE CONJUNTOS :

Es aquel conjunto en el que todos sus elementos son a su vez conjuntos.

CONJUNTO POTENCIA O DE LAS PARTES DE UN CONJUNTO

Dado un conjunto cualquiera A , se llama conjunto potencia de A o de las partes de A al conjunto que tiene como elementos a todos los subconjuntos de A, incluidos el mismo A y el conjunto vacío . Se representa por $P(A)$.

EJEMPLO 1:

Sea $V = \{a ; e\}$, Halle $P(V)$

RESOLUCIÓN :

*Para determinar $P(V)$ hay que hallar todos Los subconjuntos de V :

$A = \{a\} \subset V$, *puesto que* $a \in V$.

$E = \{e\} \subset V$, *puesto que* $e \in V$.

$V = \{a ; e\} \subset V$, *puesto que* $a \in V$ *y* $e \in V$.

$\phi \subset V$, puesto que no hay ningún elemento en ϕ que no pertenezca a V .
No hay más subconjuntos , pues cualquier otro conjunto que se elija tendrá algún elemento que no pertenezca a V ; por tanto, $P(V)$ estará formado por esos cuatro conjuntos, ellos serán sus elementos:

$$P(V) = \{\phi ; A ; E ; V\}$$

A es un elemento de $P(V)$. Se expresa

$$A \in P(V), \text{no } A \subset P(V .$$

*De igual modo : $\phi \in P(V), E \in P(V), V \in P(V)$.

Si no se hubiese dado nombre a los subconjuntos , se podría haber escrito : $P(V) = \{\phi, \{a\}, \{e\}, \{a; e\}\}$

$P(V)$ tiene **4** elementos . Es decir: $n[P(V)] = 4$.

Si un conjunto , como V, tiene dos elementos, su conjunto potencia tiene **4** elementos.

EJEMPLO 2 :

Sea $N = \{a ; e ; i\}$. Halle $P(N)$.

RESOLUCIÓN :

* Subconjunto impropios: R.
*Subconjunto propio de cero elementos: ϕ
* Subconjuntos propios de un elemento:

$$\{a\}, \{e\}, \{i\}.$$

* Subconjuntos propios de dos elementos:

$$\{a ; e\}, \{a ; i\}, \{e ; i\}.$$

No hay más subconjuntos , pues de tres elementos sólo está N.

* Luego : $P(R) = \{\phi; \{a\}; \{e\}; \{i\}; \{a;a\}; \{a;i\}; \{e;i\}; N\}$.

$P(N)$ tiene **8** elementos . Es decir: $n[P(N)] = 8$

Si un conjunto, como N, tiene **3** elementos, su conjunto de partes tiene **8** elementos.

EJEMPLO 3 :

Sea $R = \{a ; e ; i ; o\}$. Halle $P(R)$.

RESOLUCIÓN :

* Subconjunto impropios : R.
* Subconjunto de cero elementos: ϕ

* Subconjuntos de un elemento: {a}, {e}, {i}, {o}.
* Subconjuntos de dos elementos:
{a ;a}, {a ; i}, {a ; o}, {e ; i}, {e ; o}, {i ; o}.
* Subconjuntos de tres elementos:
{a ; e ; i}, {a ; e ; o}, {a ; i ; o}, {e ; i ; o}.

P(R)={ϕ ; {a} ; {e} ; {i} ; {o} ; {a ; e} ; {a ; i} ; {a ; o} ; {e ; i} ; {e ; o} ; {i ; o} ; {a ; e ; i} ; {a ; e ; o} ; {a ; i ; o} ; {e ; i ; o} ; R}.

R tiene **4** elementos y **P(R)** tiene **16** elementos.

NÚMERO DE ELEMENTOS DE UN CONJUNTO POTENCIA

Observando en los tres últimos ejemplos la relación entre el número de elementos del conjunto y el número de elementos de su conjunto potencia, se observa que:

V tiene **2** elementos y *P(V)* tiene $4 = 2^2$ elementos.

N tiene **3** elementos y *P(N)* tiene $8 = 2^3$ elementos.

R tiene **4** elementos y *P(R)* tiene $16 = 2^4$ elementos.

EN GENERAL :

si un conjunto **A** tiene **n** elementos, el conjunto *P(A)* tendrá 2^n elementos. Es decir:

$$n[P(A)] = 2^{n(A)}$$

Además el número de subconjuntos propios es : $2^{n(A)}-1$

OPERACIONES CON CONJUNTOS

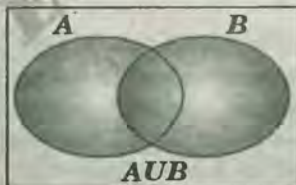
I) UNIÓN DE CONJUNTOS (∪) :

Dados dos conjuntos **A** y **B**, se llama unión de **A** con **B** al conjunto formado por todos los elementos que pertenecen a **A**, a **B** o a ambos.

El conjunto unión de **A** y **B** se representa por $A \cup B$ y se lee «**A** unión **B**»: Los elementos de $A \cup B$ pertenecen al menos a uno de los dos conjuntos.
Simbólicamente se expresa:

$$A \cup B = \{x/x \in A \vee x \in B\}.$$

GRAFICAMENTE :



La parte sombreada representa al conjunto $A \cup B$.

EJEMPLOS :

* Dados los conjuntos **A={1 ;2 ;3 ;4}** y **B={a ;b ; c}**, la unión de ambos será:

$$A \cup B = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; a ; b ; c\}$$

* La unión de los conjuntos **C={1 ; 2 ; 3 ; 4}** y **D={2 ; 4 ; 6}**, es: $C \cup D = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6\}$

Los elementos comunes a ambos conjuntos no deben repetirse.

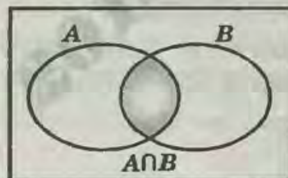
II) INTERSECCIÓN DE CONJUNTOS (∩):

Dados dos conjuntos **A** y **B**, se llama intersección de **A** y **B** al conjunto formado por todos los elementos de **A** que pertenecen también a **B**. Es decir, al conjunto formado por los elementos comunes de **A** y **B**.

El conjunto intersección se representa por $A \cap B$ y se lee «**A** intersección **B**».
Simbólicamente se expresa:

$$A \cap B = \{x/x \in A \wedge x \in B\}$$

GRÁFICAMENTE:



La parte sombreada representa al conjunto $A \cap B$.

EJEMPLOS :

* Dados los conjuntos **V={a ; e ; o ; u}** y **P={a ; b ; c ; d ; e}**, la intersección de ambos será : $V \cap P = \{a ; e\}$

* Dados los conjuntos **R={r ; o;m ; a}** y **S={s;t; i}**, la intersección de ambos será: $R \cap S = \{\ \} = \phi$ Es el conjunto vacío porque no tienen algún elemento en común.

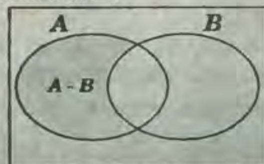
Se dice que dos ***conjuntos son disjuntos*** cuando no tienen algún elemento en común.

III)DIFERENCIA DE CONJUNTOS :

Dados dos conjuntos **A** y **B**, el conjunto diferencia entre **A** y **B** es el conjunto formado por todos los elementos de **A** que no pertenecen a **B**.
Al conjunto diferencia entre **A** y **B** se le representa por $A - B$, y se lee «diferencia de **A** y **B**».
Simbolicamente se expresa :

$$A - B = \{x/x \in A \wedge x \notin B\}$$

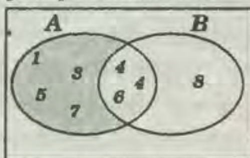
GRAFICAMENTE :



La parte sombreada representa la diferencia **A–B**.

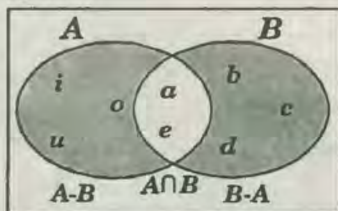
EJEMPLOS :

* Dados los conjuntos $A = \{1;2;3;4;5;6;7\}$ y $B = \{2;4;6;8\}$, la diferencia $A - B$ será: $A - B = \{1;3;5;7\}$, ya que estos elementos pertenecen a **A** y no pertenecen a **B**.



* Dados los conjuntos $A = \{a;e;i;o;u\}$ y $B = \{a;b;c;d;e\}$, $A - B = \{i;o;u\}$ y $B - A = \{b;c;d\}$

Graficamente , sería :



IV) DIFERENCIA SIMETRICA DE CONJUNTOS(△):

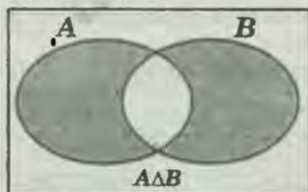
Dados los conjuntos **A** y **B**, el conjunto diferencia simétrica entre **A** y **B** es el conjunto formado por todos los elementos que pertenecen solo a **A** , solo a **B** y no a ambos.

Al conjunto diferencia simétrica entre **A** y **B** se le representa por $A \triangle B$, y se lee «diferencia simétrica de **A** y **B**».

Simbólicamente se expresa:

$$A \triangle B = \{x/x \in (A \cup B) \wedge x \notin (A \cap B)\}$$

* ***GRAFICAMENTE :***



La parte sombreada representa la diferencia simétrica $A \triangle B$.

DE LOS EJEMPLOS ANTERIORES :

* Dados los conjuntos $A = \{1;2;3;4;5;6;7\}$ y $B = \{2;4;6;8\}$, la diferencia simétrica $A \triangle B$ será: $A \triangle B = \{1;3;5;7;8\}$, ya que estos elementos pertenecen solo **A** , solo **B** y no a ambos.

* Dados los conjuntos $A = \{a;e;i;o;u\}$ y $B = \{a;b;c;d;e\}$, entonces :

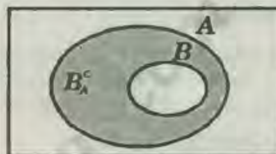
$$A \triangle B = \{i;o;u;b;c;d\}$$

CONJUNTO COMPLEMENTARIO

Dados los conjuntos **A** y **B** , si **B** es un subconjunto de **A** $(B \subset A)$, a la diferencia $A - B$ se la llama conjunto complementario de **B** respecto a **A**.

En este caso , $A - B$ se representa por B_A^C

Graficamente:



EJEMPLO :

$A = \{oca; carro; pato; piedra; gallina\}$ y
si
$B = \{oca; pato, gallina\}$
$\Rightarrow A - B = B_A^C = \{carro; piedra\}$

Cuando el conjunto que se toma como referencia para hacer la diferencia es el conjunto universal se llama simplemente conjunto complementario.

U–D expresa el conjunto complementario de **D** y se puede representar por D, $\overline{D}$, D^C.

EJEMPLO :

$U = \{1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$ el conjunto universal
Sea
$A = \{1;2;3;4\}$
$\Rightarrow A^C = \{5;6;7;8;9\}$

Aplicando la definición de complementario como la diferencia respecto al conjunto universal , se observa que :

* El complementario del conjunto universal es el conjunto vacío.

$$U^c = U - U = \{x/x \in U \wedge x \notin U\} = \phi$$

* El complementario del conjunto vacío es el universal : $\phi^C = U - \phi = \{x/x \in U \wedge x \notin \phi\} = U$

* El complementario del complementario de un conjunto es el mismo conjunto

$$(A')' = U - (A') = \{x/x \in U \wedge x \notin A^C\} = A$$

PROPIEDADES DE LAS OPERACIONES (ÁLGEBRA DE CONJUNTOS)

PROPIEDADES DE LA UNIÓN DE CONJUNTOS

CONMUTATIVA :

Dados dos conjuntos cualesquiera **A** y **B**, siempre se cumple que : $A \cup B = B \cup A$

ASOCIATIVA :

Dados tres conjuntos cualesquiera , siempre se cumple que : $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

ELEMENTO NEUTRO :

La unión del conjunto vacío con cualquier otro conjunto A es igual a dicho conjunto A.

$$A \cup \phi = \phi \cup A = A$$

Donde ϕ es el elemento neutro de la unión de conjuntos .

ABSORBENTE :

La unión del conjunto universal con cualquier otro conjunto A es igual al conjunto universal. como:

$$A \subset U \rightarrow A \cup U = U \cup A = U$$

IDEMPOTENCIA :

La unión de un conjunto cualquiera , A , consigo mismo , es siempre el mismo conjunto, A. así :

$$A \cup A = A$$

PROPIEDADES DE LA INTERSECCIÓN DE CONJUNTOS

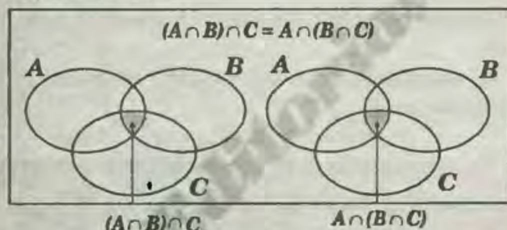
CONMUTATIVA :

Dados dos conjuntos cualesquiera A y B, siempre se cumple que : $A \cap B = B \cap A$

ASOCIATIVA :

Dados tres conjuntos cualesquiera A, B y C, siempre se cumple que : $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

Gráficamente:



ELEMENTO NEUTRO :

La intersección del conjunto universal con cualquier otro conjunto A es igual a dicho conjunto A .Como :

$$A \subset U \rightarrow A \cap U = U \cap A = A$$

U es el elemento neutro de la intersección de conjuntos.

ABSORBENTE :

La intersección del conjunto vacío con cualquier otro conjunto A es igual al conjunto vacío.

$$A \cap \phi = \phi \cap A = \phi$$

IDEMPOTENCIA :

La intersección de un conjunto cualquiera A consigo mismo es siempre el mismo conjunto A. $A \cap A = A$

PROPIEDADES DE LA UNIÓN y LA INTERSECCIÓN DE CONJUNTOS

DISTRIBUTIVA :

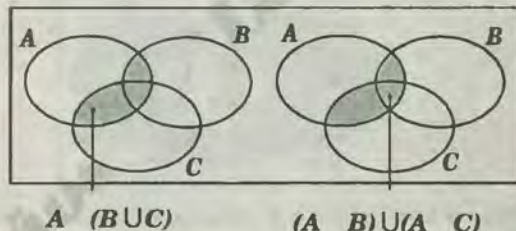
Dados tres conjuntos cualesquiera A , B y C, siempre se cumple que : $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Esta es la propiedad distributiva de la intersección respecto de la unión. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

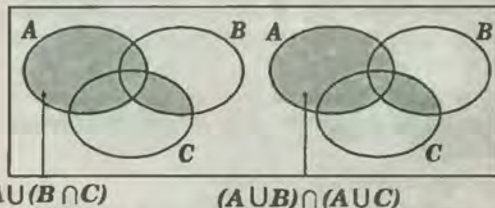
Esta es la propiedad distributiva de la unión respecto de la intersección.

Graficamente:

* Distributiva de la intersección respecto de la unión.



* Distributiva de la unión respecto de la intersección.

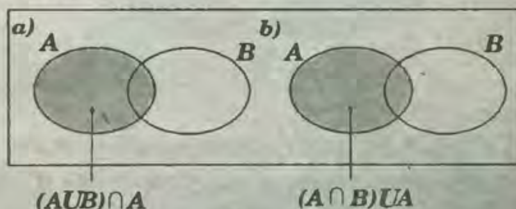


SIMPLIFICATIVAS O DE ABSORCIÓN

Dados dos conjuntos cualesquiera A y B, siempre se cumple que:

$$I)\ (A \cup B) \cap A = A \quad II)\ (A \cap B) \cup A = A$$

Graficamente:

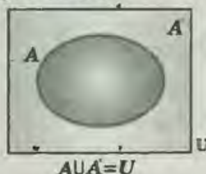


COMPLEMENTARIA :

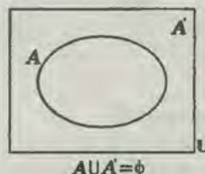
Dado un conjunto cualquiera A , siempre se cumple

que : $A \cup A' = U$ $\quad A \cap A' = \phi$

Graficamente:



$A \cup A' = U$



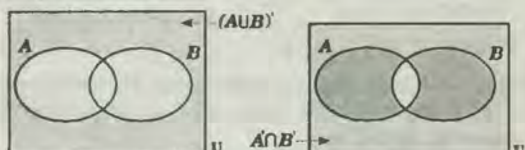
$A \cup A' = \phi$

LEYES DE MORGAN :

De las propiedades anteriores se pueden deducir las siguientes fórmulas que relacionan la unión , la intersección y la complementación de conjuntos. Estas se llaman leyes de Morgan y son dos:

I) $(A \cup B)' = A' \cap B'$

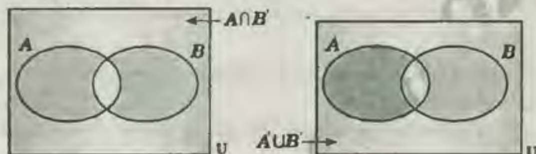
Gráficamente :



$(A \cup B)'$ es la zona sombreada $A' \cap B'$ es la zona más oscura

II) $(A \cap B)' = A' \cup B'$

Gráficamente:



$(A \cap B)'$ es la zona sombreada $A' \cup B'$ es todo la zona sombreada

EJEMPLO:

Sea $U = \{2 ; 4 ; 6 ; 8 ; 10 ; 12 ; 14 ; 16 ; 18 ; 20\}$ el conjunto universal, $A = \{x \in U / x$ es múltiplo de $3\}$ y $B = \{x \in U / x$ es múltiplo de $4\}$. Comprobar las leyes de Morgan con **A** y **B**.

RESOLUCIÓN :

$A = \{6 ; 12 ; 18\}$ y $B = \{4 ; 8 ; 12 ; 16 ; 20\}$.

$A' = \{2 ; 4 ; 8 ; 10 ; 14 ; 16 ; 20\}$

$B = \{2;6;10;14;18\}$

$(A \cup B)' = (\{6;12;18;4;8;16;20\})' = \{2 ; 10 ; 14\}$.

$(A \cup B) = \{2 ; 10 ; 14\}$

*Por tanto : $(A \cup B)' = A' \cap B'$.

$(A \cup B)' = (\{12\})' = \{2 ; 4 ; 6 ; 8 ; 10 ; 14 ; 16 ; 18 ; 20\}$.

$A' \cup B' = \{2 ; 4 ; 8 ; 10 ; 14 ; 16 ; 20 ; 6 ; 18\}$

* Por tanto : $(A \cap B)' = A' \cup B'$.

NÚMERO DE ELEMENTOS DEL CONJUNTO UNIÓN

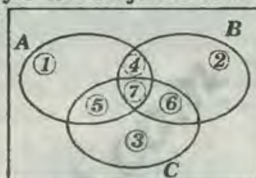
Si **A** es un conjunto , el número de elementos de **A** se representa por n(*A*).

EN GENERAL :

si **A** y **B** son dos conjuntos cualesquiera :

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

* Sean **A , B** y **C** tres conjuntos cualesquiera que se representan:



Utilizando como apoyo esta representación, se verá que:

$n(A) \rightarrow$ zonas	1			4	5		7
$n(B) \rightarrow$ zonas		2		4		6	7
$n(C) \rightarrow$ zonas			3		5	6	7

$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$

Veamos:

$n(A) + n(B) + n(C) <>$ ① + ④ + ⑤ + ⑦ + ② + ④ + ⑥ + ⑦ + ③ + ⑤ + ⑥ + ⑦

*Al sumar $n(A) + n(B) + n(C)$ se cuenta dos veces la zona ④, dos veces la zona ⑤ y dos veces la zona ⑥ y la zona ⑦ se cuenta tres veces.

$n(A \cap B) <>$ zonas ④ y ⑦

$n(A \cap C) <>$ zonas ⑤ y ⑦

$n(B \cap C) <>$ zonas ⑥ y ⑦

$n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) <>$

① + ② + ③ + ④ + ⑤ + ⑥

Al restar $n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C)$ se elimina la vez que se habían contado de más las zonas ④, ⑤, ⑥. Sin embargo, se resta tres veces la zona ⑦; luego es necesario volverla a sumar.

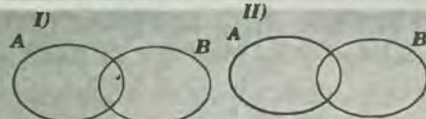
La zona ⑦ es $A \cap B \cap C$, luego se ha de sumar $n(A \cap B \cap C)$.

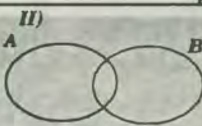
Par tanto:

$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$

INTERPRETACIÓN DE LAS ZONAS DE LOS CONJUNTOS

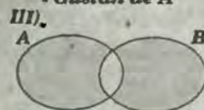
Veamos para dos conjuntos :



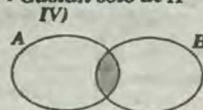


Interpretación
- *Prefieren A*
- *Gustan de A*

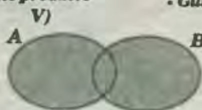
Interpretación
- *Prefieren sólo A*
- *Gustan sólo de A*



Interpretación
- *Prefieren sólo uno de ellos*
- *Gustan de un sólo producto*

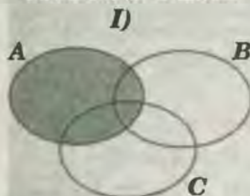


Interpretación
- *Prefieren A y B*
- *Gustan de ambos*

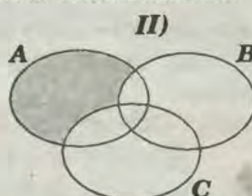


Interpretación
- *Prefieren A o B*
- *Les gusta A o B*

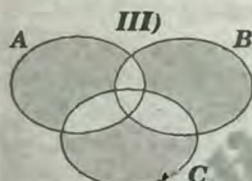
VEAMOS PARA TRES CONJUNTOS



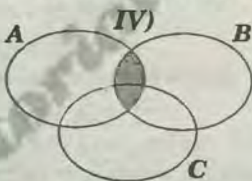
Interpretación
- *Prefieren A*
- *Gustan de A*



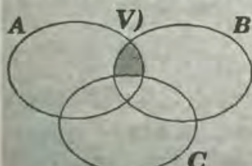
Interpretación
- *Prefieren sólo A*
- *Gustan sólo de A*



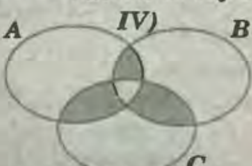
Interpretación
- *Prefieren sólo uno de ellos*
- *Gustan de un sólo producto*



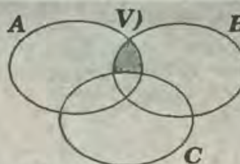
Interpretación
- *Prefieren A y B*
- *Gustan de A y B*



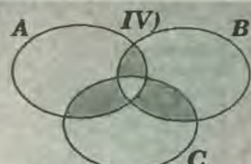
Interpretación
- *Prefieren A y B pero no C*
- *Gustan de A y B pero no C*



Interpretación
- *Prefieren sólo dos de ellos*
- *Gustan sólo de 2 productos*



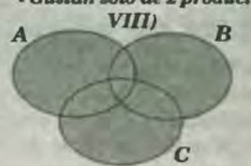
Interpretación
- *Prefieren A y B pero no C*
- *Gustan de A y B pero no C*



Interpretación
- *Prefieren sólo dos de ellos*
- *Gustan sólo de 2 productos*



Interpretación
- *Prefieren los 3 productos*
- *Gustan de A, B y C*



Interpretación
- *Prefieren A o B o C*
- *Gustan de A o B o C*

EJEMPLO 1 :

Se ha realizado una encuesta sobre la preferencia en el desayuno a ***30*** personas , de los cuales se obtuvo lo siguiente :

- ***15*** de ellos les gusta solo leche en el desayuno.
- De los que prefieren solo café , son en cantidad igual a los que no prefieren ni café , ni leche , de los cuales son ***6*** .

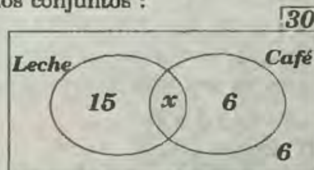
I) ¿Cuántas personas les gusta para el desayuno café con leche?

II) ¿Cuántas personas les gusta para el desayuno café o leche?

III) ¿Cuántas personas les gusta en el desayuno, leche?

RESOLUCION :

*Veamos el esquema , considerando que solo tenemos dos conjuntos :



*como todas las zonas deben sumar nuestro universo *(30)*, entonces:

$$15 + x + 6 + 6 = 30 \rightarrow x = 3$$

*Respondiendo a las preguntas :

I) Las personas que prefieren café con leche para el desayuno son : $x = 3$

II) Las personas que prefieren café o leche para el desayuno son : $15 + x + 6 = 24$

III) Las personas que prefieren para el desayuno leche son : $15 + x = 18$

EJEMPLO 2 :

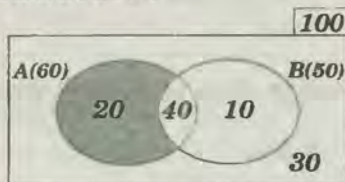
Un empresa de cosméticos ha lanzado al mercado dos productos **A** y **B** . De los cuales pasado un mes , ha contratado una empresa encuestadora para determinar la preferencia sobre sus productos **A** y**B.**

Se selecciona a ***100*** personas entre señoritas y señoras para dar su preferencia sobre los productos mencionados ; obteniendose los siguientes resultados :

- ***60*** de ellos prefieren el producto **A**
- ***50*** de ellos gustan del producto **B**
- Ademas ***20*** prefieren sólo el producto **A**

¿cuál de los productos tuvo más impacto en las damas y cuántas de ellas no prefieren ninguno de los productos lanzados al mercado ?

RESOLUCION :



*El producto que tuvo más impacto en las damas es**A**.

*De las que no prefieren ninguno de estos productos son ***30*** .

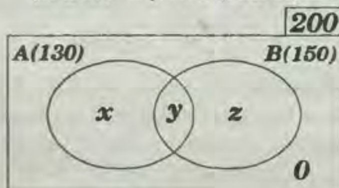
EJEMPLO 3 :

De un grupo de ***200*** personas , se les ha preguntado sobre la preferencia sobre dos medios de comunicación **A** y **B** . ***130*** prefieren **A** , ***150*** prefieren el medio **B** , además 120 prefieren sólo uno de ellos. ¿Cuántos prefieren sólo **A**?, sabiendo que de las ***200*** personas al menos uno de ellos prefiere un medio de comunicación .

RESOLUCIÓN :

*Este último dato es importante , significa que no hay personas que no les gusta ninguno de los medios **A** o **B** , es decir :

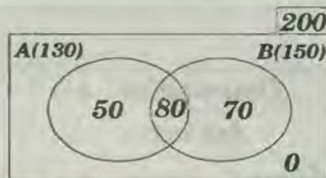
$$(A \cup B)' = \phi \Rightarrow n(A \cup B) = 200$$



*dato : $x + z = 120$

*pero : $x + y + z = 200 \Rightarrow y = 80$

*de lo que se puede observar en el gráfico.



*Los que prefieren solo **A** son ***50***

EJEMPLO 4 :

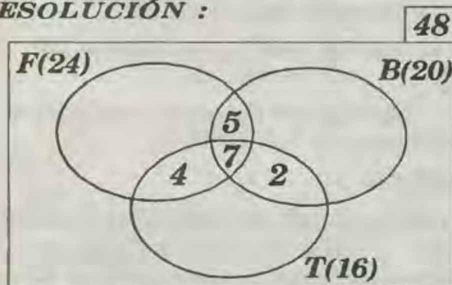
Se ha hecho una encuesta a un grupo de ***48*** jóvenes sobre sus preferencias respecto a tres deportes : fútbol , baloncesto y tenis. Los resultados han sido: a ***24*** les gusta el fútbol, a ***20*** el baloncesto y a ***16*** el tenis . De ellos , a ***12*** les gusta el fútbol y el baloncesto , a ***9*** el baloncesto y el tenis , a ***11*** el fútbol y el tenis y a ***7*** los tres deportes . Calcule :

I) el número de jóvenes a los que les gusta al menos uno de los tres deportes y el de los que no les gusta ninguno.

II) El número de jóvenes a los que les gusta un sólo deporte.

III) El número de jóvenes a los que les gusta exactamente 2 de los deportes.

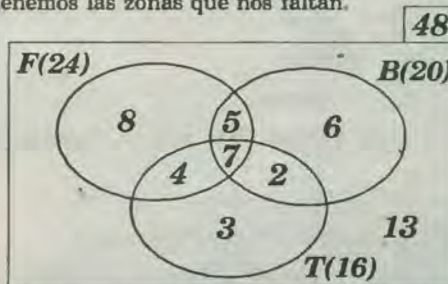
RESOLUCIÓN :



*Notemos del gráfico :

$$n(F \cap B \cap T) = 7 \quad ; \quad n(F \cap B) = 12$$
$$n(B \cap T) = 9 \quad ; \quad n(F \cap T) = 11$$

*Lo cual se muestra en el gráfico ; a continuación rellenemos las zonas que nos faltan.



*Respondiendo a las preguntas :

I) Notar que al preguntarnos al menos uno de los ***3***

		Unión	interseción
ÁLGEBRA DE BOOLE	Conmutativa	$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B \equiv B \cap A$
	Asociativa	$A \cup (B \cup C) \equiv (A \cup B) \cup C$	$A \cap (B \cap C) \equiv (A \cap B) \cap C$
	Elemento Neutro	$A \cup \phi \equiv \phi \cup A \equiv A$	$A \cap U \equiv U \cap A \equiv A$
	Absorbente	$A \cup U \equiv U \cup A \equiv U$	$A \cap \phi \equiv \phi \cap A \equiv \phi$
	Idempotente	$A \cup A \equiv A$	$A \cap A \equiv A$
	Distributiva	$A \cup (B \cap C) \equiv (A \cup B) \cap (A \cup C)$	$A \cap (B \cup C) \equiv (A \cap B) \cup (A \cap C)$
	absorción	$(A \cup B) \cap A \equiv A$	$(A \cap B) \cup A \equiv A$
	Complementaria	$A \cup A' \equiv U$	$A \cap A' \equiv \phi$
LEYES DE MORGAN		$(A \cup B)' \equiv A' \cap B'$	$(A \cap B)' \equiv A' \cup B'$

deportes , puede ser que les guste un deporte o les guste *2* deportes e inclusive los *3* deportes , es por eso que nos están pidiendo $n(A \cup B \cup C) = 35$, de los que no les gusta ninguno son *13* .

II) A los que les gusta un solo deporte son

$$8 + 6 + 3 = 17$$

III) A los jóvenes que les gusta exactamente *2* de los deportes son : $4 + 5 + 2 = 11$

EJEMPLO 1 :

De un grupo de *100* personas entre hombres y mujeres , se notó en cierto instante que *20* hombres están bailando y *30* mujeres no bailan , además de las mujeres que bailan algunas bailan solas . Determine cuántos caballeros asistieron a la reunión , si de las mujeres que bailan son en cantidad igual a los hombres que bailan.

RESOLUCIÓN :

H	M	
①	②	Bailan
③	④	No bailan

*Notemos que significa cada una de las zonas ahí descritas :

La zona ① significa , Hombres que bailan.

La zona ② significa , Mujeres que bailan.

La zona ③ significa , Hombres que no bailan.

La zona ④ significa, Mujeres que no bailan.

*Reemplazando los datos del problema tenemos:

H	M	
20	x	Bailan
x	30	No bailan

*como asistieron *100* personas , entonces

$$20 + x + x + 30 = 100 \rightarrow x = 25$$

*por lo tanto los hombres que asistieron son :

$$20 + x = 45$$

EJEMPLO 2 :

De un aula de clase de los cuales los alumnos pertenecen a las carreras de física o matemáticas , se ha notado lo siguiente : Los varones exceden en *4* a las señoritas; en la carrera de matemáticas los varones exceden en *5* a las señoritas. Sabiendo que hay *10* señoritas que estudian física, y *22* varones en total. ¿Cuántos alumnos hay en el aula de clase?

RESOLUCIÓN :

H(22)	M(18)	
15	10	Matemáticas
7	8	Física

*Del dato, se tiene *22* varones en total y como ellos exceden en *4* a las señoritas, entonces hay *18* señoritas, también en matemáticas los varones exceden en *5* a las señoritas y como hay *10* señoritas, esto implica que hay *15* varones . Por lo tanto el número de alumnos en la clase será :
$15+7+10+8=40$

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1:

Usando las leyes lógicas simplificar la siguiente fórmula lógica:

$$\sim(p \to q) \leftrightarrow \sim(q \to p)$$

A) p B) q C) $p \wedge q$ D) $p \vee q$ E) $p \leftrightarrow q$

RESOLUCIÓN:

* Recuerde que:

$$p \leftrightarrow q \equiv (\sim p \vee q) \wedge (p \vee \sim q) \equiv \sim p \leftrightarrow \sim q$$

* Luego:

$$\sim(p \to q) \leftrightarrow \sim(q \to p) \equiv (p \to q) \leftrightarrow (q \to p)$$

$$\equiv (\sim p \vee q) \leftrightarrow (\sim q \vee p)$$

$$\equiv [\sim(\sim p \vee q) \vee (\sim q \vee p)] \wedge [(\sim p \vee q) \vee \sim(\sim q \vee p)]$$

$$\equiv [(p \wedge \sim q) \vee (\sim q \vee p)] \wedge [(\sim p \vee q) \vee (q \wedge \sim p)]$$

$$\equiv [\{(p \wedge \sim q) \vee \sim q\} \vee p] \wedge [\sim p \vee \{q \vee (q \wedge \sim p)\}]$$

$$\equiv [(\sim q) \vee p] \wedge [(\sim p) \vee q]$$

$$\equiv (q \to p) \wedge (p \to q) \equiv p \leftrightarrow q$$

RPTA : "E"

PROBLEMA 2:

Expresar la siguiente proposición: $(p \wedge q) \vee (r \vee s)$ en otra equivalente donde se use los conectivos: "$\sim$" y "$\to$"

A) $(p \to \sim q) \to (r \to \sim s)$ B) $(\sim p \to q) \to (\sim r \to s)$

C) $(p \to \sim q) \to (r \to s)$ D) $(p \to \sim q) \to (\sim r \to s)$

E) $(\sim p \to q) \to (r \to s)$

RESOLUCIÓN:

* Teniendo en cuenta que: $p \to q \equiv \sim p \vee q$

* Se tiene:

$$(p \wedge q) \vee (r \vee s) \equiv \sim(\sim p \vee \sim q) \vee (r \vee s)$$

$$\equiv (\sim p \vee \sim q) \to (r \vee s)$$

$$\equiv (p \to \sim q) \to (\sim r \to s)$$

RPTA : "D"

PROBLEMA 3:

Al simplifcar la siguiente proposición compuesta:

$[\sim p \to \sim(p \to q)] \vee [[p \wedge (p \to q) \to p]]$ se obtiene:

A) p B) q C) V D) F E) $\sim q$

RESOLUCIÓN:

* Lo equivalente, será:

$$\equiv [\sim p \to \sim(\sim p \vee q)] \vee [(p \wedge (\sim p \vee q)) \to p]$$

$$\equiv [\sim p \to (p \wedge \sim q)] \vee [((p \wedge \sim p) \vee (p \wedge q)) \to p]$$

$$\equiv [p \vee (p \wedge \sim q)] \vee \left[\underbrace{(F \vee (p \wedge q))}_{p \wedge q} \to p\right] \equiv [p] \vee [(p \vee q) \to p]$$

* Pues: $p \vee (p \wedge \sim q) \equiv p$

$$\equiv p \vee [\sim(p \wedge q) \vee p] \equiv p \vee [(\sim p \vee \sim q) \vee p]$$

$$\equiv p \vee [V \vee \sim q]; \text{ pues } \sim p \vee p \equiv V \equiv p \vee [V] \equiv V$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 4:

Usando las leyes lógicas simplificar la siguiente fórmula lógica:

$$[(\sim q \to \sim p) \wedge \sim(\sim p \to \sim q)] \vee (p \to \sim q)$$

A) $p \wedge q$ B) $p \vee q$ C) $\sim(p \wedge q)$ D) $\sim p \vee q$ E) $p \vee \sim q$

RESOLUCIÓN:

* Lo equivalente, será:

$$\equiv [(p \to q) \wedge \sim(q \to p)] \vee (p \to \sim q)$$

$$\equiv [(\sim p \vee q) \wedge \sim(\sim q \vee p)] \vee (\sim p \vee \sim q)$$

$$\equiv [(\sim p \vee q) \wedge (q \vee \sim p)] \vee (\sim p \vee \sim q)$$

$$\equiv [(\sim p \wedge q) \vee (\sim p \vee \sim q)]$$

$$\equiv [(\sim p \wedge q) \vee \sim p] \vee (\sim q)$$

$$\equiv [\sim p] \vee (\sim q) \equiv \sim p \vee \sim q \equiv \sim(p \wedge q)$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 5:

Usando las leyes lógicas simplificar la siguiente fórmula lógica: $(p \to \sim q) \wedge [(q \to \sim p) \vee (q \to \sim r)]$

A) $p \wedge q$ B) $\sim p \vee \sim q$ C) $p \vee \sim r$ D) $q \vee r$ E) $\sim q \vee \sim r$

RESOLUCIÓN:

* Lo equivalente será:

$$\equiv (\sim p \vee \sim q) \wedge [(\sim q \vee \sim p) \vee (\sim q \vee \sim r)]$$

* Como: $m \wedge [m \vee n] \equiv m$, se tiene:

$$\equiv (\sim p \vee \sim q) \wedge [(\sim p \vee \sim q) \vee (\sim q \vee \sim r)]$$

$$\equiv (\sim p \vee \sim q)$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 6:

Usando las leyes lógicas simplificar la siguiente fórmula lógica:

$$\sim\{[\sim p \wedge (q \vee \sim r) \Delta [(q \wedge \sim p) \vee \sim(p \vee r)]]\}$$

A) V B) F C) p D) q E) r

RESOLUCIÓN:

* Lo equivalente, será:

$$\equiv \sim\{[\sim p \wedge (q \vee \sim r)] \Delta [\sim p \wedge q] \vee (\sim p \wedge \sim r)\}$$

$$\equiv \sim \{[\sim p \wedge (q \vee \sim r)] \Delta [\sim p \wedge (q \vee \sim r)]\}$$

$$\equiv \sim \{m \Delta m\} \equiv \sim \{F\} \equiv V$$

RPTA : "A"

PROBLEMA 7:

Usando las leyes lógicas simplificar la siguiente fórmula lógica:

$$\{[(p \wedge q) \vee p] \wedge [(p \Delta q) \vee (p \leftrightarrow q)]\} \vee [(p \vee \sim q) \wedge (p \vee q)]$$

A) p B) q C) $p \wedge q$ D) $p \vee q$ E) $\sim p$

RESOLUCIÓN:

* Lo equivalente, será:

$$\equiv \{[p] \wedge [(p \Delta q)] \vee (p \leftrightarrow q)\} \vee \underbrace{\left[p \vee \underbrace{(\sim q \wedge q)}_{F} \right]}_{P}$$

$$\equiv \{p \wedge [(p \Delta q) \vee (p \leftrightarrow q)]\} \vee p \equiv p$$

* Pues: $(m \wedge n) \vee m \equiv m$

RPTA : "A"

PROBLEMA 8:

Al simplificar la siguiente proposición compuesta:

$$[p \leftrightarrow (q \vee \sim r)] \wedge \{[p \rightarrow (q \wedge \sim r)] \wedge [p \wedge (q \rightarrow r)]\}$$

se obtiene:

A) p B) q C) r D) V E) F

RESOLUCIÓN:

* Nótese que:

$$p \rightarrow (q \wedge \sim r) \equiv p \rightarrow \sim (\sim q \vee r)$$

$$\equiv p \rightarrow \sim (q \rightarrow r) \equiv \sim p \vee \sim (q \leftrightarrow r)$$

$$\equiv \sim [p \wedge (q \rightarrow r)]$$

* Luego lo equivalente a la expresión dada será:

$$[p \leftrightarrow (q \vee \sim r)] \wedge \left\{ \sim \left[\overline{p \wedge (q \rightarrow r)}^{t} \right] \wedge \underbrace{[p \wedge (q \rightarrow r)]}_{t} \right\}$$

$$\equiv [p \leftrightarrow (q \vee \sim r)] \wedge \{\sim t \wedge t\} \equiv [\quad] \wedge F = F$$

RPTA : "E"

PROBLEMA 9:

Al simplificar la siguiente proposición compuesta:

$\sim \{[(\sim q \rightarrow \sim p) \wedge \sim (\sim p \rightarrow \sim q)] \vee (p \rightarrow \sim q)\}$ se obtiene:

A) $p \wedge q$ B) $p \vee q$ C) $\sim (p \wedge q)$ D) $\sim p \vee q$

RESOLUCIÓN:

* Lo equivalente, será:

$$\equiv \sim \{[(q \vee \sim p) \wedge \sim (p \vee \sim q)] \vee (\sim p \vee \sim q)\}$$

$$\equiv \sim \{[(q \vee \sim p) \vee (\sim p \wedge q)] \vee (\sim p \vee \sim q)\}$$

$$\equiv \{[(q \vee \sim p) \wedge \sim p] \wedge q) \vee (\sim p \vee \sim q)\}$$

$$\equiv \sim \{([\sim p] \wedge q) \vee (\sim p \vee \sim q)\}$$

* Pues: $(q \vee \sim p) \wedge \sim p = \sim p$

$$\equiv \sim \{[(\sim p \wedge q) \vee \sim p] \vee \sim q\}$$

$$\equiv \sim (\sim p) \wedge \sim (\sim q) \equiv p \wedge q$$

RPTA : "A"

PROBLEMA 10:

Si # es un operador lógico definido por:

$$p \# q \equiv \{p \vee ((r \rightarrow p) \wedge p)\} \Delta \{q \wedge (p \leftrightarrow \sim p)\}$$

Entonces $p \# q$ es equivalente a:

A) p B) q C) $p \wedge q$ D) $\sim p$ E) $\sim q$

RESOLUCIÓN:

* Dado que:

$$p \# q = \{p \vee ((r \rightarrow p) \wedge p)\} \Delta \underbrace{\left\{ q \wedge \underbrace{(p \leftrightarrow \sim p)}_{F} \right\}}_{F}$$

$$\rightarrow p \# q = \{p \vee ((\sim r \vee p) \wedge p)\} \Delta F$$

$$\rightarrow p \# q = \{p \vee (p)\} \Delta F = p \Delta F \rightarrow p \# q = p$$

RPTA : "A"

PROBLEMA 11:

Si $\updownarrow$ es un conectivo lógico definido mediante: $p \updownarrow q = (p \vee q) \wedge \{\sim (p \leftrightarrow q) \vee (p \leftrightarrow q)\}$ en entonces al simplificar la siguiente fórmula lógica: $\{[(p \vee q) \updownarrow (p \wedge q)] \updownarrow \sim q\} \wedge (q \wedge (p \vee q))$ se obtiene:

A) $p \wedge q$ B) $p \vee q$ C) p D) $p \rightarrow q$

RESOLUCIÓN:

* Como : $p \updownarrow q \equiv (p \vee q) \wedge \underbrace{\{\sim (p \leftrightarrow q) \vee (p \leftrightarrow q)\}}_{V}$

* Entonces : $p \updownarrow q \equiv p \vee q$

* Luego : $\{[(p \vee q) \updownarrow (p \wedge q)] \updownarrow \sim q\} \wedge (q \wedge (p \vee q))$

$$\equiv \{[(p \vee q) \vee (p \wedge q)] \vee \sim q\} \wedge q \equiv \{(p \vee q) \vee \sim q\} \wedge q$$

$$\equiv \left\{ p \vee \underbrace{(q \vee \sim q)}_{V} \right\} \wedge q \equiv \{p \vee V\} \wedge q \equiv p \wedge q$$

RPTA : "A"

PROBLEMA 12:

Se definen los operadores lógicos "*" y "$\odot$" mediante:

$$p * q = \sim p \rightarrow \sim q \qquad p \odot q = \sim p \wedge q$$

entonces simplifcar la fórmula lógica: $((\sim q) \odot p) * ((\sim p) \odot (q))$ se obtiene:

A) p B) q C) $p \wedge q$ D) $p \vee q$ E) V

RESOLUCIÓN:

* De: $p * q \equiv \sim p \to \sim q \equiv q \to p$

$p \odot q \equiv \sim p \wedge q$

* Luego:

$((\sim q) \odot p) * ((\sim p) \odot q) \equiv [\sim(\sim q) \wedge p] * [\sim(\sim p) \wedge q]$

$\equiv (q \wedge p) * (p \wedge q) \equiv (p \wedge q) \to (q \wedge p)$

$\equiv \sim (p \wedge q) \vee (q \wedge p) \equiv (\sim p \vee \sim q) \vee (q \wedge p)$

$\equiv \sim p \vee [\sim q \vee (q \wedge p)] \equiv \sim p \vee \left[\underbrace{(\sim q \vee q)}_{V} \wedge (\sim q \vee p)\right]$

$\equiv \sim p \vee [\sim q \vee p] \equiv \sim p \vee (p \vee \sim q)$

$\equiv \underbrace{(\sim p \vee p)}_{V} \vee \sim q \equiv V \vee \sim q \equiv V$

RPTA : "E"

PROBLEMA 13:

Dada la siguiente fórmula lógica: $S: (r \to p) \leftrightarrow (\sim q \to r)$ indique el valor de verdad de las siguientes afirmaciones:

I) Si p y q son verdaderas, para que S sea verdadera el valor de verdad de r siempre es F.

II) Si r es falsa y S es falsa, entonces q es F.

III) Si r es verdadera y P es falsa, entonces S es V.

A) FVV B) FVF C) VVF D) FFV E) FFF

RESOLUCIÓN:

* De: $S: (r \to p) \leftrightarrow (\sim q \to r)$

I) p es V y q es V

$S \equiv (r \to V) \leftrightarrow (F \to r) \to S \equiv (V) \leftrightarrow (V) = V$

$\to S$ siempre es V, para cualquier valor de r .... (FALSA)

II) r es F y S es F, se tiene:

$(F \to p) \leftrightarrow (\sim q \to F) = F(V) \leftrightarrow (\sim q \to F) \equiv F$

* Entonces $\sim q \equiv V \to F \equiv F$

*Entonces $\sim q \equiv V$; q es F ....(VERDADERO)

III) r es V y p es F, se tiene:

$S \equiv (V \to F) \leftrightarrow (\sim q \to V)$

$\to S \equiv (F) \leftrightarrow (V) = F$..................................(FALSA)

RPTA : "B"

PROBLEMA 14:

Si la siguiente proposición: $(p \wedge \sim q) \to (r \to t)$ es falsa, indicar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I) $(r \leftrightarrow t) \vee \sim r$

II) $[(r \leftrightarrow p) \wedge (t \vee r)] \vee (\sim t)$

III) $(\sim p \to r) \vee \sim t$

A) VVV B) VVF C) VFV D) FVV E) FVF

RESOLUCIÓN:

* Como: $(p \wedge \sim q) \to (r \to t)$ es F

* Entonces: $p \wedge \sim q$ es V y $r \to t$ es F

* Luego: p es V; q es F; r es V y t es F

I) $(r \leftrightarrow t) \vee \sim r \equiv (V \leftrightarrow F) \vee F \equiv (F) \vee F \equiv F$

II) $[(r \leftrightarrow p) \wedge (t \vee r)] \vee (\sim t) \equiv [(v \leftrightarrow v) \wedge (F \vee V) \vee (V)]$

$\equiv [(V) \wedge (V)] \vee V \equiv V$

III) $(\sim p \to r) \vee \sim t \equiv (F \to V) \vee V \equiv (V) \vee V \equiv V$

RPTA : "D"

PROBLEMA 15:

Si p, q, r, s, t, u, v, y w son proposiciones lógicas tal que: $p \to (q \to r)$ es falsa, $q \leftrightarrow (p \to t)$ es falsa, indicar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I) $\sim t \wedge (r \to w)$ II) $q \vee (\sim r \leftrightarrow u)$ III) $t \to (s \Delta r)$

A) VVV B) VVF C) VFV D) FVV E) FFF

RESOLUCIÓN:

* Como: $p \to (q \to r)$ es F

* Entonces: p es V y $q \to r$ es F

* Luego: p es V; q es V y r es F $q \leftrightarrow (p \to t)$ es F

* De donde: $p \to t$ es F y como p es V entonces t es F.

* Ahora:

I) $\sim t \wedge (r \to w) = V \wedge (F \to w) \equiv V \wedge (V) \equiv V$

II) $q \vee (\sim r \leftrightarrow u) \equiv V \vee (\sim r \leftrightarrow u) \equiv V$

III) $t \to (s \Delta r) \equiv F \to (s \Delta r) \equiv V$

RPTA : "A"

PROBLEMA 16:

Si p, q, x, z, y, t son proposiciones lógicas tal que cumplen las condiciones:

$p \Delta q$ es verdadera, $-x \to y$ es verdadera; indicar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I) $z \to \sim p \vee \sim q$ II) $p \leftrightarrow \sim q$ III) $(\sim x \wedge \sim y) \to t$

A) VVV B) FFF C) VVF D) FFV E) FVF

RESOLUCIÓN:

* Como: $p \Delta q$ es V, $\wedge \sim x \to y$ es V

Luego: p y q tienen valores opuestos: $\sim x \to y \equiv x \vee y$ es V

* Ahora:

I) $z \to \underbrace{\sim p \vee \sim q}_{V}$ pues uno de ellos es $V \equiv z \to V \equiv V$

II) $p \leftrightarrow \sim q$ es V

* Pues p y $\sim q$ tienen el mismo valor

III) $(\sim x \wedge \sim y) \to t \equiv \sim (x \vee y) \to t \equiv \sim (V) \to t = F$

$\to t \equiv V$

RPTA : "A"

PROBLEMA 17:

Si p, q, r, s, t, w son proposiciones lógicas tales que $(p \rightarrow \sim r) \leftrightarrow (s \leftrightarrow w)$ es verdadera y $(\sim w \rightarrow \sim s)$ es falsa. Entonces determinar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

$I) \sim p \rightarrow (q \leftrightarrow t)$ $\quad II) (r \rightarrow \sim s) \rightarrow (q \vee t)$

$III) (w \rightarrow q) \leftrightarrow (p \vee \sim t)$

A) VVF B) FVV C) VVV D) FVF E) VFV

RESOLUCIÓN:

* Como: $\sim w \rightarrow \sim s$ es falsa
* Entonces: w es falso $\wedge s$ es verdadera
* Además: $(p \rightarrow \sim r) \leftrightarrow (s \leftrightarrow w)$ es verdadera
* Luego como: $s \rightarrow w$ es falso
* Entonces: $(p \rightarrow \sim r)$ es falso
* De donde: p es V y r es V
* Ahora:

$I) \sim p \rightarrow (q \leftrightarrow t)$ $\quad F \rightarrow (\quad)$ *es verdadero*

$II) (r \rightarrow \sim s) \rightarrow (q \vee t)$ $\quad \underbrace{V \rightarrow F}$

$F \rightarrow (\quad)$ *es verdadero*

$III) (w \rightarrow q) \leftrightarrow (p \vee \sim t)$

$\underbrace{F}$ $\quad \underbrace{V}$

$V \quad \leftrightarrow \quad V$ *es verdadero*

RPTA : "C"

PROBLEMA 18:

Si la proposición: $(r \vee s) \rightarrow [(p \wedge \sim s) \rightarrow (p \wedge \sim q)]$ es falsa, entonces determinar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

$I) (p \wedge \sim q) \leftrightarrow r$ $\quad II) q \wedge (\sim p \vee \sim s)$

$III) [\sim p \rightarrow r] \vee \sim s$

A) VVV B) VFV C) VFF D) FFV E) FVF

RESOLUCIÓN:

* Como: $(r \vee s) \rightarrow [(p \wedge \sim s) \rightarrow (p \wedge \sim q)]$ es F
* Entonces: $r \vee s$ es verdadera y $(p \wedge \sim s) \rightarrow$ es falsa
* De donde: $p \wedge \sim s$ es verdadera y $p \wedge \sim q$ es falsa
* Por lo que: p es V; q es V; s es F; r es V

$I) \underbrace{(p \wedge \sim q)} \leftrightarrow r$

$F \leftrightarrow V$ *es falso*

$II) q \wedge (\sim p \vee \sim s)$

$V \wedge (V)$ *es falso*

$III) [\sim p \rightarrow r] \vee \sim s$

$(\quad) \vee V$ *es verdadero*

RPTA : "D"

PROBLEMA 19:

Si la proposición $(p \wedge q) \rightarrow (\sim s \rightarrow r)$ es falsa, entonces determinar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

$I) [\sim p \rightarrow (\sim q \rightarrow r)] \vee [p \rightarrow (\sim q \wedge s)]$

$II) \{[q \vee (s \rightarrow t)] \rightarrow u\} \wedge \{\sim s \wedge r\}$

$III) (p \rightarrow q) \wedge (p \leftrightarrow \sim q)$

A)VFF B)VVF C)FVV D)FVF E)FFF

RESOLUCIÓN:

* Como: $(p \wedge q) \rightarrow (\sim s \rightarrow r)$ es falsa
* Entonces: $(p \wedge q)$ es verdadero y $(\sim s \rightarrow r)$ es falsa
* De donde: p es V; q es V; s es F; r es F
* Ahora:

$I) [\sim p \rightarrow (\sim q \rightarrow r)] \vee [p \rightarrow (\sim q \wedge s)]$

$F \rightarrow \quad (V) \vee (\quad)$ *es verdadero*

$II) \{[q \vee (s \rightarrow t)] \rightarrow u\} \wedge \underbrace{\{\sim s \wedge r\}}_{V \wedge F}$

$(\quad) \wedge F$ *es falso*

$III) (p \rightarrow q) \wedge \underbrace{(p \leftrightarrow \sim q)}$

$V \leftrightarrow F$

$(\quad) \wedge F$ *es falso*

RPTA : "A"

PROBLEMA 20:

Si la proposición: $(\sim p \rightarrow r) \rightarrow p$ es falsa, determinar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

$I) (\sim p \wedge r) \rightarrow [\sim r \wedge (p \rightarrow r)]$

$II) p[(p \vee s) \rightarrow r] \rightarrow r$

$III) \rightarrow [(r \rightarrow \sim p) \Delta \sim r]$

A) VFV B) FVV C) FFF D) VFF

RESOLUCIÓN:

* Como: $(\sim p \rightarrow r) \rightarrow p$ es falsa
* Entonces: $(\sim p \rightarrow r)$ es verdadera y p es falsa.
* Como: $\underbrace{\sim p} \rightarrow r$ entonces r es verdadera

$V \quad V$

* Luego:

$I) (\sim p \wedge r) \rightarrow [-r \wedge (p \rightarrow r)]$ *es falsa*

$\underbrace{V \wedge V}$ $\quad \underbrace{F \wedge V}$

$V \quad \rightarrow \quad F$

$II) p \rightarrow [(r \rightarrow \sim p) \Delta \sim r]$ $\quad F \rightarrow (\quad)$ *es verdadera*

$III) [(p \vee s) \rightarrow \sim r] \rightarrow r$ $\quad (\quad) \rightarrow V$ *es verdadera*

RPTA : "B"

PROBLEMA 21:

Si la proposición: "No es cierto que , estudiemos y no aprobemos" es *verdadera* , entonces podemos afirmar:

A) Aprobamos y no estudiamos
B) Estudiamos o aprobamos
C) Estudiamos o no aprobamos
D) Aprobamos o no estudiamos
E) Estudiamos y aprobamos

RESOLUCIÓN:

* Sea: p: estudiemos q: aprobemos, entonces; "No es cierto que, estudiemos y no aprobemos" $\equiv \sim (p \wedge \sim q)$ es verdadera

* Entonces: $\sim p \vee \sim (\sim q)$ es verdadera

* Entonces: $q \vee \sim p$ es verdadera, es decir: "aprobamos o no estudiamos".

RPTA : "D"

PROBLEMA 22:

Si x es un número entero y f es una expresión definida por $f_{(x)}=2x^2+3x$ tal que:

$$f_{(x)}=\begin{cases} V \text{ , si } f_{(x)} \text{ es par} \\ F \text{ , si } f_{(x)} \text{ es impar} \end{cases}$$

Entonces al simplificar la siguiente proposición:

$$\left\{\left\{\left[f_{(2)} \vee f_{(1)}\right] \Delta \left[f_{(-1)} \wedge f_{(-2)}\right]\right\} \to \left[f_{(4)} \Delta f_{(-3)}\right]\right\} \vee (\sim p \wedge q)$$

Se obtiene:

A) p *B) ~ p* *C) V* *D) F*

RESOLUCIÓN:

* Para $x \in Z$: $f_{(x)}=2x^2+3x$ $f_{(x)}=(2x+3)x \wedge$ como $2x+3$ es impar

$$\to f_{(x)}=\begin{cases} \text{par, si } x \text{ es par} \\ \text{impar, si } x \text{ es impar} \end{cases}$$

* Por lo que:

$$f_{(x)}=\begin{cases} V\text{, si } x \text{ es par} \\ F\text{, si } x \text{ es impar} \end{cases}$$

* Luego:

$$\left[f_{(2)} \vee f_{(1)}\right] \Delta \left[f_{(-1)} \wedge f_{(2)}\right]$$

$$\underline{V \vee F} \qquad \underline{F \wedge V}$$

$$V \quad \Delta \quad F \equiv V$$

$$f_{(4)} \quad \Delta \quad f_{(3)}$$

* Entonces: $V \quad \Delta \quad F \equiv V$

$$\left\{\underline{\left\{\left[f_{(2)} \vee f_{(1)}\right] \Delta \left[f_{(-1)} \wedge f_{(-2)}\right]\right\}} \to \underline{\left[f_{(4)} \Delta f_{(-3)}\right]}\right\} \vee (\sim p \vee q)$$

$$\underline{\{V \quad \to \quad V\}} \vee (\sim p \vee q)$$

$$\underline{V \quad \vee (\sim p \vee q)}$$

$$V\text{..........(verdadero)}$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 23:

Si $\square$ es un operador lógico definido mediante la siguiente tabla:

p	q	$p \ \square \ q$
V	V	F
V	F	F
F	V	V
F	F	F

Entonces al simplificar la proposición: $[p\square(\sim p\square q)\square q]$, se obtiene:

A) F *B) V* *C) p* *D) q* *E) $p \wedge q$*

RESOLUCIÓN:

* De:

p	q	$p \ \square \ q$	$\sim (q \to p)$	
V	V	F	F	(V)
V	F	F	F	(V)
F	V	V	V	(F)
F	F	F	F	(V)

* Se nota que: $p\square q \equiv \sim (q \to p) \equiv q \wedge \sim p$

* Luego: $[p\square(\sim p\square q)]\square q \equiv [p\square(q \wedge p)]\square q$

$$\equiv [(q \wedge p) \wedge \sim p]\square q \equiv [q \wedge (p \wedge \sim p)]\square q$$

$$\equiv [q \wedge (F)]\square \quad \equiv F\square q \wedge (\sim F) \equiv q \wedge V \equiv q$$

RPTA : "D"

PROBLEMA 24:

Si * es un operador lógico definido mediante la tabla adjunta tal que $(s*t)*(t*s)$ es verdadero:

p	q	$p * q$
V	V	F
V	F	F
F	V	V
F	F	F

Entonces la proposición: $\sim (s*t)$, es:

A) Verdadera *B) Falsa* *C) s* *D) $s \wedge t$* *E) t*

RESOLUCIÓN:

* Análogamente al problema anterior:

$$p*q \equiv \sim (q \to p) \equiv q \wedge \sim p$$

* Luego:

$(s*t)*(t*s) \equiv (t \wedge \sim s)*(s \wedge \sim t)$

$\equiv (s \wedge \sim t) \wedge \sim (t \wedge \sim s) \equiv (s \wedge \sim t) \wedge (\sim t \vee s)$

$\equiv s \wedge [\sim t \wedge (\sim t \vee s)] \equiv s \wedge (\sim t) \equiv \sim (s \to t)$ es V

* Entonces: $s \to t$ es F

* Luego: S es V y t es F

$$\sim (s*t) \equiv \sim (t \wedge \sim s) \equiv \sim t \vee s \equiv t \to s \text{ es } V$$

* Finalmente: $\sim(s * t)$ es **V**

RPTA : "A"

PROBLEMA 25:

Se define el operador lógico #, según la siguiente tabla de verdad:

p	q	q # p
V	V	F
V	F	V
F	V	F
F	F	F

Entonces al simplificar la siguiente fórmula lógica: $(p \# q) \# [(\sim q \vee p) \# (p \rightarrow q)]$ se obtiene

A) $p \rightarrow q$ B) V C) F D) $\sim p$ E) $q \vee p$

RESOLUCIÓN:

* De la tabla de verdad se nota que:

$(q \# p) \equiv \sim(p \rightarrow q) \equiv \sim(\sim p \vee q) \equiv p \wedge \sim q \equiv \sim q \wedge p$

* Luego:

$$(p \# q) \# [(\sim q \vee p) \# (p \rightarrow q)] \equiv$$
$$\equiv (\sim p \wedge q) \# [(\sim q \vee p) \# (\sim p \vee q)]$$
$$\equiv (\sim p \wedge q) \# [\sim(\sim q \vee p) \wedge (\sim p \vee q)]$$
$$\equiv \sim(\sim p \wedge q) \wedge [(q \wedge \sim p) \wedge (\sim p \vee q)]$$
$$\equiv (p \vee \sim q) \wedge \left[q \wedge \underbrace{\{\sim p \wedge (\sim p \vee q)\}}_{\sim p} \right]$$
$$\equiv (p \vee \sim q) \wedge (q \wedge \sim p)$$
$$\equiv (p \vee \sim q) \wedge \sim(p \vee \sim q) \equiv m \wedge \sim m \equiv F$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 26:

Si * es un operador lógico definido mediante la siguente tabla de verdad:

p	q	p * q
V	V	F
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Entonces al simplificar la proposición: $(p * q) * (q * p)$, se obtiene:

A) $\sim p \wedge q$ B) $p \vee q$ C) $p \wedge q$ D) $p \wedge \sim q$ E) $\sim p \wedge \sim q$

RESOLUCIÓN:

* De:

p	q	p * q	~ (p ∨ q)	
V	V	F	F	(V)
V	F	F	F	(V)
F	V	F	F	(V)
F	F	V	V	(F)

* Se nota que: $p * q \equiv \sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$

* También nótese que: $p * q \equiv q * p \wedge r * r \equiv \sim r$

* Luego: $(p * q) * (q * p) \equiv (p * q) * (p * q)$

$$\equiv \sim(p * q) \equiv \sim[\sim(p \vee q)] \equiv p \vee q$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 27:

Con respecto al conjunto: $B = \{1; 2; 0; \phi; \{0\}\}$ se definen las siguientes proposiciones:

I) $2 \in B$ IV) $\{\{0\}\} \subset B$ VII) $\{\phi\} \in B$

II) $\{\phi\} \subset B$ V) $\phi \subset B$ VIII) $\{0; \{0\}\} \in B$

III) $\{1\} \notin B$ VI) $\{\{1\}; 2; 0\} \subset B$

Entonces el número de proposiciones verdaderas es:

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

RESOLUCIÓN:

* Tenga en cuenta que: $x \in A \leftrightarrow \{x\} \subset A$

* Para: $B = \{1; 2; 0; \phi; \{0\}\}$

I) $2 \in B$..........(VERDADERA)

II) $\phi \in B \rightarrow \{\phi\} \subset B$..........(VERDADERA)

III) $1 \in B \rightarrow \{1\} \subset B \rightarrow \{1\} \notin B$..........(VERDADERA)

IV) $\{0\} \in B \rightarrow \{\{0\}\} \subset B$..........(VERDADERA)

V) $\phi \subset B$, ∀ conjunto B..........(VERDADERA)

VI) $\{\{1\}; 2; 0\} \not\subset B$ pues $\{1\} \not\subset B$..........(FALSA)

VII) $\phi \in B$, pero $\{\phi\} \not\subset B$..........(FALSA)

VIII) $0 \in B \wedge \{0\} \in B \rightarrow \{0; \{0\}\} \subset B$.....(FALSA)

* Entonces hay 5 verdaderas

RPTA : "C"

PROBLEMA 28:

Si A es un conjunto definido por $A = \{a; \phi; \{\phi\}; \{a\}\}$, entonces indicar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

$p: \phi \subset A \wedge [\phi \in A \wedge \{a\} \in A]$

$q: [\{\phi\} \subset A \wedge \{\{\phi\}\} \subset A \wedge \{a\} \subset A]$

$r: \{\{a\}\} \subset A \wedge [a \in \{a\} \wedge \{a\} \in \{\{a\}\}]$

A) VVV B) VFV C) FFF D) VVF E) VFF

RESOLUCIÓN:

* De lo dado:

$$I) \underbrace{\phi \subset A}_{V} \wedge \left\{ \underbrace{\phi \in A}_{V} \wedge \underbrace{\{a\} \in A}_{V} \right\} \equiv V$$

* Luego, p es verdadera.

II) $\left[\underbrace{\{\phi\}\subset A}\wedge\underbrace{\{\{\phi\}\}\subset A}\right]\wedge\underbrace{\{a\}\subset A}$

$(V\wedge V)\quad\wedge\quad V\equiv V$

* Pues $\phi\in A$, $\{\phi\}\in A$, $a\in A$

* Luego, q es verdadera

III) $\underbrace{\{\{a\}\}\subset A}\wedge\left[\underbrace{a\in\{a\}}\wedge\underbrace{\{a\}\in\{\{a\}\}}\right]$

$V\quad\wedge\quad(V\quad\wedge\quad V)\equiv V$

* Pues, $\{a\}\in A$ evidente

* Luego, r es verdadero

RPTA : "A"

PROBLEMA 29:

Sean A y B dos conjuntos definidos por $A=\{\{B\};\phi;\{\phi\}\}$ y $B=\{\{A\};\{\phi\};A\}$. Con respecto a los conjuntos A y B se definen las siguientes afirmaciones:

I) $\phi\in(A\cap B)$ *II)* $\{\{B\}\}\subset A$ *III)* $\phi\in B$

IV) $A\in\{A;\{B\}\}$ *V)* $A\cap B=\phi$

Entonces el número de afirmaciones falsas son:

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

RESOLUCIÓN:

* De lo dado:

I) $\phi\in A\wedge\notin B\rightarrow\phi\notin A\cap B$ ....*(FALSA)*

II) $\{B\}\in A\rightarrow\{\{B\}\}\subset A$ ....*(VERDARERA)*

III) $\phi\in B$ ....*(FALSA)*

IV) $A\in\{A;\{B\}\}$ *(es claro esto)*........*(VERDARERA)*

V) $A\cap B=\{\{\phi\}\}\neq\phi$ ....*(FALSA)*

* Entonces hay 3 falsas

RPTA : "C"

PROBLEMA 30:

Si $A=\{a\in\mathbb{Z}/a^5+4a=5a^3\}$ y

$B=\{a\in A/$existe por lo menos un $b\in Z$ tal que $a=b^2\}$

entonces la suma de elementos del conjunto $(A-B)\cup(B-A)$ es:

A) -1 B) 0 C) 1 D) 2 E) – 2

RESOLUCIÓN:

* De: $a^5+4a-5a^3=0\rightarrow a(a^2-1)(a^2-4)=0$

$\rightarrow a=0;a=1;a=-1;a=2;a=-2$

* Luego: $A=\{-2;-1;0;1;2\}$

* Ahora: $B=\{a\in A/\exists b\in Z:a=b^2\}$

* Es decir $a\in A/a$ es cuadrado perfecto $\rightarrow B=\{0;1\}$

* Como $B\subset A\rightarrow B-A=\phi$, entonces:

$(A-B)\cup(B-A)=(A-B)\cup\phi=A-B=\{-2;-1;2\}$

* Luego la suma es: $-2-1+2=-1$

RPTA : "A"

PROBLEMA 31:

Sean A, B y C subconjuntos no vacíos de un universo U. Determine el valor de verdad de cada una de las afirmaciones siguientes:

I) Si $A\cap C=B\cap C$, entonces $A=B$

II) Si $A=B$, entonces $A\cap C=B\cap C$

III) Si $A\subset(A^C\cup B)$, entonces $A\subset(B\cup C)$

A) VVV B) VFV C) FFV D) FVV E) FFF

RESOLUCIÓN:

I) Si $A\cap C=B\cap C\rightarrow$ (no implica) $A=B$

* Por ejemplo: $A=\{1;2;3;4\}$, $B=\{2;3;4\}$

$\wedge\ C=\{3;4;5\}\rightarrow A\cap C=\{3;4\}$ y $B\cap C=\{3;4\}$, es decir: $A\cap C=B\cap C$

* Pero: $A\neq B$ ....*(FALSO)*

II) Recordemos dos propiedades:

* $A=B\leftrightarrow A\subset B\wedge B\subset A$

* Si : $A\subset B\rightarrow A\cap C\subset B\cap C$, $\forall$ C

$A=B\rightarrow A\subset B\ \wedge\ B\subset A$

$\rightarrow\ \forall$ C conjunto: $A\cap C\subset B\cap C\wedge B\cap C\subset A\cap C$

$\rightarrow A\cap C=B\cap C$ ....*(VERDADERA)*

III) Si : $A\subset(A^C\cup B)\rightarrow$ como $A\not\subset A^C$, se tiene $A\subset B$

$\rightarrow A\subset(B\cup C)$, $\forall$ conjunto C ....*(VERDADERA)*

RPTA : "D"

PROBLEMA 32:

Sean A, B y C conjuntos no vacíos de un universo U. Si $x\in A-(B\cup C^C)$, determine el valor de verdad de cada una de las afirmaciones siguientes:

I) $x\in B$ *II)* $x\in A\cup B$ *III)* $x\in(A\cap B)-B$

A) FFV B) FVV C) VVV D) FVF E) FFF

RESOLUCIÓN:

* Si $x\in A-(B\cup C^C)$

$\rightarrow x\in A\wedge x\notin(B\cup C^C)$

$\rightarrow x\in A\wedge\sim(x\in B\cup C^C)$

$\rightarrow x\in A\wedge\sim(x\in B\vee x\in C^C)$

$\rightarrow x \in A \wedge \sim (x \in B) \vee \sim (x \in C^C)$

$\rightarrow x \in A \wedge x \notin B \wedge x \notin C^C$

I) $x \notin B$ ....*(FALSA)*

II) $x \in A \rightarrow x \in A \cup B$ ....*(VERDADERA)*

III) Como $A \cap B \subset B \rightarrow (A \cap B) - B = \phi$

$\rightarrow x \in (A \cap B) - B$ siginifica $x \in \phi$, lo cual es falso, pues $x \in A (A \neq \phi)$ ....*(FALSA)*

RPTA : "D"

PROBLEMA 33:

Sean A y B dos subconjuntos no vacíos de un universo U. Si $(A - B) \cup (B - A) = A \cup B$, entonces de las siguientes afirmaciones:

I) $A = A - B$ *II)* $B = B - A$ *III)* $A \cap B \neq \phi$

IV) $B \subset A^C$ *V)* $(A \cup B) \subset (A \cap B)^C$

Es (son) falsa(s):

A) Sólo V   *B) Sólo IV*   *C) Sólo III*

D) I y III   *E) IV y V*

RESOLUCIÓN:

* Recuerde que: $A \Delta B (A - B) \cup (B - A)$

Si: $(A - B) \cup (B - A) A \cup B \rightarrow A \Delta B = A \cup B$

* Pero: $A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B) \rightarrow A \cap B = \phi \rightarrow A \wedge B$ son disjuntos

I) $A = A \cap B^C$, pues $A \subset B^C$ por ser A y B disjuntos

$\rightarrow A = A - B$ .... *(VERDADERA)*

II) De modo análogo: $B = B - A$...... *(VERDADERA)*

III) $A \cap B = \phi$ .... *(FALSA)*

IV) Como $A \wedge B$ sondisjuntos $\rightarrow B \subset A^C$ .... *(VERDADERA)*

V) Recuerde que si: $A \subset C \wedge B \subset D$

$\rightarrow A \cup B \subset C \cup D$, por lo que:

* Como $A \subset B^C \wedge B \subset A^C \rightarrow A \cup B \subset B^C \cup A^C$

$\rightarrow A \cup B \subset (A \cap B)^C$ .... *(VERDADERA)*

RPTA : "C"

PROBLEMA 34:

Si A, B y C son tres conjuntos del universo U que cumplen las siguientes condiciones:

p: $(B^C \not\subset A^C \rightarrow A \not\subset B)$ y $B \not\subset A$

q: Si $x \in C \rightarrow x \notin B$

Entonces, cuántos de los siguientes enunciados son verdaderos:

I) $A \not\subset B$ *II)* $C \not\subset (A \cup B)$

III) $(A \Delta B) \supset C$ *IV)* $A = B = C$

A) 4   *B) 0*   *C) 3*   *D) 2*   *E) 1*

RESOLUCIÓN:

$$p: (B^C \not\subset A^C \rightarrow A \not\subset B) \wedge B \not\subset A \equiv$$

$$\equiv [\sim (B^C \subset A^C) \rightarrow \sim (A \subset B)] \wedge B \not\subset A$$

$$\equiv [A \subset B \rightarrow B^C \subset A^C] \wedge B \not\subset A$$

* Pues: $p \rightarrow q \equiv \sim q \rightarrow \sim p$

* Pero: $A \subset B \rightarrow B^C \subset A^C$ es verdadero

* Luego: $B \not\subset A$ q: Si $x \in C \rightarrow x \notin B$

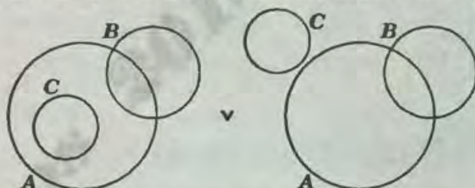
Si: $x \in C \rightarrow x \in B^C \rightarrow C \subset B^C$

$\rightarrow B \cap C = \phi$.........................$(B \wedge C$ son disjuntos$)$

* Ahora:

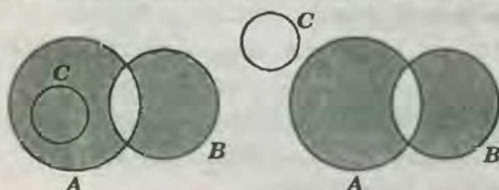
I) $B \not\subset A \not\rightarrow A \not\subset B$ ....*(FALSA)*

II) $B \cap C = \phi \rightarrow C \not\subset B$; entonces puede ocurrir que:



* Es decir C puede o no ser subconjunto de $A \cup B$ ....*(FALSA)*

III) C también puede o no se subconjuntos de $A \Delta B$.



IV) Como $B \not\subset A \rightarrow A \neq B$ ....*(FALSA)*

RPTA : "B"

PROBLEMA 35:

Considere los conjuntos:

$$A = \{\phi; 1\},\ B = \{0; \phi\},\ C = \{\{\phi\}; 0\}$$

determinar el valor de verdad de las siguinetes proposiciones: p: $B = C$

q: $A \cap B = C - B$ r: $B - C = \phi$

A) VVV   *B) FVV*   *C) FFV*   *D) FFF*   *E) VFF*

RESOLUCIÓN:

I) Como: $\phi \neq \{\phi\} \rightarrow B \neq C$

* Luego: p es falsa..*(FALSA)*

$II)\ A\cap B=\{\phi\}\wedge C-B=\{\{\phi\}\}\rightarrow A\cap B\neq C-B$

* Luego, q es falsa .... *(FALSA)*

$III)\ B-C=\{\phi\}\neq\phi$

* Luego, r es falsa..*(FALSA)*

RPTA : "D"

PROBLEMA 36:

Si **A, B** y **C** son tres conjuntos definidos por:

$$A=\{\phi;\{x\};\{\{x\}\}\}\ ;\ B=\{\{x\};x\}\ ;\ D=\{\{x\}\}$$

Entonces al simplificar:

$[(A\Delta D)\cup(A\Delta B)]-[(D\cup B)\Delta A]$ se obtiene:

A) B B) $\{x\}$ C) A D) $\{\phi\}$ E) ϕ

RESOLUCIÓN:

* Como: $A\supset D\rightarrow A\Delta D=A-D=\{\phi;\{\{x\}\}\}$

$A\Delta B=\{\phi;\{\{x\}\}\}\cup\{x\}=\{\phi;x;\{\{x\}\}\}$

$D\subset B\rightarrow D\cup B=B$

* Luego:

$$\left[\underbrace{(A\Delta D)\cup(A\Delta B)}\right]-[(D\cup B)\Delta A]\equiv$$

$$\equiv\ [A\Delta B]\ -\ [B\Delta A]\equiv$$

$$\equiv\ (A\Delta B)\ -\ (A\Delta B)\equiv\phi$$

RPTA : "E"

PROBLEMA 37:

Determine el valor de verdad de las siguientes afirmaciones:

$I)(A-B)\cap(A-C)=A-(B\cap C)$

$II)(A-C)\cup(B-C)=(A\cup B)-C$

$III)A\cap(B-C)=(A\cap B)-(A\cap C)$

A) FVF B) FVV C) VFV D) FFF E) VVF

RESOLUCIÓN:

$I)(A-B)\cap(A-C)\equiv(A\cap B^C)\cap(A\cap C^C)$

$(B\cup C)^C\equiv A-(B\cup C)$..........................*(FALSA)*

$II)(A-C)\cup(B-C)\equiv(A\cap C^C)\cup(B\cap C^C)$

$\equiv(A\cup B)\cap C^C\equiv(A\cup B)-C$..............*(VERDADERA)*

$III)A\cap(B-C)\equiv A\cap(B\cap C^C)\equiv(A\cap B)\cap C^C$

$\equiv\left(\underbrace{A\cap A^C}_{\phi}\right)\cup[(A\cap B)\cap C^C]$

$\equiv[(A\cap B)\cap A^C]\cup[(A\cap B)\cap C^C]$

$\equiv(A\cap B)\cap[A^C\cup C^C]\equiv(A\cap B)\cap(A\cap C)^C$

$\equiv(A\cap B)-(A\cap C)$..............................*(VERDADERA)*

RPTA : "B"

PROBLEMA 38:

Si **A, B** y **C** son tres conjuntos que satisfacen las siguientes condiciones:

$$C\cap B=B$$
$$A\cap B=A$$
$$(A\cup B)\subset(A\cup C)$$
$$(A\cap B)\subset(A\cap C)$$

Entonces la afirmación correcta es:

A) $B\subset A$ B) $C\subset A$ C) $C\subset B$ D) $A\cap C=B$ E) $B\subset C$

RESOLUCIÓN:

* $C\cap B=B\rightarrow B\subset C\wedge B\cup C=C$
* $A\cap B=A\rightarrow A\subset B\wedge A\cup B=B$
* Luego: $A\subset B\wedge B\subset C\rightarrow A\subset C$
* $(A\cup B)\subset(A\cup C)\rightarrow B\subset C$........*(VERDADERO)*
* $(A\cap B)\subset(A\cap C)\rightarrow A\subset A$........*(VERDADERO)*
* Entonces: $B\subset C$

RPTA : "E"

PROBLEMA 39:

Sean **A** y **B** subconjuntos del universo **U** y $B\subset A$, entonces al simplificar la expresión:

$[(A\cap B)\cup(B\cup U^C)]\cap[(A\Delta B)\Delta(B\cap A)]\cap[(A^C-A)\cap(B^C-B)]$

Se obtiene:

A) A B) B C) U D) ϕ E) A^C

RESOLUCIÓN:

* De: $A\subset U\wedge B\subset U\wedge B\subset A$

$[(A\cap B)\cup(B\cup U^C)]\wedge[(A\ \Delta\ B)\Delta(B\cap A)]\cap$

$\cap[(A^C-A)\cap(B^C-B)]=[(B)\cup(B\cup\phi)]\cap$

$\cap[(A-B)\Delta(B)]\cap(A\cup B)^C$

* Pues: $A^C-A=A^C\cap A^C=A^C\equiv[B\cup B]\cap$

$\cap[(A-B)\cup B]\cap(A\cap B)^C$

* Pues: $(A-B)\cap B=\phi$

$\equiv[B]\cap[A]\cap(A)^C\equiv B\cap\underbrace{\left(A\cap A^C\right)}_{\phi}\equiv B\cap\phi\equiv\phi$

RPTA : "D"

PROBLEMA 40:

Si $A-B=(A\cap B)\cap(A\cup C)^C$ entonces a simplificar la siguiente operación:

$$\left\{\left[A\cap(B\cup C)^C\right]\cup\left[C\cup(A^C\cup B)^C\right]\right\}\cap(B\cup C)$$

se obtiene:

A) A B) $B\cup C$ C) C D) B E) C^C

RESOLUCIÓN:

* De :

$A-B=(A\cap B)\cap(A\cup C)^C=(A\cap B)\cap(A^C\cap C^C)$

$=\left[\underbrace{(A\cap A^C)}_{\phi}\cap B\right]\cap C^C=\phi\cap C^C=\phi\rightarrow A-B=\phi\rightarrow A\subset B$

* De donde: $A\cap B^C=\phi$

* Luego:

$\left\{\left[A\cap(B\cup C)^C\right]\cup\left[C\cup(A^C\cup B)^C\right]\right\}\cap(B\cup C)=$

$=\left\{\left[\underbrace{A\cap B^C}_{\phi}\cap C^C\right]\cup\left[C\cup\underbrace{(A\cap B^C)}_{\phi}\right]\right\}\wedge(B\cup C)$

$=\{\phi\cup C\}\cap(B\cup C)=C\cap(B\cup C)=C$, pues $C\subset(B\cup C)$

RPTA : "C"

PROBLEMA 41:

Si A, B, D, E, M y X son subconjuntos del conjunto universal U tal que $A\cap B=X$, entonces simplificar:

$$\left[(A^C\cup B^C)^C\cup(M^C\cup E^C\cup D^C)\right]\cap$$
$$\left[(E\cap D\cap M)\right]\cup(A-B^C)$$

se obtiene:

A) $X\cup M$ B) $X^C\cap(M\cup D)$ C) ϕ D) X E) $(X^C-D)\cup M$

RESOLUCIÓN:

* Considerando: $(M\cap E\cap D)^C=M^C\cup E^C\cup D^C$

* Luego:

$\left[(A^C\cup B^C)^C\cup(M^C\cup E^C\cup D^C)\right]\cap\begin{bmatrix}(E\cap D\cap M)\\ \cup\ (A\cap B^C)\end{bmatrix}$

$=\left[(A\cap B)\cup(M\cap E\cap D)^C\right]\cap\begin{bmatrix}(E\cap D\cap M)\\ \cup\ (A\cap B)\end{bmatrix}$

* Pues: $A-B^C=A\cap(B^C)^C=A\cap B$

$=(A\cap B)\cup\left[(M\cap D\cap E)^C\cap(E\cap D\cap M)\right]$

$=(A\cap B)\cup[Y^C\cap Y]=(A\cap B)\cup\phi=A\cap B=x$

RPTA : "D"

PROBLEMA 42:

Si A, B, D son tres conjuntos contenidos en el conjunto universal, entonces al simplificar:

$$\left\{\left[(A^C\cup B^C)\cap(B\cup D)\right]-(A\cap D)\right\}\cap(D^C-B)$$

se obtiene:

A) A B) B C) C D) $A\cap C$ E) ϕ

RESOLUCIÓN:

* De:

$\left\{\left[(A^C\cup B^C)\cap(B\cup D)\right]-(A\cap D)\right\}\cap(D^C-B)$

$=\left\{\left[(A\cap B)^C\cap(B\cup D)\right]\cap(A\cap D)^C\right\}\cap(D^C\cap B^C)$

$=\left\{\left[(A\cap B)^C\cap(A\cap D)^C\right]\cap(B\cup D)\right\}\cap(D\cup B)^C$

$=\left[(A\cap B)^C\cap(A\subset D)^C\right]\cap\left[\underbrace{(B\cup D)\cap(D\cup B)^C}_{\phi}\right]$

$=[\qquad]\cap\phi=\phi$

RPTA : "E"

PROBLEMA 43:

Indicar el valor de las siguientes proposiciones:

p: Si $A=\{1;\phi;\{\phi\}\}$ y $B=\{\{\phi\};\{\{\phi\}\}\}$ entonces

$$P(A)\cap P(B)=\{\phi;\{\{\phi\}\}\}$$

q: Si $A=\{1;\phi;\{\phi\}\}$, entonces el $n[P(A)]=9$

r: Si $A=\{1;\{2\};\{1,2\}\}$ y $B=\{\{1\};2;\{2;1\}\}$, entonces $\{\{1\};2\}\subset(A\cap B)$

A) VFF B) VVV C) VVF D) VFV E) FFF

RESOLUCIÓN:

* Sea:

$\{\phi\}=a;\ \{\{\phi\}\}=b\rightarrow A=\{1;\phi;a\}\wedge B=\{a;b\}$

$P_{(A)}=\{\phi;\{1\};\{\phi\};\{a\};\{1;\phi\};\{1;a\};\{\phi;a\};A\}$

$P_{(B)}=\{\phi;\{a\};\{b\};B\}\rightarrow P_{(A)}\cap P_{(B)}=\{\phi;\{a\}\}$

$\rightarrow P_{(A)}\cap P_{(B)}=\{\phi;\{\{\phi\}\}\}$

Luego, p es **VERDADERA**

* $A=\{1;\phi;\{\phi\}\}\rightarrow n(A)=3\rightarrow n(P(A))=2^{n(A)}=2^3=8$

Luego, q es **FALSA**

* $A\cap B=\{\{1;2\}\}\rightarrow\{\{1\};2\}\not\subset(A\cap B)$.......(FALSA)

RPTA : "A"

PROBLEMA 44:

Inidicar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

p: Si $(A\cap B)\subset C$, entonces $A\subset C$ y $B\subset C$

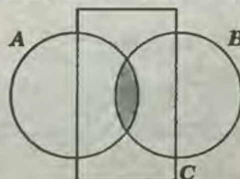
q: Si $A^C\subset B^C$, entonces $A\subset B$

r: Si $A\cap B=\phi$, entonces $P(A)\cap P(B)\neq\phi$

A) VVV B) VFF C) FVF D) VFV E) FFV

RESOLUCIÓN:

I) Si $(A\cap B)\subset C$, entonces puede ser que:



* De donde $A \not\subset C \wedge B \not\subset C$

Luego, p es **FALSA**

II) Si : $A^C \subset B^C \Rightarrow (x \in A^C \rightarrow x \in B^C)$

$\rightarrow (x \in A \rightarrow x \notin B) \rightarrow (x \in B \rightarrow x \in A)$

* Pues : $p \rightarrow q \equiv \sim q \rightarrow \sim p$

$\rightarrow B \subset A$ ....*($A \subset B$ no es correcto)*

Luego, q es **FALSA**

III) Si : $A \cap B = \phi \ \wedge \ \phi \subset A \wedge \phi \subset B$

$\rightarrow P(A) = \{\phi; ....; A\} \wedge P(B) = \{\phi; ....; B\}$

* De donde : $P(A) \cap P(B) = \{\phi\} \neq \phi$

Luego, r es **VERDADERA**

RPTA : "E"

PROBLEMA 45:

Si el conjunto $B \neq \phi$, entonces cual de las siguientes proposiciones son verdaderas:

p: $P(\phi) - \phi = \phi$

q: $P(B) - \{B\} \neq \phi$

r: $P(B) \cup \{B\} = P(B)$

A) p y q B) p y r C) q y r D) Sólo p E) p, q y r

RESOLUCIÓN:

I) $\forall$ A conjunto : $A - \phi = A \rightarrow P(\phi) - \phi = P(\phi) \neq \phi$

Luego, p es **FALSA**

II) Siendo:

$B \neq \phi,\ B \subset B \rightarrow B \in P(B) \wedge \phi \in P(B) \rightarrow P(B) - \{B\} \neq \phi$

Luego, q es **VERDADERA**

III) Como:

$B \in P(B) \rightarrow \{B\} \subset P(B) \rightarrow P(B) \cup \{B\} = P(B)$

Luego, r es **VERDADERA**

RPTA : "C"

PROBLEMA 46:

Sean A y B dos conjuntos definidos por:

$A = \{a; \{b\}; \{a; b\}\}$ $B = \{\{a\}; b; \{b; a\}\}$

Indicar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

p: $\{a\} \subset P(A) \rightarrow \phi \in P(A)$

p: $\{a\} \subset P(A) \rightarrow \phi \in P(A)$

r: $\{\{a\}; b\} \subset (A \cap B)$

A) VFF B) FFF C) FVV D) FVF E) VVV

RESOLUCIÓN:

I) Como: $a \in A \rightarrow \{a\} \subset A \rightarrow \{a\} \in P(A)$

* Por lo que: $\{a\} \subset P(A) \rightarrow \phi \in P(A) \equiv F \rightarrow V \equiv V$

Luego, p es **VERDADERA**

II) $A \cap B = \{\{a; b\}\}$, pero $\{a; b\} \not\subset A \cap B$

$\rightarrow \{a; b\} \notin P(A \cap B)$

Luego, q es **FALSA**

III) $\{a\} \notin A \cap B \wedge b \notin A \cap B \rightarrow \{\{a\}; b\} \not\subset A \cap B$

Luego, r es **FALSA**

RPTA : "A"

PROBLEMA 47:

Sean A y B subconjuntos del universo U y las siguientes proposiciones:

p: Si $P(A) \subset P(B) \rightarrow A \subset B$

q: Si $X \in P(A) \rightarrow X \subset A$

r: $P(A \cup B) \subset [P(A) \cup P(B)]$

s: $P(A \cap B) \subset [P(A) \cap P(B)]$

Si M es el número de proposiciones verdaderas y N el número de proposiciones falsas, entoces el valor de: $T = M^N + N^M$

A) 0 B) 4 C) 3 D) 8 E) 1

RESOLUCIÓN:

I) Si $P(A) \subset P(B) \rightarrow \forall \in P(A) x \in P(B)$

$\rightarrow \forall x \in A: x \subset B \rightarrow A \subset B$

Luego , p es **VERDADERA**

II) $P(A)$ está formado por todos los subconjuntos de A.

Si $X \in P(A) \rightarrow X \subset A$

Luego, q es **VERDADERA**

III) Sea $x \in P(A \cup B) \rightarrow x \subset (A \cup B) \not\rightarrow$ (no implica que)

$$\underbrace{x \subset A} \ \vee \ \underbrace{x \subset B}$$

$$\underbrace{x \in P(A) \ \vee \ x \in P(B)}$$

$$x \in P(A) \cup P(B)$$

* Es decir: $P(A \cup B) \not\subset P(A) \cup P(B)$

* Otra forma, sean $A = \{1; 2\} \wedge B = \{3,4\}$

$\rightarrow P(A)$ tiene 4 elementos $P(B)$ tiene 4 elementos

$\rightarrow P(A) \cup P(B)$ tiene 7 elementos (ϕ es elemento común en ambos)

* Sin embargo, $A \cup B$ tiene 4 elementos $\rightarrow P(A \cup B)$ tiene 16 elementos

* Con lo cual no es posible que:

$$P(A \cup B) \subset P(A) \cup P(B)$$

Luego, r es **FALSA**

IV) Si $x \in P(A \cap B) \rightarrow x \subset A \cap B$

$\rightarrow x \subset A \wedge x \subset B \rightarrow x \in P(A) \wedge x \in P(B)$

$\therefore x \in P(A) \cap P(B) \rightarrow P(A \cap B) \subset P(A) \cap P(B)$

Luego, s es **VERDADERA**

* Entonces, $M=3 \wedge N=1$

* Finalmente: $T=M^N+N^M=4$

RPTA : "B"

PROBLEMA 48:

Sea $U=\mathbb{R}$ el conjunto universal, determinar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I) p: Si $A \subset U$ entonces $\{A\} \subset U$

II) q: Si $A \subset U$, entonces $P(A) \subset U$

III) r: $(A-B) \in P(A)$

A) VVV B) FVF C) VVF D) FFV E) FFF

RESOLUCIÓN:

I) $A \subset U \rightarrow \{A\}$ es un conjunto de conjunto y éste a su vez no es subconjunto de U: $\{A\} \not\subset U$

Luego, p es **FALSO**

II) Por lo mismo que el anterior: $P(A) \not\subset U$

Luego, q es **FALSO**

III) $A-B \subset A \rightarrow A-B \in P(A)$

Luego, r es **VERDADERO**

RPTA : "D"

PROBLEMA 49:

Hallar el valor de las siguientes proposiciones:

I) Si $\phi \in P(A)$, entonces $\phi \in A$; $\forall A$

II) $A^C \Delta B^C = A \Delta B$

III) Si $(A \cup B) \subset \left[B^C - (A-B)\right]$, entonces v

A) VVV B) FFF C) FVV D) VFV E) FVF

RESOLUCIÓN:

I) $\phi \in P(A) \rightarrow \phi \subset A, \forall A$ ....(FALSA)

II) $A^C \Delta B^C = (A^C - B^C) \cup (B^C - A^C) = (A^C \cap B)$
$\cup (B^C \cap A) = (A \cap B^C) \cup (B \cap A^C) = (A-B)$
$\cup (B-A) = A \Delta B$ ....(VERDADERA)

III) $(A \cup B) \subset \left[B^C \cap (A-B)\right] \equiv (A \cup B) \subset$
$\left[B^C \cap (A \cap B^C)^C\right] \equiv (A \cup B) \subset \left[B^C \cap (A^C \cup B)\right] \equiv (A \cup B)$
$\subset \left[(B^C \cap A^C) \cup \underbrace{(B^C \cap B)}_{\phi}\right] \equiv (A \cup B) \subset \left[(B \cup A)^C\right]$

* Pero: $(A \cup B) \cap (A \cup B)^C = \phi$ $(x \cap x^C = \phi)$

$\rightarrow A \cup B = \phi \rightarrow A = \phi \wedge B = \phi$ .... (VERDADERA)

RPTA : "C"

PROBLEMA 50:

Si los cardinales de los conjuntos **A**, **B** y **C** son números enteros consecutivos además:

$$n\left[P(A)+n\left[P(B)\right]\right]+n\left[P(C)\right]=448$$

Entonces el valor de: $T+n(A)+n(B)+n(C)$, es:

A) 20 B) 21 C) 22 D) 23 E) 24

RESOLUCIÓN:

* Sea $n(A)=x \rightarrow n(B)=x+1 \wedge n(C)=x+2$, entonces:

$n(P(A))+n(P(B))+n(P(C))=448$

$\rightarrow 2^x+2^{x+1}+2^{x+2}=448$

$\rightarrow 2^x(1+2+2^2)=448 \rightarrow 2^x=64 \rightarrow x=6$

* Luego: $T=3(x+1)=3x=21$

RPTA : "B"

PROBLEMA 51:

Sean **A** y **B** dos conjuntos definidos por $A=\{\phi \cup \{\phi\};\{\phi\};\{1:\phi\}\}$ y $B=\{\phi;\{1;1;\phi\}\}$

Determinar el valor de verdad de las siguientes afirmaciones:

I) $n(A)=3$ II) $A \subset B$ II) $B \subset A$ IV) $A=B$

A) VFFV B) FFFV C) FVFF D) FFFF E) FFVF

RESOLUCIÓN:

* De : $A=\{\phi \cup \{\phi\}\},\{\phi\},\{1;\phi\}$

* Pero : $x \cup \phi = x$, $\forall$ conjunto x

$\rightarrow A=\{\{\phi\};\{1;\phi\}\}$ $B=\{1;\{1;\phi\}\}$

I) $n(A)=2$..(FALSO)

II) $A \not\subset B$..(FALSO)

III) $B \not\subset A$..(FALSO)

IV) $A \neq B$..(FALSO)

RPTA : "D"

PROBLEMA 52:

Si **A**, **B** y **C** son subconjuntos del univeros **U**, tales que:

$n(A)=5$ $n(A \cap C)=24$

$n[(A \cap B)-C]=16$ $n[(B \cap C)-A]=9$

$n[C-(A \cup B)]=32$ $n[(A \cup B)-C]=48$

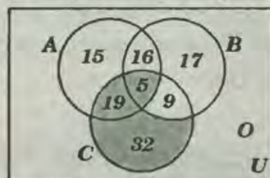
$n(A \cap B \cap C)=5$ $n(U)=113$

Entonces, el valor de: $T=n(A \cap C)+n(C-B)$, es:

A) 47 B) 65 C) 70 D) 75 E) 82

RESOLUCIÓN:

* Realizando un diagrama de Venn y ubicando los datos del problema, resulta lo siguiente:



* Se pide:

$T=n(A \cap C)+n(C-B) \rightarrow T=24+51=75$

RPTA : "D"

PROBLEMA 53:

Sean A, B y C tres conjuntos finitos que cumplen las siguientes condiciones:

$n(A)=250$ $n(B)=280$

$n(C)=300$ $n(A\cap B)=50$

$n(B\cap C)=70$ $n(C\cap A)=60$

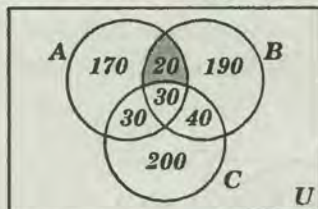
$n(A\cap B\cap C)=30$ $n(A^C\cap B^C\cap C^C)=10$

Si: $n[P(A\cap(B-C))]=4^{x+3}$, entonces el valor de x es:

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

RESOLUCIÓN:

* Ubicando los datos en un diagrama de Venn:



$n(A^C\cap B^C\cap C^C)=n((A\cup B\cup C)^C)=10$

* La parte sombreada representa a: $A\cap(B-C)$

$\rightarrow n(A\cap(B-C))=20$

$\rightarrow n[P(A\cap(B-C))]=2^{20}=4^{x+3}$

$\rightarrow 4^{10}=4^{x+3}\rightarrow x=7$

RPTA : "D"

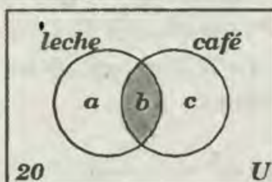
PROBLEMA 54 :

De un total de 100 personas, 70 prefieren tomar leche en el desayuno, 30 prefieren tomar café y 20 otro líquido. ¿Cuántas personas toman café con leche?.

A) 15 B) 18 C) 20 D) 25 E) 24

RESOLUCIÓN:

* Realicemos un diagrama de Venn:



* 70 prefieren tomar leche $\rightarrow a+b=70$
* 30 prefieren tomar café $\rightarrow b+c=30$
* En total hay 100 $\rightarrow a+b+c=80$
* De las dos primeras: $a+b+b+c=100\rightarrow b=20$
* Entonces toman café con leche: 20

RPTA : "C"

PROBLEMA 55:

De un grupo de 55 fumadores:

25 prefieren cigarrillos Winston

32 prefieren cigarrillos Premier

33 prefieren cigarrillos Marlboro

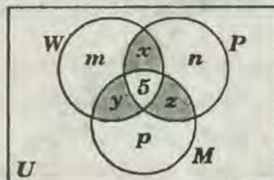
5 fuman las tres marcas anteriores.

¿Cuántas personas del grupo prefieren dos de estas marcas?

A) 10 B) 12 C) 15 D) 20 E) 25

RESOLUCIÓN:

* Graficando:



* 25 prefieren Winston $\rightarrow m+x+y=20$
* 32 prefieren Premier $\rightarrow n+x+z=27$
* 33 prefieren Marlboro $\rightarrow p+y+z=28$
* Sumando: $m+n+p+x+y+z+x+y+z=75$
* El total es $\rightarrow m+n+p+x+y+z=50$

$\rightarrow x+y+z=25$

* Prefieren dos marcas: $x+y+z=25$

RPTA : "E"

PROBLEMA 56:

En una escuela de 150 estudiantes se sabe que 60 son mujeres; 80 estudiaban Biología; 20 son mujeres que no estudian Biología. ¿Cuántos hombres no estudian Biología?

A) 20 B) 40 C) 80 D)10 E) 50

RESOLUCIÓN:

* Graficando:

	Estudian Biología	No estudian Biología
Hombres	40	50
Mujeres	40	20

* Luego, los hombres que no estudian Biología son: 50

RPTA : "E"

PROBLEMA 57:

Un total de 90 alumnos dieron 3 exámenes para aprobar un curso y se observa que los que aprobaron sólo un examen es el quíntuplo de los que aprobaron los 3 exámenes y los que aprobaron sólo 2 exámens es el triple de los que desaprobaron los 3 exámenes. Si el número de los que desaprobaron los 3

exámenes es igual al número de los que aprobaron los 3 exámenes. ¿Cuántos aprobaron el curso, si para aprobarlo es necesario que aprueben por lo menos 2 exámenes?

A) 12 B) 15 C) 18 D) 20 E) 30

RESOLUCIÓN:

* Graficando convenientemente:

	1 examen	2 examen	3 examen
Aprobaron	5a	3b	a
Desaprobaron	3b	5a	b

* Nótese que los que aprobaron 1 examen desaprobaron 2 exámenes y los que aprobaron 2, desapobraron 1.

* Como los que desaprobaron 3 es igual a los que aprobaron 3 exámenes $\rightarrow a=b$ en otal son 90

$\rightarrow 18a=90 \rightarrow a=5$

* Luego, los que aprobaron el curso son: $3b+a=4a=20$

RPTA : "D"

PROBLEMA 58:

Considere el conjunto $U=\{1;2;3;4;5\}$ e indicar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I) $p: \exists x \in U / x+3 \leq 10$

II) $q: \forall x \in U; \forall y \in U; x+y \leq 7$

III) $r: \exists x \in U / \forall y \in U; x+y \leq 10$

A) VVV B) FFF C) VVF D) FVF E) VFV

RESOLUCIÓN:

I) $\exists x \in U / x+3 \leq 10$, por ejemplo $x=2$

Luego: p es VERDADERA

II) Si : $x=5 \in U \wedge y=5 \in U \rightarrow x+y=10$

$\rightarrow$ no es cierto que: $\forall x \in U; \forall y \in U: x+y \leq 7$

Luego: q es FALSA

II) $\forall y \in U; y \leq 5 \rightarrow 2+y \leq 7 \leq 10$

$\rightarrow \exists x=2 \in U / \forall y \in U: x+y \leq 10$

Luego: r es VERDADERA

RPTA : "E"

PROBLEMA 59:

Sea $A=\{x \in R / 3 \leq x \leq 9\}$, determinar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I) $p: \forall x \in A; \exists y \in A / x+y>5$

II) $q: \exists x \in A / \forall y \in A; 2x+y \geq 12$

III) $r: \forall x \in A; \forall y \in A; x+y \geq 8$

A) VVV B) VVF C) VFV D) FVV E) FFV

RESOLUCIÓN:

I) $\forall x \in A: 3 \leq x \leq 9 \rightarrow 6 \leq x+3 \leq 12$

$\rightarrow x+3 \geq 6>5 \rightarrow x+3>5$

$\rightarrow \forall x \in A: \exists y=3 \in A / x+y>5$

Luego, p es VERDADERO

II) $\forall y \in A: 3 \leq y \leq 9 \rightarrow 3+2(5) \leq y+2(5) \leq 9+2(5)$

$\rightarrow 13 \leq 2(5)+y \leq 19 \rightarrow 12 \leq 2(5)+y$

$\rightarrow \exists x=5 \in A / \forall y \in A: 2x+y \geq 12$

Luego, q es VERDADERO

III) $\forall x \in A: \forall y \in A: 3 \leq x \leq 9; 3 \leq y \leq 9$

$\rightarrow 6 \leq x+y \leq 18 \not\rightarrow x+y \geq 8$

Luego, r es FALSO

RPTA : "B"

PROBLEMA 60:

Con respecto al conjunto: $U=\{-3;-2;-1;0;1;2\}$ se enuncian las siguientes proposiciones:

$p: \exists x \in U / x<1 \rightarrow x^2=x$

$q: \forall x \in U; \dfrac{x^2-9}{x-3}=x+3$

$r: (\forall x \in U; x^2-9 \neq 0) \leftrightarrow (\exists x \in U / \sqrt{x}=x)$

Hallar el valor de verdad de las siguientes operaciones lógicas:

I) $r \rightarrow (p \rightarrow q)$ II) $q \rightarrow (r \rightarrow p)$

III) $(p \leftrightarrow q) \wedge (r \vee p)$

A) VVV B) VFV C) FVV D) VVF E) FVF

RESOLUCIÓN:

p) $\exists x U / x<1 \rightarrow x^2=x$

$\underbrace{(x=0 \in U : 0<1)}_{V} \rightarrow \underbrace{0^2=0}_{V}$

$V \rightarrow V = V$

Luego, p es VERDADERO

q) $\forall x \in U: x \neq 3 \rightarrow x-3 \neq 0 \rightarrow \dfrac{x^2-9}{x-3}=x+3$

Luego, q es VERDADERO

r) $(\forall x \in U: x^2-9 \neq 0) \leftrightarrow (\exists x \in U / \sqrt{x}=x)$

F (no cumple $x=3$) V (cumple $x=1$) $F \leftrightarrow V \equiv F$

Luego, r es FALSA

* Ahora :

I) $r \rightarrow (p \rightarrow q) \equiv F \rightarrow (p \rightarrow q) \equiv V$

II) $q \rightarrow (r \rightarrow p) \equiv V \rightarrow \underbrace{(F \rightarrow V)}_{V} \equiv V$

III) $(p \leftrightarrow q) \wedge (r \vee p) \equiv \underbrace{(V \leftrightarrow V)}_{V} \wedge \underbrace{(F \vee V)}_{V} \equiv V$

RPTA : "A"

PROBLEMA 61:

si A es un conjunto definido por: $A=\{1;2;3;.....;40\}$, entonces hallar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

$p: \forall x \in A, \exists y \in A / x+2y>x^2$

$q: \exists y \in A; \exists x \in A; \forall z \in A: x+y<z$

$r: \forall x \in A, \exists y \in A; \forall z \in A / x-y=z$

A) FFF B) FFV C) FVF D) VFF E) VVF

RESOLUCIÓN:

I) Si: $x=40 \rightarrow$ reemplazando en: $x^2+2y>x^2$

se tiene: $40+2y>40^2 \rightarrow 2y>40 \cdot 39 \rightarrow y>380$, pero: $\forall y \in A: y \leq 40$

* Con lo cual: $\forall x \in A, \nexists y \in A / x+2y>x^2$

Luego, p es **FALSA**

II) Si: $z=1 \rightarrow$ reemplazando en: $x+y<z$, se tiene: $x+y<1$ Pero: $\forall x \in A; \forall y \in A: x \geq 1 \wedge y \geq 1$ $\rightarrow x+y \geq 2$. Con lo cual:

$\nexists y \in A, \nexists x \in A, \forall z=1: x+y<z$

Luego,q es **FALSA**

III) La relación: $x-y=x$ es lo mismo que $x-z=y$. De donde: $\forall x \in A, \forall z \in A$

* La diferencia $x-z$ mínima es 0 y la máxima es 39, con lo cual, cualquier diferencia $x-z$ puede ser igual a un $y \in A$, es decir:

$\forall x \in A; \exists y \in A / x-y=z$

Luego, r es **VERDADERA**

RPTA : "B"

PROBLEMA 62:

La negación de la siguiente proposición lógica: "$\forall x \in A; \exists y \in B / x+y=z$", es:

A) $\exists x \in A / \forall x \in B: x+y+z=0$

B) $\exists x \in A / \forall y \in B: x+y+z=0$

C) $\exists x \in A / \forall y \in B: x+y-z \neq 0$

D) $\forall x \in A / \exists y \in B: x+y-z \neq 0$

E) $\forall x \in A / \exists y \in B: x+y-z = 0$

RESOLUCIÓN:

* Se desea:

$\sim(\forall x \in A, \exists y \in B / x+y=z) \equiv$

$\equiv \exists x \in A / \sim(\exists y \in B / x+y=z)$

$\equiv \exists x \in A / \forall y \in B: \sim(x+y=z)$

$\equiv \exists x \in A / \forall y \in B: x+y \neq z$

$\equiv \exists x \in A / \forall y \in B: x+y-z \neq 0$

RPTA : "C"

PROBLEMA 63:

Si A, B y M son subconjuntos del conjunto universal U, entonces hallar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I) $A \subset B^C \leftrightarrow B \subset A^C, \forall A; B \subset U$

II) $(A \cap B) - M = A \cap (B - M), \forall A; B; M \subset U$

III) $A - B = A \leftrightarrow A \cap B \neq \phi, \forall A; B \subset U$

A) VFV B) FVV C) FFF D) VVF E) VVV

RESOLUCIÓN:

I) Recuerde que:

Si: $M \subset N \rightarrow N^C \subset M^C$

(Si $A \subset B^C \rightarrow B \subset A^C) \wedge B \subset A^C$

$\rightarrow A \subset B^C \equiv A \subset B^C \leftrightarrow B \subset A^C$....(VERDADERA)

II) $(A \cap B) - M = (A \cap B) \cap M^C = A \cap (B \cap M^C)$

$\equiv A \cap (B - M) \; \forall A, B, M \subset U$.........(VERDADERA)

III) $A - B = A \rightarrow A \cap B^C = A \rightarrow A \subset B^C$

$\rightarrow A \wedge B$ son disjuntos $\rightarrow A \cap B = \phi$

* Luego, no es cierto que:

$A - B = A \leftrightarrow A \cap B \neq 0, \forall A, B \subset U$........(FALSA)

RPTA : "D"

PROBLEMA 64:

Sean U y A dos conjuntos definidos por:

$U=\langle -8; 4\rangle \cup \{5;7\}$ $A=\{x \in U / x<2 \rightarrow x>5\}$

Si $M=\{3-x / x \in A \wedge x \in Z\}$, entonces el $n(M)$ es:

A) 6 B) 10 C) 4 D) 2 E) 7

RESOLUCIÓN:

* Como $(x<2) \rightarrow (x>5) \equiv \sim(x<2) \vee (x>5)$

$A=\{x \in U / x \geq 2 \vee x>5\}$

$\rightarrow A=\{x \in U / x \geq 2\}=[2;4\rangle \cup \{5;7\}$

$\rightarrow M=\{3-x / x \in A \wedge x \in Z\}$

$\rightarrow M=\{3-x / x \in \{2;3;5;7\}\}$

$\rightarrow M=\{1;0;-2;-4\} \rightarrow n(M)=4$

RPTA : "C"

CONJUNTOS NUMÉRICOS CONJUNTOS DE LOS NÚMEROS NATURALES (N)

$N=\{0;1;2;3;4;................\}$

CONJUNTOS DE LOS NÚMEROS ENTEROS (Z)

$Z=\{.........;-4;-3;-2;-1;0;1;2;3;4;.........\}$

CONJUNTOS DE LOS NÚMEROS RACIONALES (Q)

$Q=\left\{\frac{m}{n} / m \in Z \wedge n \in Z, n \neq 0\right\}$

CONJUNTOS DE LOS NÚMEROS IRRACIONALES (I)

Son aquellos que tienen una representación decimal infinita no periódica y no pueden ser expresados como el cociente de 2 números enteros.

$$I\!I=\left\{.........;-\sqrt{3};\sqrt[4]{5};\sqrt{7};\pi;e;...............\right\}$$

CONJUNTOS DE LOS NÚMEROS REALES ($\mathbb{R}$)

Es la reunión de los números racionales y de los números irracionales. $\mathbb{R}=\mathbb{Q}\cup I\!I$

CONJUNTOS DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS ($\mathbb{C}$)

$$\mathbb{C}=\left\{a+bi/a\in\mathbb{R}\wedge b\in\mathbb{R},i=\sqrt{-1}\right\}$$

PROPIEDADES Y LEYES

- $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$
- $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$
- $(A\cup B)'=A'\cap B'$
- $(A\cap B)'=A'\cup B'$
- $A\Delta B=(A\cup B)-(A\cap B)$
- $A\Delta B=(A-B)\cup(B-A)$
- $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$
- $A-B=A\cap B'$
- $A'-B'=B-A$
- $n[P(A)\cap P(B)]=n[P(A\cap B)]$
- $n[P(A)\cup P(B)]=n[P(A)]+n[P(B)]-n[P(A)\cap P(B)]$
- $n[P(A)\cup P(B]=2^{n(A)}+2^{n(B)}-2^{n(A\cap B)}$
- $A\cup(A\cap B)=A$
- $A\cap(A\cup B)=A$
- $A\cup(A'\cap B)=A\cup B$
- $A\cap(A'\cup B)=A\cap B$
- $A\cup\phi=A$ • $A\cup U=U$ • $A\cup A'=U$
- $A\cap\phi=\phi$ • $A\cap U=A$ • $A\cap A'=\phi$

PRIMERA PRACTICA DIRIGIDA

01 Dadas las siguientes u oraciones, ¿cuántas son proposiciones lógicas?

( ) $5+4=8$
( ) "13 es un número primo"
( ) ¡Buenos diás!
( ) ¿Cuál es tu nombre?

A) 2 B) 3 C) 1 D) 4 E) 5

02 Si: p: Lima es la capital del Perú.
q: Barcelona es la capital de España.

expresar en forma simbólica el siguiente enunciado: "Lima es la capital del Perú y Barcelona es la capital de España"

A) $p\vee q$ B) $p\to q$ C) $p\wedge q$
D) $p\vee\sim q$ E) $\sim p\wedge q$

03 Si: p: "4 es menor que 7" q: "5 es igual a 7" el valor de verdad de:

( ) $p\vee q$ ( ) $p\wedge q$
( ) $\sim p\wedge q$ ( ) $p\vee\sim q$

es:

A) VFFV B) VVVF C) FVVF D) VVVV E) FFFV

04 Sean p y q un par de proposiciones lógicas, entonces la proposición "$p\vee q$" ¿cuántos valores de verdad "falsos" tiene?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

05 Sean p y q dos proposiciones lógicas, entonces la proposición "$p\wedge q$", ¿cuántos valores de verdad "verdaderos" tiene?

A)5 B) 2 C) 3 D) 4 E) 1

06 Sean p y q dos proposiciones lógicas, entonces la proposición "$p\to q$", ¿cuántos valores de verdad "verdaderos" tiene?

A) 2 B) 1 C) 3 D) 4 E) 5

07 Sean p y q un par de proposiciones lógicas, entonces la proposición "$p\leftrightarrow q$", ¿cuántos valores de verdad "falsos" tiene?

A) 1 B) 3 C) 5 D) 4 E) 2

08 Si p y q es un par de proposiciones lógicas, entonces la expresión "$p\,\Delta\, q$", ¿cuántos valores de verdad "falsos" tiene?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 1

09 Dadas las proposiciones:

p: "17 es un número primo"
q: "Toda proposición es verdadera"

hallar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

( ) $(p\to\sim q)\wedge p$ ( ) $\sim p\wedge q$ ( ) $\sim p\vee\sim q$

A) VVF B) FFV C) FFF D) VFV E) VVV

10 Si la operación lógica: "$(p\to q)\vee r$" es falsa, entonces los valores de verdad de r; q y p son respectivamente:

A) VVF B) FVF C) VFV D) FFV E) FFF

11 Si la siguiente proposición: $p(r \to s)$ es falsa. ¿cuál(es) de las siguientes proposiciones es(son) verdadera(s)?

I) $\sim(r \wedge s)$ es falsa. *II)* $(r \wedge s)$ es verdadero.
III) p es verdadero.

A) Sólo I *B) Sólo II* *C) Sólo III*
D) I y III *E) I y II*

12 Si $(p \wedge q)$ es verdadero, hallar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

( ) $p \to \sim q$ ( ) $\sim(p \wedge q)$ ( ) $p \leftrightarrow q$

A) FFF *B) VFF* *C) FFV* *D) VVV* *E) VFV*

13 Si $\sim p \to q$, es falso, hallar el valor de verdad de:

( ) $r \wedge (q \vee p)$ ( ) $p \leftrightarrow q$ ( ) $p \wedge (r \wedge t)$

A) FFV *B) VVV* *C) VVF* *D) FFF* *E) FVF*

14 El resultado de la tabla de verdad de la siguiente proposición:

$$p \wedge (p \to q)$$

es:
A) VFFF *B) VFFV* *C) VVFF* *D) VVVF* *E) FFVV*

15 Si las proposición $(p \wedge q) \to (p \to t)$ es falsa, ¿cuál(es) de las proporciones es(son) verdadera(s)?
I) "p" es falsa. *II)* $p \wedge q$ es verdadera
III) "t" es verdadera
A) Sólo II *B) Sólo I* *C) Sólo III*
D) II y III *E) I y II*

16 Si definimos $p \otimes q = p \wedge \sim q$ entonces si: $\sim p \otimes (p \to q)$ es verdadero; determine el valor de verdad de

( ) $(p \otimes q)$ ( ) $\sim p \otimes \sim q$ ( ) $\sim p \otimes q$

A) FVF *B) VVV* *C) FFF* *D) FFV* *E) VVF*

17 Si la siguiente proposición: $(\sim p \to \sim q) \vee (r \to s)$ es falsa; indicar las proposiciones que son verdaderas.

A) p; q *B) p; s* *C) q ; r* *D) q ; s* *E) r ; s*

18 Si la siguiente expresión lógica $(\sim p \vee q)$ es falsa, el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

( ) $p \wedge q$ ( ) $p \wedge (\sim p \vee q)$ ( ) $p \vee q$

es:
A) FVF *B) FFV* *C) VVV* *D) FFF* *E) VVF*

19 Hallar los valores de verdad de las siguientes expresiones lógicas:

( ) $(7^2 + 1 = 49) \vee (7^2 - 1 = 48)$

( ) $(3^2 + 2^2 = 13) \wedge (5^2 = 25)$

( ) $(3^2 + 4^2 = 5^2) \to (8 + 2 = 12)$

A) VVF *B) FFV* *C) VVV* *D) FVV* *E) FVF*

20 Construir la tabla de verdad de las siguientes proporciones e indicar cuál(es) es(son) lógicamente equivalente(s):

I) $\sim p \vee \sim q$ *II)* $q \to p$ *III)* $p \to \sim q$

A) I y II *B) I y III* *C) II y III* *D) Todos* *E) Sólo I*

21 Señalar la expresión equivalente a la proposición $(p \vee \sim p) \wedge (\sim q \vee \sim p)$

A) $q \to p$ *B)* $p \to q$ *C)* $(p \to q) \to \sim p$
D) $\sim p \to (p \to q)$ *E)* $(q \to p) \to \sim p$

22 Sean las proposiciones:

* $p_{(x)}$: $\forall\, x \in \mathbb{R},\, x^0 = 1$
* $q_{(y)}$: $\exists\, y \in \mathbb{N} / y^2 \leq 0$
* $r_{(z)}$: $\forall z \in \mathbb{R},\, z^2 - 9^2 = (z+3)(z-3)$

Indique el valor de verdad de:

$$p \leftrightarrow q,\; p \to r,\; r \vee q$$

A) FFV *B) FVV* *C) VFV* *D) VVV* *E) FFF*

23 Si la proposición: $(\sim p \to q) \vee \sim r$ es falsa. Hallar el valor de verdad de p ; q y r en ese orden.
A) VVF *B) FFF* *C) FFV* *D) FVF* *E) VFV*

24 Hallar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

$(3 + 2 = 5) \vee (7 - 2 = 11)$

$(4 - 1 = 3) \to (2 - 10 = -8)$

$(3 + 7 = 10) \wedge (12 > 5)$

$(1^2 = 2) \leftrightarrow \left(1 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2}\right)$

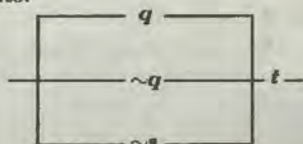
A) VVFV *B) VFVV* *C) VVVV* *D) VVVF* *E) FVVV*

25 Si "p" es una proposición falsa, determina el valor de verdad de la expresión:

$$\{(p \to q) \vee [r \to (\sim q \wedge p)]\} \to (r \wedge p \wedge q)$$

A) Verdadero *B) Falso* *C) Verdadero o falso*
D) Verdadero sólo si q es verdadero
E) Falso sólo si r es falso.

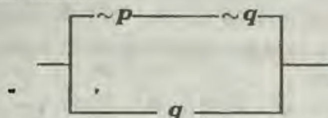
26 El circuito:



Equivale a:

A) $(p \vee s) \rightarrow (q \wedge t)$ B) $p \wedge t$ C) $[(p \wedge q) \vee t] \rightarrow s$
D) $[(p \rightarrow q) \vee \sim s] \wedge t$ E) $(p \leftrightarrow q) \vee t$

27 Simbolizar:



Si la proposición que se obtiene es falsa. ¿Cuáles son los valores de p y q respectivamente?
A) VV B) VF C) FV
D) FF E) No se puede precisar

28 Hallar los valores de verdad de las siguientes proposiciones:

I) $(\forall x \in \mathbb{R}, x = x) \wedge (\exists x \in \mathbb{R}, x + 1 > x)$

II) $(\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \neq x) \wedge (\exists x \in \mathbb{Z}, x + 1 \neq x - 1)$

III) $(\exists x \in \mathbb{N}, x \neq 0) \Rightarrow (\forall x \in \mathbb{Q}, x \neq 0)$

IV) $(\exists x \in \mathbb{N}, x - 3 \leq x) \Rightarrow (\forall x \in \mathbb{R}, x - 1 \geq x)$

A) FVVF B) FVVV C) VVFF D) VFFF E) VVVF

29 Si: $U = \{1; 2; 3; 4; 5\}$

¿Cuál es el valor de verdad de las siguientes proposiciones?

I) $\forall x \in U: x \geq 3 \vee x < 4$

II) $\exists x \in U: x + 2 < 8 \Rightarrow x > 6$

III) $\forall x \in U: x + 2 = 5 \Leftrightarrow x - 1 = 2$

A) VVV B) FFV C) VFF D) FVF E) FFF

30 Sea: $A = \{1; 2; 3\}$

Determinar el valor de verdad de las siguientes expresiones:

I) $\exists x \in A, \forall y \in A / x^2 < y + 1$

II) $\wedge x \in A, \exists y \in A / x^2 + y^2 < 12$

III) $\exists x \in A, \forall y \in A, \exists z \in A / x^2 + y^2 < 2z^2$

IV) $\exists x \in A, \exists y \in A, \forall z \in A / x^2 + y^2 < 2z^2$

A) VFVV B) VVFV C) VVVF D) FVVV E) VVVV

31 Dadas las proposiciones:

p : Marcos es comerciante.
q : Marcos es un prospero industrial.
r : Marcos es ingeniero.

Simbolizar el enunciado :

«Si no es el caso que Marcos sea un comerciante y un prospero industrial, entonces es ingeniero o no es comerciante»

A) $\sim (p \wedge q) \rightarrow (r \vee p)$ B) $(\sim p \wedge q) \rightarrow (r \wedge p)$
C) $\sim (p \vee q) \rightarrow (r \vee p)$ D) $\sim (p \wedge q) \rightarrow (r \vee \sim p)$
E) $(\sim p \wedge \sim q) \rightarrow (\sim r \vee p)$

32 Si:

p : Andrés compra pan.
q : Andrés ingresa en la academia.
r : Andrés se levanta temprano.

Simbolizar:

«Si Andrés se levanta temprano y no compra pan implica que no podrá ingresar a la academia, pero que haya comprado el pan es condición necesaria y suficiente para que se haya levantado temprano»

A) $[(r \wedge \sim p) \vee \sim p)] \wedge (p \leftrightarrow r)$
B) $[(r \wedge p) \rightarrow \sim p] \wedge (q \leftrightarrow r)$
C) $[(r \wedge \sim p) \rightarrow \sim q] \wedge (p \leftrightarrow r)$
D) $[(r \wedge \sim p) \rightarrow q] \wedge (r \rightarrow p)$
E) $[(r \vee \sim p) \rightarrow \sim q] \vee (p \rightarrow r)$

33 La simbolización correcta del siguiente enunciado es :

Si Carlos compró el libro, entonces es propietario del libro.

No es el caso, que sea propietario del libro y no cumpla con su estudio. Por lo tanto, Carlos no compró el libro o no cumple con su estudio.

A) $[(p \rightarrow q) \wedge (\sim q \wedge \sim r)] \rightarrow [\sim p \vee \sim r]$
B) $[(p \rightarrow q) \vee (\sim q \wedge \sim r)] \leftrightarrow (\sim q \vee \sim r)$
C) $[(p \rightarrow q) \wedge \sim (q \wedge \sim r)] \rightarrow (\sim p \vee \sim r)$
D) $[(q \rightarrow p) \wedge \sim (q \wedge r)] \rightarrow (\sim p \wedge \sim r)$
E) $[(p \rightarrow q) \wedge (\sim q \wedge r)] \rightarrow (\sim p \wedge r)$

34 Si: $p * q = \sim p \wedge \sim q$

Expresar $\sim p$ usando únicamente el operador (*)

A) $(p * p) * p$ B) $(p * \sim p) * p$ C) $\sim (p * q)$
D) $p * q$ E) $p * (q * q)$

SEGUNDA PRACTICA DIRIGIDA

TEORIA DE CONJUNTOS

01 Dado el conjunto : $A = \{4 ; 3 ; \{6\}; 8\}$ y las proposiciones :

* $\{3\} \in A$ * $\{4\} \subset A$
* $\{6\} \in A$ * $\{6\} \subset A$
* $8 \in A$ * $\phi \subset A$
* $\phi \in A$ * $\{3; 8\} \subset A$

Indique el número de proposiciones verdaderas:
A) 7 B) 6 C) 5 D) 4 E) 3

02 Dados los conjuntos iguales:

$$A=\{a^2+3\ ;\ b+1\}\ \text{y}\ B=\{13\ ;19\}$$

Considere a y b enteros.
Indique la suma de los valores que toma $a+b$
A) 16 B) 24 C) 30 D) 12 E) 27

03 Indique la suma de los elementos del conjunto:

$$\{x^2+2/x\in\mathbb{Z}\wedge -4<x<4\}$$

A) 44 B) 42 C) 22 D) 18 E) 16

04 ¿Cuántos subconjuntos propios tiene el conjunto?

$$C=\{2;3;\{2\};3;2;\{2\};\{3\}\}$$

A) 127 B) 63 C) 15 D) 7 E) 31

05 Si: $n(A)=15\ ;n(B)=32$ y $n(A-B)=8$
Calcule : $n(A\,\Delta\,B)+n(A'-B')$
A) 36 B) 37 C) 51 D) 58 E) 59

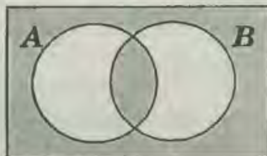
06 ¿Cuántos subconjuntos tiene la potencia del conjunto A, tal que : $A=\{2\ ;\ \{3\}\ ;\ 2\}$?
A) 4 B) 16 C) 2^{16} D) 8 E) 64

07 De un grupo de 30 personas , 20 van al teatro, 5 sólo van al cine, 18 van al cine o al teatro ; pero no a ambos sitios. ¿Cuántos van a ambos sitios?
A) 6 B) 7 C) 8 D) 5 E) 4

08 Sabiendo que A tiene 128 subconjuntos en total, que el número de elementos de la intersección de A y B es 5 y que $B-A$ tiene 16 subconjuntos.
Determinar el número de subconjuntos de $A\cup B$.
A) 1024 B) 512 C) 256 D) 2048 E) 4096

09 De un grupo de 62 atletas , 25 lanzan bala , 36 lanzan jabalina y 30 lanzan disco, 3 lanzan los tres; 10 lanzan jabalina y disco, 15 disco y bala , 7 lanzan bala y jabalina. ¿Cuántos no lanzan jabalina ni disco?
A) 4 B) 6 C) 7 D) 5 E) 3

10 La operación que representa la región sombreada es:



A) $(A\cup B)'\cup(A\cap B)$ B) $[A\cap(A\cup B)]\cup(A-B)$
C) $A\cap(A\cup B)$ D) $A\cap(A\cup B)'$
E) $(A'\cap B')\cup(A\cup B)$

11 Si los conjuntos A y B son iguales , hallar $a\times b$ si a y b son naturales.

$A=\{a^2+2a\ ;b^3-b\}$

$B=\{2a\ ;15\}$

A) 8 B) 15 C) 9 D) 12 E) 6

12 Dado el conjunto : $P=\{5;\ 6;\ 7;\ 8;\ 9\}$ y los conjuntos:

$$M=\{x\in P/x^2>50\wedge x<9\}$$
$$M=\{x\in P/x\ \text{es impar}\wedge 6<x\}$$

Determinar: $n(M)+n(N)$
A) 3 B) 4 C) 2 D) 1 E) 5

13 Si :

$$A=\{a;b;c;b\}\ \text{y}\ B=\{(m^2+1)\ ;\ -1;5;(n-3);2\}$$

Donde: $n\wedge m\in Z^+$ y $3<n<8$. Además A y B son equipotentes . Hallar la suma de valores de $n+m$.
A) 6 B) 13 C) 10 D) 14 E) 23

14 Jéssica tomó helados de fresa o coco durante todas las mañanas en los meses de verano (enero, febrero y marzo) del 2004 . Si tomó helados de fresa 53 mañanas y tomó helados de coco durante 49 mañanas. ¿Cuántas mañanas tomó helado de los dos sabores?
A) 9 B) 10 C) 11 D) 12 E) 15

15 En una ciudad se determinó que el 46% de la población no lee la revista A , 60% no lee la revista B y el 58% lee A ó B pero no ambas.
¿Cuántas personas hay en la población si 63000 personas leen A y B?
A) 420000 B) 840000 C) 350000 D) 700000 E) 630000

16 En una encuesta realizada a 190 personas sobre la preferencia de leer las revistas A y B, el resultado fue el siguiente: el número de personas que les gusta A y B es $\frac{1}{4}$ de los hombres que sólo les gusta A y la mitad de las mujeres que sólo les gusta A. El número de hombres que sólo les gusta B es $\frac{2}{3}$ del número de mujeres que sólo les gusta B. Los que leen A son 105 , los que leen B son 70. Halle el número de personas que no leen ni A ni B.
A) 30 B) 32 C) 36 D) 38 E) 40

17 En una peña criolla trabajan *32* artistas. De estos, *16* bailan, *25* cantan y *12* cantan y bailan. El número de artistas que no cantan ni bailan es :
A) 4 *B) 5* *C) 2* *D) 1* *E) 3*

18 Si :

$A = \{1;\ 2;\ \{1; 2\};\ 3\}$
$B = \{\{2; 1\};\ \{1; 3\};\ 3\}$

Halle usted : $[(A - B) \cap B] \cup (B - A)$
A) $\{1 ; 3\}$ *B)* $\{\{1 ; 2\}\}$ *C) A* *D)* $\{\{1 ; 3\}\}$ *E) B*

19 Dado el conjunto: $A = \{1 ; \{2\} ; \{1 ; 2\}\}$
¿Cuál de las siguientes proposiciones es verdadera?
A) $2 \notin A$ *B)* $\{1\} \in A$ *C)* $1 \subset A$ *D)* $\phi \in A$ *E)* $\{2\} \notin A$

20 Si : $A = \{x/x = (4m-1)^2,\ m \in N, 2 \le m \le 5\}$
Entonces el conjunto *A* escrito por extensión es :
A) $\{7; 11; 15; 19\}$ *B)* $\{2; 3; 4; 5\}$ *C)* $\{4; 9; 16; 25\}$
D) $\{49; 121; 225; 361\}$ *E)* $\{3; 4; 7; 9\}$

21 Si *A*, *B* y *C* son tres subconjuntos de un conjunto universal de *98* elementos y además:

$$n[(A \cup B) \cap C'] = 50\ ,\ n(C) = 34$$

Hallar : $n[(A \cup B \cup C)']$
A) 13 *B) 14* *C) 15* *D) 16* *E) 17*

22 El resultado de una encuesta sobre preferencia de jugos de fruta de manzana, fresa y piña es el siguiente :

60% gustan manzana.
50% gustan fresa.
40% gustan piña.
30% gustan manzana y fresa.
20% gustan fresa y piña.
10% gustan manzana y piña.
5% gustan de los tres.

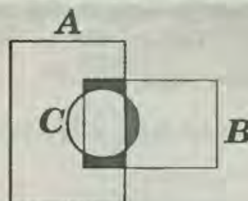
¿Que porcentaje de las personas encuestadas no gustan alguno de los jugos de frutas mencionados?
A) 5% *B) 20%* *C) 50%* *D) 12%* *E) 10%*

23 Dados los conjuntos :

$$A = \{n^2/n \in N \wedge 0 < n < 20\}$$
$$B = \{2n/n \in Z \wedge 4 < n^2 < 500\}$$

¿Cuántos elementos tiene $A \times B$?
A) 380 *B) 400* *C) 342* *D) 800* *E) 760*

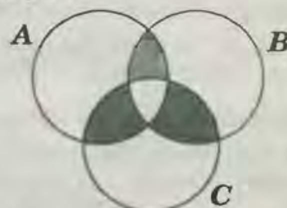
24 La región sombreada de la siguiente figura corresponde a :



A) $[(A \cup C) \cup (B \cap C)] - (A \cap B)$
B) $[C - (A \cap B)] \cap [(A \cap C) - (A \cap B)]$
C) $[(A \cap B) - C] \cup [(B \cap C) - (A \cap B)]$
D) $[(A \cap C) - (A \cap B)] \cup [(A \cap C) - (A \cap B)]$
E) $[(A - B) \cup C] - C$

25 Carlos debe almorzar pollo o pescado (o ambos) en su almuerzo de cada día del mes de marzo. Si en su almuerzo durante *20* días hubo pollo y durante *25* días hubo pescado, entonces, el número de días que almorzó pollo y pescado es:
A) 18 *B) 16* *C) 15* *D) 14* *E) 13*

26 En la figura la parte sombreada está representada por :



A) $(A \cap B \cap C) \cup [C \cap (A \cap B)]$
B) $(A \cap B \cap C) \cap [(A \cup B) \cap \overline{(A \cap B)}]$
C) $\{[(A \cup B \cup C) - A] - C\} - B$
D) $[(A \cap B) - C] \cup [(B \cap C) - A] \cup [(A \cap C) - B]$
E) $(A \cup B \cup C) - (A \cap B \cap C)$

27 ¿Cuántos elementos tiene el siguiente conjunto?

$$\{5 ; 7; 9 ; 11; .... ; 83\}$$

A) 35 *B) 40* *C) 41* *D) 60* *E) 45*

28 Sea *A* un conjunto con dos elementos y *B* un conjunto con tres elementos, el número de elementos de $P(A) \times P(B)$ es:
A) 12 *B) 24* *C) 48* *D) 64* *E) 32*

29 Sea *A, B* y *C* subconjuntos de un conjunto universal *U*. De las afirmaciones:

I) Si $A \subset (B \cup C)$ y $A \cap C = \phi$ entonces $A \subset B$

II) Si $A \subset B$,entonces $A \cap \overline{B} = \phi$ ($\overline{B}$ =complemento de *B)*

III) Si $A \cap B = \phi$ y $B \subset C$; entonces $A \cap C = \phi$.

IV) Si $A \cup B \cup C = \mathbb{U}$ Entonces $A \cap B \cap C = \phi$

A) Sólo II es verdadera.
B) Sólo I, II y IV son verdaderas.
C) Sólo I es verdadera.
D) Sólo I y II son verdaderas.
E) Todas son verdaderas.

30 Decir cuál de los siguientes enunciados es falso:

A) $A \subset B \wedge B \subset A \rightarrow A = B$

B) $A \subset B \wedge B \subset C \rightarrow A \subset C$

C) $x \in A \wedge A \in B \rightarrow x \in B$

D) $x \in A \wedge A \subset B \rightarrow x \in B$

E) $x \in A \wedge x \in B \rightarrow x \in A \cap B$

31 Decir cuál de los siguientes enunciados es falso:

A) $A = \phi \wedge B = \phi \rightarrow A \cap B = \phi$

B) $A = \phi \wedge B = \phi \rightarrow A \cup B = \phi$

C) $A \cap B = \phi \rightarrow A = \phi \wedge B = \phi$

D) $A \cup B = \phi \rightarrow A = \phi \wedge B = \phi$

E) $\phi \cup A = A \ ; \forall A$

32 Si:

$$A = \left\{ x \in N / x^2 - 4 = 0 \wedge x \text{ es primo} \right\}$$

$$B = \left\{ x \in \mathbb{R} / x^2 - 3x + 2 = 0 \right\}$$

Entonces $A \cap B$ es :

A) ϕ *B)* $\{\phi\}$ *C)* $\{2\}$ *D)* $\{1\}$ *E)* $\{-2\}$

33 Sean los conjuntos no disjuntos ***A ; B , C*** y ***D*** donde se sabe que el conjunto ***A*** tiene ***241*** elementos, el conjunto ***B*** tiene ***274*** elementos, el conjunto ***C*** tiene ***215*** elementos y el conjunto ***D*** tiene ***282*** elementos.

Calcular el número de elementos que tiene la intersección de los *4* conjuntos si es lo mínimo posible, además se sabe que la unión de los *4* conjuntos es ***300.***

A) 68 *B) 79* *C) 87* *D) 119* *E) 112*

CLAVES DE LA PRIMERA PRACTICA

01) A	02) C	03) A	04) A	05) E
06) C	07) E	08) A	09) D	10) D
11) C	12) C	13) E	14) A	15) A
16) D	17) C	18) B	19) A	20) B
21) C	22) B	23) C	24) D	25) B
26) D	27) B	28) D	29) C	30) E
31) D	32) C	33) C	34) B	

CLAVES DE LA SEGUNDA PRACTICA

01) C	02) B	03) C	04) C	05) D
06) B	07) B	08) D	09) B	10) A
11) E	12) A	13) D	14) C	15) C
16) A	17) E	18) D	19) A	20) D
21) B	22) A	23) E	24) C	25) D
26) D	27) B	28) E	29) D	30) C
31) C	32) C	33) E		

HISTORIA-LA TEORÍA DE CONJUNTOS

George Cantor (1845-1918) fue quien prácticamente formuló de manera individual la teoría de conjuntos a finales del siglo XIX y principios del XX. Su objetivo era el de formalizar las matemáticas como ya se había hecho con el cálculo cien años antes. Cantor comenzó esta tarea por medio del análisis de las bases de las matemáticas y explicó todo basándose en los conjuntos (por ejemplo, la definición de función se hace estrictamente por medio de conjuntos). Este monumental trabajo logró unificar a las matemáticas y permitió la comprensión de nuevos conceptos.

El problema apareció cuando se comenzaron a encontrar paradojas en esta teoría, siendo la más célebre la paradoja de Russell, y más tarde varios matemáticos encontraron más paradojas, incluyendo al mismo Cantor. Russell descubrió su paradoja en 1901, y la publicó en un apéndice de su libro «Principios de las matemáticas».

Cuando los matemáticos supieron de esta paradoja, muchos se preguntaron si las matemáticas en realidad eran consistentes, y sobre todo verdaderas, ya que cualquier suposición matemática podía basarse en una teoría inconsistente.

La primera propuesta para solucionar el problema de las paradojas provino de un matemático holandés llamado Brouwer, quien propuso una redefinición radical de todas las matemáticas y prometió una solución al conflicto. El programa de Brouwer se basaba en lo más simple de la intuición: el aceptaba los conceptos que son aparentes a la intuición general. Esta filosofía rechazaba muchos principios fundamentales de las matemáticas, pero en cambio, solucionaba satisfactoriamente el problema de las paradojas. Particularmente Brouwer rechazaba el principio del medio excluido, el cuál decía que los elementos de un conjunto o bien tienen una propiedad A o no la tienen, lo cuál sería la negación de la propiedad A. A esta corriente de pensamiento se le llamó intuicionismo.

Por otro lado, David Hilbert se opuso al intuicionismo y aunque no toleraba las paradojas, no estaba dispuesto a ver las matemáticas mutiladas. En 1904 propuso la teoría de la prueba, la cuál era una teoría de la lógica independiente del contexto y podría ser aplicada a las matemáticas sin encontrar paradojas. Russell a su vez desarrolló su teoría de los tipos para evitar las paradojas. El proponía que los enunciados se acomodaran jerárquicamente. Russell publicó sus resultados en 1908 con la colaboración de Alfred North Whitehead.

La cuarta respuesta a la paradoja fue de Ernst Zermelo en 1908 con la axiomatización de la teoría de conjuntos.

La mejor prueba de que la teoría de conjuntos no ha logrado unificar a las matemáticas es que estas se han ramificado en áreas muy diferenciadas, como la aritmática, el álgebra, la trigonometría y geometría; también se han separados distintos campos como el cálculo, la topología, la teoría de conjuntos, la teoría de los números y la estadística.

El concepto de paradoja puede entenderse como uno de los siguientes:

* Una declaración contradictoria que parece ser cierta.
* Aquello que exhibe aspectos o cualidades contradictorias o inexplicables.
* Una declaración esencialmente contradictoria basada en un razonamiento válido de suposiciones lógicas.

Las paradojas han existido en las matemáticas desde sus comienzos y han sido fundementales para una formalización más cuidadosa de sus teoremas y leyes. Un ejemplo muy antiguo es la paradoja de Zeno, la cuál cobró importancia en el desarrollo del cálculo; como veremos más adelante, las paradojas de la teoría de conjuntos han hecho que los matemáticos cuestionen la consistencia de las matemáticas y vean más allá de lo que hasta ahora se ha formulado.

PARADOJA DE CANTOR: EL CONJUNTO DE TODOS LOS CONJUNTOS

Sea C el conjunto de todos los conjuntos. Entonces todo subconjunto de C es así mismo un elemento de C; luego, el conjunto potencia de C es un subconjunto de C; pero esto implica que la cardinalidad del conjunto potencia es menor o igual a la cardinalidad de C. Pero entonces, según el teorema de Cantor, la cardinalidad de C debe ser menor a la cardinalidad del conjunto potencia. Así pues, el concepto de conjunto de todos los conjuntos lleva a una contradicción.



OBJETIVOS :

* Identificar y aplicar las distintas propiedades de las operaciones definidas en los números reales y operar con propiedad y exactitud en este conjunto.

* Conocer los diferentes axiomas y teoremas sobre los números reales, respecto a la relación de orden entre ellos.

* Saber operar adecuadamente con intervalos.

INTRODUCCIÓN :

Gran parte del trabajo en álgebra tiene que ver con el sistema de números reales.

Repacemos ahora la composición de este sistema numérico.

* Los números *0; 1; 2; 3; ...* usados para contar los elementos de un conjunto se llaman números naturales. El conjunto de los números naturales se denota $N\cdot(N=\{0;1;2;3:...\}.)$ En este conjunto, ecuaciones como $x+5=0$ no tienen solución porque no existe un número natural x que sumado con *5* dé *0*. Es necesario ampliar el conjunto de números.

* Así se tiene el conjunto de los números enteros formado por los números naturales y sus opuestos, se denota $Z(Z=\{...-3;-2;-1;0;1;2;3;...\}.)$ En este conjunto, la ecuación $x+5=0$, tiene como sulución $x=-5$ porque $5+(-5)=0$.

Se observa que todo número natural es un entero, es decir $N\subset Z$.

* El conjunto de los enteros tiene dos subconjuntos importantes: los enteros positivos $Z^+=\{1;2;3;...\}$ y los enteros negativos $Z^-=\{...-3;-2;-1\}$.

* En los enteros, ecuaciones como $2.x=1$ no tienen solución porque no existe un número entero x que multiplicado por *2* dé *1*. Es necesario ampliar el conjunto de números . Así se tiene el conjunto de los números racionales, que son números que pueden escribirse como el cociente de dos enteros , $\frac{p}{q}$ con $q\neq 0$.

* El conjunto de los números racionales se denota Q

$$Q=\left\{\frac{p}{q}\in\middle|\,p\in Z,\ q\in Z\ \text{y}\ q\neq 0\right\}.$$

Algunos ejemplos de números racionales son

$$\frac{2}{3};\frac{-3}{4};\frac{7}{5};\frac{1}{2};\frac{-6}{1};\frac{0}{1};...$$

* En este conjunto, la ecuación $2.x=1$ tiene como solución $x=\frac{1}{2}$ porque $2\times\frac{1}{2}=\frac{2}{2}=1.$

* Como todo entero n se puede escribir como $\frac{n}{1}$, se tiene que todo entero es un número racional, es decir $Z\subset Q$. Cualquier número racional puede representarse por un número decimal periódico y viceversa , así :

$$\frac{2}{3}=0,\widehat{6}\ ;\ \frac{-3}{4}=-0,75\ ;\ 0,5444...=\frac{49}{90};...$$

*Pero también existen expresiones decimales que son infinitas no periódicas como *0,12345678910111213...* estas expresiones corresponden a números no racionales.

Así mismo se puede mostrar que la ecuación $x.x=2$ no tiene solución en Q.

Luego el número $x=\sqrt{2}$ solución de $x.x=2$ es un número no racional. El número π que es la razón entre la circunferencia de un círculo y su diámetro es no racional.

*Estos números no racionales se llaman irracionales. El conjunto de los números irracionales se denota por I.

* Los números racionales (decimales periódicos) y los números irracionales (decimales no periódicos) forman un conjunto de números llamados los *números reales.*

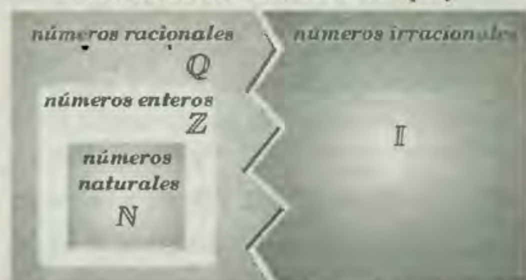
* El conjunto de los números reales se denota por R.

* Luego $R=Q\cup I$.

Se observa que $Q \subset R$; $I \subset R$ y $Q \cap I = \phi$.

* El conjunto de los números reales es, en cierto modo, el conjunto de todos los números que pueden escribirse como números decimales.

NÚMEROS REALES (R)



A partir de este capítulo podemos indicar que, estamos iniciando el estudio del álgebra superior . Pues la teoría que desarrollaremos es fundamental para el estudio de las funciones, lo cual corresponde al análisis matemático y además será muy importante pues lo que aprendemos aquí lo usaremos en los cursos de matemáticas básicas de los primeros ciclos de las diferentes carreras de ingeniería.

SISTEMA DE LOS NÚMEROS REALES (R)

Es el conjunto denotado por R, con dos operaciones entre sus elementos: adición *(+)* y multiplicación *(×)*, y una relación de orden «<» que se lee «es menor que», que satisface los siguientes axiomas:

AXIOMAS DE LAS ADICIÓN

A_1: LEY DE CLAUSURA

Para todo $a, b \in R$ la suma $a+b$ es también un número real.

A_2: LEY DE CONMUTATIVIDAD

Para todo $a, b \in R$ la suma de cualquier par de números reales no depende del orden en que le sumen $a+b=b+a$.

A_3: LEY ASOCIATIVA

Para todo a, b, c en $R : (a+b)+c = a+(b+c)$ la suma de tres o más números reales es independiente del modo en que son agrupados (asociados).

A_4 : EXISTENCIA Y UNICIDAD DEL ELEMENTO NEUTRO ADITIVO

Existe un elemento en R y sólo uno denotado por 0, tal que $\forall a \in R$:

$$a+0=0+a=a$$

A_5: EXISTENCIA Y UNICIDAD DEL ELEMENTO INVERSO ADITIVO

Para cada número real «a» existe un elemento en R y sólo uno, denotado por $(-a)$ tal que:

$$a+(-a)=(-a)+a=0$$

AXIOMAS DE MULTIPLICACIÓN

M_1 : LEY DE CLAUSURA

Para todo $a, b \in R : ab \in R$, la multiplicación ab también es un real.

M_2 : LEY CONMUTATIVA

Para todo $a, b \in R$: $ab=ba$, la multiplicación de dos números reales no depende del orden en que son multiplicados.

M_3 : LEY ASOCIATIVA

Para todo $a,b,c \in R : a \cdot (bc) = (ab) \cdot c$, la multiplicación de tres o más números reales produce el mismo resultado, sean agrupados de cualquier manera .

M_4 : EXISTENCIA Y UNICIDAD DEL ELEMENTO NEUTRO MULTIPLICATIVO

Existe un elemento en R y sólo uno, denotado por «1» distinto de cero, tal que, para todo $a \in R : a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$

M_5 : EXISTENCIA Y UNICIDAD DEL INVERSO MULTIPLICATIVO

Para cada $a \neq 0$ en R, existe uno sólo un elemento en R denotado por «a^{-1}», tal que: $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$

AXIOMAS DE DISTRIBUTIVIDAD

Para todo a, b, c en R:

$D_1 :\ a \cdot (b+c) = ab + ac$

$D_2 :\ (a+b) \cdot c = ac + bc$

AXIOMAS DE LA RELACIÓN DE ORDEN

0_1 : LEY DE TRICOTOMÍA:

Dados $a \in R \wedge b \in R$, entonces se cumple una y solamente una de las siguientes relaciones

$a<b$	ó	$a=b$	ó	$b>a$

O_4: LEY TRANSITIVA :

Para todo a, b y $c \in R$ se cumple que :

$$\text{Si}: a < b \wedge b < c \Rightarrow a < c$$

O_5: LEY ADITIVA :

Si $a<b$ entonces $a+c<b+c$ para todo $c \in R$. El sentido de una desigualdad no cambia si ambos miembros se le suma un mismo número, que puede ser positivo, negativo o cero.

O_6 : Si $a<b$ y $0<c$ entonces $ac<bc$

El sentido de la desigualdad no cambia si se multiplica a ambos miembros por una misma cantidad positiva.

SUSTRACCIÓN DE NÚMERO REALES

Para 2 números reales a , b; se define a la sustracción de los mismos de la forma :

$$a-b=a+(-b)$$

DIVISIÓN DE NÚMEROS REALES

Para 2 números reales a y $b\ (b \neq 0)$, definimos la división de la forma:

$$\frac{a}{b}=a \cdot b^{-1}$$

COJUNTOS ACOTADOS

Si A es un conjunto de números reales, de un número finito de elementos entonces. A tiene un elemento máximo y uno mínimo. Pero también este conjunto puede tener infinitos números reales, en este caso A puede ser que tenga un elemento máximo y uno mínimo o tal vez no existen dichos elementos.

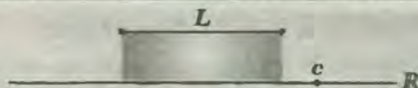
EJEMPLOS:

$A=\{-8;2;6;20\}$; en este conjunto el elemento máximo es **20** y el mínimo es **–8**.

COTA SUPERIOR DE UN CONJUNTO:

Sea R el conjunto de los números reales y $L \subset R$ diremos que el conjunto L está acotado superiormente (o tiene una cota superior) si existe un número $c \in R$ si y sólo si c es mayor o igual que todos los elementos de L.

Así:



Se puede ver que L está acotado superiormente en R.

EJEMPLO:

* Sea: $L=\{1;2;3;7\}$

$8 \in Z$ es una cota superior de L, pues $\forall\ x \in L\ ; x \leq 8$

* Asi mismo podemos decir que el conjunto L está acotado superiormente en el conjunto Z.

COTA INFERIOR DE UN CONJUNTO:

Sea R el conjunto de los números reales y $L \subset R$, diremos que el conjunto L está acotado inferiormente (o tiene una cota superior) si existe un número $c \in R$, si y sólo si c es menor o igual que todos los elementos de L .

CONJUNTOS ACOTADOS :

Sea R el conjunto de los números reales y $L \subset R$. El conjunto L está acotado si existe un número $c \in R$, tal que para todo $x \in L; -c \leq x \leq c$, es decir el conjunto L es acotado si es acotado superior e inferiormente.

EJEMPLO:

$L=\{x \in R / -2<x<2\}$ y, como vemos existen cotas tanto superiores como inferiores. El conjunto de cotas inferiores es $\{x \in R / x \leq -2\}$ y el conjunto de cotas superiores es $\{x \in R / x \geq 2\}$ con lo cual queda establecido que el conjunto es acotado.

SUPREMO DE UN CONJUNTO

Sea L un subconjunto de R acotado superiormente, diremos que un elemento de $c \in R$ es el supremo de L si y sólo si c es la menor de las cotas superiores de L.

Notación: $c=supL$

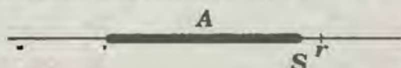
INFIMO DE UN CONJUNTO

Sea b un subconjunto de R acotado inferiormente , diremos que un elemento $c \in R$ es el ínfimo de L si y sólo si c es la mayor de todas las cotas inferiores de L.

Notación: $c=inf\ L$

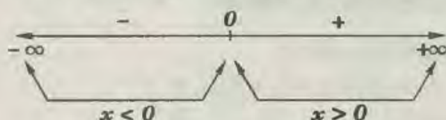
AXIOMA DEL SUPREMO

Si «A» es un conjunto de números reales «S» que tiene , una cota superior , entonces hay un número (S) llamado el supremo de «A», que es la menor de todas las cotas superiores de «A».



El número «r» es una cota superior de A , si $a \leq r ; \forall a \in A$.

REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICA DE LOS NÚMEROS REALES



RELACIÓN DE ORDEN

Dado un conjunto A distinto del vacío donde se define $\mathbb{R}$ en A .

$\mathbb{R}$ es una relación de orden en A si verifica las siguientes propiedades:

I) $(a; a) \in \mathbb{R}, \forall a \in A$ *(Propiedad reflexiva)*

II) Si $(a ; b) \in \mathbb{R} \wedge (b ; a) \in \mathbb{R} \Rightarrow a=b$ *(Propiedad antisimétrica)*

III) Si $(a ; b) \in \mathbb{R} \wedge (b ; c) \in \mathbb{R} \Rightarrow (a ; c) \in \mathbb{R}$ *(Propiedad transitiva)*

Como se ha definido en el conjunto A la relación de orden , entonces se dirá que A es ordenado, para ello se usarán los siguientes símbolos.

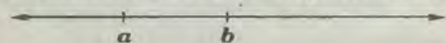
> "mayor que"
< "menor que" } ESTRICTOS

≥ "mayor o igual que"
≤ "menor o igual que" } NO ESTRICTOS

Se define la relación de orden en $\mathbb{R}$, para ello diremos que el campo real es un campo ordenado.

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LA RELACIÓN DE ORDEN

La correspondencia biunívoca que existe entre los números reales y los puntos sobre una recta se puede utilizar para dar una interpretación geométrica a la relación de orden <. La relación $a<b$ establece que al graficar en una recta numérica horizontal, el número a se encuentra a la izquierda de b.

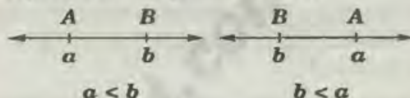


OBSERVACIÓN :

Existe un último axioma llamado el axioma del supremo que es satisfecho por el conjunto de los números reales , pero que en general no se cumple en el conjunto de los números racionales.

*Como se mencionó anteriormente, se puede establecer una correspondencia entre los números reales y los puntos de una recta; de acuerdo con ella y dados los números reales «a» y «b» diferentes, se tiene : $a< b$ ó $b < a$

Cuya representación geométrica es:



Una desigualdad es una expresión que indica que un número es menor que otro.

I) Un número «a» $\in \mathbb{R}$ es positivo si: $a>0$

II) Un número «a» $\in \mathbb{R}$ es negativo si: $a<0$

III) Un cierto número «a» es mayor que otro «b» Si $a>b ...(b<a)$

IV) Un cierto número «a» es menor o igual que otro «b» Si: $a \leq b \Leftrightarrow [a < b \text{ ó } a = b]$

V) Un cierto número «a» es mayor o igual que otro «b» Si: $a \geq b \Leftrightarrow [a > b \text{ ó } a = b]$

VI) Dada la cadena de desigualdades: $a<b<c$ con a, b y $c \in \mathbb{R} \Leftrightarrow [a < b \text{ y } b < c]$

VII) Dada la cadena de desigualdades: $a<b \leq c$ con a, b y $c \in \mathbb{R} \Leftrightarrow [a < b \text{ y } (b < c \text{ ó } b = c)]$

SUBCONJUNTOS NOTABLES DE LOS NÚMEROS REALES

I) El axioma M_4 asegura la existencia del número uno, *1*, entonces aplicando sucesivamente el axioma de la cerradura A_1 y el axioma de la asociatividad A_3 se tiene:

$$1 + 1 = 2 \in \mathbb{R}$$
$$2 + 1 = 3 \in \mathbb{R}$$
$$(n-1)+1= n \in \mathbb{R}$$

* Este conjunto así formado , denotado por $\mathbb{N}$, se llama el conjunto de los números naturales. Así $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$.

II) El axioma A_5 asegura que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe

un único elemento $-n \in N$ y el axioma A_5 asegura la existencia de $0 \in R$, el conjunto

$$Z = \{....;-2;-1;0;1;2;....\}$$

es llamado el conjunto de los números enteros. Así $N \subset Z \subset R$

III) El axioma M_5 asegura que para cada $n \in Z$, $n \neq 0$ existe un único elemento $n^{-1} = \frac{1}{n} \in R$

* Entonces para todo $m \in Z$, el número denotado por m/n, $\frac{m}{n} = m \cdot n^{-1} \in R$

* Así el conjunto $Q = \{m/n / m, n \in Z, n \neq 0\}$ llamado los racionales están contenidos en R y se tiene $N \subset Z \subset Q \subset R$

PROPIEDADES DE LOS NÚMEROS REALES

A partir de estos axiomas se demuestra todas las propiedades de las operaciones con números reales, sin embargo, aquí sólo se demostrarán algunas de ellas.

TEOREMA 1:

Si a es un número real , entonces $a \cdot 0 = 0$

DEMOSTRACIÓN :

* Partamos de $a \times 0$

$a \times 0 = a \cdot 0 + 0$ ....(A_4: *neutro aditivo*)

$\rightarrow a \times 0 = a \times 0 + a \times 0 + (-(a \times 0))$...($A_5$: *inverso*)

$\rightarrow a \times 0 = a(0+0) + (-(a \times 0))$........(*D: distributiva*)

$\rightarrow a \times 0 = a \times 0 + (-(a \times 0))$.............($A_4$)

$\rightarrow a \times 0 = 0$..($A_5$)

TEOREMA 2 :

Para todo $-x \in R$, entonces: $-x = (-1)x$

DEMOSTRACIÓN:

* Partamos de :

$x \times 0 = 0$..........................*Teorema anterior*

$1 + (-1) = 0$....................(*elemento neutro aditivo*)

$x(1 + (-1)) = x \times 0$..........*multiplicando por x*

$x \times 1 + x(-1) = 0$..............*distributividad*

$x + (-1)x = 0$...................*conmutatividad*

$x + (-x) + (-1)x = (-x)$...*sumando* $(-x)$

$(x + (-x)) + (-1)x = -x$....*P. Asociativa*

$0 + (-1)x = -x$.................*neutro aditivo*

$\rightarrow (-1)x = -x$

TEOREMA 3: (Ley de cancelación)

$$\forall a,b,c \in R; \text{ Si : } a+c = b+c \Rightarrow a = b$$

DEMOSTRACIÓN:

* De : $a+c=b+c$

$a + c + (-c) = b + c + (-c)$............. *sumando* $(-c)$

$a + (c + (-c)) = b + (c + (-c))$........ (*P. Asociativa*)

$a + 0 = b + 0$ .... (*Elemento neutro*)

$\rightarrow a = b$

TEOREMA 4:

$\forall a \in R$, se cumple: $-(-a) = a$

DEMOSTRACIÓN:

* Partamos de: $0 = 0$

$-a + [-(-a)] = a + (-a)$ .....(A_5)

$[-(-a)] + (-a) = a + (-a)$...($M_2$)

$\rightarrow [-(-a)] = a$.....................(*Ley de cancelación*)

TEOREMA 5:

Supóngase que a y b son números reales $ab = 0$ si y sólo si $a = 0$ ó $b = 0$

DEMOSTRACIÓN :

Si : $ab = 0 \Rightarrow a = 0$ ó $b = 0$

Si $b=0$ no hay nada que demostrar pues en tal caso se cumple la condición que se desea demostrar si $b \neq 0$ entonces por M_5 existe b^{-1} en R tal que $bb^{-1} = 1$ de donde :

$a = a \times 1$.............. M_4

$\rightarrow a = a(bb^{-1})$... M_5

$\rightarrow a = (ab)b^{-1}$.... M_3

$\rightarrow a = 0b^{-1}$.......... por hipotesis $ab=0$

$\rightarrow a = b^{-1} \times 0$....... M_2

$\rightarrow a = 0$.............. por teorema 1

Si $a=0$ ó $b=0 \Rightarrow ab=0$ se sigue inmediatamente del ***teorema 1***.

APLICACIÓN :

Resolver la ecuación : $x^2 - 5x + 6 = 0$

RESOLUCIÓN :

* Factorizando : $x^2 - 5x + 6 = 0$

* Tenemos : $(x-2)(x-3) = 0$

$$\Leftrightarrow x - 2 = 0 \text{ ó } x - 3 = 0 \rightarrow x = 2 \text{ ó } x = 3$$

* El conjunto solución es $\{2; 3\}$

TEOREMA 6:

Si: $a^2 = b^2 \Leftrightarrow a = b$ ó $a = -b$

DEMOSTRACIÓN :

* Primero demostraremos:

Si: $a=b$ ó $a-b \Rightarrow a^2 = b^2$

- $a+(-b)=b+(-b)$ ó $a+b=-b+b$

  $a-b=0$ ó $a+b=0$

* De lo cual : $(a-b)(a+b)=0$

Entonces : $a^2 - b^2 = 0 \Rightarrow a^2 = b^2$

* Segundo demostraremos:

$$a^2 = b^2 \Rightarrow a = b \text{ ó } a = -b$$

Así :

$a^2 = b^2 \Rightarrow a^2 - b^2 = 0$ .... $A5$

$\Rightarrow (a+b)(a-b) = 0$ .... D

$\Rightarrow a+b=0$ ó $a-b=0$ .... *Teorema 5*

$\Rightarrow a=-b$ ó $a=b$ .... A_4 y A_5

TEOREMA 7:

Si: $a \in R$ y $a \neq 0 \Rightarrow a^2 \neq 0$

DEMOSTRACIÓN:

* Si $a \neq 0$ entonces $a>0$ ó $a<0$, luego:

I) Si: $x>0 \Rightarrow x \cdot x > 0 \cdot x$

$\Rightarrow x^2 > 0$

II) Si: $x<0 \Rightarrow -x>0$

$\Rightarrow (-x)(-x) > 0(-x)$

$\Rightarrow x^2 > 0$..........*(Def. de potenciación)*

«Todo número diferente de cero, elevado al cuadrado es positivo»

APLICACIONES:

* Si: $(x-2) \neq 0 \wedge x \in R \Rightarrow (x-2)^2 > 0$

* Si: $(t+3) \neq 0 \wedge t \in R \Rightarrow (t+3)^2 > 0$

* $\forall y \in R / (y-4)^2 \geq 0$ es verdadera

* $\forall y \in R / (y+2)^2 > 0$ es falsa:

porque si $y=-2$; no se cumple.

TEOREMA 8 :

Si : $x<b \Rightarrow x+z<b+z$

DEMOSTRACIÓN:

$0<b-x \Rightarrow x<b$

$b-x = b-x+z-z$

$b-x = (b+z)-(x+z)$

* De lo cual: $0<(b+z)-(x+z)$

* Sea $x<b \Rightarrow x+z<b+z$

TEOREMA 9:

Si: $a<b$ y $c<d \Rightarrow a+c<b+d$

DEMOSTRACIÓN:

$a<b \Rightarrow a+c<b+c$ .... O_3

$c<d \Rightarrow b+c<b+d$ .... O_3

$\rightarrow a+c<b+d$ .... O_2

TEOREMA 10:

Si: $a<b$ y $c<0 \Rightarrow ac>bc$

DEMOSTRACIÓN :

$a<b \Rightarrow a-a<b-a$................ O_3

$\Rightarrow 0<b-a \Rightarrow b-a>0$ ... A_5

$c<0 \Rightarrow (b-a)c<(b-a)0$..... O_4

$\Rightarrow bc-ac<0$............................ D y teorema *1*

$\Rightarrow bc-ac+ac<0+ac$............ O_3

$\Rightarrow bc+0<0+ac$...................... A_5

$\Rightarrow bc<ac \Rightarrow ac>bc$ .... A_4

DESIGUALDADES

Son relaciones de comparación entre dos o más cantidades reales de diferente valor.

EJEMPLO :

Si :

La edad de Juan es : 20 años

La edad de Pedro es: 30 años

La edad de Luis es : 50 años

Se tendrá las siguientes relaciones:

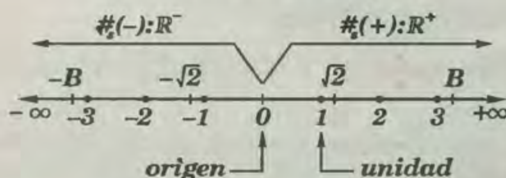
1°) La edad de Juan es menor que la edad de Pedro.

2°) La edad de Luis, es mayor que la edad de Pedro.

3°) La edad de Juan es menor que la edad de Luis.

Intuitivamente estamos comparando magnitudes reales de una misma especie. Las desigualdades solo se verifican en el campo de los números reales que asociado a la recta real podemos observar:

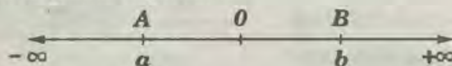
Recta Numérica Real



Que para cada número real le corresponde un único punto de la recta real y recíprocamente para cada punto de la recta real, le corresponde un único número real.

La correspondencia biunívoca entre números reales y puntos de una recta real nos ayuda a dar una interpretación geométrica de la relación de orden entre los números reales.

Para la gráfica adjunta. *A*



La relación $\boxed{a<b}$ (se lee: a menor que b) significa que al punto *A* le corresponde el número real «*a*» y se encuentra a la izquierda del punto *B* al cual le corresponde el número real «*b*».

DEFINICIÓN DE DESIGUALDAD :

Es aquella comparación que se establece entre dos números reales, mediante los símbolos de desigualdad: $<, >, \leq, \geq$. Luego si a y b son números reales, entonces: $a<b$, $a>b$, $a\leq b$ y $a\geq b$ se llaman desigualdades , y se leen :

$a<b$: «*a* menor que *b*»

$a>b$: «*a* mayor que *b*»

$a\leq b$: «*a* menor o igual que *b*»

$a\geq b$: «*a* mayor o igual que *b*»

EJEMPLOS:

$5>2$ ....cinco es mayor que dos

$3<6$..........tres es menor que seis

* La relación «mayor o igual que» ($\geq$) se define como:

$$a\geq b \Leftrightarrow a>b \vee a=b$$

* La relación «menor o igual que» ($\leq$) se define como:

$$a\leq b \Leftrightarrow a<b \vee a=b$$

EJEMPLOS:

$$2\geq 1 \Leftrightarrow 2>1 \vee 2=1$$

$$3\leq 3 \Leftrightarrow 3<3 \vee 3=3$$

Es suficiente que se verifique una de las relaciones de orden.

DEFINICIONES:

I) Un número $a\in\mathbb{R}$ se llama positivo si y sólo si $a>0$.

II) Un número $a\in\mathbb{R}$ se llama negativo si y sólo si $a<0$.

III) $a>b \Leftrightarrow a-b$ es positivo $(a-b>0)$

IV) $a<b \Leftrightarrow a-b$ es negativo $(a-b<0)$

V) Si $\{a;b\}\in\mathbb{R}^+$ entonces $\{a+b;ab\}\subset\mathbb{R}^+$

VI) $a\geq b \Leftrightarrow a>b \vee a=b$

VII) $a<b<c \Leftrightarrow a<b \wedge b<c$

VIII) $a>b \Leftrightarrow b<a$

EJEMPLOS:

* $3<5$ porque $5-3=2$ y 2 es positivo.
* $-10<-$ porque $-6-(-10)=4$ y 4 es positivo.
* $7>2$ porque $7-2=5$ y 5 es positivo.
* $-2>-7$ porque $-2-(-7)=5$ y 5 es positivo.
* $\frac{3}{4}>\frac{2}{3}$ porque $\frac{3}{4}-\frac{2}{3}=\frac{1}{12}$ y $\frac{1}{12}$ es positivo.

OBSERVACIONES :

Sean $a,b\in\mathbb{R}$. Luego:

* La expresión simbólica «$a>b$» tiene el mismo significado que «$b<a$»

EJEMPLO:

$$5>2 \Rightarrow 2<5$$

* La expresión simbólica «$a\leq b$» significa que $a<b$ ó $a=b$, es decir, cuando se verifica cualquiera de las expresiones: $a<b \vee a=b$, escribimos $a\leq b$

EJEMPLO:

Como $2<3$, podemos escribir $2\leq 3$

Como $5=5$, podemos escribir $5\leq 5$

* La expresión simbólica «$a\geq b$» tiene el mismo significado que $b\leq a$, es decir:

$$a\geq b \Rightarrow a>b \vee a=b$$

* Si $a\leq b \wedge b\leq c$, escribiremos abreviadamente $a\leq b\leq c$.

EJEMPLO:

$$4\leq x \wedge x\leq 9 \text{ entonces } 4\leq x\leq 9$$

* Las proposiciones $a<b$, $a>b$, $a\leq b$ y $a\geq b$ se denomina desigualdades. En particular, $a<b$ y $a>b$ se llaman desigualdades estrictas, mientras que $a\leq b$ y $a\geq b$ reciben el nombre de desigualdades no estrictas.

* La relación de orden que hemos definido es un orden parcial; como se desea un orden total, entonces es necesario una ley denominada ley de la

tricotomía.

LEY DE TRICOTOMÍA :

$\forall a \in R$; sólo se puede establecer una y sólo una de las tres relaciones :

$$a > 0 \vee a = 0 \vee a < 0$$

TEOREMA:

$\forall a;\ b \in R$, se tiene $a > b \vee a = b \vee a < b$

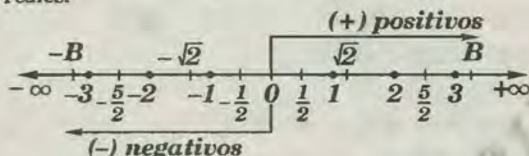
EJEMPLOS:

Dado los números reales: *–6; 3; –3* y *4;* se cumple que:

$-6 < -3 \quad 3 < 4 \quad -6 < 4 \quad -3 < 4$

LA RECTA NUMÉRICA REAL

Es aquella recta geométrica donde existe una correspondencia biunívoca (uno a uno) entre los puntos de la recta y el conjunto de los números reales.



Se observa que la representación de los números irracionales en la recta numérica, determina la completitud, es decir, que a cada número real le corresponde uno y sólo un punto de la recta y cada punto de la recta es imagen de un número real, por tal razón el conjunto es continuo , es decir, no existe ningún vacío entre sus elementos.

OBSERVACIONES :

* *$\infty; -\infty$; son ideales infinitos no son números reales.*

**Los números a la derecha de 0, son llamados positivos y los números a la izquierda de 0, son llamados negativos, el 0 no es negativo ni positivo.*

INTERVALOS

Sea I un subconjunto de $R (I \subset R)$. Decimos que I es un intervalo, si y sólo si es el conjunto de todos los números reales que están comprendidos entre dos extremos (que pueden ser finitos o ideales).

CLASES DE INTERVALOS :

Si I es un intervalo, puede ser : ***acotado*** o ***no acotado.***

I) INTERVALO ACOTADO

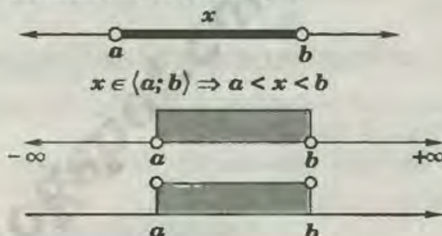
Es aquel intervalo cuyos extremos son finitos . Este puede ser :

1) INTERVALO ABIERTO

El conjunto de los números x que satisfacen la desigualdad $a<x<b$ se denomina ***intervalo abierto*** y se denota por $\langle a;b\rangle$ ó $]a;b[$.

Por tanto : $\langle a;\ b\rangle = \{x/a < x < b\}$

REPRESENTACIONES :



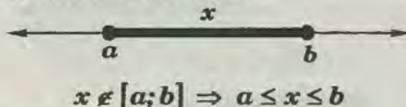
2) INTERVALO CERRADO :

Si $a,b \in R$ con $a \leq b$, se llama intervalo cerrado y se denota por $[a;b]$, al conjunto de todos los números reales x, tales que $a \leq x \leq b$.

Es decir :

$$[a;b] = \{x/a \leq x \leq b\}$$

REPRESENTACIÓN:



$$x \notin [a;b] \Rightarrow a \leq x \leq b$$

O también:



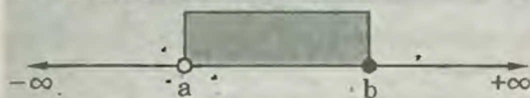
3) INTERVALOS SEMIABIERTOS :

El ***intervalo semiabierto por la izquierda*** es el intervalo abierto $\langle a;b]$ junto con el extremo derecho b.

Este intervalo se denota por $\langle a;b]$; de modo que

$$\langle a\,;b] = \{x/a < x \leq b\}$$

REPRESENTACIÓN :



Se define el ***intervalo semiabierto por la derecha*** de manera similar y se denota por $[a;b\rangle$

* Asi: $[a;b\rangle = \{x/a \le x < b\}$

REPRESENTACIÓN:

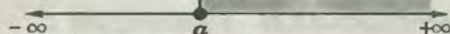


II) INTERVALOS NO ACOTADOS

Es aquel intervalo donde al menos un extremo es el ideal $+\infty$ ó $-\infty$.

Los siguientes intervalos son no acotados.

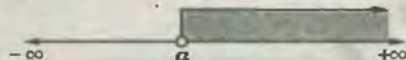
A) $[a;+\infty\rangle = \{x \in \mathbb{R}/x \ge a\}$



B) $\langle -\infty;a] = \{x \in \mathbb{R}/x \le a\}$



C) $\langle a;+\infty\rangle = \{x \in \mathbb{R}/x > a\}$



D) $\langle -\infty;a\rangle = \{x \in \mathbb{R}/x < a\}$



EJEMPLOS:

* $\langle 2;7\rangle = \{x \in \mathbb{R}/2 < x < 7\}$
* $[-5;7] = \{x \in \mathbb{R}/-5 \le x \le 7\}$
* $\langle 5;+\infty\rangle = \{x \in \mathbb{R}/x > 5\}$
* $\langle -\infty;-1] = \{x \in \mathbb{R}/x \le -1\}$

OBSERVACIONES :

* $\langle -\infty;+\infty\rangle = \mathbb{R}$

  Toda la recta numérica

* Si $a = b \Rightarrow [a;b] = \{a\}$
* Si $a = b \Rightarrow \langle a;b\rangle = \{\ \} = \phi$

  (Es el conjunto vacío)

OPERACIONES ENTRE INTERVALOS

Si los conjuntos **A** y **B** representan un intervalo de números reales, se realizan entre ellas las siguientes operaciones:

I) UNIÓN: $A \cup B = \{x/x \in A \vee x \in B\}$

II) INTERSECCIÓN: $A \cap B = \{x/x \in A \wedge x \in B\}$

III) DIFERENCIA: $A - B = \{x/x \in A \wedge x \notin B\}$

IV) COMPLEMENTO: $A' = \{x/x \in \mathbb{R} \wedge x \notin A\}$

A' = complemento de **A** respecto a $\mathbb{R}$

$A' = \mathbb{R} - A$

EJEMPLO:

Sean los conjuntos:

$$A = [-4;5[\ ;\ B =]0;8]\ ;\ C = [-1;+\infty[$$

realizar las siguientes operaciones:

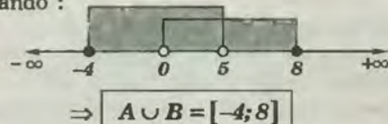
1) $A \cup B$ ***2)*** $B \cap C$ ***3)*** $A - C$ ***4)*** B'

RESOLUCIÓN:

1) $A \cup B = ?$

Como: $A = [-4;5[$ y $B =]0;8]$

* Graficando :

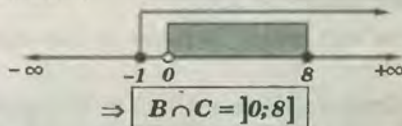


$\Rightarrow$ $A \cup B = [-4;8]$

2) $B \cap C = ?$

Como: $B =]0;8]$ y $C = [-1;+\infty[$

* Graficando :

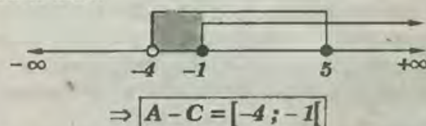


$\Rightarrow$ $B \cap C =]0;8]$

3) $A - C = ?$

Como: $A = [-4;5[$ y $C = [-1;+\infty[$

* Graficando:

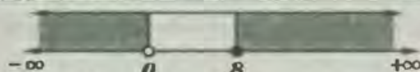


$\Rightarrow$ $A - C = [-4;-1[$

4) $B' = ?$

Como: $B =]0;8]$

* Graficando:



$\Rightarrow \boxed{B' =]-\infty;0] \cup]8;+\infty[}$

CLASES DE DISIGUALDADES

De acuerdo a su estructuración matemática, estas pueden ser:

A) DESIGUALDADES ABSOLUTAS

Son aquellas que se verifican en el campo de los números reales y a su vez pueden ser numéricas o literales.

EJEMPLOS:

I) NUMÉRICAS:	II) LITERALES:
* $7 > 0$	* $x^2 > -2$
* $9 > 2$	* $-5 < (x-2)^4$
* $-\dfrac{2}{3} \leq 0$	* $x^6 + y^6 \geq 0$

B) DESIGUALDADES RELATIVAS :

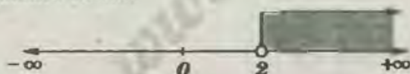
Estas desigualdades se conocen también con el nombre de inecuaciones y se caracterizan por que se verifican para un conjunto de valores denominados conjunto solución y su representación se visualiza en la recta real.

EJEMPLOS:

I) La inecuación: $4x - 3 > 5$

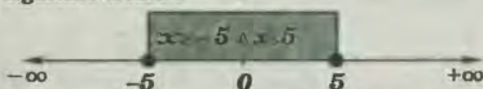
Se verifica para todo valor de x mayor que dos $(x>2)$

* Su representación gráfica en la recta real sería de la siguiente forma:



II) La inecuación : $x^2 - 25 \leq 0$ se verifica para todo x, tal que : $x \geq -5 \wedge x \leq 5$

* Su representación gráfica en la recta real sería de la siguiente forma :



* Más adelante analizaremos la solución explícita de los diferentes tipos de inecuaciones que se presentan.

* El conjunto solución de una inecuación se expresa mediante intervalos.

PROPIEDADES GENERALES DE LAS DESIGUALDADES

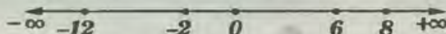
O_1 : ORDEN TRANSITIVO:

$\forall a,b,c \in R$

Si: $\boxed{a < b \wedge b < c \Leftrightarrow a < c}$

EJEMPLOS :

En la recta real :



$-12 < -2 \wedge -2 < 8 \Rightarrow -12 < 8$

O_2: ORDEN DE LA MONOTONÍA:

$$\forall a,b,c \in R$$

I) LEY ADITIVA :

Si: $\boxed{a < b \Rightarrow a + c < b + c}$

II) LEY MULTIPLICATIVA :

$\boxed{\text{Si} : c \in R^+ \wedge a < b \Rightarrow ac < bc}$

$\boxed{\text{Si} : c \in R^- \wedge a < b \Rightarrow ac > bc}$

TEOREMAS:

I) Si a los dos miembros de una desigualdad, se suma o resta una misma cantidad, el signo de la desigualdad no se altera.

Si: $\boxed{a > b \Rightarrow a \pm c > b \pm c}$

II) Si a los dos miembros de una desigualdad se multiplica o divide por una cantidad positiva el signo de la desigualdad no se altera.

Si:
$$a > b \wedge c > 0 \Rightarrow \begin{cases} I)\ ac > bc \\ \wedge \\ II)\ \dfrac{a}{c} > \dfrac{b}{c} \end{cases}$$

III) Si a los dos miembros de una desigualdad se multiplica o divide por una cantidad negativa, el signo de la desigualdad se invierte.

Si:
$$a > b \wedge c < 0 \Rightarrow \begin{cases} I)\ ac < bc \\ \wedge \\ II)\ \dfrac{a}{c} < \dfrac{b}{c} \end{cases}$$

IV) Dos desigualdades de signo contrario se pueden restar miembro a miembro y el signo de la desigualdad resultante es el mismo que hace las veces de minuendo, es decir:

* Dado el sistema:

$$\begin{cases} a>b & ....(I) \\ c<d & ....(II) \end{cases}$$

* Se cumple que :

$$\boxed{a-c>b-d \vee c-a<d-b}$$

V) Dos o más desigualdades del mismo sentido se pueden multiplicar o dividir miembro a miembro y el sentido de la desigualdad no se altera, siempre y cuando los miembros de las desigualdades sean cantidades. positivas.

$$\forall a,b,c,d \in R^+$$

Si: $\begin{cases} a>b ....(I) \\ \wedge \\ c>d.......(II) \end{cases}$

* Se cumple: $\boxed{ac>bd \vee \frac{a}{c}>\frac{b}{c}}$

VI) Dos desigualdades de signo contrario y miembros positivos se pueden dividir miembro a miembro; el signo de la desigualdad resultante es el mismo que el signo de la desigualdad que hace las veces de dividendo.

* Es decir : $\forall a,b,c,d \in R^+$

Si: $\begin{cases} a>b.........(I) \\ \wedge \\ c<d.......(II) \end{cases}$

* Se cumple:

$$\boxed{\frac{a}{c}>\frac{b}{d} \vee \frac{c}{a}<\frac{d}{b}}$$

VII) Si a los dos miembros de una desigualdad se eleva a una potencia impar o se extrae raíces de índice impar, el sentido de la desigualdad no se altera. Es decir:

* Si:

$$a>b \Rightarrow \begin{cases} I) \quad a^{2n+1}>b^{2n+1} \\ \qquad \vee \qquad ;n \in Z^+ \\ II) \quad \sqrt[2n+1]{a}>\sqrt[2n+1]{b} \end{cases}$$

VIII) Si a los dos miembros de una desigualdad de términos negativos se eleva a un exponente par, el signo de la desigualdad se invierte, es decir:

$$\forall a,b \in R^-$$

$$\begin{cases} I) Si\ a>b \Rightarrow a^{2n}<b^{2n} \\ II) Si\ a<b \Rightarrow a^{2n}>b^{2n} \end{cases}$$

IX) Si: $a \in R$, tal que:

$$\boxed{a \neq 0 \Rightarrow a^2>0}$$

X) $a,b \in R$ y son del mismo signo, entonces:

$$\begin{cases} a<b \Leftrightarrow \frac{1}{a}>\frac{1}{b} \\ a>b \Leftrightarrow \frac{1}{a}<\frac{1}{b} \end{cases}$$

TEOREMAS BÁSICOS DE LA DESIGUALDAD

Dados $a,b,c,d \in R$

1) Si $a>0$ y $b>0$, entonces $a+b>0$

2) Si $a>0$ y $b>0$, entonces $ab>0$

3) Si $a<b$ y $b<c$, entonces $a<c$ (propiedad transitiva)

4) Si $a<b$, entonces $a+c<b+c$

5) Si $a<b$ y $c<d$, entonces $a+c<b+d$

6) Si $a<b$ y $c>0$, entonces $ac<bc$

7) Si $a<b$ y $c<0$, entonces $ac>bc$

8) $\forall a \in R : a^2 \geq 0$

9) $\forall a,b,c,d \in R^+ / a<b \wedge c<d \Rightarrow ac<bd$

10) $ab>0 \Leftrightarrow (a>0 \wedge b>0) \vee (a<0 \wedge b<0)$

11) $ab<0 \Leftrightarrow (a>0 \wedge b<0) \vee (a<0 \wedge b>0)$

12) $a>0 \Leftrightarrow \frac{1}{a}>0$

13) $a<0 \Leftrightarrow \frac{1}{a}<0$

14) Si a y b tiene el mismo signo entonces:

$$a<x<b \Leftrightarrow \frac{1}{a}>\frac{1}{x}>\frac{1}{b}$$

15) $a<x<b$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2<x^2<b^2 & ;\text{si } 0<a<b \\ 0 \leq x^2<max(a^2;b^2) & ;\text{si } a<0 \wedge 0<b \\ b^2<x^2<a^2 & ;\text{si } a<b<0 \end{cases}$$

16) $a+\frac{1}{a} \geq 2$; $\forall a \in R^+$

17) $b+\dfrac{1}{b}\leq 2\ ;\forall b\in R^-$

18) $a^2+b^2\geq 2ab;\ \forall a,b\in R$

19) $a^2+b^2+c^2\geq ab+ac+bc\ ;\forall a,b,c\in R$

20) Si : $x_1;x_2;...;x_n\in R^+$

además:

$$x_1x_2...x_n=1\Rightarrow x_1+x_2+...+x_n\geq n$$

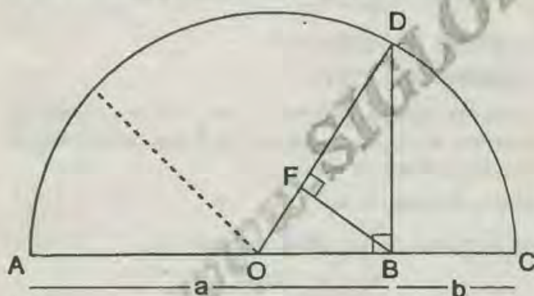
OBSERVACIONES

$\dfrac{a+b}{2}$: se denomina ***MEDIA ARITMÉTICA.***

$\sqrt{ab}$: se denomina ***MEDIA GEOMÉTRICA.***

LAS MEDIAS

En Mesopotamia ya conocían las tres medias, aritmética , geométrica y armónica y es donde el famoso matemático griego Pitágoras aprendió. Después Pappus en su libro de geometría incluye la teoría de las medias y da una construcción geométrica muy elegante incluyendo las tres medias, dicha construcción se presenta en la siguiente figura:



donde:

OD: Es la media aritmética de los segmentos **AB** y **BC**

DB: Es la media geométrica de los segmentos ***AB*** y **BC**

DF: Es la media armónica de los segmentos ***AB*** y **BC**

$$\underbrace{\frac{a+b}{2}}_{\text{Media Aritmética}}\geq\underbrace{\sqrt{ab}}_{\text{Media Geométrica}}\geq\underbrace{\frac{2ab}{a+b}}_{\text{Media Armónica}}$$

EN GENERAL :

Dados: $a_1,a_2,a_3,a_4,...,a_n\in R^+$, definimos:

Media Aritmética: $M.A.=\dfrac{a_1+a_2+a_3+...+a_n}{n}$

Media Geométrica: $M.G.=\sqrt[n]{a_1\times a_2\times a_3\times...\times a_n}$

Media Armónica:

$$M.H.=\frac{n}{\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\dfrac{1}{a_3}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}}$$

TEOREMAS:

* En general para cantidades cualesquiera:

$$M.A.\geq M.G.\geq M.H.$$

* Cantidades diferentes: **M.A.> M.G. > M.H.**

* Cantidades iguales: **M.A.= M.G.= M.H.**

• Si: $0<a<b$ entonces: $a<\dfrac{a+b}{2}<b$

• Si: $0<a<b$ entonces: $a<\sqrt{ab}<b$

$$\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}\geq\frac{1}{\dfrac{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}}{2}};\forall a,b\in R^+$$

$$\frac{a+b+c}{3}\geq\sqrt[3]{abc}\geq\frac{1}{\dfrac{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}}{3}};\ \forall a,b,c\in R^+$$

$$\frac{a+b+c+d}{4}\geq\sqrt[4]{abcd};\ \forall a,b,c,d\in R^+$$

EN GENERAL :

21) $\dfrac{a_1+a_2+...+a_n}{n}\geq\sqrt[n]{a_1\times a_2\times...\times a_n}\geq\dfrac{n}{\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+...+\dfrac{1}{a_n}}$

$;\forall a_i\in R^+,\ i=1;2;3;...;n$

22) $\dfrac{a^m+b^m}{2}>\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^m;\ 0<a<b;$

«m» no es fracción propia positiva.

23) $\left(1+\dfrac{x}{a}\right)^a>\left(1+\dfrac{x}{b}\right)^b;\ a;b\in Z^+\wedge a>b\wedge x>0$

24) Si : $a_n=\left(\dfrac{x_1^n+x_2^n+...+x_p^n}{p}\right)^{\frac{1}{n}}$

donde:

$x_1;x_2;...;x_p \in R^+ \wedge n \in N$

$\Rightarrow a_\alpha \le a_\beta;\ \forall \alpha \le \beta$

25) Sea $x_1;x_2;...;x_n \in R^+ \wedge n \in N$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{x_1^n + x_2^n + ... + x_p^n}{p} \ge \left(\frac{x_1 + x_2 + ... + x_p}{p}\right)^n}$$

26) Si $a_1;a_2;...a_n;b_1;b_2;...;b_n \in R^+$

además:

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1 \Big/ p,q \in R^+$$

$$\Rightarrow a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n \le$$

$$\left(a_1^p + a_2^p + ... + a_n^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(b_1^q + b_2^q + ... + b_n^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

27) $\boxed{\left(a^m b^n c^p\right)^{\frac{1}{m+n+p}} \le \frac{ma+nb+pc}{m+n+p}}$

OBSERVACIONES

* $a < b \rightarrow a^{2n-1} < b^{2n-1},\ \forall n \in N$
* $0 < a < b \rightarrow a^{2n} < b^{2n},\ \forall n \in N$
* Si: $0 < a < b < c \Rightarrow \begin{cases} -c < -b < -a < 0 \\ 0 < \frac{1}{c} < \frac{1}{b} < \frac{1}{a} \end{cases}$
* Si: $a < b < c < 0 \Rightarrow \begin{cases} 0 < -c < -b < -a \\ \frac{1}{c} < \frac{1}{b} < \frac{1}{a} < 0 \end{cases}$
* Si: $a < b < 0 \wedge n \in Z^+ \Rightarrow \begin{cases} 0 < b^{2n} < a^{2n} \\ a^{2n+1} < b^{2n+1} < 0 \\ \sqrt[2n+1]{a} < \sqrt[2n+1]{b} < 0 \end{cases}$
* Si: $1 < x \Rightarrow \begin{cases} 1 < x < x^2 < x^3 < x^4 < ... \\ 1 < ... < \sqrt[4]{x} < \sqrt[3]{x} < \sqrt{x} < x \end{cases}$
* Si $0 < x < 1 \Rightarrow \begin{cases} 0 < ... < x^4 < x^3 < x^2 < x < 1 \\ 0 < x < \sqrt{x} < \sqrt[3]{x} < \sqrt[4]{x} < ... < 1 \end{cases}$
* Sea el polinomio cuadrático:

$$P(x) \equiv ax^2 + bx + c$$

Se cumple que:

Si: $P(x) > 0;\ \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \boxed{a > 0 \wedge \Delta = b^2 - 4ac < 0}$$

«Teorema del trinomio positivo»

MEDIAS POTENCIALES :

Se llama media potencial de orden $k\ (k \in \mathbb{R})$ de los números positivos $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ a la cantidad :

$$m_k = \sqrt[k]{\frac{x_1^k + x_2^k + x_3^k + ... + x_n^k}{n}} = \left(\frac{x_1^k + x_2^k + x_3^k + ... + x_n^k}{n}\right)^{\frac{1}{k}}$$

* ahora si hacemos :

I) para $m=1$, se obtendrá :

$$m_1 = \overline{MA} = \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n}{n}\right)$$

LA MEDIA ARITMÉTICA :

II) para $m=2$, se obtendrá :

$$m_2 = \overline{MC} = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + ... + x_n^2}{n}}$$

LA MEDIA CUADRÁTICA :

III) para $m=-1$, se obtendrá :

$$m_{-1} = \overline{MH} = \left(\frac{x_1^{-1} + x_2^{-1} + x_3^{-1} + ... + x_n^{-1}}{n}\right)^{-1}$$

LA MEDIA ARMÓNICA :

II) para $m=0$, se obtendrá :

$$m_0 = \lim_{x \to 0} m_k = \overline{MG} = \sqrt{x_1x_2x_3...x_n}$$

La ***MEDIA GEOMÉTRICA***

OBSERVACIÓN:

Como la media potencial m_k de los números positivos $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ es una función decreciente (ver funciones), es decir :

si : $a < b \rightarrow m_a < m_b$

verificándose la igualdad $m_a = m_b$, si :

$$x_1 = x_2 = x_3 = ... = x_n$$

EN PARTICULAR:

$$m_{-1} \le m_0 \le m_1 \le m_2$$

$$\Rightarrow \boxed{\overline{MH} \le \overline{MG} \le \overline{MA} \le \overline{MC}}$$

DESIGUALDAD DE CAUCHY-SCHWARZ

TEOREMA

(Desigualdad de Cauchy – Schwarz) Sean $a_1, ...\ a_n$, $b_1, ...\ , b_n$, números reales, entonces :

$$\boxed{(a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n)^2 \le (a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2)}$$

La igualdad ocurre si y sólo si las n-uplas $(a_1; a_2; \dots; a_n)$ y $(b_1; b_2; \dots; b_n)$ son colineales.

DEMOSTRACIÓN :

Haciendo:

$$A=\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right);\ B=\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2$$

Entonces tenemos que :

$$A-B=\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)-\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2$$

$$=\sum_{i=1}^{n} a_i^2 b_i^2+\sum_{i\neq j} a_i^2 b_j^2-\sum_{i=1}^{n} a_i^2 b_i^2-2\sum_{1\le i<j\le n} a_i b_j a_j b_i$$

$$=\sum_{i\neq j} a_i^2 b_j^2-2\sum_{1\le i<j\le n} a_i b_j a_j b_i$$

$$=\sum_{i\neq j}(a_i^2 b_j^2+a_j^2 b_i^2)-2\sum_{1\le i<j\le n} a_i b_j a_j b_i$$

$$=\sum_{1\le i<j\le n}(a_i^2 b_j^2-2a_i b_j a_j b_i+a_j^2 b_i^2)$$

$$=\sum_{1\le i<j\le n}(a_i b_j-a_j b_i)^2\ge 0 \Rightarrow A-B\ge 0 \Rightarrow A\ge B$$

OTRO METODO :

Definamos el polinomio cuadrático

$f(x)=(a_1x-b_1)^2+(a_2x-b_2)^2+\dots+(a_nx-b_n)^2;\ x\in R$

Vemos que $f(x)\ge 0$, para todo $x\in R$.

Efectuando :

$f(x)=(a_1^2x^2-2a_1b_1x+b_1^2)+(a_2^2x^2-2a_2b_2x+b_2^2)+\dots+a_n^2x^2-a_nb_nx+b_n^2\ge 0$

$f(x)=(a_1^2+a_2^2+\dots+a_n^2)x^2-2(a_1b_1+a_2b_2+\dots+a_nb_n)x+(b_1^2+b_2^2+\dots+b_n^2)\ge 0$

$\Rightarrow f(x)=Mx^2-2Nx+P\ge 0$

donde :

$a_1^2+a_2^2+\dots+a_n^2=M \wedge (a_1b_1+a_2b_2+\dots+a_nb_n)=N \wedge a_1^2+b_2^2+\dots+b_n^2=P$

Luego $Mx^2-2Nx+P\ge 0$, para todo $x\in R$, y esto ocurre si $\Delta\le 0$. (Δ: Discriminante.)

En efecto $\Delta=(-2N)^2-4MP\le 0$

$\Rightarrow 4N^2-4MP\le 0$

$\Rightarrow N^2\le MP$

Reemplazando, tenemos que :

$(a_1b_1+a_2b_2+\dots+a_nb_n)^2\le(a_1^2+a_2^2+\dots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\dots+b_n^2)$.

La igualdad ocurre cuando $f(x)$ presenta raíces reales iguales.

$\Rightarrow (a_1x-b_1)=0 \wedge (a_2x-b_2)=0 \wedge \dots \wedge (a_nx-b_n)=0$

$\Leftrightarrow a_1x=b_1 \wedge a_2x=b_2 \wedge \dots \wedge a_nx=b_n$

de donde $(a_1, a_2, \dots a_n)$ y $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ son colineales o proporcionales.

EL LEMA DE TITU

Sean $a_1, a_2, \dots, a_n$ números reales arbitrarios y $x_1, x_2, \dots, x_n$ números reales positivos, se tiene la desigualdad

$$\frac{a_1^2}{x_1}+\frac{a_2^2}{x_2}+\dots+\frac{a_n^2}{x_n}\ge\frac{(a_1+a_2+\dots+a_n)^2}{x_1+x_2+\dots+x_n}$$

DEMOSTRACIÓN :

* Aplicando Cauchy-Schwarz :

$$\left(\frac{a_1^2}{x_1}+\frac{a_2^2}{x_2}+\dots+\frac{a_n^2}{x_n}\right)(x_1+x_2+\dots+x_n)\ge\left(\sqrt{\frac{a_1^2}{x_1}}\times\sqrt{x_1}+\dots+\sqrt{\frac{a_n^2}{x_n}}\times\sqrt{x_n}\right)^2$$

$$\Rightarrow\left(\frac{a_1^2}{x_1}+\frac{a_2^2}{x_2}+\dots+\frac{a_n^2}{x_n}\right)(x_1+x_2+\dots+x_n)\ge(a_1+a_2+\dots+a_n)^2$$

De donde tenemos que :

$$\frac{a_1^2}{x_1}+\frac{a_2^2}{x_2}+\dots+\frac{a_n^2}{x_n}\ge\frac{(a_1+a_2+\dots+a_n)^2}{x_1+x_2+\dots+x_n}$$

Como vemos, es una aplicación de la desigualdad de Cauchy-Schwarz y por ello algunos afirman que simplemente es la desigualdad de Cauchy-Schwarz

OTRO METODO :

(Por inducción). Veamos que la inducción se reduce al caso $n=2$.

$$\frac{a_1^2}{x_1}+\frac{a_2^2}{x_2}\ge\frac{(a_1+a_2)^2}{x_1+x_2}$$

$\Rightarrow (a_1^2x_1+a_2^2x_1)(x_1+x_2)\ge x_1x_2(a_1^2+a_2^2+2a_1a_2)$

$\Rightarrow a_1^2x_2x_1+a_1^2x_2^2+a_2^2x_1^2+a_2^2x_1x_2\ge a_1^2x_1x_2+a_2^2x_1x_2+2a_1a_2x_1x_2$

$\Rightarrow a_1^2x_2^2+a_2^2x_1^2-2a_1a_2x_1x_2\ge 0$

$\Rightarrow (a_1x_2+a_2x_1)^2\ge 0$

y a igualdad a se tiene si y sólo si $\dfrac{a_1}{x_1}=\dfrac{a_2}{x_2}$

Aplicando el resultado dos veces se tiene que :

$$\frac{a_1^2}{x_1}+\frac{a_2^2}{x_2}+\frac{a_3^2}{x_3}\ge\frac{(a_1+a_2)^2}{x_1+x_2}+\frac{a_3^2}{x_3}\ge\frac{(a_1+a_2+a_3)^2}{x_1+x_2+x_3}$$

Supongamos que se cumple para n :

$$\frac{a_1^2}{x_1}+\frac{a_2^2}{x_2}+\dots+\frac{a_n^2}{x_n}\ge\frac{(a_1+a_2+\dots a_n)^2}{x_1+x_2+\dots x_n}$$

Veamos para $n+1$:

$$\left(\frac{a_1^2}{x_1}+\frac{a_2^2}{x_2}+\dots+\frac{a_n^2}{x_n}\right)+\frac{a_{n+1}^2}{x_{n+1}}\ge\frac{(a_1+a_2+\dots a_n)^2}{x_1+x_2+\dots x_n}+\frac{a_{n+1}^2}{x_{n+1}}$$

$$\ge\frac{(a_1+a_2+\dots a_{n+1})^2}{x_1+x_2+\dots x_{n+1}}$$

DESIGUALDAD DE SCHÜR

Si a, b, c son números reales positivos y n un entero positivo, entonces :

$$a^n(a-b)(a-c)+b^n(b-c)(b-a)+c^n(c-a)(c-b)\geq 0$$

El matemático *FRIEDRICH SCHUR (1856 - 1932)* estableció en *1909* lo que se denominó la DESIGUALDAD de SCHUR :

DEMOSTRACION :

Como el primer miembro es simétrico, entonces podemos asumir un orden.

Sea $a\geq b\geq c$, entonces:

$$a-z\geq b-z; a-b\geq 0$$

$$\Rightarrow (a-b)(a-z)\geq (a-b)(b-z); a^n\geq b^n$$

$$\Rightarrow a^n(a-b)(a-z)\geq b^n(a-b)(b-z) .... (i)$$

También :

$(c-a)(c-b)\geq 0$, pues $a\geq c;\ b\geq c$

$\Leftrightarrow c^n(c-a)(c-b)\geq 0 ....(ii)$

* Sumando *(i)* y *(ii)* :

$$a^n(a-b)(a-c)+c^n(c-a)(z-b)\geq b^n(a-b)(b-c)$$

$$\Rightarrow a^n(a-b)(a-c)-b^n(a-b)(b-c)+c^n(c-a)(c-b)\geq 0$$

$$\Rightarrow a^n(a-b)(a-c)+b^n(b-a)(b-c)+c^n(c-a)(c-b)\geq 0$$

La igualdad ocurre si y sólo si $a = b = c$

DOS SUSTITUCIONES MUY ÚTILES

Si en las inecuaciones tenemos la condición $xyz=1$, es conocida la sustitución

$$x=\frac{a}{b};\ y=\frac{b}{c};\ z=\frac{c}{a}$$

que hace que el problema se convierta en otro más fácil; aunque esto no es siempre para todo problema.

Veamos otras sustituciones que son muy útiles en la resolución de problemas de desigualdades en demostraciones :

Si tenemos las condiciones $x, y, z > 0$ y $xyz = x + y + z + 2$, nos preguntamos, ¿cuál sería la sustitución?

De la condición $xyz = x + y + z + 2$

tenemos :

$$abc+ab+ac+bc+a+b+c+1=ab+ac+bc+2(a+b+c)+3$$

$$(a+1)(b+1)(c+1)=(ab+a+b+1)+(ac+a+c+1)+(bc+b+c+1)$$

$$(a+1)(b+1)(c+1)=(a+1)(b+1)+(a+1)(c+1)+(b+1)(c+1)$$

$$\Rightarrow 1=\frac{1}{c+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{a+1}$$

Haciendo $x=\frac{1}{a+1}$, $y=\frac{1}{b+1}$, $z=\frac{1}{c+1}$, se tiene

$x+y+z=1$ y $a=\frac{1-x}{x}=\frac{y+z}{x}$; $b=\frac{z+x}{y}$; $c=\frac{x+y}{z}$

Ahora veamos otra condición :

Para $a, b, c > 0$ y $ab + bc + ca + 2abc = 1$ la sustitución es :

$$a=\frac{x}{y+z},\ b=\frac{y}{z+x},\ c=\frac{z}{x+y}$$

pues $ab + bc + ca + 2abc = 1$ equivale a

$\frac{1}{abc}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+2$ es decir, en la primera sustitución sólo ha sido cambiada por la inversa de a, b, c.

EJERCICIO 1 :

Sean x, y números reales tales que $x^2 + y^2 = 1$; halle la variación de $3x + y$.

RESOLUCIÓN :

Como nos piden la variación de $3x+y$ que es equivalente a escribir $3\times x+1\times y$; entonces escogemos los pares $(3;1)$ y $(x;y)$ para aplicar la desigualdad de Cauchy-Schwarz.

En efecto, tenemos:

$$(3\times x+1\times y)^2\leq (3^2+1^2)(x^2+y^2)$$

$$\Leftrightarrow (3x+y)^2\leq (10)(1) \Leftrightarrow (3x+y)^2\leq 10$$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{10}\leq 3x+y\leq \sqrt{10}$$

$$\Rightarrow 3x+y\in [-\sqrt{10};\sqrt{10}]$$

EJERCICIO 2 :

Sean $m\geq 1; n\geq 1$. Demostrar que :

$$\left(\frac{\sqrt{m-1}}{m}+\frac{\sqrt{n-1}}{n}\right)^2\leq (m+n-2)\left(\frac{1}{m^2}+\frac{1}{n^2}\right)$$

RESOLUCIÓN :

Consideremos los pares $\left(\sqrt{m-1};\sqrt{n-1}\right),\left(\frac{1}{m};\frac{1}{n}\right)$ y aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz tenemos:

$$\left(\sqrt{m-1}\times\frac{1}{m}+\sqrt{n-1}\times\frac{1}{n}\right)^2\leq\left(\sqrt{m-1}^2+\sqrt{n-1}^2\right)\left(\left(\frac{1}{m}\right)^2+\left(\frac{1}{n}\right)^2\right)$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{\sqrt{m-1}}{m}+\frac{\sqrt{n-1}}{n}\right)^2\leq (m-1+n-1)\left(\frac{1}{m^2}+\frac{1}{n^2}\right)$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{\sqrt{m-1}}{m}+\frac{\sqrt{n-1}}{n}\right)^2\leq (m+n-2)\left(\frac{1}{m^2}+\frac{1}{n^2}\right)$$

La igualdad ocurre si y sólo si $m = n$.

EJERCICIO 3 :

Demostrar que :

$(x^2+xy+y^2)^2 \le (x^2+2y^2)(2x^2+y^2)$, para todo x, y números reales .

RESOLUCIÓN :

* Tomamos las ternas $(x;x;y)$, $(x;y;y)$ para aplicar la desigualdad de Cauchy-Schwarz.

* En efecto :

$$(x\times x+x\times y+y\times y)^2 \le (x^2+x^2+y^2)(x^2+y^2+y^2)$$

* Luego tenemos :

$$(x^2+xy+y^2)^2 \le (2x^2+y^2)(x^2+2y^2)$$

* La igualdad ocurre si y sólo si $x = y$.

TEOREMA :

Si el producto de unos números positivos $x_1; x_2; x_3; ....; x_n$ es igual a 1 , la suma de los mismos no es menor que n:

si : $x_1 . x_2 . x_3 ......x_n = 1 \Rightarrow x_1+x_2+x_3+ ......+x_n \ge n$

EJERCICIO 3 :

Demostrar la desigualdad : $\dfrac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}} \ge 2$

RESOLUCIÓN :

Tenemos:

$$\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = \sqrt{x^2+1} + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

Puesto que el producto de los sumandos del último miembro es igual a la unidad, la suma de los mismos no es menor que dos. El signo de la igualdad tiene lugar sólo para $x=0$.

DESIGUALDAD DE LA MEDIA

ARITMETICA-MEDIA GEOMETRICA

Definiremos la Media Aritmética, Media Geométrica y Media Armónica de los números $x_1, x_2, ... , x_n$ reales positivos, de la siguiente manera:

$$\overline{MA} = \frac{x_1+x_2+ ... +x_n}{n}$$

$$\overline{MG} = \sqrt[n]{x_1 x_2 ... x_n}$$

$$\overline{MH} = \frac{n}{\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}+...+\dfrac{1}{x_n}}$$

TEOREMA :

Sean . $x_1, x_2, ... , x_n$ números reales positivos entonces su Media Aritmética es mayor o igual que su Media Geométrica $(\overline{MA} \ge \overline{MG})$.

La igualdad ocurre si y sólo si $x_1 = x_2 = ... = x_n$.

DEMOSTRACION :

Sea $P_n = \{\overline{MA} \ge \overline{MG}$ para n números$\}$; probemos por inducción matemática de la siguiente manera :

I) Probaremos que se cumple para dos números, es decir P_2 es verdadero.

II) Tomando la hipótesis que P_n es verdadero, probaremos que P_{n-1} es verdadero.

III) Así mismo probaremos que si P_n es verdadero entonces P_{2n} es verdadero.

Cuando *(I)*, *(II)* y *(II)* se verifican, entonces P_n con $n \ge 2$ es verdadero. Veamos :

I) Como $x_1, x_2 \in R^+$, entonces $\sqrt{x_1}, \sqrt{x_2} \in R^+$,

luego $\left(\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}\right)^2 \ge 0$

Efectuando : $x_1 - 2\sqrt{x_1x_2} + x_2 \ge 0$

$$\Leftrightarrow x_1 + x_2 \ge 2\sqrt{x_1x_2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x_1+x_2}{2} \ge \sqrt{x_1x_2}$$

La igualdad ocurre si y sólo si $x_1=x_2$.

Vemos que P_2 es verdadero.

II) Sea $g = \sqrt[n-1]{x_1x_2...x_{n-1}}$, entonces

$g^{n-1} = x_1\, x_2....x_{n-1}$. Como P_n es verdadero, entonces :

$$\frac{x_1+x_2+...+x_{n-1}+g}{n} \ge \sqrt[n]{x_1x_2...x_{n-1}.g}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x_1+x_2+...+x_{n-1}+g}{n} \ge \sqrt[n]{g^{n-1}.g}$$

$$\Leftrightarrow x_1+x_2+...+x_{n-1}+g \ge n.\sqrt[n]{g^n} = ng$$

$$\Leftrightarrow x_1+x_2+...+x_{n-1} \ge g(n-1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{x_1+x_2+...+x_{n-1}}{n-1} \ge g$$

De donde :

$$\frac{x_1+x_2+...+x_{n-1}}{n-1} \geq \sqrt[n-1]{x_1x_2...x_{n-1}}.$$

Vemos que P_{n-1} es verdadero.

III) Sean $x_1+x_2+...+x_{2n}$ números reales positivos, entonces :

$$x_1+x_2+...+x_{2n}=(x_1+x_2)+(x_3+x_4)+...+(x_{2n-1}+x_{2n})$$

$$\geq 2\left(\sqrt{x_1x_2}+\sqrt{x_3x_4}+...+\sqrt{x_{2n-1}x_{2n}}\right)....(\alpha)$$

Como P_n es verdadero, entonces :

$$\frac{\sqrt{x_1x_2}+\sqrt{x_3x_4}+...+\sqrt{x_{2n-1}x_{2n}}}{n} \geq \sqrt[n]{\sqrt{x_1x_2}+\sqrt{x_3x_4}...\sqrt{x_{2n-1}x_{2n}}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x_1x_2}+\sqrt{x_3x_4}+...+\sqrt{x_{2n-1}x_{2n}} \geq n\sqrt[n]{\sqrt{x_1x_2x_3x_4...x_{2n-1}x_{2n}}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x_1x_2}+\sqrt{x_3x_4}+...+\sqrt{x_{2n-1}x_{2n}} \geq 2n\sqrt[2n]{\sqrt{x_1x_2x_3x_4...x_{2n-1}x_{2n}}}...(\beta)$$

De α y β tenemos que :

$$x_1+x_2+...+x_{2n} \geq 2n\sqrt[2n]{x_1x_2...x_{2n}}$$

$$\frac{x_1+x_2+...+x_{2n}}{2n} \geq \sqrt[2n]{x_1x_2...x_{2n}},$$

de donde P_{2n} es verdadero.

COROLARIO :

(Desigualdad de la Media Geométrica - Media Armónica)

Sean $x_1+x_2,...,x_n$ números reales positivos, entonces su Media Geométrica es mayor o igual que su Media Armónica ($\overline{MG} \geq \overline{MH}$).

La igualdad ocurre si y sólo si $x_1=x_2=...=x_n$.

DEMOSTRACION :

* Aplicando el teorema a los números

$\frac{1}{x_1},\frac{1}{x_2},...,\frac{1}{x_n}$ reales positivos, tenemos:

$$\frac{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+...+\frac{1}{x_n}}{n} \geq \sqrt[n]{\frac{1}{x_1}.\frac{1}{x_2}...\frac{1}{x_n}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+...+\frac{1}{x_n} \geq \frac{n}{\sqrt[n]{x_1x_2...x_n}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[n]{x_1x_2...x_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+...+\frac{1}{x_n}}$$

ocurre si y sólo si $x_1=x_2=...=x_n$

COLORARIO :

(Desigualdad de la Media Aritmética - Media Armónica)

Sean $x_1,x_2,...,x_n$ números reales positivos, entonces :

$$\frac{x_1+x_2+...+x_n}{n} \geq \frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+...+\frac{1}{x_n}}$$

DEMOSTRACION :

La demostración es inmediata, pues por transitividad, se tendría, ya que :

$$\overline{MA} \geq \overline{MG} \wedge \overline{MG} \geq \overline{MH} \Rightarrow \overline{MA} \geq \overline{MH}.$$

Es importante observar que de $\overline{MA} \geq \overline{MH}$

$$\frac{x_1+x_2+...+x_n}{n} \geq \frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+...+\frac{1}{x_n}}$$

se tiene :

$$(x_1+x_2+...+x_n)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+...+\frac{1}{x_n}\right) \geq n^2$$

EJERCICIO 1 :

Sean x , y , z números reales positivos. Demostrar que :

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x} \geq 3$$

RESOLUCIÓN :

Como $x, y, z \in R^+$, entonces podemos utilizar $\overline{MA} \to \overline{MG}$. En efecto :

$$\frac{\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}}{3} \geq \sqrt[3]{\frac{x}{y}\times\frac{y}{c}\times\frac{c}{x}}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x} \geq 3\times\sqrt[3]{1}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x} \geq 3$$

La igualdad ocurre si y sólo si $x = y = z$

DESIGUALDAD DE BERNOULLI Y LA MEDIA POTENCIAL

La desigualdad de Bernoulli es muy importante, puesto que es muy utilizada en el análisis matemático y en otras ramas de la matemática.

La notable familia suiza Bernoulli realizó grandes aportaciones a las matemáticas y a las ciencias. En tres generaciones produjo no menos de nueve miembros de la familia que lograron preeminencia en matemáticas o en física (cuatro de ellos

recibieron distinciones de la Academia de Ciencias de París), los que a su vez produjeron un enjambre de descendientes que dejaron huella en muchos campos del conocimiento.

Jacques Bernoulli nació el 27 de diciembre de 1654 y murió el 16 de agosto de 1705; fue el quinto hijo de una gran familia. También se le encuentra como Jacob, por la traducción de su nombre al alemán, y como James, por su traducción al inglés. Estudió teología; pero la abandonó en favor de las ciencias. De manera autodidacta aprendió el nuevo cálculo de Newton y Leibniz y fue profesor de matemáticas en Basilea desde 1687 hasta su muerte. Escribió sobre series infinitas, estudió muchas curvas especiales, inventó las coordenadas polares y presentó los números de Bernoulli que aparecen en la expansión en serie de potencias de la función $tan(x)$ y que son útiles para escribir el desarrollo en series infinitas de las funciones trigonométricas e hiperbólicas.

En su primer artículo sobre series infinitas, en 1689, presentó la "desigualdad de Bernoulli"

TEOREMA :

Si $x \geq -1$ y n entero positivo, entonces :

$$(1+x)^n \geq 1+nx.$$

DEMOSTRACIÓN :

La demostración la haremos por inducción.

- Si $n=1$: $1+x \geq 1+x$, es verdadera .
- Supongamos que se cumpla para $n=k$, es decir:

$(1+x)^k \geq 1+kx$ (hipótesis inductiva).

Veremos que se cumple para $n=k+1$.

Multiplicando por $(1+x)$ en la desigualdad anterior

$$(1+x)^k(1+x) \geq (1+kx)(1+x)$$

$$\Leftrightarrow (1+x)^{k+1} \geq 1+(k+1)x+kx^2 \geq 1+(k+1)x$$

Desigualdad de Bernoulli y la Media Potencial

de donde: $(1+x)^{k+1} \geq 1+(k+1)x$

$$\Rightarrow \boxed{(1+x)^n \geq 1+nx}$$

TEOREMA :

Si $x \geq -1$ y $0<\alpha<1$, entonces :

$$\boxed{(1+x)^\alpha \leq 1+\alpha x}$$

DEMOSTRACIÓN :

Si $x=-1$, la desigualdad se verifica trivialmente. Veamos para $x>-1$. Sea α racional, $\alpha=\frac{m}{n}$, $m, n \in Z^+$ con $1 \leq m<n$

Como $1+x>0$, tenemos :

$$(1+x)^\alpha=(1+x)^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{(1+x)^m}=\sqrt[n]{(1+x)^m \cdot 1^{n-m}}$$

$$=\sqrt[n]{\underbrace{(1+x).(1+x)...(1+x)}_{m}.\underbrace{1.1...1}_{n-m}}$$

$$\leq \frac{\overbrace{(1+x)+(1+x)+...+(1+x)}^{m}+\overbrace{1+1+...+1}^{n-m}}{m+(n-m)}$$

$$=\frac{m(1+x)+n-m}{n}=\frac{n+mx}{n}=1+\frac{m}{n}x=1+\alpha x$$

de donde se tiene :

$$(1+x)^\alpha \leq 1+\alpha x, \alpha \in Q, 0<\alpha<1.$$

Ahora veremos para $\alpha \in Q'$. (Q' conjunto de los números irracionales.)

Sea $(q_k)_{k\in N}=(q_1, q_2, q_3, ..., qk, ...)$ una sucesión de números racionales tal que:

$\alpha=\lim\limits_{k\to\infty} q_k$ y $0<q_k<1$.

En efecto $(1+x)^{q_k} \leq 1+q_k x$; $x \geq -1$; $k=1,2,3,....$

luego :

$$(1+x)^\alpha=\lim_{k\to\infty}(1+x)^{q_k} \leq \lim_{k\to\infty}(1+q_k x)=1+\alpha x.$$

Para completar la prueba, veamos que $0<\alpha<1$ y $x \neq 0$, se tiene $(1+x)^\alpha<1+\alpha x$;

tomemos un número racional q tal que $\alpha<q<1$ .y como $(1+x)^\alpha=\left[(1+x)^{\frac{\alpha}{q}}\right]^q$ se cumple, entonces

$$(1+x)^{\frac{\alpha}{q}} \leq 1+\frac{\alpha}{q}x; \text{pues } 0<\frac{\alpha}{q}<1$$

$$\Leftrightarrow (1+x)^\alpha \leq \left(1+\frac{\alpha}{q}x\right)^q<1+q\times\frac{\alpha}{q}x; \text{ o sea}$$

$$\Rightarrow (1+x)^\alpha<1+\alpha x$$

Luego la desigualdad ocurre si y sólo si $x=0$.

TEOREMA :

Si $x \geq -1$ y ($\alpha<0 \vee \alpha>1$)), se tiene :

$$(1+x)^\alpha \geq 1+\alpha x$$

DEMOSTRACIÓN :

Si $1+\alpha x<0$, la desigualdad es evidente, pues el primer miembro es no negativo.

Si $1+\alpha x \geq 0$, es decir $\alpha x \geq -1$, consideremos dos

casos:

- Sea $\alpha > 1$, entonces :

$$(1+\alpha x)^{\frac{1}{\alpha}} \leq 1+\frac{1}{\alpha}\times\alpha x=1+x$$

de donde :

$$1+\alpha x \leq (1+x)^{\alpha} \Leftrightarrow (1+x)^{\alpha} \geq 1+\alpha x.$$

- Sea $\alpha < 0$, tomemos un entero n positivo tal que $-\frac{\alpha}{n}<1$, luego :

$$(1+x)^{-\frac{\alpha}{n}} \leq 1+\left(-\frac{\alpha}{n}\right)x$$

$$\Leftrightarrow (1+x)^{\frac{\alpha}{n}} \geq \frac{1}{1-\frac{\alpha}{n}x} \geq 1+\frac{\alpha}{n}x$$

La igualdad sólo es posible si $x=0$.

MEDIA POTENCIAL

Dados $x_1, x_2, \ldots, x_n$ números reales positivos, el número :

$$\boxed{M_{\alpha}=\left(\frac{x_1^{\alpha}+x_2^{\alpha}+\ldots+x_n^{\alpha}}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}}}$$

es la media potencial de grado α de los números $x_1, x_2, \ldots, x_n$. En particular :

$M_1=\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}$ es la media aritmética,

$M_2=\left(\frac{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}{n}\right)^{\frac{1}{2}}$ es la media cuadrática,

$M_{-1}=\left(\frac{x_1^{-1}+x_2^{-1}+\ldots+x_n^{-1}}{n}\right)^{-1}$ es la media armónica.

TEOREMA :

Si $x_1, x_2, x, \ldots, x_n$ números reales positivos y $\alpha<0<\beta$, entonces $M_{\alpha} \leq \overline{MG} \leq M_{\beta}$

DEMOSTRACIÓN :

Como $MG \leq MA$, entonces :

$$\sqrt[n]{x_1^{\alpha}.x_2^{\alpha}\ldots x_n^{\alpha}} \leq \frac{x_1^{\alpha}+x_2^{\alpha}+\ldots+x_n^{\alpha}}{n}$$

De $\alpha< 0 < \beta$, tenemos $\frac{1}{\alpha}<0$, entonces elevando a la potencia $\frac{1}{\alpha}$:

$$\left(\sqrt[n]{x_1^{\alpha}\ldots x_n^{\alpha}}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \geq \left(\frac{x_1^{\alpha}+x_2^{\alpha}+\ldots+x_n^{\alpha}}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[n]{x_1.x_2\ldots x_n} \geq \left(\frac{x_1^{\alpha}+x_2^{\alpha}+\ldots+x_n^{\alpha}}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}}=M\alpha,$$

de donde $M_{\alpha} \leq \overline{MG}$

Así mismo :

$$\sqrt[n]{x_1^{\beta}.x_2^{\beta}\ldots x_n^{\beta}} \leq \frac{x_1^{\beta}+x_2^{\beta}+\ldots+x_n^{\beta}}{n};\beta>0,$$

elevando a la potencia $\frac{1}{\beta}$

$$\left(\sqrt[n]{x_1^{\beta}.x_2^{\beta}\ldots x_n^{\beta}}\right)^{\frac{1}{\beta}} \leq \left(\frac{x_1^{\beta}+x_2^{\beta}+\ldots+x_n^{\beta}}{n}\right)^{\frac{1}{\beta}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[n]{x_1.x_2\ldots x_n} \leq \left(\frac{x_1^{\beta}+x_2^{\beta}+\ldots+x_n^{\beta}}{n}\right)^{\frac{1}{\beta}}=M_{\beta}$$

de donde $\overline{MG} \leq M_{\beta}$.

$$M_{\alpha} \leq \overline{MG} \leq M_{\beta}$$

TEOREMA :

Si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son números reales positivos y $\alpha<\beta$, se tiene : $M_{\alpha} \leq M_{\beta}$

La igualdad ocurre si y sólo si $x_1=x_2=\ldots=x_n$.

DEMOSTRACIÓN :

El teorema demuestra cuando α y β tienen diferentes signos. Ahora veamos cuando tienen el mismo signo. Supongamos que $0<\alpha<\beta$ y haciendo $M_{\alpha}=\left(\frac{x_1^{\alpha}+x_2^{\alpha}+\ldots+x_n^{\alpha}}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}}=q,$

entonces $\frac{M_{\beta}}{M_{\alpha}}=\frac{M_{\beta}}{q}=\left(\frac{\left(\frac{x_1}{q}\right)^{\beta}+\left(\frac{x_2}{q}\right)^{\beta}+\ldots+\left(\frac{x_n}{q}\right)^{\beta}}{n}\right)^{\frac{1}{\beta}}$

Tomando :

$$d_1=\left(\frac{x_1}{q}\right)^{\alpha};d^2=\left(\frac{x_2}{q}\right)^{\alpha};\ldots;d_n=\left(\frac{x_n}{q}\right)^{\alpha},$$

obtenemos $\frac{M_{\beta}}{q}=\left(\frac{d_1^{\frac{\beta}{\alpha}}+d_2^{\frac{\beta}{\alpha}}+\ldots+d_n^{\frac{\beta}{\alpha}}}{n}\right)^{\frac{1}{\beta}}$.

Pero :

$$\left(\frac{d_1+d_2+...+d_n}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}}=\left(\frac{\left(\frac{x_1}{q}\right)^{\alpha}+\left(\frac{x_2}{q}\right)^{\alpha}+...+\left(\frac{x_n}{q}\right)^{\alpha}}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

$$=\frac{1}{q}\times\left(\frac{x_1^{\alpha}+x_2^{\alpha}+...+x_n^{\alpha}}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}}=\frac{1}{q}\times q=1,$$

resulta $\frac{d_1+d_2+...+d_n}{n}=1$, es decir

$d_1+d_2+...+d_n=n$

Haciendo $d_1=1+k_1;d_2=1+k_2;...;d_n=1+k_n$,

entonces $k_1+k_2+...+k_n=0$. Como $\frac{\beta}{\alpha}>1$, pues $\alpha>\beta$ se tiene :

$$\alpha_{1\alpha}^{\beta}=(1+k_1)^{\frac{\beta}{\alpha}}\geq 1+\frac{\beta}{\alpha}k_1$$

$$\alpha_{2\alpha}^{\beta}=(1+k_2)^{\frac{\beta}{\alpha}}\geq 1+\frac{\beta}{\alpha}k_2$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$\alpha_{n\alpha}^{\beta}=(1+k_n)^{\frac{\beta}{\alpha}}\geq 1+\frac{\beta}{\alpha}k_n$$

Sumando miembro a miembro, tenemos :

$$\alpha_1^{\frac{\beta}{\alpha}}+\alpha_{2\alpha}^{\frac{\beta}{\alpha}}+...+\alpha_{n\alpha}^{\frac{\beta}{\alpha}}\geq n+\frac{\beta}{\alpha}\underbrace{(k_1+k_2+...+k_n)}_{0}$$

$$\Leftrightarrow \alpha_1^{\frac{\beta}{\alpha}}+\alpha_2^{\frac{\beta}{\alpha}}+....+\alpha_n^{\frac{\beta}{\alpha}}\geq n$$

$$\Leftrightarrow \frac{\alpha_1^{\frac{\beta}{\alpha}}+\alpha_2^{\frac{\beta}{\alpha}}+...+\alpha_n^{\frac{\beta}{\alpha}}}{n}\geq 1$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\alpha_1^{\frac{\beta}{\alpha}}+\alpha_2^{\frac{\beta}{\alpha}}+...+\alpha_n^{\frac{\beta}{\alpha}}}{n}\right)^{\frac{1}{\beta}}\geq 1$$

de donde $\frac{M_\beta}{q}\geq 1\Leftrightarrow M_\beta\geq q\Leftrightarrow M_\beta\geq M_\alpha$

La igualdad $M_\beta=M_\alpha$ se cumple si y sólo si

$k_1=k_2=...=k_n=0$, luego

$d_1=d_2=...=d_n=1$, y por consiguiente

$x_1=x_2=...=x_n$.

Falta demostrar el caso $\alpha<\beta<0$, pero de $\alpha<\beta<\alpha<0$, se tiene $0<\frac{\beta}{\alpha}<1$, , y se repite el caso anterior. $\therefore M_\alpha\leq M_\beta$

EJERCICIO 1 :

Demuestre que si $a^3+b^3+c^3=2187$, siendo a, b, c números reales positivos, entonces

$$a+b+c\leq 27$$

RESOLUCIÓN :

Como $M_1\leq M_3$, entonces:

$$\frac{a+b+c}{3}\leq\left(\frac{a^3+b^3+c^3}{3}\right)^{1/3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(a+b+c)^3}{27}\leq\frac{a^3+b^3+c^3}{3}$$

$$\Leftrightarrow (a+b+c)^3\leq 9(a^3+b^3+c^3)$$

$$\Leftrightarrow (a+b+c)^3\leq 3^2\times 3^7=3^9$$

$$\Leftrightarrow a+b+c\leq 3^3$$

Por lo tanto $a+b+c\leq 27$

La igualdad ocurre si y sólo si $a=b=c=9$.

DESIGUALDAD DE REORDENAMIENTOS

TEOREMA (*Teorema de Abel*) **:**

Sean $(x_1, x_2,...,x_n).(y_1, y_2,..., y_n)$, dos n–uplas de números reales y denotamos $c_k=y_1+y_2+...+y_k;(k=1,2,...n)$, entonces :

$$x_1y_1, x_2y_2+...+x_ny_n=(x_1-x_2)c_1+(x_2-x_3)c_2+(x_{n-1}-x_n)c_{n-1}+x_nc_n$$

DEMOSTRACIÓN :

Efectuando el segundo miembro de

$$(x_1-x_2)c_1+(x_2-x_3)c_2+(x_{n-1}-x_n)c_{n-1}+x_nc_n$$
$$=c_1x_1+(c_2-c_1)x_2+..+(c_n-c_{n-1})x_n$$
$$=y_1c_1+y_2x_2......+y_nx_n$$

TEOREMA ***(Desigualdad de Abel) :***

Sea:

$x_1,x_2,...,x_n$, y $\geq y_1\geq y_2\geq...\geq y_n\geq 0$ números reales y denotemos $s_k=\sum_{i=1}^{k}xi$ con $M=máx\{s_1, s_2,..., s_n\}$ y $m=mín\{s_1, s_2,..., s_n\}$, entonces $my_1\leq x_1y_1+x_2y_2+...+x_ny_n\leq My_1$.

DEMOSTRACIÓN :

Como $y_1 \geq y_2 \geq ... \geq y_n \geq 0$,, entonces aplicando el teorema de Abel tenemos :

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \sum_{i=1}^{n} (y_i - y_{i+1}) s_i ; y_{n+1} = 0$$

$$\geq \sum_{j=1}^{n} (y_i - y_{i+1}) m = m \sum_{i=1}^{n} (y_i - y_{i+1}) = m y_1$$

de donde $\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \geq m y_1$

Similarmente:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \sum_{i=1}^{n} (y_i - y_{i+1}) s_i ; y_{n+1} = 0$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} (y_i - y_{i+1}) M = M \sum_{i=1}^{n} (y_i - y_{i+1}) = M y_1$$

de donde $\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leq M y_1 \Rightarrow m y_1 \leq \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leq M y_1$

EJERCICIO 1 :

Sean $a_1, a_2, ..., a_n$ y $b_1 \geq b_2 \geq ... \geq b_n \geq 0$ números reales positivos tales que :

$a_1, a_2, ..., a_k \geq b_1 . b_2 ... b_k ; \forall k \in \{1; 2; ...; n\}$.

Demostrar que $a_1 + a_2 + ... + a_n \geq b_1 + b_2 + ... + b_n$.

RESOLUCIÓN :

Aplicando el teorema de Abel :

$$\sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{i=1}^{n} b_i = \sum_{i=1}^{n} b_i \left(\frac{a_i}{b_i} - 1 \right)$$

$$= (b_1 - b_2)\left(\frac{a_1}{b_1} - 1 \right) + (b_2 - b_3)\left(\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} - 2 \right) + ...$$

$$+ (b_{n-1} - b_n)\left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{a_i}{b_i} - n + 1 \right) + b_n \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{b_i} - n \right).$$

Analizando cada suma $\sum_{i=1}^{k} \frac{a_i}{b_i} ; k = 1, 2, ..., n$, mediante la propiedad $\overline{MA} \geq \overline{MG}$

$$\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + ... + \frac{a_k}{b_k} \geq k \sqrt[k]{\frac{a_1}{b_1} . \frac{a_2}{b_2} ... \frac{a_k}{b_k}} \geq k,$$

luego :

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{b_i} - k \right) \geq 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{i=1}^{n} b_i \geq 0$$

TEOREMA :

(Desigualdad de Reordenamientos)

Sean $(a_1, a_2, ... a_n)$ y $(b_1, b_2, ... b_n)$ dos sucesiones crecientes de números reales y sea $(b_{i1}, b_{i2}, ..., b_{in})$ una permutación de $(b_1, b_2, ... b_n)$, entonces:

$$a_1 b_1, ... a_2 b_2 + ... + a_n b_n \geq a_1 b_{i2} + a_2 b_{i2} + ... + a_n b_{in}.$$

Si $(a_1, a_2, ..., a_n)$ es creciente y $(b_1, b_2, ... b_n)$ es decreciente, entonces :

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + ... + a_n b_n \geq b_1 b_{i_1} + a_2 b_{i2} + ... + a_n b_{in}$$

DEMOSTRACIÓN :

Veamos el caso :

$$a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_n \text{ y } b_1 \leq b_2 \leq ... \leq b_n$$

Aplicando el teorema de Abel :

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k - \sum_{k=1}^{n} a_k b_{i_k} = \sum_{k=1}^{n} a_k \left(b_k - b_{i_k} \right)$$

$$= \underbrace{(a_1 - a_2)(b_1 - b_{i_1})}_{(+)} + \underbrace{(a_2 - a_3)(b_1 + b_2 + b_{i_1} + b_{i_2})}_{(+)} + ...$$

$$+ \underbrace{(a_{n-1} - a_n)\left(\sum_{k=1}^{n-1} b_k - \sum_{k=1}^{n-1} b_{i_k} \right)}_{(+)} + \underbrace{a_n \left(\sum_{k=1}^{n} b_k - \sum_{k=1}^{n} b_{i_k} \right)}_{(+)} \geq 0,$$

pues para cada $k = 1, 2, ..., n$, tenemos que

$\sum_{j=1}^{k} b_j \leq \sum_{j=1}^{k} b_{i_j}$, ya que $b_1 \leq b_2 \leq ... \leq b_n$

La segunda parte del teorema se prueba similarmente.

EJERCICIO :

Demostrar que : $\frac{m}{n+p} + \frac{n}{p+m} + \frac{p}{m+n} + \geq \frac{3}{2}$

para todo m, n, p números reales positivos .

RESOLUCIÓN :

Esta desigualdad lo podemos demostrar por el Lema de Titu y aplicando $\overline{MA} \geq \overline{MG}$, *pero* veamos aplicando reordenamientos.

En efecto, por la simetría del primer miembro de la desigualdad, podemos asumir un orden, como

$m \leq n \leq p$, entonces $m + n \leq m + p \leq n + p$ y

$$\frac{1}{n+p} \leq \frac{1}{m+p} \leq \frac{1}{m+n}$$

Luego :

$$\frac{m}{n+p} + \frac{n}{p+m} + \frac{p}{m+n} \geq \frac{n}{n+p} + \frac{p}{p+m} + \frac{m}{m+n}$$

$$\Rightarrow \frac{m}{n+p}+\frac{n}{p+m}+\frac{p}{m+n} \geq \frac{p}{n+p}+\frac{m}{p+m}+\frac{n}{m+n}$$

sumando miembro a miembro, tenemos;

$$2\left(\frac{m}{n+p}+\frac{n}{p+m}+\frac{p}{m+n}\right) \geq \frac{n+p}{n+p}+\frac{p+m}{p+m}+\frac{m+n}{m+n}=3$$

de donde $\frac{m}{n+p}+\frac{n}{p+m}+\frac{p}{m+n}+\geq\frac{3}{2}$.

COLORARIO :

Para toda permutación:

$\left(a_1',a_2',...,a_n'\right) de \left(a_1,a_2,...,a_n\right)$, se tiene

$$a_1^2+a_2^2+...+a_n^2 \geq a_1.a_1'+a_2.a_2'+...+a_n.a_n'.$$

COLORARIO:

Para toda permutación $\left(a_1',a_2',...,a_n'\right)$ de $\left(a_1,a_2,...,a_n\right)$, se tiene $\frac{a_1'}{a_1}+\frac{a_2'}{a_2}+...+\frac{a_n'}{a_n} \geq n.$

TEOREMA :

(Desigualdad de Chebyshev)

Sean: $a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_n$ y $b_1 \leq b_2 \leq ... \leq b_n$, entonces :

$$\frac{a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n}{n} \geq \left(\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}\right)\left(\frac{b_1+b_2+...+b_n}{n}\right)$$

Si una de las sucesiones es creciente y la otra, decreciente, el sentido de la desigualdad cambia

$$\frac{a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n}{n} \leq \left(\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}\right)\left(\frac{b_1+b_2+...+b_n}{n}\right)$$

DEMOSTRACIÓN :

Veamos el caso cuando las dos sucesiones son crecientes. En efecto, por la desigualdad de reordenamientos, tenemos :

$$a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n = a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n,$$
$$a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n \geq a_1b_1+a_2b_3+...+a_nb_1,$$
$$a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n \geq a_1b_3+a_2b_4+...+a_nb_2,$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$
$$a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n \geq a_1b_n+a_2b_1+...+a_nb_{n-1},$$

Sumando miembro a miembro, tenemos :

$$n(a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n) \geq (a_1+a_2+...+a_n)(b_1+b_2+...+b_n)$$

El otro caso se prueba de manera similar.

EJERCICIO :

Demostrar que :

$$\frac{m^3}{x}+\frac{n^3}{y}+\frac{p^3}{z} \geq \frac{(m+n+p)^3}{3(x+y+z)}$$

Para todo m,n,p, x, y, z números reales positivos con $m \geq n \geq p$ y $z \geq y \geq x$.

RESOLUCIÓN :

Sean las ternas :

$$\left(\frac{m^2}{x},\frac{n^2}{y},\frac{p^2}{z}\right);\ (m,n,p)$$

como $m \geq n \geq p$ y $z \geq y \geq x$, entonces $\frac{m^2}{x} \geq \frac{n^2}{y} \geq \frac{p^2}{z}$

Aplicando el teorema de Chebyshev :

$$\frac{\frac{m^2}{x}\times m+\frac{n^2}{y}\times n+\frac{p^2}{z}\times p}{3} \geq \left(\frac{\frac{m^2}{x}+\frac{n^2}{y}+\frac{p^2}{z}}{3}\right)\left(\frac{m+n+p}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{m^3}{x}+\frac{n^3}{y}+\frac{p^2}{z} \geq \left(\frac{m^2}{x}+\frac{n^2}{y}+\frac{p^2}{z}\right)\left(\frac{m+n+p}{3}\right)$$

Luego es suficiente demostrar :

$$\left(\frac{m^2}{x}+\frac{n^2}{y}+\frac{p^2}{z}\right)\left(\frac{m+n+p}{3}\right) \geq \frac{(m+n+p)^3}{3(x+y+z)}$$

Pero por el lema de Titu :

$$\frac{m^2}{x}+\frac{n^2}{y}+\frac{p^2}{z} \geq \frac{(m+n+p)^2}{x+y+z}$$

Multiplicando por $\left(\frac{m+n+p}{3}\right)$, tenemos :

$$\left(\frac{m^3}{x}+\frac{n^3}{y}+\frac{p^3}{z}\right)\left(\frac{m+n+p}{3}\right) \geq \frac{(m+n+p)^3}{3(x+y+z)}$$

FUNCIONES CÓNCAVAS Y CONVEXAS

Una función es convexa en un intervalo si la rectas tangentes a la función en ese intervalo están por debajo de la función. Una función es cóncava en un intervalo si la rectas tangentes a la función de ese intervalo están por encima.

La denominación de convexidad y concavidad depende del punto de vista que se adopte para considerar que es una concavidad, esto es si se mira a la función «desde arriba» o «desde abajo». Por ello, algunos textos denominan convexas a las funciones que se curvan «hacia abajo», al contrario de la definición que se acaba de dar en los anteriores

párrafos. Por ello, es frecuente que en ocasiones se adopten las denominaciones **convexa hacia arriba** y **concava hacia abajo** para evitar las ambigüedades.

Las técnicas del análisis diferencial permiten determinar si una función es creciente, decreciente, concava o convexa a través del estudio de las derivadas sucesivas de la función.

DESIGUALDAD CON FUNCIONES CONVEXAS

Las funciones convexas cumplen un rol muy importante en la matemática, especialmente en la línea de optimización, ya que en estos tiempos se están estudiando modelos matemáticos en ingeniería, economía, étc.

Estudiaremos estas funciones para obtener una desigualdad muy importante llamada la desigualdad de Jensen.

FUNCIÓN CONVEXA :

Sea f una función real de variable real, definida sobre $[a;b]\subset R$, f es llamada una *función convexa* sobre $[a;b]$ si y sólo si para cada $x, y \in [a;b]$ y para todo $0\le t\le 1$, se tiene

$$f(tx+(1-t)y)\le tf(x)+(1-t)f(y)$$

A continuación utilizaremos el concepto de primera y segunda derivada .

TEOREMA :

Si f es una función real definida sobre $[a,b]\subset R$ y $f''(x)>0$ (segunda derivada mayor que cero) para todo $x\in\langle a;b\rangle$, entonces f es una función convexa sobre $[a;b]$.

DEMOSTRACIÓN :

Debemos probar que para todo $x\in[a;b]$, y para todo $t\in[0;1]$, se cumple :

$$f(tx+(1-t)y)\le tf(x)+(1-t)f(y)$$

Supongamos que t y y son constantes; definimos

$$g(x)=tf(x)+(1-t)f(y)-f(tx+(1-t)y)$$

Derivando con respecto a x :

$$g'(x)=tf'(x)-tf'(tx+(1-t)y)$$
$$=t(f'(x)-f'(tx+(1-t)y))$$

Como $f''(x)>0, \forall x\in[a;b]$, entonces f' es creciente en $[a;b]$, de donde tenemos que :

$$g'(x)\ge 0 \text{ si } x\ge y; \wedge$$
$$g'(x)\le 0 \text{ si } x\le y$$

el mínimo de la función es $g(y)$, evaluando en tenemos $g(y) = 0$. Luego :

$$g(x)\ge g(y), \forall x\in[a;b]$$

de donde :

$$g(x)\ge 0; \forall x\in[a;b]$$

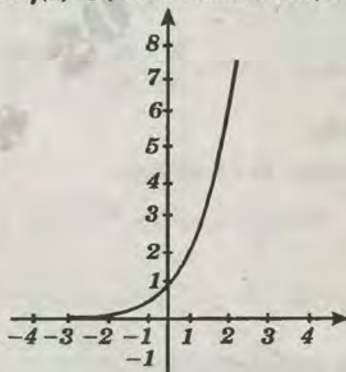
Reemplazando :

$$tf(x)+(1-t)f(y)-f(tx+(1-t)y)\ge 0$$

$$\Rightarrow f(tx+(1-t)y)\le f(x)+(1-t)f(y),$$
$$;\forall x\in[a;b];\ \forall t\in[0;1]$$

EJEMPLO :

La función $f(x)=e^x$, con x número real, es convexa.



pues $f''(x)=e^x>0$, para todo x número real.

TEOREMA :

Si f es convexa sobre $[a;b]$, entonces para cada $x,y\in[a;b]$ se tiene : $f\left(\dfrac{x+y}{2}\right)\le\dfrac{1}{2}[f(x)+f(y)]$

DEMOSTRACIÓN :

Es suficiente tomar $t=\dfrac{1}{2}$ en la definición.

DEFINICIÓN :

Una función f real definida sobre $[a;b]\subset R$ es llamada función cóncava sobre $[a;b]$ si y sólo si para cada $x,y\in[a;b]$ y para todo $0\le t\le 1$ se tiene

$$f(tx+(1-t)y)\ge tf(x)+(1-t)f(y)$$

TEOREMA (DESIGUALDAD DE JENSEN)

Si f es convexa sobre $[a;b]$, entonces para cada t_1, $t_2,......,t_n \in [0;1]$ con $\sum_{i=1}^{n} t_i = 1$ y para cada $x_1, x_2,...,x_n \in [a;b]$, se tiene :

$$f(t_1x_1 + t_2x_2 + ... + t_nx_n) \le t_1f(x_1) + t_2f(x_2) + ... + t_nf(x_n)$$

DEMOSTRACIÓN :

Demostraremos por inducción. Para $n = 2$ es el teorema anterior. Supongamos que se cumpla para $(n - 1)$, veamos para n.

* Como :

$$t_1x_1 + t_2x_2 + ... + t_{n-1}x_{n-1} + t_nx_n$$

$$= (1-t_n)\left[\frac{t_1}{1-t_n}x_1 + \frac{t_2}{1-t_n}x_2 + ... + \frac{t_n}{1-t_{n-1}}x_{n-1}\right] + t_nx_n$$

Entonces :

$$f(t_1x_1 + t_2x_2 + ... + t_nx_n) = f\left((1-t_n)\left[\frac{t_1}{1-t_n}x_1 + ... + \frac{t_{n-1}}{1-t_n}x_{n-1}\right] + t_nx_n\right)$$

$$\le (1-t_n)f\left[\frac{t_1}{1-t_n}x_1 + ... + \frac{t_{n-1}}{1-t_n}x_{n-1}\right] + t_nf(x_n), f \text{ convexa}$$

$$\le (1-t_n)\left[\frac{t_1}{1-t_n}f(x_1) + ... + \frac{t_{n-1}}{1-t_n}f(x_{n-1})\right] + t_nf(x_n)$$

$$= t_1f(x_1) + t_2f(x_2) + ... + t_nf(x_n)$$

de donde se tiene :

$$f(t_1x_1 + t_2x_2 + ... + t_nx_n) \le t_1f(x_1) + t_2f(x_2) + ... + t_nf(x_n)$$

En particular, si $t_1 = t_2 = ... = t_n = \frac{1}{n}$, se tiene:

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}\right) \le \frac{1}{n}[f(x_1) + f(x_2) + ... + f(x_n)]$$

Similarmente si f es cóncava entonces :

$$f(t_1x_1 + t_2x_2 + ... + t_nx_n) \ge t_1f(x_1) + t_2f(x_2) + ... + t_nf(x_n)$$

TEOREMA :

Si f es una función real definida sobre $[a;b] \subset R$, y $f''(x) < 0$ para todo $x \in \langle a;b \rangle$, entonces f es una función cóncava sobre $[a;b]$.

EJERCICIO :

Si $r_1, r_2, ..., r_n$ son números reales positivos. Demostrar que :

$$\frac{1}{1+r_1} + \frac{1}{1+r_2} + ... + \frac{1}{1+r_n} \ge \frac{n}{\sqrt[n]{r_1r_2.....r_n} + 1}$$

RESOLUCIÓN :

Por la forma de cada fracción del primer miembro, definimos la función:

$$f(x) = \frac{1}{1+e^x}; x \in R^+$$

Veamos que es convexa. Derivando, tenemos:

$$f'(x) = \frac{-e^x}{(1+e^x)^2} \wedge$$

$$f''(x) = \frac{e^x(e^x-1)}{(1+e^x)^3} > 0; \forall x > 0$$

Por lo tanto f es convexa. Luego, podemos aplicar la Desigualdad de Jensen

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}\right) \le \frac{1}{n}(f(x_1) + f(x_2) + ... + f(x_n))$$

$$\frac{1}{1+e^{\frac{x_1+x_2+...+x_n}{n}}} \le \frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+e^{x_1}} + \frac{1}{1+e^{x_2}} + ... + \frac{1}{1+e^{x_n}}\right)$$

haciendo $e^{x_i} = r_i; i = 1,2,...,n$, tenemos :

$$\frac{n}{\sqrt[n]{r_1r_2...r_n} + 1} \le \frac{1}{1+r_1} + \frac{1}{1+r_2} + ... + \frac{1}{1+r_n}$$

ESPACIO METRICO

La geometría del espacio tridimensional en el que estamos sumergidos nos resulta muy natural.

Conceptos tales como distancia, longitud, ángulo, perpendicularidad son de uso cotidiano. En matemáticas frecuentemente podemos agrupar ciertos objetos en espacios abstractos y definir entre ellos relaciones semejantes a las existentes entre los puntos del espacio ordinario. El paralelismo que se establece así entre los espacios abstractos y el espacio euclideano nos permite visualizar y lograr un entendimiento más profundo de estos objetos.

En algunas aplicaciones el planteo más simple que puede usarse es el de espacio métrico.

Un espacio métrico es un conjunto de puntos en los que está definido la noción de distancia entre puntos. Podemos usar la función distancia o *métrica* para definir los conceptos fundamentales del análisis, tales como convergencia, continuidad y compacidad.

Una de las operaciones principales del análisis es el paso al límite. Esta operación descansa sobre el hecho de que en la recta numérica está definida la distancia entre dos puntos.

Es impresionante ver que muchos resultados principales del análisis no tienen nada que ver con la naturaleza algebraica del conjunto de los números reales, es decir, sólo se apoya en las propiedades de distancia y con ello llegamos al concepto de Espacio Métrico, que es uno de los conceptos más importantes de la matemática moderna.

DEFINICIÓN :

Un espacio métrico es un par *(X ;d)* compuesto de un conjunto (espacio) $X \neq \varnothing$ de elementos (puntos)

y de una distancia, es decir una función:

$$d : X \times X \to R$$
$$(x;y) \Rightarrow d(x;y)$$

no negativa, que verifica las tres condiciones siguientes:

1) $d(x;y)=0 \Leftrightarrow x=y.$

2) $d(x;y)=d(y;x)$....*(axioma de simetría)*

3) $d(x;z)\leq d(x;y)+d(y;z)$...*(axioma triangular*

Muchas veces lo denotaremos simplemente como X al espacio métrico $(X;d)$, por comodidad en la notación.

Mencionaremos algunos ejemplos que desempeñan un papel importante en el análisis.

1) Sea $X \neq \varnothing$ un conjunto arbitrario con :

$$d(x;y)=\begin{cases}0;\ x=y\\1;\ x\neq y\end{cases}$$

$(X;d)$ es un espacio métrico llamado de puntos aislados.

2) El conjunto de los números reales con la distancia

$$d(x;y)=|x-y|$$

forma el espacio métrico $(R;d)$.

Veamos que cumple los axiomas correspondientes.

• ***PRUEBA :***

1) $d(x;y)=0 \Leftrightarrow |x-y|=0$
$\Leftrightarrow x-y=0$
$\Leftrightarrow x=y$

2) $d(x;y)=|x-y|=|y-x|=d(x;y)$

3) $d(x;z)=|x-z|=|(x-y)+(y-z)|\leq|x-y|+|y-z|=d(x;y)+d(y;z)$

de donde : $d(x;z)\leq d(x;y)+d(y;z)$

3) El conjunto :

$$R^n=\{x=(x_1,x_2,...,x_n)/x_1,x_2,...,x_n\in R\}$$

con la distancia $d(x;y)=\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(y_k-x_k)^2}$

es el espacio métrico $(R^n;d)$.

Para verificar que es espacio métrico, veamos que se cumple el axioma triangular *3*, ya que *1* y *2* son directos.

Sean :

$x=(x_1,x_2,...,x_n),y=(y_1,y_2,...,y_n),z=(z_1,z_2,...,z_n)$

Entonces para que se cumpla :

$d(x;z)\leq d(x;y)+d(y;z)$ se tiene que cumplir la desigualdad :

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(z_k-x_k)^2}\leq\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(y_k-x_k)^2}+\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(z_k-y_k)^2}$$

Si tomamos $y_k-x_k=a_k$ y $z_k-y_k=b_k\Rightarrow z_k-x_k=a_k+b_k$, entonces tiene la forma :

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^2}\leq\sqrt{\sum_{k=1}^{n}a_k^2}+\sqrt{\sum_{k=1}^{n}b_k^2}$$

Esta desigualdad se deduce de la desigualdad de Cauchy-Schwarz :

$$\left(\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\right)^2\leq\sum_{k=1}^{n}a_k^2\times\sum_{k=1}^{n}b_k^2$$

En efecto:

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^2=\sum_{k=1}^{n}a_k^2+2\sum_{k=1}^{n}a_kb_k+\sum_{k=1}^{n}b_k^2$$

$$\leq\sum_{k=1}^{n}a_k^2+2\sqrt{\sum_{k=1}^{n}a_k^2\times\sum_{k=1}^{n}b_k^2}+\sum_{k=1}^{n}b_k^2=\left(\sqrt{\sum_{k=1}^{n}a_k^2}+\sqrt{\sum_{k=1}^{n}b_k^2}\right)^2$$

de donde :

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^2}\leq\sqrt{\sum_{k=1}^{n}a_k^2}+\sqrt{\sum_{k=1}^{n}b_k^2}$$

4) Considerando el mismo conjunto R^n, pero definiendo la distancia

$$d_1(x;y)=\sum_{k=1}^{n}|y_k-x_k|$$

También es un espacio métrico (R^n,d_1).

5) Considerando nuevamente R^n, y definiendo una nueva distancia :

$$d_2(x;y)=\max_{1\leq k\leq n}|y_k-x_k|$$

También es un espacio métrico $(R^n;d_2)$.

6) $\mathcal{L}_2=\{x=(x_1,x_2\ldots x_n,\ldots)\}$ tal que $x_k\in R$ para todo $k\in N$ tal que $\sum_{k=1}^{\infty}x_k^2<\infty$ y con distancia

$$d=(x;y)=\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}(y_k-x_k)^2}$$

La función $d(x;y)$ así definida tiene sentido para , $x,y\in\mathcal{L}_2$ ya que la serie $\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}(y_k-x_k)^2}$ converge siempre que $\sum_{k=1}^{\infty}x_k^2<\infty$ y $\sum_{k=1}^{\infty}y_k^2<\infty$, esto ocurre pues $(x_k\pm y_k)^2\leq 2(x_k^2+y_k^2)$.

Al mismo tiempo vemos que si :

$(x_1,x_2,\ldots,x_n,\ldots),(y_1,y_2,\ldots,y_n,\ldots)\in\mathcal{L}_2$, también

$(x_1+y_1, x_2+y_2, ..., x_n+y_n, ...) \in \mathcal{L}_2$

7) El conjunto R^n, con la distancia

$$d_p(x;y)=\left(\sum_{k=1}^{n}|y_k-x_k|^p\right)^{1/p}$$

donde p es un número fijo arbitrario mayor que $1 (p>1)$, representa el espacio métrico $(R^n; d_p)$.

Para comprobar que es espacio métrico, veamos que cumple los tres axiomas.

1 y **2** son obvias, veamos el axioma triangular **3**, es decir, se debe cumplir

$$\left(\sum_{k=1}^{n}|z_k-x_k|^p\right)^{1/p} \le \left(\sum_{k=1}^{n}|z_k-y_k|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{n}|y_k-x_k|^p\right)^{1/p}$$

Haciendo :

$$z_k-y_k=a_k \text{ y } y_k-x_k=b_k \Rightarrow z_k-x_k=a_k+b_k$$

tenemos :

$$\left(\sum_{k=1}^{n}|a_k+b_k|^p\right)^{1/p} \le \left(\sum_{k=1}^{n}|a_k|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{n}|b_k|^p\right)^{1/p}$$

A continuación estudiaremos esta desigualdad, llamada desigualdad de Minkonski; previamente veremos la desigualdad de Hólder.

DESIGUALDAD DE HÖLDER

Sean $x_1, x_2, ..., x_n, y_1, y_2, ..., y_n$ números reales positivos y $a, b>0$ tal que $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1$, entonces:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \le \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^a\right)^{1/a} \times \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^b\right)^{1/b}$$

PRUEBA:

Supongamos que $\sum_{i=1}^{n} x_i^a = \sum_{i=1}^{n} y_i^b = 1$, usando el hecho que $x_i y_i \le \frac{1}{a}x_i^a + \frac{1}{b}y_i^a$, entonces :

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \le \frac{1}{a}\sum_{i=1}^{n} x_i^a + \frac{1}{b}\sum_{i=1}^{n} y_i^b = \frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1$$

Ahora supongamos que $\sum_{i=1}^{n} x_i^a = M$ y $\sum_{i=1}^{n} y_i^b = N$.

Sea $x'_i=\frac{x_i}{M^{1/a}}$, $y'_i=\frac{y_i}{N^{1/b}}$ entonces :

$$\sum_{i=1}^{n} x_i'^a = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^a}{M} = \frac{M}{M} = 1 \wedge \sum_{i=1}^{n} y_i'^a = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i^a}{N} = \frac{N}{N} = 1.$$

Luego :

$$\sum_{i=1}^{n} x'_i y'_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i y_i}{M^{1/a}.N^{1/b}} = \frac{1}{M^{1/a}.N^{1/b}}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

Se tiene que $\sum_{i=1}^{n} x'_i y'_i \le 1$, entonces tenemos :

$$\frac{1}{M^{1/a}.N^{1/b}}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \le 1 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \le M^{1/a}.N^{1/b}$$

Reemplazando :

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \le \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^a\right)^{1/a} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^a\right)^{1/b}$$

En particular si $a=b=2$, tenemos la desigualdad de Cauchy-Schwarz.

DESIGUALDAD DE MINKONSKI

Sean $a_1, a_2, ..., a_n, b_1, b_2, ..., b_n$ números positivos y $p>1$, entonces :

$$\left(\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^p\right)^{1/p} \le \left(\sum_{k=1}^{n}(a_k)^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{n}(b_k)^p\right)^{1/p}$$

PRUEBA:

Como :

$$(a_k+b_k)^p=(a_k+b_k)(a_k+b_k)^{p-1}=a_k(a_k+b_k)^{p-1}+b_k(a_k+b_k)^{p-1}$$

entonces :

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^p = \sum_{k=1}^{n} a_k(a_k+b_k)^{p-1} + \sum_{k=1}^{n} b_k(a_k+b_k)^{p-1}$$

aplicando la desigualdad de Hölder en cada término del segundo miembro, sabiendo que $p>1$ y $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$

$$\sum_{k=1}^{n} a_k(a_k+b_k)^{p-1} \le \left(\sum_{k=1}^{n}(a_k)^p\right)^{1/p} \cdot \left(\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^{q(p-1)}\right)^{1/q},$$

$$\sum_{k=1}^{n} b_k(a_k+b_k)^{p-1} \le \left(\sum_{k=1}^{n}(b_k)^p\right)^{1/p} \cdot \left(\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^{q(p-1)}\right)^{1/q},$$

además $q(p-1)=p$ y reemplazando :

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^p \le \left(\sum_{k=1}^{n}(a_k)^p\right)^{1/p} \cdot \left(\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^p\right)^{1/q}$$

$$+\left(\sum_{k=1}^{n}(b_k)^p\right)^{1/p} \cdot \left(\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^p\right)^{1/q}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^p \le \left(\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^p\right)^{1/q} \cdot \left(\left(\sum_{k=1}^{n}(a_k)^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{n}(b_k)^p\right)^{1/p}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^p\right)^{1-1/q} \le \left(\sum_{k=1}^{n}(a_k)^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{n}(b_k)^p\right)^{1/p}$$

$$\Rightarrow \left(\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^p\right)^{1/p} \le \left(\sum_{k=1}^{n}(a_k)^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{n}(b_k)^p\right)^{1/p}$$

TEOREMA:

Dados los puntos **A, B, C** del plano, se tiene que $\overline{AB} \le \overline{AC}+\overline{CB}$, la igualdad ocurre si $C \in \overline{AB}$.

EJERCICIO :

Demostrar que :

$$\sqrt{2}|a+b+c| \le \sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{a^2+c^2}$$

para todo x, y, z números reales.

RESOLUCIÓN :

Escribiendo adecuadamente el punto :

$$(a+b+c\,;\,a+b+c)=(a;b)+(b;c)+(c;a)$$

Pero :

$$d(a+b+c;a+b+c)=d((a;b)+(b;c)+(c;a))$$
$$\le d(a;b)+d(b;c)+d(c;a),$$

de donde :

$$\sqrt{2}|x+y+z| \le \sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{y^2+z^2}+\sqrt{x^2+z^2}.$$

MÉTODO DE LA SUMA DE CUADRADOS

El polinomio $f(a_1, a_2, \dots, a_n)$ es *homogéneo* si todos sus términos tienen el mismo grado absoluto. Mencionaremos algunos ejemplos:

I) $f(a_1,a_2)=a_1^2+a_2^2+3a_1a_2$, es homogéneo de segundo grado.

II) $f(a_1,a_2,a_3)=a_1^3+a_2^2a_3+a_1a_2a_3$, es homogéneo de tercer grado.

Sea el polinomio homogéneo $f(a_1,a_2,\dots,a_n)$, entonces $f(a_1,a_2,\dots,a_3)\ge 0$ para todo $a_1, a_2, \dots; a_n$ reales, significa que la función puede expresarse como una suma $f(a_1,a_2,\dots,a_n)=p_1^2+p_2^2+\dots+p_n^2$, donde p_k es una función real.

Veamos la desigualdad $A \ge B$,
donde A, B son expresiones de variables a,b,c para explicar la idea central. Si queremos demostrar A $A \ge B$, entonces veremos la diferencia

$$A-B=f(a,b,c)=S_a(b-c)^2+S_b(c-a)^2+S_c(a-b)^2$$

Si $S_a,S_b,S_c \ge 0$ entonces

$$f(a,b,c)=S_a(b-c)^2+S_b(c-a)^2+S_c(a-b)^2 \ge 0;$$

esto significa que $A \ge B$ es una desigualdad verdadera.

TEOREMA:

Si a, b, c, S_a, S_b, S_c satisfacen las condiciones

I) $S_a+S_b \ge 0;\ S_b+S_c \ge 0;\ S_c+S_a \ge 0$, y

II) $(a \le b \le c \vee a \ge b \ge c)$ y $S_b \ge 0$,

entonces :

$$S_a(b-c)^2+S_b(c-a)^2+S_c(a-b)^2 \ge 0$$

PRUEBA:

Sin pérdida de generalidad supongamos que $a \le b \le c$, luego

$$S_a(b-c)^2+S_b(c-a)^2+S_c(a-b)^2$$
$$=S_a(b-c)^2+S_b(c-b+b-a)^2+S_c(a-b)^2$$
$$=S_a(b-c)^2+S_b[(c-b)^2+(b-a)^2+2(c-b)(b-a)]+S_c(a-b)^2$$
$$=S_a(b-c)^2+S_b(c-b)^2+S_b(b-a)^2+2(c-b)(b-a)S_b+S_c(a-b)^2$$
$$=\underbrace{(S_a+S_b)}_{\ge 0}(b-c)^2+\underbrace{(S_b+S_c)}_{\ge 0}(a-b)^2+2\underbrace{(c-b)(b-a)}_{\ge 0}\underbrace{S_b}_{\ge 0} \ge 0$$

La igualdad ocurre si y sólo si :

$$(S_a+S_b)(b-c)^2=0 \wedge (S_b+S_c)(a-b)^2=0$$
$$\wedge\ 2(c-b)(b-a)S_b=0$$

de donde se deduce que:

$$(a=b=c) \vee (a=b \wedge S_a=S_b=0) \vee (b=c \wedge S_b=S_c=0)$$
$$\vee (S_a=S_b=S_c=0)$$

TEOREMA:

Si a, b, c, S_a, S_b, S_c son números reales que satisfacen las condiciones:

$(a \le b \le c \vee a \ge b \ge c), S_a \ge 0, S_c \ge 0, S_a+2S_b \ge 0,$ $S_c+2S_b \ge 0$, entonces

$$S_a(b-c)^2+S_b(c-a)^2+S_c(a-b)^2 \ge 0$$

PRUEBA:

Sin pérdida de generalidad supongamos que $a \le b \le c$, entonces :

$$S_a \ge 0, S_c \ge 0,\ S_a+2S_b \ge 0, S_c+2S_b \ge 0$$

I) Si $S_b \ge 0$, entonces siempre es verdadero.

II) Si $S_b<0$, entonces

$$S_a(b-c)^2+S_b(c-a)^2+S_c(a-b)^2$$
$$=S_a(b-c)^2+S_b(c-b+b-a)^2+S_c(a-b)^2$$
$$=(S_b+S_a)(c-b)^2+(S_b+S_c)(b-a)^2+2S_b(c-b)(b-a)$$
$$\ge (S_b+S_a)(c-b)^2+(S_b+S_c)(b-a)^2+S_b[(c-b)^2+(b-a)^2]$$
$$=(S_a+2S_b)(c-b)^2+(S_c+2S_b)(b-a)^2 \ge 0$$

Analice cuándo se da la igualdad.

TEOREMA:

Si a, b, c, S_a, S_b, S_c son números reales que satisfacen las condiciones:

$(a \le b \le c \vee a \ge b \ge c), S_a \ge 0, S_b \ge 0$ y $b^2S_c+c^2S_b \ge 0$, entonces:

$$S_a(b-c)^2+S_b(c-a)^2+S_c(a-b)^2 \ge 0$$

PRUEBA:

Sin pérdida de generalidad supongamos que $a \le b \le c$, y de $S_a \ge 0, S_b \ge 0$ y $b^2S_c+c^2S_b \ge 0$, entonces:

$$S_a(b-c)^2+S_b(c-a)^2+S_c(a-b)^2=S_a(b-c)^2+(b-a)^2\left[S_b\left(\frac{c-a}{b-a}\right)^2+S_c\right]$$

como $\left(\dfrac{c-a}{b-a}\right)^2 \geq \left(\dfrac{c}{b}\right)^2$, entonces :

$$S_a(b-c)^2+S_b(c-a)^2+S_c(a-b)^2 \geq S_a(b-c)^2+(b-a)^2\left[S_b\left(\frac{c}{b}\right)^2+S_c\right]$$

$$=\underbrace{S_a(b-c)^2}_{\geq 0}+\underbrace{[S_bc^2+S_cb^2]}_{\geq 0}\left(\frac{b-a}{b}\right)^2 \geq 0$$

Analice cuando se da la igualdad.

TEOREMA:

Si a, b, c, S_a, S_b, S_c son números reales que satisfacen las condiciones

I) $S_a+S_b \geq 0 \vee S_a+S_b \geq 0 \vee S_b+S_c \geq 0$, y

II) $S_aS_b+S_bS_c+S_cS_a \geq 0$,

entonces

$$S_a(b-c)^2+S_b(c-a)^2+S_c(a-b)^2 \geq 0$$

PRUEBA:

Sin pérdida de generalidad supongamos que $S_b+S_c \geq 0$. Haciendo $u=b-a$; $v=c-b$, tenemos

$$S_a(b-c)^2+S_b(c-a)^2+S_c(a-b)^2$$
$$=S_a(b-c)^2+S_b(c-b+b-a)^2+S_c(a-b)^2$$
$$=S_a(b-c)^2+S_b(c-b)^2+S_b(b-a)^2+2S_b(c-b)(b-a)+S_c(a-b)^2$$
$$=(S_a+S_b)(c-b)^2+(S_b+S_c)(b-a)^2+2S_b(c-b)(b-a)$$
$$=(S_a+S_b)v^2+(S_b+S_c)u^2+2S_bu.v$$
$$=(S_b+S_c)\left(u+\frac{S_b}{S_b+S_c}v\right)^2+\left(\underbrace{\frac{S_aS_b+S_bS_c+S_cS_a}{S_b+S_c}}_{\geq 0}\right)v^2 \geq 0$$

DESIGUALDADES SIMETRICAS Y CICLICAS

Sean $a_1, a_2, \ldots, a_n$ números reales, los coeficientes c_0, c_1, ... , c_n del polinomio

$$H(x)=(x+a_1)(x+a_2)\ldots(x+a_n)=\sum_{k=0}^{n} c_kx^{n-k}$$

se denominan funciones polinomiales simétricas elementales de $a_1, a_2, \ldots, a_n$, es decir :

$$c_0=1$$
$$c_1=a_1+a_2+\ldots+a_n=\sum_{i=1}^{n} a_i$$
$$c_2=a_1a_2+a_1a_3+\ldots+a_{n-1}a_n=\sum_{1\leq i<j\leq n} a_ia_j$$
$$\vdots$$
$$c_n=a_1a_2\ldots a_n$$

EJEMPLO:

Si $H(x)=(x+a)(x+b)(x+c)=x^3+(ab+c)x^2+(ab+ac+bc)x+abc$, entonces

$$c_0=1$$
$$c_1=a+b+c$$
$$c_2=ab+ac+bc$$
$$c_3=abc.$$

En base a estos polinomios simétricos elementales, daremos una definición.

DEFINICIÓN:

Dados los polinomios simétricos elementales $c_0, c_1, \ldots, c_n$ definimos

$$P_k=\frac{1}{\binom{n}{k}}c_k=\frac{k!(n-k)!}{n!}c_k;\ k=0,1,2,\ldots,n.$$

EJEMPLO:

$$P_0=c_0=1$$
$$P_1=\frac{1}{n}c_1=\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}$$
$$P_n=\frac{2}{n(n-1)}c_2=\frac{2}{n(n-1)}(a_1a_2+a_1a_3+\ldots+a_{n-1}a_n).$$

TEOREMA: (Desigualdad de Newton)

Sean $a_1, a_2, \ldots, a_n$ números reales positivos y $k \in \{1, 2, \ldots, (n-1)\}$ entonces, se cumple que :

$$P_{k-1}\cdot P_{k+1} \leq P_k^2.$$

La igualdad ocurre si y sólo si $a_1=a_2=\ldots=a_n$.

NOTA:

Antes de la demostración del teorema, veamos un resultado muy importante que usaremos en la demostración de la desigualdad de Newton.

Sea:

$$H(x)=(x+a_1)(x+a_2)\ldots(x+a_2)=\sum_{k=0}^{n} c_kx^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}P_kx^{n-k}$$

Derivando tenemos:

$$H'(x)=\sum_{k=0}^{n-1}(n-k)\binom{n}{k}P_kx^{n-k-1}$$

Definimos :

$$Q(x)=\frac{1}{n}H'(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{n-k}{n}\binom{n}{k}P_kx^{n-k-1}=\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}P_kx^{n-k-1}$$

Si los valores reales a_k, $k=1,2,\ldots,n$ son elementos del intervalo $[\alpha;\beta]$, entonces el polinomio $H(x)$ tiene n raíces reales en $[\alpha;\beta]$ y por el teorema de Rolle , entonces $H'(x)$ tiene $(n-1)$ raíces reales en $[\alpha;\beta]$ y denotemos como $-y_1, -y_2, \cdots, -y_{n-1}$; luego

$$Q(x)=\frac{1}{n}H'(x)=(x+y_1)(x+y_1)\cdots(x+y_{n-1})$$

Igualando coeficientes de $Q(x)$, obtenemos:

$$P_k(a_1,a_2,\ldots,a_n)=P_k(y_1,y_2,\ldots,y_{n-1})$$

para todo $k=0, 1, 2, \ldots, (n-1)$.

PRUEBA: (de la desigualdad de Newton.)
Consideremos la hipótesis inductiva T_n:
$P_{j-1}(a_1,a_2,...,a_n).P_{j+1}(a_1,a_2,...,a_n) \le P_j^2(a_1,a_2,...,a_n)$,
donde $j=2,3,...,(n-2)$.
Para $j=1$ y $n=2$, tenemos:

$$P_0.P_2 \le P_1^2 \Leftrightarrow 1.a_1a_2 \le \left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)^2$$
$$\Leftrightarrow 4a_1a_2 \le a_1^2+a_2^2+2a_1a_2$$
$$\Leftrightarrow (a_1-a_2)^2 \ge 0$$

Como vemos se cumple para $n=2$.
Para $j=1$ y $n=3$.

$$P_0(a_1,a_2,a_3).P_2(a_1,a_2,a_3) \le P_1^2(a_1,a_2,a_3)$$
$$\Leftrightarrow (1).\frac{1}{3(2)}(a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3) \le \left(\frac{a_1+a_2+a_3}{3}\right)^2$$
$$\Leftrightarrow 3(a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3) \le a_1^2+a_2^2+a_3^2+2(a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3)$$
$$\Leftrightarrow a_1^2+a_2^2+a_3^2 \ge a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3$$

ésta es una desigualdad verdadera.
Para $j=2$ y $n=3$.

$$P_1(a_1,a_2,a_3).P_3(a_1,a_2,a_3) \le P_2^2(a_1,a_2,a_3)$$
$$\Leftrightarrow \left(\frac{a_1+a_2+a_3}{3}\right).(a_1a_2a_3) \le \left(\frac{a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3}{3}\right)^2$$

Si $a_1a_2a_3=0$, se cumple trivialmente.
Si $a_1a_2a_3 \ne 0$, entonces dividiendo por $(a_1a_2a_3)^2$, tenemos :

$$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\frac{1}{a_3a_1}\right) \le \frac{1}{9}\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}\right)^2$$
$$\Leftrightarrow 3\left(\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\frac{1}{a_3a_1}\right) \le \left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}\right)^2$$
$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{a_1}\right)^2+\left(\frac{1}{a_2}\right)^2+\left(\frac{1}{a_3}\right)^2 \ge \frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_1a_3}+\frac{1}{a_2a_3}.$$

Ahora veamos para $j=n-1$, es decir probaremos que

$$P_{n-2}(a_1,a_2,...,a_n).P_n(a_1,a_2,...,a_n) \le P_{n-1}^2(a_1,a_2,...,a_n)$$
$$\Leftrightarrow \left[\frac{2}{n(n-1)}\sum_{1\le j<k\le n}(a_1...\widehat{a_j}...\widehat{a_k}...a_n)\right]a_1,a_2,...,a_n$$
$$\le \left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}(a_1a_2...\widehat{a_j}...a_n)\right)^2$$

donde los símbolos $\widehat{a_j}$ y $\widehat{a_k}$ se omiten.

Si $a_1a_2...a_n=0$, se verifica la desigualdad.

Si $a_1a_2...a_n \ne 0$, entonces dividiendo por $(a_1a_2...a_n)^2$ se tiene :

$$\frac{1}{\binom{n}{2}}\sum_{1\le j<k\le n}\frac{1}{a_ja_k} \le \left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{a_j}\right)^2$$

y esta desigualdad es equivalente a:

$$P_0\left(\frac{1}{a_1},\frac{1}{a_2},...,\frac{1}{a_n}\right).P_2\left(\frac{1}{a_1},\frac{1}{a_2},...,\frac{1}{a_n}\right) \le P_1^2\left(\frac{1}{a_1},\frac{1}{a_2},...\frac{1}{a_n}\right).$$

Teniendo en cuenta la nota anterior, la desigualdad es verdadera y con esto se completa la prueba.

TEOREMA: ***(Desigualdad de Mac Laurin)***
Si $a_1, a_2, ... ,a_n$ son números reales positivos, entonces

$$P_1 \ge (P_2)^{1/2} \ge ... \ge (P_k)^{1/k} \ge ... \ge (P_n)^{1/n}$$

La igualdad ocurre si y sólo si $a_1=a_2=...=a_n$.
PRUEBA : Como $a_1, a_2, ... , a_n >0$, entonces podemos aplicar la desigualdad de Newton para $1 \le k < n$, en efecto:

$$P_k^{k-1} \times P_{k+1}^{k}\prod_{j=0}^{k-1}P_j^{2j}$$
$$= P_0 \times P_1^2 \times P_2^4 \times P_3^6 ... P_{k-1}^{2(k-1)} \times P_k^{k-1} \times P_{k+1}^k$$
$$=(P_0 \times P_2)(P_1 \times P_3)^2(P_2 \times P_4)^3...(P_{k-1} \times P_{k+1})^{2k}$$
$$\le P_1^2 \times P_2^4 \times P_3^6 ... P_k^{2k} = \prod_{j=1}^{k}P_j^{2j}$$
$$\Rightarrow P_k^{k-1} \times P_{k+1}^{k}\prod_{j=0}^{k-1}P_j^{2j} \le \prod_{j=1}^{k-1}P_j^{2j} \times P_k^{2j} \times P_k^{k-1} \times P_{k+1}^{k} \le P_k^{2k}$$
$$\Leftrightarrow P_{k+1}^{k} \le P_k^{k+1}$$
$$\Leftrightarrow P_{k+1}^{1/k+1} \le P_k^{1/k}$$

La igualdad ocurre si y sólo si se cumple :

$$a_1 = a_2 = ... = a_n .$$

EJERCICIO :
Sean a, b, c, d números reales positivos, pruebe que

$$(ab+ac+ad+bc+bd+cd)^3 \ge \frac{27}{2}(abc+abd+acd+bcd)^2$$

RESOLUCIÓN :
Utilizando la desigualdad de Mac Laurin:

$$P_2^{1/2} \ge P_3^{1/2} \Leftrightarrow P_2^3 \ge P_3^2$$
$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{\binom{4}{2}}(ab+ac+ad+bc+bd+cd)\right)^3$$
$$\ge \left(\frac{1}{\binom{4}{3}}(abc+abd+acd+bcd)\right)^2$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{6^3}(ab+ac+ad+bc+bd+cd)^3 \ge \frac{1}{4^2}(abc+abd+acd+bcd)^2$$
$$\Leftrightarrow (ab+ac+ad+bc+bd+cd)^3 \ge \frac{27}{2}(abc+abd+acd+acd+bcd)^2$$

EJERCICIO :

Dados a, b, c, d números reales positivos, pruebe que

$$\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{ac}+\frac{1}{ad}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{bd}+\frac{1}{cd}\right)\le\frac{3}{8}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)^2$$

RESOLUCIÓN :

Multiplicando por $(abcd)^2$ tenemos la desigualdad equivalente:

$$(abcd)^2\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{ac}+\frac{1}{ad}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{bd}+\frac{1}{cd}\right)$$

$$\le\frac{3}{8}(abcd)^2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow abcd\left(\frac{cd+bd+bc+ad+ac+ab}{6}\right)$$

$$\le\left(\frac{bcd+acd+abd+abc}{4}\right)^2\Leftrightarrow P_4\times P_2\le(P_3)^2$$

esta desigualdad es verdadera, pues es la desigualdad de Newton.

POLINOMIOS SIMÉTRICOS Y CÍCLICOS

Para mayor comprensión consideremos un polinomio $P(x, y, z)$ de variables x, y, z; luego, para definir introducimos dos notaciones muy importantes como:

$$\sum_{cic} \text{ y } \sum_{sim}$$

DEFINICIÓN :

$$\sum_{cic}P(x,y,z)=P(x,y,z)+P(y,z,x)+P(z,x,y)$$

$$\sum_{sim}P(x,y,z)=P(x,y,z)+P(x,z,y)+P(y,z.x)+P(y,x,z)+P(z,x,y)+P(z,y,x)$$

EJEMPLO :

$$\sum_{cic}x^2y=x^2y+y^2z+z^2x$$

$$\sum_{sim}x^2y=x^2y+x^2z+y^2x+y^2z+z^2x+z^2y$$

$$\sum_{cic}x^3=x^3+y^3+z^3$$

$$\sum_{sim}x^3=2(x^3+y^3+z^3)$$

$$\sum_{cic}xyz=xyz+yzx+zxy=3xyz$$

$$\sum_{sim}xyz=xyz+xzy+yxz+yzx+zxy+zyx=6xyz$$

A continuación enunciaremos el teorema de Muirhead para tres variables para mayor entendimiento.

TEOREMA (TEOREMA DE MUIRHEAD)

Sean $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ números reales no negativos tales que

$$a_1\ge a_2\ge a_3;b_1\ge b_2\ge b_3;a_1\ge b_1;$$
$$a_1+a_2\ge b_1+b_2;a_1+a_2+a_3=b_1+b_2+b_3$$

Sean x, y, z números reales no negativos, entonces

$$\sum_{sim}x^{a_1}y^{a_2}z^{a_3}\ge\sum_{sim}x^{b_1}y^{b_2}z^{b_3}$$

EJERCICIO :

Pruebe para todo a, b, c números reales positivos la desigualdad :

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}\ge\frac{3}{2}$$

RESOLUCIÓN :

La desigualdad a demostrar es equivalente a :

$$2[a(a+c)(a+b)+b(b+c)(a+b)+c(b+c)(a+c)]$$
$$\ge 3(b+c)(a+c)(a+b)$$

efectuando :

$$2[a(a^2+(b+c)a+bc)+b(b^2+(a+c)b+ac)+c(c^2+(a+b)c+ab)]$$
$$\ge 3[(b+c)(a^2+(b+c)a+bc)]$$
$$\Leftrightarrow 2(a^3+b^3+c^3)+2(a^2(b+c)+b^2(a+c)+c^2(a+b))+6abc$$
$$\ge 3[a^2(b+c)+b^2(a+c)+c^2(a+b)+2abc]$$
$$\Leftrightarrow 2(a^3+b^3+c^3)\ge a^2(b+c)+b^2(a+c)+c^2(a+b)$$
$$\Leftrightarrow\sum_{sim}a^3\ge\sum_{sim}a^2b$$

Para enunciar en forma general el teorema de Muirhead, es necesaria la siguiente definición.

DEFINICIÓN:

Sean : $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,....,\alpha_n),\beta=(\beta_1,\beta_2,...\beta_n)$

elementos en R^n, de componentes no negativas; diremos que $\alpha>\beta$ si y sólo si :

I) $\alpha_1\ge\alpha_2\ge...\ge\alpha_n$ y $\beta_1\ge\beta_2\ge...\ge\beta_n$.

II) $\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_k\ge\beta_1+\beta_2+...+\beta_k; k=1,2,...,(n-1)$

III) $\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n=\beta_1+\beta_2+...+\beta_n$.

TEOREMA (GENERALIZADO DE MUIRHEAD)

Si $\alpha>\beta$ y $x_1, x_2,...,x_n$ números reales no negativos, entonces :

$$\sum_{sim}x_1^{\alpha_1}.x_2^{\alpha_2}...x_n^{\alpha_n}\ge\sum_{sim}x_1^{\beta_1}.x_2^{\beta_2}...x_n^{\beta_n}.$$

La igualdad ocurre si y sólo si $\alpha=\beta$ ó $x_1=x_2=...=x_n$.

EJERCICIO :

Sean x_1, x_2, x_3, x_4 números reales positivos, pruebe que

$$\frac{3}{2}(x_1^3+x_2^3+x_3^3+x_4^3) \geq x_1x_4\sqrt{x_2x_3} + x_2x_4\sqrt{x_1x_3}+x_3x_4\sqrt{x_1x_2} +x_2x_3\sqrt{x_1x_4}+x_1x_2\sqrt{x_3x_4}+x_1x_3\sqrt{x_2x_4}.$$

RESOLUCIÓN :

Como $\sum_{sim} x_1^3=\sum_{sim} x_1^3.(x_2^0x_3^0x_4^0)$, entonces tenemos 6 permutaciones para (x_2,x_3,x_4) y para $x_1x_2\sqrt{x_3x_4}$ tenemos 2 permutaciones para x_1x_2 y 2 permutaciones para $\sqrt{x_3x_4}$, en total 4; luego, la desigualdad se puede escribir equivalentemente como :

$$6(x_1^3+x_2^3+x_3^3+x_4^3) \geq 4\left[x_1x_4\sqrt{x_2x_3}+x_2x_4\sqrt{x_1x_3}+x_3x_4\sqrt{x_1x_2} +x_2x_3\sqrt{x_1x_4}+x_1x_2\sqrt{x_3x_4}+x_1x_3\sqrt{x_2x_4}\right]$$

$$\Leftrightarrow \sum_{sim} x_1^3 \geq \sum_{sim} x_1x_2\sqrt{x_3x_4},$$

como $\alpha=(3,0,0,0)$ y $\beta=(1,1,1/2,1/2)$ entonces esta última desigualdad es verdadera.

La igualdad ocurre si y sólo si $x_1=x_2=x_3=x_4$

EJERCICIOS DIVERSOS

EJERCICIO 1 :

Sean x, y, z números reales positivos. Demostrar que : $\frac{x^4}{y}+\frac{y^4}{z}+\frac{z^4}{x} \geq 3xyz$

RESOLUCIÓN :

Utilizando $\overline{MA} \rightarrow \overline{MG}$, a los números $\frac{x^4}{y}, \frac{y^4}{z}, \frac{z^4}{x}$.

En efecto :

$$\frac{x^4}{y}+\frac{y^4}{z}+\frac{z^4}{x} \geq \sqrt[3]{x^4y \times \frac{y^4}{z} \times \frac{c^4}{x}}$$

$$\Rightarrow \frac{x^4}{y}+\frac{y^4}{z}+\frac{z^4}{x} \geq 3xyz$$

La igualdad ocurre si y sólo si $x = y = z$

EJERCICIO 2 :

Sabiendo que m, n, p, q son números reales positivos con $mnpq = 1$, Demostrar que :

$$m^2+n^2+p^2+q^2+mn+mp+mq+np+nq+pd \geq 10$$

RESOLUCIÓN :

Utilizando $\overline{MA} \geq \overline{MG}$ se tiene:

$$\frac{m^2+n^2+p^2+q^2+mn+mp+mq+np+nq+pq}{10} \geq \sqrt[10]{(mnpq)^4}$$

$$m^2+n^2+p^2+q^2+mn+mp+mq+np+nq+pq \geq 10\times\sqrt[10]{1}$$

$$\Rightarrow m^2+n^2+p^2+q^2+mn+mp+mq+np+nq+pq \geq 10$$

La igualdad ocurre si y sólo si $m = n = p = q = 1$.

EJERCICIO 3 :

Sea x un número real no nulo, y un número real, Demostrar que : $x^2+y^2+\frac{1}{x^2}+\frac{y}{x} \geq \sqrt{3}$.

RESOLUCIÓN :

Agrupando convenientemente :

$$x^2+y^2+\frac{1}{x^2}+\frac{y}{x}=\left(y^2+\frac{1}{4x^2}+\frac{y}{x}\right)+\left(x^2+\frac{3}{4x^2}\right)$$

$$=\left(y+\frac{1}{2x}\right)^2+\left(x^2+\frac{3}{4x^2}\right)^2$$

y además

$$x^2+\frac{3}{4x^2} \geq 2\sqrt{x^2\times\frac{3}{4x^2}}=\frac{2\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow x^2+\frac{3}{4x^2} \geq \sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow \left(y+\frac{1}{2x}\right)^2+\left(x^2+\frac{3}{4x^2}\right) \geq \left(y+\frac{1}{2x}\right)^2+\sqrt{3} \geq \sqrt{3}.$$

$$\Rightarrow x^2+y^2+\frac{1}{x^2}+\frac{y}{x} \geq \sqrt{3}$$

La igualdad ocurre si y sólo si $y=-\frac{1}{2x}$

EJERCICIO 4 :

Sean p, q, r números reales, tales que no son nulos simultáneamente, halle el valor máximo de :

$$f(p,q,r) = \frac{|p+3q+9r|}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}.$$

RESOLUCIÓN :

Sean las termas (p, q, r) y $(1,3,9)$, entonces

$$(p\times 1 + q\times 3 + r\times 9)^2 \leq (p^2+q^2+r^2)(1^2+3^2+9^2)$$

$$\Leftrightarrow (p+3q+9r)^2 \leq 91(p^2+q^2+r^2)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(a+3b+9c)^2} \leq \sqrt{91}\sqrt{(p^2+q^2+r^2)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{|p+3q+9r|}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}} \leq \sqrt{91}$$

como $f(p,q,r) \geq 0$ entonces $0 \leq f(p,q,r) \leq \sqrt{91}$.

$\Rightarrow$ El máximo valor de f es $\sqrt{91}$, y esto ocurre si y sólo si $(p,q,r) = (1,3,9)$.

EJERCICIO 5 :

Sean a, b números reales, halle la variación de :

$$f(\theta)=a\,Sen\theta + b\,Cos\theta$$

RESOLUCIÓN :

Sean los pares (a, b), $(Sen\theta, Cos\theta)$. Utilizando Cauchy-Schwarz tenemos:

$$(aSen\theta + bCos\theta)^2 \le (a^2 + b^2)(Sen\theta^2 + Cos\theta^2)$$

$$\Leftrightarrow (aSen\theta + bCos\theta)^2 \le (a^2 + b^2)(1)$$

$$\Leftrightarrow (aSen\theta + bCos\theta)^2 \le a^2 + b^2$$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{a^2 + b^2} \le aSen\theta + bCos\theta \le \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\Rightarrow -\sqrt{a^2 + b^2} \le f(\theta) \le \sqrt{a^2 + b^2}$$

EJERCICIO 6 :

Sean m, n, p números reales tal que $m+2n+3p=14$, halle la variación de $m^2+n^2+p^2$.

RESOLUCIÓN :

Escogemos las ternas $(1,2,3)$ y (m, n, p) para utilizar la desigualdad de Cauchy-Schwarz.

En efecto

$$(1\times m+2\times n+3\times p)^2 \le (1^2+2^2+3^2)(m^2+n^2+p^2)$$

$$\Leftrightarrow 14^2 \le 14(m^2 + n^2 + p^2)$$

$$\Leftrightarrow 14 \le m^2 + n^2 + p^2$$

$$\Rightarrow m^2 + n^2 + p^2 \ge 14$$

La igualdad ocurre si y sólo si $(m,n,p) = (1,2,3)$.

EJERCICIO 7 :

Si $f(x, y, z) = x^3+y^3+z^3$, con x, y, z números reales positivos y $x+y+z = \sqrt[3]{3}$, entonces el mínimo valor de f es:

RESOLUCIÓN :

Como $x, y, z > 0$ y tenemos que buscar una relación entre $x+y+z \wedge x^3+y^3+z^3$, entonces aplicamos la Media Potencial, veamos:

$$\frac{x+y+z}{3} \le \left(\frac{x^3+y^3+z^3}{3}\right)^{1/3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x+y+z)^3}{27} \le \frac{x^3+y^3+z^3}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(\sqrt[3]{3})^3}{9} \le x^3+y^3+z^3 \Leftrightarrow \frac{1}{3} \le x^3+y^3+z^3$$

por lo tanto el mínimo de f es $\frac{1}{3}$ y ocurre si y sólo $x=y=z=\frac{\sqrt[3]{3}}{3}$

EJERCICIO 8 :

Sean p, q, r reales no negativos, demostrar que :

$$p^5+q^5+r^5 \ge 5(p+q+r)-12.$$

RESOLUCIÓN :

Como en la desigualdad aparecen suma y suma de quintas, entonces podemos aplicar la desigualdad de Bernoulli o la media potencial; veamos utilizando la desigualdad de Bernoulli:

$$(1+a)^5 \ge 1+5a;\ a \ge -1.$$

Haciendo $1+a = x \Rightarrow a = x-1$, entonces

$$m^5 \ge 1+5(m-1)$$

$$\Leftrightarrow m^5 \ge 5m-4;\ m \ge 0; \text{ similarmente}$$

$$n^5 \ge 5n-4$$

$$p^5 \ge 5p-4$$

sumando miembro a miembro y efectuando tenemos

$$m^5+n^5+p^5 \ge 5m+5n+5p-12.$$

$$\Rightarrow m^5+n^5+p^5 \ge 5(m+n+p)-12$$

La igualdad ocurre si y sólo si $x = y = z = 1$.

EJERCICIO 9 :

Demostrar que para todo a,b,c números reales positivos

$$\left(\frac{a+b}{a+b+c}\right)^{1/2}+\left(\frac{a+c}{a+b+c}\right)^{1/2}+\left(\frac{b+c}{a+b+c}\right)^{1/2} \le 6^{1/2}$$

RESOLUCIÓN :

Tomamos las ternas

$$\left(\left(\frac{a+b}{a+b+c}\right)^{1/2},\left(\frac{a+c}{a+b+c}\right)^{1/2},\left(\frac{b+c}{a+b+c}\right)^{1/2}\right);(1;1;1)$$

aplicando Cauchy-Schwarz:

$$\left(\left(\frac{a+b}{a+b+c}\right)^{1/2}\times 1+\left(\frac{a+c}{a+b+c}\right)^{1/2}\times 1+\left(\frac{b+c}{a+b+c}\right)^{1/2}\times 1\right)^2$$

$$\le\left(\frac{a+b}{a+b+c}+\frac{a+c}{a+b+c}+\frac{b+c}{a+b+c}\right)\times(1^2+1^2+1^2)$$

$$=\left(\frac{2(a+b+c)}{a+b+c}\right)\times(3)=(6)$$

$$\Rightarrow\left(\frac{a+b}{a+b+c}\right)^{1/2}+\left(\frac{a+c}{a+b+c}\right)^{1/2}+\left(\frac{b+c}{a+b+c}\right)^{1/2} \le 6^{1/2}$$

La igualdad ocurre si y sólo si $a= b= c$

EJERCICIO 10 :

Demostrar que :

$$m+n+p \le 2\left(\frac{m^2}{n+p}+\frac{n^2}{m+p}+\frac{p^2}{m+n}\right)$$

para todo m, n, p números reales positivos.

RESOLUCIÓN :

Como :

$$(m+n+p)^2=\left(\frac{m}{\sqrt{n+p}}\times\sqrt{n+p}+\frac{n}{\sqrt{m+p}}\times\sqrt{m+p}+\frac{p}{\sqrt{m+n}}\times\sqrt{m+n}\right)^2$$

$$\le\left(\frac{m^2}{n+p}+\frac{n^2}{m+p}+\frac{p^2}{m+n}\right)(n+p+m+p+m+n)$$

$$(m+n+p)^2 \le 2(m+n+p)\left(\frac{m^2}{n+p}+\frac{n^2}{m+p}+\frac{p^2}{m+n}\right)$$

cancelando $m+n+p > 0$

$$m+n+p \le 2\left(\frac{m^2}{n+p}+\frac{n^2}{m+p}+\frac{p^2}{m+n}\right)$$

La igualdad ocúrre si y sólo si $m = n = p$

EJERCICIO 11 :

Sean $x, y, z \ge 1$ tales que $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=2$

Demostrar que :

$$\sqrt{x+y+z} \ge \sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-1}$$

RESOLUCIÓN :

Para aplicar Cauchy-Schwarz, tomamos las ternas

$$\left(\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x}},\frac{\sqrt{y-1}}{\sqrt{y}},\frac{\sqrt{z-1}}{\sqrt{z}}\right) \text{ y } \left(\sqrt{x},\sqrt{y},\sqrt{x}\right)$$

en efecto tenemos que :

$$\left(\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x}}\times\sqrt{x}+\frac{\sqrt{y-1}}{\sqrt{y}}\times\sqrt{y}+\frac{\sqrt{z-1}}{\sqrt{z}}\times\sqrt{z}\right)^2$$

$$\le\left(\frac{x-1}{x}+\frac{y-1}{y}+\frac{z-1}{z}\right)\times(x+y+z)$$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-1}\right)^2 \le \left(1-\frac{1}{x}+1-\frac{1}{y}+1-\frac{1}{z}\right)(x+y+z)$$

$$=\left(3-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\right)(x+y+z)$$

$$=(3-2)(x+y+z)=(x+y+z)$$

Entonces $\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-1}\right)^2 \le x+y+z.$

$$\Rightarrow\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-1}\right)^2 \le \sqrt{x+y+z}.$$

La igualdad ocurre si y sólo si $x=y=z=\frac{3}{2}$.

EJERCICIO 12 :

Sean $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$, Demostrar que :

$$\frac{a_1^2}{a_2}+\frac{a_2^2}{a_3}+\dots+\frac{a_{n-1}^2}{a_n}+\frac{a_n^2}{a_1} \ge a_1+a_2+\dots+a_n$$

RESOLUCIÓN :

Aplicando el Lema de Titu.

$$\frac{a_1^2}{a_2}+\frac{a_2^2}{a_3}+\dots+\frac{a_{n-1}^2}{a_n}+\frac{a_n^2}{a_1} \ge \frac{(a_1+a_2+\dots+a_{n-1}+a_n)^2}{a_2+a_3+\dots+a_n+a_1}$$

$$=a_1+a_2+\dots+a_n$$

La igualdad ocurre si y sólo si $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

EJERCICIO 13 :

(Desigualdad de Nesbit) .Demostrar que :

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b} \ge \frac{3}{2}$$

para todo a, b, c números reales positivos.

RESOLUCIÓN :

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}=\frac{a^2}{ab+ac}+\frac{b^2}{ba+bc}+\frac{c^2}{ca+cb}$$

$$\ge \frac{(a+b+c)^2}{(ab+ac)+(ba+bc)+(ca+cb)}$$

$$=\frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ac)},$$

basta demostrar que $\frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ac)} \ge \frac{3}{2}$.

Como :

$$a^2+b^2+c^2 \ge ab+ac+bc$$

$$\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2+2(ab+ac+bc) \ge 3(ab+ac+bc)$$

$$\Leftrightarrow \frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca)} \ge \frac{3}{2}.$$

La igualdad ocurre si y sólo si $a = b = c$.

EJERCICIO 14 :

Demostrar que : $\frac{x^\alpha}{y+z}+\frac{y^\alpha}{z+x}+\frac{z^\alpha}{x+y} \ge \frac{3}{2}$

Para todo α,β,x,y, números reales positivos tales que $xyz=1$ y $\alpha \ge 1$

RESOLUCIÓN :

Por la simetría , podemos asumir el orden $x \ge y \ge z$, entonces :

$$z+x \ge y+z \Leftrightarrow \frac{1}{z+x} \le \frac{1}{y+z}$$

$$x+y \ge x+z \Leftrightarrow \frac{1}{x+y} \le \frac{1}{x+z}$$

De donde $\frac{1}{x+y} \le \frac{1}{x+z} \le \frac{1}{y+z}$.

Luego $\frac{z}{x+y} \le \frac{y}{x+z} \le \frac{x}{y+z}$ y además

$$x^{\alpha-1} \ge y^{\alpha-1} \ge z^{\alpha-1}$$

Utilizando Chebyshev :

$$\frac{x^\alpha}{y+z}+\frac{y^\alpha}{z+x}+\frac{z^\alpha}{x+y} \ge \frac{1}{3}(x^{\alpha-1}+y^{\alpha-1}+z^{\alpha-1})\left(\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}\right)$$

Pero sabemos que :

$$\frac{x^{\alpha-1}+y^{\alpha-1}+z^{\alpha-1}}{3} \ge \sqrt[3]{(xyz)^{\alpha-1}}=1$$

$$\Rightarrow \frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y} \ge \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{x^\alpha}{y+z}+\frac{y^\alpha}{z+x}+\frac{z^\alpha}{x+y} \ge \frac{3}{2}$$

EJERCICIO 15 :

Demostrar que :

$$\frac{m^3}{n+p+q}+\frac{n^3}{m+p+q}+\frac{p^3}{m+n+q}+\frac{q^3}{m+n+p} \ge \frac{1}{3}$$

para todo m, n, p, q reales positivos con

$mn+np+nq+qm=1$,

RESOLUCIÓN :

Por la simetría del primer miembro de la desigualdad, supongamos sin pérdida de generalidad que $m \geq n \geq p \geq q$, y haciendo :

$$a=n+p+q$$
$$b=m+p+q$$
$$c=m+n+q$$
$$d=m+n+p$$
$$\Rightarrow a \leq b \leq c \leq d \wedge \frac{1}{a} \geq \frac{1}{b} \geq \frac{1}{c} \geq \frac{1}{d}$$

Luego, aplicando Chebyshev, tenemos :

$$\frac{m^3}{a}+\frac{n^3}{b}+\frac{p^3}{c}+\frac{q^3}{d}$$
$$\geq \frac{1}{4}(m^3+n^3+p^3+q^3)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)$$
$$\geq \frac{1}{16}(m^2+n^2+p^2+q^2)(m+n+p+q)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)$$

como $a+b+c+d=3(m+n+p+q)$, entonces

$$\frac{m^3}{a}+\frac{n^3}{b}+\frac{p^3}{c}+\frac{q^3}{d}$$
$$\geq \frac{1}{16}(m^2+n^2+p^2+q^2)\left(\frac{a+b+c+d}{3}\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)$$
$$=\frac{1}{16}(m^2+n^2+p^2+q^2)\frac{1}{3}\left[(a+b+c+d)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)\right]$$
$$\geq \frac{1}{16}(m^2+n^2+p^2+q^2)\frac{1}{3}(16)$$
$$=\frac{1}{3}(m^2+n^2+p^2+q^2)$$

Nos falta acotar $m^2+n^2+p^2+q^2$ y como tenemos la relación $mn+np+pq+qm=1$, entonces tomamos las cuarternas (m,n,p,q) y (n,p,q,m) para aplicar Cauchy-Schwarz; en efecto :

$$(m^2+n^2+p^2+q^2)(n^2+p^2+q^2+m^2) \geq (mn+np+pq+qm)^2$$
$$\Leftrightarrow (m^2+n^2+p^2+q^2)^2 \geq (1)^2$$
$$\Leftrightarrow m^2+n^2+p^2+q^2 \geq 1$$
$$\Rightarrow \frac{m^3}{a}+\frac{n^3}{b}+\frac{p^2}{c}+\frac{q^3}{d} \geq \frac{1}{3}$$

EJERCICIO 16 :

Demostrar que para todo a, b, c números reales positivos

$$\frac{m^3}{m^2+mn+n^2}+\frac{n^3}{n^2+np+p^2}+\frac{p^3}{p^2+pm+m^2} \geq \frac{m+n+p}{3}$$

RESOLUCIÓN :

El lado izquierdo de la desigualdad se puede escribir como.

$$\frac{m^4}{m^3+m^2n+mn^2}+\frac{n^4}{n^3+n^2p+np^2}+\frac{p^4}{p^3+p^2m+pm^2},$$

luego, aplicando el Lema de Titu, tenemos:

$$\frac{m^4}{m^3+m^2n+mn^2}+\frac{n^4}{n^3+n^2p+np^2}+\frac{p^4}{p^3+p^2m+pm^2}$$
$$\geq \frac{(m^2+n^2+p^2)^2}{m^3+n^3+p^3+mn(m+n)+np(n+p)+pm(p+m)}$$
$$=\frac{(m^2+n^2+p^2)^2}{(m+n+p)(m^2+n^2+p^2)}=\frac{m^2+n^2+p^2}{m+n+p}$$

entonces:

$$\frac{m^3}{m^2+mn+n^2}+\frac{n^3}{n^2+np+p^2}+\frac{p^3}{p^2+pm+m^2} \geq \frac{m^2+n^2+p^2}{m+n+p}$$

Pero:

$$m^2+n^2+p^2 \geq mn+mp+np$$
$$\Leftrightarrow 2(m^2+n^2+p^2) \geq 2(mn+mp+np)$$
$$\Leftrightarrow 3(m^2+n^2+p^2) \geq m^2+n^2+p^2+2(mn+mp+np)$$
$$\Leftrightarrow 3(m^2+n^2+p^2) \geq (m+n+p)^2$$
$$\Leftrightarrow \frac{m^2+n^2+p^2}{m+n+p} \geq \frac{m+n+p}{3}$$

De donde:

$$\frac{m^3}{m^2+mn+n^2}+\frac{n^3}{n^2+np+p^2}+\frac{p^3}{p^2+pm+m^2} \geq \frac{m+n+n}{3}$$

La igualdad ocurre si y sólo si $m=n=p$.

EJERCICIO 17 :

Demostrar que dados $x_1, x_2, \ldots, x_n, t_1, t_2, \ldots, t_n$. números reales positivos con $\sum_{i=1}^{n} t_i = 1$,

Entonces :

$$x_1^{t_1}.x_2^{t_2}\ldots x_n^{t_n} \leq t_1x_1+t_2x_2+\ldots+t_nx_n$$

RESOLUCIÓN :

Sabemos que $f(x)=e^x, x \in R$, es convexa y además :

$$x_i^{t_i}=e^{Lnx_i^{t_i}}=e^{t_iLnx_i},$$

Entonces :

$$x_1^{t_1} \times x_2^{t_2} \ldots x_n^{t_n} \leq e^{t_1Lnx_1}+e^{t_2Lnx_2}+\ldots+e^{t_nLnx_n}$$
$$=e^{t_1Lnx_1+t_2Lnx_2+\ldots+t_nLnx_n}$$

aplicando la Desigualdad de Jensen :

$$e^{t_1Lnx_1+t_2Lnx_2+\ldots+t_nLnx_n} \leq t_1e^{Lnx_1}.t_2e^{Lnx_2}\ldots t_ne^{Lnx_n}$$
$$=t_1x_1+t_2x_2+\ldots+t_nx_n$$

EJERCICIO 18 :

Utilizando la desigualdad de Jensen, demostrar que

$$\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n},$$

siendo $x_1, x_2, \ldots, x_n$ números reales positivos.

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1:

Demostrar el siguiente teorema:

"Para cualesquiera dos elementos $a, b \in R$, una y solamente una de las siguientes relaciones se cumple: $a < b \vee a = b \vee a > b$"

RESOLUCIÓN:

* Como: $a;b \in R \Rightarrow (a-b) \in R$....(Ley de Clausura)
* Luego por la ley de tricotomía

$$\underline{a-b>0} \vee \underline{a-b=0} \vee \underline{a-b<0}$$

$$\Leftrightarrow a>b \;\vee\; a=b \;\vee\; a<b$$

PROBLEMA 2:

$\forall a; b; c; d \in R$, demostrar que:

$$a<b \Leftrightarrow a+c<b+c$$

RESOLUCIÓN:

* Primero $(a<b \Rightarrow a+c<b+c)$, así:

$$\Rightarrow (a-b)+(0)<0$$
$$\Rightarrow (a-b)+(c-c)<0$$
$$\Rightarrow (a+c)-(b+c)<0$$
$$\Rightarrow (a+c)<(b+c)$$

* Luego: $(a+c<b+c \Rightarrow a<b)$, así:

$$(a+c)<(b+c) \Rightarrow (a+c)-(b+c)<0$$
$$\Rightarrow a+c-b-c<0 \Rightarrow a-b<0$$
$$\Rightarrow a<b$$

PROBLEMA 3:

$\forall a; b; c \in R$, demostrar que :

Si: $a>b \wedge b>c \Rightarrow a>c$

RESOLUCIÓN:

* De: $a>b \Leftrightarrow a-b>0$..............*(por definición)*

$b>c \Leftrightarrow b-c>0$...............*(por definición)*

Como $(a-b)>0 \wedge (b-c)>0$

$\Rightarrow$ Por definición : $(a-b)+(b-c)>0$

$\Rightarrow a-c>0 \Rightarrow a>c$

PROBLEMA 4:

$\forall a; b; c \in R$, demostrar que :

Si: $a>b \wedge c<0 \Rightarrow ac>bc$

RESOLUCIÓN:

* De: $a>b \Rightarrow (a-b)>0$ y como $c>0$

$\Rightarrow (a-b)(c)>0$...........(definición)

$\Rightarrow ac-bc>0$..............(distribución)

$\Rightarrow ac>bc$

PROBLEMA 5:

Probar que a^{-1} tiene el mismo signo que a.

RESOLUCIÓN:

* Como $1 = 1\times 1 = 1^2 > 0$, y, $a.a^{-1}=1>0$
* Entonces a y a^{-1} tienen el mismo signo.

PROBLEMA 6:

Demostrar :

Si a y b tiene el mismo signo y $a<b \Rightarrow a^{-1}>b^{-1}$.

RESOLUCIÓN:

* Sabemos que si : $ab>0 \Rightarrow (ab)^{-1}>0$

$$\Rightarrow a^{-1}b^{-1}>0$$

* y como $a<b$

$$\Rightarrow (a^{-1}b^{-1})a<(a^{-1}b^{-1})b$$
$$\Rightarrow (a^{-1}a)b^{-1}<a^{-1}(b^{-1}b)$$
$$\Rightarrow 1b^{-1}<a^{-1}.1 \Rightarrow b^{-1}<a^{-1}$$

PROBLEMA 7:

Resolver : $5x-1=2x+8$

RESOLUCIÓN:

* Restamos $2x$ a ambos miembros :

$$5x-1-2x=2x+8-(2x) \Rightarrow 3x-1=8$$

* Sumando 1 a cada miembro :

$$3x-1+1=8+1 \Rightarrow 3x=9$$

* Dividiendo ambos miembros entre el número 3

$$\Rightarrow \frac{3x}{3}=\frac{9}{3} \Rightarrow x=3$$

PROBLEMA 8:

Si «a» $\in R$, demostrar que si: $a \neq 0 \Rightarrow a^2 \neq 0$

RESOLUCIÓN:

* Apliquemos $((p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow p))$ o reducción al absurdo.

$$a \in R, a \neq 0 \Rightarrow a^2 \neq 0$$

* Suponiendo que:

$a^2=0$

$\Rightarrow a^2=a\times 0$

$\Rightarrow a\times a=a\times 0$

$\Rightarrow a=0$..............(cancelación)

* De donde se llegó a un absurdo, con lo cual queda demostrado que si : $a \in R \wedge a \neq 0 \Rightarrow a^2=0$

PROBLEMA 9:

Si: $a>0$, $b>0$ y $a \neq b$

Demostrar que: $a^3 + b^3 > a^2b + ab^2$

RESOLUCIÓN:

* De : $a \neq b \Rightarrow a - b \neq 0$
* Entonces: $(a-b)^2 > 0$
* Desarrollando, se obtiene :

$a^2 - 2ab + b^2 > 0$ ó $a^2 - ab + b^2 > ab$ ....(I)

* Además : $a + b > 0$ .... (del dato)
* Multiplicando los dos miembros de (I) por $(a+b)$, se tendría:

$$(a^2 - ab + b^2)(a+b) > ab(a+b)$$
$$\Rightarrow a^3 + b^3 > a^2b + ab^2$$

PROBLEMA 10:

Si: a y b son diferentes y positivos, demostrar que:

$$\frac{a+b}{2} > \frac{2ab}{a+b}$$

RESOLUCIÓN:

* Dado que: $a \neq b$; se cumple que: $(a-b)^2 > 0$
* Desarrollando : $a^2 - 2ab + b^2 > 0$
* Sumando a ambos miembros $4ab$:

$$a^2 - 2ab + b^2 + 4ab > 0 + 4ab$$
$$\Rightarrow (a+b)^2 > 4ab$$

* Dividiendo ambos miembros por $2(a+b) > 0$:

$$\frac{(a+b)^2}{2(a+b)} > \frac{4ab}{2(a+b)} \Rightarrow \frac{a+b}{2} > \frac{2ab}{a+b}$$

PROBLEMA 11:

Si $a, b, c \in R^+$, demostrar que:

$$(a+b)(a+c)(b+c) \geq 8abc$$

RESOLUCIÓN:

* Partamos de:

$(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geq 0$; $(\sqrt{a}-\sqrt{c})^2 \geq 0$ y $(\sqrt{b}-\sqrt{c})^2 \geq 0$

* Se obtendra:

$$a+b \geq 2\sqrt{ab}$$
$$a+c \geq 2\sqrt{ac}$$
$$b+c \geq 2\sqrt{bc}$$

"Multiplicando miembro a miembro"

$$(a+b)(a+c)(b+c) \geq 8\sqrt{a^2b^2c^2}$$
$$\Rightarrow (a+b)(a+c)(b+c) \geq 8abc$$

PROBLEMA 12:

En R conjunto de los números reales, definimos la operación $a \# b = a + b - 3$. Determine la validez de las siguientes proposiciones:

I) # es conmutativa.

II) # tiene un elemento neutro.

III) En esta operación el inverso de 4 es -4.

A)VVV B)VFV C)FFV D)VVF E)FFF

RESOLUCIÓN:

I) VERDADERA : dado que:

$$a \# b = a + b - 3$$
$$b \# a = b + a - 3$$

* Entonces : $a \# b = b \# a$...... (es conmutativa)

II) VERDADERA : ya que siendo "e" el elemento neutro de la operación, se tendrá que:

$$\underline{a\#e = a} = e\#a$$
$$a + e - 3 = a \Rightarrow e = 3$$

NOTA:

"Para que la operación tenga elemento neutro, la operación debe ser conmutativa".

III) FALSO : ya que siendo a^{-1} el inverso de "a" se tendrá que :

$$a\#a^{-1} = e = a^{-1}\#a$$

(neutro)

$$\Rightarrow a + a^{-1} - 3 = 3$$
$$\Rightarrow a^{-1} = 6 - a$$

* Luego para $a = 4$:

$$4^{-1} = 6 - 4 = 2$$

* Entonces el inverso de 4 es 2 ....$(4^{-1} = 2)$

RPTA: "D"

PROBLEMA 13:

Dado los intervalos: $A =]-4; 3]$ y $B = [-3; 5[$, obtener :

I) $A \cup B$ II) $A \cap B$ III) $A - B$ IV) $B - A$

RESOLUCIÓN:

* Graficamos los intervalos en la recta numérica :



I) $A \cup B$ es el conjunto formado por la *UNIÓN*, cuyos elementos pertenecen a A o a B, o a ambos.

* Del gráfico:

$$\boxed{A \cup B =]-4; 5[}$$

II) $A \cap B$ es el conjunto formado por la *INTERSECCIÓN* cuyos elementos pertenecen a ambos conjuntos. Así:

$$\boxed{A \cap B = [-3; 3]}$$

III) $A - B$ es el conjunto formado por elementos que pertenecen a A pero no pertenecen a B.

* En la figura: $A - B =]-4;-3[$

IV) $B - A$ es el conjunto formado por elementos que pertenecen a B pero no pertenecen a A.

* Luego: $B - A =]3;5[$

PROBLEMA 14 :

Partiendo de la desigualdad $a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$ donde a y b son reales no negativos, podemos demostrar que:

A) $a - b \geq 0$ B) $a + b \geq ab$

C) $a + b \leq 2\sqrt{ab}$ D) $\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$

RESOLUCIÓN:

* De: $a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$
* Sumamos $4ab$ a cada miembro

$$a^2 + 2ab + b^2 \geq 4ab$$

$$\Rightarrow (a+b)^2 \geq 4ab$$

* Pero como $ab \geq 0$ condición del problema:

$$\Rightarrow a + b \geq 2\sqrt{ab}$$

* Finalmente: $\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$

RPTA: "D"

PROBLEMA 15:

Indicar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

p : Si $a, b, c \in R$, entonces:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc$$

q : Si $a, b \in R^+$ y $a \neq b$, entonces $a + b > 2\sqrt{ab}$

r : Si $b > a > 0$, entonces $a < \sqrt{ab}$

A) FVF B) VFF C) FFF D) VVV

RESOLUCIÓN:

p) VERDADERA: ya que:

* De la relación: $(a - b)^2 \geq 0$

* *Se obtiene:* $a^2 + b^2 \geq 2ab$
* *Análogamente:* $a^2 + c^2 \geq 2ac$ (+)

$$b^2 + c^2 \geq 2bc$$

* Sumando: $2(a^2 + b^2 + c^2) \geq 2(ab + ac + bc)$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc$$

q) VERDADERA: ya que:

Si $a, b \in R^+ \wedge a \neq b$, entonces:

$\sqrt{a}, \sqrt{b} \in R^+ \wedge \sqrt{a} - \sqrt{b} \neq 0$

$\Rightarrow (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 > 0 \Rightarrow a - 2\sqrt{ab} + b > 0$

$\Rightarrow a + b > 2\sqrt{ab}$

r) VERDADERA: dado que:

Si $b > a > 0 \rightarrow b > a \wedge a > 0$

$$\Rightarrow ab > a^2 > 0 \Rightarrow \sqrt{ab} > a > 0$$

$$\Rightarrow a < \sqrt{ab}$$

RPTA: "D"

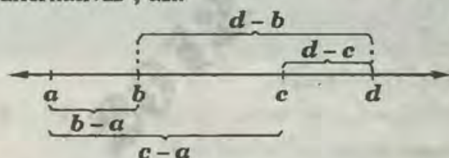
PROBLEMA 16:

Si a, b, c y d son números reales tales que $a<b<c<d$, entonces necesariamente:

A) $d - b > c - a$ B) $d - b < c - a$ C) $d - c > b - a$
D) $d - b > d - c$ E) $d - b > b - a$

RESOLUCIÓN:

* Empecemos colocando los números a, b, c y d en la recta numérica, teniendo en cuenta $a<b<c<d$ y, luego indiquemos las diferencias que aparecen en las alternativas ; así:



* De ello podemos ver que necesariamente $c-a<b-a$ además ; $d - b > d - c$

RPTA: "D"

PROBLEMA 17:

Sea $-1 < b < a < 0$, donde a y b son números reales. De las siguientes proposiciones:

I) $a^2 > b^2$ II) $a^2 > b^3$ III) $a^3 < b^3$

son ciertas:

A) I y II B) II y III C) I y III
D) I, II y III E) Sólo II

RESOLUCIÓN:

* Como a y b son números negativos y $a>b$, se tiene que:

I) FALSA:

Los números negativos al ser elevados al cuadrado se vuelven positivos y cambian el sentido de la relación.

II) VERDADERA:

Un número negativo elevado al cuadrado es positivo, mientras que elevado al cubo es negativo.

III) FALSA:

Ambos términos son negativos; pero para que a^3 sea menor que b^3, "a" debe ser menor que "b".

RPTA: "E"

PROBLEMA 18:

Si $a, b, c \in R^+$ y $M = \dfrac{a}{b+c} + \dfrac{b}{a+c} + \dfrac{c}{a+b}$, entonces el

menor valor de M, es:

A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{3}{4}$ D) $\frac{3}{2}$ E) $\frac{5}{2}$

RESOLUCIÓN:

* Si $x, y, z \in R^+$, entonces por $MA \geq MG$, se obtendrá:

$$\frac{\frac{x}{y}+\frac{y}{x}}{2} \geq \sqrt{\left(\frac{x}{y}\right)\left(\frac{y}{x}\right)} \Rightarrow \frac{y}{x}+\frac{y}{x} \geq 2$$

* Análogamente: $\frac{y}{z}+\frac{z}{y} \geq 2$; $\frac{z}{x}+\frac{x}{z} \geq 2$

* Sumando las 3 desigualdades:

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+\frac{y}{z}+\frac{z}{y}+\frac{z}{x}+\frac{x}{z} \geq 6$$

$$\Rightarrow \frac{x+y}{z}+\frac{y+z}{x}+\frac{z+x}{y} \geq 6$$

* Haciendo: $x=b+c$, $y=c+a$, $z=a+b$

$$\frac{a+b+2c}{a+b}+\frac{b+c+2a}{b+c}+\frac{c+a+2b}{c+a} \geq 6$$

$$\Rightarrow 1+\frac{2c}{a+b}+1+\frac{2a}{b+c}+1+\frac{2b}{c+a} \geq 6$$

* De donde: $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$

* Luego: $M \geq \frac{3}{2} \Rightarrow M_{mín}=\frac{3}{2}$

RPTA: "D"

PROBLEMA 19:

Si $\forall a, b, c \in R^+$; $\frac{bc}{a^2}+\frac{ac}{b^2}+\frac{ab}{c^2} \geq n$,entonces máximo valor que puede admitir n es:

A) 8 B) 6 C) 5 D) 4 E) 3

RESOLUCIÓN:

* Sea $x, y, z \in R^+$, luego de $MA \geq MG$, se tendrá que:

$$\frac{x^3+y^3+z^3}{3} \geq \sqrt[3]{x^3y^3z^3}$$

$$\Rightarrow x^3+y^3+z^3 \geq 3xyz \Rightarrow \frac{x^3+y^3+z^3}{xyz} \geq 3$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{yz}+\frac{y^2}{xz}+\frac{z^2}{xy} \geq 3$$

* $\forall a, b, c \in R^+$; consideremos:

$$x=ab \in R^+ ; y=bc \in R^+ ; z=ca \in R^+$$

* Reemplazando:

$$\frac{(ab)^2}{(bc)(ca)}+\frac{(bc)^2}{(ab)(ca)}+\frac{(ca)^2}{(ab)(bc)} \geq 3$$

$$\Rightarrow \frac{ab}{c^2}+\frac{bc}{a^2}+\frac{ca}{b^2} \geq 3$$

* Como : $\frac{bc}{a^2}+\frac{ac}{b^2}+\frac{ab}{b^2} \geq n$

* Entonces : $n \leq 3 \Rightarrow n_{máx}=3$

RPTA: "E"

PROBLEMA 20:

Se tiene un paralelepípedo de aristas : a, b, c cuya suma es $4\sqrt[3]{8}$; calcular el mayor valor que puede admitir el volumen.

A) 27 B) 71 C) $\frac{512}{3}$ D) $\frac{512}{27}$ E) 1

RESOLUCIÓN:

* De: $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$ y volumen $= abc$

* Como $a+b+c=8 \Rightarrow \frac{8}{3} \geq \sqrt[3]{abc} \Rightarrow \left(\frac{8}{3}\right)^3 \geq abc$

$$\Rightarrow \left(\frac{8}{3}\right)^3 \geq volumen > 0 \rightarrow V_{máx}=\left(\frac{8}{3}\right)^3=\frac{512}{27}$$

RPTA: "D"

PROBLEMA 21:

Demostrar que: $\forall a, b \in R^+$, se cumple:

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^3 \leq \frac{a^3+b^3}{2}$$

RESOLUCIÓN:

* De: $(a-b)^2 \geq 0$

$$\Rightarrow a^2-ab+b^2 \geq ab$$

$$\Rightarrow \frac{a^3+b^3}{a+b} \geq ab ; (a+b>0)$$

$$\Rightarrow a^3+b^3 \geq ab(a+b)$$

* Multiplicando por (3) :

$$3(a^3+b^3) \geq 3(a+b)ab$$

$$\Rightarrow 4(a^3+b^3) \geq (a^3+b^3)+3ab(a+b)$$

$$\Rightarrow 4(a^3+b^3) \geq (a+b)^3 \Rightarrow \frac{a^3+b^3}{2} \geq \frac{(a+b)^3}{8}$$

$$\Rightarrow \frac{a^3+b^3}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^3 \Rightarrow \left(\frac{a+b}{2}\right)^3 \leq \frac{a^3+b^3}{2}$$

PROBLEMA 22:

Enuncie el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I) Si $\{a, b, c, d\} \subset R^+ \Rightarrow \frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{d}+\frac{d}{a} \geq 4$

II) Si $\{x, y\} \subset R^+ \Rightarrow (3x+2y)\left(\frac{1}{3x}+\frac{1}{2y}\right) \geq 4$

III) Si a,b,c son los lados de un triángulo $a^2 - b^2 - c^2 - 2bc$ es positivo

A)VVF B)VFF C)FFF D) FVV E)VVF

RESOLUCIÓN:

I) **VERDADERA** : ya que $(MA \geq MG)$

$$\frac{\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{d}+\frac{d}{a}}{4} \geq \sqrt[4]{\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{b}{c}\right)\left(\frac{c}{d}\right)\left(\frac{d}{a}\right)}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{d}+\frac{d}{a} \geq 4$$

II) **VERDADERA:** ya que:

$$M+\frac{1}{M} \geq 2 \quad \forall M \in R^+$$

$$\Rightarrow (3x+2y)\left(\frac{1}{3x}+\frac{1}{2y}\right) = 1+\underbrace{\frac{3x}{2y}+\frac{2x}{3y}}_{\geq 2}+1 \geq 4$$

III) **FALSA:** porque según la condición de existencia del triángulo:

$$b - c < a < b + c$$

* Se pide: $a^2 - (b+c)^2$ como $b + c > a > 0$
$\Rightarrow a^2 - (b+c)^2$ es negativo

RPTA: "E"

PROBLEMA 23:

Sean: $\{a, b, c, d\} \subset R^+$, tal que:

$$a^2+b^2=1 \wedge c^2+d^2=1$$

encuentre el máximo valor de: $ab + cd$

A)0 B)1 C)3 D)5 E)7

RESOLUCIÓN:

* Recordando : $\forall a, b \in R^+ : a^2+b^2 \geq 2ab$
* Luego : $c^2+d^2 \geq 2cd$
* Sumando: $a^2+b^2+c^2+d^2 \geq 2(ab+cd)$
* De los datos $2 \geq 2(ab+cd) \Rightarrow ab+cd \leq 1$
* Luego: máx $\{ab + cd\} = 1$

RPTA: "B"

PROBLEMA 24:

Sean $a, b, x, y, z,$ números positivos distintos. Tales que $a^2+b^2+c^2=1 \wedge x^2+y^2+z^2=1$

Determinar el máximo valor entero de:

$$M = ax + by + cz$$

A)1 B)2 C)-1 D)0 E)4

RESOLUCIÓN:

* De la relación : $(a-x)^2 > 0$
* Se obtiene : $a^2 + x^2 > 2ax$
* Análogamente :

$$b^2+y^2 > 2by \quad c^2+z^2 > 2cz$$

* Sumando miembro a miembro :

$$\underbrace{a^2+b^2+c^2}_{(1)}+\underbrace{x^2+y^2+z^2}_{(1)} > 2(ax+by+cz)$$

$$\Rightarrow 2 > 2(ax+by+cz)$$

$$\Rightarrow M < 1 \Rightarrow M_{máx} = 0$$

RPTA: "D"

PROBLEMA 25:

Si la desigualdad $\frac{a^2+a+1}{a^2+1} \leq \frac{k}{2}$, se cumple $\forall a \in R$, entonces el mínimo valor que puede admitir k es:

A)5 B)4 C)3 D)2 E)1

RESOLUCIÓN:

* Si $a > 0$ entonces: $a+\frac{1}{a} \geq 2$

$$\Rightarrow \frac{a^2+1}{a} \geq 2 \Rightarrow 0 < \frac{a}{a^2+1} \leq \frac{1}{2}$$

* Si $a < 0$, entonces: $a+\frac{1}{a} \leq -2$

$$\Rightarrow \frac{a^2+1}{a} \leq -2 \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq \frac{a}{a^2+1} < 0$$

* Si $a=0 \Rightarrow \frac{a}{a^2+1}=0$
* De todo lo anterior, para $a \in R$, se tendrá que:

$$-\frac{1}{2} \leq \frac{a}{a^2+1} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow 1-\frac{1}{2} \leq 1+\frac{a}{a^2+1} \leq 1+\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{a^2+a+1}{a^2+1} \leq \frac{3}{2} \quad \forall a \in R$$

* Como:

$$\frac{a^2+a+1}{a^2+1} \leq \frac{k}{2} \rightarrow \frac{k}{2} \geq \frac{3}{2} \Rightarrow k \geq 3 \Rightarrow k_{min} = 3$$

RPTA: "C"

PROBLEMA 26:

Siendo que $n \in N$ y $\frac{(n+1)^n}{2^n} \geq \frac{K}{3} n!$, calcular el mayor valor de K.

A)1 B)3 C)5 D)7 E)13

RESOLUCIÓN:

* De:

$$\frac{1+2+3+...+n}{n} \geq \sqrt[n]{(1)(2)(3)(4)...(n-1)(n)}$$

* De $\Rightarrow \dfrac{\not{n}(n^n+1)}{2\not{n}} \geq \sqrt[n]{1\times 2\times ...\times n}$

$\Rightarrow \dfrac{(n+1)^n}{2^n} \geq \dfrac{3}{3}n! \geq \dfrac{2}{3}n! \geq \dfrac{1}{3}n! \geq ...$

$\Rightarrow 3 \geq K \Rightarrow K_{máx} = 3$

RPTA: "B"

PROBLEMA 27:

Si $a,\ b \in \mathbb{R}^+$ tal que $a + b = 4$, entonces el menor valor de $S = \sqrt{a^2+9} + \sqrt{b^2+9}$, es:

A) $\dfrac{\sqrt{13}}{4}$ B) $\dfrac{\sqrt{13}}{2}$ C) $\sqrt{13}$ D) $2\sqrt{13}$ E) $3\sqrt{13}$

RESOLUCIÓN:

* Se sabe que, por identidades de Lagrange:

$(a^2+x^2)(b^2+y^2) = (ab+xy)^2 + (ay-bx)^2$

* Considerando $a, b, x, y \in \mathbb{R}^+$:

$(ay-bx)^2 \geq 0 \Rightarrow (ab+xy)^2 + (ay-bx)^2 \geq (ab+xy)^2$

$\Rightarrow (a^2+x^2)(b^2+y^2) \geq (ab+xy)^2$

ó $2\sqrt{a^2+x^2}\sqrt{b^2+y^2} \geq 2(ab+xy)$

$\Rightarrow a^2+x^2+2\sqrt{a^2+x^2}\sqrt{b^2+y^2}+b^2+y^2 \geq a^2+x^2$

$+2(ab+xy)+b^2+y^2$

$\Rightarrow \left(\sqrt{a^2+x^2}+\sqrt{b^2+y^2}\right)^2 \geq (a+b)^2+(x+y)^2$

$\Rightarrow \sqrt{a^2+x^2}+\sqrt{b^2+y^2} \geq \sqrt{(a+b)^2+(x+y)^2}$

* Luego, para $x = y = 3 \wedge a + b = 4$:

$\sqrt{a^2+3^2}+\sqrt{b^2+3^2} \geq \sqrt{4^2+6^2}$

$\Rightarrow \sqrt{a^2+9}+\sqrt{b^2+9} \geq 2\sqrt{13}$

$\Rightarrow S \geq 2\sqrt{13} \Rightarrow S_{mín} = 2\sqrt{13}$

PROBLEMA 28:

Si A es un conjunto definido por :

$A = \{(a,b) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} \,/\, a^3+b^3 < 10^4 \wedge a^2+b^2 > 10^3\}$

y $\mathbb{N}$ es el conjunto de los números naturales, entonces el número de elementos del conjunto A es:

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

RESOLUCIÓN:

* Aplicaremos el siguiente teorema $\forall a, b \in \mathbb{R}^+$.

Si $m < n \Rightarrow \left(\dfrac{a^m+b^m}{2}\right)^{\frac{1}{m}} \leq \left(\dfrac{a^n+b^n}{2}\right)^{\frac{1}{n}}$

* Como $a, b \in \mathbb{N} \subset \mathbb{R}^+$:

$2 < 3 \Rightarrow \left(\dfrac{a^2+b^2}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\dfrac{a^3+b^3}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$

* Pero: $a^2+b^2 > 10^3 \Rightarrow \left(\dfrac{a^2+b^2}{2}\right)^{\frac{1}{2}} > \left(\dfrac{10^3}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$

$\wedge\ a^3+b^3 < 10^4 \rightarrow \left(\dfrac{a^3+b^3}{2}\right)^{\frac{1}{3}} < \left(\dfrac{10^4}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$

$\Rightarrow \left(\dfrac{10^3}{2}\right)^{\frac{1}{2}} < \left(\dfrac{a^2+b^2}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\dfrac{a^3+b^3}{2}\right)^{\frac{1}{3}} < \left(\dfrac{10^4}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$

$\Rightarrow 10\sqrt{5} < 10\sqrt[3]{5} \Rightarrow \sqrt{2} < \sqrt[3]{5}$ .... *(absurdo)*

* Esto significa que: $A=\phi \Rightarrow n(A)= 0$

RPTA: "A"

PROBLEMA 29:

Dado $x_1, x_2, x_3, ..., x_n \in \mathbb{R}^+$ si el producto de los n números es uno, calcule el menor valor de:

$G=(1+x_1)(2+x_2)(3+x_3)$ .... $(n+x_n)$

A) 2^n B) $n!$ C) 4^n D) $2^n n!$ E) $2^n\sqrt{n!}$

RESOLUCIÓN:

* De $MA \geq MG$, se obtendrá que :

$1+x_1 \geq 2\sqrt{x_1}$

$2+x_2 \geq 2\sqrt{2x_2}$

$3+x_3 \geq 2\sqrt{3x_3}$

$\vdots$

$n+x_n \geq 2\sqrt{nx_1}$

* Como son positivos podemos multiplicar

$(1+x_1)(2+x_2)(3+x_3)...(n+x_n) \geq 2^n\sqrt{x_1x_2x_3...x_n(n!)}$

* pues $x_1x_2x_3 ... x_n = 1$

$\Rightarrow (1+x_1)(2+x_2)(3+x_3)...(n+x_n) \geq 2^n.\sqrt{n!}$

* Luego menor valor será: $2^n.\sqrt{n!}$

RPTA: "E"

PROBLEMA 30:

Determinar el supremo e ínfimo de :

$1+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{4^2}+...+\dfrac{1}{n^2}$

RESOLUCIÓN:

* Partimos de :

$\dfrac{1}{K^2+K} < \dfrac{1}{K^2} < \dfrac{1}{K^2-K}$

$\Rightarrow \dfrac{1}{K}-\dfrac{1}{K+1} < \dfrac{1}{K^2} < \dfrac{1}{K-1}-\dfrac{1}{K}$

* Tabulando :

$K=2 \Rightarrow \dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3} < \dfrac{1}{2^2} < 1-\dfrac{1}{2}$

$$K=3 \Rightarrow \frac{1}{3}-\frac{1}{4}<\frac{1}{3^2}<\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$K=n \Rightarrow \frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}<\frac{1}{n^2}<\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}$$

* Sumando las desigualdades:

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}<\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{n^2}<1-\frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2}-\frac{1}{n+1}<1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{n^2}<2-\frac{1}{n}$$

* Luego:

ínfimo: $\frac{3}{2}-\frac{1}{n+1}$

Supremo: $2-\frac{1}{n}$

PROBLEMA 31:

Sea $I_i=<-\frac{1}{2^{i-1}};\ \frac{1}{2^{i-1}}>;\ i\in N$

$A=\bigcup_{i=1}^{11} I_i$; (Z = enteros)

Luego el valor de $x\in(A\cap Z)Z$ es:

A)-1 B)-2 C)1 D)2 E)0

RESOLUCIÓN:

* Se tiene: $A=I_1\cup I_2\cup I_3\cup I_4...\cup I_{11}$.

$$\Rightarrow A=<-1;1>\cup<\frac{-1}{2};\frac{1}{2}>\cup<\frac{-1}{2^2};\frac{1}{2^2}>\cup...<\frac{-1}{2^{10}};\frac{1}{2^{10}}>$$

* Luego: Cada uno de los intervalos contiene al cero:

$$A\cap Z=(I_1\cap Z)\cup(I_2\cap Z)...(I_{11}\cap Z)$$

$$\to A\cap Z=\{0\}\cup\{0\}...\cup\{0\}$$

$$\to A\cap Z=\{0\}$$

PROBLEMA 32:

Sabiendo que $a; b; c$ son lados de un triángulo.
Halle el mayor valor de K en:

$$K\le(abc)^{a+b+c}(a+b+c)\ ;\ a;b;c\in Z^+$$

A)2 B)5 C)3 D)4 E)6

RESOLUCIÓN:

* El mayor valor de K es el menor valor de $(abc)^{a+b+c}$ $(a+b+c)$; y como $a; b; c\in Z^+$,esta ocurre cuando $a=b=c=1$, luego el menor valor de $(abc)^{a+b+c}$ $(a+b+c)$ es 3.

$\Rightarrow$ Mayor valor de K es 3.

RPTA: "C"

PROBLEMA 33:

Sea: $P=\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)\left(1+\frac{1}{c}\right)$ y $a+b+c=1$; $\{a, b, c\}\subset R^+$ dé el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I) $P=64$, si: $a=b=c$

II) $P>64$, si: $a\ne b\ne c$

III) $P=16$

A)VVF B)VFF C)FVV D) FFV E)FVF

RESOLUCIÓN:

* De los dado se obtiene:

$$P=1+\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{ac}+\frac{1}{bc}\right)+\frac{1}{abc}$$

$$\Rightarrow P=1+\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+\frac{2}{abc}$$

* Pero :

$$MA\ge MH\Rightarrow\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}{3}\ge\frac{3}{a+b+c}\Rightarrow\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge 9...(I)$$

$$MA\ge MG\Rightarrow\frac{a+b+c}{3}\ge\sqrt[3]{abc}\Rightarrow\frac{1}{abc}\ge 27$$

$$\Rightarrow\frac{2}{abc}\ge 54\text{.............................}(II)$$

* Luego de $(I)+(II)$:

$$P=1+\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+\frac{2}{abc}\ge 1+9+54\ge 64$$

$$\Rightarrow P\ge 64\ \ \forall a,b,c,\in R^+/a+b+c=1$$

* Además $P=64\Leftrightarrow a=b=c=\frac{1}{3}$

RPTA: "A"

PROBLEMA 34:

Sabiendo que $abc=1$ y $\{a, b, c\}\subset R^+$

Además:

$$\frac{1+ab}{1+a}+\frac{1+bc}{1+b}+\frac{1+ac}{1+c}\ge m$$

Halle el mayor valor de m:

A) $\frac{1}{3}$ B)3 C)1 D)6 E)12

RESOLUCIÓN:

* Haciendo $1=abc$, se obtiene:

$$\frac{1+ab}{abc+a}+\frac{1+bc}{abc+b}+\frac{1+ac}{abc+c}\ge m$$

$$\Rightarrow\frac{1+ab}{a(bc+1)}+\frac{1+bc}{b(ac+1)}+\frac{1+ac}{c(ab+1)}\ge m$$

NOTA:

si $x_1x_2x_3....x_n=1$; $x_1x_2x_3...x_n\in R^+$

$$\Rightarrow x_1+x_2+x_3+...+x_n\ge n$$

* Como:

$$\left(\frac{1+ab}{a(bc+1)}\right)\left(\frac{1+bc}{b(ac+1)}\right)\left(\frac{1+ac}{c(ab+1)}\right)=1$$

$$\Rightarrow \frac{1+ab}{a(bc+1)}+\frac{1+bc}{b(ac+1)}+\frac{1+ac}{c(ab+1)}\geq 3$$

RPTA: "B"

PROBLEMA 35:

Determinar el mayor valor entero de:

$$S=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{2024}}$$

A)72 B)74 C)45 D)90 E)89

RESOLUCIÓN:

* Partamos de que si: $n\in R^{+}\Rightarrow\sqrt{n+1}>\sqrt{n}$

$$\Rightarrow \sqrt{n+1}+\sqrt{n}>2\sqrt{n}\Rightarrow\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\right)<\frac{1}{2\sqrt{n}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{n+1}-\sqrt{n}<\frac{1}{2\sqrt{n}}\Rightarrow 2\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)<\frac{1}{\sqrt{n}}$$

* Luego evaluamos:

$n=1:\ 2\left(\sqrt{2}-1\right)<1$

$n=2:\ 2\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)<1/\sqrt{2}$

$n=3:\ 2\left(\sqrt{4}-\sqrt{3}\right)<1/\sqrt{3}$

$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$

$n=2025:\ 2\left(\sqrt{2025}-\sqrt{2024}\right)<\frac{1}{\sqrt{2024}}$

* Sumando miembro a miembro se obtiene:

$$2\left(\sqrt{2025}-1\right)<1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{2024}}$$

$\Rightarrow 2(45-1)<5$

$\Rightarrow 88<S\Rightarrow S>88$

* Entonces el mínimo valor entero de "S", será: 89

RPTA: "E"

PROBLEMA 36:

Sean a , b, c números reales positivos tal que:

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=9$$

Determine : $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}$

A)3 B)2 C)1 D)9 E)6

RESOLUCIÓN:

* De: $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=9$

$$\Rightarrow\frac{a+b+c}{3}=\frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}$$

$\Rightarrow \overline{MA}(a;b;c)=\overline{MH}(a;b;c);$ esto solo se cumple si $a=b=c$

*entonces lo pedido será: $\frac{a}{a}+\frac{a}{a}+\frac{a}{a}=3$

RPTA: "A"

PROBLEMA 37:

Sean a , b, c números reales positivos tal que :

$$(a+2b)(b+2c)(c+2a)=27abc$$

Determine : $(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2$

A)3 B)6 C)9 D)0 E)12

RESOLUCIÓN:

$$\overline{MA}(a;b;b)\geq\overline{MG}(a;b;b)$$

$$\Rightarrow\frac{a+b+b}{3}\geq\sqrt[3]{ab^2}\Rightarrow a+2b\geq 3\sqrt[3]{ab^2}$$

* multiplicando miembro a miembro, resulta:

$$(a+2b)(b+2c)(c+2a)\geq 27abc$$

pero la igualdad se cumple, cuando $a=b=c$

* entonces lo pedido será:

$$(a-a)^2(a-a)^2(a-a)^2=0$$

RPTA: "D"

PROBLEMA 38:

Sean a , b, c números reales positivos tal que :

$$\frac{81bc}{a^3}+\frac{16ac}{b^3}+\frac{ab}{c^3}\geq M\sqrt{\frac{2}{bc}+\frac{3}{ac}+\frac{6}{ab}}$$

Determine el menor valor de M.

A)$\sqrt{3}$ B)$3\sqrt{3}$ C)$5\sqrt{3}$ D)$6\sqrt{3}$ E)$12\sqrt{3}$

RESOLUCIÓN:

* Haciendo : $a=\frac{3}{y};b=\frac{2}{x};c=\frac{1}{z}$

* reemplazando en la desigualdad dada, se obtiene:

$$\frac{6y^3}{xz}+\frac{6x^3}{yz}+\frac{6z^3}{xy}\geq\sqrt{xz+yz+xy}$$

$$\Rightarrow\frac{6\left(x^4+y^4+z^4\right)}{xyz\sqrt{xz+yz+xy}}\geq M$$

* pero ya sabemos que: $a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ac$

$$\Rightarrow\left(x^2\right)^2+\left(y^2\right)^2+\left(z^2\right)^2\geq x^2y^2+x^2z^2+y^2z^2$$

$$\Rightarrow x^4+y^4+z^4\geq(xy)^2+(xz)^2+(yz)^2\geq xyxz+xyyz+xzyz$$

$$\Rightarrow x^4+y^4+z^4\geq xyz(x+y+z).......(I)$$

* pero $x^2+y^2+z^2\geq xy+xz+yz$

$$\Rightarrow x^2+y^2+z^2+2(xy+xz+yz)\ge 3(xy+xz+yz)$$

$$\Rightarrow (x+y+z)^2 \ge 3(xy+xz+yz)$$

$$\Rightarrow (x+y+z)\ge \sqrt{3(xy+xz+yz)}$$

* reemplazando en *(I)* y en la original:

$$x^4+y^4+z^4\ge \sqrt{3}xyz\sqrt{xz+yz+xy}$$

$$\Rightarrow \frac{6(x^4+y^4+z^4)}{xyz\sqrt{xz+yz+xy}}\ge 6\sqrt{3}$$

$\Rightarrow$ el mayor valor de M es : $6\sqrt{3}$

RPTA: "D"

PROBLEMA 39:

Sean a, b, c, k, l, m números reales positivos tal que:

$$\sqrt[3]{(a+k)(b+l)(c+m)}\ge P\left(\sqrt[3]{abc}+\sqrt[3]{klm}\right)$$

Determine el mayor valor de P.

A)1 B)3 C)2 D)9 E)6

RESOLUCIÓN:

Utilizando la propiedad $MA \ge MG$:

$$\frac{abm+a\ell c+kbc}{3}\ge \sqrt[3]{a^2b^2c^2k\ell m}$$

$$\Rightarrow abm+a\ell c+kbc\ge 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2k\ell m}\text{............}(I)$$

$$\frac{a\ell m+kbm+k\ell c}{3}\ge 3\sqrt[3]{abck^2\ell^2m^2}$$

$$\Rightarrow a\ell m+kbm+k\ell c\ge 3\sqrt[3]{abck^2\ell^2m^2}\text{............}(II)$$

* Sumando *(I)* + *(II)* se tiene:

$$abm+a\ell c+kbc+a\ell m+kbm+k\ell c\ge 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2k\ell m}+3\sqrt[3]{abck^2\ell^2m^2}$$

Sumando a ambos lados de la desigualdad $(abc+k\ell m)$

$$abc+k\ell m+abm+a\ell c+kbc+a\ell m+kbm+k\ell c\ge abc+k\ell m+3\sqrt[3]{a^2b^2c^2k\ell m}+3\sqrt[3]{abck^2\ell^2m^2}$$

* Factorizando adecuadamente:

$$(a+k)(b+\ell)(c+m)\ge(\sqrt[3]{abc}+\sqrt[3]{k\ell m})^3$$

* Extrayendo raíz cúbica:

$$\sqrt[3]{(a+k)(b+\ell)(c+m)}\ge(\sqrt[3]{abc}+\sqrt[3]{k\ell m})$$

* Luego:

$$\frac{\sqrt[3]{(a+k)(b+\ell)(c+m)}}{\sqrt[3]{abc}+\sqrt[3]{k\ell m}}\ge 1$$

$\Rightarrow$ El mayor valor de P es 1.

NOTA:

Agrupando convenientemente

$$E=\underline{abc}+\underline{k\ell m}+\underline{abm}+\underline{a\ell c}+\underline{kbc}+\underline{a\ell m}+\underline{kbm}+\underline{k\ell c}$$

$$\Rightarrow E=(abc+a\ell c+kbc+k\ell c)+(k\ell m+abm+a\ell m+kbm)$$

$$\Rightarrow E=c(ab+a\ell+kb+k\ell)+m(k\ell+ab+a\ell+kb)$$

$$\Rightarrow E=(ab+a\ell+kb+k\ell)(c+m)$$

$$\Rightarrow E=(c+m)([ab+kb]+[a\ell+k\ell])=(c+m)(b[a+k]+\ell[a+k])$$

$$\Rightarrow E=(c+m)(a+k)(b+\ell)$$

RPTA: "A"

PROBLEMA 40:

Si $a\,;b\,;c\in Z^+$, halle el mayor valor de :

$$a^{c-a}b^{a-b}c^{b-c}$$

A)3 B)2 C)5 D)1 E)4

RESOLUCIÓN:

* Utilizando la propiedad $MA\ge MG$:

$$\overbrace{\left(\frac{b}{a}+\frac{b}{a}+...+\frac{b}{a}\right)}^{a\text{-veces}}+\overbrace{\left(\frac{c}{b}+\frac{c}{b}+...+\frac{c}{b}\right)}^{b\text{-veces}}+\overbrace{\left(\frac{a}{c}+\frac{a}{c}+...+\frac{a}{c}\right)}^{c\text{-veces}}$$

$$\ge \sqrt[a+b+c]{\left(\frac{b}{a}\right)^a\left(\frac{c}{b}\right)^b\left(\frac{a}{c}\right)^c}$$

$$\underbrace{\not{a}\left(\frac{b}{\not{a}}\right)+\not{b}\left(\frac{c}{\not{b}}\right)+\not{c}\left(\frac{a}{\not{c}}\right)}_{a+b+c}\ge \sqrt[a+b+c]{\left(\frac{b}{a}\right)^a\left(\frac{c}{b}\right)^b\left(\frac{a}{c}\right)^c}$$

* Simplificando y elevando al exponente $(a+b+c)$ se tiene:

$$1\ge\left(\frac{b}{a}\right)^a\left(\frac{c}{b}\right)^b\left(\frac{a}{c}\right)^c\Rightarrow a^{c-a}.b^{a-b}.c^{b-c}\le 1$$

$$\Rightarrow (a^{c-a}.b^{a-b}.c^{b-c})_{máx}=1$$

RPTA: "D"

PROBLEMA 41:

Demostrar que :

$$x^2+2y\ge 3(xy)^{2/3}$$

para todo a, b números reales positivos .

RESOLUCIÓN:

Observamos que $x^2+2y=x^2+y+y$, luego aplicamos $MA\ge MG$ a los numeros x^2, y, y. En efecto tenemos:

$$\frac{x^2+y+z}{3}\ge\sqrt[3]{x^2\times y\times y}$$

$$\Leftrightarrow x^2+2y\ge 3\sqrt[3]{x^2y^2}$$

$$\Leftrightarrow x^2+2y\ge 3(xy)^{2/3}$$

La igualdad ocurre si y sólo si $x^2=y$.

PROBLEMA 42 :

Halle el menor valor de : $a^2+\dfrac{4}{\sqrt{a}}\,;a>0.$

RESOLUCIÓN

Vemos que :

$$a^2+\frac{4}{\sqrt{a}}=a^2+\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{a}}$$

entonces aplicamos $MA \geq MG$ a los números $a^2;\frac{1}{\sqrt{a}};\frac{1}{\sqrt{a}};\frac{1}{\sqrt{a}};\frac{1}{\sqrt{a}}$ veamos:

$$\frac{a^2+\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{a}}}{5}\geq\sqrt[5]{a^2\times\frac{1}{\sqrt{a}}\times\frac{1}{\sqrt{a}}\times\frac{1}{\sqrt{a}}\times\frac{1}{\sqrt{a}}}$$

$$\Leftrightarrow a^2+\frac{4}{\sqrt{a}}\geq 5(1)$$

entonces $a^2+\frac{4}{\sqrt{a}}\geq 5$.

Por lo tanto, el mínimo de $a^2+\frac{4}{\sqrt{a}}$ es 5 y ocurre si y sólo si $a=1$.

PROBLEMA 43 :

Demostrar que :

$$f(x)=1+\sqrt{\frac{2+1}{2}}+\sqrt[3]{\frac{3+1}{3}}+.....+\sqrt[x]{\frac{x+1}{x}}<x+1.$$

RESOLUCIÓN

El término general de la suma del primer miembro es $\sqrt[k]{\frac{k+1}{k}}$ y vemos que :

$$\sqrt[k]{\frac{k+1}{k}}=\sqrt[k]{\frac{k+1}{k}\cdot\underbrace{1\times 1\times...\times 1}_{(k-1)factores}}<\frac{\frac{k+1}{k}+\overbrace{1+1+...+1}^{(k-1)sumandos}}{k}$$

$$\Leftrightarrow\sqrt[k]{\frac{k+1}{k}}<\frac{\frac{k+1}{k}+k-1}{k}=1+\frac{1}{k^2}.$$

En efecto :

$$f(x)<1+\left(1+\frac{1}{2^2}\right)+\left(1+\frac{1}{3^2}\right)+.....+\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$$

$$\Rightarrow f(x)=x+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+......+\frac{1}{x^2}<n+\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+....+\frac{1}{(x-1)x}$$

$$\Rightarrow f(x)=x+\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+...+\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}\right)$$

$$\Rightarrow f(x)=x+1-\frac{1}{x}<x+1$$

PROBLEMA 44 :

Demostrar que :

$\sqrt[a]{1+\frac{\sqrt[a]{a}}{a}}+\sqrt[a]{1-\frac{\sqrt[a]{a}}{a}}<2,$ siendo n entero positivo.

RESOLUCIÓN:

$$\sqrt[a]{1+\frac{\sqrt[a]{a}}{a}}=\sqrt[a]{\left(1+\frac{\sqrt[a]{a}}{a}\right)\times\underbrace{1\times 1\times....\times 1}_{(n-1)factores}}<\frac{1+\frac{\sqrt[a]{a}}{a}+(a-1)}{a}$$

$$=1+\frac{\sqrt[a]{a}}{a^2}$$

Similarmente :

$$\sqrt[a]{1-\frac{\sqrt[a]{a}}{a}}<1-\frac{\sqrt[a]{a}}{a^2},$$

entonces :

$$\sqrt[a]{1-\frac{\sqrt[a]{a}}{a}}+\sqrt[a]{1-\frac{\sqrt[a]{a}}{a}}<1+\frac{\sqrt[a]{a}}{a^2}+1-\frac{\sqrt[a]{a}}{a^2}=2$$

$$\Rightarrow\sqrt[a]{1+\frac{\sqrt[a]{a}}{a}}+\sqrt[a]{1-\frac{\sqrt[a]{a}}{a}}<2$$

PROBLEMA 45 :

Sean m, n, p números reales positivos con $m+n+p=3$, halle el máximo valor de :

$$f(m,n,p)=\sqrt[3]{m(n+2p)}+\sqrt[3]{n(p+2m)}+\sqrt[3]{p(m+2n)}$$

RESOLUCIÓN:

Como $f(m, n, p)$ es una expresión simétrica para m, n, p entonces el máximo ocurre cuando $m=n=p$ y como $m+n+p=3$

$$\Rightarrow\begin{cases}m=n=p=1\\ 3m=3n=3p=3\\ n+2p=p+2m=m+2n=3\end{cases}$$

Luego aplicando $MA \geq MG$, de la siguiente manera:

$$\sqrt[3]{m(n+2p)}=\frac{1}{\sqrt[3]{9}}\sqrt[3]{3m(n+2p)\times 3}\leq\frac{1}{\sqrt[3]{9}}\left(\frac{3m+(n+2p)+3}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow\sqrt[3]{m(n+2p)}\leq\frac{1}{\sqrt[3]{9}}\left(\frac{3m+n+2p+3}{3}\right);\text{similarmente}$$

$$\sqrt[3]{n(p+2m)}\leq\frac{1}{\sqrt[3]{9}}\left(\frac{3n+p+2m+3}{3}\right);$$

$$\sqrt[3]{p(m+2n)}\leq\frac{1}{\sqrt[3]{9}}\left(\frac{3p+m+2n+3}{3}\right).$$

Sumando miembro a miembro tenemos :

$$\sqrt[3]{m(n+2p)}+\sqrt[3]{n(p+2m)}+\sqrt[3]{p(m+2n)}\leq\frac{1}{\sqrt[3]{9}}\left(\frac{6(m+n+p)+9}{3}\right).$$

$$\Rightarrow f(m;n;p)\leq\frac{1}{\sqrt[3]{9}}\times 9=3\sqrt[3]{3}$$

$$\Rightarrow máx_f=3\sqrt[3]{3}$$

PROBLEMA 46 :

Sean p, q, r números reales positivos. Pruebe que

$$\left(1+\frac{p}{q}\right)\left(1+\frac{q}{r}\right)\left(1+\frac{r}{p}\right)\geq 2+\frac{2(p+q+r)}{\sqrt[3]{pqr}}$$

RESOLUCIÓN:

Observar que :

$$3\left(\frac{p}{q}+\frac{q}{r}+\frac{r}{p}\right)=\left(\frac{2p}{q}+\frac{q}{r}\right)+\left(\frac{2q}{r}+\frac{r}{p}\right)+\left(\frac{2r}{p}+\frac{p}{q}\right)$$

Utilizando $MA \geq MG$, tenemos que :

$$\frac{2p}{q}+\frac{q}{r}=\frac{p}{q}+\frac{p}{q}+\frac{q}{r}\geq 3\sqrt[3]{\frac{p}{q}\times\frac{p}{q}\times\frac{q}{r}}, \text{entonces}$$

$$\frac{2p}{q}+\frac{q}{r}\geq 3\sqrt[3]{\frac{p^2}{qr}}, \text{similarmente}$$

$$\frac{2q}{r}+\frac{r}{p}\geq 3\sqrt[3]{\frac{q^2}{pr}} \Rightarrow \frac{2r}{p}+\frac{p}{q}\geq 3\sqrt[3]{\frac{r^2}{pq}}$$

de donde tenemos que:

$$3\left(\frac{p}{q}+\frac{q}{r}+\frac{r}{p}\right)\geq 3\times\sqrt[3]{\frac{p^2}{qr}}+3\times\sqrt[3]{\frac{y^2}{pr}}+3\times\sqrt[3]{\frac{r^2}{pq}}$$

$$=3\left[\frac{p}{\sqrt[3]{pqr}}+\frac{q}{\sqrt[3]{pqr}}+\frac{r}{\sqrt[3]{pqr}}\right]$$

$$\Leftrightarrow \frac{p}{q}+\frac{q}{r}+\frac{r}{p}\geq\frac{p+q+r}{\sqrt[3]{pqr}}; \text{similarmente}$$

$$\frac{p}{r}+\frac{r}{q}+\frac{q}{p}\geq\frac{p+q+r}{\sqrt[3]{pqr}},$$

Sumando miembro a miembro tenemos :

$$\frac{p}{q}+\frac{q}{r}+\frac{r}{p}+\frac{p}{r}+\frac{r}{q}+\frac{q}{p}\geq\frac{2(p+q+r)}{\sqrt[3]{pqr}}, \text{ sumando } 2 \text{ en}$$

ambos miembros :

$$1+\frac{p}{q}+\frac{q}{r}+\frac{r}{p}+\frac{p}{q}\times\frac{q}{r}+\frac{p}{q}\times\frac{r}{p}+\frac{q}{r}\times\frac{r}{p}+\underbrace{\frac{p}{q}\times\frac{q}{r}\times\frac{r}{p}}_{1}\geq 2+\frac{2(p+q+r)}{\sqrt[3]{pqr}}$$

de donde :

$$\left(1+\frac{p}{q}\right)\left(1+\frac{q}{r}\right)\left(1+\frac{r}{p}\right)\geq 2+\frac{2(p+q+r)}{\sqrt[3]{pqr}}$$

La igualdad ocurre si y sólo si $p = q = r$.

PROBLEMA 47 :

Pruebe que para a, b números reales no negativos, con $a \geq b$, y n entero positivo, se cumple que

$$n(a-b)(ab)^{\frac{n-2}{2}}\leq a^n-b^n$$

RESOLUCIÓN :

Hay dos casos:

(i) Si $a = b$, se cumple la igualdad.

(ii) Si $a \neq b$

$$n(ab)^{\frac{n-1}{2}}\leq\frac{a^n-b^n}{a-b}; a>b$$

$$n(ab)^{\frac{n-1}{2}}\leq a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+...+ab^{n-2}+b^{n-1}$$

Aplicando $MA \geq MG$:

$$\frac{a^{n-1}+a^{n-2}b+...+b^{n-1}}{n}>\sqrt[n]{(a^{n-1})(a^{n-2}b)(a^{n-3}b^2)...(b^{n-1})}$$

$$=\sqrt[n]{a^{\frac{(n-1)n}{2}}\times b^{\frac{(n-1)n}{2}}}=(ab)^{\frac{n-1}{2}}$$

Por lo tanto de *(i)* y *(ii)* tenemos :

$$a^{n-1}+a^{n-2}b+....+b^{n-1}\geq n(ab)^{\frac{n-1}{2}}$$

PROBLEMA 48 :

Sean m, n, p lados de un triángulo con perímetro 3. demostrar que :

$$\frac{1}{\sqrt{m+n-p}}+\frac{1}{\sqrt{n+p-m}}+\frac{1}{\sqrt{p+m-n}}\geq\frac{9}{mn+np+pm}$$

RESOLUCIÓN:

Haciendo :

$$x=\sqrt{m+n-p};\ y=\sqrt{n+p-m};\ z=\sqrt{p+m-n},$$

entonces $x^2+y^2+z^2=m+n+p=3$ y $m=\frac{x^2+z^2}{2}$,

$n=\frac{x^2+y^2}{2}$, $p=\frac{y^2+z^2}{2}$, de donde se deduce que:

$$mn+mp+np=\frac{9+x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2}{4}$$

Entonces :

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\geq\frac{36}{9+x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2}$$

$$\Leftrightarrow (yz+xz+xy)(9+(xy)^2+(yz)^2+(zx)^2)\geq 36xyz=36\sqrt{(xyz)^2}$$

Haciendo $xy = a$; $xz = b$; $yz = c$, tenemos :

$$(a+b+c)(9+a^2+b^2+c^2)\geq 36\sqrt{abc}$$

Pero aplicando $MA \geq MG$, tenemos que

$$a+b+c\geq 3\sqrt[3]{abc}..............................(i)$$

$$\Rightarrow\frac{a^2+b^2+c^2+\overbrace{1+1+....+1}^{9\ sumandos}}{12}\geq\sqrt[12]{a^2b^2c^2}$$

$$\Rightarrow a^2+b^2+c^2+9\geq 12\sqrt[12]{(abc)^2}$$

$$\Rightarrow a^2+b^2+c^2+9\geq 12\sqrt[6]{abc}......(ii)$$

Multiplicando miembro a miembro *(i)* y *(ii)* :

$$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2+9)\geq(3\sqrt[3]{abc})(12\sqrt[6]{abc})$$

$$=36\sqrt{abc},$$

de donde obtenemos:

$$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2+9)\geq 36\sqrt{abc}$$

La igualdad ocurre si y sólo si $p = q = r = 1$.

PRACTICA DE EJERCICIOS #1

01 De las siguientes proposiciones:

* $8 > -2$ ( ) * $-4 > -7$ ( )
* $7 < 7$ ( ) * $3 < -3$ ( )

Indicar cuántas son verdaderas.

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) ninguna

02 Indicar verdadero (V) o falso (F) según corresponda:

* $\sqrt{3} < 2$ ( ) * $\pi < 3$ ( ) * $\frac{1}{5} > \frac{1}{4}$ ( )

A) VVV B) VVF C) VFV D) VFF E) FFV

03 Indique el valor de verdad en:

* Si: $a \in \mathbb{R} \Rightarrow a<0 \vee a=0 \vee a>0$ ( )
* Si: $a>3 \Rightarrow a-3>0$ ( )
* Si: $b<6 \Rightarrow b-4>2$ ( )

A) VVF B) FVF C) VFF D) FVV E) VFV

04 De las siguientes proposiciones:

* $|-4| < |-6|$ ( )
* $|-2+5| > |-3+5|$ ( )
* $(-2)^2 > -2^2$ ( )
* $(-1)^4 > -1^3$ ( )

Indicar cuántas son falsas:

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) N.A.

05 Aplica las propiedades "Aditiva de la Desigualdad", "Multiplicativa de la Desigualdad", y determina en cada caso todos los valores reales que pueda tomar la variable "x" (resolver las inecuaciones)

A) $x + 5 > 12$ E) $2x - 1 < 15$

x............ x............

B) $x - 6 > 18$ F) $3x + 2 > 14$

x............ x............

C) $2x < 12$ G) $-3x < 12$

x............ x............

D) $3x < 18$ H) $-4x < -16$

x............ x............

06 Utilizando las propiedades de desigualdades, señalar la alternativa incorrecta:

A) Si: $x < 8 \wedge y > 8 \Rightarrow x < y$ ( )

B) Si: $x < y \Rightarrow x + 5 < y + 5$ ( )

C) Si: $x<10 \wedge y<-4 \Rightarrow x + y < 6$ ( )

D) Si: $x < 2 \Rightarrow 7x < 14$ ( )

E) Si: $x < 6 \Rightarrow -4x < -24$ ( )

07 Cuáles de las siguientes proposiciones son correctas?

I) $\forall a \in \mathbb{R} : a^2 \geq 0$ ( )

II) Si: $a > 0 \Rightarrow \frac{1}{a} < 0$ ( )

III) Si: $8 > 5 \Rightarrow \frac{1}{8} < \frac{1}{5}$ ( )

A) Sólo I B) Sólo II C) I, II y III
D) I y III E) N.A.

08 Si: $x< 0$ y $z>0$, entonces $x - z$, dará un resultado:

A) Siempre positivo B) Un número natural
C) Un número entero D) Un número racional
E) No es posible precisar

09 Si: $a> 0$ y $b < -1$, se deduce que: "$ab+ba$" es:

A) Siempre positivo B) Siempre negativo
C) Puede ser cero D) Puede ser positivo o negativo
E) No podemos afirmar nada.

10 Qué valor debe admitir "a" para que la siguiente expresión no exista?

$$(a-2)^{-1}$$

A) -1 B) 2 C) 4 D) 8 E) ninguno

11 De las siguientes proposiciones:

* $-5 < -\frac{1}{2}$ ( ) * $0 > \frac{1}{2}$ ( )
* $0 < \sqrt{2}$ ( ) * $(-2)^3 < \sqrt{5}$ ( )

Indicar cuántas son verdaderas

A) 2 B) 3 C) 4 D) 1 E) N.A.

12 Señalar la afirmación incorrecta

I) $\sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{8}$ ( )

II) $\sqrt{\frac{1}{2}} < \sqrt{\frac{1}{3}}$ ( )

III) $7 = \sqrt{7} \times \sqrt{7}$ ( )

A) Sólo I B) Sólo II C) Sólo III D) I y II E) I y III

13 Se dan las siguientes proposiciones:

I) $\frac{5}{6} < \frac{3}{7}$ II) $\frac{7}{4} > \frac{5}{9}$ III) $\frac{4}{5} < \frac{3}{4}$

¿Cuál es verdadera?

A) Ninguna B) Todas C) Sólo I
D) Sólo II E) Sólo III

14 Completa:

I) $\frac{3}{4} \bigcirc \frac{5}{6}$ II) $\left(\frac{1}{2}\right)^2 \bigcirc \frac{1}{2^2}$ III) $\sqrt{\frac{3}{4}} \cdot \bigcirc \sqrt{\frac{9}{2}}$

A) <, =, > B) >, =, < C) >, <, =
D) =, <, > E) N.A.

15 Escriba "V" o "F" según corresponda:

A) $1\frac{3}{4} < 2\frac{1}{2}$ .... ( )

B) $-1\frac{1}{2} < -2\frac{1}{3}$ .... ( )

C) $\sqrt[6]{\frac{1}{2}} < \sqrt[8]{\frac{1}{4}}$ .... ( )

D) $\sqrt[4]{\frac{1}{3}} > \sqrt[6]{\frac{1}{2}}$ .... ( )

E) $\sqrt[8]{3} > \sqrt[4]{2}$ .... ( )

16 A qué propiedad de la desigualdad de números reales se refiere la siguiente expresión:

$$a < 3 \wedge 3 < b \Rightarrow a < b$$

A) Tricotomía B) Conexa C) Transitiva
D) Asociativa E) N.A.

TAREA DOMICILIARIA

01 Utilizar los símbolos > y < para expresar una comparación correcta entre el primero y segundo número de cada uno de los pares siguientes:

A) 3^2 ☐ 2^3 F) $\sqrt[4]{\frac{1}{4}}$ ☐ $\sqrt[8]{\frac{1}{6}}$

B) -2^3 ☐ 2^3 G) $\sqrt[12]{\frac{1}{8}}$ ☐ $\sqrt[6]{\frac{1}{3}}$

C) $(-2)^2$ ☐ -2^2 H) $\sqrt[16]{3}$ ☐ $\sqrt[24]{5}$

D) $\sqrt[3]{3}$ ☐ $\sqrt{3}$ I) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{1}{4}}$ ☐ $\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{6}}$

E) $\sqrt[6]{3}$ ☐ $\sqrt[4]{5}$ J) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}$ ☐ $\left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{1}{4}}$

02 Indicar que enunciados son ciertos y cuáles son falsas:

A) $10-(-2) > (-2)^2 - 2^2$ ( )

B) $-2^2+(-2)^2-1^2 < -1^2-(-1)^3-(-4)$ ( )

C) $1^2 + 2^2 < 1^3 + 2^3$ ( )

D) $\sqrt[6]{3} > \sqrt[4]{2}$ ( )

E) $\sqrt[8]{4} > \sqrt{3}$ ( )

F) $|-4+1|^2 > |-1-3|^2$ ( )

G) $|-6+1|^3 < |-1-(-2)|^3$ ( )

03 Si: $12>7$, indicar cuales de los siguiente enunciados, son ciertos:

A) Sumamos 4 a los dos miembros $12+4 > 7+4$
B) Sumanos –2 a los dos miembros $12-2 > 7-2$
C) Multiplicamos por 5 a los dos miembros $5\times12 > 5\times7$
D) Multiplicamos por –2 a los dos miembros $(-2)\times12 > (-2)\times7$
E) Multiplicamos por –3 a los dos miembros $(-3)\times12 < (-3)\times7$

04 Indicar si los enunciados siguientes son ciertos o falsos y corregir los enunciados que se consideren falsos.

$$\begin{array}{c} 14>5 \\ 6<1 \\ \hline 14+6>5+1 \end{array} \quad (\ ) \qquad \begin{array}{c} 9<18 \\ 2<10 \\ \hline 9+2<18+10 \end{array} \quad (\ )$$

$$\begin{array}{c} 40>18 \\ 6<8 \\ \hline 40-6<12-8 \end{array} \quad (\ ) \qquad \begin{array}{c} 17>11 \\ 8<9 \\ \hline 17-8<11-9 \end{array} \quad (\ )$$

$$\begin{array}{c} 9<24 \\ 5>3 \\ \hline 9-5<24-3 \end{array} \quad (\ ) \qquad \begin{array}{c} 13>6 \\ 8>4 \\ \hline 13\times8>6\times4 \end{array} \quad (\ )$$

05 Indicar cuál de las proposiciones es falsa:

I) Cero es mayor que cualquier número negativo. ...( )

II) Todo número negativo es menor que un número positivo. ...( )

III) Cero es mayor que cualquier número positivo. ...( )

A) Sólo I B) Sólo II C) Sólo III
D) I y II E) II y III

06 De las siguientes proposiciones:

* $(-2)^3 < -2^3$ ( ) * $-8 > -2$ ( )
* $18 < 18$ ( ) * $5 \leq 5$ ( )

Indicar cuántas son verdaderas.

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) ninguna

07 Indicar verdadero (V) o falso (F), según corresponda:

* $\sqrt{5} < \sqrt{3}$ ( )
* $\sqrt[12]{7} > \sqrt[8]{11}$ ( ) * $\frac{3}{4} < \frac{5}{6}$ ( )

A) VFV *B) VFF* *C) VVF* *D) FFV* *E) N.A.*

08 Indique el valor de verdad en:

Si: $a > 4 \Rightarrow a - 4 > 0$ ( )

Si: $b < 7 \Rightarrow b - 7 < 0$ ( )

Si: $b < 8 \Rightarrow b - 4 < 4$ ( )

A) VVV *B) VFF* *C) FVV* *D) FFV* *E) N.A.*

09 Utilizando las propiedades de desigualdades, señalar la alternativa incorrecta:

A) Si: $x < 8 \wedge y > 8 \Rightarrow x < y$ ( )

B) Si: $x < y \Rightarrow x + 5 < y + 5$ ( )

C) Si: $x < 10 \wedge y < -4 \Rightarrow x + y < 6$ ( )

D) Si: $x < 2 \Rightarrow 7x < 14$ ( )

E) Si: $x < 6 \Rightarrow -4x < -24$ ( )

10 Cuál es mayor $\sqrt[6]{\frac{1}{3}}$ ó $\sqrt[8]{\frac{1}{4}}$?

PRACTICA DE EJERCICIOS #2

01 En cada uno de los siguientes casos gráfica los intervalos que se mencionan y escribe su notación formal.

A) <2;7> .... $-\infty$ $+\infty$ <2;7>={x/2<x<7}

B) <3;9> .... $-\infty$ $+\infty$

C) <5;10> .... $-\infty$ $+\infty$

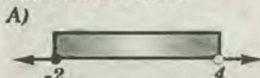
D) <1;6> .... $-\infty$ $+\infty$

E) <-3;2> .... $-\infty$ $+\infty$

F) <-4;5> .... $-\infty$ $+\infty$

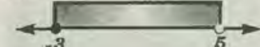
02 Hemos dibujado la representación gráfica de diversos intervalos. Escribe la notación formal para cada una de ellas.

A)



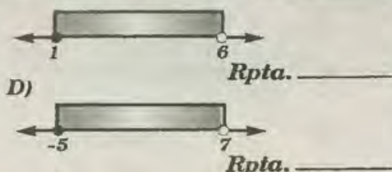
Rpta. ________

B)



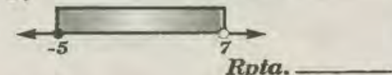
Rpta. ________

C)



Rpta. ________

D)



Rpta. ________

03 Si *A=[3;5]* y *B=<4;7]* ¿A qué es igual *AUB?*

A)[3;7] *B)[2;7>* *C)[2;7]* *D)[1;7]* *E)[3;7>*

04 Si *B=[2;7>* y *A=[3;10>* ¿A qué es igual $A \cap B$?

A) <3;7> *B)[3;7>* *C) [2;7>* *D)<2;7>* *E) <1;7>*

05 Si *C= [−6; 3]; A=< −4; 3]* ¿A qué es igual *C–A?*

A) <-6;-4> *B)[-6;-4]* *C) {3}* *D)[-6;-4>* *E) N.A.*

06 Si *A = [−2; 0]* y *B=[−1; 5]* ¿A qué es igual $A \cup B$?

A) <-2,5] *B)[-2,5]* *C)[-2,5>*
D)<-2,5> *E) N.A.*

07 Si: *M=[−3; 1/2]* y *B=[−1; 2]* ¿A qué es igual *B–M?*

A) <0,5;1> *B)<0,5;2]* *C) [0,5;2>*
D)<1/2;2> *E) N.A.*

08 Si: *<−4; 3>* y *B =<−1; 5]* entonces: *A − B* es

A) [-4;-1] *B)<-4;-1>* *C) [-4;1>*
D) <-4;-1> *E) N.A.*

09 Si: *C=[−5; −1] ; D=[−3; 3]* ¿A qué es igual $C \cap D$?

A) [-3 ; -1] *B) [-3 ; 1]* *C) <-3 ;-1>*
D) [-3 ; -1> *E) N.A.*

10 Teniendo los conjuntos:

$$A=\{x \in \mathbb{R} / 1 < x \leq 8\}$$
$$B=\{x \in \mathbb{R} / -5 < x \leq 5\}$$
$$C=\{x \in \mathbb{R} / -7 \leq x < 2\}$$

Determinar el intervalo que indica la intersección de *A, B* y *C.*

A) [7 ; 8] *B) <1;2>* *C) [1;2>*
D)[-7 ;2> *E) N.A.*

11 Dados los intervalos : *A= < −3; 12]* y *B=[5; 8>* hallar *B − A*

A) [8; 12] *B) < −3; 5>* *C) ∅*
D) < −2; 5> *E) < −∞; 3>*

12 Dados los intervalos *A=[3; ∞[* y *B=< −∞; 7[* hallar $A \cap B$

A) [2;7]   B) [1 ;7   C) [3;7>
D) <1;7>   E) <3;7>

13 Si: $X \in <3;10>$ calcular el máximo valor entero de «X»

A) 7   B) 8   C) 9   D) 6   E) 5

14 Si: $X \in <5;12>$ calcular el mínimo valor entero de «X»

A) 6   B) 3   C) 8   D) 11   E) 12

15 Si: $X \in <3;8>$ calcular el mínimo valor entero de "$4X-3$"

A) 10   B) 11   C) 12   D) 13   E) 14

16 Calcular la suma de los números enteros «X» tal que $[3;8]$

A) 31   B) 32   C) 33   D) 34   E) NA

17 Calcular la suma de los números enteros «X» tal qué $[-4;6]$

A) 9   B) 10   C) 11   D) 12   E) 13

18 Si $X \in <3;5>$ entonces: $(x+6)$ pertenece al intervalo

A) <7;11>   B) <5;10>   C) <9;11>
D) <8;11>   E) N.A.

19 Si «X» es un número entero y además [3;8> calcular (X+3)

A) [6;11>   B) [5;11>   C) [3;10]
D) [4;11>   E) [5;11>

20 Si $X \in [1;5]$, entonces $4x-2 \in [a;b]$ Halle A+B

A) 17   B) 18   C) 19   D) 20   E) 22

TAREA DOMICILIARIA

01 Dados los siguientes pares de intervalos. Calcular la unión, intersección y las diferencias (A–B); (B –A)

A) A= <2;6>   B= <4;8>
B) A= <3;10>   B= <5;12]
C) A= <–3;20>   B= <–1;0>
D) A= <–4;5>   B= [–1;7>
E) A= <–9;0>   B= <–3;4>
F) A= <–10;–2>   B= [–8;0>

02 Dados los intervalos A=[7;2> y B=<–5;7]

Hallar $A \cap B$

A) <6;7]   B) [–6;7>   C) <7;9]
D) [–5;2>   E) [–5;2]

03 Dados los intervalos: A=<–5;10] y B=<7;12]

Hallar

A) A-B=________   B) B-A=________

04 Dados los intervalos A=[3;∞> y B=<–∞;7>

Hallar $A \cap B$

A) <6;7]   B) [–6;7>   C) <7;9]
D) [–5;2>   E) [–5;2]

05 Si $X \in <3;7]$, entonces $(3x-2)$ pertenece a:

06 Si $X \in [-3;1>$, entonces $(1-2x)$ pertenece a:

A) <–1;7]   B) <–1;7>   C) [–7;–1>
D) [1;7>   E) N.A.

07 Si $x \in <-1;2]$ y $a \le 4-3x < b$, el valor de $(a+b)$ es:

A) 4   B) 3   C) –5   D) 6   E) 5

08 A partir de los siguientes intervalos:

A=<0;2]; B=[1;3]

Hallar el intervalo: $A-(A \cap B)$

09 Conociendo los intervalos:

A = [–2;2];   B = <3;0];   C = [–1;4]

Calcular el intervalo equivalente a:

A) $(A \cup B) \cap C$ ____________ Rpta.
B) $(A \cup B) \cup C$ ____________ Rpta.
C) $(A \cap B) \cup C$ ____________ Rpta.

10 Si $x \in [2;7]$ entonces $3x-2 \in [a;b]$

PRIMERA PRACTICA DIRIGIDA

01 Si la intersección de los intervalos:

A =]–5;–1[∪]2;11[
B = [–3;4]

es: [a;b[∪]c;d], calcular «a+b+c+d»

A) 1   B) 2   C) 3   D) 4   E) 5

02 Dado: $x>0; y>0; x>y \wedge z \neq 0$; la desigualdad que no siempre es verdadera es:

A) $x+z > y+z$ B) $x-z > y-z$ C) $xz > yz$

D) $\frac{x}{z^2} > \frac{y}{z^2}$ E) $xz^2 > yz^2$

03 Siendo: $x, y \in R / x>0 >$, ¿Cuál de las siguientes relaciones no es verdadera?

A) $(y-x)(x-y)<0$ B) $\frac{y-x}{y}>0$ C) $x^2-xy<0$

D) $x^2+y^2>0$ E) $xy<0$

04 Si $x \in [2;4]$ entonces el menor valor que toma la fracción $\frac{x+3}{x+2}$ es

A)7/6 B)5/4 C)7/4 D)6/5 E)No existe mínimo

05 Resolver la inecuación:

$$\frac{2x-1}{5}+\frac{3x-2}{6}>\frac{2x+1}{2}+\frac{2}{3}$$

e indicar un valor entero admisible para «x»

A)2 B)–6 C)–10 D)–13 E)–19

06 Resolver: $(x+5)(x+3) \geq (x+2)(x+1)+3$

A)$x \in [-2;+\infty[$ B)$x \in]-\infty;-3]$ C)$x \in [2;+\infty[$ D)$x \in]-\infty;-2]$ E)$x \in [3;+\infty[$

07 Luego de resolver la inecuación:

$$\frac{5x}{11}-x<3(x-91)$$

indicar el menor valor entero de x

A)77 B)76 C)80 D)79 E)78

08 Resolver: $\frac{x}{2}+\frac{x}{3}+\frac{x}{4}+\frac{x}{5}>x-17$

A)$[-60;\infty[$ B)$]-60;\infty[$ C)$]-\infty;-60[$ D)$]-60;0[$ E)ϕ

09 Resolver:

$$\frac{\frac{x}{a}+a}{a+1}>1,\ \text{si } a=1-\sqrt{5}$$

A)$x>1+\sqrt{5}$ B)$x>1-\sqrt{5}$ C)$x<1+\sqrt{5}$ D)$x<1-\sqrt{5}$ E)ϕ

10 Indique la suma de todos los valores enteros que satisface el sistema:

$$13 \geq 2x-3 \geq 5$$
$$-6 \geq 9-5x \geq -26$$

A)25 B)30 C)33 D)22 E)11

11 Indicar verdadero (V) o falso (F), según corresponda:

( ) Si: $-5<x<8 \Rightarrow 25<x^2<64$

( ) Si: $-7<x<-4 \Rightarrow 0<x^2<49$

( ) Si: $-6 \leq x<5 \Rightarrow 0 \leq x^2<38$

A)FFF B)FVV C)VVV D)FFV E)FVF

12 Resolver: $\frac{ax}{b}-\frac{b}{a} \geq \frac{bx}{a}-\frac{a}{b}$

Siendo $0<a<b$

A)$]-\infty;-1]$ B)$]-\infty;-2]$ C)$[-10+\infty[$ D)$[1;+\infty[$ E)$]a;+\infty[$

13 Determinar el máximo valor que toma la expresión: $\frac{3ab}{a^2+b^2}$

si $(a;b) \subset \mathbb{R}^+$

A)2/3 B)3/4 C)3/2 D)1/6 E)6

14 Al resolver la inecuación:

$$\frac{3}{4}x+\frac{3}{2}(x-2)+2<\frac{20}{3}-\frac{5}{2}(x-1)$$

el número de valores enteros positivos que verifican es:

A)4 B)3 C)2 D)1 E) Muchos

15 Hallar la suma de todos los valores enteros que satisfacen el sistema:

$$\frac{2}{3}<\frac{x-1}{x+3}<\frac{7}{9}$$

A)50 B)60 C)75 D)84 E)100

16 Resolver: $3x+4 \leq 2x+10<5x+8$

A)$\mathbb{R}$ B)$]2/3;6]$ C)$[2/3;6]$ D)ϕ E)$]2/3;6[$

17 Resolver el sistema:

$$2(2x-3)<5x-\frac{3}{4}$$
$$8x-5<\frac{15x-8}{2}$$

y dar como respuesta la suma de todos los valores enteros de «x»

A)–11 B)–12 C)–13 D)–14 E)–15

18 Si $a \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$, calcule Ud. el mínimo valor de:

$$\frac{a^4+25}{a^2}$$

A)8 B)9 C)10 D)11 E)12

19 Si: $(x+1)(x+3)<(x+2)^2$

indicar el conjunto solución de «x»

A)$[-1;-3]$ B)$[1;2]$ C)$[2;3]$ D)$]-1;3]$ E)$\mathbb{R}$

20 Si: $x = 1981\ (1+2+3+\ldots+1982)$

$y = 1982\ (1+2+3+\ldots+1981)$

entonces

A)$x<y-1$ B)$x<y-2$ C)$x<y-3$ D)$x>y$ E)$x=y-\frac{1}{2}$

TAREA DOMICILIARIA

01 Sean los intervalos:

$$M=[-6;13[\ \wedge N=]-3;5[$$

www.SIGLO21.com

si $M \cap N$ está representado por $]m+1;\ n-2[$, calcular: $m+n$

A) -3 B) -1 C) 0 D) 3 E) 5

02 Resolver:

$$\frac{2x-3}{2}-\frac{5-x}{3}>\frac{4x-1}{4}-\frac{x+15}{6}$$

A) $x>5/6$ B) $x<5/6$ C) $x>5$ D) $x>6$ E) $x<65$

03 Resolver:

$$7(3-2x) + 2(2x-15) < 2(5x-7) - 3(2x-11)$$

A) $x \in]2;+\infty[$ B) $x \in]-\infty;-2[$ C) $x \in]0;+\infty[$

D) $x \in]-2;+\infty[$ E) $x \in]-\infty;2[$

04 Indicar verdadero *(V)* o falso *(F)* según corresponda:

( ) Si: $-2<x<3 \rightarrow 0x^2<9$

( ) Si: $-3<x<4 \rightarrow 9<x^2 16$

( ) Si: $x \in \mathbb{R} \rightarrow x^2>0$

A) VVV B) VFF C) VFV D) FVF E) FFF

05 ¿Cuál de las expresiones es correcta?

A) $a \geq b$ y $b \geq a \Rightarrow a=b$ B) $a>b \Rightarrow a-b \geq 0$

C) $a \geq b \Rightarrow a=b \vee a>b$ D) $a \neq b \Rightarrow a>b \vee a<b$

E) Todas

SEGUNDA PRACTICA DIRIGIDA

01 Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

( ) Si $x \leq 0 \Rightarrow x^2 \geq 0$

( ) Si $x>0 \Rightarrow x+\frac{1}{x} \geq 2$

( ) Si $2 \leq x \leq 5 \Rightarrow \frac{1}{2} \geq \frac{1}{x} \geq \frac{1}{5}$

A) VVF B) VFV C) FVV D) VVV E) FFV

02 Si: $A = [-2; 8]$

$B = <5; 10>$

hallar: $A-(A \cap B)$

A) $<5; 8]$ B) $[-2; 10>$ C) $[-2; 5]$

D) $<5; 8>$ E) $<-2; 5>$

03 Sabiendo que $x \in <-3; 4>$, hallar el intervalo de variación de: $\frac{x+6}{x+5}$

A) $\left]\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right[$ B) $\left]1;\frac{3}{2}\right[$ C) $\left[\frac{10}{2};2\right]$

D) $\left]\frac{10}{9};\frac{3}{2}\right[$ E) $\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$

04 Determine $n(A)$, si:

$$A=\left\{x \in \mathbb{Z} / \frac{x}{x-1} \in \left\langle\frac{2}{3};\frac{4}{5}\right\rangle\right\}$$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

05 Sea $a, b \in \mathbb{R}^+$; además $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1$

Proporcione el menor valor de ab.

A) 5 B) 4 C) 3 D) 2 E) 1

06 Si $x \in <-1; 3>$, halle el intervalo de variación de: $\frac{1}{2+3x^2}$

A) $\left\langle\frac{1}{29};1\right\rangle$ B) $\left\langle\frac{1}{29};\frac{1}{2}\right\rangle$ C) $\left[\frac{1}{29};\frac{1}{2}\right\rangle$

D) $\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{29}\right\rangle$ E) $\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{29}\right]$

07 Sea $a>1>b$. Indicar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

( ) $a^2>ab$

( ) $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$

( ) $\frac{1}{a+1} \in \left\langle 0;\frac{1}{2}\right\rangle$

A) VFV B) VFF C) FFV D) FFV E) VVF

08 Dado $\{a; b; c\} \subset \mathbb{R}^+$

Señale el menor valor de: $\frac{(a+1)(b+1)(c+1)}{\sqrt{abc}}$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

09 Proporcione el numero de valores enteros de «x», que verifica la desigualdad:

$$\frac{1}{4}<\frac{1}{3x-2}<1$$

A) 4 B) 3 C) 2 D) 1 E) Ninguno

10 Si $x>2$, el menor valor de «k»:

$$k=x+\frac{4}{x-2}$$

es:

A) 2 B) 4 C) 6 D) 8 E) 10

11 Sabiendo que: $x \in <2; 4>$, $y \in <-3; -1>$, señale el mayor valor entero de $1-xy$

A) 8 B) 9 C) 10 D) 11 E) 12

12 Sean los intervalos:

$$A =]-3; 2];\ B = [-1; 5[$$

Calcular la suma del mayor valor entero de $A \cup B$ con el menor valor entero de $A \cap B$.

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

13 Indique el valor de verdad de:

( ) Si $x \in <-3;1> \Rightarrow x+2 \in <-1;3>$

( ) Si $x \in <-2;4> \Rightarrow \frac{1}{2} < \frac{x+3}{2} < \frac{7}{2}$

( ) Si $x \in <-5;-2> \Rightarrow -1 < \frac{1}{x+1} < \frac{1}{4}$

A) VVV B) VVF C) VFF D) FVV E) FFV

14 Indicar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

( ) Si $b > a > 0 \Rightarrow a < \sqrt{ab}$

( ) Si $a;b \in \mathbb{R}^+ \wedge a \neq b \Rightarrow a+b > 2\sqrt{ab}$

( ) Si $a;b \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow \frac{a+b}{2} \geq \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$

A) FFV B) FVV C) VVF D) VVV E) VFF

15 Sean los conjuntos:

$A = \{x / 6 < 3x < 12\}$

$B = \{x / -1 \leq x-2 \leq 3\}$

$C = \{2x / x \in A \wedge x \in B\}$

Proporcionar $n(C)$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

16 Calcular la suma de valores enteros de «x» que verifican la desigualdad:

$$1 + x < 3x - 1 \leq 9 + x$$

A) 11 B) 12 C) 13 D) 14 E) 15

17 Si: $a > 0 \wedge -b > 0$, indique el valor de verdad de:

( ) $\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$

( ) $b(b-a) > 0$

( ) $\frac{b^3}{a} - b^2 < 0$

A) FFV B) VVV C) VFV D) VFF E) FVV

18 Si $x<0<y$, indicar verdadero *(V)* o falso *(F)* en las proposiciones:

( ) $xz < yz; \forall z \in \mathbb{R}$

( ) $\frac{1}{x} < \frac{1}{y}$

( ) $x^3 < y^3$

A) VFF B) FVV C) FVF D) FFF E) VVF

19 Cuál de los siguientes intervalos representa la extensión del conjunto:

$$A = \{x \in \mathbb{R} / (-x+1) \notin <-\infty;1>\}$$

A) $]-\infty;0]$ B) $[0;+\infty[$ C) $]1;3[$

D) $]-\infty;0[$ E) $]0;+\infty[$

20 Sea el conjunto: $S = \{r \in \mathbb{Q} / r \geq 0 \wedge r^2 \leq 2\}$

¿cuál(es) de las siguientes proposiciones es(son) verdadera(s)?

I) $\frac{5}{4} \in S$

II) $\sqrt{2} \in S$

III) $\frac{6}{5} \in S$ y $\frac{3}{2} \in S$

TERCERA PRACTICA DIRIGIDA

01 Si $a>0 \wedge b<0$, señalar el valor veritativo de las siguientes proposiciones:

( ) $\frac{b+1}{a} < a^{-1}$ ( ) $b^2 < a^2$ ( ) $ab > ab - a^2$

A) VFF B) VVF C) FVV D) VFV E) FFV

02 Indicar verdadero *(V)* o falso *(F)* en las siguientes proposiciones:

( ) $\forall a \in \mathbb{R}: a^2 > 0$

( ) Si $b < 0 < a \Rightarrow b(a-b) > 0$

( ) $\forall x \in \mathbb{R}: x + \frac{1}{x} \geq 2$

A) FFV B) FFF C) VVF D) VFV E) VFF

03 Si: $b < a < 0$, resolver:

$$\frac{a}{b}x + \frac{b}{a} < \frac{a}{b} + \frac{b}{a}x$$

A) $x>1$ B) $x<1$ C) $x \in \Phi$ D) $x \in \mathbb{R}$ E) $x \leq 1$

04 Sabiendo que: $A = \left\{2x-1 / \frac{3x-1}{x-1} \in <4;9>\right\}$

señale la cantidad de enteros de "A".

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

05 Si $x \in [-5;-3[$, hallar el intervalo de variación de $\frac{x+4}{x+2}$.

A) $\left[0;\frac{1}{3}\right]$ B) $\left]-1;\frac{1}{3}\right]$ C) $\left[-1;\frac{3}{4}\right[$ D) $\left]\frac{1}{3};2\right]$ E) $\left[\frac{1}{3};+\infty\right[$

06 Resolver: $\frac{x}{n}-\frac{1-3x}{2}<\frac{x+1}{4n}$; $n<-0,5$

A) $\left\langle -\infty;\frac{1}{2}\right\rangle$ B) $\left\langle \frac{1}{3};+\infty\right\rangle$ C) $\left\langle -\infty;\frac{1}{3}\right\rangle$ D) $\left\langle -\frac{1}{3};+\infty\right\rangle$ E) $\left\langle -\frac{1}{2};+\infty\right\rangle$

07 Dado los siguientes conjuntos:

$A=\{x\in\mathbb{R}/x-2<2x+1<3x-1\}$

$B=\left\{x\in\mathbb{R}/\left(\frac{2-x}{3}\right)\in[-3;4>\right\}$

$C=\left\{x\in\mathbb{R}/\left(\frac{x+1}{2}\right)\in(<-5;2>-\{0;1\})\right\}$

determine el conjunto: $D=(A\cap B)\setminus C$

A) $<-1;1>$ B) $<-11;3>$ C) $[3;11]$

D) $<-11;11]$ E) $\mathbb{R}^+$

08 Si $a,b,c\in\mathbb{R}^+$ y $a^2+b^2+c^2=12$, el mayor valor de abc es:

A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

09 De los siguientes enunciados:

I) Si $a<0 \wedge b<0$, entonces:

$$\frac{ab+3}{a}<\frac{3}{a}.$$

II) Si $a>0 \wedge b>0$, entonces:

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\geq\frac{2ab}{a+b}$$

III) $\forall\, a,b,c\in\mathbb{R}$:

$$a^2+b^2+c^2\geq ab+ac+bc$$

son ciertos:

A) I y II B) I y III C) II y III D) I, II y III E) Sólo I

10 Si $a,b,c,d\in\mathbb{R}$, además:

$$a^2+b^2=1\wedge c^2+d^2=1$$

determine el menor valor de λ en:

$$ac+bd\leq\lambda$$

A) 3 B) 2 C) -1 D) 1 E) 5

11 Indique el máximo valor de "A" que satisface la siguiente desigualdad:

$$\frac{2y}{x}+\frac{2y}{z}+\frac{2x}{w}+\frac{x}{3y}+\frac{z}{3y}+\frac{w}{3x}\geq A$$

Si: $x,y,z,w\in\mathbb{R}^+$

A) $\sqrt{6}$ B) $6\sqrt{3}$ C) $2\sqrt{6}$ D) $6\sqrt{2}$ E) $3\sqrt{6}$

12 Sabiendo que $x\in<-7;-2>$ y el campo de variación de $x^2+12x+3$ es $[m;n>$, calcular: $\frac{m+n}{2}$

A) 21 B) 15 C) -25 D) -20 E) 30

13 Si $x>-3$, acerca de:

$$H=\frac{x^2+11x+33}{x+3}-2$$

podemos afirmar:

A) $H\leq3$ B) $H\leq2$ C) $H\geq9$ D) $H\geq10$ E) $H\leq1$

14 Si $\{x,y,z,w\}\subset\mathbb{R}^+$, el mayor valor de K que cumple:

$$(x+y+z+w)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{w}\right)\geq k$$

es:

A) 12 B) 16 C) 8 D) 4 E) 32

15 Sea $x,w,z\in\mathbb{R}$, además:

$$x^2+z^2+2z+11\leq2(3x+4w)-16w^2.$$

Calcular: $x+z+w$

A) 1 B) 2,25 C) 1,5 D) 1,75 E) 2,75

16 Calcular la suma de valores enteros de "x" en:

$$\frac{7x-2}{2}<\frac{5x+6}{3}<\frac{9x+12}{5}$$

A) 0 B) 1 C) 2 D) -2 E) -1

17 Calcular el mayor valor entero que verifica:

$$(x+1)(x+2)(x+3)\geq x^3+6x^2+8x-7$$

A) -5 B) -4 C) -3 D) 3 E) 4

18 Si $a,b,c,d\in\mathbb{R}^+$, además:

$$\sqrt{a^2+c^2}.\sqrt{b^2+d^2}\geq\lambda(ab+cd)$$

podemos afirmar:

A) $\lambda\leq1$ B) $\lambda\leq5$ C) $\lambda\geq-1$ D) $\lambda\geq-5$ E) $\lambda\in\mathbb{R}$

19 Si: $9x^2+4y^2+25z^2=6xy+15xz+10yz$

calcular: $\frac{x+5z}{4y}$; $x,y,z\in\mathbb{R}$

A) $\frac{1}{3}$ B) 3 C) $\frac{2}{3}$ D) $\frac{3}{2}$ E) 4

20 Sea $a,b,c\in\mathbb{R}^+\wedge a^2+b^2+c^2=1$. En la desigualdad:

$$(a+b+c)\left(\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\right)\geq m$$

entonces:

A) $m\geq2$ B) $m\leq1$ C) $m>3$ D) $m\leq\frac{3}{2}$ E) $m\geq-1$

CUARTA PRACTICA DIRIGIDA

* Demostrar en los siguientes casos :

01 $\forall a,b \in \mathbb{R} \rightarrow a^2+b^2 \geq ab$

02 $\forall a,b \in \mathbb{R} \rightarrow \dfrac{a^4+b^4}{2} \geq \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^4$

03 $\forall a,b \in \mathbb{R}^+ \rightarrow \left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)(a+b) \geq 4$

04 si : $0<a \leq b \rightarrow \dfrac{a}{b}+\dfrac{3b}{a} \leq \dfrac{b^2}{a^2}+3$

05 Demostrar que:

$$(ab+xy)(ax+by) > 4abxy$$

06 Demostrar que si: $a^2+b^2=1$

$$\wedge\ x^2+y^2=1 \rightarrow\ ax+by<1$$

07 Demostrar que: $a^3b+ab^3 \leq a^4+b^4$

08 Demostrar que:

$$6abc < bc(b+c)+ca(a+c)+ab(b+a)$$

09 Demostrar que: $(n!)^2 > n^n$

10 $\forall a,b \in \mathbb{R}^+ \rightarrow \dfrac{a^n+b^n}{2} \geq \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^n$

11 $\forall a,b \in \mathbb{R} \rightarrow a^b b^a < \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^{a+b}$

12 $(a+b+c+d)\left(a^3+b^3+c^3+d^3\right) > \left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)^2$

13 $\forall a,b,c \in \mathbb{R}^+ \rightarrow \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c} < \dfrac{a^8+b^8+c^8}{a^3b^3c^3}$

14 $\left(\dfrac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c}\right)^{a+b+c} > \left(a^a b^b c^c\right) > \left(\dfrac{a+b+c}{3}\right)^{a+b+c}$

15 $\forall a,b,c$ no negativos , *si* $a+b+c=1$

$$\rightarrow 0 \leq ab+bc+ac-abc \leq \frac{7}{27}$$

16 $\forall a,b$ no negativos , si $a+b=1$

$$\rightarrow \left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2 \geq \frac{25}{2}$$

17 $0<a \leq b,$ Entonces :

$$a \leq \frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \leq b$$

18 Demostrar que:

$$a^4+b^4+c^4 \geq a^2bc+b^2ac+c^2ab$$

19 Demostrar que: $\forall a \neq b \in \mathbb{R}^+$, se cumple:

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^3 < \frac{a^3+b^3}{2}$$

20 $\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{n+1} < 1+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{4^2}+\ldots+\dfrac{1}{n^2}$

21 Si $a>0$ y $b>0$, entonces $ab>0$

22 Si $a<b$ y $b<c$, entonces $a<c$

23 Si $a<b$, entonces $a+c<b+c$

24 Si $a<b$ y $c<d$, entonces $a+c<b+d$

25 Si $a<b$ y $c>0$, entonces $ac<bc$

26 Si $a<b$ y $c<0$, entonces $ac>bc$

27 $\forall a \in \mathbb{R} : a^2 \geq 0$

28 $\forall a,b,c,d \in \mathbb{R}^+ / a<b\ \wedge\ c<d \Rightarrow ac<bd$

29 $ab>0 \Leftrightarrow (a>0 \wedge b>0) \vee (a<0 \wedge b<0)$

30 $ab<0 \Leftrightarrow (a>0 \wedge b<0) \vee (a<0 \wedge b>0)$

31 $a>0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{a}>0$

32 $a<0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{a}<0$

33 Si: $a \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0 \Rightarrow a^2 \neq 0$

34 Supóngase que a y b son números reales $ab=0$ si y sólo si $a=0$ ó $b=0$

CLAVES DE LA PRIMERA PRACTICA				
01) B	02) C	03) C	04) A	05) E
06) A	07) E	08) B	09) B	10) A
11) D	12) A	13) C	14) C	15) B
16) B	17) D	18) C	19) E	20) D
01) D	02) A	03) D	04) B	05) C

CLAVES DE LA SEGUNDA PRACTICA									
1)D	2)C	3)D	4)A	5)B	6)C	7)A	8)B	9)E	10)C
11)E	12)C	13)A	14)D	15)B	16)D	17)B	18)B	19)A	20)A



OBJETIVOS :

* Reconocer las inecuaciones.
* Clasificar las inecuaciones atendiendo a su grado y el número de incógnitas.
* Relacionar las inecuaciones de primer grado con una incógnita con las gráficas de funciones afines.
* Resolver inecuaciones de primer con una incógnita.
* Relacionar las inecuaciones de segundo grado con una incógnita con las gráficas de las funciones cuadráticas.
* Resolver inecuaciones de segundo grado con una incógnita.
* Conocer y utilizar diversos métodos de resolución de inecuaciones.
* Saber resolver sistemas de inecuaciones con 1 y 2 incógnitas.
* Traducir al lenguaje algebraico problemas expresados en lenguaje cotidiano, interpretando críticamente los resultados de las soluciones obtenidas.
* Resolver sistemas de inecuaciones. Interpretar gráficamente las soluciones y expresar las soluciones en forma de intervalo.

INTRODUCCIÓN :

Al igual que las desigualdades las inecuaciones son de suma importancia ya que se aplican en diferentes ramas de la ciencia es más un estudiante que desea seguir estudios superiores no debería estar ajeno a este tema por su importancia en cursos de matemática superior como cálculo diferencial e integral en donde se trabajan con funciones y para conocer el dominio y rango de una función hay que conocer los diferentes métodos de solución de una inecuación. Además de ello con inecuaciones se puede calcular el máximo y mínimo de una función, tema central y de su suma importancia en las diversas ramas de la ciencia. Antes de empezar el capítulo , repacemos lo estudiado en desigualdades.

DESIGUALDAD :

Es la relación que existe entre cantidades que poseen diferente valor.

EJEMPLO:

* Si poseemos los siguientes pares: *8* y *7*; *2* y *6*.
* Podemos por simple inspección afirmar:
  * *8* es mayor que *7*.
  * *2* es menor que *6*.

*Esta relación entre los números se representa mediante los signos de relación.

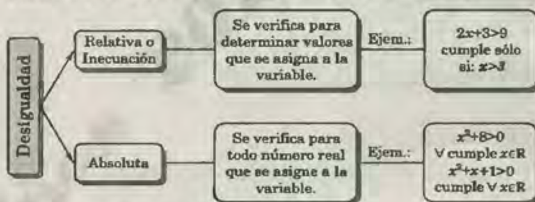
$>$: *Mayor que ...*

$<$: *Menor que ...*

$\geq$: *Mayor o igual que ...*

$\leq$: *Menor o igual que ...*

CLASES DE DESIGUALDADES :



INTERVALO ABIERTO :

No considera los extremos $\langle 2;6\rangle$

INTEVALO CERRADO :

Si considera los extremos $[2\,;\,6]$

INTERVALO SEMIABIERTO :

Uno de los extremos es considerado $[2;6\rangle \vee \langle 2;6]$

INTERVALO NO ACOTADO :

Uno de los extremos tiende al infinito.

$$x > a \Rightarrow \langle a;+\infty\rangle \quad ; \quad x < a \Rightarrow \langle -\infty;a\rangle$$

$$x \geq a \Rightarrow [a;+\infty\rangle \quad ; \quad x \leq a \Rightarrow \langle -\infty;a]$$

INECUACIÓN

Es aquella relación de orden que se establece entre dos expresiones matemáticas de por lo menos una variable y que se satisface para un determinado conjunto de valores, y si no se satisface para ningún valor se dice que la inecuación es incompatible.

$$A(x;y;z;...) \gtrless B(x;y;z;...)$$

donde **A , B** son expresiones matemáticas.

EJEMPLOS:

* $4x+7 > -6x+27$
* $\dfrac{-40x^3-1}{x+1} \geq \dfrac{x^3-2}{x-1}$
* $\sqrt{x-5} \leq 1$

FORMA GENERAL DE UNA INECUACIÓN:

Sea $F(x)$ una expresión matemática de variable x, se tiene una de las siguientes desigualdades:

$$F(x) > 0 \quad ; \quad F(x) < 0$$
$$F(x) \geq 0 \quad ; \quad F(x) \leq 0$$

Es aquel valor (o valores) de la incógnita (o incógnitas) que verifica la inecuación.

EJEMPLOS:

*En la inecuación: $2x + 3 > x + 5$ una solución particular es $x = 5$, pues $2(5) + 3 > 5 + 5$ es cierto

* También en la inecuación $x + y \geq 2$, para $x = 1$ e $y = 1$ la inecuación se verifica , pues $1 + 1 \geq 2$ es cierto, luego $(1; 1)$ es una solución particular .

CONJUNTO SOLUCIÓN DE UNA INECUACIÓN

Es aquel conjunto denotado por **C.S.** que agrupa s todas las soluciones particulares (si existen) de una inecuación. Si la inecuación no tiene solución, entonces diremos que el **C.S.** es el conjunto vacío.

RESOLVER UNA INECUACIÓN

Resolver una inecuación consiste en hallar su conjunto solución; para ello se utilizan los teoremas de desigualdades estudiadas anteriormente.

EJEMPLO:

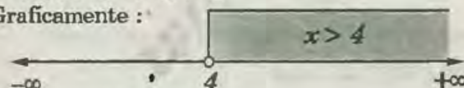
Resolver : $4x + 13 > 2x + 21$

RESOLUCIÓN :

* Las inecuaciones se resuelven usando el mismo procedimiento que en las ecuaciones, es decir , se despejan las variables transponiendo los términos . Así , logramos inecuaciones equivalentes.

$$4x - 2x > 21 - 13$$
$$\Rightarrow 2x > 8 \Rightarrow x > 4$$

* Graficamente :



* Entonces : $C.S. = \langle 4; +\infty \rangle$

INECUACIONES POLINOMIALES DE UNA VARIABLE

Una inecuación polinomial de una variable tiene la forma :

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n+1} + a_2x^{n+2} + \ldots + a_n \gtrless 0$$

$$a_0 \neq 0; \{a_0; a_1; a_2; \ldots; a_n\} \subset \mathbb{R}$$

Luego la inecuación polinomial tiene la forma:

$$P_{(x)} > 0 \quad ; \quad P_{(x)} < 0$$
$$P_{(x)} \geq 0 \quad ; \quad P_{(x)} \leq 0$$

EJEMPLOS :

$P_{(x)} = 6x + 7 \geq 0$

$P_{(x)} = 7x^2 - x + 1 > 0$

$P_{(x)} = 3x^5 - x + 2 \leq 0$

INECUACIÓN LINEAL :

Forma general: $P(x) = ax + b \gtrless 0$; $a \neq 0$

* Es decir : $ax + b > 0 \ \vee \ ax + b < 0$

$ax + b \geq 0 \ \vee \ ax + b \leq 0$

Donde $a \neq 0 \wedge \{a; b\} \subset \mathbb{R}$

* La resolución depende principalmente del primer coeficiente.

Sea: $ax + b > 0$

$\Rightarrow ax + b + (-b) > 0 + (-b)$

$\Rightarrow ax > -b$

I) Si: $a > 0 ; x > -\dfrac{b}{a} \Rightarrow C.S. = \left\langle -\dfrac{b}{a}; +\infty \right\rangle$

II) Si: $a < 0 ; x < -\dfrac{b}{a} \Rightarrow C.S. = \left\langle -\infty; -\dfrac{b}{a} \right\rangle$

EJEMPLO 1:

Resolver : $ax + b \geq 0; \ a, b \in \mathbb{R}^+$

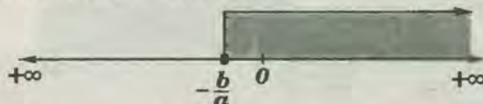
RESOLUCIÓN:

* Resolver una inecuación de este tipo es similar a resolver una ecuación de primer grado, solo hay que tener en cuenta las propiedades generales de las desigualdades , en efecto:

* Transponiendo b al segundo miembro: $ax \geq -b$

* Dado que $a \in \mathbb{R}^+$, es decir: $a > 0 \Rightarrow x \geq -\dfrac{b}{a}$

* Graficando en la recta real:



* Vemos que : $x \in \left[-\dfrac{b}{a}; \infty \right]$

EJEMPLO 2 :

Resolver : $5x + 3 < 0$

RESOLUCIÓN :

$5x + 3 < 0 \Rightarrow 5x < -3 \Rightarrow x < -\dfrac{3}{5}$

$C.S. = \left\langle -\infty; -\dfrac{3}{5} \right\rangle$

EJEMPLO 3 :

Resolver : $\frac{3x-2}{2}-\frac{5x-3}{3}<\frac{x-1}{12}$

RESOLUCIÓN:

* Siendo el $MCM(2; 3; 12) = 12$; un número positivo, el signo de la desigualdad no se altera al efectuar las operaciones indicadas.

$$6(3x-2)-4(5x-3)<x-1$$
$$\Rightarrow 18x-12-20x+12<x-1$$
$$\Rightarrow -2x<x-1 \Rightarrow -3x<-1$$

* Multiplicando por (-1), obtenemos :

$$3x>1 \Rightarrow x>\frac{1}{3} \Rightarrow x\in\left\langle\frac{1}{3};\infty\right\rangle$$

EJEMPLO 4 :

Resolver : $\frac{2}{3}x+\frac{1}{4}>\frac{3}{5}x+\frac{5}{4}$

RESOLUCIÓN:

$$\frac{2}{3}x+\frac{1}{4}>\frac{3}{5}x+\frac{5}{4} \Rightarrow \frac{2}{3}x-\frac{3}{5}x>\frac{5}{n}-\frac{1}{4}$$
$$\Rightarrow \left(\frac{2}{3}-\frac{3}{5}\right)x>\frac{4}{4} \Rightarrow \frac{1}{15}x>1 \Rightarrow x>15$$
$$\Rightarrow C.S=\langle 15;+\infty\rangle$$

EJEMPLO 5 :

Resolver :

$(x+1)^2+(x-1)^2+(x-2)^2\leq 3(x+1)(x-1)$

RESOLUCIÓN:

* Efectuando las operaciones indicadas obtenemos:

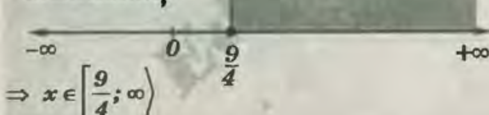
$x^2+2x+1+x^2-2x+1+x^2-4x+4\leq 3x^2-3$

* Simplificando:

$$3x^2-4x+6\leq 3x^2-3 \Rightarrow -4x\leq -9$$

* Multiplicando por (-1): $4x\geq 9 \Rightarrow x\geq\frac{9}{4}$

* Gráficamente :



$$\Rightarrow x\in\left[\frac{9}{4};\infty\right\rangle$$

EJEMPLO 6 :

Resolver : $12-\frac{3x}{2}<\frac{5x+13}{3}<\frac{9}{5}(2+x)$

RESOLUCIÓN :

* La inecuación es equivalente a:

$$\underbrace{12-\frac{3x}{2}<\frac{5x+13}{3}}_{A} \wedge \underbrace{\frac{5x+13}{3}<\frac{9}{5}(2+x)}_{B}$$

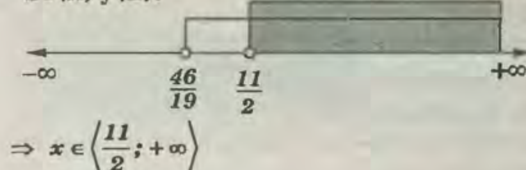
A) Por 6 : $72-9x<10x+26$

$\Rightarrow 72-26<10x+9x \Rightarrow x>\frac{46}{19}$

B) Por 15 : $25x+65<54+27x$

$\Rightarrow 27x-25x>65-54 \Rightarrow x>\frac{11}{2}$

* De (A) y (B):



$$\Rightarrow x\in\left\langle\frac{11}{2};+\infty\right\rangle$$

EJEMPLO 7 :

Resolver el sistema :

$$\begin{cases}\frac{2x-3}{4}-\frac{3x-1}{2}\geq 1 & \text{..................(I)}\\ \frac{5x-3}{3}-\frac{8x-1}{4}\leq -1 & \text{..................(II)}\end{cases}$$

RESOLUCIÓN:

* Resolviendo cada inecuación:

* De (I): $MCM(4; 2; 1) = 4$

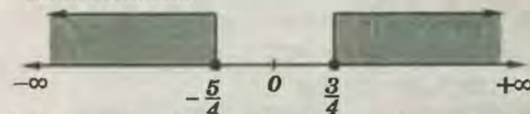
$\Rightarrow 2x-3-2(3x-1)\geq 4 \Rightarrow 2x-3-6x+2\geq 4$

$$\Rightarrow -4x\geq 5 \rightarrow x\leq -\frac{5}{4}$$

* De (II): $MCM(3; 4; 1) = 12$

$$\Rightarrow 4(5x-3)-3(8x-1)\leq -12$$
$$\Rightarrow 20x-12-24x+3\leq -12$$
$$\Rightarrow -4x\leq -3 \Rightarrow 4x\geq 3 \Rightarrow x\geq\frac{3}{4}$$

* En la recta real:



* Como no hay intersección de las soluciones de (I) y (II) $\Rightarrow x\in\phi$

PUNTOS CRÍTICOS

En un polinomio no constante los puntos críticos son las raíces o ceros de dicho polinomio:

EJEMPLO:

$P_{(x)}=x-2$

$x=2$ es un punto crítico ; pues $P_{(2)}=0$

CRITERIO DE LOS PUNTOS CRÍTICOS

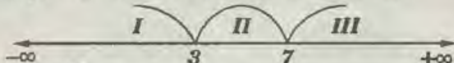
Es utilizado para analizar la variación de los signos de los factores lineales (de coeficientes reales) en una multiplicación indicada.

EJEMPLO 1:

Sea $P(x) = (x-3)(x-7)$

* Donde los puntos críticos son 3 y 7.

Ubiquemos estos valores en la recta real.



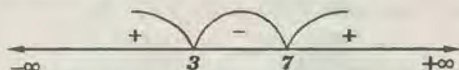
* Los puntos críticos particionan a la recta $\mathbb{R}$ en 3 zonas (intervalos):

I) $x \in \langle -\infty;3\rangle \Leftrightarrow x<3 \Leftrightarrow x-3<0 \wedge x-7<-4<0$,
luego $(x-3)(x-7)>0$

II) $x \in \langle 3;7\rangle \Leftrightarrow 3<x<7 \Leftrightarrow 0<x-3<4 \wedge x-7<0$,
luego $(x-3)(x-7)<0$

III) Si $x \in \langle 7;\infty\rangle \Leftrightarrow x>7 \Leftrightarrow x-3>4 \wedge x-7>0$,
luego $(x-3)(x-7)>0$

* Gráficamente: $P(x) = (x-3)(x-7)$



veamos que $P(x)$ es positivo en dos intervalos y es negativo en un intervalo.

* Si se trata de resolver :

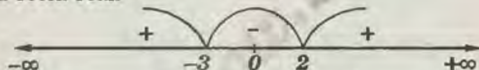
$$P(x) = (x-3)(x-7) > 0$$

$$\Rightarrow C.S. = \langle -\infty;3\rangle \cup \langle 7;\infty\rangle$$

EJEMPLO 2 :

Sea $P(x) = (x-2)(x+3)$

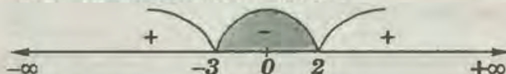
* Los puntos críticos son 2 y -3, ubiquémoslos en la recta real.



* Los puntos críticos particionan a la recta $\mathbb{R}$ en 3 zonas (intervalos) , analicemos las variaciones.

Zona \ Factor	$(x-2)$	$(x+3)$	$P(x)$
$x<-3$	−	−	+
$-3<x<2$	−	+	−
$x>2$	+	+	+

* Si se trata de resolver $P(x) \leq 0$



* Tendríamos que el $C.S. = [-3;2]$

INECUACIONES CUADRÁTICAS

Son todas aquellas inecuaciones que al reducirse adopta la forma canónica.

* Es decir : $P(x) = ax^2+bx+c \gtrless 0$

$ax^2+bx+c>0 \vee ax^2+bx+c<0$
$ax^2+bx+c\geq 0 \vee ax^2+bx+c\leq 0$

* Donde x, es la incógnita y; $a, b, c \in \mathbb{R} / a \neq 0$

RESOLUCIÓN GENERAL :

La resolución depende exclusivamente del coeficiente principal y de la discriminante $(\Delta = b^2-4ac)$ del polinomio P. Luego se tiene 3 casos.

PRIMER CASO ($\Delta = 0$) :

Cuando $\Delta = 0$; el polinomio $P_{(x)} = ax^2+bx+c$; $a \neq 0$; es un trinomio cuadrado perfecto.

EJEMPLO 1:

* $(x-1)^2 \geq 0 \Rightarrow C.S. = \mathbb{R}$, pues $\forall x \in \mathbb{R}$, cumple al ser reemplazada en la inecuación.

* $x^2-4x+4>0 \Leftrightarrow (x-2)^2>0$, notamos que se verifica $\forall x \in \mathbb{R}$, excepto cuando $x = 2$.

$$\Rightarrow C.S. = \mathbb{R}-\{2\}$$

* $x^2-6x+9<0 \Leftrightarrow (x-3)^2<0$, obviamente la inecuación tiene el símbolo que hace que esta inecuación sea no verificable para algún valor real.

$$\Rightarrow C.S. = \phi$$

* $(x-5)^2 \leq 0 \Leftrightarrow (x-5)^2 = 0 \Rightarrow$ Tenemos que la única solución es $x = 5$. $\Rightarrow C.S. = \{5\}$

OBSERVACIÓN:

La inecuación $(2ax+b)^2 \leq 0$ presenta solución única.

EJEMPLO 2 :

Resolver : $4x^2-12x+9 \geq 0$

RESOLUCIÓN :

* El polinomio es: $P(x) = 4x^2-12x+9$

* Hallemos su discriminante

$$\Delta = 144-4(4)(5) = 0$$

$\Rightarrow P_{(x)} = 4x^2-12x+9$ es un T.C.P.

* Luego : $P_{(x)} = (2x-3)^2 \geq 0 \Rightarrow (2x-3)^2 \geq 0$

* Como se observará esto es cierto $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow C.S. = \mathbb{R} = \langle -\infty;+\infty\rangle$$

OTRA FORMA :

$x^2+4x+7>0$; completando cuadrados:

$\underline{x^2+4x+4}+3>0$

$\Rightarrow (x+2)^2+3>0$

* Se observa que $(x+2)^2+3$ siempre es positivo $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow C.S.=\langle -\infty;+\infty \rangle$

SEGUNDO CASO ($\Delta > 0$):

Aquí el polinomio $P(x) = ax^2 + bx + c$ es factorizable sobre $\mathbb{R}$. Es decir :

$$P(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$$

donde x_1, x_2 son las raíces.

Luego para resolverlos $P(x) \gtrless 0$ aplicamos el criterio de los puntos críticos.

MÉTODO DE LOS PUNTOS CRÍTICOS :

El método de los puntos críticos se utiliza en una inecuación cuadrática si y solo si $\Delta > 0$.

Procedimiento:

I) El primer coeficiente $(a > 0)$ en caso contrario multiplicar por (-1).

II) Factorizar el polinomio cuadrático :

$P(x) = ax^2 + bx + c$ llevándolo a la forma.

$P(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$

III) Luego se calcula los puntos críticos $(x_1; x_2)$ para ubicarlos en la recta numérica real $(x_1 < x_2)$

IV) Después de ubicar en la recta numérica real tenemos:



OBSERVACIÓN:

Es indispensable que el primer coeficiente de cada factor lineal sea positivo , por ello se colocan entre los puntos críticos los signos (+) y (–) alternadamente de derecha a izquierda; es decir, comenzando de la derecha del mayor punto crítico con el signo (+) .

V) Si tenemos :

$P(x) = ax^2 + bx + c > 0 \ (a > 0 \wedge \Delta > 0)$

$P(x) = ax^2 + bx + c \geq 0 \ (a > 0 \wedge \Delta > 0)$

El conjunto solución estará formado por los intervalos donde aparezca el signo (+)

En forma análoga:

$P(x) = ax^2 + bx + c < 0 \ (a > 0 \wedge \Delta > 0)$

$P(x) = ax^2 + bx + c \leq 0 \ (a > 0 \wedge \Delta > 0)$

El conjunto solución estará formado por el intervalo donde aparece el signo (–).

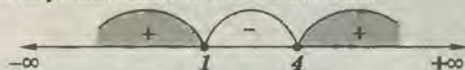
EJEMPLO 1:

Resolver : $x^2 - 5x + 4 \geq 0$

RESOLUCIÓN :

* Factorizando por aspa simple, se tiene $(x-4)(x-1) \geq 0$. Los puntos críticos serán: *1; 4* (que son valores que anulan cada factor).

* Reemplazamos en la recta numérica.



* Empezamos de derecha a izquierda con el signo "+", pues los coeficientes de "x" son positivos, además tomamos la parte positiva, pues el símbolo en la inecuación es "$\geq$".

* Luego : $C.S. = \langle -\infty; 1] \cup [4; +\infty \rangle$

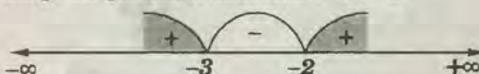
EJEMPLO 2 :

Resolver : $x^2 + x - 6 \geq 0$

RESOLUCIÓN :

$$x^2 + x - 6 \geq 0 \Leftrightarrow (x+3)(x+2) \geq 0$$

* Luego los puntos críticos son : *–3 ; –2*



$\Rightarrow C.S. = \langle -\infty; -3] \cup [2; +\infty \rangle$

EJEMPLO 3:

Resolver : $x^2 + x - 1 < 0$

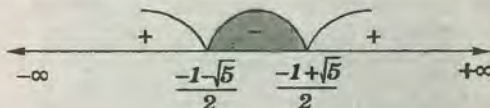
RESOLUCIÓN :

* $\Delta > 0$; pero no es factoriable por aspa simple; pero nos interesa los puntos críticos, entonces podemos calcularlo así:

$$x^2 + x - 1 = 0 \ \Rightarrow \ x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$x_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \ ; \ x_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

* Luego ubicando en la recta numérica real



$$\Rightarrow C.S. = \left\langle \frac{-1-\sqrt{5}}{2}; \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \right\rangle$$

TERCER CASO ($\Delta < 0$):

Aquí emplearemos el teorema del trinomio positivo sea :

$$P_{(x)} = ax^2 + bx + c = a\underbrace{\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{(b^2 - 4ac)}{4a^2}\right]}_{(+)}$$

* Si : $b^2 - 4ac < 0 \wedge a > 0$

* Entonces : $P(x) > 0; \forall x \in \mathbb{R}$

EJEMPLO 1 :

Resolver : $x^2 - x + 1 > 0$

RESOLUCIÓN :

* Se observa $(\Delta = (-1)^2 - 4(1)(1) < 0)$,

luego : $x^2 - x + 1 > 0 \Leftrightarrow 4x^2 - 4x + 4 > 0$

$$\Leftrightarrow (2x-1)^2 + 3 > 0$$

* Pero : $(2x-1)^2 + 3 > 0$

* Se observa que se verifica $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow C.S. = \mathbb{R}$

EJEMPLO 2 :

Resolver : $3x^2 + x + 1 < 0$

RESOLUCIÓN :

* Se observa que $\Delta = 1^2 - 4(3)(1) < 0$

* Luego completando cuadrados en :

$$3x^2 + x + 1 < 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{(\sqrt{3}x)^2 + 2(\sqrt{3}x)\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) + \left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)^2} - \left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)^2 + 1 < 0$$

$$\Rightarrow \left(\sqrt{3}x + \frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^2 + 1 - \frac{1}{12} < 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{\left(\sqrt{3}x + \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)^2 + \frac{11}{12}}_{(+)} < 0$$

* Luego hemos llegado a una contradicción

$$\Rightarrow C.S. = \phi$$

TEOREMA DEL TRINOMIO POSITIVO

Si el polinomio $P(x) = ax^2 + bx + c \ ; \{a; b; c\} \subset \mathbb{R}$ tiene discriminante (Δ) negativo y $a > 0$, entonces: $ax^2 + bx + c > 0; \quad \forall x \in \mathbb{R}$

* Es decir : $\boxed{P(x) > 0; \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow a > 0 \wedge \Delta < 0}$

EJEMPLOS :

* $x^2 + 2x + 3 > 0 \Rightarrow$ Su $C.S. = \mathbb{R}$

pues $\Delta = 2^2 - 4(3) = -8 < 0$, y su coeficiente principal es positivo.

* $x^2 + 4x + 7 < 0 \Rightarrow$ Su $C.S. = \phi$

Pues $\Delta = 4^2 - 4(7) < 0$ y coeficiente principal positivo

$\Rightarrow 0 < x^2+4x+7 < 0 \Rightarrow 0 < 0$..................¡*Absurdo*!

$\Rightarrow C.S. = \phi$

OTRA FORMA :

$$x^2 + 4x + 7 = \underbrace{x^2 + 4x + 4} + 3 < 0$$

$$\underbrace{(x+2)^2}_{+\text{ ó cero}} + \underset{+}{3} < 0 \Rightarrow C.S. = \phi$$

NOTA :

Un teorema análogo será el siguiente:

$ax^2 + bx + c \geq 0, \ \forall x \in \mathbb{R} \quad a;b;c \in \mathbb{R}; \ a \neq 0$

$$\Leftrightarrow a > 0 \wedge \Delta \leq 0$$

TEOREMA DEL TRINOMIO NEGATIVO

Si el polinomio :

$P(x) = ax^2 + bx + c; \{a; b; c\} \subset \mathbb{R}$

tiene discriminante $(\Delta < 0)$ y $a < 0$ entonces:

$$P(x) = ax^2 + bx + c < 0 ; \ \forall x \in \mathbb{R}$$

EJEMPLO :

Resolver : $-4x^2 + x - 1 < 0$

RESOLUCIÓN :

* El primer coeficiente

$$(-4<0) \wedge \Delta = 1 - 4(-4)(-1) < 0$$

* entonces $-4x^2 + x - 1 < 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow C.S. = \langle -\infty; +\infty \rangle$$

INECUACIONES DE GRADO SUPERIOR

FORMA GENERAL :

$$\boxed{P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n \lessgtr 0}$$

Donde los coeficientes del polinomio son números reales con $a \neq 0; \ n \in \mathbb{Z}^+$

* Para determinar el conjunto solución de esta inecuación emplearemos el método de los puntos críticos.

* Si $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ son las raíces reales del polinomio, entonces

$$P(x) = a_0(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)\ldots(x - x_n) \lessgtr 0$$

donde a_0 debe ser positivo, si es negativo se le multiplica por menos uno.

MÉTODOS DE LOS PUNTOS CRÍTICOS :

I) Es conveniente garantizar que $a_0 > 0$ (a_0: coeficiente principal) en caso contario multiplicar por (-1); encontrando así una inecuación

equivalente a la anterior.

II) Factorizar el polinomio en el campo real para hallar los puntos críticos del polinomio; si el polinomio presenta factores cuadráticos que son positivos o negativos $\forall x \in \mathbb{R}$; se debe realizar la cancelación respectiva, teniendo cuidado con el sentido de la desigualdad.

III) Se llevan los puntos críticos en forma ordenada a la recta numérica y se analiza (abiertos y cerrados)

IV) Cada zona determinada por dos puntos de corte consecutivos ,se señalan alternadamente de derecha a izquierda con signos *(+)* y *(–)*. Se inicia siempre con el signo más *(+)*.

V) Si la expresión es mayor que cero se tomarán las zonas positivas y si es menor que cero se tomarán las zonas negativas.

Si: $\left.\begin{matrix} P(x)>0 \\ P(x)\geq 0 \end{matrix}\right\}$ ***Elegimos las zonas (+)***

Si: $\left.\begin{matrix} P(x)<0 \\ P(x)\leq 0 \end{matrix}\right\}$ ***Elegimos las zonas (–)***

NOTA :

Este método también sirve para resolver inecuaciones fraccionarias (con ciertas restricciones).

PROPIEDADES :

$\forall a;b \in \mathbb{R};\ n \in N$

I) $a^{2n}.b \geq 0 \Leftrightarrow b \geq 0 \vee a=0$

II) $a^{2n}.b < 0 \Leftrightarrow b<0 \wedge a \neq 0$

III) $a^{2n+1}.b \geq 0 \Leftrightarrow ab \geq 0$

IV) $a^{2n+1}.b < 0 \Leftrightarrow ab<0$

* Entonces: $\forall x, a \in \mathbb{R}$

1) Si: $(x-a)^{2n+1} \geq 0 \Leftrightarrow (x-a)\geq 0;\ n \in N$

2) Si: $(x-a)^{2n+1} \leq 0 \Leftrightarrow (x-a)\leq 0;\ n \in N$

EJEMPLO 1:

Resolver : $x^3-3x^2+x-5>3x^2-10x+1$

RESOLUCIÓN:

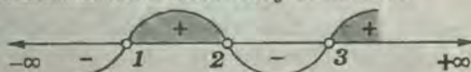
* Despejando : $x^3-6x^2+11x-6>0$ .... *(I)*

* Factorizando por divisores binómicos :

$$(x-1)(x-2)(x-3)>0$$

* Los puntos críticos son: $\{1;\ 2;\ 3\}$

* Graficando en la recta real y analizando :



* Los puntos críticos van abiertos si :

$$P(x)<0;\ P(x)>0$$

* En caso contrario van cerrados :

$$P(x)\geq 0;\ P(x)\leq 0$$

* Como *(I)* es una expresión mayor que cero , se toman las zonas positivas.

* Entonces : $C.S.=]1;2[\cup]3;\infty[$

EJEMPLO 2 :

Resolver : $x^3-4x\geq 0$

RESOLUCIÓN :

* Factorizando :

$$x(x^2-4)\geq 0 \Leftrightarrow x(x+2)(x-2)\geq 0$$

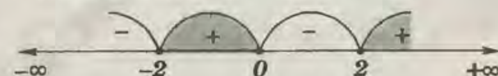
* Ahora determinamos las raíces del polinomio a los que se le denomina puntos críticos, para ello igualamos a cero cada factor :

$$x=0 \ \vee\ x+2=0 \ \vee\ x-2=0$$

* de donde los puntos críticos serán

$$x_1=0 \ \vee\ x_2=-2 \ \vee\ x_3=2$$

* Luego se ubican estos puntos en la recta numérica real :



* Entonces : $C.S.=[-2;0]\cup[2;\infty\rangle$

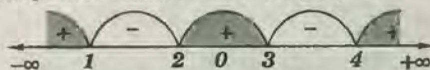
EJEMPLO 3 :

Resolver : $(-x+1)(x-2)(x-3)(x-4)\leq 0$

RESOLUCIÓN:

* Como el coeficiente principal del polinomio es negativo multiplicamos ambos miembros por menos uno, ya sabemos que el sentido de la desigualdad debe cambiar. $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)\geq 0$

* Los puntos críticos son: *1 ; 2 ; 3 ; 4.*



* De lo cual el $C.S.=\langle -\infty;1]\cup[2;3]\cup[4;+\infty\rangle$

EJEMPLO 4 :

Resolver: $(x-4)^{20}(x-8)^4(x+3)(x-5)<0$

RESOLUCIÓN :

* Como vemos que : $(x-4)^{20}$ y $(x-8)^4$ son siempre positivos, entonces simplificando tenemos : $(x-5)(x+3)<0$, donde resolviendo



* Aparentemente el conjunto solución sería $\langle -3;5\rangle$

* Por si reemplazamos los puntos críticos en la inecuación original vemos que *4* no forma parte de la solución , entonces : $C.S.=\langle -3;5\rangle-\{4\}$

EJEMPLO 5 :

Resolver: $(x-1)^6(x+2)(x-3)(x-13)^{28}<0$

RESOLUCIÓN :

* Simplificando se obtiene : $(x+2)(x-3)<0$
* Los puntos críticos son : **-2 ; 3.**



* Notemos que el $C.\ S.=\langle -2;3\rangle$, pero el factor $(x-1)^2$, cancelado, tiene a $x=1$, que es un valor que anula el factor y que reemplazando en la inecuación original tendríamos el absurdo *(0<0)*, esto quiere decir que $x=1$ es un valor no solución.

$$\Rightarrow C.S.=\langle -2;3\rangle-\{1\}$$

* Lo mismo pasa con $x=13$, pero como no está en el **C.S.** no le afecta.

CONJUNTO DE VALORES ADMISIBLES

El conjunto de valores admisibles de una expresión matemática es aquel conjunto denotado por **C.V.A.** que agrupa a todos los valore(s) de la variable(s) que garantizan la existencia de la expresión matemática , es decir , valores de la variable que permiten que la expresión esté bien definida .

El **C.V.A** se va a considerar respecto a $\mathbb{R}$, salvo indicación contraria.

EXPRESIONES POLINOMIALES :

$P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+...+a_n;\ a_0\neq 0;\ n\in Z^+$

$\Rightarrow C.V.A.=C$

EXPRESIONES FRACCIONARIAS :

Como la división por cero no está definida, entonces el denominador no puede ser cero.

así: $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}\Rightarrow C.V.A.=\{x\in\mathbb{R}/Q(x)\neq 0\}$

EXPRESIONES IRRACIONALES :

Estas expresiones están definidas sobre los reales $\mathbb{R}$, de modo que : $\sqrt[n]{f(x)}\in\mathbb{R}$.

* Cuando n es par $\wedge\ n\in Z^+\ \wedge\ n\geq 2\ \wedge\ f(x)\geq 0$

* Cuando n es impar

$$\wedge\, n\in Z^+\wedge n\geq 3\wedge f(x)\in\langle -\infty;+\infty\rangle$$

EJEMPLOS :

* $F(x)=\dfrac{x^2}{2x-1}$, el **C.V.A.** está dado por todos aquellos valores reales para x, tal que $2x-1\neq 0$. Es decir: $C.V.A.=\left\{x\in\mathbb{R}/x\neq\dfrac{1}{2}\right\}=\mathbb{R}-\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$

* en $G(x)=\sqrt{x-2}$, el **C. V. A.** está dado por todos aquellos valores reales para x, tal que el radicando es no negativo : $x-2\geq 0$.

Es decir : $C.V.A.=\{x\in\mathbb{R}/x\geq 2\}=[2;+\infty\rangle$

INECUACIÓN FRACCIONARIA

Son aquellas inecuaciones que se reducen a la siguiente forma general :

$$\boxed{f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}\gtrless 0\ ;\ {}^{\circ}[Q(x)]\geq 1}$$

donde **P** y **Q** son polinomios $^{o}[Q(x)]$: "Grado de $Q(x)$"

RESOLUCIÓN :

* Como $Q(x)\neq 0\Rightarrow Q^2_{(x)}>0$

* Multiplicando a ambos lados de la inecuación siguiente : $\dfrac{P(x)}{Q(x)}>0$ por $Q^2_{(x)}$

* se tiene : $Q^2_{(x)}\times\dfrac{P(x)}{Q(x)}>Q^2_{(x)}\times 0$

* con lo cual el sentido de la desigualdad no se altera.

*Luego, simplificando se tiene :

$Q(x).\ P(x)>0$. Esto último sería una inecuación polinomial , siempre que $Q(x)\neq 0$

*En resumen una inecución fraccionaria de la forma:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}\gtrless 0\ \text{ con }\ Q(x)\neq 0$$

será equivalente a una inecuación polinomial .

RESOLUCIÓN GENERAL :

$$\boxed{\frac{P(x)}{Q(x)}\gtrless 0\Leftrightarrow P(x)\,Q(x)\gtrless 0\ \wedge\ Q(x)\neq 0}$$

* Sabemos que el resultado de dividir signos es el mismo que el de multiplicar signos ; por ello , utilizaremos el método de los puntos críticos que ha sido estudiado en las inecuaciones polinomiales.

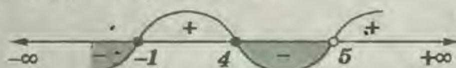
EJEMPLO 1 :

Resolver : $\dfrac{x^2-3x-4}{x-5}\leq 0$

RESOLUCIÓN :

* Factorizando : $\dfrac{(x-4)(x+1)}{x-5}\leq 0$

→ **P.C :** $\{4;-1;5\}$, graficando :



OBSERVACIÓN:

Se iguala a cero los factores del denominador y después se restringen estos puntos críticos es decir van a ir abiertos.

* En -1 y 4 van cerrados por " $\leq$ " ; en 5 abierto por ser del denominador , tomando las zonas negativas.

$$C.S.=\left]-\infty;-1\right]\cup\left[4;5\right[$$

EJEMPLO 2 :

Resolver : $\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-6x+5}\leq 0$

RESOLUCIÓN:

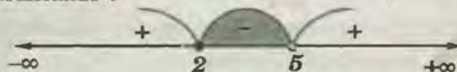
* Factorizando el numerador y denominador se tiene: $\dfrac{(x-2)(x-1)}{(x-5)(x-1)}\leq 0$

*Los valores admisibles serán todos los $x\in\mathbb{R}$, excepto 5 y 1.

* Es decir : $C.V.A.=\mathbb{R}-\{5;1\}$

* Procedemos a simplificar : $\dfrac{x-2}{x-5}\leq 0$

* Graficando :



$$\Rightarrow\ C.S.=\left[2;5\right\rangle$$

* Notar que en 5 es abierto por el **C.V.A.**

EJEMPLO 3 :

Resolver : $\dfrac{x+1}{x-1}\leq\dfrac{x-1}{x+1}$

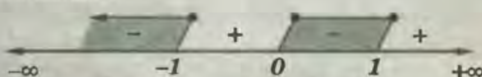
RESOLUCIÓN:

* Garantizar la definición de las expresiones con : $x\neq\{1;-1\}$

* Luego :

$$\frac{x+1}{x-1}-\frac{x-1}{x+1}\leq 0\Rightarrow\frac{4x}{(x+1)(x-1)}\leq 0\Rightarrow P.C.=\{-1;0;1\}$$

* Graficando :



* Entonces: $C.S.=\langle-\infty;-1\rangle\cup\left[0;1\right\rangle$

ECUACIÓN IRRACIONAL

Son aquellas ecuaciones de la forma: $\boxed{P(x)=0}$ donde P es una expresión algebraica irracional.

RESOLUCIÓN:

*Primeramente se determina el **C.V.A** , luego la ecuación original se reduce a otra equivalente más simple y la solución o soluciones de esta última ecuación se analizan si está o no considerado en el **C.V.A.**

EJEMPLO :

Resolver : $\sqrt{2x+13}=\sqrt{x+3}+\sqrt{x+6}$

RESOLUCIÓN :

* Cálculo del **C.V.A :**

$$2x+13\geq 0\ \wedge\ x+3\geq 0\wedge\ x+6\geq 0$$

$$\Rightarrow\ x\geq-\frac{13}{2}\ \wedge\ x\geq-3\ \wedge\ x\geq-6$$

$$\Rightarrow\ x\geq-3\ \Rightarrow C.V.A.=\left[-3;+\infty\right\rangle$$

* Elevando al cuadrado miembro a miembro :

$$2x+13=x+3+x+6+2\sqrt{x+3}\sqrt{x+6}$$

$$\Rightarrow\sqrt{(x+3)(x+6)}=2\Rightarrow\ x^2+9x+18=4$$

$$\Rightarrow\ x^2+9x+14=0\Rightarrow\ (x+2)(x+7)=0$$

$$\Rightarrow\ x=-2\ \vee\ x=-7$$

* Pero : $x\in\left[-3;+\infty\right\rangle$

⇒ El único valor que se acepta es : $x=-2$

* Entonces : $C.S.=\{-2\}$

INECUACIÓNES IRRACIONALES

Son aquellas inecuaciones cuyas incógnitas se encuentran efectadas por radicales o exponentes fraccionarios.

EJEMPLOS :

$$\sqrt{x-1}+x<1\ \ ;\quad\frac{\sqrt[5]{x^2+2}}{2-\sqrt{2-x}}\geq 3$$

* De otro lado como las inecuaciones solo se verifican en el campo de los números reales, se cumple el siguiente principio fundamental.

PRINCIPIO FUNDAMENTAL :

En toda inecuación irracional de ***índice par , las cantidades subradicales deben ser mayores o iguales a cero*** y esto nos determina el universo dentro del cual se resuelve la inecuación dada ***(C.V.A.)***

RESOLUCIÓN:

I) Hallar la existencia ***(C.V.A)*** de la expresión irracional ***F(x).***

II) Se transforma la inecuación , elevando a ambos miembros a un exponente que elimine el radical . Si

el índice del radical es par, ambos miembros de la inecuación deben ser positivos obteniendo el conjunto de posibles soluciones **Sp.** (solución particular).

III) El conjunto solución se obtiene intersectando el ***CVA*** con ***Sp.***

PROPIEDADES :

$\forall a;b \in \mathbb{R};\ n \in \mathbb{N}$

I) $\sqrt[2n]{a}\cdot b \geq 0 \Leftrightarrow (a=0) \vee (a>0 \wedge b \geq 0)$

II) $\sqrt[2n]{a}\cdot b < 0 \Leftrightarrow a>0 \wedge b<0$

III) $\sqrt[2n+1]{a}.b \geq 0 \Leftrightarrow a.b \geq 0$

IV) $\sqrt[2n+1]{a}.b < 0 \Leftrightarrow a.b < 0$

V) $x, y \in \mathbb{R}:\ \sqrt{x} < y$; si y sólo si

$(x \geq 0 \wedge y>0 \wedge x \leq y^2)$

VI) $\forall y<0;\quad \boxed{\sqrt{x} \geq y \Leftrightarrow x \geq 0}$

VII) $\forall y \geq 0;\quad \boxed{\sqrt{x} > y \Leftrightarrow x \geq 0 \wedge x > y^2}$

VIII) $\forall x, y \in \mathbb{R};\ n \in \mathbb{N};\ \sqrt[2n]{x}+\sqrt[2n]{y} \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0 \wedge y \geq 0$

Además podemos aplicar la siguiente propiedad :

Cuando una expresión $\sqrt[n]{f(x)}$ se encuentra multiplicando a otras expresiones matemáticas en un sólo miembro y se tiene cero en el otro miembro, entonces:

* Si n es ***par***, se simplifica toda la expresión por ser positiva.

* Si n es ***impar***, se reemplaza $\sqrt[n]{f(x)}$ por el radicando

$f(x)$; es decir se elimina el símbolo radical.

OBSERVACIÓN:

Si los radicales son de índice IMPAR no existe restricción respecto a sus radicandos los que pueden ser positivos o negativos o cero.

EJEMPLO 1 :

Resolver : $\sqrt{5-x} \geq 3$

RESOLUCIÓN :

* Restricción : $5-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 5$

$\Rightarrow C.V.A. = \langle -\infty; 5]$

* Elevando al cuadrado :

$$5-x \geq 3^2 \Rightarrow x \leq -4 \Rightarrow Sp = \langle -\infty; -4]$$

* Luego : $C.S. = Sp \cap C.V.A. = \langle -\infty; -4]$

EJEMPLO 2 :

Resolver : $\sqrt[7]{x-3} \times \sqrt[5]{x-4} \leq 0$

RESOLUCIÓN :

* Eliminamos los radicales por ser de índice impar, así : $(x-3)(x-4) \leq 0$

* Entonces : $C.S. = [3; 4]$

EJEMPLO 3:

Resolver : $\sqrt{x-3}+\sqrt{8-x} > 0$

RESOLUCIÓN :

* El conjunto solución a esta inecuación está determinado por la intersección de los universos de cada radical , es decir :

$$C.S. = C.V.A. = (x-3) \geq 0 \ \cap\ (8-x) \geq 0$$

$$\Rightarrow C.S. = x \geq 3 \ \wedge\ 8 \geq x \Rightarrow C.S. = [3;8]$$

EJEMPLO 4 :

Resolver : $\sqrt{x+3}+\sqrt{x-2} \leq 5$

RESOLUCIÓN :

* C.V.A.:

$$x+3 \geq 0 \ \wedge\ x-2 \geq 0 \Rightarrow x \geq -3 \ \wedge\ x \geq 2$$

$$\Rightarrow C.V.A. = [2;+\infty\rangle$$

* Pasando un radical al segundo miembro :

$$\sqrt{x+3} \leq 5-\sqrt{x-2}$$

* Elevando el cuadrado los dos miembros de la inecuación :

$$x+3 \leq 25-10\sqrt{x-2}+x-2 \Rightarrow 10\sqrt{x-2} \leq 20$$

$$\Rightarrow \sqrt{x-2} \leq 2$$

* Elevando al cuadrado :

$$x-2 \leq 4 \Rightarrow x \leq 6 \Rightarrow Sp = \langle -\infty; 6]$$

* Luego :

$$C.S. = C.V.A. \cap Sp = [2;+\infty\rangle \cap \langle -\infty; 6]$$

$$\Rightarrow C.S. = [2;6]$$

OBSERVACIÓN:

Algunas inecuaciones irracionales de índice par se transforman en sistemas, como las que mostramos a continuación :

A) Si: $\sqrt[2n]{f(x)} < \sqrt[2n]{g(x)}$, entonces :

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (I) \\ \wedge \\ f(x) < g(x) \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (II) \end{cases}$$

B) Si : $\sqrt[2n]{f(x)} \leq \sqrt[2n]{g(x)}$, entonces :

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (I) \\ \wedge \\ f(x) \leq g(x) \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (II) \end{cases}$$

C) Si : $\sqrt[2n]{f(x)} > \sqrt[2n]{g(x)}$, entonces :

$$\begin{cases} g(x) \geq 0 \quad .... (I) \\ \wedge \\ f(x) > g(x) \quad .... (II) \end{cases}$$

D) Si : $\sqrt[2n]{f(x)} \geq \sqrt[2n]{g(x)}$, entonces :

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \quad .... (I) \\ \wedge \\ f(x) \geq g(x) \quad .... (II) \end{cases}$$

EJEMPLO 5 :

Resolver : $\sqrt{16 - \dfrac{1}{x^2}} \geq \sqrt{16 - x}$

RESOLUCIÓN :

* En este caso lo equivalente , será :

$$\begin{cases} 16 - x \geq 0 \quad .... (I) \\ 16 - \dfrac{1}{x^2} \geq 16 - x \quad .... (II) \end{cases}$$

* De *(I)* : $16 - x \geq 0 \Rightarrow x \leq 16 \Rightarrow x \in \langle -\infty; 16 \rangle ... (\alpha)$
* De *(II)* :

$$16 - \frac{1}{x^2} \geq 16 - x \Rightarrow \frac{x^3 - 1}{x^2} \geq 0$$

* Factorizando el numerador :

$$\frac{(x-1)\overset{(+)}{(x^2 + x + 1)}}{x^2} \geq 0$$

$$\Rightarrow x \geq 1 \Rightarrow x \in [1; \infty\rangle ....(\beta)$$

* De (α) y (β) : **C.S. = [1; 16]**

EJEMPLO 6 :

Resuelva : $\sqrt{x-3} + \sqrt[6]{9-x} \geq x - 10$

RESOLUCIÓN :

* C.V.A.: $x - 3 \geq 0 \wedge 9 - x \geq 0$

$\Rightarrow x \geq 3 \wedge 9 \geq x$

$\Rightarrow 3 \leq x \leq 9 \Rightarrow$ C.V.A. $= [3; 9]$

* Veamos el signo de $(x - 10)$

Por el C.V.A.:

$3 \leq x \leq 9 \Rightarrow 3 - 10 \leq x - 10 \leq 9 - 10$

$\Rightarrow -7 \leq x - 10 \leq -1 \Rightarrow (x - 10) \in \mathbb{R}^-$

* Luego , se observa que $(x - 10)$ es negativo.

Entonces : $\underbrace{\sqrt{x-3}\ \sqrt[6]{9-x}}_{(+)} \geq \underbrace{x - 10}_{(-)}$

* Siempre se verifica , que una expresión positiva , será mayor que otra expresión que sea negativa.

C.S. = C.V.A. = [3; 9]

INECUACIONES EXPONENCIALES

Son aquellas inecuaciones cuya incógnita se encuentra en el exponente y sus criterios de solución son:

I) En toda desigualdad, si las bases son iguales y mayor que la unidad, al comparar los exponentes, el signo de la desigualdad no se invierte, es decir:

	Si la base está es mayor que la unidad $(a > 1)$; se cumple:		
1°	$a^{P(x)} > a^{Q(x)}$	$\Rightarrow$	$P(x) > Q(x)$
2°	$a^{P(x)} \geq a^{Q(x)}$	$\Rightarrow$	$P(x) \geq Q(x)$
3°	$a^{P(x)} < a^{Q(x)}$	$\Rightarrow$	$P(x) < Q(x)$
4°	$a^{P(x)} \leq a^{Q(x)}$	$\Rightarrow$	$P(x) < Q(x)$

EJEMPLO :

Resolver : $5^{2x-3} - 25^{-x+2} \geq 0$

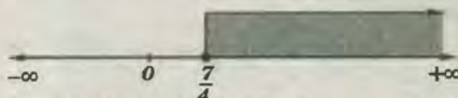
RESOLUCIÓN :

* Expresando la inecuación convenientemente, se tendría : $5^{2x-3} \geq 25^{-x+2} \Rightarrow 5^{2x-3} \geq 5^{-2x+4}$

* como , la base es mayor que la unidad, se cumple que :

$$2x - 3 \geq -2x + 4 \Rightarrow 4x \geq 7$$

$$\Rightarrow x \geq \frac{7}{4} \Rightarrow x \in \left[\frac{7}{4}; \infty\right\rangle$$



II) En toda desigualdad si las bases son iguales y su valor está comprendido entre cero y uno ($0 <$ base < 1) al comparar los exponentes el signo de la desigualdad se invierte , es decir :

	Si la base está comprendida entre cero y la unidad $(0 < a < 1)$; se cumple:		
1°	$a^{P(x)} > a^{Q(x)}$	$\Rightarrow$	$P(x) < Q(x)$
2°	$a^{P(x)} \geq a^{Q(x)}$	$\Rightarrow$	$P(x) \leq Q(x)$
3°	$a^{P(x)} < a^{Q(x)}$	$\Rightarrow$	$P(x) > Q(x)$
4°	$a^{P(x)} \leq a^{Q(x)}$	$\Rightarrow$	$P(x) \geq Q(x)$

EJEMPLO:

Resolver : $\sqrt[x-6]{(0,5)^{x+6}} \leq \sqrt[x+6]{(0,5)^{x-6}}$

RESOLUCIÓN :

* Transformando los radicales a exponentes fraccionarios , se tiene : $(0,5)^{\frac{x+6}{x-6}} \leq (0,5)^{\frac{x-6}{x+6}}$

* Como la base está comprendida entre cero y la unidad , al comparar los exponentes, el signo de la desigualdad varía , es decir :

$$\frac{x+6}{x-6} \geq \frac{x-6}{x+6}$$

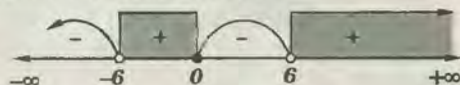
* Como el segundo miembro debe ser cero :

$$\frac{x+6}{x-6} - \frac{x-6}{x+6} \geq 0$$

* Efectuando las operaciones indicadas , se obtiene:

$$\frac{x}{(x+6)(x-6)} \geq 0$$

* Puntos críticos : $\{-6; 0; 6\}$
* Graficando en la recta real :



* Luego : $x \in \langle -6; 0] \cup \langle 6; \infty \rangle$

SISTEMAS DE INECUACIONES

Se denomina asi al conjunto de desigualdades que se satisfacen para un mismo conjunto solución.

REGLAS PARA SU SOLUCIÓN :

* Se resuelve cada inecuación por separado encontrando soluciones para cada una de ellas.

*Se realiza la intersección de tales soluciones, el resultado es el *C.S.* del sistema.

Sea el sistema :

$$\begin{cases} P_1(x) \geq 0 \text{ .... } (I) \\ P_2(x) < 0 \text{ .... } (II) \\ P_3(x) > 0 \text{ .... } (III) \end{cases}$$

Sean $S_1 ; S_2 ; S_3$ las soluciones de *(I),(II) ,(III)* respectivamente , entonces :

$$\boxed{C.S. = S_1 \cap S_2 \cap S_3}$$

EJEMPLO 1:

Resolver :

$$\frac{2-4x}{6} > -x-3 \text{ .... } (I)$$

$$\frac{3x+8}{4} > x-1 \text{ .... } (II)$$

RESOLUCIÓN :

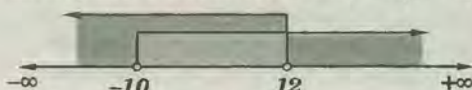
* De *(I)* : $2-4x > -6x-18$

$$\Rightarrow 2x > -20 \Rightarrow x > -10 \text{ .... } S_1$$

* De *(II)* : $3x+8 > 4x-4$

$$\Rightarrow -x > -12 \Rightarrow x < 12 \text{ .... } S_2$$

* El conjunto solución será : $C.S. = S_1 \cap S_2$



$\Rightarrow C.S. = x \in]-10; 12[$

EJEMPLO 2 :

Resolver : $3x-1 \leq x+7 < 2x+5$

RESOLUCIÓN:

* El sistema equivalente será :

$$\begin{cases} 3x-1 \leq x+7 \text{ .... } (I) \\ x+7 < 2x+5 \text{ .... } (II) \end{cases}$$

* De *(I)* : $2x \leq 8 \Rightarrow x \leq 4 \Rightarrow S_1 = \langle -\infty; 4]$
* De *(II)* : $-x < -2 \Rightarrow x > 2 \Rightarrow S_2 = \langle 2; +\infty \rangle$
* Luego :

$$C.S. = S_1 \cap S_2 \Rightarrow C.S. = \langle -\infty; 4] \cap \langle 2; +\infty \rangle$$

$$\Rightarrow C.S. = \langle 2; 4]$$

EJEMPLO 3 :

Si "x" e "y" son cantidades enteras positivas, calcular "$x^2 + y^2$", al resolver el sistema :

$$\begin{cases} 5x-3y > 2 \text{ .... } (I) \\ 2x+y < 11 \text{ .... } (II) \\ y > 3 \text{ .... } (III) \end{cases}$$

RESOLUCIÓN :

* Multiplicando la inecuación *(I)* por *2* y la inecuación *(II)* por *5* , obtenemos :

$$\begin{cases} 10x-6y > 4 \text{ .... } (\alpha) \\ 10x+5y < 55 \text{ .... } (\beta) \end{cases}$$

* Restando miembro a miembro (α) y (β) :

$$10x-6y-10x-5y > 4-55$$

$$\Rightarrow -11y > -51 \Rightarrow y < \frac{51}{11}$$

* Dado que : $3 < y < \frac{51}{11} \approx 4, \text{.............} \Rightarrow \boxed{y=4}$
* Reemplazando $y = 4$, en el sistema :

$$\begin{cases} 5x-3y > 2 \\ 2x+y \leq 11 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x > 2,8 \\ \wedge \\ x < 3,5 \end{cases}$$

* Aquí observamos que : $x = 3$
* Luego : $x^2 + y^2 = 3^2 + 4^2 = 25$

RESOLUCIONES GRÁFICAS :

Analizaremos el caso de un sistema de inecuaciones

en dos variables.

Generalmente la solución se expresará en forma gráfica , pues los valores de x e y que satisfacen el sistema forman un conjunto de pares ordenados $(a\ ;\ b)$ cuya gráfica es una región .

A continuación se mostrará los procedimientos más adecuados para hallar la solución del sistema a través de algunos ejemplos representativos.

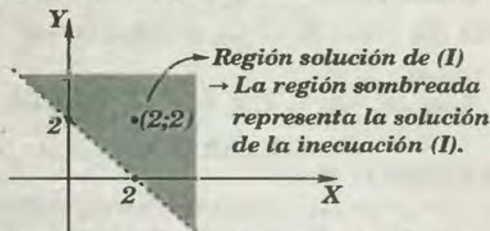
EJEMPLO 1 :

Resolver :

$$\begin{cases} x+y\geq 2 \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (I) \\ 2x-y\leq 4 \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (II) \end{cases}$$

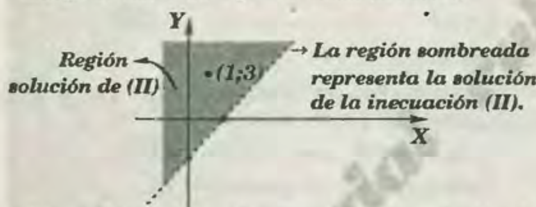
RESOLUCIÓN:

* Graficando : $x+y=2$ .... (frontera)



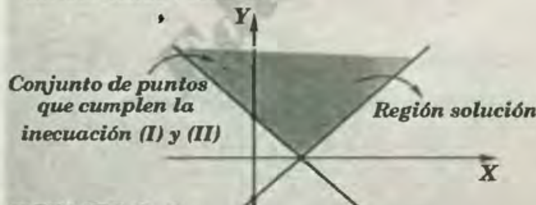
⇒ La región sombreada representa la solución de la inecuación *(I)*.

* Luego de *(II)* : $2x-y=4$ .... (frontera)



→ La región sombreada representa la solución de la inecuación *(II)*.

* Intersectando , resulta :

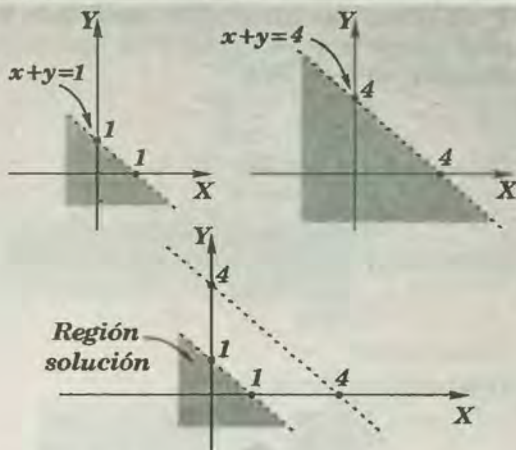


EJEMPLO 2 :

Resolver :

$$\begin{cases} x+y<1 \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (I) \\ x+y<4 \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (II) \end{cases}$$

RESOLUCIÓN :



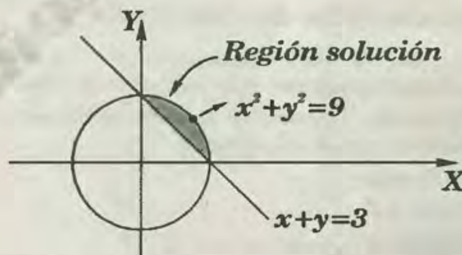
EJEMPLO 3:

Resolver

$$\begin{cases} x^2+y^2\leq 9 \\ x+y\geq 3 \end{cases}$$

RESOLUCIÓN :

* Graficando :



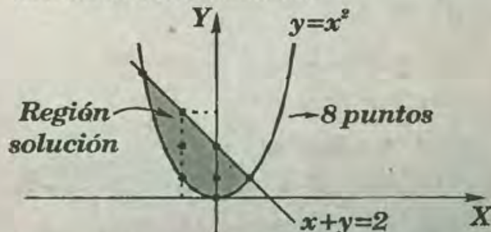
EJEMPLO 4 :

¿Cuántos puntos de coordenadas enteras tiene el conjunto solución del sistema?

$$\begin{cases} y\geq x^2 \\ x+y\leq 2 \end{cases}$$

RESOLUCIÓN:

* Graficando adecuadamente.



* Entonces el sistema tiene ocho soluciones enteras.

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1:

¿Cuál es el menor número real que satisface a la siguiente inecuación?

$$x-\frac{5}{3}\geq\frac{5(1-x)}{4}$$

A) 1 B) $\frac{33}{7}$ C) $\frac{35}{27}$ D) $\frac{7}{24}$ E) $\frac{9}{17}$

RESOLUCIÓN:

*Multiplicamos todo por : $MCM(3;4) = 12$, resulta:

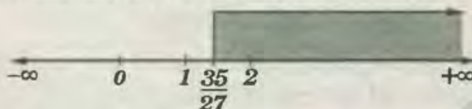
$$12\left(x-\frac{5}{3}\right)\geq 12\left(\frac{5(1-x)}{4}\right)$$

$$\Rightarrow 12x-20\geq 15-15x$$

$$\Rightarrow 12x+15x\geq 15+20$$

$$\Rightarrow 27x\geq 35\Rightarrow x\geq\frac{35}{27}$$

* Graficando el **C. S.** en la recta numérica :



* Del conjunto solución *(C.S.)* sombreado , el menor número real es **35/27**.

RPTA: "C"

PROBLEMA 2 :

Hallar el menor número racional m que para cualquier $x\in[2;4]$, satisface la desigualdad :

$$\frac{x+3}{x-5}\leq m$$

A) $-\frac{2}{3}$ B) $-\frac{5}{3}$ C) $-\frac{7}{3}$ D) -7 E) -6

RESOLUCIÓN :

* De : $2\leq x\leq 4$

$$\Rightarrow 2-5\leq x-5\leq 4-5\Rightarrow -3\leq x-5\leq -1$$

* Invirtiendo : $-1\leq\frac{1}{x-5}\leq-\frac{1}{3}$

* Multiplicando por 8 : $-8\leq\frac{8}{x-5}\leq-\frac{8}{3}$

* Sumando 1: $1-8\leq 1+\frac{8}{x-5}\leq 1-\frac{8}{3}$

$$\Rightarrow -7\leq\frac{x+3}{x-5}\leq-\frac{5}{3}$$

* Luego el menor número "m" será: $-\frac{5}{3}$

RPTA: "B"

PROBLEMA 3:

Hallar todos los valores de "a" para que la inecuación $x^2+(x+a)^2+2x\leq 1$ tenga solución única.

A) $\{2;-3\}$ B) $\{3;-1\}$ C) $\{2\}$ D) $\{4;0\}$ E) ϕ

RESOLUCIÓN :

*Efectuando en el primer miembro y, transponiendo términos , se tiene :

$$2x^2+(2a+2)x+a^2-1\leq 0$$

* Para que exista solución única, el primer miembro debe ser trinomio cuadrado perfecto; entonces, la discriminante $\Delta=0$, luego:

$$(2a+2)^2-8(a^2-1)=0\Rightarrow -4a^2+8a+12=0$$

$$\Rightarrow a^2-2a-3=0\Rightarrow (a-3)(a+1)=0$$

$$\Rightarrow a=3\ \vee\ a=-1$$

* No olvidar que el primer coeficiente debe ser positivo.

RPTA: "B"

PROBLEMA 4 :

Halle los valores de a de tal manera que la inecuación $x^2-ax+4>0$ se verifique para todo valor real de x.

A) $\mathbb{R}$ B) ϕ C) $\langle -2;2]$ D) $\langle -4;4\rangle$ E) $\{4\}$

RESOLUCIÓN :

* Veamos que el coeficiente principal es $1>0$ y para que el trinomio sea siempre positivo se debe cumplir:

$$\Delta=a^2-4(4)<0$$

* de donde:

$$a^2-16<0$$

$$\rightarrow (a+4)(a-4)<0$$



* Entonces : $a\in\langle -4;4\rangle$

RPTA: "D"

PROBLEMA 5 :

Dada la inecuación: $mx^2-2mx+2m+1<0$. Determine los valores de "m" para que su conjunto solución sea $x\in\mathbb{R}$.

A) $\{2;0\}$ B) $\mathbb{R}$ C) ϕ D) $\langle -\infty;-1\rangle$ E) $\langle -\infty;1]$

RESOLUCIÓN :

* Por trinomio negativo $\forall x\in\mathbb{R}$:

$$m<0\ \wedge\ (-2m)^2-4m(2m+1)<0$$

$$m<0\ \wedge\ \underline{4m^2-8m^2-4m}<0$$

$\rightarrow 4m^2+4m>0 \rightarrow \underset{-}{4m}\underset{-}{(m+1)}>0$

$\Rightarrow m+1<0$

* De donde : $m<-1$

* Entonces : $m\in\langle -\infty;-1\rangle$

RPTA: "D"

PROBLEMA 6 :

Hallar el menor de los números M que cumple la siguiente condición : $\forall x\in\mathbb{R}\ ;\ 4x-x^2-12\le M$

A) 8 B) 0 C) 7 D) –8 E) –16

RESOLUCIÓN :

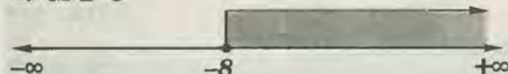
$$4x-x^2-12\le M \Rightarrow x^2-4x+M+12\ge 0$$

* Como se verifica $\forall x\in\mathbb{R}$ y el primer coeficiente es positivo $(1>0)$

$\Rightarrow$ El discriminante debe ser menor o igual a cero.

* Luego tenemos: $\Delta=16-4(M+12)\le 0$

$\Rightarrow M\ge -8$



* el menor valor de M es -8.

RPTA: "D"

OTRO MÉTODO :

$$4x-x^2-12\le M \Rightarrow x^2-4x+M+12\ge 0$$
$$\Rightarrow x^2-4x+4+M+8\ge 0$$
$$\Rightarrow (x-2)^2+M+8\ge 0$$

* El menor valor de M es -8, ya que para dicho valor, se obtiene $(x-2)^2\ge 0$ lo cual es verdadero $\forall x\in\mathbb{R}$.

PROBLEMA 7 :

Resolver las siguientes inecuaciones :

A) $(x^2-4)(1-x)(x^2+x+1)^{27}(x^2-5x-6)>0$

B) $\dfrac{(x+1)^{11}(x+3)^{22}}{(x-2)^{84}}<0$

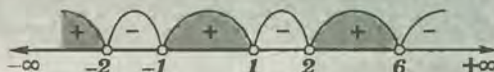
C) $\dfrac{3x^4-5x^3+3x^2-3x+2}{x^4-2x^3-17x^2+18x+72}>0$

D) $\dfrac{\sqrt[8]{4x+2}\,(x^2-25)^3\sqrt[5]{2x-8}}{(x+1)^2(2x+5)^9}<0$

RESOLUCIÓN:

A) Simplificando $(x^2+x+1)^{27}$, pues : x^2+x+1 es positivo , nos quedaría : $(x^2-4)(1-x)(x^2-5x-6)>0$, pero podemos factorizar y nos queda :

$$(x+2)(x-2)(1-x)(x-6)(x+1)>0$$



* Luego el $C.S.=\langle -\infty;-2\rangle\cup\langle -1;1\rangle\cup\langle 2;6\rangle$

B) Simplificando se obtiene :

$x+1<0 \wedge x\ne -3;2$

$\rightarrow x<-1 \wedge x\ne -3;2$

$\rightarrow C.S.=\langle -\infty:-1\rangle-\{-3\}$

C) Factorizando se obtiene :

$$\frac{(x-1)^2(3x^2+x+2)}{(x-3)(x-2)(x+3)(x+4)}>0$$

* Cancelamos $(x-1)^2;\ \forall x\ne 1$

* Para el trinomio: $3x^2+x+2$

$(\Delta<0 \wedge 3>0) \Rightarrow 3x^2+x+2>0;\ \forall x\in\mathbb{R}$

* Luego se tiene la inecuación equivalente :

$$(x-3)(x+2)(x+3)(x-4)>0$$

$\Rightarrow x\in\langle -\infty;-3\rangle\cup\langle -2;3\rangle\cup\langle 4;+\infty\rangle$

$\Rightarrow C.S.=\langle -\infty;-3\rangle\cup\langle -2;3\rangle\cup\langle 4;+\infty\rangle$

D) Cálculo del universo (C.V.A.):

$$4x+2>0 \Rightarrow x>-\frac{1}{2}$$

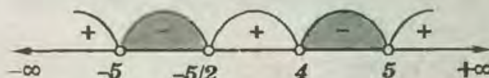
* Luego : $U=\left\langle -\dfrac{1}{2};+\infty\right\rangle$

* La inecuación es equivalente a :

* $\dfrac{(x+5)(x-5)(2x-8)}{(2x+5)}<0 \wedge x\ne -1$

Por puntos críticos :

$P.C.=-5;-\dfrac{5}{2};\ 4,5$



$\Rightarrow S_1=\left\langle -5;-\dfrac{5}{2}\right\rangle\cup\langle 4;5\rangle \wedge x\ne -1$

$\Rightarrow S_1=\left\langle -5;-\dfrac{5}{2}\right\rangle\cup\langle 4;5\rangle$

* Luego : $C.S.=S_1\cap U=\langle 4;5\rangle$

PROBLEMA 8 :

Para qué valores de "a" en la inecuación cuadrática siguiente se cumple que para todo $x\in\mathbb{R}$:

$x^2+ax-2<2x^2-2x+2$

A) $a \in \langle -6;2\rangle$ B) $a \in \langle -10;-7\rangle$
C) $a \in \langle 1;3\rangle$ D) $a \in \langle -15;-10\rangle$

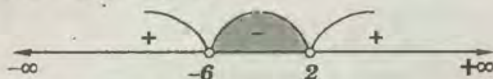
RESOLUCIÓN:

*De lo dado se obtiene : $x^2 - x(2+a) + 4 > 0$

* Luego por el trinomio positivo :

$(2+a)^2 - 4(1)(4) < 0$

$\rightarrow (a+6)(a-2) < 0$



* Entonces : $a \in \langle -6;2\rangle$

RPTA: "A"

PROBLEMA 9 :

Si la inecuación : $(x-1)(x-3) \geq k$ se verifica $\forall x \in \mathbb{R}$.
Encuentre el máximo valor de "k".

A) 0 B) 1 C) -2 D) 3 E) -1

RESOLUCIÓN :

* Reduciendo en el primer miembro :

$x^2 - 4x + (3-k) \geq 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$

* Por teorema del trinomio positivo :

$\Delta \leq 0 \rightarrow (-4)^2 - 4(3-k) \leq 0$

$\rightarrow k \leq -1 \rightarrow K_{max} = -1$

RPTA: "E"

PROBLEMA 10 :

Resolver :

$$P(x) = (a^2+b^2)x^2 - (a+b)x + 1 < 0$$

donde : $a < 0 < b$

Indique como respuesta el número de elementos del conjunto solución.

A) 1 B) ϕ C) 2 D) 4 E) 5

RESOLUCIÓN:

* Calculando el discriminante del polinomio:

$\Delta = [-(a+b)]^2 - 4(a^2-b^2)(1)$

$\rightarrow \Delta = \underbrace{2ab}_{<0} - \underbrace{3(a^2+b^2)}_{>0} \rightarrow \Delta < 0$

* Por teorema Trinomio Positivo:

$(a^2+b^2)x^2 - (a+b)x + 1 > 0; \forall x \in \mathbb{R} \wedge (a^2+b^2) > 0 \wedge \Delta < 0$

$\rightarrow C.S. = \phi$

RPTA: "B"

PROBLEMA 11 :

¿Qué valores de x mayores que $1/3$ satisfacen la inecuación siguiente?

$$\frac{1}{x+1} < \frac{2}{3x-1}$$

A) $\{x \in \mathbb{R} / -\infty < x < -1\} \cup \{x \in \mathbb{R} / 1/3 < x < 3\}$
B) $\{x \in \mathbb{R} / 1/3 < x < 3\}$
C) $\{x \in \mathbb{R} / -1 < x \leq 3\}$
D) $\{x \in \mathbb{R} / -1 \leq x \leq 1/3\}$

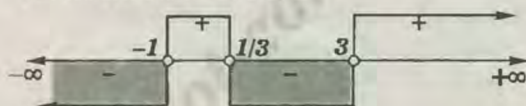
RESOLUCIÓN :

* Transponiendo términos :

$$\frac{1}{x+1} - \frac{2}{3x-1} < 0$$

$$\rightarrow \frac{x-3}{(x+1)(3x-1)} < 0$$

* Puntos críticos : $-1; 1/3; 3$



* Luego :

$\{x \in \mathbb{R} / -\infty < x < -1\} \cup \{x \in \mathbb{R} / 1/3 < x < 3\}$

* Pero, por condición, $x < 1/3$.

* Entonces la solución es :

$\{x \in \mathbb{R} / 1/3 < x < 3\}$

RPTA: "B"

PROBLEMA 12 :

Determine el número de soluciones enteras positivas que se obtiene al resolver la siguiente inecuación : $x^3 + 4 < -\frac{1}{x}$.

A) 1 B) 2 C) 0 D) 3 E) 10

RESOLUCIÓN :

* De la inecuación se tiene :

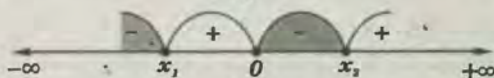
$$x^3 + 4 - \frac{1}{x} < 0 \Rightarrow \frac{x^4+4x-1}{x} < 0$$

* Sumando y restando $2x^2$:

$$\frac{x^4+2x^2+1-2x^2+4x-2}{x} < 0$$

$$\rightarrow \frac{(x^2+1)^2 - (\sqrt{2}x - \sqrt{2})^2}{x} < 0$$

$$\rightarrow \frac{(x^2-\sqrt{2}x+1-\sqrt{2})^2\,(x^2-\sqrt{2}x+1+\sqrt{2})}{x} < 0$$



$x_1; x_2$ son raíces de $x^2 + \sqrt{2}x + 1 - \sqrt{2}$

$x_1 \cong -1,6 \ ; \ x_2 \cong 0,1$

$\rightarrow \nexists$ soluciones enteras positivas.

RPTA: "C"

PROBLEMA 13 :

Si la inecuación : $\dfrac{x^3+(a-1)x^2+(1-a)x-1}{x-1}>0$

se verifica para $x\in R-\{1\}$. Encuentre en qué intervalo oscila "a".

A) $\langle -2;2\rangle$ B) ϕ C) $\langle -2;3\rangle$ D) R^- E) R

RESOLUCIÓN :

* Factorizando el numerador :

$$\frac{(x-1)(x^2+ax+1)}{(x-1)}>0$$

* C.V.A.: $R-\{1\}$
* Reduciendo : $x^2+ax+1>0;\ \forall x\in R-\{1\}$
* Por teorema del trinomio positivo :

$\Delta<0: a^2-4<0 \rightarrow (a+2)(a-2)<0$

$\rightarrow a\in\langle -2;2\rangle$

RPTA: "A"

PROBLEMA 14 :

La inecuación : $\dfrac{x-2}{x^2+x+1}+\dfrac{1}{x-1}>\dfrac{3}{x^3-1}$

presenta como conjunto solución al intervalo:

$$\langle a;b\rangle\cup\langle b;+\infty\rangle$$

Indique : $a+b$

A) –1 B) 1 C) 0 D) 2 E) 2

RESOLUCIÓN :

* Reduciendo en el primer miembro :

$$\frac{2x^2-2x-3}{x^3-1}>\frac{3}{x^3-1}$$

$$\rightarrow \frac{2x(x-1)}{(x-1)(x^2+x+1)}>0$$

* CVA : $R-\{1\}$ (conjunto de valores admisibles para x)
* Transformando : $2x(x^2+x+1)>0$

$\rightarrow 2x>0$

* Necesariamente : $x>0$
* Intersectando :



* $C.S.=\langle 0;1\rangle\cup\langle 1;+\infty\rangle$
* Se pide: $a+b=1$

RPTA: "B"

PROBLEMA 15 :

Al resolver la inecuación : $\dfrac{4}{x-4}+\dfrac{7}{x-7}<-2$

se obtienen "k" soluciones enteras positivas. Halle "k".

A) 1 B) 2 C) 0 D) 3 E) 4

RESOLUCIÓN :

* Reduciendo en el primer miembro :

$$\left(1+\frac{4}{x-4}\right)+\left(\frac{7}{x-7}+1\right)<0\ \wedge\ x\neq 4;\ 7$$

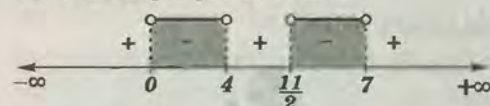
$$\Rightarrow x\left(\frac{1}{x-4}+\frac{1}{x-7}\right)<0\ \wedge\ x\neq 4;\ 7$$

$$\Rightarrow \frac{x(2x-11)}{(x-4)(x-7)}<0\ \wedge\ x\neq 4;\ 7$$

* Transformando a una polinomial :

$x(2x-11)(x-4)(x-7)<0\ \wedge\ x\neq 4;\ 7$

* Resolviendo por puntos críticos :



* En Z^+ : $C.S.=\{1;2;3;6\}$

RPTA: "E"

PROBLEMA 16 :

¿Para qué valores de x se verifica la inecuación?

$$1<\frac{3x+10}{x+7}<2$$

A) $-1/2<x<7$ B) $-1<x<5$

C) $-3/2<x<4$ D) $0<x<4$

RESOLUCIÓN :

* Dando forma : $1<\dfrac{3(x+7)-11}{x+7}<2$

$$\rightarrow 1<3-\frac{11}{x+7}<2$$

* Restando 3 y multiplicando por (–1):

$$2>\frac{11}{x+7}>1$$

* Invirtiendo : $\dfrac{1}{2}<\dfrac{x+7}{11}<1$
* Multiplicando por (11) : $\dfrac{11}{2}<x+7<11$
* Restando 7 : $-\dfrac{3}{2}<x<4 \Rightarrow x\in\left\langle\dfrac{-3}{2};4\right\rangle$

RPTA: "C"

PROBLEMA 17 :

Si se tiene : $\langle a;b\rangle=\left\{2x+1\Big/\dfrac{5}{4}<\dfrac{x+2}{x+1}<\dfrac{3}{2}\right\}$

calcule : $a+b$

A) 9 B) 7 C) 8 D) 10 E) 0

RESOLUCIÓN :

* De la inecuación :

$$\frac{5}{4}<\frac{x+2}{x+1}<\frac{3}{2}\Leftrightarrow \frac{5}{4}<1+\frac{1}{x+1}<\frac{3}{2}$$

$\Rightarrow \frac{1}{4} < \frac{1}{x+1} < \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2 < x+1 < 4$

$\Rightarrow 1 < x < 3 \Leftrightarrow 2 < 2x < 6$

$\Rightarrow 3 < 2x+1 < 7 \Rightarrow \langle a;b \rangle = \langle 3;7 \rangle$

* Entonces : $a + b = 10$

RPTA: "D"

PROBLEMA 18 :

Resolver : $x^4 + 96x - 144 < 6x^3 + 7x^2$

A) $\langle -4;4 \rangle - \{3\}$ B) R C) ϕ D) $\{3\}$ E) $\{0\}$

RESOLUCIÓN :

* Transponiendo :

$$x^4 - 6x^3 - 7x^2 + 96x - 144 < 0$$

* Factorizando :

$(x^2 - 16)(x^2 - 6x + 9) < 0$

$\Rightarrow (x+4)(x-4)(x-3)^2 < 0$

$\Rightarrow (x+4)(x-4) < 0 \ \wedge \ x \neq 3$

$\Rightarrow x \in \langle -4;4 \rangle - \{3\}$

RPTA: "A"

PROBLEMA 19 :

Determinar el menor número entero , tal que:

$$\frac{x^2 + 5x - 10}{x^2 + 2x - 8} > 1$$

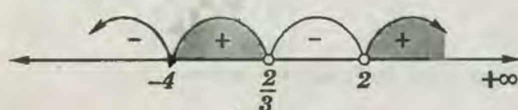
A) 1 B) 0 C) –3 D) 2 E) –4

RESOLUCIÓN :

* Transponiendo : $\frac{x^2 + 5x - 10}{x^2 + 2x - 8} - 1 > 0$

$$\rightarrow \frac{3x - 2}{(x+4)(x-2)} > 0$$

* Puntos críticos : $\left\{\frac{2}{3}; -4; 2\right\}$



* Entonces : $x \in \left\langle -4; \frac{2}{3} \right\rangle \cup \langle 2;+\infty \rangle$

* Luego : $x_{min} = -3$

RPTA: "C"

PROBLEMA 20 :

Resolver : $\sqrt{x+6} < x$

A) $\langle -3;\infty \rangle$ B) R C) $\langle -3;3]$ D) $\langle 3;+\infty \rangle$

RESOLUCIÓN :

I) C.V.A. : $x + 6 \geq 0 \ \wedge \ x > 0 \Rightarrow x > 0$

II) Al cuadrado : $x + 6 < x^2 \Rightarrow x^2 - x - 6 > 0$

$\rightarrow (x-3)\underbrace{(x+2)}_{+} > 0 \Rightarrow x - 3 > 0 \Rightarrow x > 3$

* De (I) y (II) : $x > 3 \rightarrow x \in \langle 3;+\infty \rangle$

RPTA: "D"

PROBLEMA 21:

Resolver : $2x - 1 > \sqrt{x^2 - 3x + 3}$

A) $\langle -1;0]$ B) ϕ C) R D) $\langle 1;+\infty \rangle$ E) $\{1\}$

RESOLUCIÓN :

* La inecuación será equivalente a :

$$\begin{cases} x^2 - 3x + 3 \geq 0 & \text{.................... (I)} \\ 2x - 1 \geq 0 & \text{.................... (II)} \\ (2x-1)^2 > x^2 - 3x + 3 & \text{............ (III)} \end{cases}$$

* De (I): $x \in R$, ya que $\Delta < 0$ (teorema del trinomio)

* De (II): $x \geq \frac{1}{2}$ .... (α)

* De (III): $3x^2 - x - 2 > 0$

$\rightarrow (3x+2)(x-1) > 0$

$\rightarrow x \in \left\langle -\infty; -\frac{2}{3} \right\rangle \cup \langle 1;\infty \rangle$ .... (β)

* De $(\alpha) \wedge (\beta)$ (intersectando): $x \in \langle 1;+\infty \rangle$

RPTA: "D"

PROBLEMA 22 :

Resolver : $\frac{2x\sqrt{x-2} - 4\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-2}(x-4)} > 1$

A) $\langle 4;+\infty \rangle$ B) $\langle 2;+\infty \rangle$ C) $\langle 2;4 \rangle$ D) $\langle -2;4 \rangle$

RESOLUCIÓN :

* Simplificando se obtiene :

$$\begin{cases} A)\ x - 2 > 0 \rightarrow x > 2 & \text{.................. (I)} \\ B)\ x \neq 4 & \text{........................ (II)} \\ C)\ \frac{2x-4}{x-4} - 1 > 0 & \\ \rightarrow \frac{x}{x-4} > 0 \rightarrow x \in \langle -\infty;0 \rangle \cup \langle 4;\infty \rangle & \end{cases}$$

* De $(A) \cap (B) \cap (C)$, se obtendrá :

C. S. $= \langle 4;+\infty \rangle$

RPTA: "A"

PROBLEMA 23 :

Si T es el conjunto solución de la siguiente inecuación $\sqrt[3]{x-1} > \sqrt{x-1}$,entonces el conjunto T es:

A) $\langle -\infty;2 \rangle$ B) $\langle 1;2 \rangle$ C) $\langle 0;2 \rangle - \{1\}$ D) $\langle -1;1 \rangle$ E) R

RESOLUCIÓN :

* Lo equivalente será :

$x-1>0 \wedge \sqrt[3]{x-1}^6 > \sqrt{x-1}^6$

$\Rightarrow x>1 \wedge (x-1)^2 > (x-1)^3$

$\Rightarrow x>1 \wedge 1>x-1 \Rightarrow x>1 \wedge x<2$

$\Rightarrow 1<x<2 \rightarrow T=\langle 1;2\rangle$

RPTA: "B"

PROBLEMA 24 :

Resolver en Z: $\sqrt{-x^2+9x-8} > x-12$ indicando el número de elementos del conjunto solución :

A) 7 B) 5 C) 8 D) 4 E) 9

RESOLUCIÓN :

* Calculando **CVA:** $-x^2+9x-8 \geq 0$

$(x-8)(x-1) \leq 0 \rightarrow C.V.A.=[1;8]$

* Si: $1 \leq x \leq 8$ entonces : $-11 \leq x-12 \leq -4 < 0$

* Luego :

$\underbrace{\sqrt{-x^2+9x-8}}_{\geq 0} > x-12$ siempre se cumple

$\rightarrow CS = CVA = [1;8]$

* En Z: $CS = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$

RPTA: "C"

PROBLEMA 25 :

Si S es el conjunto solución de la siguiente inecuación: $\sqrt{\sqrt{x+20}-\sqrt{1-x}} \geq 2$, entonces el conjunto S, es:

A) $[1;\infty\rangle$ B) $[0,68;1]$ C) $[-20,18;0,68]$

D) $\langle -\infty;-20,18]$ E) $[-20;0,68]$

RESOLUCIÓN :

* El sistema equivalente será :

$x+20 \geq 0 \wedge 1-x \geq 0 \wedge \sqrt{x+20}-\sqrt{1-x} \geq 4$

$\Rightarrow x \geq -20 \wedge x \leq 1 \wedge \sqrt{x+20} \geq 4+\sqrt{1-x}$

$\Rightarrow -20 \leq x \leq 1 \wedge x+20 \geq 16+8\sqrt{1-x}+1-x$

$\Rightarrow -20 \leq x \leq 1 \wedge 3+2x \geq 8\sqrt{1-x}$

$\Rightarrow -20 \leq x \leq 1 \wedge 3+2x \geq 0 \wedge (3+2x)^2 \geq 64(1-x)$

$\Rightarrow \underline{-20 \leq x \leq 1 \wedge x \geq -\frac{3}{2}} \wedge 4x^2+76x-55 \geq 0$

$\Rightarrow -\frac{3}{2} \leq x \leq 1 \wedge \{x \leq -19,68 \vee x \geq 0,68\}$

$\rightarrow 0,68 \leq x \leq 1$

* Entonces : $S = [0,68;1]$

RPTA: "B"

PROBLEMA 26 :

Si M es un cojunto definido por $M = \{x \in \mathbb{R} / \sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} < \sqrt{3x}\}$, entonces el conjunto M es:

A) $\mathbb{R}^+$ B) $[1;\sqrt{3}\rangle$ C) $[2;2\sqrt{3}\rangle$

D) $\left[1;\frac{2}{3}\sqrt{3}\right\rangle$ E) $\langle 0;1\rangle$

RESOLUCIÓN :

* Lo equivalente , será :

$x+1 \geq 0 \wedge x-1 \geq 0 \wedge 3x \geq 0 \wedge x+1+x-1+2\sqrt{x^2-1} < 3x$

$\Rightarrow \{x \geq -1 \wedge x \geq 1 \wedge x \geq 0\} \wedge 2\sqrt{x^2-1} < x$

$\Rightarrow \{x \geq 1\} \wedge 4(x^2-1) < x^2$

$\Rightarrow x \geq 1 \wedge x^2 < \frac{4}{3}$

$\Rightarrow x \geq 1 \wedge x < \frac{2}{3}\sqrt{3} \Rightarrow 1 \leq x < \frac{2}{3}\sqrt{3}$

* Entonces : $M = \left[1;\frac{2}{3}\sqrt{3}\right\rangle$

RPTA: "D"

PROBLEMA 27 :

Si x es un entero positivo que verifica la relación:

$$\sqrt[4]{(0,8)^{\frac{x-3}{4}}} > \sqrt[8]{(0,64)^{\frac{x-2}{5}}}$$

Con relación a estos valores de "x" podemos afirmar que:

A) Hay infinitas soluciones.
B) El mayor valor de x es 11.
C) Solamente cumplen los enteros impares menores que 25.
D) La suma de todas las soluciones es 21.
E) El menor valor de x es 15.

RESOLUCIÓN :

*Transformando los decimales , resulta :

$\left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{x-3}{16}} > \left(\frac{16}{25}\right)^{\frac{x-2}{40}} \Rightarrow \left(\frac{5}{4}\right)^{-\frac{x-3}{16}} > \left(\frac{5}{4}\right)^{-2\left(\frac{x-2}{40}\right)}$

* Luego como las bases son mayores que 1, entonces : $-\frac{x-3}{16} > -\frac{x-2}{20}$

$\Rightarrow 5x-15 < 4x-8$

$\Rightarrow x<7 \Rightarrow x \in \{1;2;3;4;5;6\}$

* Luego analizando alternativas

RPTA: "D"

PROBLEMA 28 :

La suma de los enteros que verifican simultáneamente las inecuaciones :

$\frac{4x-5}{7} < x+3$; $\frac{3x+8}{4} < 2x+5$ es:

A) –21 B) –36 C) –18 D) 18 E) 25

RESOLUCIÓN :

* De la primera inecuación :

$$\frac{4x-5}{7}<x+3 \rightarrow 4x-5<7x+21$$

$$\rightarrow -26<3x \rightarrow x>-8,\hat{6}$$

* De la segunda inecuación :

$$\frac{3x+8}{4}>2x-5 \rightarrow 3x+8>8x-20$$

$$\rightarrow 28>5x \rightarrow x<5,6$$

* Como se deben cumplir ambas condiciones:

$$-8,\hat{6}<x<5,6$$

$$\rightarrow x=\{-8;-7;...;4;5\}$$

* Luego, la suma de los enteros que verifican simultáneamente ambas inecuaciones es:

$$S=\frac{-(8)(9)}{2}+\frac{5(6)}{2}=-21$$

RPTA: "A"

PROBLEMA 29 :

La suma de los enteros que simultáneamente cumplen las inecuaciones :

$6x+\frac{5}{7}>4x+7 \quad \wedge \quad \frac{3x^2+75}{2}>2x^2-x$ es :

A) 30 B) 39 C) 42 D) 49 E) 60

RESOLUCIÓN :

* De la primera inecuación , resulta :

$$2x>7-\frac{5}{7}$$

$$\rightarrow x>3 \text{ ....} (\alpha)$$

* De la segunda inecuación ; se obtiene :

$$x^2-2x-75<0$$

$$\Rightarrow (x-1)^2-76<0$$

$$\Rightarrow (x-1)^2<76$$

$$\Rightarrow -\sqrt{76}<x-1<\sqrt{76}$$

$$\Rightarrow 1-\sqrt{76}<x<1+\sqrt{76}$$

$$\Rightarrow -7,72<x<9,72 \text{ ....} (\beta)$$

* De (α) y (β): $3,...<x<9,72$

* Pero como $x\in \mathbb{Z}$, entonces :

$$x\in\{4;5;6;7;8;9\}$$

* Se pide : $4+5+6+7+8+9=39$

RPTA: "B"

PROBLEMA 30 :

La desigualdad : $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}>\frac{2}{x+y}$, se satisface cuando :

A) $x>y$ B) $x>0, y>0$ C) $x<0, y<0$
D) $x=y$ E) $x+y>0$

RESOLUCIÓN :

* Haciendo el estudio de la desigualdad :

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}>\frac{2}{x+y};\ x\neq 0,\ y\neq 0$$

$$\Rightarrow \frac{x+y}{xy}>\frac{2}{x+y};\ x\neq 0,\ y\neq 0$$

$$\Rightarrow (x+y)^2>2xy;\ x\neq 0,\ y\neq 0,\ xy>0,\ x+y>0$$

$$\Rightarrow x^2+y^2>0,\ \forall x,y\in R^+-\{0\} \text{ .... (I)}$$

* A su vez realizamos el estudio en las condiciones siguientes :

$$\frac{x+y}{xy}>\frac{2}{x+y};\ x\neq 0,\ x+y<0,\ xy>0$$

$$\Rightarrow (x+y)^2<2xy$$

$$\Rightarrow x^2+y^2+2xy<2xy$$

$$\Rightarrow x^2+y^2<0,\ x\neq 0;\ x+y<0,\ xy>0 \text{ ....(II)}$$

$\Rightarrow$ ***II es absurdo***

* De ***(I)*** y ***(II)*** concluimos que la desigualdad se satisface si $x>0$; $y>0$.

RPTA: "B"

PROBLEMA 31 :

Los ***5/7*** de un número entero disminuido en ***6*** es menor que ***–1***. Si a los ***2/3*** del mismo número le aumentamos ***10***, resulta al menos ***14***. ¿Cuál es el número?

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

RESOLUCIÓN:

* Sea "x" el número pedido :

* Los ***5/7*** de x disminuido en ***6*** es menor que ***–1*** :

$$\frac{5}{7}x-6<-1$$

$$\Rightarrow x<7 \text{ .... (I)}$$

* Si a los ***2/3*** de x le aumentamos ***10***, resulta al menos ***14*** :

$$\frac{2}{3}x+10\geq 14$$

$$\Rightarrow x\geq 6 \text{ .... (II)}$$

* De ***(I)*** y ***(II)*** : $6\leq x<7$

* Entonces : $x=6$

RPTA: "B"

PROBLEMA 32 :

Seis veces la cantidad de lapiceros que tiene Carlos disminuida en ***13*** no puede ser mayor que ***17***; si al triple de dicha cantidad le aumentamos ***17*** resultaría al menos ***30*** lapiceros. ¿Cuántos lapiceros

tiene Carlos?

A) 1 B) 3 C) 13 D) 5 E) 7

RESOLUCIÓN:

* Representemos por x a la cantidad de lapiceros de Carlos.

* "No puede ser mayor que *17*" significa que puede ser MENOR o igual que *17* , luego :

$$6x-13\le 17$$

$$\Rightarrow x\le 5 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (I)$$

* "... resultarían al menos *30...*" significa que dicha cantidad puede ser *30* ó más:

$$3x+17\ge 30$$

$$\Rightarrow x\ge \frac{13}{3}\cong 4,2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (II)$$

* De *(I)* y *(II)* : $4,2\ldots\le x\le 5$

* Entonces : $x=5$

RPTA: "D"

PROBLEMA 33 :

Un atleta va a participar en una maratón y desea saber que distancia es la que va recorrer para poder programar sus entrenamientos. Le informan que cuando haya recorrido *12 cm*, le falta recorrer menos de los *3/5* de la longitud total; y si recorre *16 cm* la distancia que le falta recorrer es mayor a *1/5* de la longitud total. Hallar la longitud, sabiendo que esta es el mayor entero posible.

A) 19 B) 22 C) 38 D) 29 E) 28

RESOLUCIÓN :

* Sea L longitud total , luego :

$$L-12<\frac{3}{5}L\Rightarrow L>30$$

$$\Rightarrow L-16>\frac{1}{5}L\Rightarrow\ L>20\Rightarrow L\in\langle 20;30\rangle$$

* Como L es entero, entonces : $L=29$

RPTA: "D"

PROBLEMA 34 :

Una playa de estacionamiento tiene capacidad para *60* autos; pero sólo hay cierto número de autos estacionados en ella. Si el número de autos se redujera a la sexta parte; se ocuparía menos de la décima parte de la capacidad del estacionamiento; pero si se trata de duplicar el número de autos; más de ocho autos no podrían ser estacionados por falta de espacio.

¿Cuántos autos hay en el estacionamiento?

A) 28 B) 30 C) 35 D) 37 E)40

RESOLUCIÓN :

* Sea x el número de autos, del enunciado:

$$\frac{x}{6}<\frac{60}{10}\to x<36 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (I)$$

$$2x>60+8\to x>34 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (II)$$

* De *(I)* y *(II)*: $34<x<36\ \wedge\ x\in N\to x=35$

RPTA: "C"

PROBLEMA 35 :

A un joven trabajador, le dieron para vender una cierta cantidad de periódicos de los que vendió *35* y le quedaron más de la mitad. Luego le devuelven *3*, y vende después *18* con lo que restan menos de *22* periódicos. ¿Cuántos periódicos tuvo inicialmente?

A) 69 B) 70 C) 71 D) 72 E) 73

RESOLUCIÓN :

* Sea x: N° de periódicos; $(x\in N)$

* Vendió *35* y le quedadron más de la mitad:

$$x-35>\frac{x}{2}\ \to\ x>70$$

* Le devuelven *3*, vende *18* ; con lo que restan menos de *22* :

$$(x-35)+3-18<22\ \to\ x<72$$

* Luego : $x>70\ \wedge\ x<72$

$$\Rightarrow 70<x<72\Rightarrow x=71$$

RPTA: "C"

PROBLEMA 36 :

Hay "n" números enteros que satisfacen simultáneamente las condiciones siguientes:

I) Está comprendido entre *4* y *–4*.

II) Multiplicando por *2* da menos que *7* pero más que *–7*.

III) Elevado al cuadrado da más que *1*.

A) $n=2$ B) $n=4$ C) $n=1$ D) $n=5$

$$\to n(S)=5$$

RPTA: "D"

PROBLEMA 37 :

Si x e y son variables enteras que satisfacen las condiciones :

$$\begin{cases}5x-3y>2 \ldots\ldots\ldots\ldots (I)\\ 2x+y<11 \ldots\ldots\ldots\ldots (II)\\ y>3 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (III)\end{cases}$$

Entonces, el valor de $T=x.y$ es:

A) 6 B) 12 C) 15 D) 20 E) 8

RESOLUCIÓN :

* De *(I)* + *3(III)* : $5x>2+3(3)\Rightarrow x>\frac{11}{5}$

* De *(II)* – *(III)* : $2x<11-3\Rightarrow x<4$

* Luego : $\frac{11}{5} < x < 4 \Rightarrow x = 3$

* En *(II)* : $2(3) + y < 11 \Rightarrow y < 5$

* En *(III)* : $3 < y < 5 \Rightarrow y = 4$

* Entonces : $T = 3 \times 4 = 12$

RPTA: "B"

PROBLEMA 38 :

Resolver el sistema en Z^+ :

$$\begin{cases} 2x+3y+5z>23 \ \ldots\ldots\ldots (I) \\ 2x-y+5z<13 \ \ldots\ldots\ldots (II) \\ z-y<-1 \ \ldots\ldots\ldots (III) \\ y<4 \ \ldots\ldots\ldots (IV) \end{cases}$$

e indicar el valor de $T = x.y.z$

A) 6 *B) 10* *C) 12* *D) 15* *E) 24*

RESOLUCIÓN :

* De *(I) – (II)*: $4y > 10 \Rightarrow y > \frac{5}{2}$

* Luego : $\frac{5}{2} < y < 4 \ \wedge \ y \in Z^+ \Rightarrow y = 3$

* En *(I)* : $2x + 5z > 14$

* En *(II)* : $2x + 5z < 16$

* En *(III)* : $z < 2$

* Entonces : $2x + 5z = 15 \ \wedge \ z = 1$

$\rightarrow x = 5 \ \wedge \ z = 1$

* Luego : $T = (5)(3)(1) = 15$

RPTA: "D"

PROBLEMA 39 :

Si *U, N* e *I* son variables enteras que satisfacen las siguientes condiciones :

$$\begin{cases} U-N+I<4 \ \ldots\ldots\ldots (1) \\ U+N+I>8 \ \ldots\ldots\ldots (2) \\ N<I<5 \ \ldots\ldots\ldots (3) \end{cases}$$

Entonces el valor de $T = U.N.I.$ es:

A) 0 *B) 4* *C) 6* *D) 12* *E) 24*

RESOLUCIÓN :

* De (2) – (1) : $2N > 4 \rightarrow N > 2$

* Como : $N < I < 5 \rightarrow 2 < N < I < 5$

$\wedge$ como $N, I \in Z \rightarrow N = 3 \wedge I = 4$

* En (1) : $U - 3 + 4 < 4 \rightarrow U < 3$

* En (2) : $U + 3 + 4 > 8 \rightarrow U > 1$

* Como $U \in Z \rightarrow U = 2$

* Luego : $T = (2)(3)(4) = 24$

RPTA: "E"

PROBLEMA 40 :

Si *M* es un conjunto definido por $M = \{(x;y) \in Z \in N \times N \ x+2y \leq 5 \wedge x-3y \leq 4\}$, entonces el cardinal del conjunto *M* es:

A) 3 *B) 4* *C) 5* *D) 6* *E) 7*

RESOLUCIÓN :

* De las inecuaciones :

$2y \leq 5 - x \ \wedge \ x - 4 \leq 3y$ ……………… *(I)*

$\Rightarrow 2x - 8 \leq 6y \ \wedge \ 6y \leq 15 - 3x$

$\Rightarrow 2x - 8 \leq 15 - 3x \Rightarrow x \leq \frac{23}{5} \ \wedge$

Como : $x \in N \rightarrow x \in \{1; 2; 3; 4\}$

* Si $\boxed{x=1} \rightarrow 1 - 4 \leq 3y \ \wedge \ 2y \leq 5 - 1$

$\Rightarrow -1 \leq y \ \wedge \ y \leq 2 \Rightarrow y = 1 \vee y = 2$

$\Rightarrow (1;1) \in M \ \wedge \ (1;2) \in M$

* Si $\boxed{x=2} \rightarrow 2 - 4 \leq 3y \ \wedge \ 2y \leq 5 - 2$

$\Rightarrow -\frac{2}{3} \leq y \ \wedge \ y \leq \frac{3}{2} \Rightarrow y = 1 \Rightarrow (2;1) \in M$

* Si $\boxed{x=3} \rightarrow 3 - 4 \leq 3y \ \wedge \ 2y \leq 5 - 3$

$\Rightarrow -\frac{1}{3} \leq y \ \wedge \ y \leq 1 \Rightarrow y = 1$

* Si $\boxed{x=4} \Rightarrow 4 - 4 \leq 3y \ \wedge \ 2y \leq 5 - 4$

$\Rightarrow 0 \leq y \ \wedge \ y < \frac{1}{2} \Rightarrow y \notin N$

* Luego: $M = \{(1;1); (1;2); (2:1); (3;1)\}$

$\rightarrow n(M) = 4$

RPTA: "B"

PROBLEMA 41:

Si S es un conjunto definido por :

$S = \{(x;y) \in Z \times Z \,/\, x + y \leq 4 \wedge 2x - y \leq 4 \wedge x > 0 \wedge y > 0\}$, entonces el número de elementos del conjunto S es:

A) 2 *B) 6* *C) 8* *D) 5* *E) 7*

RESOLUCIÓN :

* De las inecuaciones se obtiene :

$y \leq 4 - x \ \wedge \ 2x - 4 \leq y \Rightarrow 2x - 4 \leq 4 - x$

$\Rightarrow 3x \leq 8 \Rightarrow x \leq \frac{8}{3} \Rightarrow x \in \{1; 2\}$

* Si $\boxed{x=1} \Rightarrow 2(1) - 4 \leq y \ \wedge \ y \leq 4 - 1$

$\Rightarrow -2 \leq y \ \wedge \ y \leq 3 \Rightarrow y \in \{1; 2; 3\}$

$\Rightarrow (1;1), (1;2), (1;3) \in S$

* Si $\boxed{x=2} \Rightarrow 2(2) - 4 \leq y \ \wedge \ y \leq 4 - 2$

$\Rightarrow 0 \leq y \ \wedge \ y \leq 2 \Rightarrow y \in \{1; 2\}$

$\Rightarrow (2;1), (2;2) \in S$

* Luego : $S = \{(1;1), (1;2), (1;3), (2;1), (2;2)\}$
$\rightarrow n(S) = 5$

RPTA: "D"

PROBLEMA 42 :

Si A es un conjunto definido por
$A = \{ (x;y) \in N \times N \mid y+3 \leq 2x \ \wedge \ 3x \leq 12-y \}$, entonces el cardinal del conjunto A es:

A) 7 B) 5 C) 4 D) 3 E) 2

RESOLUCIÓN :

* De las inecuaciones :
$3(y+3) \leq 6x \ \wedge \ 6x \leq 2(12-y)$
$\Rightarrow 3(y+3) \leq 2(12-y) \ \rightarrow \ y \leq 3 \ \wedge$
como $y \in N \Rightarrow y \in \{1; 2; 3\}$

* Si $\boxed{y=1} \rightarrow 1+3 \leq 2x \ \wedge \ 3x \leq 12-1$
$\Rightarrow 2 \leq x \wedge x \leq \dfrac{11}{3} \Rightarrow x \in \{2; 3\}$
$\Rightarrow (2;1) \in A \ \wedge \ (3;1) \in A$

* Si $\boxed{y=2} \Rightarrow 2+3 \leq 2x \wedge 3x \leq 12-2$
$\Rightarrow \dfrac{5}{2} \leq x \ \wedge \ x \leq \dfrac{10}{3} \Rightarrow x \in \{3\}$
$\Rightarrow (3;2) \in A$

* Si $\boxed{y=3} \Rightarrow 3+3 \leq 2x \ \wedge \ 3x \leq 12-3$
$\Rightarrow 3 \leq x \wedge \ x \leq 3 \ \Rightarrow x = 3$
$\Rightarrow (3;3) \in A$

* Luego: $A = \{(2;1), (3;1), (3;2), (3;3)\}$
$\rightarrow n(A) = 4$

RPTA: "C"

PROBLEMA 43 :

Si x, y, z son variables enteras y positivas que satisfacen las siguientes condiciones:

$$\begin{cases} 5x-3y+2z>7 \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (I) \\ 2x+y+z<14 \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (II) \\ x+3y<15 \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (III) \\ y>3 \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (IV) \end{cases}$$

Entonces el valor de $T = x.y.z$ es:

A) 6 B) 10 C) 12 D) 40 E) 80

RESOLUCIÓN :

* De 2(II) : $4x+2y+2z<28$
* De (I) : $5x-3y+2z>7$
*Restando: $5y-x<21$ está sumada con $x+3y<15$ resulta : $8y<36 \Rightarrow y<\dfrac{9}{2}$
* Como : $y>3 \rightarrow y=4$
* Luego : $5(4)-x<21 \wedge x+3(4)<15$
$\Rightarrow x>-1 \ \wedge \ x<3 \Rightarrow -1<x<3$
$\Rightarrow x=1 \ \wedge \ x=2$

* Si $\boxed{x=1} \Rightarrow 5(1)-3(4)+2z>7$
$\wedge \ 2(1)+4+z<14$
$\Rightarrow z>7 \ \wedge \ z<8 \ \Rightarrow z \notin N$

* Si $\boxed{x=2} \ \rightarrow 5(2)-3(4)+2z>7 \wedge$
$\wedge \ 2(2)+4+z<14$
$\Rightarrow \ z>\dfrac{9}{2} \ \wedge \ z<6 \Rightarrow z=5$

* Luego : $T = xyz = (2)\ (4)\ (5) = 40$

RPTA: "D"

PROBLEMA 44 :

La suma del número de hijos de Javier y César es menor que 6 y César tiene más hijos que Eduardo (¡Todos tienen hijos!). Si Javier tuviera un hijo menos, tendría aún más hijos que Eduardo, entonces el número total de hijos es:

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 8

RESOLUCIÓN :

* Sean x, y, z los números de hijos de Javier, César y Eduardo, respectivamente; donde $x, y, z \in N$ (todos tienen hijos). De acuerdo al enunciado del problema, se tiene :

$$\begin{cases} x+y<6 \ldots\ldots\ldots\ldots (I) \\ y>z \ \ldots\ldots\ldots\ldots (II) \\ x-1>z \ldots\ldots\ldots\ldots (III) \end{cases}$$

* De (II) + (III): $x+y-1>2z \Rightarrow x+y>2z+1$
como $x+y<6 \Rightarrow \ 2z+1<6$
$\Rightarrow \ z<\dfrac{5}{2} \Rightarrow \ z=1 \ \vee \ z=2$

* Si $\boxed{z=1} \ \Rightarrow \ y<4 \wedge \ y>1$
$\Rightarrow y=2 \ \vee \ y=3$

* Con lo cual : $\{y=2 \wedge \ x<6-2 \ \wedge \ x>2\} \ \vee$
$\{y=3 \wedge x<6-3 \wedge x>2\}$
$\Rightarrow \{y=2 \ \wedge \ 2<x<4 \ \vee \ y=3 \ \wedge \ 2<x<3\}$
$\Rightarrow \{y=2 \ \wedge \ x=3\} \vee \{y=3 \wedge x \notin N\} \Rightarrow y=2 \wedge x=3$

* Si $\boxed{z=2} \Rightarrow \ y<3 \wedge y>2 \Rightarrow y \notin N$

* Luego : $x=3 \wedge y=2 \wedge z=1$
* El número total de hijos es: $x+y+z=6$

RPTA: "D"

PROBLEMA 45 :

Entre 3 criadores de conejos ocurre el siguiente diálogo: "El número de mis conejos es mayor que el doble de los tuyos; pero el cuádruple de los tuyos es mayor que siete veces los de mi cuñado; mañana mataré 4 de los míos y los restantes serán menores que el doble de los que tiene mi cuñado". ¿Cuántos conejos tiene mi cuñado? Cada uno tiene al menos un conejo.

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

RESOLUCIÓN:

*Sean x, y, z los números de mis conejos, tus conejos y los de mi cuñado respectivamente, entonces:

$$\begin{cases} x>2y \quad .... (I) \\ 4y>7z \quad .... (II) \\ x-4<2z .... (III);\ x,y,z \in Z^+ \\ x>4 \quad .... (\text{mato 4 y sobra}) \end{cases}$$

* De (II) : $2y>\frac{7}{2}z$

* De (III) : $\frac{7}{4}(x-4)<\frac{7}{2}z$

* Luego : $\frac{7}{4}(x-4)<\frac{7}{2}z<2y<x$ ....(α)

$\Rightarrow \frac{7}{4}(x-4)<x \rightarrow x<\frac{28}{3}$

* Es decir: $4<x<\frac{28}{3} \rightarrow x=5;6;7;8;9$

* Si $\boxed{x=5}$: $\frac{7}{4}<\frac{7}{2}z<2y<5$

* De donde: $z=1 \wedge y=2$

* Si $\boxed{x=6}$: En (α): $\frac{7}{2}<\frac{7}{2}z<2y<6$

$\Rightarrow \frac{7}{2}<\frac{7}{2}z<6 \Rightarrow 1<z<\frac{12}{7}$

* De donde: $z \notin Z^+$

* Si $\boxed{x=7}$: En (α): $\frac{21}{4}<\frac{7}{2}z<2y<7$

$\Rightarrow \frac{21}{4}<\frac{7}{2}z<7 \Rightarrow \frac{3}{2}<z<2$

$\Rightarrow z \notin Z$

* De la misma forma, para los demás valores de "x", $z \notin Z^+$

$\Rightarrow z=1$

RPTA: "A"

PROBLEMA 46 :

Si A es un conjunto definido por:

$A=\{(x;y) \in Z \times Z \mid x \text{ e } y$ satisfacen el sistema $(*)\}$

$$(*)\begin{cases} x^2+y^2 \le 4 \\ x^2-y \ge 4 \end{cases}$$

Entonces, el cardinal del conjunto A es:

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

RESOLUCIÓN :

* En el sistema , restando : $y^2+y \le 0$

$\Rightarrow y(y+1) \le 0 \Rightarrow -1 \le y \le 0$

* Como $y \in Z \rightarrow y=-1 \vee y=0$

* Si $\boxed{y=-1}$, reemplazando se obtiene :

$x^2 \le 3 \wedge x^2 \ge 3 \rightarrow x^2=3$

* Pero $x \in Z \rightarrow x \in \phi$

* Si $\boxed{y=0}$, reemplazando , resulta :

$x^2 \le 4 \wedge x^2 \ge 4 \rightarrow x^2=4$

* Como : $x \in Z \rightarrow x=2 \vee x=-2$

* Los pares son : $(2;0); (-2;0)$

* Luego : $A=\{(2;0), (-2;0)\}$

$\rightarrow n(A)=2$

RPTA: "C"

PROBLEMA 47 :

Si el sistema : $\begin{cases} x^2+y^2+2x \le 1 \quad .... (I) \\ x-y-a=0 \quad .... (II) \end{cases}$

tiene solución única, entonces un valor de "a" es:

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

RESOLUCIÓN :

* Tenga en cuenta que :

$x^2 \le 0 \Leftrightarrow x=0$

* (II) en (I): $x^2+(x-a)^2+2x \le 1$

$\Rightarrow 2x^2-2(a-1)x+a^2-1 \le 0$

* Tendrá solución única si el primer miembro es un cuadrado perfecto, para lo cual: $\Delta_x=0$

$\Rightarrow 4(a-1)^2-4(2)(a^2-1)=0$

$\Rightarrow (a-1)[2(a+1)-(a-1)]$

$\Rightarrow (a-1)(a+3)=0 \Rightarrow a=1 \vee a=-3$

RPTA: "A"

PROBLEMA 48 :

Si A es un conjunto definido por :

$A=\{(x;y) \in Z \times Z / \},\ y-x^2+x+6>0 \wedge y-x<-3\}$,

entonces el número de elementos del conjunto A es:

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

RESOLUCIÓN :

* De las inecuaciones :

$y > x^2 - x - 6 \wedge y < x - 3$

$\Rightarrow x^2 - x - 6 < y < x - 3$ .... (I)

* De donde: $x^2 - x - 6 < x - 3$

$x^2 - 2x - 3 < 0 \Rightarrow (x+1)(x-3) < 0$

$\Rightarrow -1 < x < 3 \Rightarrow x = 0; 1; 2$

* $\boxed{x=0}$: En (I) : $-6 < y < -3$

$\rightarrow y = -5; -4$, los pares $(x; y)$ que se obtienen con esto serán: $(0; -5)$, $(0; -4)$

* $\boxed{x=1}$: En (I) : $-6 < y < -2$

Los pares $(x; y)$ serán: $(1; -5)$, $(1; -4)$, $(1; -3)$

* $\boxed{x=2}$: En (I) : $-4 < y < -1$

Los pares son: $(2; -3)$, $(2; -2)$

* Finalmente :

$A = [(0; -5), (0; -4), (1; -5), (1; -4), (1; -3), (2; -3), (2; -2)]$

$\rightarrow n(A) = 7$

RPTA: "C"

PROBLEMA 49 :

Si M es un conjunto definido por :

$M = \{(x; y) \in Z \times Z / 2y + x^2 + 4x \le 2 \wedge x^2 + 6x + 3 < 3y\}$

Entonces el número de elementos del conjunto M es:

A) 15 B) 12 C) 10 D) 9 E) 8

RESOLUCIÓN :

* De las inecuaciones:

$2y \le -x^2 - 4x + 2 \wedge x^2 + 6x + 3 < 3y$

$\Rightarrow 2x^2 + 12x + 6 < 6y \wedge 6y \le -3x^2 - 12x + 6$

$\Rightarrow 2x^2 + 12x + 6 < -3x^2 - 12x + 6$

$\Rightarrow 5x^2 + 24x < 0 \Rightarrow x(5x + 24) < 0$

$\Rightarrow -\dfrac{24}{5} < x < 0 \Rightarrow x \in \{-4; -3; -2; -1\}$

* Si $\boxed{x=-4}$: $2y \le 2 \wedge -5 < 3y$

$\Rightarrow -\dfrac{5}{3} < y \wedge y \le 1 \Rightarrow y \in \{-1; 0; 1\}$

$\rightarrow$ Hay 3 pares de M.

* Si $\boxed{x=-3}$: $2y \le 5 \wedge -6 < 3y$

$\Rightarrow -2 < y \wedge y \le \dfrac{5}{2} \Rightarrow y \in \{-1; 0; 1; 2\}$

$\rightarrow$ Hay 4 pares de M.

* Si $\boxed{x=-2}$: $2y \le 6 \wedge -5 < 3y$

$\Rightarrow -\dfrac{5}{3} < y \wedge y \le 3 \Rightarrow y \in \{-1; 0; 1; 2; 3\}$

$\rightarrow$ Hay 5 pares más de M.

* Si $\boxed{x=-1}$: $2y \le 5 \wedge -2 < 3y$

$\Rightarrow -\dfrac{2}{3} < y \wedge y \le \dfrac{5}{2} \Rightarrow y \in \{0; 1; 2\}$

$\rightarrow$ Hay 3 pares más de M.

* En total, hay 15 pares en M.

$\rightarrow n(M) = 15$

RPTA: "A"

PROBLEMA 50 :

Determinar el número de soluciones enteras del siguiente sistema :

$$\begin{cases} y < -x^2 + 2x + 5 \text{ .... (I)} \\ y - 4x \le 0 \text{ .... (II)} \\ 3y - x \ge 0 \text{ .... (III)} \end{cases}$$

A) 12 B) 9 C) 8 D) 6 E) 10

RESOLUCIÓN :

* De (II) y (III) : $y \le 4x \wedge y \ge \dfrac{x}{3}$

$\Rightarrow \dfrac{x}{3} \le 4x \Rightarrow 11x \ge 0 \Rightarrow x \ge 0$

* De (I) y (III): $y < -x^2 + 2x + 5 \wedge y \ge \dfrac{x}{3}$

$\Rightarrow \dfrac{x}{3} < -x^2 + 2x + 5 \Rightarrow 3x^2 - 5x - 15 < 0$

$\Rightarrow \dfrac{5 - \sqrt{205}}{6} \le x \le \dfrac{5 + \sqrt{205}}{6} \approx 3,22$

* Como $x \ge 0 \rightarrow x \in \{0; 1; 2; 3\}$

* Si $\boxed{x=0}$: $y \le 0 \wedge y \ge 0 \Rightarrow y = 0$

$\rightarrow (0; 0)$ es una solución.

* Si

$\boxed{x=1}$: $y < 6 \wedge y \le 4 \wedge y \ge \dfrac{1}{3} \rightarrow y \in \{1; 2; 3; 4\}$ $y = 0$

$\rightarrow (1;1)$, $(1;2)$, $(1;3)$, $(1;4)$ son otras más.

* Si $\boxed{x=2}$: $y < 5 \wedge y \le 8 \wedge y \ge \dfrac{2}{3}$

$\rightarrow y \in \{1; 2; 3; 4\}$

* con esto, hay 4 pares solución más.

* Si $\boxed{x=3}$: $y < 2 \wedge y \le 12 \wedge y \ge 1$

$\rightarrow y = 1 \rightarrow (3;1)$ es una solución.

* Entonces hay 10 soluciones en total.

RPTA: "E"

PROBLEMA 51 :

Al representar gráficamente el siguiente sistema:

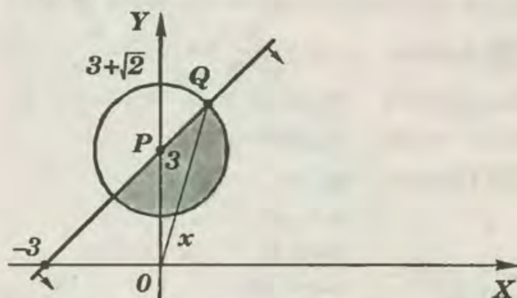
$\begin{cases} x^2+y^2-6y\le -7 \\ y-x-3\le 0 \end{cases}$ se obtiene una región cerrada, entonces la mayor distancia que existe entre un punto de la región y el origen de coordenadas es :

A) $\sqrt{8}$ B) 3 C) 4 D) $\sqrt{17}$ E) $\sqrt{20}$

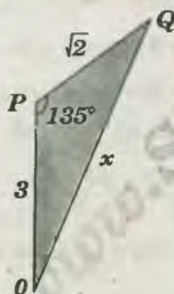
RESOLUCIÓN:

$$\begin{cases} x^2+(y-3)^2\le 2 \\ y\le x+3 \end{cases}$$

* Graficando :



* El punto con mayor distancia al origen es **Q**. Esta distancia será:



* Por la ley de cosenos :

$$x^2=3^2+\sqrt{2}^2-2(3)(\sqrt{2})\cos 135°$$

$$\Rightarrow x^2=9+2-2(3)(\sqrt{2})\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=17$$

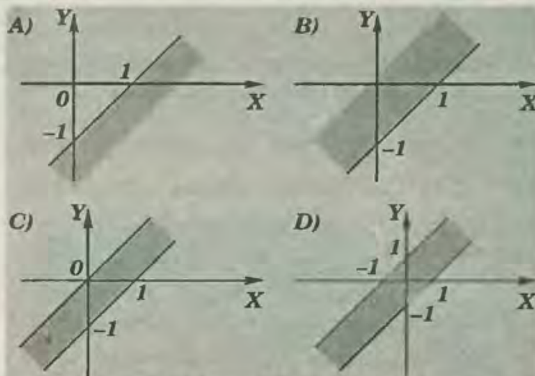
$$\Rightarrow x=\sqrt{17}$$

RPTA: "D"

PROBLEMA 52 :

Si A es un conjunto definido por :

$A=\{(x;y)\in R\times R/\sqrt{x-y}\le 1\}$, entonces la figura que mejor representa la gráfica del conjunto A es:

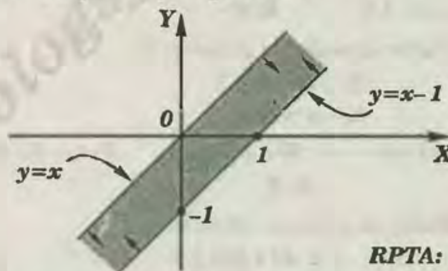


RESOLUCIÓN :

* De: $\sqrt{x-y}\le 1$, se obtiene :

$x-y\ge 0 \wedge x-y\le -1 \rightarrow x\ge y \wedge y\ge x-1$

$\rightarrow x-1\le y\le x$; y su gráfica es:



RPTA: "C"

PRIMERA PRACTICA DIRIGIDA

01 Resolver : $2x+3\le x+4$

A) $x>1$ B) $x\le 1$ C) $x\ge 1$ D) $x<1$ E) Φ

02 Hallar el conjunto solución de : $5x-10\le 0$

A) $x\in[-2;\infty\rangle$ B) $x\in\langle-\infty;2]$ C) $x\in\langle-\infty;0]$
D) $x\in\langle-\infty;-2]$ E) Φ

03 Hallar el conjunto solución de : $\frac{x}{6}-3\ge 1$

A) $x\ge 9$ B) $x\in\langle-\infty;9]$ C) $x<9$
D) $x\in[24;+\infty\rangle$ E) Φ

04 Hallar el conjunto solución de : $\frac{x}{5}+\frac{x}{6}\le 11$

A) $x\ge 30$ B) $x>30$ C) $x\le 30$ D) $x<30$ E) Φ

05 Hallar el conjunto solución de :

$$2(x+1)+3(x-1)\le 4x+6$$

A) $x\ge 7$ B) $x\le 7$ C) $x>7$ D) $x<7$ E) Φ

www.SIGLO21X.blogspot.com

06 El número de estampillas que tiene una persona aumentada en 8, resulta menor que el doble del número de estampillas, disminuida en 3. Dar un número.

A) 6 B) 7 C) 10 D) 5 E) 12

07 Hallar un número entero cuyo duplo disminuido en 3 es mayor que dicho número aumentado en 5.

A) 7 B) 9 C) 6 D) 5 E) 4

08 La tercera parte de un número, aumentado en 3 no excede a su mitad disminuida en 10. Dar un número.

A) 79 B) 60 C) 75 D) 50 E) 40

09 Hallar el conjunto solución de: $x \geq 6 ; x \leq 11$

A) $x \in \langle 6; 11 \rangle$ B) $x \geq 11$ C) $x \leq 6$

D) $x \in \{6; 11]$ E) Φ

10 Hallar el conjunto solución de:

$$3x - 1 \leq 2x + 7$$
$$7x - 3 > 5x + 7$$

A) $x \in [5; 8\rangle$ B) $x \in [5; 8]$ C) $x \in \langle 5; 8]$

D) $\varnothing$ E) $\mathbb{R}$

11 Hallar el conjunto solución de :

$$3(x-1) \leq 2x + 5; x \geq 5$$

A) $x \in [5; 8\rangle$ B) $x \in \langle 5; 8\rangle$ C) $x \in [5; 8]$

D) $\varnothing$ E) $\mathbb{N}$

12 Resolver y dar el conjunto solución :

$$x - 20 > 10$$
$$x + 20 < 30$$

A) $x \in [2; 7]$ B) $x \in [10; 20]$ C) $x \in [20; 30]$

D) $\varnothing$ E) $\mathbb{Q}$

13 Hallar el conjunto solución de : $\dfrac{x}{2} \geq 5; \dfrac{x}{3} \leq 7$

A) $x \geq 21$ B) $x \in \langle 10; 21\rangle$ C) $x \leq 10$

D) $x \in [10; 21]$ E) $\mathbb{Q}$.

14 Hallar el conjunto solución :

$$\frac{x-1}{4} \leq 7; \frac{x+3}{2} > 8$$

A) $x \in \langle 13; 29\rangle$ B) $x \in [3; 29]$ C) $x \in \langle 13: 29]$

D) $\varnothing$ E) $\mathbb{Q}$

15 Resolver : $8x - 3 \geq 10x + 7$

A) $[5; +\infty\rangle$ B) $\langle -\infty: -5]$ C) $[5; 5]$

16 De los siguientes enunciados, ¿cuántos son verdaderos?

I) $5x \geq 25 \Rightarrow x \geq 5$ II) $\dfrac{x}{3} \geq -2 \Rightarrow x \leq -6$

III) $\dfrac{x}{5} \geq -3 \Rightarrow x \geq -15$ IV) $-x \leq -1 \Rightarrow x \geq 1$

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

17 Si: $b < a < 0$; donde: $a; b \in \mathbb{R}$, de las siguientes proposiciones:

I) $a^2 > b^2$ II) $a^3 > b^3$ III) $\dfrac{1}{b} > \dfrac{1}{a}$

Son ciertas:

A) I y II B) II y III C) Sólo III D) Sólo II E) Todos

18 Resolver : $x - 4 + \dfrac{5}{x-6} \geq 8 - x + \dfrac{5}{x-6}$

A) $x \in [6; +\infty\rangle$ B) $x \in \langle 6; +\infty\rangle$ C) $x \in \langle -\infty; 6\rangle$

D) $x \in \langle -\infty; 6]$ E) $x \in \varnothing$

19 Resolver :

$$2x > 6$$
$$3x \geq -12$$
$$-5x \leq 15$$
$$-4x < -28$$

A) $\langle 7; +\infty\rangle$ B) $\langle -\infty; 7\rangle$ C) $\langle -\infty; 7]$

D) $\langle -6; +\infty\rangle$ E) $[-6; +\infty\rangle$

20 Resolver : $6x + 3 \leq 5x + 1 < 7x + 9$

A) $x \in \langle -\infty; -2]$ B) $x \in \langle -4; +\infty\rangle$ C) $x \in \varnothing$

D) $x \in [-4; -2\rangle$ E) $x \in \langle -4; -2]$

21 Resolver : $\dfrac{4x-3}{2} > \dfrac{5x-1}{3}$

A) $x < \dfrac{7}{2}$ B) $x > \dfrac{7}{2}$ C) $x < \dfrac{11}{2}$ D) $x > \dfrac{11}{2}$ E) $x \in \mathbb{R}$

22 Si: $2x - 1 \in [-5; 9\rangle$. A que intervalo pertenece:

$$3 - 5x$$

A) $\langle -22; 13]$ B) $[-22; 13\rangle$ C) $[-19; 7\rangle$

D) $\langle -19; 7]$ E) $[-5; 9\rangle$

23 ¿Cuántos números enteros permiten que en la fracción $\dfrac{3x+5}{5x-3}$ el numerador sea menor que el denominador, si: $x \in [2; 7]$?

A) 1 B) 3 C) 5 D) 4 E) 2

24 ¿Cuántos valores de "x" enteros no negativos, hacen que en la siguiente fracción: $\dfrac{x+2}{7x+1}$ el

denominador sea menor que el numerador?

A)0 B)3 C)1 D)2 E)4

25 El triple de la cantidad de manzanas disminuido en uno que compró Fernando, es menor que dicha cantidad aumentada en 3. ¿Cuántas manzanas compró Fernando?

A)2 B)1 C)3 D)4 E)5

TAREA DOMICILIARIA

01 Dado: $x>0,\ y>0,\ x>y,\ z\neq 0$ desigualdad que no siempre es correcta es:

A) $x+z>y+z$ B) $x-z>y-z$ C) $xz>yz$

D) $\frac{x}{z^2}>\frac{y}{z^2}$ E) $xz^2>yz$

02 Si: $x<y<0$, entonces es falso:

A) $x^2<xy<0$ B) $x^2>xy>y^2$ C) $x^2<y^2<0$

D) $x^2>xy$ pero $xy>0$ E) $x^2>y^2$ por $y^2<0$

03 La suma de los valores enteros de "x" que satisfacen al siguietne sistema de inecuaciones:

$$\frac{12x-5}{2}+\frac{3x-8}{5}>\frac{2x+7}{3}\ \ldots\ldots(I)$$

$$\frac{3x-1}{5}-1<\frac{x+1}{2}-\frac{x}{7}\ \ldots\ldots(II)$$

es:

A)5 B)9 C)14 D)20 E)27

04 La suma de los valores enteros positivos de "x" que satisfacen a la siguiente inecuación:

$$\sqrt[5]{3^{\frac{5x+13}{2}}}>\sqrt[7]{27^{\frac{8x+1}{4}}}$$ es:

A) 1 B) 2 C) 3 D) 6 E) 10

05 La suma de los valores enteros de "x" que satisfacen al siguiente sistema :

$5x-1>0$ ....(1)

$3x-11<0$ ....(2)

$7x-23<0$ ....(3)

$24x-5>0$ ....(4)

$3x-15<0$ ....(6)

$8x-3>0$ ....(6)

$6x+1>0$ ....(7)

$8x-53>0$ ....(7)

es :

A)1 B)7 C)6 D)10 E)15

06 Resolver : $-13\leq 2x-1\leq 5$

A) $-3\leq x\leq 3$ B) $-6\leq x\leq 3$ C) $-\infty<x\leq -6$

D) $x=3$ E) $x=-6$

07 El conjunto de valores de "a" que hace que el sistema de ecuaciones :

$$2x+7y=a\ \ldots\ldots(I)$$

$$3x+5y=13\ \ldots\ldots(II)$$

tenga sólo soluciones positivas, consta de los "a" tales que :

A) $8<a<18$ B) $\frac{19}{3}<a<\frac{62}{5}$ C) $\frac{26}{3}<a<\frac{91}{5}$

D) $\frac{26}{5}<a<\frac{91}{3}$ E) $\frac{19}{5}<a<\frac{62}{3}$

08 El intervalo para el cual se verifica la desigualdad :

$$8<3x-1\leq 14$$

A) $5<x<\infty$ B) $3<x\leq 5$ C) $-\infty<x\leq 5$

D) $12<x<\infty$ E) $15<x<\infty$

09 ¿Cuántos números enteros y positivos menores que 5 satisfacen a la siguiente inecuación?

$$\frac{1}{3}<\frac{x-1}{\frac{1}{5}}+\frac{x}{3}$$

A)1 B)2 C)3 D)4 E)5

10 ¿Para cuántos valores enteros de "x" menores de 7 se cumple que en la siguiente fracción, el numerador es mayor que el denominador?

$$\frac{5x-1}{x+7}$$

A)4 B)3 C)5 D)2 E)Ninguno

SEGUNDA PRACTICA DIRIGIDA

01 Resuelve : $x+4(x-2)<4x-3(x-1)$

A) $x<\frac{11}{4}$ B) $x>4$ C) $x<11$ D) $x>\frac{3}{4}$

02 Al resolver la inecuación :

$$\frac{x}{2}-\frac{1}{2}<\frac{3x}{2}+\frac{1}{10}$$ obtenemos :

A) $x<-3$ B) $x>-\frac{3}{5}$ C) $x>-5$ E) $x<-\frac{5}{3}$

03 Los valores de x que satisfacen las inecuaciones:

$2x + 1 > x - 4$ $-2 - x > 1 - x$ son:

A) $x > 1$ B) $x > -5$ C) $x > 2$ D) $-5 < x < 1$

04 Si "x" es entero. ¿Qué valor no puede tomar "x" en : $\frac{x+1}{3} > \frac{x-1}{5}$

A) 1 B) –3 C) 0 D) –6 E) 11

05 Resolver : $-1 < \frac{4-5x}{3} \leq 7$

y determinar el valor entero que lo verifica

A) –3 B) –2 C) 3 D) 2 E) 1

06 Hallar el mayor número entero que cumple con: $(x-4)(x+5) < (x-3)(x-2)$

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

07 Luego de resolver : $\frac{4x+1}{5} > \frac{3x-2}{3}$

Determine el complemento del conjunto solución

A) $[13/3;+\infty\rangle$ B) $\langle-\infty;1/3\rangle$ C) $\langle 13/3;+\infty\rangle$

D) $\langle-\infty;13\rangle$ E) $[13;+\infty\rangle$

08 Resolver :

$$x(x-5)+\frac{3}{x-6} < (x-4)(x-1)+\frac{3}{x-6}$$

A) $x \in \{\ \}$ B) $x \in \mathbb{R}$ C) $x \in \{6\}$

D) $x \in \mathbb{R}-\{6\}$ E) $x \in \mathbb{R}^{+}-\{6\}$

09 Hallar los valores de "x" que satisfacen a la limitación siguiente : $-6 < x+4 < -1$

A) $x \in <4; 5>$ B) $x \in <5,5 ;8>$ C) $x \in <-4 ;0>$

D) $x \in <-1; 3>$ E) $x \in <-10; -5>$

10 Calcular el máximo valor de "x" que verifica la siguiente inecuación:

$$(x+2)^2 - (x+3)^2 \geq 2x+19$$

A) –5 B) –4 C) 5 D) –6 E) –9

11 Resolver : $4x - 9 < \frac{2}{3}x + \frac{3-4x}{4}$

A) $x<4$ B) $x<\frac{9}{4}$ C) $x>5$ D) $x>4$ E) $x>\frac{9}{4}$

12 Resolver : $\frac{x}{2}+\frac{x}{3}+\frac{x}{4} < \frac{x}{6}+5$

Indique el mayor valor entero que la verifica.

A) 0 B) 5 C) 3 D) 6 E) No existe

13 Resolver : $a(x-b) - b(x-a) \leq a^2 - b^2$; $a < b$

Señalando el menor valor que puede tener "x"

A) a B) $a+b$ C) $-a-b$ D) b E) $-b$

14 Sean los intervalos : $A =]0;+\infty[$; $B =]2;5[$

Determine : $A \cap B$

A) $]0;2[$ B) $]5;+\infty[$ C) $]0;5[$

D) $]2;+\infty[$ E) $]2;5[$

15 Resolver : $3(x+5) - 2(6-x) > 5(1-x)$

A) $x<0,3$ B) $x > 0,3$ C) $x < 0,5$

D) $x > 0,5$ E) $x > 0.2$

16 Resolver :

$$a(x+b) + b(x-a) \geq a^2 - b^2 ;\ a < b < 0$$

Señale el mayor valor que toma "x"

A) $-a+b$ B) b C) a D) 2 E) $a-b$

17 Resolver : $-1 < \frac{4-5x}{3} \leq 7$

Y determinar el mayor valor entero que lo verifica.

A) –3 B) –2 C) 3 D) 2 E) 1

18 Resolver el siguiente sistema :

$$3x - 4 \leq 5x + 2 \leq -x + 8$$

A) $1 \leq x 0$ B) $-3 \leq x \leq 1$ C) $-3 \leq x \leq -1$

D) $x \leq -3$ E) $x \leq 1$

19 Hallar la suma de todos los valores enteros que satisface el sistema : $\frac{2}{3} < \frac{x-1}{x+3} < \frac{7}{9}$

A) 50 B) 60 C) 75 D) 84 E) 100

20 Resolver : $\dfrac{\frac{x}{a}+a}{a+1} > 1$

Si: $a = 1-\sqrt{5}$

A) $x>1+\sqrt{5}$ B) $x>1-\sqrt{5}$ C) $x<1+\sqrt{5}$

D) $x<1-\sqrt{5}$ E) $x \in \phi$

TAREA DOMICILIARIA

01 Resolver :

$$(x-5)(x+3)\frac{1}{x-8} > (x-6)(x+4)+\frac{1}{x-8}$$

A) $x \in \phi$ B) $x \in \mathbb{R}$ C) $x \in \{5\}$

D) $x \in \mathbb{R}-\{8\}$ E) $x \in \langle 0;+\infty\rangle-\{8\}$

02 ¿Cuántos enteros positivos no verifican la inecuación? $3x - 3 > 2(x+1)$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 5 E) infinito

03 Resolver : $(x+6)(x-1) \geq (x+3)(x+2)$

Indique su conjunto solución:

A) $x \in \phi$ B) $x \in R$ C) $x \in [-6,6]$
D) $x \in R - \langle -6,6 \rangle$ E) $x \in \{-6,6\}$

04 Resolver : $\dfrac{a^2(x-3)}{4} + b^2 > \dfrac{b^2(x-3)}{4} + a^2$

Siendo : $0 < a < b$

A) $\langle -\infty;7]$ B) $\langle 7;+\infty \rangle$ C) $[7;+\infty \rangle$
D) $\langle -\infty;7 \rangle$ E) $\langle -7;+\infty \rangle$

05 Resolver : $\dfrac{1}{2}(3x-7) < \dfrac{7}{3}(x-4)$

A) $[7;\infty \rangle$ B) $\langle 8;\infty \rangle$ C) $[9;\infty \rangle$ D) $\langle 7;\infty \rangle$ E) $[8;9 \rangle$

TERCERA PRACTICA DIRIGIDA

01 Resolver el sistema :

$x^2 - 11x + 24 < 0$
$x^2 - 9x + 20 > 0$

dar como respuesta el número de valores enteros que verifican

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

02 Resolver : $3x^2 + 7x < x^2 + 2x + 3.$

Obteniéndose como solución $\langle a;b \rangle$

Indique : $-a$

A) $-3/5$ B) -1 C) 3 D) $3/5$ E) $-1/2$

03 Si al resolver la inecuación : $3x^2 - 2x \leq 3x - 2$

Se obtiene como conjunto solución $x \in [a;b]$, indique $a+b/3$

A) 2 B) -1 C) -2 D) 1 E) 0

04 Resolver : $3x^2 - 3x + 5 \geq 2x^2 + 2x - 1$

Indique su conjunto solución :

A) $x \in [2;3]$ B) $x \in \langle -\infty;2 \rangle \cup \langle 3;+\infty \rangle$
C) $x \in \langle -\infty;2] \cap [3;+\infty \rangle$ D) $x \in \langle 2;3 \rangle$
E) $x \in \langle 3;+\infty \rangle$

05 Resolver : $3x^2 - 5x+3 > 2x^2+x-4$

e indique el complemento del conjunto solución

A) $]3-\sqrt{2};3+\sqrt{2}]$ B) $[-3-\sqrt{2};-3+\sqrt{2}]$
C) $[3+\sqrt{2};3+2\sqrt{2}]$ D) $[3-\sqrt{2};3+\sqrt{2}]$
E) $\langle -\sqrt{2};\sqrt{2} \rangle$

06 Resolver : $3x^2-5x+3 \leq 2x^2-x+2$

e indique el complemento del conjunto solución:

A) $\langle -\infty;2-\sqrt{3}] \cup [2+\sqrt{3};+\infty]$
B) $[2-\sqrt{3};2+\sqrt{3}]$
C) $\langle -\infty;2-\sqrt{3} \rangle \cup \langle 2+\sqrt{3};+\infty \rangle$
D $\langle -\infty;\infty \rangle - \langle 2+\sqrt{3};2-\sqrt{3} \rangle$
E) $\langle 2-\sqrt{3};2+\sqrt{3} \rangle$

07 Resolver : $2x(x-3) \geq x(x-4) - 1$

indique su conjunto solución:

A) $x \in R - \{1\}$ B) $x \in \langle -\infty;\infty \rangle - \{1;-1\}$ C) $x \in R$
D) $x \in \langle 0;\infty \rangle$ E) $x \in \langle -\infty;0 \rangle$

08 Resolver :

$$2(x-5)+\sqrt{5-x} > 5(3-x)+\sqrt{5-x}-4$$

A) $x \in [3;5 \rangle$ B) $x \in \langle 3;5 \rangle$ C) $x \in \langle 3;5]$
D) $x \in \langle 3;+\infty \rangle$ E) $x \in \phi$

09 Resolver :

$$3(2-x)+\sqrt{3-x} \leq 2(3-x)-5+\sqrt{3-x}$$

A) $x \in \langle -\infty;3]$ B) $x \in [3;5]$ C) $x \in [3;+\infty \rangle$
D) $x \in \phi$ E) N.A.

10 Determine el menor valor de "k" en:

$8x + 3 - 4x^2 \leq k \; ; \; \forall \, x \in R$

A) 8 B) 3 C) 7 D) -2 E) 9

11 Si el conjunto solución de : $x^4 - 2x^2 - 8 < 0$

Es: $\langle a; b \rangle$; hallar "$a+b$"

A) -2 B) 2 C) -4 D) 4 E) 0

12 Resolver : $(x^2 + 9)(x^2 - 1) \leq 0$

A) $x \in R$ B) $x \in [-1;1]$ C) $x \in R - \langle -1;1 \rangle$
D) $x \in [-3;1]$ E) $x \in [1;3]$

13 Resolver el sistema (en Z) :

$-x < -2$
$x > 0$
$x < 5$

A) $\{1\}$ B) $\{3;4\}$ C) $\{0;1\}$ D) $\{4;5\}$ E) $\{0\}$

14 Cuántos enteros no verificarán la inecuación:

$x(x+2) > 2(x+1) + 3$

A) 1 B) 4 C) 5 D) infinitos E) 0

15 Resuelva : $8+9\sqrt{(3x-1)(x-2)} = 3x^2 - 7x$

y de como respuesta la suma de soluciones

A) 7 B) $\frac{7}{3}$ C) $\frac{28}{3}$ D) $\frac{3}{28}$ E) $\frac{21}{3}$

16 Resuelva : $\sqrt{2x-2\sqrt{x^2-4}}=\sqrt{x+2}-3$

A) {5;7} B) {2;11} C) {11} D) {13} E) {15}

17 Halle la suma de valores enteros del conjunto solución de : $\frac{x^2}{x-3}+2\geq x+6$

A) 70 B) 78 C) 68 D) 65 E) 72

18 Indique el menor valor entero que verifica:

$$\frac{1}{x-2}<\frac{x}{x+4}\leq\frac{x-2}{x+1}$$

A) -4 B) -8 C) 8 D) 7 E) 3

19 Halle el valor de a y b en la siguiente inecuación : $\frac{x^2-2}{(x-a)(x-b)}\geq 1;\ 0<a<b$

además : $a^2>2$ y $C.S. = [2;3\rangle\cup\langle 4;+\infty\rangle$

A) 1;2 B) 2;4 C) 3;4 D) 4;3 E) 4;2

20 Resuelve : $\sqrt{x^2-3x+2}>2-x$

A) R B) $\varnothing$ C) $[2;+\infty\rangle$ D) $\langle-\infty;2\rangle$ E) $[1;2]$

TAREA DOMICILIARIA

01 Resolver : $(x-2)^2\leq 4^2$

A) $x\in[-6;2]$ B) $x\in[-3;4]$ C) $x\in\{2\}$
D) $x\in[-2;6]$ E) $x\in R$

02 Resolver : $x^2-5x+1\leq 0$

A) $x\in\langle-5-\sqrt{21};-5+\sqrt{21}\rangle$ B) $x\in R$

C) $x\in\left[\frac{5-\sqrt{21}}{2};\frac{5+\sqrt{21}}{2}\right]$ D) $x\in\phi$

03 Resolver : $3x^2+x+8\geq 0$

A) $x\in\langle 1-\sqrt{2};1+\sqrt{2}\rangle$ B) $x\in R$ C) $x\in\phi$
D) $x\in R-\{1-\sqrt{2};1+\sqrt{2}\}$ E) $x\in R-\{2\}$

04 Resolver : $5x^2-2x+10<9$

A) $x\in R$ B) $x\in\langle 1-\sqrt{3};1+\sqrt{3}\rangle$
C) $x\in R-\langle 1-\sqrt{3};1+\sqrt{3}\rangle$ D) $x\in\phi$

05 Sea el sistema de inecuaciones :

$$x^2-8x-9\leq 0$$
$$x\leq a$$

si su conjunto solución es unitario indique el valor de "a"

A) 8 B) 8,5 C) 9 D) -1 E) 7

CUARTA PRACTICA DIRIGIDA

01 Indicar verdadero (V) o falso (F) en las proposiciones siguientes:

( ) Si $x-1\geq 1\Rightarrow x\geq 2$
( ) Si $2-x<0\Rightarrow 2<x$
( ) Si $\frac{x}{4}<0\Rightarrow x>0$

A) VVF B) VVV C) VFF D) FVF E) FVV

02 Indique el valor de verdad:

( ) Si $(1+a)x<1+a\Rightarrow x<1,\forall a>-1$
( ) Si $3ax\geq a\Rightarrow x\leq\frac{1}{3},\ \forall a<0$
( ) Si $a^2x<a^2\Rightarrow x>1, a\neq 0$

A) VFF B) VFV C) VVF D) FFF E) FFV

03 Resolver: $\frac{x-2}{3}+\frac{4-x}{2}\leq\frac{x+1}{5}$

Señale el menor entero «x» que verifica la inecuación.

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

04 Resolver: $\frac{x+\frac{1}{2}}{3}+\frac{x-\frac{1}{4}}{2}>1+\frac{3-x}{6}$

A) $\left]\frac{35}{24};+\infty\right[$ B) $\left]\frac{35}{12};+\infty\right[$ C) $\left]-\frac{35}{24};+\infty\right[$
D) $\left]-\infty;\frac{35}{12}\right[$ E) $\left]-\infty;\frac{12}{35}\right[$

05 Resolver: $\begin{cases}\frac{3x-1}{5}<\frac{1-2x}{3}\\ 1-x\geq x\end{cases}$

A)]1;2] B) [0;1] C) $\left]\frac{8}{19};1\right]$ D) $[1;+\infty[$ E) $\left]\frac{8}{19};+\infty\right[$

06 Resolver: $x-1<\frac{3-5x}{2}\leq\frac{x+3}{6}$

A) $\left[\frac{3}{8};\frac{5}{7}\right]$ B) $\left[\frac{3}{8};1\right]$ C) $\left[\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right\rangle$
D) $\left[\frac{3}{8};\frac{5}{7}\right[$ E) $\left]1;\frac{7}{5}\right]$

07 Resolver en «x»:

$$\frac{ax-b}{a}+\frac{bx-a}{b}\le 2; a<0; b>0$$

A) $\langle -\infty; ab]$ B) $\langle -\infty; 2ab]$ C) $\left[\frac{a^2+b^2}{2ab}; +\infty\right\rangle$

D) $\left\langle -\infty; \frac{(a+b)^2}{2ab}\right]$ E) $\left\langle -\infty; \frac{a^2+b^2}{2ab}\right]$

08 Resolver: $2x^2 + x \le 15 - x + x^2$

A) $[3; 5]$ B) $[-5; 3]$ C) $[3; +\infty[$
D) $]-\infty; -5] \cup [3; +\infty[$ E) $]-\infty; 5]$

09 Señale el menor valor entero «x» al resolver:

$$(x-1)(x+2)-(x+2)(x-3)>0$$

A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 2

10 Si: $a < 3 < b$

resolver: $(x-a)(x-b) < x-a$

A) $<a+1; b>$ B) $<a; b+1>$ C) $<b; a>$
D) $<-b; -a>$ E) $<b+1; a>$

11 Sea: $A = \{3x-1 / x(x+6) \le 16\}$

Calcular $n(A)$

A) 28 B) 29 C) 30 D) 31 E) 32

12 El menor número entero «m» que satisface la desigualdad: $-2x^2 + 4x - 5 < 2m; \forall x \in \mathbb{R}$ es:

A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 2.

13 Hallar el intervalo de «m» si se cumple:

$$\frac{5x^2+mx+4}{x^2+1}\ge 3; \forall x \in \mathbb{R}$$

A) $[-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$ B) $[-\sqrt{3}; \sqrt{3}]$ C) $[-\sqrt{5}; \sqrt{5}]$

D) $<-\sqrt{2}; \sqrt{3}>$ E) $[1; +\infty>$

14 Indicar el valor veritativo en las proposiciones:

( ) Si $(x-3)^2 \ge 0 \Rightarrow x \in \mathbb{R}$

( ) Si $(x+4)^2 \le 0 \Rightarrow x = -4$

( ) Si $(x-1)^2 < 0 \Rightarrow x \in \phi$

A) VVF B) FVV C) FFV D) VVV E) VFF

15. Al resolver: $x^2 - 5x + 2 \ge 0$

se obtiene como conjunto solución: $x \in \mathbb{R} - <m; n>$.
Indicar: $m+n$.

A) -5 B) -1 C) 2 D) 4 E) 5

16 Resolver: $\begin{cases}\frac{3x-5}{2}<4\\ 3x(x-2)\le 2x^2+7\end{cases}$

A) $<-13; 1)$ B) $\left[-1; \frac{13}{3}\right\rangle$ C) $\left\langle \frac{13}{3}; +\infty\right\rangle$

D) $\left[-\frac{1}{3}; 1\right\rangle$ E) $\left[-\frac{1}{3}; 1\right\rangle \cup \left\langle 1; \frac{13}{3}\right]$

17 Resolver: $\begin{cases}x^2-5x+4<0\\ x^2-5x+6>0\end{cases}$

A) $<-1; 2>$ B) $<3; 6>$ C) $<5; 6>$
D) $<1; 2> \cup <3; 4>$ E) $<1; 2> \cup <3; 6>$

18 A qué intervalo pertenece «k» para que la inecuación: $x^2 + (k-1)x + k-2 = 0$ de raíces r y s. verifique: $r^2s + rs^2 \ge -6$

A) $[1; 4]$ B) $<1; 4>$ C) $[-1; 1]$ D) $[-1; 4]$ E) $[-4; 4)$

19 Al resolver: $16x^2 - 8\sqrt{2}x + 1 < 0$

se obtiene $C.S = <a; b>$. Calcular: $b - a + \frac{1}{2}$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

20 Sea la inecuación en «x» de primer grado:

$$(2a+b)x^3+(a^2+b+1)x^2+(2a-1)x+(a+b)^2\ge 0$$

Indicar el conjunto solución.

A) $[-1; +\infty>$ B) $[-2; +\infty>$ C) $<-\infty; 2]$
D) $<-\infty; 1]$ E) $[-1; 1]$

QUINTA PRACTICA DIRIGIDA

01 Al resolver: $(x-2)(x+3)(x-5) > 0$

indicar la verdad (V) o falsedad (V) en:

( ) El menor entero del C.S es -2

( ) Un intervalo del C.S es $<5; +\infty>$

( ) La suma de valores enteros negativos es -3

A) VVF B) VFV C) FFV D) VVV E) FVV

02 Indicar el valor veritativo de las proposiciones siguientes:

( ) Si $x^3 \ge 0 \Rightarrow x \ge 0$

( ) Si $(x-1)^4 \ge 0 \Rightarrow x \in \mathbb{R}$

( ) Si $(x-2)^3 < 27 \Rightarrow x < 5$

A) FFF B) FFV C) FVV D) VVF E) VVV

03 Resolver la inecuación: $(x - x^2 + 2)(x - 3) > 0$

Indicar un intervalo solución.

A) $<-1; 2>$ B) $<2; 3>$ C) $<-\infty; 2>$
D) $<-1; +\infty>$ E) $<-1; 0]$

04 Resolver: $2x^3 + 3x^2 + 3x + 1 < 0$

A) $<-2;+\infty>$ B) $<-\infty;2>$ C) $\left\langle-\infty;-\frac{1}{2}\right\rangle$
D) $\left\langle\frac{1}{2};-\infty\right\rangle$ E) $<-1;2>$

05 Al resolver: $\frac{(x^2-5x+4)}{x-2}\le 0$

indicar el valor de verdad:
( ) El mayor entero del C.S es **4**.
( ) El número de valores enteros positivos es **3**.
( ) $\{2\}\subset C.S$
A) VVV B) FVV C) VVF D) VFV E) FFV

06 Al resolver: $\frac{(x^2+9)(x-8)}{x^2-x+1}\le 0$ se obtiene como C.S = $<-\infty; a]$. Calcular ; $\sqrt[3]{a}$
A) 4 B) 1 C) 2 D) -2 E) 3

07 Resolver: $\frac{x}{x+2}>x$
Dar el complemento del conjunto solución.
A) $]-1;2]\cup[3;+\infty[$ B) $[-2;-1]\cup[0;+\infty>$
C) $<-\infty;-2>$ D) $]-\infty;3]$ E) $[2;+\infty>$

08 Resolver: $\frac{x+3}{x-1}<\frac{x-1}{x+1}$
A) $<-1;+\infty>$ B) $<-1;1>$ C) $<3;5>$
D) $<-2;2>$ E) $<-3;3>$

09 Resolver: $\frac{(x-2)^3(x+1)^2(x-1)^6}{x+5}\le 0$
A) $[-1;1]$ B) $<-5;2]$ C) $[2;+\infty>$
D) $[-1;+\infty>$ E) $<-\infty;1>$

10 Resolver:
$$\frac{(x+3a)^5(x+2b)^4}{(x+2b)^2}<0$$
si: $2b>3a$
A) $<-\infty;-3a>$ B) $<-2b;+\infty>$ C) $<-\infty;-3a>-\{-2b\}$
D) $<3a;+\infty>$ E) $<2b;+\infty>$

11 Si $-a<1$, resolver:
$$\frac{(x+a)(x^2+a+1)}{x-1}\ge 0$$
Señalar el complemento del conjunto solución.
A) $<-a;+\infty>$ B) $<1;+\infty>$ C) $<-\infty;a]$
D) $<-a;1]$ E) $<1;a]$

12 Indicar el producto de las soluciones enteras, al resolver: $(x^2-8x)^2-2(x^2-8x)-63\le 0$
A) 0 B) 63 C) 3 D) 56 E) 81

13 Si $S=\mathbb{R}-[a;b]$ es el conjunto solución de la inecuación: $x^3(x-2)^2(x-3)>0$ entonces el valor de a^b+b^a es:
A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

14 Si **A** es el conjunto solución de:
$$\frac{-3(1-x)^4(x^2-9)^6x^2}{4x^2(x^2-1)^9}\ge 0$$
entonces la suma de los elementos enteros del conjunto **A** es:
A) 1 B) -1 C) 2 D) -3 E) -2

15 Determinar el conjunto solución de:
$$\frac{2ax+3b}{2bx+3a}<1$$
si $a<b<0$
A) $\left\langle-\infty;-\frac{3a}{2b}\right\rangle\cup\left\langle\frac{3}{2};+\infty\right\rangle$ B) $\left\langle-\frac{3a}{2b};\frac{3}{2}\right\rangle$ C) $\left\langle-\infty;\frac{3a}{2b}\right\rangle$
D) $\left\langle\frac{3}{2};+\infty\right\rangle$ E) $<0;+\infty>$

16 Si el conjunto solución de la inecuación es $[m;n]$ en: $x^4+5x^3+9x^2+11x+6\le 0$ indicar: $m-n$
A) -1 B) -2 C) -3 D) -4 E) -5

17 Resolver la inecuación:
$$3x^5+5x^4+3x^3+3x^2+5x+3<0$$
Indicar el mayor valor entero.
A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 2

18 Resolver: $\frac{2}{3}+\frac{x}{x+3}>2$
A) $<-12;12>$ B) $<-3;3>$ C) $<-12;-3>$
D) $<3;12>$ E) $<-12;+\infty>$

19 Señale el conjunto solución de la inecuación:
$$\frac{x^2+x-6}{x^2-x-6}\le 1$$
A) $<-\infty;-2>\cup[0;3>$ B) $<-\infty;-1>\cup<1;+\infty>$
C) $<-\infty;0]\cup<3;+\infty>$ D) $<-\infty;-2>\cup<1;6>$
E) $<-\infty;-2>\cup<1;+\infty>$

20 Después de resolver: $\begin{cases}(x-3)^3\le 4\\ x^3-x^2\ge 3x^2\end{cases}$

se obtuvo C.S = $[a+1;b-2]$. Calcular **ab**.
A) 20 B) 18 C) 15 D) 21 E) 24

SEXTA PRACTICA DIRIGIDA

01 Resolver el sistema :
$$x^2+x-2\le 0$$
$$x^2-16\le 0$$

e indicar un intervalo solución

A) $[-4; x-2]$ B) $[2;\infty\rangle$ C) $\langle -\infty;-2]$

D) $\mathbb{R}^+$ E) $\langle -10;8]$

02 Indicar la suma de los valores enteros de "x"

$$\text{si:}\begin{cases}2x+7>0\\14-3x>0\\5x+1>0\end{cases}$$

A) 10 B) 11 C) 12 D) 13 E) 14

03 El conjunto de valores de "n" que hacen que el sistema de ecuaciones :

$$2x+7y=n$$
$$3x+5y=13$$

tengan soluciones positivas es:

A) $\left\langle \frac{26}{13};\frac{91}{5}\right\rangle$ B) $\left\langle \frac{26}{3};\frac{91}{3}\right\rangle$ C) $\left\langle \frac{2}{3};\frac{1}{3}\right\rangle$

D) $\left\langle \frac{2}{5};\frac{7}{5}\right\rangle$ E) $\langle 2/3;0\rangle$

04 Resolver para valores enteros el sistema :

$$5x-3y>2$$
$$2x+y<11$$
$$y>3$$

indicar: x^2+1

A) 10 B) 17 C) 26 D) 37 E) 5

05 Hace dos años Luis pesaba $1\ kg$ menos. Si entonces el cociente entre su peso y su edad era $5/3$ y ahora el cociente está entre 1 y $6/5$ ¿qué edad tiene Luis?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 8 E) 9

06 Se compran igual cantidad de camisas de 2 colores; al venderse la cuarta parte quedan menos de 118 por vender. Si se vendiera la sexta parte quedarían más de 129 por vender, ¿cuántas camisas se compraron?

A) 155 B) 154 C) 150 D) 156 E) 148

07 Cuántos números enteros satisfacen:

$$\begin{cases}5x-6>3x-14\\ \dfrac{7x+5}{2}<x+2\end{cases}$$

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

08 Resolver : $3x^2-11x+6<0$

$$2x^2-x-10\geq 0$$

A) $[5/2;3\rangle$ B) $[1/2;3\rangle$ C) $[7/2;4\rangle$

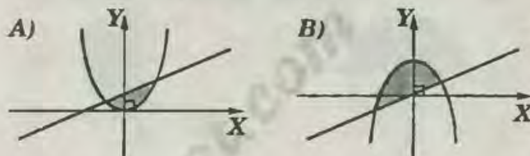
D) $\langle 9/2;11\rangle$ E) $\langle 7/2;8]$

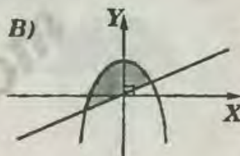
09 Resolver : $\dfrac{5x+2}{5}>\dfrac{4}{3}(1+x)<11+2x$

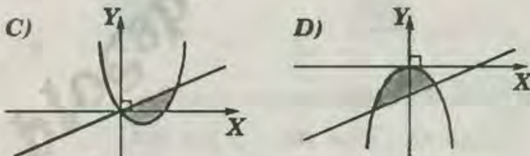
Luego indique la suma de valores enteros de "x"

A) 140 B) -102 C) -80 D) 100 E) 8

10 Indicar el gráfico correspondiente a la solución del sistema : $\begin{cases}y\geq x^2\\x+1\geq y\end{cases}$





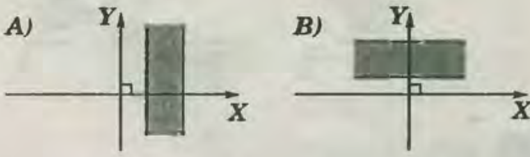




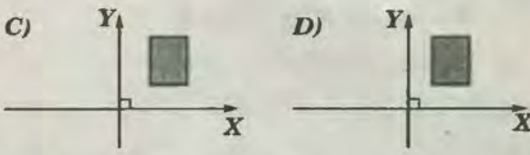
11 Sean los conjuntos:

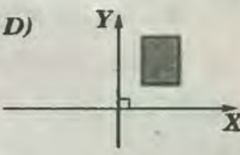
$$A=\{(x;y)\ /\ 1\leq x\leq 2\}$$
$$B=\{(x;y)\ /\ 1\leq y\leq 2\}$$

graficar : $A\times B$



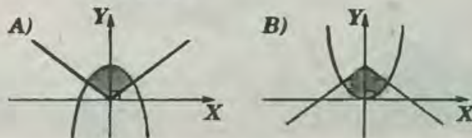


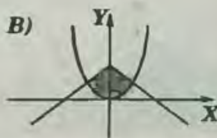


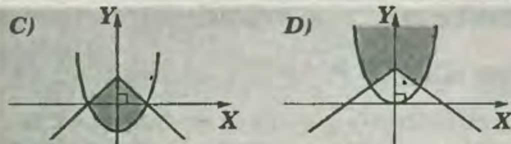


12 Resolver gráficamente el sistema :

$$\begin{cases}|x|\leq y\\y<1-x^2\end{cases}$$

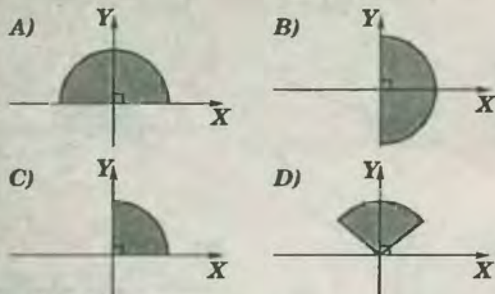






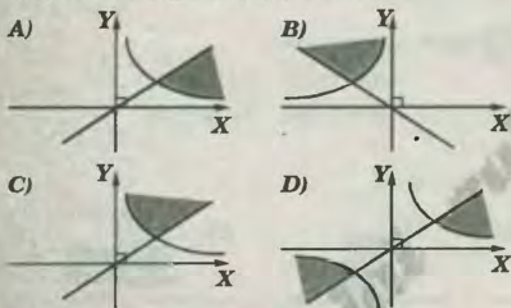
13 Resolver gráficamente el sistema :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 2 \\ y \geq 0 \end{cases}$$



14 Resolver gráficamente el sistema :

$y \geq 1/x$ *(I)* ; $y \leq x$ *(II)* ; $y > 0$ *(III)*

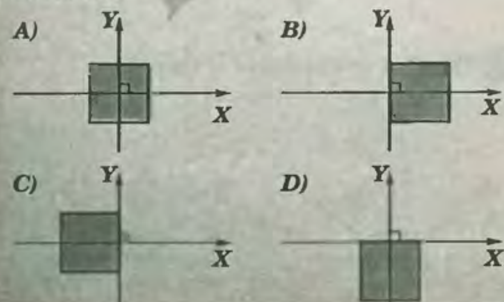


15 Dados los conjuntos :

$$A = \{(x;y) \in R^2 / -1 \leq x \leq 1\}$$

$$B = \{(x;y) \in R^2 / -1 \leq y \leq 1\}$$

hallar $A \times B$



16 Indique la suma de los valores enteros positivos que satisfacen el sistema:

$$\frac{7}{9} > \frac{x-1}{x+3} > \frac{2}{3}$$

A)19 *B) 28* *C) 35* *D) 48* *E)60*

17 Resolver el sistema :

$$x^2 + x + 1 > 0$$
$$x^2 + 1 < 0$$

A)$\mathbb{R}$ *B)*ϕ *C)*$\{1\}$ *D)* $\{0\}$ *E)*$\mathbb{R}_0$

18 Resolver el sistema para valores enteros:

$$x + y + z > 8$$
$$x - y + z < 4$$
$$z - y > 0$$
$$z < 5$$

indicar : yz

A)6 *B)12* *C)24* *D) 36* *E)48*

19 Resolver el sistema en los enteros :

$$2x - 5y > 30$$
$$x + 3y < -22$$
$$y > -8$$

indicar : xy

A)17 *B)16* *C)14* *D) 18* *E)12*

20 Resolver el sistema:

$$\frac{x^2+1}{x-3} \geq 0$$

$$\frac{1}{2-x} < -1$$

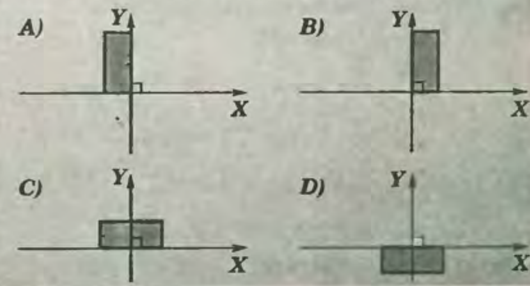
A)$\{-3\}$ *B)*$\langle 3;\infty \rangle$ *C)*$\mathbb{R}$ *D)*$\{2\}$ *E)*ϕ

TAREA DOMICILIARIA

01 Graficar : $A \times B$

Si : $A = \{(x;y) / |x| \leq 1\}$

$B = \{(x;y) / 0 < y < 1\}$



02 Hallar los valores enteros que satisfacen:

$$\frac{2x-15}{2}<\frac{5}{3}(2-x)>\frac{2}{3}(8-5x)$$

e indicar su suma

A) 9 B) 10 C) 8 D) 7 E) 6

03 Resolver el sistema:

$$\begin{cases}(x^2+1)(x^2+x+1)>0\\ |x|\geq 0\end{cases}$$

A) ϕ B) R^+ C) $]-\infty;1]$ D) $[1:\infty[$ E) R

04 Resolver el sistema : $3x^2+2x>0$

$x^3+x^2+x<0$

A) $0<x<2/3$ B) $x<-2/3$ C) $x>2/5$

D) $x<0$ E) ϕ

05 Resolver :

$$\begin{cases}5\left(\frac{x}{5}-2\right)<3\left(\frac{x}{3}-2\right)\\ 3(x-3)>1+2x\end{cases}$$

A) $x<2$ B) $x>2$ C) $x>0$ D) R E) $x<-2$

SEPTIMA PRACTICA DIRIGIDA

01 Si $a>b>0$ y $x>0$ determine el intervalo al que pertenece «c» sabiendo que:

$$c=1+\frac{a-b}{b+x}$$

A) $1<c<\frac{a}{b}$ B) $\frac{a}{b}<c<1$ C) $a<c<b$

D) $b<c<a$ E) $2<c<\frac{a}{b}$

02 El conjunto solución de:

$$(x^2-x+6)(x^2-x-6)(x-1)^2(x+4)^6\leq 0$$

es:

A) $[-2;3]\cup\{-4\}$ B) $[-2;3]$ C) $[2;3]\cup\{1\}$

D) $[1;4]$ E) $[-4;-2]$

03 Resolver: $\frac{(x-1)^{30}(x+2)^3}{(x^{2}+x+2)(x-5)}>0$

Si la solución es $S=(R-<a;b])\cup\{1\}$.

Dar el valor de: $T=b-a$

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

04 Resolver: $1+\frac{24-4x}{x^2-2x-15}>0$

A) $<-\infty;-3>\cup<5;+\infty>$ B) $<-3;5>$ C) $<-\infty;5>-\{3\}$

D) $<-\infty;3>\cup<5;+\infty>$ E) $<-\infty;5>\cup\{3\}$

05 Resolver: $\frac{x-2}{x+2}<\frac{x^2}{x^2+2}$

A) $<-2;1>$ B) $<-2;+\infty>$ C) $<-\infty;-2>$

D) $<2;+\infty>$ E) $<-1;+\infty>$

06 Al resolver la inecuación:

$$\frac{(x-2)^a(x-3)^b}{(x-4)^c}\geq 0$$

se obtuvo como conjunto solución

$$C.S=<-\infty;2]\cup\{3\}\cup<4;+\infty>$$

si: $0<c<b<a$, calcule el mínimo valor de $T=a+b+c$

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 9

07 Si: $6x-x^2\in[m;n]\forall x\in[0;8]$, resolver la inecuación: $\frac{x^2-(m+n)x+mn}{x^2-2nx+n^2}\leq 0$

A) $[-16;9[$ B) $[9;34]$ C) $]9;25]$ D) $]9;16]$ E) $[-16;25]$

08 Al resolver la inecuación siguiente, se obtiene que:

$$x\in<-\infty;m>-\{p;q\}$$

$$\frac{2x-1}{x+1}+\frac{3x-1}{x+2}<4+\frac{x-7}{x-1}-\frac{10x+13}{(x+1)(x+2)}$$

Determine : $m^2+n^2+p^2$

A) $5\frac{3}{4}$ B) $5\frac{4}{5}$ C) $5\frac{6}{7}$ D) $5\frac{8}{9}$ E) 6

09 Al resolver la inecuación en «x»

$$x^2+2(2\alpha-3\beta)x+36m<0$$

se tiene $C.S=\left]\alpha^2+4;\beta^2+9\right[$ .Calcular: $\alpha+\beta+m$

A) 3 B) -2 C) 4 D) 5 E) 6

10 Si: $a+b+c=6$, además $\{a;b;c\}\subset R^+$, determine el mínimo valor entero positivo que verifica la inecuación en «x».

$$3abcx^2+9x-2abc<27x^2+abcx-18$$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

11 Cuántos enteros positivos no verifican la inecuación $\frac{2x^2-5x}{2x^2-5x+2}\geq\frac{x^2-3x+2}{x^2-3x+3}$

A) Ninguno B) 1 C) 2 D) 3 E) Más de 3

12 Resolver las inecuaciones cuadráticas en «x»

$$\left(a+\frac{1}{a}+1\right)x^2-\sqrt{a}x+1>0$$

$$a^2x^2+4ax+3<0$$

y dar como respuesta la intersección de los conjuntos solución, además $a>0$.

A) $]-a;-3a[$ B) $]3a;4a[$ C) $]a;a+1[$

D) $]-a;a[$ E) $\left]-\frac{3}{a};-\frac{1}{a}\right[$

13 Resuelva la inecuación en «x».

$$\frac{(n+1)x^2+\sqrt{4n^2-5x}+n-1}{(n+1)x^2+n^2x+n-1}<0$$

si $n>2$

A) $\left]1-n;-\frac{1}{n+1}\right]$ B) $\left]-\frac{1}{n-1};1-n\right[$

C) $]1-n;n+1[$ D) $]2;+\infty[$ E) $]1-n;0[$

14 Dadas las proposiciones:

$p:[\exists x\in N/x+2=5]\wedge[\forall x\in N:x^2>x]$

$q:[\forall a\in Z;-a<0]\vee[\exists x\in Z/-x=x]$

$r:\exists x\in R/\sqrt{-x}\in R$

indique el valor de verdad de sus negaciones

A) VFF B) FVF C) VFV D) VVF E) FFV

15 Determine el intervalo en el cual debe estar comprendido el valor de «n» para que la inecuación:

$$\frac{3(2n+1)x^2-2(4n+5)x+5n+9}{5x^2-6x+5}<n+2$$

se verifique para todo valor de «x»

A) Φ B) $<-2;3>$ C) $<0;4>$ D) $<-\infty;7>$ E) $\mathbb{R}$

16 Dado el conjunto:

$$M=\left\{m\in\mathbb{R}/-3<\frac{x^2+mx-2}{x^2-x+1}<2;\forall x\in\mathbb{R}\right\}$$

es igual a:

A) $]-1;1[$ B) $]-2;2[$ C) $]1;2[$ D) $]1;3[$ E) $]-1;2[$

17 Resolver la inecuación en «x»:

$$(2m+1)x^3-x^2\geq mx+m;\forall m\in\mathbb{R}^+$$

A) $x\in[-1;+\infty[$ B) $x\in[1;+\infty[$ C) $x\in\Phi$

D) $x\in[0;+\infty[$ E) $]-\infty;0[$

18 Resolver la inecuación polinomial en variable «x»:

$$abx^4+(ac-ab)x^3+b^2x^2+(bc-ac)x+bc<0$$

si $b>a>c>0$

A) Φ B) R^+ C) R D) $]0;a+b[$ E) $]-\infty;0[$

19 Si $\alpha<0<\beta-\alpha$, al resolver: $\frac{\alpha x-4\beta}{\alpha-\pi}<0$

se obtiene para «x».

A) $\left]-\infty;\frac{4\beta}{\alpha}\right[$ B) $\left]\frac{4\beta}{\alpha};0\right[$ C) $]\alpha;4\beta[$

D) $\left]\frac{\alpha}{\beta};0\right[$ E) $\left]\frac{\alpha}{4\beta};1\right[$

20 Si: $a_{n+1}=a_n+1;\forall n\in Z^+$

además: $x_1\in<a_{40};a_{41}>;\ x_2\in<a_{44};a_{45}>;$

resuelva: $(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)\ ....\ (x-a_{100})<0$

donde: $x\in[x_1;x_2]$

A) $[x_1;x_2]$ B) $]x_1;x_2[$ C) $]a_{41};a_{42}[$

D) $]a_{41};a_{42}[\cup]a_{43};a_{44}[$ E) $[x_1;a_{42}[\cup]a_{43};x_2]$

CLAVES DE LA PRIMERA PRACTICA

01) B	02) B	03) D	04) C	05) B
06) E	07) B	08) A	09) D	10) C
11) C	12) D	13) D	14) C	15) E
16) D	17) B	18) B	19) A	20) B
21) E	22) A	23) B	24) C	25) E
01)	02) A	03) D	04) D	05) B
06) B	07) C	08) B	09) C	10) A

CLAVES DE LA SEGUNDA PRACTICA

01) A	02) B	03) A	04) D	05) D
06) B	07) B	08) A	09) E	10) B
11) B	12) B	13) B	14) E	15) E
16) E	17) E	18) B	19) B	20) B
01) D	02) C	03) A	04) C	05) C

CLAVES DE LA TERCERA PRACTICA

01) A	02) B	03) B	04) E	05) B
06) B	07) D	08) C	09) D	10) C
11) E	12) C	13) B	14) C	15) C
16) C	17) E	18) C	19) C	20)
01) D	02) C	03) B	04) D	05) D

CLAVES DE LA CUARTA PRACTICA

1)A	2)C	3)D	4)A	5)C	6)D	7)D	8)B	9)B	10)C
11)D	12)B	13)A	14)D	15)E	16)B	17)D	18)D	19)A	20)A

CLAVES DE LA QUINTA PRACTICA

1)D	2)E	3)B	4)C	5)C	6)C	7)B	8)B	9)B	10)C
11)D	12)A	13)B	14)D	15)A	16)B	17)A	18)[illegible]	19)A	20)D

CLAVES DE LA SEXTA PRACTICA

01) A	02) A	03) A	04) A	05) C
06) D	07) A	08) A	09) B	10) A
11) D	12) A	13) A	14) A	15) A
16) E	17) B	18) B	19) C	20) E
01) C	02) A	03) E	04) B	05) B



OBJETIVOS:

* Interpretar geométricamente el concepto de valor absoluto de un número real empleando la definición.

* Resolver ecuaciones e inecuaciones con valor absoluto, aplicando las propiedades y la definición de valor absoluto.

* Interpretar situaciones concretas mediante desigualdades.

INTRODUCCIÓN :

El valor absoluto nos permite relacionar las distancias entre dos puntos sobre la recta real con el concepto de vecindades alrededor de un punto , teoría que se aplicará más adelante en la definición del límite de una función real de una variable real. De modo que será muy importante conocer y saber aplicar los diversos teoremas sobre ecuaciones e inecuaciones con valor absoluto.

VALOR ABSOLUTO MAGNITUD

El valor absoluto de un número real *"x"*, se define como aquel número real no negativo que se denota por $|x|$: donde

$$|x|=\begin{cases} x & ;\ \text{si } x \text{ es } \textbf{positivo} \text{ ó } \textbf{cero} \\ -x & ;\ \text{si } x \text{ es } \textbf{negativo} \end{cases}$$

o también

$$|x|=\begin{cases} x & ;\ \text{si } x>0 \\ 0 & ;\ \text{si } x=0 \\ -x & ;\ \text{si } x<0 \end{cases}$$

EJEMPLOS:

* $|6|=6$, sólo se borran las barras, pues 6 es positivo.

* $|-8|=-(-8)=8$; al borrar las barras se cambia de signo, de -8 a 8, pues -8 es negativo.

* $|3|=3$ puesto que $3>0$

* $|-4|=-(-4)=4$; puesto que $-4<0$

* $|x^2+1|=x^2+1$ porque $x^2+1>0\ ;\ \forall x\in\mathbb{R}$

* $|x^2+x+1|=x^2+x+1$ porque

  $x^2+x+1>0\ ;\ \forall x\in\mathbb{R}$

* $|5|=5$

* $|-5|=-(-5)=5$

* $|0|=0$

* De los ejemplos anteriores , se concluye que el valor absoluto de un número real cualquiera, será siempre positivo o cero, además:

* $\forall\ x\in\mathbb{R};\ |x|\geq 0$

* $|x|=0 \Leftrightarrow x=0$

* $|x|=|-x|$.... "si dos números reales se diferencian sólo en el signo, sus valores absolutos son iguales".

OBSEVACIÓN:

Sea $x=\mu-a$, reemplazando en la definición, se tiene :

$$|\mu-a|=\begin{cases} \mu-a & ;\ \text{si } (\mu-a) \text{ es } \textbf{positivo} \text{ ó } \textbf{cero} \\ -(\mu-a) & ;\ \text{si } (\mu-a) \text{ es } \textbf{negativo} \end{cases}$$

* Entonces:

$$|\mu-a|=\begin{cases} \mu-a & ;\ \mu \text{ es } \textbf{mayor que } a \\ a-\mu & ;\ \mu \text{ es } \textbf{menor que } a \end{cases}$$

EJEMPLO:

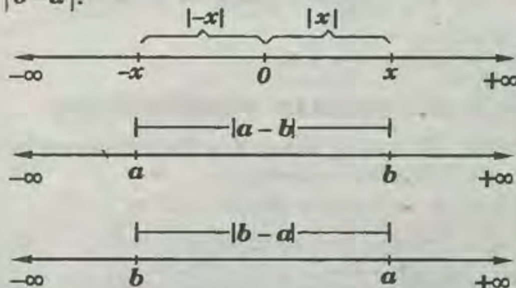
* $|\sqrt{2}-1|=\sqrt{2}-1;$ pues $\sqrt{2}$ es mayor que 1

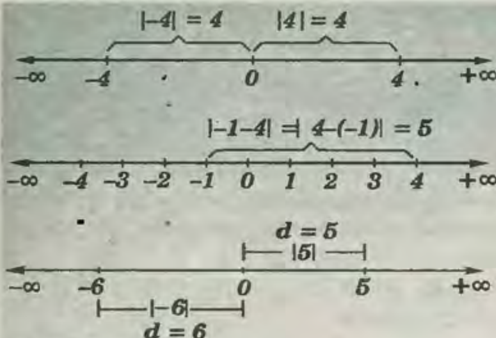
* $|1-\sqrt{3}|=\sqrt{3}-1;$ pues 1 es menor que $\sqrt{3}$

* $$|3x-1|=\begin{cases} 3x-1, \text{ si } 3x-1\geq 0 \\ -(3x-1), \text{ si } 3x-1<0 \end{cases}=\begin{cases} 3x-1, \text{si } x\geq\dfrac{1}{3} \\ 1-3x, \text{si } x<\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DEL VALOR ABSOLUTO:

El valor absoluto de *"x"* es la distancia del punto *"x"* de la recta real al origen, es decir al punto cero, asimismo la distancia entre dos puntos cualesquiera a y b viene a ser el valor absoluto: $|a-b|$ o también $|b-a|$.





TEOREMAS:

1) El valor absoluto de un número real nunca es negativo, es decir:

$$|x| \geq 0; \ \forall x \in R$$

2) Si dos números reales se diferencian sólo en el signo sus valores absolutos son iguales, es decir :

$$|-x| = |x|; \ \forall x \in R$$

3) El cuadrado del valor absoluto de un número real es igual al cuadrado de dicho número real.

$$|x|^2 = x^2 = |x^2| \ ; \ \forall x \in R$$

EJEMPLOS:

* $|5|^2 = (5)^2 = 25$ * $|-3|^2 = (-3)^2 = 9$

4) El valor absoluto de un número real es cero, sólo en el caso que dicho número real sea cero. Así:

$|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

5) El valor absoluto del producto de dos números reales es igual al producto de sus respectivos valores absolutos, es decir:

$$|x.y| = |x|.|y| \ ; \forall \ x, y \in R$$

6) $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}; \ y \neq 0$

7) $|x| \geq x \ ; \ \forall \ x \in R$ ∧ $|x| \geq -x \ ; \ \forall \ x \in R$

8) $\sqrt{x^2} = |x| \ ; \ \forall \ x \in R$

9) DESIGUALDAD TRIANGULAR:

El valor absoluto de la suma de dos números reales "a y b" es menor o igual que

la suma de los valores absolutos de "a" y "b".

$$|x+y| \leq |x| + |y| \Leftrightarrow x, y \in R$$

$$|x+y| = |x| + |y| \Leftrightarrow x.y \geq 0$$

$$|x+y| < |x| + |y| \Leftrightarrow x.y < 0$$

* También :
* $|x-y| \leq |x| + |y|$
* $|x+y+z| \leq |x| + |y| + |z|$
* $||x| - |y|| \leq |x-y|$
* Si : $|x| + |y| = |x-y| \Leftrightarrow xy \leq 0$

10) Si los valores absolutos de dos números reales , son iguales , entonces , o se trata del mismo número o de números opuestos.

$$|x| = |y| \Leftrightarrow x = y \text{ ó } x = -y$$

ECUACIÓNES CON VALOR ABSOLUTO

Vienen a ser igualdades condicionales, los cuales frecuentemente se presentan en las siguientes formas :

* $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
* $|x| = y \Leftrightarrow [y \geq 0 \ \wedge \ (x = y \ \vee \ x = -y)]$
* $|x| = |y| \Leftrightarrow (x = y \ \wedge \ x = -y)$
* $|x|^2 = x^2$
* $\sqrt{x^2} = |x|$

TEOREMA:

$$|a| = b \Leftrightarrow [b \geq 0 \ \wedge \ (a = b \ \vee \ a = -b)]$$

OBSERVACIÓN:

* Este teorema establece que el universo U (es decir el campo de valores admisibles) de la ecuación $|a| = b$ está determinado por la condición $b \geq 0$, la cual debe ser resuelta previamente, una vez hallado este universo U se pasa a resolver las dos ecuaciones $a=b$ y $a=-b$, finalmente se comprueba si estas soluciones se hallan dentro del universo U.

* Para resolver este tipo de ecuaciones es necesario aplicar la siguiente propiedad del valor absoluto.

PROPIEDAD:

El valor absoluto de un número real "x" es igual a un número real "a", si y sólo si se verifican las dos condiciones siguientes:

1°) Condición previa : "El número real "a" es mayor ó igual que cero".

2°) El número real "x" es igual al número "a", ó el número real "x" es igual al número "$-a$".

* En símbolos :

$$|x| = a \Leftrightarrow \begin{cases} I) \ \text{Condición previa} : a \geq 0 \\ II) \ x = a \ \text{ ó } \ x = -a \end{cases}$$

EJEMPLOS:

1) Resolver : $|x| = 2$

RESOLUCIÓN:

* Se observa que, de acuerdo con la propiedad enunciada, $a = 2$, es mayor que cero , luego si cumple la condición previa , también se cumple la segunda condición ; es decir :

$$x = 2 \text{ ó } x = -2$$

* Entonces: $C.S. = \{-2; 2\}$

2) Resolver : $|2x + 3| = 7$

RESOLUCIÓN:

* En este caso también se cumple que :

$a = 7 \geq 0$, entonces el universo U (condición previa) es todo $\mathbb{R}$, dentro del cual se resuelve la ecuación, así:

$$2x + 3 = 7 \ \vee \ 2x + 3 = -7$$

$$\rightarrow x = 2 \ \vee \ x = -5$$

* Entonces : $C.S. = \{2; -5\}$

3) Resolver : $|5x - 3| = -8$

RESOLUCIÓN:

* En este caso $a = -8$, menor que cero, con lo cual es evidente que no cumple la condición previa.

* En consecuencia la segunda condición de la propiedad no se cumple, y por lo tanto, la ecuación no tiene solución.

$$\rightarrow C.S. = \phi$$

4) Resolver : $|3x - 2| = x - 4$

RESOLUCIÓN:

I) En este caso : $a = x - 4 \geq 0$, que debe ser mayor o igual que cero , entonces : $x - 4 \geq 0 \rightarrow x \geq 4$

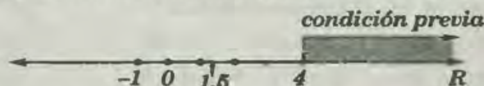
* Por lo tanto, la solución debe pertenecer al intervalo $[4; +\infty\rangle$

II) Aplicando la segunda condición :

$$3x - 2 = x - 4 \ \vee \ 3x - 2 = -(x - 4)$$

$$\rightarrow x = -1 \ \vee \ x = 1{,}5$$

* De estos dos valores de la variable, escogemos los que pertenecen al intervalo de la condición previa.



En la gráfica se observa que:

$-1 \notin [4; \infty[$, por lo tanto -1 no es solución.

$1{,}5 \notin [4; \infty[$, por lo tanto $1{,}5$ no es solución.

* Luego : la ecuación tiene solución vacía. Es decir:

$C.S. = \phi$

5) Resolver : $|x - 1| = -3x$

RESOLUCIÓN:

* De : $|x - 1| = -3x \geq 0 \Leftrightarrow -3x \geq 0$

$$[x - 1 = -3x \text{ ó } x - 1 = -(-3x)]$$

$$\Leftrightarrow x \leq 0 \text{ y } [4x = 1 \text{ ó } x - 1 = 3x]$$

$$\Leftrightarrow x \leq 0 \text{ y } [x = 1/4 \text{ ó } x = -1/2]$$

* El conjunto solución es $C.S. = \langle -\infty; 0] \cap \left\{\frac{1}{4}; -\frac{1}{2}\right\}$ $= \left\{-\frac{1}{2}\right\}$, luego la ecuación tiene una sola solución $x = -1/2$

6) Resolver : $|x - 2| = 3x - 9$

RESOLUCIÓN:

* De la ecuación modular dada, se obtendrá:

$$3x - 9 \geq 0 \ \wedge \ \{x - 2 = 3x - 9 \ \vee \ x - 2 = -(3x - 9)\}$$

$$3x \geq 9 \ \wedge \ \{7 = 2x \ \vee \ x - 2 = -3x + 9\}$$

$$x \geq 3 \ \wedge \ \left\{\frac{7}{2} = x \ \vee \ x = \frac{11}{4}\right\}$$

* Observar que: $x = \frac{7}{2}$ si verifica: $x \geq 3$ y $x = \frac{11}{4}$ no verifica, entonces: $C.S. = \left\{\frac{7}{2}\right\}$

7) Resolver : $|3x - 1| = |x + 5|$

RESOLUCIÓN:

* Este modelo se resuelve aplicando

$$\boxed{|x| = |y| \Leftrightarrow \{(x = y) \ \vee \ (x = -y)\}}$$

* Así :

$$3x - 1 = x + 5 \ \vee \ 3x - 1 = -(x + 5)$$

$$\rightarrow x = 3 \ \vee \ x = -1$$

* Como no existe condición previa, los dos valores obtenidos pertenecen al conjunto solución.

$$C.S. = \{-1; 3\}$$

8) Resolver la ecuación : $|x^2 - 4x| = |2x - 8|$

RESOLUCIÓN:

* La ecuación equivalente será :

$$x^2 - 4x = 2x - 8 \text{ ó } x^2 - 4x = -(2x - 8)$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 8 = 0 \text{ ó } x^2 - 2x - 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 4)(x - 2) = 0 \text{ ó } (x - 4)(x + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x = 4 \text{ ó } x = 2) \text{ ó } (x = 4 \text{ ó } x = -2)$$

* Entonces: $C.S. = \{4; 2; -2\}$

9) Resolver : $x^2 - 5|x| + 6 = 0$

RESOLUCIÓN:

$|x^2|-5|x|+6=0$



$|x|=3 \vee |x|=2$

$x=\pm 3 \vee x=\pm 2$

$\rightarrow C.S.=\{3;-3;2;-2\}$

10) Resolver : $|x^2-x|=0$

RESOLUCIÓN:

$|x^2-x|=0 \Leftrightarrow x^2-x=0$

$\Leftrightarrow x(x-1)=0$

$\Leftrightarrow x=0 \vee x-1=0$

$\Leftrightarrow x=0 \vee x=1$

$\rightarrow C.S.=\{0;1\}$

11) Resolver : $\forall x \in R; |1-3x|=|x-2|$

RESOLUCIÓN:

$|1-3x|=|x-2| \Rightarrow 1-3x=x-2 \vee 1-3x=-(x-2)$

$\Rightarrow 3=4x \vee 1-3x=-x+2$

$\Rightarrow x=\frac{3}{4} \vee x=-\frac{1}{2}$

$\Rightarrow C.S.=\{3/4\ ;-1/2\}$

12) Resolver : $\forall x \in R; ||x|-3|=|3-2|x||$

RESOLUCIÓN:

$|x|-3=3-2|x| \vee |x|-3=-3+2|x|$

$\rightarrow 3|x|=6 \vee 0=|x| \rightarrow |x|=2 \vee |x|=0$

$\rightarrow x=2 \vee x=-2 \vee x=0 \rightarrow C.S.=\{2;-2;0\}$

13) Resolver :

$$\sqrt{(x-2)^2}+|3x-6|=8$$

RESOLUCIÓN:

$\sqrt{(x-2)^2}+|3x-6|=8$

$\Leftrightarrow |x-2|+3|x-2|=8 \Leftrightarrow 4|x-2|=8$

$\Leftrightarrow |x-2|=2 \Leftrightarrow x=4 \vee x=0$

$\Leftrightarrow C.S.=\{4;0\}$

OBSERVACIÓN:

Cuando se presenta diversos valores absolutos, podemos aplicar el método del seccionamiento, así:

EJEMPLO:

Resuelva : $|x-2|+|x+2|+|x-5|=13$

RESOLUCIÓN:

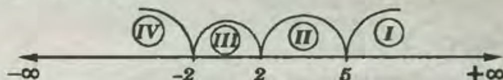
* Cada valor absoluto lo igualamos a cero y los valores obtenidos los llamaremos puntos críticos, así :

$|x-2|=0 \Rightarrow x=2$

$|x+2|=0 \Rightarrow x=-2$

$|x-5|=0 \Rightarrow x=5$

* Luego, se tiene 3 puntos críticos : P. C.=2; – 2; 5 los cuales los representaremos sobre la recta numérica real.



* Ahora se analiza cada sección :

$I)[5;+\infty\rangle : x-2+x+2+x-5=13 \Rightarrow 3x=18$

$\Rightarrow x=6 \rightarrow S_{(I)}=\{6\}$

$II)[2;5\rangle : x-2+x+2+5-x=13 \Rightarrow x=8$

Pero $8 \notin [2;5\rangle \Rightarrow S_{(II)}=\phi$

$III)-[-2;2\rangle : 2-x+x+2+5-x=13 \Rightarrow -x=4$

$\Rightarrow x=-4 \rightarrow S_{(III)}=\phi$

$IV)\langle-\infty;-2\rangle : 2-x+(-x-2)+5-x=13$

$\Rightarrow -3x=8 \rightarrow x=-\frac{8}{3}$

$\rightarrow S_{(IV)}=\left\{-\frac{8}{3}\right\}$

$\rightarrow C.S.=S_{(I)} \cup S_{(II)} \cup S_{(III)} \cup S_{(IV)}=\left\{6;-\frac{8}{3}\right\}$

INECUACIONES CON VALOR ABSOLUTO

Viene a ser desigualdades relativas, las cuales frecuentemente se presentan en las siguientes formas:

$*|x|<y \Leftrightarrow [y>0 \wedge (-y<x<y)]$

$*|x|>y \Leftrightarrow [y\geq 0 \wedge (x>y \vee x<-y)]$

$*|x|<|y| \Leftrightarrow |x|^2<|y|^2 \Leftrightarrow x^2<y^2$

$*|x+y|\geq|x|+|y|$

* La solución de inecuaciones con valor absoluto se basa en los siguientes teoremas:

$I)|x|<b \Leftrightarrow b>0 \wedge -b<x<b$

$II)|x|\leq b \Leftrightarrow b\geq 0 \wedge -b\leq x\leq b$

$III)|x|>b \Leftrightarrow x>b \vee x<-b$

$IV)|x|\geq b \Leftrightarrow x\geq b \vee x\leq -b$

EJEMPLOS :

$*|x|<5 \Leftrightarrow -5<x<5 \Leftrightarrow C.S.=\langle-5;5\rangle$

* $|x|>7 \Leftrightarrow x>7 \vee x<-7$

$\Leftrightarrow C.S.=\langle -\infty;-7\rangle \cup \langle 7;+\infty\rangle$

* $|x+3|\leq 9 \Leftrightarrow -9\leq x+3\leq 9$

$\Leftrightarrow -12\leq x\leq 6 \Leftrightarrow C.S.=[-12;6]$

* $|x+2|\geq 5 \Leftrightarrow x-2\geq 5 \vee x-2\leq -5$

$\Leftrightarrow x\geq 7 \vee x\leq -3$

$\Leftrightarrow C.S.=\langle -\infty;-3]\cup[7;+\infty\rangle$

OBSERVACIÓN:

* Para eliminar un valor absoluto generalmente este debe elevarse al cuadrado, así tenemos lo siguiente:

$$\boxed{|x|\geq|y| \Leftrightarrow x^2\geq y^2}$$

$$\boxed{|x|\leq|y| \Leftrightarrow x^2\leq y^2}$$

$\forall\ x;a\in\mathbb{R};$ se cumple

I) $|x|<|a| \Leftrightarrow (x+a)(x-a)<0$
$|x|\leq|a| \Leftrightarrow (x+a)(x-a)\leq 0$

II) $|x|>|a| \Leftrightarrow (x+a)(x-a)>0$
$|x|\geq|a| \Leftrightarrow (x+a)(x-a)\geq 0$

* Dados a , $b\in\mathbb{R}$

1) $a\leq|b| \Leftrightarrow (a+b)(a-b)\leq 0$

2) $a<|b| \Leftrightarrow (a+b)(a-b)<0$

3) $a\geq|b| \Leftrightarrow (a+b)(a-b)\geq 0$

EJEMPLO 1:

Resolver : $|x-2|\leq|x-1|$

RESOLUCIÓN:

* Elevando al cuadrado:

$|x-2|^2\leq|x-1|^2 \Leftrightarrow (x-2)^2\leq(x-1)^2$

$\Leftrightarrow x^2-4x+4\leq x^2-2x+1$

$\Leftrightarrow 3\leq 2x \Leftrightarrow \frac{3}{2}\leq x \rightarrow C.S.=\left[\frac{3}{2};+\infty\right\rangle$

EJEMPLO 2:

Resolver : $|2x-3|\leq 1$

RESOLUCIÓN:

$|2x-3|\leq 1 \Leftrightarrow [1\geq 0 \wedge -1\leq 2x-3\leq 1]$

$\Leftrightarrow [1\geq 0 \wedge 1\leq x\leq 2]$

$\Leftrightarrow 1\leq x\leq 2$

* El conjunto solución: $C.S.=[1;2]$

EJEMPLO 3:

Resolver : $\forall\ x\in\mathbb{R}:|3x-1|<4$

RESOLUCIÓN:

$|3x-1|<4 \Leftrightarrow -4<3x-1<4$

$\Leftrightarrow -4+1<3x-1+1<4+1 \Leftrightarrow -3<3x<5$

$\Leftrightarrow -1<x<5/3 \Leftrightarrow x\in\langle -1;5/3\rangle$

EJEMPLO 4:

Resolver : $|3x+7|\leq -4x$

RESOLUCIÓN :

$|3x+7|\leq -4x \Leftrightarrow [-4x\geq 0 \wedge -(-4x)\leq 3x+7\leq -4x]$

$\Leftrightarrow [x\leq 0 \wedge (4x\leq 3x+7 \wedge 3x+7\leq -4x)]$

$\Leftrightarrow [x\leq 0 \wedge (x\leq 7 \wedge x\leq -1)]$

$\Leftrightarrow x\leq -1$, el conjunto solución es $C.S.=\langle -\infty;-1]$

EJEMPLO 5 :

Resolver : $|9-x^2|\geq 7$

RESOLUCIÓN :

$|9-x^2|\geq 7 \Leftrightarrow 9-x^2\geq 7 \vee 9-x^2\leq -7$

$\Leftrightarrow 2\geq x^2 \vee 16\leq x^2$

$\Leftrightarrow \sqrt{2}\geq|x| \vee 4\leq|x|$

$\Leftrightarrow |x|\leq\sqrt{2} \vee |x|\geq 4$

$\Leftrightarrow -\sqrt{2}\leq x\leq\sqrt{2} \vee (x\geq 4$ ó $x\leq -4)$

$\Leftrightarrow x\in\langle -\infty;-4]\cup[-\sqrt{2};\sqrt{2}]\cup[4,+\infty\rangle$

EJEMPLO 6 :

Resolver : $|x+1|-|3x+7|\geq 0$

RESOLUCIÓN:

$|x+1|-|3x+7|\geq 0$

$\Leftrightarrow |x+1|\geq|3x+7|$

$\Leftrightarrow ((x+1)+(3x+7))((x+1)-(3x+7))\geq 0$

$\Leftrightarrow (4x+8)(-2x-6)\geq 0$

$\Leftrightarrow (4x+8)(2x+6)\leq 0$

$\Leftrightarrow x\in[-3;-2]$

EJEMPLO 7:

Resolver : $\forall x\in\mathbb{R}:|x^2-2x-3|<3$

RESOLUCIÓN:

* De : $|x^2-2x-3|<3$

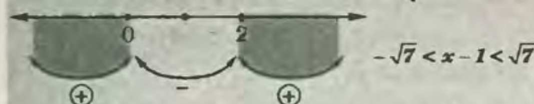
$\rightarrow -3<x^2-2x-3<3$

$\rightarrow x^2-2x-3>-3 \wedge x^2-2x-3<3$

$\rightarrow x^2-2x-3>-3 \wedge x^2-2x-3-3<0$

$\rightarrow x^2-2x>0 \wedge x^2-2x-6<0$

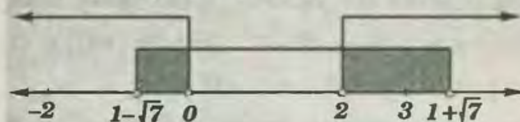
$\rightarrow x(x-2)>0 \wedge \underbrace{x^2-2x+1-1-6<0}_{(x-1)^2<7}$



$-\sqrt{7}<x-1<\sqrt{7}$

$\rightarrow x \in \langle -\infty;0\rangle \cup \langle 2;\infty\rangle \wedge x \in \langle 1-\sqrt{7};1+\sqrt{7}\rangle$

$\rightarrow x \in \langle -\infty;0\rangle \cup \langle 2;\infty\rangle \cap x \in \langle 1-\sqrt{7};1+\sqrt{7}\rangle$



* Entonces : $C.S.=\langle 1-\sqrt{7};0\rangle \cup \langle 2;1+\sqrt{7}\rangle$

EJEMPLO 8 :

Resolver : $|x-1|^2-5|x-1|-14 \leq 0$

RESOLUCIÓN:

* Factorizando por aspa simple :

$$(|x-1|+2)(|x-1|-7) \leq 0$$

* Pero: $|x-1| \geq 0 \Rightarrow |x-1|+2 \geq 2 \Rightarrow |x-1|+2$ es positivo $\forall \in \mathbb{R}$, luego se anula, entonces :

$$|x-1|-7 \leq 0 \rightarrow |x-1| \leq 7$$

$$\rightarrow -7 \leq x-1 \leq 7 \rightarrow -6 \leq x \leq 8$$

$$\rightarrow C.S.=[-6;8]$$

EJEMPLO 9 :

Resolver : $|x^2-3x-6|<|x+6|$

RESOLUCIÓN :

* De : $(x^2-3x-6)^2<(x+6)^2$

$\rightarrow (x^2-3x-6)^2-(x+6)^2<0$

* Descomponiendo en factores , se tiene :

$(x^2-2x)(x^2-4x-12)<0$

$\rightarrow x(x-2)(x-6)(x+2)<0$

* Luego : $x \in]-2;0[\cup]2;6[$

EJEMPLO 10:

Resolver : $\left|\dfrac{x^2}{x-2}\right| \leq x-4$

RESOLUCIÓN :

* Primero : $x-4 \geq 0 \Rightarrow x \geq 4$

$\rightarrow x \in [4;+\infty\rangle$ ....(I)

* Además :

$$\frac{|x^2|}{|x-2|} \leq x-4 \Rightarrow \frac{x^2}{|x-2|} \leq x-4$$

$\Rightarrow x^2 \leq |x-2|(x-4)$ ....(α)

* Pero de (I) :

$x \geq 4 \Rightarrow x-2 \geq 2>0$

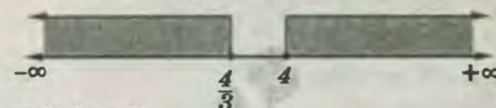
$\rightarrow |x-2|=x-2$

* Reemplazando en (α) :

$x^2 \leq (x-2)(x-4) \Rightarrow x^2 \leq x^2-6x+8$

$\Rightarrow 6x \leq 8 \Rightarrow x \leq \dfrac{4}{3}$ ....(II)

* Intersectando (I) y (II) :



$\rightarrow C.S.=\varnothing$

EJEMPLO 11:

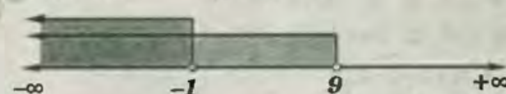
Resolver : $|x+6|>2x-3$

RESOLUCIÓN:

$x+6>2x-3 \vee x+6<-(2x-3)$

$\rightarrow 9>x \quad \vee x+6<-2x+3$

$\rightarrow x<9 \quad \vee x<-1$



* Entonces: $C.S.=x \in \langle -\infty;-1\rangle$

EJEMPLO 12:

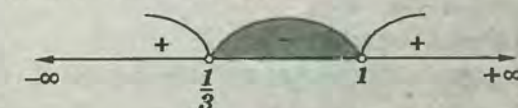
Resolver : $|2x-1|<|x|$

RESOLUCIÓN:

$|2x-1|<|x| \quad \Leftrightarrow (2x-1)^2<x^2$

$\Leftrightarrow 4x^2-4x+1<x^2 \Leftrightarrow 3x^2-4x+1<0$

$\Leftrightarrow (3x-1)(x-1)<0$



* Entonces : $x \in \left\langle \dfrac{1}{3};1\right\rangle = C.S.$

EJEMPLO 13:

Resolver : $|8x+9|+|7x-4| \leq 10$

RESOLUCIÓN:

* Aplicando la desigualdad triangular :

$$|(8x+9)+(7x-4)|\leq|8x+9|+|7x-4|\leq 10$$

* Por la propiedad transitiva :

$$|15x+5|\leq 10$$

* Simplificando.: $|3x+1|\leq 2$

$\Rightarrow -2 \leq 3x+1 \geq 2$

$\Rightarrow -1 \leq x \leq 1/3 \Rightarrow x\in\left[-1;\frac{1}{3}\right]$

EJEMPLO 14:

Resolver : $\left|x+\frac{1}{x-4}-4\right|\geq 2$

RESOLUCIÓN :

* Dándole forma : $\left|(x-4)+\frac{1}{x-4}\right|\geq 2$

* Por lo tanto : $x\in R-\{4\}$

PROBLEMAS RESUELTOS

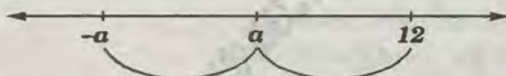
PROBLEMA 1:

Sobre una recta numérica, la distancia entre un número entero y su opuesto es igual a la distancia entre dicho número y *12*. La suma de los dos posibles valores del número es:

A)-8 B)-16 C)16 D) 8 E)4

RESOLUCIÓN:

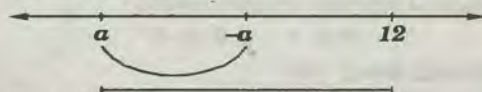
* *1ER. CASO :* Si $a > 0$



$a+|-a|=12-a$

$\Rightarrow 2a=12-a \Rightarrow a_1=4$

* *2DO. CASO* : si $a<0$



$|-a|-a=12+a$

$\Rightarrow a - a = 12 + a \Rightarrow a_2 = -12$

* Entonces : $a_1+a_2=-8$

RPTA:"A"

PROBLEMA 2:

Si $0<x<4$, simplifique $\left|\frac{x-5}{2}\right|+\left|\frac{x+3}{2}\right|$

A)1 B)3 C)4 D)5 E)9

RESOLUCIÓN:

* De:

$$0<x<4\begin{cases}\xrightarrow{resto\,5} -5<\underbrace{x-5}_{(-)}<-1\\ \xrightarrow{sumo\,3} 3<\underbrace{x+3}_{+}<7\end{cases}$$

* Piden:

$$\left|\frac{x-5}{2}\right|+\left|\frac{x+3}{2}\right|=\frac{|x-5|}{2}+\frac{|x+3|}{2}=\frac{-(x-5)}{2}+\frac{x+3}{2}$$

$$=\frac{-\cancel{x}+5+\cancel{x}+3}{2}=\frac{8}{2}=4$$

RPTA:"C"

PROBLEMA 3:

Demostrar que si $\forall a,b\in R$, entonces :

$|a+b|\leq|a|+|b|$...... *"Desigualdad Triangular"*

RESOLUCIÓN:

* Sabemos que :

$ab\leq|ab|;\ \forall a\in R \wedge \forall b\in R$

$\Leftrightarrow 2ab\leq 2|a||b|$

$\Leftrightarrow a^2+b^2+2ab\leq a^2+b^2+2|a||b|$

$\Leftrightarrow \sqrt{(a+b)^2}\leq\sqrt{(|a|+|b|)^2}$

$\Leftrightarrow |a+b|\leq|a|+|b|$

OTRO MÉTODO :

I) $a\leq|a|$ y $b\leq|b| \Rightarrow a+b\leq|a|+|b|$

II) $-a\leq|a|$ y $-b\leq|b| \Rightarrow -(a+b)\leq|a|+|b|$

* De donde : $|a+b|\leq|a|+|b|$

PROBLEMA 4 :

Hallar el conjunto solución en la inecuación :

$$|x+2|(x^4-1)=0$$

RESOLUCIÓN:

* Factorizando , se tendría :

$$|x+2|(x^2+1)(x+1)(x-1)=0$$

* Igualando cada factor a cero :

I) $|x+2|=0 \Rightarrow x=-2$

II) $x^2+1=0 \Rightarrow x=i \vee x=-i$

III) $x+1=0 \Rightarrow x=-1$

IV) $x-1=0 \Rightarrow x=1$

* Como $x\in R; i \wedge -i$ no son parte de la solución:

$\Rightarrow$ C. S. $=\{-2;1;-1\}$

PROBLEMA 5:

Resolver : $|x^2-x-3|=|x-3|$

RESOLUCIÓN:

* Para este caso , se cumple la propiedad :

$$\boxed{|x| = |b| \Leftrightarrow x = b \text{ ó } x = -b}$$

* Para nuestro caso :

$$\begin{cases} x^2 - x - 3 = x - 3 \ldots\ldots\ldots\ldots (I) \\ x^2 - x - 3 = -(x - 3) \ldots\ldots\ldots\ldots (II) \end{cases}$$

* De *(I)* :

$$x^2 - x - 3 = x - 3$$
$$\Rightarrow x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(x-2) = 0$$
$$\Rightarrow \boxed{x = 0} \vee \boxed{x = 2}$$

* De *(II)* :

$$x^2 - x - 3 = -x + 3 \rightarrow x^2 = 6$$
$$\Rightarrow \boxed{x = \sqrt{6}} \vee \boxed{x = -\sqrt{6}}$$
$$\Rightarrow C.S. = \{0;\ 2;\ \sqrt{6};\ -\sqrt{6}\}$$

PROBLEMA 6:

Si $0 < a < 1$, entonces, dos valores que satisfacen a la ecuación $|x^2 - 2x| = a$, son:

A) $-1 + \sqrt{a+1}$ y $-1 - \sqrt{a+1}$

B) $-1 + 2\sqrt{a+1}$ y $1 - 2\sqrt{a+1}$

C) $1 + \sqrt{1-a}$ y $-1 - \sqrt{1-a}$

D) $1 + \sqrt{1+a}$ y $1 - \sqrt{1-a}$

RESOLUCIÓN:

* De la ecuación se desprende que :

$$x^2 - 2x = a \quad \vee \quad x^2 - 2x = -a$$
$$\Leftrightarrow (x-1)^2 = 1 + a \quad \vee \quad (x-1)^2 = 1 - a$$
$$\Leftrightarrow x - 1 = \pm\sqrt{1+a} \quad \vee \quad x - 1 = \pm\sqrt{1-a}$$
$$\Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{1+a} \quad \vee \quad x = 1 \pm \sqrt{1-a}$$

* Entonces dos de las soluciones son :

$$1 + \sqrt{1+a}\ ;\ 1 - \sqrt{1-a}$$

RPTA:"D"

PROBLEMA 7:

Hallar el conjunto solución en la inecuación :

$$|2x - 1| = x + 2$$

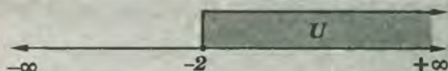
RESOLUCIÓN:

* Dado que :

$$\boxed{|x| = b \Leftrightarrow b \geq 0 \wedge [x = b \vee x = -b]}$$

Se tendría:

I) Universo de solución: $x + 2 \geq 0 \Rightarrow x \geq -2$



$\rightarrow x \in [-2; \infty)$

II) Con lo cual:

$$2x - 1 = x + 2 \ \vee \ 2x - 1 = -x - 2$$
$$\boxed{x = 3} \in U \vee \boxed{x = -\frac{1}{3}} \in \textit{universo}$$

* Entonces : $C.S. = \left\{-\frac{1}{3};\ 3\right\}$

PROBLEMA 8:

Resolver : $||x - 3| - 2| = 3$

RESOLUCIÓN:

* Haciendo: $|x - 3| = a \ldots\ldots\ldots\ldots (\alpha)$

donde $a > 0$; se tendría :

$$|a - 2| = 3 \rightarrow a - 2 = 3 \ \vee \ a - 2 = -3$$
$$\boxed{a = 5} \ \vee \ \boxed{a = -1} \ldots\ldots\ldots\ldots (No)$$

* En (α), dado que : $a > 0$

$$|x - 3| = 5 \Rightarrow x - 3 = 5 \ \vee \ x - 3 = -5$$
$$\Rightarrow x = 8 \ \vee \ x = -2$$

* Entonces : $C.S. = \{8; -2\}$

PROBLEMA 9:

Resolver : $(x-3)^2 - 8|x-3| + 15 = 0$

RESOLUCIÓN:

* Lo equivalente será :

$|x-3|^2 - 8|x-3| + 15 = 0$

$\Leftrightarrow (|x-3| - 5)(|x-3| - 3) = 0$

$\Leftrightarrow |x-3| = 5 \vee |x-3| = 3$

$\Leftrightarrow [x - 3 = 5 \vee x - 3 = -5]$ ó $[x - 3 = 3 \vee x - 3 = -3]$

$\Leftrightarrow [x = 8 \vee x = -2]$ ó $[x = 6 \vee x = 0]$

* Luego el conjunto solución resulta :

$$C.S. = \{-2; 0; 6; 8\}$$

PROBLEMA 10:

Halle "A", si :

$$A = \{x \in \mathbb{R} / |x^2 + 3| = |2x + 2|\}$$

A) {2} B) {2; 3} C) {1; 2} D) {1}

RESOLUCIÓN :

* Para hallar A , debemos resolver :

$$|x^2 + 3| = |2x + 2|$$

* Considerando luego sólo las soluciones reales
* Veamos :

$$x^2+3=2x+2 \lor x^2+3=-2x-2$$
$$x^2-2x+1=0 \lor x^2+2x+5=0$$
$$(x-1)^2=0 \lor (x+1)^2+4=0$$
$$x=1 \lor \nexists \text{ solución real}$$

* Entonces : $A=\{1\}$

RPTA:"D"

PROBLEMA 11:

Si M es el conjunto solución de la ecuación $|x^2-9|+|x^2-4|=5$, entonces el conjunto M es:

A) $\{2;3\}$ B) $[2;3]$ C) $\{-3;-2;2;3\}$ D) $[-3;-2]\cup[2;3]$ E) $\{-3;3\}$

RESOLUCIÓN:

* Lo equivalente será:

$$\{x^2<4 \land 9-x^2+4-x^2=5\} \lor \{4\le x^2<9 \land 9-x^2+x^2-4=5\}$$
$$\lor\{x^2\ge 9 \land x^2-9+x^2-4=5\}$$

* Reduciendo resulta:

$$\{x^2<4 \land x^2=4\} \lor \{4\le x^2<9 \land 5=5\} \lor \{x^2\ge 9 \land x^2=9\}$$
$$\Rightarrow \{x^2\in\phi\} \lor \{4\le x^2<9\} \lor \{x^2=9\}$$
$$\Rightarrow 4\le x^2\le 9$$
$$\Rightarrow -3\le x\le -2 \lor 2\le x\le 3$$

* Entonces: $M=[-3;-2]\cup[2;3]$

RPTA:"D"

PROBLEMA 12:

La suma de las raíces de la ecuación :

$$2|x-3|^2+|7x-21|-15=0$$

A) 11/2 B) 6 C) 7 D) 9/2 E) 5

RESOLUCIÓN:

* Factorizando :

$$2|x-3|^2+7|x-3|-15=0$$

$2|x-3|$ ⟶ -3

$|x-3|$ ⟶ 5

$$\underbrace{(2|x-3|-3)}_{0}\underbrace{(|x-3|+5)}_{\neq 0}=0$$

* Entonces : $2|x-3|-3=0 \rightarrow |x-3|=\dfrac{3}{2}$

$$\Rightarrow x-3=\frac{3}{2} \lor x-3=-\frac{3}{2}$$
$$\Rightarrow x=\frac{9}{2} \lor x=\frac{3}{2}$$

* La suma de soluciones : $\dfrac{9}{2}+\dfrac{3}{2}=6$

RPTA:"B"

PROBLEMA 13:

Si T es el conjunto solución de la ecuación $|x-2|=|x|+2$ entonces el conjunto T es:

A) $[0;\infty\rangle$ B) $\langle-\infty;10\rangle$ C) $\{0\}$ D) $\langle-\infty;0]$ E) $\langle 0;\infty\rangle$

RESOLUCIÓN:

* Lo equivalente será :

$$\{x<0 \land 2-x=-x+2\} \lor \{0\le x<2 \land 2-x=x+2\}$$
$$\lor\{x\ge 2 \land x-2=x+2\}$$

* Reduciendo resulta :

$$\{x<0\} \lor \{x=0\} \lor \{x\in\phi\} \Leftrightarrow x\le 0$$

* Entonces : $T=\langle-\infty;0]$

RPTA:"D"

PROBLEMA 14 :

Si $a>b>0$ y M es el conjunto solución de la siguiente ecuación $|x-a|+b=|x+a|-b$, entonces el conjunto M es:

A) $\{a;b\}$ B) $\{-b;b\}$ C) $\{-a\}$ D) $\{b\}$ E) $\{a+b;a-b\}$

RESOLUCIÓN:

* Lo equivalente :

$$\{x<-a \land a-x+b=x-a-b\} \lor$$
$$\lor\{-a\le x<a \land a-x+b=x+a-b\} \lor$$
$$\lor\{x\ge a \land x-a+b=x+a-b\}$$
$$\Rightarrow \{x<-a \underbrace{\land a+b=-a}_{Falso}-b\} \lor$$
$$\lor\{-a\le x<a \land x=b\} \lor$$
$$\lor\{x\ge a \underbrace{\land -a+b=a}_{Falso}-b\}$$
$$\Rightarrow \{x\in\phi\} \lor \{x=b\} \lor \{x\in\phi\} \Rightarrow x=b$$

* Entonces: $M=C.S.=\{b\}$

RPTA:"D"

PROBLEMA 15:

Resolver : $|3x-2|<|2x-1|$

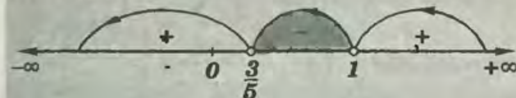
RESOLUCIÓN:

* Dado que : $\boxed{|a|<|b| \Leftrightarrow (a+b)(a-b)<0}$
* Para la inecuación dada, se tendría :

$$(3x-2+2x-1)(3x-2-2x+1)<0$$

$$(5x-3)(x-1)<0 \overset{P.C}{\rightarrow} \begin{cases} x=\dfrac{3}{5} \\ \lor \\ x=1 \end{cases}$$

* De la recta real :



* Vemos que : $x \in \left\langle \frac{3}{5};1 \right\rangle$

PROBLEMA 16:

Resolver : $|x^2 - x| > x - 1$

RESOLUCIÓN:

* Dado que : $|a| > b \Leftrightarrow a < -b \vee a > b$
* La inecuación dada se transforma en :

$$x^2 - x < -(x-1) \vee x^2 - x > x - 1$$

* Resolviendo cada una de las inecuaciones:

I) $x^2 - x < -x + 1$

$\Rightarrow x^2 - 1 < 0$

$\Rightarrow (x+1)(x-1) < 0 \overset{P.C.}{\rightarrow} \begin{cases} x = -1 \\ \vee \\ x = 1 \end{cases}$

* Vemos que: $x \in \langle -1;1 \rangle$ ....(α)

II) $-x^2 - x > x - 1$

$\Rightarrow (x-1)^2 > 0 \rightarrow x \in R - \{1\}$ ....(β)

* De (α) o (β): C.S. $= R - \{1\}$

PROBLEMA 17:

Resolver : $|3x - 2| < 5$

RESOLUCIÓN:

* De acuerdo a las propiedades establecidas como: $5>0$; entonces : $-5 < 3x - 2 < 5$
* Sumando "2" a todos los miembros:

$\Rightarrow 5 + 2 < 3x - 2 + 2 < 5 + 2$

$\Rightarrow -3 < 3x < 7$

* Dividiendo entre 3 :

$$-1 < x < \frac{7}{3} \rightarrow x \in \left\langle -1;\frac{7}{3} \right\rangle$$

PROBLEMA 18:

Resolver : $|2x + 5| \geq |5x - 2|$

RESOLUCIÓN:

* Como : $\boxed{|a| \geq |b| \Rightarrow (a+b)(a-b) \geq 0}$
* En la inecuación dada se tendría:

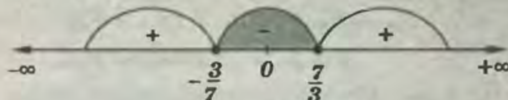
$(2x+5 + 5x - 2)\ (2x+5 - 5x + 2) \geq 0$

$\Rightarrow (7x+3)\ (-3x+7) \geq 0$

* Cambiando el signo de x :

$$(7x+3)(3x-7) \leq 0 \overset{P.C.}{\rightarrow} \begin{cases} x = -\frac{3}{7} \\ x = \frac{7}{3} \end{cases}$$

* En la recta real :



* Vemos que : $x \in \left[-\frac{3}{7};\frac{7}{3} \right]$

PROBLEMA 19:

Resolver : $||x+1|+2| \leq 8$

RESOLUCIÓN:

* Como :

$|x+1| + 2 > 0,\ \forall x \in R$

$|x+1| + 2 \leq 8 \Rightarrow |x+1| \leq 6$

* Al cuadrado : $(x+1)^2 - 6^2 < 0$
* Por diferencia de cuadrados :

$(x + 1 + 6)(x + 1 - 6) \leq 0$

$\Rightarrow (x + 7)(x - 5) \leq 0 \Rightarrow x \in [-7;5]$

PROBLEMA 20:

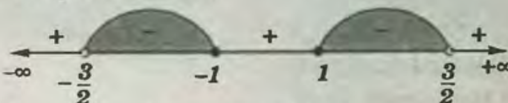
Resolver : $\dfrac{|x| - 1}{|2x| - 3} \leq 0$

RESOLUCIÓN:

* Como : $|x| + 1 > 0 \wedge |2x| + 3 > 0$

$$\Rightarrow \frac{(|x|-1)(|x|+1)}{(|2x|-3)(|2x|+3)} \leq 0 \Rightarrow \frac{(x-1)(x+1)}{(2x+3)(2x-3)} \leq 0$$

* Por puntos críticos:



* Luego el conjunto solución será:

$$x \in \left\langle -\frac{3}{2};-1 \right] \cup \left[1;\frac{3}{2} \right\rangle$$

PROBLEMA 21:

Resolver la inecuación: $\dfrac{|x| + 2x}{|x-1|+1} \geq |x|$

A) $[0;3\rangle$ B) $[0;3]$ C) $\langle 0;2 \rangle$ D) $\langle 0;1 \rangle$

RESOLUCIÓN :

* El denominador es positivo y por tanto :

$$|x| + 2x \geq |x|(|x-1|+1)$$

* De donde : $2x \geq |x||x-1|$

* Lo que significa que : $x \ge 0$

* Para $x>0$, la inecuación anterior se convierte en:

$$2 \ge |x-1|$$
$$\Rightarrow -2 \le x-1 \le 2 \Rightarrow -1 \le x \le 3$$

* Pero , como $x \ge 0$. La solución de la ecuación propuesta es : $0 \le x \le 3$.

RPTA:"B"

PROBLEMA 22:

Resolver la inecuación : $|3-x| > \sqrt{2-x}$

A) $\langle -\infty; 2\rangle$ B) $\langle 2; -\infty\rangle$ C) $\langle -\infty; 2]$ D) ϕ E) $\mathbb{R}$

RESOLUCIÓN:

* Desde que $\sqrt{2-x}$ existe, debemos tener $2-x \ge 0$

* Así : $3-x \ge 1$. Luego la inecuación propuesta se convierte en :

$$3-x > \sqrt{2-x}$$
$$\Rightarrow (3-x)^2 > 2-x \Rightarrow x^2-5x+7>0$$

* Relación que es válida $\forall x \in R$

* Así, el conjunto solución es: $\langle -\infty; 2]$

RPTA:"C"

PROBLEMA 23:

Resolver la inecuación : $|x-6| \ge \left|-x+\frac{3}{2}\right| + \sqrt{-x}$

A) $[2;4]$ B) $[6;8\rangle$ C) $[-81/4;0]$ D) ϕ E) $\mathbb{R}$

RESOLUCIÓN :

* Desde que $\sqrt{-x}$ existe, debe ser $-x \ge 0$, y consecuentemente $-x+\frac{3}{2} > 0$. Así mismo, de $-x \ge 0$ resulta $x-6<0$. Con estas conclusiones la inecuación propuesta se convierte en:

$$-(x-6) \ge -x+\frac{3}{2}+\sqrt{-x}$$
$$\Rightarrow \frac{9}{2} \ge \sqrt{-x} \Rightarrow \frac{-81}{4} \le x \le 0 \Rightarrow x \in \left[-\frac{81}{4}; 0\right]$$

RPTA:"C"

PROBLEMA 24:

Si: $P(x) = -3 + x + x^2$, resuelva $\left|P_{(|x|)}\right| \le 3$

A) $[-3;3]$ B) $[-2;2]$ C) $\mathbb{R}$ D) $\mathbb{R}_0^+$ E) $[-1;1]$

RESOLUCIÓN :

* Lo equivalente será :

$$\left|x^2+|x|-3\right| \le 3 \Rightarrow -3 \le x^2+|x|-3 \le 3$$
$$\Rightarrow x^2+|x| \ge 0 \wedge x^2+|x|-6 \le 0$$
$$\Rightarrow |x|\cancel{(|x|+1)} \ge 0 \wedge \cancel{(|x|+3)}(|x|-2) \le 0$$
$$\Rightarrow |x| \ge 0 \wedge |x|-2 \le 0 \Rightarrow x \in R \wedge -2 \le x \le 2$$

* Luego : $x \in [-2; 2]$

RPTA:"B"

PROBLEMA 25:

El mayor conjunto al cual pertenece x, satisfaciendo la desigualdad.

$$\left|x+\frac{1}{x+1}+1\right| \ge 2$$

es:

A) $\langle -\infty; +\infty\rangle$ B) $\langle -\infty; -1\rangle \cup \langle 0; \infty\rangle$
C) $\langle -\infty; -1\rangle \cup \langle -1; +\infty\rangle$ D) $\langle -3; \infty\rangle$

RESOLUCIÓN:

* Simplificando el primer miembro de la desigualdad propuesta :

$$\left|\frac{x^2+2x+2}{x+1}\right| \ge 2 \quad \text{..................................(I)}$$

* Se supone que $x \ne -1$, en caso contrario la fracción se vuelve indeterminada.

* De (I) se deduce que :

$$\frac{x^2+2x+2}{x+1} \ge 2 \vee \frac{x^2+2x+2}{x+1} \le -2$$

* Realizando operaciones en ambas desigualdades

$$x^2 \ge 0 \vee (x+2)^2 \le 0$$

* La solución corresponde únicamente a la primera restricción porque en el campo de los números reales, el cuadrado de cualquier número siempre es positivo.

* Por lo tanto, la solución general será $R-\{-1\}$; que equivale a:

$$\langle -\infty; -1\rangle \cup \langle -1; +\infty\rangle$$

RPTA:"C"

PROBLEMA 26 :

$$A = \{x \in Z / |x-4| < 4\}$$
$$B = \{x \in Z / |x-2| \ge 4\}$$

¿Cuántos elementos tiene $A \cap B$?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

RESOLUCIÓN:

* Elevando al cuadrado y transponiendo (en "A"):

$$(x-4)^2 - 4^2 < 0 \rightarrow x(x-8) < 0$$



A = {1; 2; 3; 4; 5; 6; 7} .... (I)

* De B : $|x-2| \ge 4$

Elevando al cuadrado y transponiendo :

$$(x-2)^2 - 4^2 \geq 0 \Rightarrow (x-6)(x+2) \geq 0$$



$\Rightarrow B = \{...; 5; -4; -3; -2; 6; 7; 8; 9; ...\}$........ (II)

* De (I) y (II) :

$$A \cap B = \{6;7\} \Rightarrow n(A \cap B) = 2$$

RPTA:"B"

PROBLEMA 27:

Hallar el conjunto solución de :

$$\frac{1}{|x+1|} \leq \frac{1}{|x-1|}$$

A) $[0;+\infty\rangle$ B) $[0;1\rangle \cup \langle 1;+\infty\rangle$
C) $\langle -\infty;-1\rangle \cup \langle 1;+\infty\rangle$ D) $\langle -1;1\rangle$

RESOLUCIÓN:

* Multiplicando en aspa :

$|x-1| \leq |x+1| \wedge x \neq \pm 1$

$\Rightarrow |x-1|^2 \leq |x+1|^2 \Rightarrow (x-1)^2 < (x+1)^2$

$\Rightarrow \cancel{x^2} - 2x + \cancel{1} \leq \cancel{x^2} + 2x + \cancel{1} \Rightarrow -2x \leq 2x$

$\Rightarrow 0 \leq 4x \Rightarrow 0 \leq x \wedge x \neq \pm 1$

$\Rightarrow$ **Conjunto solución** $= [0;1\rangle \cup \langle 1;+\infty\rangle$

RPTA:"B"

PROBLEMA 28:

Los números x que satisfacen la desigualdad $|x^2+1|^2 - 3|x^2+1| - 4 < 0$ se encuentran en el intervalo :

A) $\langle -\sqrt{2};\sqrt{3}\rangle$ B) $\langle -\infty;\sqrt{3}\rangle$ C) $\langle -\infty;-\sqrt{3}\rangle$ D) $\langle -\sqrt{3};\sqrt{3}\rangle$

RESOLUCIÓN:

* Cambio de variable : $a = x^2 + 1$; $a \geq 1$

* Reemplazando :

$$a^2 - 3a - 4 < 0 \Rightarrow (a-4)(a+1) < 0 \wedge a \geq 1$$



$-\infty$ -1 0 1 2 3 4 $+\infty$

$\Rightarrow a \in [1;4\rangle$

* Luego : $1 \leq x^2+1 < 4$

$\Rightarrow 0 \leq x^2 < 3 \Rightarrow x \in \langle -\sqrt{3};\sqrt{3}\rangle$

RPTA:"D"

PROBLEMA 29:

Dado el conjunto :

$$A = \left\{ x \in R / \left| \frac{|2x-3||x+1|}{4x-8} \right| \leq \frac{|x|}{x-2} \right\}$$

Halle el menor valor de m, si $x \leq m$; $\forall x \in A$

A) 3 B) 1 C) 2 D) 4 E) 0

RESOLUCIÓN:

* De: $\left| \frac{|2x-3||x+1|}{4(x-2)} \right| \leq \frac{|x|}{x-2}$..................($\alpha$)

$\Rightarrow x - 2 > 0 \Rightarrow x > 2$

* En (α): $\frac{|2x-3||x+1|}{4|x-2|} \leq \frac{|x|}{x-2}$

$\Leftrightarrow (2x-3)(x+1) \leq 4x$; pues $x > 2$

$\Leftrightarrow 2x^2 - 5x - 3 \leq 0$

$\Leftrightarrow \underbrace{(2x+1)}_{(+)}(x-3) \leq 0$

$\Rightarrow x - 3 \leq 0 \Rightarrow 2 < x \leq 3$

* Entonces el menor valor de "m" es 3

RPTA:"A"

PROBLEMA 30:

Halle el menor valor de :

$$M = \frac{-|4x| + |x^2+2| + |-10|}{3} ; x \in R$$

A) 2 B) 1 C) $\frac{8}{3}$ D) 4 E) 12

RESOLUCIÓN:

* Sabemos que : $|x^2+2| = x^2+2$
$|-10| = 10$

* Luego :

$$M = \frac{-|4x| + |x^2+2| + |-10|}{3} = \frac{x^2+2-4|x|+10}{3} ; x \in R$$

$$M = \frac{x^2-4|x|+4+8}{3} = \frac{|x|^2-4|x|+4+8}{3}$$

$$\Rightarrow M = \frac{(|x|-2)^2+8}{3}$$

* Ahora el menor valor de esta expresión se tendrá si: $(|x|-2)^2 = 0$, entonces:

$$M_{min} = \frac{0+8}{3} = \frac{8}{3}$$

RPTA:"C"

PROBLEMA 31:

Si B es un conjunto definido por :

$$B = \left\{ x \in R / \left| \frac{x-3}{x^2-2x+3} \right| \geq \left| \frac{1}{x+1} \right| \right\}$$

Entonces la suma de los elementos enteros del conjunto B es:

A) 0 *B) 1* *C) 2* *D) 3* *E) 4*

RESOLUCIÓN:

* De la inecuación :

$$x^2 - 2x + 3 > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \frac{|x-3|}{x^2-2x+3} \geq \frac{1}{|x+1|}$$

$$\Rightarrow x \neq -1 \wedge |x-3|.|x+1| \geq x^2-2x+3$$

$$\Rightarrow x \neq -1 \wedge |x^2-2x-3| \geq x^2-2x+3$$

$$\Rightarrow x \neq -1 \wedge \{x^2-2x-3 \geq x^2-2x+3 \vee$$

$$\vee\ x^2-2x-3 \leq -x^2+2x-3\}$$

$$\Rightarrow x \neq -1 \wedge \{-3 \geq 3 \vee 2x^2-4x \leq 0\}$$

$$\Rightarrow x \neq -1 \wedge \{x(x-2) \leq 0\}$$

$$\rightarrow x \neq -1 \wedge 0 \leq x \leq 2 \rightarrow 0 \leq x \leq 2$$

* De donde : $B = [0; 2]$

Los enteros de B son : 0 ; 1; 2 cuya suma es: 3

RPTA:"D"

PROBLEMA 32:

Si A es un conjunto definido por :

$$A = \left\{x \in \mathbb{R} / \frac{3|x+1|}{|x+1|+|x-3|} < 2\right\}$$

entonces el conjunto A es:

A) $\langle -\infty; 7\rangle$ *B)* $\left\langle \frac{5}{3}; 7\right\rangle$ *C)* $\left\langle -\infty; \frac{5}{3}\right\rangle \cup \langle 7; \infty\rangle$

D) $\left\langle -\infty; \frac{2}{3}\right\rangle \cup \langle 1; \infty\rangle$ *E)* $\left\langle \frac{5}{3}; \infty\right\rangle$

RESOLUCIÓN:

* De la inecuación, como $|x+1|+|x-3| > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$, se tiene :

$$3|x+1| < 2(|x+1|+|x-3|)$$

$$\Rightarrow |x+1| < 2|x-3| \Rightarrow |2x-6| > |x+1|$$

$$\Rightarrow (2x-6)^2 < (x+1)^2 \Rightarrow (2x-6)^2 - (x+1)^2 > 0$$

$$\Rightarrow (3x-5)(x-7) > 0 \Rightarrow x < \frac{5}{3} \vee x > 7$$

$$\Rightarrow x \in \left\langle -\infty; \frac{5}{3}\right\rangle \cup \langle 7; +\infty\rangle$$

RPTA:"C"

PROBLEMA 33:

Si se cumple : $\left|y^2 + |x-5|\right| = 4y - 4$

donde: $x, y \in \mathbb{R}$. Halle $(x + y)$

A) 1 *B) 2* *C) 4* *D) 7* *E) -6*

RESOLUCIÓN:

* Lo equivalente será : $y^2 + |x-5| = 4y - 4$

* Pues :

$$|x-5| + y^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow |x-5| = -(y-2)^2 \Rightarrow (y-2)^2 = 0 \Rightarrow y = 2$$

$$\Rightarrow |x-5| = 0 \Rightarrow x = 5$$

* Entonces: $x + y = 7$

RPTA:"D"

PROBLEMA 34:

Resuelva la ecuación :

$$(|x|+100)^2 + (|x|+98)^2 + ... + (|x|+4)^2 + (|x|+2)^2$$

$$= (|x|+99)^2 + ((|x|)+97)^2 + ... + (|x|+1)^2$$

A) $\{101/3\}$ *B)* $\{1\}$ *C)* $\{100\}$ *D)* ϕ *E)* $\{2\}$

RESOLUCIÓN:

* En la ecuación pasando los términos del segundo miembro al primero y asociando convenientemente se tiene :

$$\left[(|x|+100)^2 - (|x|+99)^2\right] + \left[(|x|+98)^2 - (|x|+97)^2\right] +$$

$$+ ...... + \left[(|x|+2)^2 - (|x|+1)^2\right] = 0$$

*Ahora diferencia de cuadrados en cada corchete

$$(2|x|+100+99) + (2|x|+98+97) + ... + (2|x|+2+1) = 0$$

* Volvemos asociar convenientemente:

$$\underbrace{(2|x|+2|x|+2|x|+...+2|x|)}_{50\ veces} + +(100+99+98+...+2+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow 50(2|x|) + \frac{100(100+1)}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow 100|x| = -\frac{100(101)}{2}$$

$\Leftrightarrow |x| = -\dfrac{101}{2}$; esto es incorrecto pues $|x| \geq 0$ (no hay solución), entonces: $C.\ S. = \phi$

RPTA:"D"

PROBLEMA 34:

Si $\{(x_0, y_0)\}$ es el conjunto solución del sistema

$$\begin{cases} (x+y)^3 + (x-y)^3 = 64 \ .... (I) \\ x^2 + 3y^2 = -16\dfrac{|y|}{y} .... (II) \end{cases}$$

Entonces el valor de $T = x_0 - y_0$ es:

A) 8 *B) 6* *C) 4* *D) 2* *E) 0*

RESOLUCIÓN:

* De (I): $2x^3 + 6xy^2 = 64 \Rightarrow x(x^2 + 3y^2) = 32$

* De (II) : Si $y > 0 \Rightarrow x^2 + 3y^2 = -16$

$\Rightarrow x(-16)=32 \Rightarrow x=-2$

* Luego :

$(-2)^2+3y^2=-16$

$\Rightarrow 3y^2=-12 \Rightarrow y^2=-4 \Rightarrow y \notin \mathbb{R}$

* Si:

$y<0 \Rightarrow x^2+3y^2=16$

$\Rightarrow x(16)=32 \Rightarrow x=2$

* Luego :

$2^2+3y^2=16 \Rightarrow y^2=4 \Rightarrow y=-2$, (pues $y<0$)

* Por lo que : $x_0=2 \wedge y_0=-2$

$\Rightarrow T=x_0-y_0=4$

RPTA:"C"

PROBLEMA 36:

Sean $x,y \in \mathbb{R}$ tal que $(3x)^2+(2y)^2+2=2(|3x|+|2y|)$, calcule el valor de:

$$M=\frac{3}{|x|}+\frac{2}{|y|}$$

A)13 B)8 C)7 D)1 E)14

RESOLUCIÓN:

* En el dato :

$$|3x|^2+|2y|^2+2-2|3x|-2|2y|=0$$

* Sea $|3x|=a$ y $|2y|=b$, luego :

$$a^2+b^2+2-2a-2b=0$$

* Formando trinomio cuadrado perfecto :

$$\underline{a^2-2a+1}+\underline{b^2-2b+1}=0$$

$$\Rightarrow (a-1)^2+(b-1)^2=0$$

* Ahora en los reales esta igualdad sólo es posible si: $a+1=0$ y $b-1=0 \Leftrightarrow a=1$ y $b=1$

* Ahora reponiendo x ; y se tiene :

$$|3x|=1 \quad y \quad |2y|=1$$

$$\Leftrightarrow 3|x|=1 \quad y \quad 2|y|=1$$

$$\Leftrightarrow |x|=\frac{1}{3} \quad y \quad |y|=\frac{1}{2}$$

* Reemplazando en lo que piden :

$$M=\frac{3}{\frac{1}{3}}+\frac{2}{\frac{1}{2}}=9+4=13$$

RPTA:"A"

PROBLEMA 37:

Si A es un conjunto definido por :

$$A=\{(x;y)\in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \,/\, x^2+y^2\le 16 \wedge |x|\le y\}$$

Entonces el número de elementos del conjunto A es

A)7 B)13 C)15 D) 18 E)20

RESOLUCIÓN:

* De las inecuaciones :

$$y\ge 0 \wedge x^2+y^2\le 4^2 \wedge |x|^2\le y^2$$

$$\Rightarrow y\ge 0 \wedge y^2\le 4^2-x^2 \Rightarrow x^2\le y^2$$

$$\Rightarrow y\ge 0 \wedge x^2\le 4^2-x^2 \Rightarrow x^2\le 8$$

$$\Rightarrow |x|\le 2\sqrt{2} \Rightarrow -2\sqrt{2}\le x\le 2\sqrt{2}$$

* Si :

$x=0 \Rightarrow y^2\le 4^2 \wedge y^2\ge 0$

$\Rightarrow y\ge 0 \wedge y\le 4 \Rightarrow y\in\{0;1;2;3;4\}$

con esto, hay **5** pares de **A**.

* Si: $x=1 \vee x=-1 \Rightarrow y^2\le 15 \wedge y^2\ge 1$

$\Rightarrow 1\le y^2\le 15 \wedge y\ge 0 \rightarrow 1\le y\le\sqrt{15}$

$\Rightarrow y\in\{1;2;3\}$

con esto, hay $2\times 3=6$ pares de **A**.

* Si: $x=2 \vee x=-2 \Rightarrow y^2\le 12 \wedge y^2\ge 4$

$\Rightarrow 4\le y^2\le 12 \wedge y\ge 0 \Rightarrow 2\le y\le 2\sqrt{3}$

$\Rightarrow y\in\{2;3\}$

Con esto, hay $2\times 2=4$ pares de **A**.

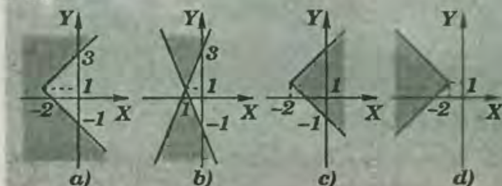
* Luego, en total hay *15* pares $\Rightarrow n(A)=15$

RPTA:"C"

PROBLEMA 38:

Sea F un conjunto definido por :

$F=\{(x;y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R} \,/\, |y-1|\ge 2+x\}$, entonces la figura que mejor representa la gráfica del conjunto F es :



RESOLUCIÓN:

* De la inecuación :

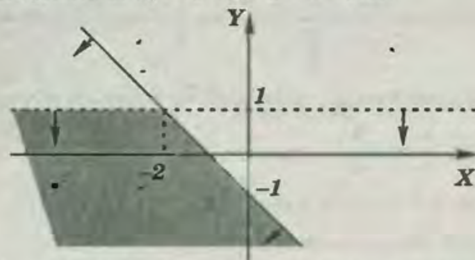
$(y\ge 1 \wedge y-1\ge 2+x) \vee (y<1 \wedge 1-y\ge 2+x)$

$\Rightarrow (y\ge 1 \wedge y\ge x+3) \vee (y<1 \wedge y\le -x-1)$

* La grafica de : $y\ge 1 \wedge y\ge x+3$ es:



* La gráfica de : $y < 1 \wedge y \leq -x-1$ es:



* La unión de las dos regiones anteriores representa al conjunto *F*.

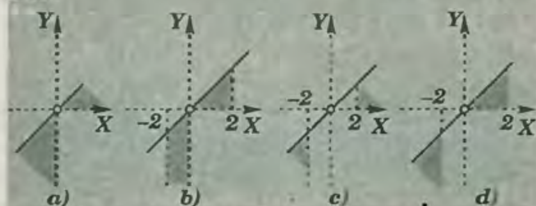
RPTA:"A"

PROBLEMA 39:

Si A es un conjunto definido por :

$$A = \left\{(x;y) \in R \times R / \frac{x}{|x|} + \frac{y}{|y|} \geq x \wedge x \geq y\right\}$$

entonces la figura que mejor representa al conjunto A es :



RESOLUCIÓN:

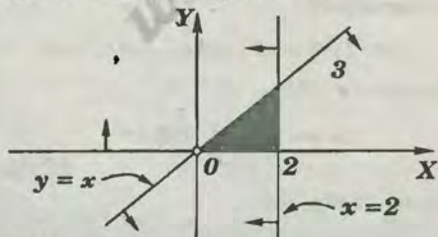
* Como : $x \geq y$, hay 3 casos que analizar:

* **CASO 1 :**

$x > 0 \wedge y > 0$ .... (1° cuadrante)

$$\Rightarrow \frac{x}{x} + \frac{y}{y} \geq x \wedge x \geq y$$

$\Rightarrow x \leq 2 \wedge x \geq y$, cuya gráfica es :

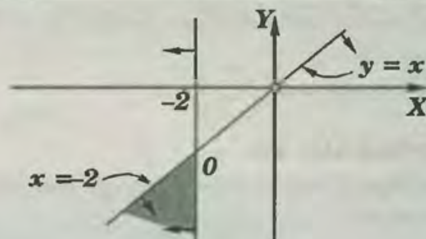


* **CASO 2 :**

$x < 0 \wedge y < 0$ .... (3° cuadrante)

$$\Rightarrow \frac{x}{-x} + \frac{y}{-y} \geq x \wedge x \geq y$$

$\rightarrow x \leq -2 \wedge x \geq y$, cuya gráfica es:



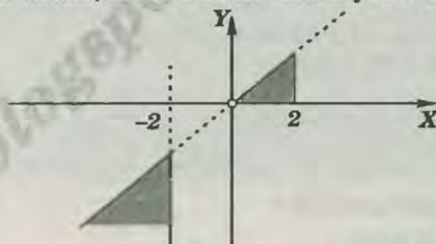
* **CASO 3:**

$x > 0 \wedge y < 0$ .... (4° cuadrante)

$$\Rightarrow \frac{x}{x} + \frac{y}{-y} \geq x \wedge x \geq y \Rightarrow 0 \geq x \wedge x \geq y$$

* La 1° relación es imposible , pues $x > 0$ luego, este caso no genera solución.

* Finalmente, la unión de los casos 1 y 2 será:



RPTA:"D"

PROBLEMA 40:

Si *B* es un conjunto definido por :

$$B = \left\{(x,y) \in Z \times Z / y > |x^2 - 2x| - \frac{1}{2} \wedge y < 1 - |x-1|\right\}$$

Entonces,el número de elementos del conjunto *B* es:

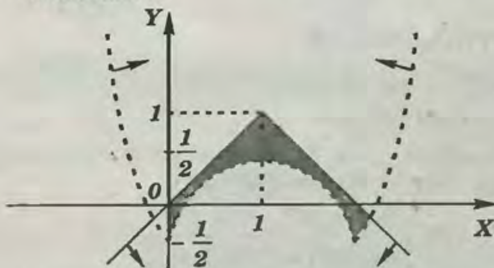
A)0 B)1 C)2 D) 3 E)4

RESOLUCIÓN:

* Las inecuaciones se pueden acomodar así:

$$\begin{cases} y > |(x-1)^2 - 1| - \frac{1}{2} \\ y < -|x-1| + 1 \end{cases}$$

* Graficando :



* Nótese que en la región sombreada (que representa

www.SIGEX.blogspot.com

al sistema) no existe ningún par $(x;y)\in Z\times Z$

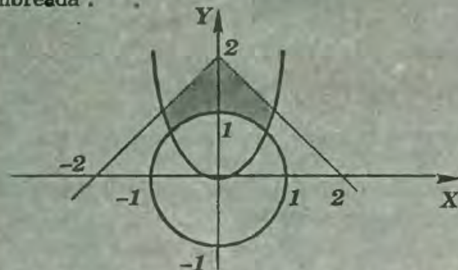
* Esto es : $B = f$

* Luego : $n(B)' = 0$

RPTA:"A"

PROBLEMA 41:

En la figura adjunta se muestra una región sombreada :

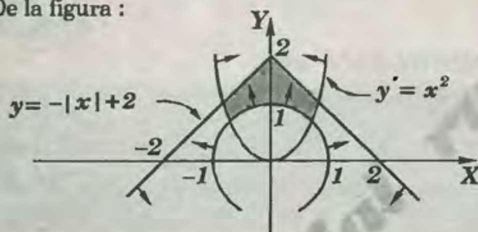


Entonces, el sistema de inecuaciones que mejor define dicha región es:

A) $\begin{cases} y \le x^2 \\ |x|-y\le 2 \\ x^2+y^2\le 1 \end{cases}$ B) $\begin{cases} y \le x^2 \\ |x|+y\ge 2 \\ x^2+y^2\ge 1 \end{cases}$ C) $\begin{cases} y \ge x^2 \\ |x|+y\le 2 \\ x^2+y^2\ge 1 \end{cases}$

RESOLUCIÓN:

* De la figura :



* La región sombreda es la representación del sistema de inecuaciones:

$$\begin{cases} y \ge x^2 \\ y\le -|x|+2 \\ x^2+y^2\ge 1 \end{cases}$$

RPTA:"C"

PROBLEMA 42:

Resolver : $-|x-1|+|2x+3|=5$

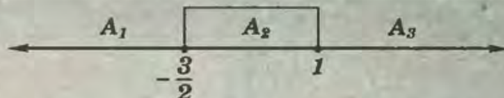
RESOLUCIÓN:

* Igualando cada valor absoluto a cero para determinar los valores críticos.

$$|x-1|=0 \Rightarrow x=1$$

$$|2x+3|=0 \Rightarrow x=-\frac{3}{2}$$

* Ubicándolos en la recta numérica :



* Se tiene 3 zonas, trabajando en cada zona se tiene:

I) A_1: $\left\langle -\infty;-\frac{3}{2}\right\rangle$, entonces:

$-|2x+3|+|x-1|=5 \Rightarrow -2x-3+x-1=5$

$\Rightarrow x=-9$ ....(es solución)

II) A_2: $\left[-\frac{3}{2};1\right]$, entonces :

$|2x+3|+|x-1|=5 \Rightarrow 2x+3+x-1=5 \Rightarrow 3x=3$

$\Rightarrow x=1$ ....(es solución)

III) A_3: $x\in\langle 1;\infty\rangle : |2x+3|-|x-1|=5$

$\Rightarrow 2x+3-x+1=5$

* Como: $1\notin\langle 1;\infty\rangle \Rightarrow \boxed{x=1}$ no es solución, para este intervalo

* De (I) y (II) : C.S. $\{-9;1\}$

PROBLEMA 43:

Resolver : $|2x-3|\ge|x-1|+|x-2|$

A) $\langle-\infty;1]\cup[2;+\infty\rangle$ B) $\langle-\infty;3\rangle$ C) $\mathbb{R}-\{4\}$

D) $\langle-\infty;\infty\rangle$ E) $\langle 4;7\rangle$

RESOLUCIÓN:

* Recordar : $|a+b|\le|a|+|b|;\ \forall a,b\in\mathbb{R}$

* Pero por dato : $|2x-3|\ge|x-1|+|x-2|$

* Por lo tanto : $|2x-3|\ge|x-1|+|x-2|$

* Necesariamente : $|2x-3|=|x-1|+|x-2|$

* Además si : $|a|+|b|=|a+b| \rightarrow ab\ge 0$

* En el problema :

$$|x-1|+|x-2|=|(x-1)+(x-2)|$$

*Entonces : $(x-1)(x-2)\ge 0$

$$\Rightarrow x\in\langle-\infty;1]\cup[2;+\infty\rangle$$

RPTA:"A"

PROBLEMA 44:

Demostrar : $|a-b|\le|a|+|b|$

RESOLUCIÓN:

* Se tiene : $a-b=a+(-b)$

* Tomando valor absoluto en cada miembro:

$$|a-b|=|a+(-b)|\le|a|+|-b|$$

* Por transitividad : $|a-b| \leq |a|+|b|$

PROBLEMA 45:

Demostrar que : $|a+b+c| \leq |a|+|b|+|c|$

RESOLUCIÓN:

* De :

$|a+b+c| = |a+(b+c)|$ ...(P. asociativa)

$\Rightarrow |a+b+c| \leq |a|+|b+c|$ ...(Desigualdad triangular)

$\Rightarrow |a+b+c| \leq |a|+|b+c| \leq |a|+|b|+|c|$

* Por transitividad : $|a+b+c| \leq |a|+|b|+|c|$

PROBLEMA 46:

Demostrar : $|a|-|b|-|c| \leq |a-b-c|$

RESOLUCIÓN:

* Por Ley Asociativa:

$$|a| = |a+(b-b)+(c-c)| = |a-b-c+(b+c)|$$

* Por desigualdad triangular:

$$|a| = |a-b-c+(b+c)| \leq |a-b-c|+|b+c|$$

* Pero : $|b+c| \leq |b|+|c|$

* Por transitividad : $|a| \leq |a-b-c|+|b|+|c|$

* Sumando $-(|b|+|c|)$ a cada miembro :

$$|a|-(|b|+|c|) \leq |a-b-c|$$

$$\Rightarrow |a|-|b|-|c| \leq |a-b-c|$$

PROBLEMA 47:

Si: $\frac{2}{x} \in \left[\frac{1}{5}; 6\right]$, determinar el menor valor de M, tal que :

$$\left|\frac{x+3}{x+6}\right| \leq M$$

A) 2 B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{12}{7}$ D) $\frac{39}{19}$ E) $\frac{13}{16}$

RESOLUCIÓN:

* Del primer dato:

$$\frac{1}{5} \leq \frac{2}{x} \leq 6 \Rightarrow \frac{1}{6} \leq \frac{x}{2} \leq 5$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} \leq x \leq 10 \Rightarrow \frac{19}{3} \leq x+6 \leq 16$$

$$\Rightarrow \frac{1}{16} \leq \frac{1}{x+6} \leq \frac{3}{19} \Rightarrow -\frac{3}{16} \geq -\frac{3}{x+6} \geq -\frac{9}{19}$$

$$\Rightarrow 1-\frac{3}{16} \geq 1-\frac{3}{x+6} \geq 1-\frac{9}{19}$$

$$\Rightarrow \frac{13}{16} \geq \frac{x+3}{x+6} \geq \frac{10}{19}$$

* Tomando valor absoluto : $\frac{10}{19} \leq \left|\frac{x+3}{x+6}\right| \leq \frac{13}{16}$

* Entonces : $M_{min} = \frac{13}{16}$

RPTA:"E"

PROBLEMA 48:

El conjunto solución de la inecuación:

$$\frac{\sqrt{2-|x|}(1-x^2)}{(|x+3|+x-1)(|x|-2)} \geq 0$$

es :

A) $\langle -2; 2\rangle$ B) $[1; 2\rangle$ C) $[-1; 1]$ D) $\langle -2; -1]$

RESOLUCIÓN:

* Primero :

$$2-|x| > 0 \Rightarrow -2 < x < 2 ....(I)$$

* Luego :

$$1 < x+3 < 5 \rightarrow |x+3| = x+3$$

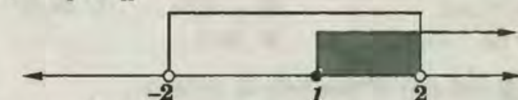
$$\frac{1-x^2}{(x+3+x-1)(|x|-2)} \geq 0..... por (-1)$$

$$\rightarrow \frac{x^2-1}{(2x+2)(|x|-2)} \leq 0 \rightarrow \frac{(x+1)(x-1)}{2(x+1)(|x|-2)} \leq 0$$

* Como : $|x|-2 < 0$

* Entonces : $x-1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1$ .... (II)

C.s. $S_I \cap S_{II}$



$\Rightarrow x \in [1; 2\rangle$

RPTA:"B"

PRACTICA DE EJERCICIOS #1

01 El resultado de: $|-4| + |-6| - |-2|$ es:

A) 11 B) -8 C) -10 D) 10 E) 8

02 El resultado de: $\left|-\frac{1}{4}\right| - \left|-\frac{1}{2}\right| + \left|\frac{3}{9}\right|$; es :

A) $\frac{5}{36}$ B) $\frac{1}{12}$ C) $\frac{7}{12}$ D) $\frac{1}{24}$ E) $\frac{1}{4}$

03 Calcule: $\frac{2|-3|+3|-4|}{|-6|+|-4|}$

A) 1,4 B) 1,2 C) 1,8 D) 18 E) N.A.

04 Halle la suma de soluciones de la ecuación

$$|2x-3|=7$$

A) 3 B) -3 C) 7 D) 6 E) 8

05 Halla el producto de soluciones de la ecuación

$$|x+2|=4$$

A) 7 B) 8 C) -12 D) 12 E) N.A.

06 El resultado de:

$$\left|-\frac{3}{4}\right|-\left|\frac{1}{2}+\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\right|-\left|0,\hat{6}\right|;\text{es}:$$

07 Simplificar:

$$12\div|-2|+(2|-6|-3|-2|)+(3-|-2|)^2$$

08 Simplificar:

$$\left|-8+12\div|-3|\right|+(5-|-6|)^2-\left|-2\right|-3\right|^2$$

09 Resolver: $|x-4|=3$

A) {1; 7} B) {2; 5} C) {1;−7}
D) {2;−6} E) N.A.

10 El resultado de: $\left|-\frac{1}{4}\right|+\left|-\frac{1}{4}\right|^2-\left|0,\hat{3}\right|$; es:

11 Resolver: $|5(x-6)|=30$

A) {1; 14} B) {−2;8} C) {0;12}
D) {0;−12} E) {1;11}

12 Calcular el resultado de efectuar:

$$\left||-2|-5\right|+\left||5|-2\right|$$

A) 8 B) 7 C) 6 D) 9 E) 10

13 Señale el resultado de efectuar las operaciones indicadas en la expresión:

$$\left||-2|-|-3|\right|+\left||-3|+|-2|\right|$$

A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

14 Indicar el valor de: $R=\dfrac{|-2|+|3|}{|5|-|-4|}+\dfrac{|-5|+|-1|}{|-4|-|-3|}$

15 Siendo: $a>5$, calcular: $|a-2|-|a+2|$

16 Sabiendo que $b>2$, reducir la expresión:

$$|b+7|+|b-2|+|-3|$$

17 Para qué valores de x», la relación $|x|-2=10$ es cierta?

18 Señale la suma de los valores que hacen que la ecuación se verifique: $|x+4|+2=18$

19 Efectuar:

$$R=|-3,5|+|8,2|+|100|-|-99|$$

20 Efectuar:

$$K=\left|-\frac{5}{2}\right|+\left|-\frac{2}{3}\right|+|0,5|^2-\left|-\frac{1}{2}\right|$$

TAREA DOMICILIARIA

01 Resolver: $|2x-8|=0$

02 Completa las siguientes tablas, hallando el valor de «y» para cada valor de «x» dado:

A) $y=1+|x+2|$

x	0	1	2	3	4	−1	−2	−3	−4
y									

B) $y=2+|x-3|$

x	0	1	2	3	4	−1	−2	−3	−4
y									

03 Resolver: $|9(x-8)|=27$

A) {2; 11} B) {4; 10} C) {5; 11}
D) {3; 7} E) {− 5; 11}

04 Resolver: $|-5(x+7)|=40$

A) {−1; 4} B) {1; −15} C) {−1; 15}
D) {1; −17} E) {2; 11}

05 Halle la suma de soluciones de la ecuación:

$$|3x-6|=12$$

A) {3; 4} B) {−2; −6} C) {2; 6}
D) {−2; 6} E) N.A.

06 Resolver: $\left|\dfrac{x-9}{7}\right|=5$

A) {−12; 36} B) {32; −24} C) {56;−20}
D) {40; −12} E) {44; − 26}

07 Resolver: $\left|\dfrac{x+12}{-8}\right|=20$

A) {148; − 172} B) {132; − 160} C) {− 148; 172}
D) {0; 120} E) {132; 168}

08 «K» es la mayor de las raíces de $|2x-6|=8$ y «M» es la menor: Por tanto «3K–2M» es:

09 «Z» es la raíz negativa de la ecuación:

$|3x-2|=10$. Entonces el número $(3-z)^2$ es:

10 Las raíces de la ecuación $|4x-3|$ son «M» y «N» entonces: $M\times N-8$ es:

PRACTICA DE EJERCICIOS #2

01 Calcular: $\sqrt{x^2}+\sqrt[3]{x^3}+\sqrt[4]{x^4}+\sqrt[5]{x^5}$

Si: $x<0$

A) $4x$ B) $2x$ C) $3x$ D) x E) 0

02 Calcular:

$$\sqrt[12]{(3-\sqrt{2})^{12}}+\sqrt[4]{(\sqrt{2}-9)^4}+\sqrt[6]{(2\sqrt{2}-6)^6}$$

A) 0 B) $2\sqrt{2}-12$ C) 12 D) -12 E) $-2\sqrt{2}$

03 Resolver la ecuación: $|x-4|=7$

Hallar la mayor solución.

A) 11 B) 2 C) 3 D) 22 E) 40

04 Resolver: $|3x+5|=9$

Hallar una solución:

A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{4}{3}$ D) 8 E) 9

05 Resolver: $|x-2|=10$

Hallar una solución.

A) 10 B) 12 C) 1 D) 2 E) 3

06 Resolver: $|x^2+1|=9$

Hallar una solución.

A) 1 B) 2 C) -3 D) 4 E) $2\sqrt{2}$

07 Resolver: $|6x^2-x-1|=-3$

A) 1 B) 2 C) $\{3;2\}$ D) $\{1;3\}$ E) $\varnothing$

08 Resolver: $|x-3|=5$

Señalar la suma de soluciones.

A) 8 B) 6 C) 4 D) 2 E) 1

09 Resolver: $|9-x^2|=0$

Señalar la mayor solución.

A) -3 B) 3 C) 9 D) -9 E) 0

10 Resolver: $|x^4-37x^2+36|=0$

Señalar la suma de soluciones negativas.

A) -5 B) -3 C) -1 D) -7 E) -4

11 Resolver: $|x^2+1|=5$

Señalar la menor solución.

A) 1 B) -1 C) -2 D) 2 E) 0

12 Resolver: $|3x-5|+x=7$

Indique la suma de sus raíces.

A) -1 B) 3 C) 2 D) 4 E) -2

13 Resolver: $|2x-7|=x-5$

A) $x\in\{2\}$ B) $x\in\{4\}$ C) $x\in\varnothing$
D) $x\in\{2;4\}$ E) $x\in\mathbb{R}$

14 Resolver: $\frac{1}{|x-3|}>0$

A) $\mathbb{R}$ B) $\mathbb{R}-\{3\}$ C) $\mathbb{R}-\{-3\}$ D) $\mathbb{R}-\{0\}$ E) $[3;-3]$

15 Resolver: $|x+6|\le 10x$

A) $\left[-\frac{2}{3};+\infty\right\rangle$ B) $\left[-\frac{11}{6};+\infty\right\rangle$ C) $\left[\frac{6}{11};+\infty\right\rangle$
D) $\left[\frac{2}{3};+\infty\right\rangle$ E) $[0;+\infty\rangle$

16 Resolver:

$$|2x+6|\ge -4$$

A) $\varnothing$ B) $\mathbb{R}$ C) $\mathbb{R}^+$ D) $\mathbb{R}^-$ E) $[0;+\infty\rangle$

17 Resolver: $|5-x|\le 0$

A) $x\in[5;+\infty\rangle$ B) $x\in\varnothing$ C) $x\in\mathbb{R}$
D) $x\in\{5\}$ E) $x\in\langle -5;5\rangle$

18 Resolver: $\left|\frac{x}{2}\right|\le 3$

A) $\langle -6;6\rangle$ B) $\langle -6;6]$ C) $[-6;6]$
D) $[-6;+\infty\rangle$ E) $\langle -\infty;6]$

19 Resolver: $|x-5|\ge -5$

A) $x\in\mathbb{R}$ B) $x\in[5;+\infty\rangle$ C) $x\in[-5;5]$
D) $x\in[-5;+\infty\rangle$ E) $x\in\langle -\infty;5]$

20 Resolver: $|2x^2-3|\ge 5x$

Dar como respuesta el menor valor entero positivo que verifica.

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 3

21 Resolver: $|2-3x|=3x-2$

A) $\frac{2}{3}$ B) $x \in \left\{-\frac{2}{3}\right\}$ C) $x \in \varnothing$ D) $x \in R$ E) $x \in \left[\frac{2}{3};+\infty\right\rangle$

22 Indicar la suma de soluciones de la ecuación: $|x-2| = 2x-12$. Indique el número de sus raíces.

A) 8 B) 12 C) 4 D) 10 E) 8

23 Resolver: $|x^2-4| = 4-2x$

Indique el número de sus raíces.

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) Ninguna

24 Resolver: $|x-2| = |3-2x|$

Indique el producto de sus raíces.

A) 1 B) $\frac{5}{3}$ C) $\frac{3}{5}$ D) 2 E) N.A.

25 Resolver: $x^2-|x|-42=0$

Indique la mayor raíz.

A) 9 B) –7 C) –9 D) 7 E) 1

26 Resolver: $|x^2-5| < 2$

Indique el número de valores enteros que verifican.

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

27 Resolver: $|x-3| \le 5x$

A) $x \in \left[-\frac{3}{4};+\infty\right\rangle$ B) $x \in \langle 0;+\infty\rangle$ C) $x \in \left[\frac{1}{2};+\infty\right\rangle$

D) $x \in \left[-\frac{3}{4};\frac{1}{2}\right]$ E) $x \in \left\langle 0;\frac{1}{2}\right]$

28 Resolver: $|x^2-9| > 7$

Dar como respuesta la suma de los valores que verifican.

A) 1 B) 0 C) 3 D) 4 E) $+\infty$

29 Resolver: $|5-3x| > 2x+6$

Dar como respuesta el mayor valor entero negativo que verifica.

A) –1 B) –2 C) –3 D) –4 E) –5

30 Resolver: $|4-x| < |3+2x|$

Dar como respuesta el menor valor entero positivo que verifica.

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

PRIMERA PRACTICA DIRIGIDA

01 Resolver : $|x| = 2$

A) 2 B) – 2 C) $\sqrt{2}$ D) "A" y "B" E) "A" ó "B"

02 Resolver : $|2x-1| = 0$

A) 1 B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{4}{5}$ D) 2 E) $-\frac{1}{2}$

03 Resolver : $|x| \le 0$

A) 1 B) ϕ C) $\langle -1;1\rangle$ D) 2 C) 0

04 Resolver : $|3x-2| = 4$

A) $\left\{2/3;-2\right\}$ B) $\left\{-2/3;2\right\}$ C) $\left\{-1/2;4\right\}$

D) $\left\{-1/2;-1/3\right\}$ E) $\left\{1/2;3\right\}$

05 Resolver : $|x^2-3| = 1$ e indique el número de soluciones enteras de la ecuación.

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

06 Resolver : $|x-3| = 2x-1$

A) {4/3} B) {2} C) {– 2; 4/3} D) {3; 5} E) {8; 9}

07 Resolver : $|x-2| + |x-1| = x-3$

A) ϕ B) {0} C) {3} D) {4} E) {5}

08 Resolver : $|3x-5| = |2x+7|$ y calcular la suma de los valores absolutos de las soluciones.

A) 62/5 B) 61/5 C) 62/7 D) 57/62 E) 62/57

09 Resolver : $|2x-8| - |x-4| + |6x-24| = 14$

A) {8; 2} B) {2; 6} C) {6; 8} D) {2; – 2} E) {–6; 6}

10 Hallar : $A \cap B$

$A = \{x \in R / |x-3| \le 5\}$

$B = \{x \in R / |x+3| \ge 5\}$

A) $\langle 2;8]$ B) $[2;8]$ C) $[2;8\rangle$ D) $\langle -\infty;8]$ E) $\langle 2;8\rangle$

11 Resolver : $|3-2x| \le |x+4|$

A) $\left\langle 1/3;7\right\rangle$ B) $\left\langle -1/3;7\right\rangle$ C) $\left[-1/3;7\right]$

D) $\left\langle -1/3;1\right\rangle$ E) $\langle -\infty;-3\rangle$

12 Resolver : $2+3\left|\frac{3x-1}{2}\right| = 3x+5$

A) {3; 6} B) {–1/5; 3} C) {–2/7; 2} D) {1/5; –3} E) {5; –3}

13 Resolver : $|x-3| - 2 < 8$

A) $\langle -6;6\rangle$ B) $\langle -9;-9\rangle$ C) $\langle -3;-3\rangle$

D) $\langle -2;-2\rangle$ E) $\langle -7;13\rangle$

14 Resolver : $|x-3|^2 + 6 \le 5|x-3|$

A) $\langle -6;6\rangle$ B) $\langle 5;6\rangle$ C) $\langle 0;1\rangle$

D) $\langle -8;8\rangle$ E) $[0;1] \cup [5;6]$

15 Resolver : $2x^2+7|x|-4<0$

A) $\langle -1/2;1/2\rangle$ B) $\langle -2;2\rangle$ C) $\langle -3;3\rangle$
D) $\langle -4;4\rangle$ E) $\langle -8;8\rangle$

16 Resolver : $\left|x^2-3\right|\le 6$

A) $x\in[3;+\infty\rangle$ B) $x\in\langle -\infty;3]$ C) $x\in\{-3;3\}$
D) $x\in[-3;3]$ E) $x\in R-[3;3]$

17 Determine el número dé soluciones de la ecuación $\big||x|-1\big|=2003$

A) 1 B) 5 C) 2 D) 4 E) 3

18 Resuelva : $|7x-5|<|6x-1|+|x-4|$ y de como respuesta la suma de soluciones enteras

A) 3 B) 4 C) 6 D) 9 E) 7

19 Dado :

$$A=\left\{x\in Z/\left|x^2-3x+5\right|\le 9\right\}$$
$$B=\left\{x\in R/|x+1|+|x-2|\le 5\right\}$$

Halle $n(A\cap B)$

A) 3 B) 5 C) 4 D) 6 E) 10

20 Al resolver : $|3-x|\le 10x(1-x)$

se obtuvo como $C.S.=\left[\dfrac{a}{2};\dfrac{b}{5}\right]$

Halle: $a+b$

A) 2 B) 4 C) 7 D) 3 E) 5

TAREA DOMICILIARIA

01 Resolver: $|3x+4|<5$

señalar la menor solución entera.

A) -5 B) -4 C) -3 D) -2 E) -1

02 Resolver : $\left|\dfrac{x+1}{x-3}\right|>1$ señalar una solución.

A) $\langle -\infty;1]$ B) $[1;\infty\rangle$ C) $[3;\infty\rangle$
D) $\langle 3;\infty\rangle$ E) $\langle 1;\infty\rangle-\{3\}$

03 Resolver : $\big(|x|-1\big)\big(|x|-2\big)<0$

A) $\langle -2;-1\rangle$ B) $\langle 1;2\rangle$ C) $\langle 3;4\rangle$
D) $\langle 5;8\rangle$ E) $\langle -2;-1\rangle\cup\langle 1;2\rangle$

04 Resolver : $\dfrac{|x|-7}{|x|-5}>0$

A) $\langle -\infty;-7\rangle\cup\langle 7;+\infty\rangle$ B) $\langle -3;3\rangle$ C) $\langle -4;4\rangle$
D) $\langle -8;8\rangle$ E) $\langle -9;9\rangle$

05 Resolver : $|2x-3|<x+7$

A) $\langle 4/3;10\rangle$ B) $\langle -4/3;10\rangle$ C) $\langle 5/4;3\rangle$
D) $\langle -8;9\rangle$ E) $\langle -10;10\rangle$

06 Resolver: $|x-5|+2|x-7|+3|x-8|<x-9$

A) ϕ B) $x>9$ C) $\langle -\infty;4\rangle$ D) $\langle -7;7\rangle$ E) $\langle -9;9\rangle$

07 Calcular los valores de x que no satisfacen la inecuación y dar como respuesta el cardinal de dicho conjunto.

$$\frac{|x|}{x^2+2}<\frac{3}{|x|}$$

A) 1 B) 2 C) 0 D) -2 E) 3

08 Halle el conjunto solución de la inecuación :

$$\sqrt{2-|x-1|}\le 1$$

A) $[-1;0]$ B) $[-1;3]$ C) $[2;3]$ D) $[-1;0]\cup[2;3]$ E) $[0;2]$

09 Demostrar que :

$$\forall a,b\in R\rightarrow \big||a|-|b|\big|\le|a-b|$$

10 Demostrar que :

$$\forall a,b\in R\rightarrow |a|-|b|\le\big||a|-|b|\big|\le|a-b|\le|a|+|b|;$$

11 Demostrar que :

$$\forall a,b \text{ y } c\in R\rightarrow |a|-|b|-|c|\le|a-b-c|$$

12 Demostrar que :

$$\forall a,b \text{ y } c\in R-\{0\}\rightarrow \left|\frac{bc}{a}\right|+\left|\frac{ac}{b}\right|+\left|\frac{ab}{c}\right|\le|a+b+c|$$

13 Demostrar que :

$$\forall a,b\ ,\ c,d\in R\rightarrow a^4+b^4+c^4+d^4\le 4|abcd|$$

14 Demostrar que :

$$\forall a,b\ ,\ c,d\in R\rightarrow |a-d|\le|a-b|+|b-c|+|c-d|$$

15 Sean a, b , c las longitudes de los lados de un triángulo , demostrar que :

$$\left|\frac{a-b}{a+b}+\frac{b-c}{b+c}+\frac{c-a}{c+a}\right|<\frac{1}{16}$$

16 Demostrar que :

$$\forall a,b \text{ y } c\in R\rightarrow \big(|a|+|b|\big)\big(|a|+|c|\big)\big(|b|+|c|\big)\ge\sqrt{8}\,|abc|$$

SEGUNDA PRACTICA DIRIGIDA

01 Indicar verdadero *(V)* o falso *(F)* en las proposiciones:

( ) $\sqrt{x-1}:\exists \Rightarrow x \geq 1$

( ) $\sqrt[3]{x+2}:\exists \Rightarrow x \in R$

( ) $\sqrt[3]{x}:\exists \Rightarrow x \geq 0$

A) VFV B) VVV C) VFF D) FVV E) FFV

02 Al resolver: $\sqrt{x-1} < 2$

dar el valor de verdad:

( ) El mayor entero del C.S. es *3*.

( ) El producto de los valores enteros del C.S es *8*.

( ) El C.S. = *[1; 4>*

A) FVV B) VVF C) VFV D) FFV E) VFF

03 Resolver: $\sqrt{x^2+32+12x} \geq 0$

Proporcionar un intervalo del conjunto solución.

A) [3; +∞> B) <-∞; 2] C) [0; +∞>
D) <-∞ -8] E) [2; 8]

04 Resolver: $\sqrt{x-4}+\sqrt{-x+9} \geq 0$

Proporcionar el número de valores enteros del conjunto solución.

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

05 El C.S. de la inecuación: $\sqrt[3]{2-x} < x$

es: *]a;+∞[*. Calcular a^a.

A) 1 B) 4 C) 9 D) 8 E) $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$

06 Resolver: $\sqrt{x+3} < 4-x$

A) $\left[-3;\frac{1}{2}\right\rangle$ B) [– 4; 2 > C) < 7; +∞ >

D) < –3; 2 > E) [– 2; 4]

07 Resolver: $\frac{\sqrt{2x-1}-3}{x+1} < 0$

Indicar el mayor valor entero.

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

08 Si *M* es el conjunto solución de la inecuación:

$$\sqrt{\frac{x^2-x-2}{2-3x}} \leq x-2$$

entonces *M* es:

A) R –{2} B) <-1; 2] C) {1; 2} D) {2} E) ϕ

09 El conjunto solución de la inecuación:

$$\sqrt{x+3} \leq x+1$$

A) [-3; -1] B) [-1; +∞> C) [1; +∞>
D) <-∞; -3] E) <-∞; 1]

10 Dar el valor veritativo en las proposiciones:

( ) Si $|x| \geq 0 \Rightarrow$ C.S. = R

( ) Si $|x| = 5 \Rightarrow$ C.S. = {±5}

( ) Si $|x| < 0 \Rightarrow$ C.S. =] – ∞;0[

A) VVV B) VVF C) VFF D) FFV E) FVV

11 Resolver la ecuación: $|5x| = 6-x$

Proporcionar el número de soluciones.

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 6

12 Resolver: $||x-3|-5| = 0$

Indicar la menor solución.

A) 6 B) 8 C) 2 D) -2 E) 5

13 Resolver: $x^2-2x+3|x-1| = 9$

Dar la suma de sus soluciones.

A) 4 B) 2 C) -2 D) 6 E) -6

14 Al resolver: $|x^2-2| < 14$

se obtiene que *x ∈ <n; m>*. Señalar: *n-m*.

A) -6 B) -8 C) 5 D) 12 E) 6

15 Calcular la suma de los valores enteros que satisfacen: $|x^2-4| < -2x+4$

A) 6 B) -6 C) 5 D) -5 E) 4

16 Si *x ∈ <0;1>*. Calcular el valor de:

$$\frac{|4x+1|-|x+1|}{x}$$

A) 1 B) 3 C) 7 D) 5 E) 4

17 Si:

$A = \{x / \sqrt{x-2} \in R\}$

$B = \{x / |x^2-4| = 0\}$

indicar: *B – A*

A) <-2; +∞> B) <1; +∞> C) [0; +∞>
D) {-2} E) ∅

18 Resolver:

$$\begin{cases} \sqrt{5-|x|} \geq 0 \\ \frac{2x+3}{4} - x > \frac{1}{2}\left[\frac{9-4x}{2}\right] \end{cases}$$

A) <-1; 3] B) [5; 8> C) [0; +∞>
D) <3; 5] E) [0; 5]

19 Resolver: $\begin{cases}|x-2|>|x+1| \\ \sqrt{-x}\times\sqrt[3]{|x|-1}>-2\end{cases}$

A) $\left\langle -9;\frac{1}{2}\right\rangle$ B) $\left\langle 3;\frac{9}{2}\right\rangle$ C) $<-9;3]$

D) $<-\infty;-9>$ E) $\langle -\infty;3\rangle$

20 Al resolver: $\sqrt{1-|x|}\times(x^5-x^3)<0$

el C.S. es $<a;b>$. Indicar ab.

A) 0 B) 2 C) 4 D) 8 E) 12

TERCERA PRACTICA DIRIGIDA

01 Los números a y b verifican las condiciones $a<-1$ y $b>1$. Determine el valor de verdad de los siguientes enunciados:

( ) $|-ab|=ab$

( ) $\left|\frac{a}{b}\right|=\frac{-a}{b}$

( ) $\left|\frac{1-b}{b-1}\right|=1$

A) FVV B) VFV C) VVV D) FFV E) VFF

02 Si A es el conjunto solución de la ecuación:

$$|(x-2)^2-1|=|2|x|-1|$$

indicar cuál(es) de los siguientes enunciados es(son) correcto(s):

I) $n(A)=3$

II) $Q-A=Q$

III) La suma de los elementos del conjunto A es $3+\sqrt{7}$

A) Sólo I B) Sólo II C) Sólo III D) I y II E) I, II y III

03 Resolver: $|1-2x|>3-x$

A) $\left\langle -\infty;\frac{1}{2}\right\rangle\cup<1;+\infty>$ B) $\left\langle 0;\frac{4}{3}\right\rangle\cup<2;+\infty>$

C) $<-\infty;1>\cup<1;+\infty>$ D) $\langle -\infty;-2\rangle\cup\left\langle\frac{4}{3};+\infty\right\rangle$

E) $\left\langle -\infty;\frac{1}{2}\right\rangle\cup\left\langle\frac{2}{3};+\infty\right\rangle$

04 Al expresar en términos de intervalos el conjunto definido por:

$$A=\left\{\frac{x-2}{|x-2|+1}\Big/x\in\mathbb{R}\right\}$$

se obtiene $A=<a;b>$. Indique el valor de: $a+b$.

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

05 Calcule el menor número real M que cumpla:

$$\left|\frac{2x+1}{x-1}-\frac{1}{2}\right|\leq M;\forall x\in[4;7]$$

A) 2 B) 2,5 C) 3,0 D) 3,5 E) 4

06 Se definen los conjuntos:

$A=\{x\in\mathbb{R}/|2x-3|>1-x\}$

$B=\{x\in\mathbb{R}/|3x-2|<2-x\}$

Halle el conjunto

$C=\{x\in\mathbb{R}/x\in(A-B)\Rightarrow x\in B\}$

A) $\left[-2;-\frac{4}{3}\right]$ B) $\left\langle -2;\frac{4}{3}\right\rangle$ C) $<-1;1>$

D) $<0;1>$ E) $\left\langle 1;\frac{4}{3}\right\rangle$

07 Si S es el conjunto solución de la inecuación:

$$||x|-5|+||x|-3|<4$$

entonces determine el número de elementos del conjunto $S\cap\mathbb{Z}$, donde $\mathbb{Z}$ es el conjunto de los números enteros.

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

08 Se tiene la siguiente igualdad de conjuntos:

$$\left\{\left|\frac{x-1}{x-2}\right|+3/x\in<-1;2]\right\}=[a;b>$$

entonces $2a-b$ es igual a:

A) –1 B) 0 C) 1 D) 2 E) 3

09 Si S es el conjunto solución de la ecuación:

$$\frac{\sqrt{x}-\sqrt{2-x}}{\sqrt[3]{x-1}}=\sqrt[6]{4x}$$

entonces la suma de los elementos de S es:

A) 3 B) 2 C) $\frac{1}{5}$ D) $\frac{11}{5}$ E) $\frac{16}{5}$

10 Determine el conjunto solución de la ecuación:

$$\frac{2x(x+\sqrt{x^2-1})-1}{2x(x-\sqrt{x^2-1})-1}=\frac{m^5}{243}(x\sqrt{x^2-1})$$

si $m>0$

A) $\frac{m^2+9}{6m}$ B) $\frac{m^2+6}{m}$ C) $\frac{m+1}{m}$ D) $\frac{m^2+1}{6m}$ E) $\frac{m^2+3}{4m}$

11 Resolver: $\sqrt[3]{x^3-3x^2+5x-6}<x-2$

A) $<3;6>$ B) $<-\infty;\frac{1}{3}>\cup<2;+\infty>$ C) $<-\infty;\frac{1}{3}>$

D) $<\frac{1}{3};2>$ E) Φ

12 Cuántos números enteros verifican la siguiente inecuación:

$$\sqrt{1-x^2}<2x-1$$

A) *Ninguno* B) 1 C) 2 D) 3 E) *Más de 3*

13 Resolver:

$$\sqrt{1-x}+\sqrt{1-2x}+\sqrt{1-3x}<\sqrt{x}+4$$

Indique el conjunto solución.

A) R B) $\left\langle\frac{1}{3};+\infty\right\rangle$ C) $\left\langle 0;\frac{1}{3}\right\rangle$ D) $\left[0;\frac{1}{3}\right]$ E) R^+

14 Resolver: $\sqrt{\frac{\sqrt{x^2-6x}-\sqrt{x}}{8-x}}\ge\sqrt[3]{x-10}$

Entonces el conjunto solución es:

A) $[7;5>\cup\{0\}$ B) $[-3;0>$ C) $[-3;-2>\cup\{0\}$

D) Φ E) R^+

15 Resolver la inecuación:

$$\frac{(x^4+x^2+1)(x-3)^7\sqrt[5]{x-1}}{\sqrt[10]{x+3}\,\sqrt[9]{x+8}(x-7)^{11}}\le 0$$

A) $<-8;1]\cup[3;6>-\{-3\}$ B) $<-8;1)\cup[3;7>-\{-3\}$

C) $<-8;1]$ D) $<-3;1]\cup[3;7>$ E) R

16 Determine $T=a+b$ del conjunto A definido por: $A=\{x\in\mathbb{R}/\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}<\sqrt{3x}=\left[a;\frac{b}{\sqrt{3}}\right\rangle$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

17 Al resolver la inecuación irracional:

$$\frac{\sqrt[4]{4-x+\sqrt[6]{x^2-1}}}{\sqrt[8]{x-2}}\ge\sqrt[5]{1-x}-1$$

se obtiene como C.S. $=<a;b]$.

Calcule: $T=a^2+b^2$

A) 5 B) 10 C) 13 D) 17 E) 20

18 Si S es el conjunto solución de la inecuación:

$$\frac{4x^2+\sqrt{9-x^2}-1}{4x^2-1}\ge 1$$

indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones.

( ) $S=\Phi$

( ) $S\cap<0;\frac{1}{2}>\neq\Phi$

( ) $S=<\frac{1}{2};3]$

A) VVV B) FFF C) VFF D) FVV E) FVF

19 Resolver: $\sqrt{1-x}+\sqrt{x+1}\ge x-4$

Si el conjunto solución es $S=[a;b]$, calcule el valor de: $T=(a+b)^{a-b+2}$

A) 0 B) 1 C) 4 D) 9 E) *Indeterminado*

20 Resolver la inecuación irracional:

$$(2-\sqrt{x^2+4x+3})^2-(\sqrt{(x+2)^2-1}+2)^2>-8\sqrt{x+3}$$

A) $]-1;0[$ B) $]0;2[$ C) $]-3;-2[$ D) $]-3;-1[$ E) R

CLAVES DE LA PRIMERA PRACTICA				
01) E	02) B	03) E	04) B	05) C
06) A	07) A	08) A	09) B	10) B
11) C	12) B	13) E	14) E	15) A
16) D	17) C	18) C	19) B	20) B
01) D	02) E	03) E	04) A	05) B

CLAVES DE LA SEGUNDA PRACTICA									
1)B	2)C	3)D	4)E	5)A	6)A	7)E	8)D	9)C	10)B
11)B	12)D	13)B	14)B	15)B	16)D	17)D	18)D	19)A	20)A

MÉTODOS DE INVESTIGACIÓN CIENTÍFICA

El investigador en ciencias se basa en métodos técnicos y lógicos para verificar sus conclusiones y concluir algunos (o muchos) resultados o leyes que rigen e determinada ciencia.

MÉTODOS TÉCNICOS:

Entendemos por estos, los utilizados al observar y experimentar, los podemos llamar también métodos empíricos.

MÉTODOS LÓGICOS:

Son aquellos que nos permiten hacer deducciones estableciendo raciocinios lógicos, admisibles y demostrables.

Dentro de los métodos lógicos se encuentran el razonamiento inductivo y deductivo.

Ante la construcción de nuevas teorías (o replanteamiento de las mismas), especialmente en matemáticas suele ocurrir lo siguiente:

Se establecen algunas ***definiciones.*** Por ejemplo, ¿Qué es un triángulo?, se puede afirmar que un triángulo es «el polígono de tres lados incluidos todos los puntos que se encuentran dentro de él» o que el triángulo es «el polígono de tres lados sin incluir los puntos que encierran sus lados». Nos ponemos de acuerdo en su significado.

Se establecen los ***axiomas (postulados).*** Los axiomas o también llamados postulados son proposiciones que asumimos como verdades aceptándolos sin demostración alguna.



OBJETIVO :

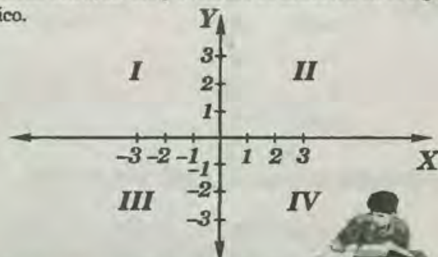
* Reconocer un producto cartesiano,
* Reconocer y representar en un sistema bidimensional una relación deduciendo su dominio y rango correspondiente.
* Relacionar ejemplos prácticos al modelo apropiado de relación e interpretar la operación asociada y terminología en el contexto.
* Identificar relaciones de equivalencia.
* Dibujar las gráficas de las relaciones.

INTRODUCCIÓN :

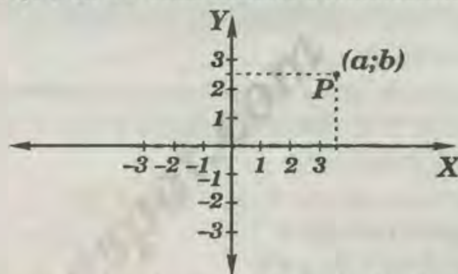
Dos franceses reciben el crédito de crear la idea del sistema de coordenadas . Pierre de Fermat era un abogado que hacía matemáticas por afición. En ***1629*** , escribió unas notas donde hacia uso explícito de coordenadas para describir puntos y curvas.

René Descartes era un filósofo que pensaba que las matemáticas eran la llave para descubrir los secretos del universo. En **1637** publicó «La Geometríe». Es un libro muy famoso, y aunque pone énfasis en el papel del álgebra para resolver problemas de geometría sólo sugiere vagamente el uso de coordenadas. Fermat deberá tener el mayor crédito por habérsele ocurrido la idea primero y de un modo más explícito. La historia puede ser un amigo traicionero; coordenadas se conocen como coordenadas cartesianas debido a René Descartes.

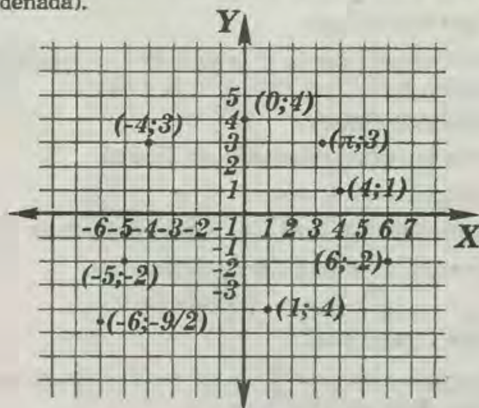
En el plano, hágase dos copias de la recta real, una horizontal y la otra vertical, de manera que se intersequen en el punto cero de las dos rectas. Las dos rectas se llaman ejes coordenadas; su intersección, a la que se le asigna la etiqueta *«O»* se llama origen. Por convención la recta horizontal se llama eje *«X»* y la recta vertical eje *«Y»*. La mitad positiva del eje x está en la derecha y la mitad positiva del eje Y está hacia arriba. Los ejes coordenados dividen al plano en cuatro regiones llamadas cuadrantes; estos se etiquetan con ***I, II. III*** y ***IV*** como se muestra en el siguiente gráfico.



Ahora a cada punto P en el plano se le puede asignar un par de números que son sus coordenadas cartesianas. Si una recta horizontal y una recta vertical que pasan por P intersecan al eje X en *«a»* y al eje Y en *«b»* como tenemos a continuación.



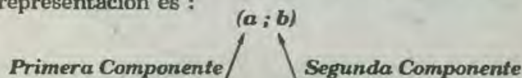
Entonces las coordenadas de P son ***(a; b)***. Se llama a ***(a; b)*** un par ordenado de números pues es importante el orden en que aparezcan. El primer número *«a»*, es la coordenada en x (o abcisa); el segundo número *«b»* es la coordenada en y (u ordenada).



DEFINICIONES BÁSICAS

PAR ORDENADO :

Es un ente matemático formado por dos elementos, denotado por ***(a ; b)***, donde *«a»* es la primera componente y *«b»* es la segunda componente , cuya representación es :



* Que formalemente se define como:

$(a;b) = \{\{a\}; \{a\ ;b\}\}$
$(b;a) = \{\{b\}; \{b\ ;a\}\}$
como observamos $(a;b) \neq (b;a)$; si $a \neq b$

IGUALDAD DE PARES ORDENADOS

Dos pares ordenados *(a ; b)* y *(c ; d)* son iguales si y sólo si sus primeros componentes son iguales *(a=c)*, así como también sus segundas componentes *(b=d)*, simultáneamente. Es decir :

$$\boxed{(a;b)=(c;d) \Leftrightarrow [a=c \wedge b=d]}$$

EJEMPLO :

$(3;4) \neq (3;3)$; $(2;7) \neq (7;2)$ y $(-5;9) \neq (5;9)$; mientras que $(1;x) = (y\ ;2)$ si y solamente si $1 = y \wedge x = 2$.

EJERCICIO 1:

Hallar *x* e *y* , si: $(x+5\ ;8) = (9\ ;y+6)$

RESOLUCIÓN:

Si $(x+5\ ;8)=(9\ ;y+6)$

* Entonces:

$I)\ x+5=9 \rightarrow x=4$

$II)\ 8=y+6 \rightarrow y=2$

EJERCICIO 2:

Halle el mayor valor de $x-y$ a partir de la siguiente ecuación : $(x^2\ ;17) = (16\ ;y^2-3y-23)$.

RESOLUCIÓN:

* Como los pares ordenados son iguales:

$x^2=16 \Rightarrow x=4$ ó $x=-4$

$17=y^2-3y-23 \Rightarrow y^2-3y-40=0 \Rightarrow y=8;\ y=-5$

* El mayor valor de $x-y$ ocurre cuando :

$$x=4,\ y=-5 \rightarrow x-y=9$$

EJERCICIO 3:

Si los pares ordenados $(2x+3y\ ;7x-2y)$, $(13;8)$ son iguales , halle el valor de $(x-y)$

RESOLUCIÓN:

* Ya que los pares ordenados son iguales, por definición se cumple.

$$\begin{cases} 2x+3y=13 \ldots\ldots\ldots\ldots(I) \\ 7x-2y=8 \ldots\ldots\ldots\ldots(II) \end{cases}$$

* Resolviendo el sistema por determinantes.

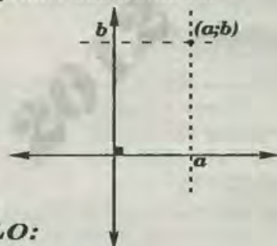
$$x=\frac{\begin{vmatrix} 13 & 3 \\ 8 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 7 & -2 \end{vmatrix}}=\frac{-26-24}{-4-21}=2$$

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 13 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 7 & -2 \end{vmatrix}}=\frac{16-91}{-4-21}=3$$

REPRESENTACIÓN CARTESIANA DE UN PAR ORDENADO

Otra forma de representar pares ordenados es en un plano cartesiano, así:

* Se escogen dos rectas perpendiculares.
* Sobre la horizontal se sitúa el primer elemento y sobre la vertical se sitúa el segundo elemento.
* Se trazan rectas paralelas a las rectas dadas por los puntos indicados. La intersección de estas rectas representa el par. Así, la representación del par *(a;b)* en el primer cuadrante es:



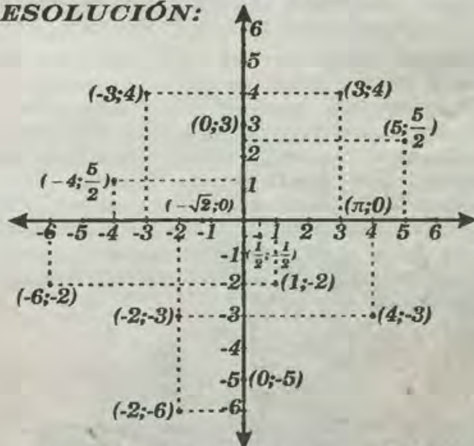
EJEMPLO:

Representar los puntos

$(1;-2),(3;4),(0;3),(-2;3),(\pi;0),\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right),(-3;4),$

$(-\sqrt{2};0),(0;-5),(-2;-6),\left(5;\frac{5}{2}\right),(4;-3),(-6;-2)$

RESOLUCIÓN:



PRODUCTO CARTESIANO

Dados dos conjuntos *A* y *B* no vacíos $(A \neq \phi \wedge B \neq \phi)$, se define el producto cartesiano de *A* por *B* representado por $A \times B$, al conjunto de todos

los pares ordenados, tales que el primer elemento pertenece a A y el segundo a B. Se denota $A\times B$, y se lee «el conjunto producto de A por B» o también «el producto cartesiano de A y B».

* Por comprensión $A\times B$ es:

$$A\times B=\{(a;b)/a\in A\wedge b\in B\}$$

EJEMPLO 1:

Sean : $C=\{a;b\}$ y $D=\{1;3;5\}$

Hallar : $C\times D$, $D\times C$, $C\times C$ y $D\times D$

RESOLUCIÓN :

$C\times D=\{(a;1),(a;3),(a;5),(b;1),(b;3),(b;5)\}$

$D\times C=\{(1;a),(1;b),(3;a),(3;b),(5;a),(5;b)\}$

$C\times C=\{(a;a),(a;b),(b;a),(b;b)\}$

$D\times D=\{(1;1),(1;3),(1;5),(3;1),(3;3),(3;5),(5;1),(5;3),(5;5)\}$

* Un procedimiento sencillo para formar el producto cartesiano de dos conjuntos es agrupar los elementos en un cuadro rectangular como se indica a continuación:

Conjunto D (filas: Conjunto C)

x	1	3	5
a	(a;1)	(a;3)	(a;5)
b	(b;1)	(b;3)	(b;5)

C×D

Conjunto C (filas: Conjunto C)

x	a	b
a	(a;a)	(a;b)
b	(b;a)	(b;b)

C×C

* Observe que $C\times D\neq D\times C$

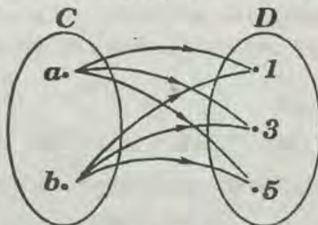
* ***EN GENERAL:***

Si A y B son conjuntos, $A\times B\neq B\times A$

El producto cartesiano de dos conjuntos se puede representar por :

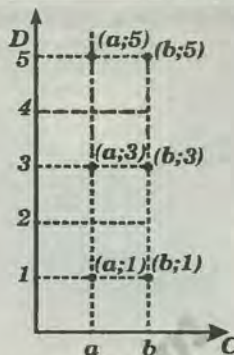
A) UN DIAGRAMA SAGITAL:

La representación gráfica, en un diagrama sagital, de $C\times D$, donde $C=\{a;b\}$ y $D=\{1;3;5\}$, es:



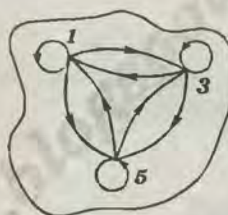
B) UN DIAGRAMA CARTESIANO :

La representación gráfica en un plano cartesiano de $C\times D$, donde $C=\{a;b\}$ y $D=\{1;3;5\}$, es:

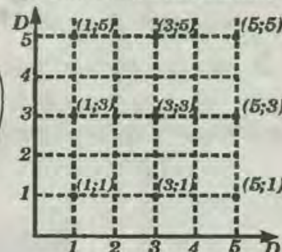


La representación gráfica de $D\times D$ con $D=\{1;3;5\}$, es:

A) DIAGRAMA SAGITAL:



B) DIAGRAMA CARTESIANO:



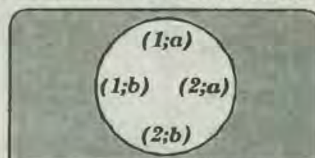
EJEMPLO 2 :

Si $A=\{1;2\}$ y $B=\{a;b\}$, entonces:

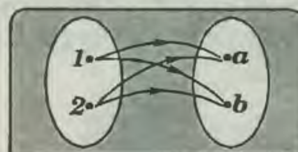
$A\times B=\{(1;a),(1;b),(2;a),(2;b)\}$

La representación del producto cartesiano puede hacerse de varias formas:

1) EN UN DIAGRAMA DE VENN :



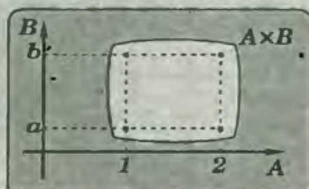
2) EN UN DIAGRAMA SAGITAL :



3) EN UNA TABLA DE DOBLE ENTRADA

A \ B	a	b
1	(1;a)	(1;2)
2	(2;a)	(2;b)

4) EN UN DIAGRAMA CARTESIANO :



PRODUCTO CARTESIANO DE DOS INTERVALOS

El producto cartesiano de dos intervalos, en la gran mayoría de los casos, no se puede determinar por extensión, sólo se le puede determinar por comprensión.

EJEMPLO 1:

Si $A = [2;5]$ y $B = \langle 1;3 \rangle$

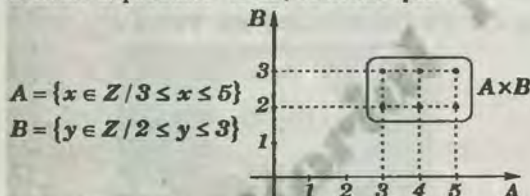
$$A \times B = \{(x;y)/x \in [2;5] \wedge y \in \langle 1;3 \rangle\} a)$$

* No obstante $A \times B$ se puede representar geométricamente de la siguiente manera:



EJEMPLO 2 :

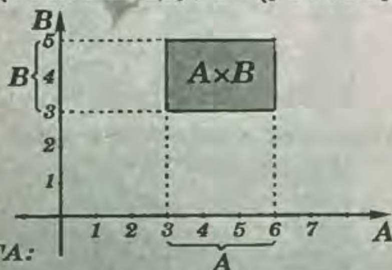
Graficar el producto $A \times B$, sabiendo que:



EJEMPLO 3:

Graficar el producto: $A \times B$, sabiendo que:

$A = \{x \in R / 3 \le x \le 6\}$, $B = \{y \in R / 3 \le y \le 5\}$



NOTA:

En este ejemplo los pares ordenados vienen a ser todos los puntos que se encuentran en la zona sombreada. Esto se debe a la mayor densidad que presentan los conjuntos dados.

OBSERVACIONES :

* El plano cartesiano se define como el producto cartesiano $R \times R$.

* El producto cartesiano se puede extender a tres o más conjuntos no vacíos, es decir:

$$\boxed{A \times B \times C = \{(a;b;c)/a \in A \wedge b \in B \wedge c \in C\}}$$

Donde *(a; b; c)* es una terna ordenada definida en términos de conjuntos.

$$(a;b;c) = \{\{a\};\{a;b\};\{a;b;c\}\}$$

PROPIEDADES GENERALES DEL PRODUCTO CARTESIANO

I) Si $n(A)$ es el número de elementos del conjunto A y $n(B)$ es el número de elementos del conjunto B, entonces $n(A \times B) = n(A) \times n(B)$ es el número de elementos del producto cartesiano $A \times B$.

$$\boxed{n(A \times B) = n(A) \times n(B)}$$

II) El producto cartesiano en general no es conmutativo, es decir $\boxed{A \times B \neq B \times A}$, a menos que $A = B$.

III) $A \times B = \phi$ si A es vacío o B es vacío.

IV) $n(A \times B \times C) = n(A) \times n(B) \times n(C)$

NOTA :

Al producto cartesiano $A \times A$ también se le representa por $A^2 = A \times A$

EJEMPLO:

Dado los conjuntos :

$$A = \{x \in Z / 6 < x - 2 < 12\}$$
$$B = \{x \in Z / -4 \le x + 3 < 9\}$$

¿Cuántos elementos tiene , $A \times B$?

RESOLUCIÓN:

* Para el conjunto A , se cumple : $6 < x - 2 < 12$

*Sumando 2 a todos los miembros de la desigualdad, se obtiene :

$$8 < x < 14$$

$$A = \{9;10;11;12;13\} \rightarrow \boxed{n(A) = 5}$$

* Para el conjunto B , se cumple : $-4 < x+3 < 9$

* Adicionando -3 a todos los miembros de la desigualdad , se obtiene : $-7 < x < 6$

$$B = \{-7;-6;-5;-4;-3;-2;-1;0;1;2;3;4;5\}$$

* Con lo cual $n(B) = 13$:

$\rightarrow \boxed{n(A\times B)=n(A)\times n(B)=(5)(13)=65}$

CORRESPONDENCIA

En un directorio, cada persona tiene asignada una silla con su nombre. La asociación posición– nombre es una correspondencia , porque a cada persona le corresponde un lugar en la mesa. Esta relación asocia posición con nombre .

Este ejemplo nos recuerda la correspondencia. En él podemos observar dos conjuntos: el conjunto *A*, formado por el número de sillas, y el conjunto *B*, formado por los nombres de los asistentes al directorio.

A={*1; 2; 3; 4; 5*}

B={*Pedro, José, Miguel, Manuel, Andrés*}

El conjunto **A** *se llama conjunto de partida.*

El conjunto **B** *se llama conjunto de llegada.*

Podemos asignar $A \rightarrow B$ como el conjunto de pares ordenados que asocia cada elemento del conjunto *A* con un elemento del conjunto *B* y formar la correspondencia R_1 de la siguiente manera.

R_1={(*1; Pedro*); (*2; José*); (*3; Miguel*); (*4; Manuel*); (*5; Ándres*)}

A su vez, podemos establecer la llamada correspondencia inversa $R_2: B \rightarrow A$. Esta relación asocia nombre con posición.

R_2 ={(*Pedro ; 1*) ; (*José ; 2*);(*Miguel ; 3*); (*Manuel ; 4*) ; (*Ándres ; 5*)}

RELACIONES

Sean «*A*» y «*B*» dos conjuntos no vacíos ; un conjunto *R* de pares ordenados se llama una *RELACIÓN DE* *A* en *B* , si *R* es un subconjunto cualquiera de $A\times B$ es decir , *R* es una relación de *A* a $B \Leftrightarrow R \subset A\times B$.

Se denota : $R: A\rightarrow B$ o $A\overset{R}{\rightarrow}B$

NOTAS :

*Una relación de *A* en *B* es también llamada una *RELACIÓN BINARIA* , puesto que en general , si $A\times B$ tiene *n* elementos entonces $A\times B$ tiene 2^n subconjuntos por lo tanto, existen 2^n relaciones de *A* en *B*.

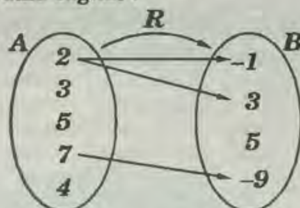
* Se dice que un conjunto *R* es una relación en *A* si $R \subset A\times A$.

EJEMPLO 1:

Sean : $A = \{2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 4\}$; $B = \{-1 ; 3 ; 5 ; -9\}$

$\rightarrow R = \{(2 ; -1);(2 ; 3)(7 ; -9)\}$ es una relación de *A* en *B* , ya que cada uno de sus pares ordenados está en $A\times B$

* Del diagrama sagital :



Al conjunto **A** se le llama conjunto de partida y al conjunto **B** conjunto de llegada.

* Al conjunto de las primeras componentes de los pares ordenados que definen a la relación se llamará dominio de la relación y al conjunto de las segundas componentes se llamará rango y denotamos como :

Dom R → dominio

Rang R → rango

* De donde : $Dom\ R \subseteq A$

$Rang R \subseteq B$

* En el ejemplo anterior :

Conjunto de partida : {*2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 4*}

Conjunto de llegada : {*–1 ; 3 ; 5 ;–9*}

$Dom\ R = \{2 ; 7\}$

$Rang\ R = \{-1 ; 3 ;-9\}$

EJEMPLO 2 :

En el conjunto :

$A = \{9 ;8 ; 7 ; 6 ; 5 ; 4 ; 3 ; 2 ; 1\}$

Establecemos las siguientes relaciones:

* «*a*» es el doble de «*b*»

* «*a*» es igual a «*b*»

Escribir los pares que cumplen las relaciones respectivamente:

RESOLUCIÓN :

Sea :

R_1={(*a ; b*) / «*a*» *es doble de* «*b*»}

$\rightarrow R_1=\{(2 ; 1), (4 ;2), (6 ;3), (8 ;4)\}$

R_2={(*a ; b*) / «*a*» *es igual a* «*b*»}

$\rightarrow R_2=\{(1;1),(2;2),(3;3),(4;4),(5;5),(6;6),(7;7),(8;8),(9;9)\}$

EJEMPLO 3 :

Sean : $A=\{2 ; 3\}$ y $B=\{1 ; 2\}$

$A\times B=\{(2 ;1), (2 ;2), (3;1), (3;2)\}$

Hallar todas las relaciones que se pueden formar de *A* en *B*.

RESOLUCIÓN :

* Lo que se pide es hallar todos los subconjuntos de $A\times B$. Como $A\times B$ tiene *4* elementos, entonces debe tener $2^4=16$ subconjuntos. En la siguiente tabla se

presentan estos subconjuntos :

Subconjunto con 0 elementos	Subconjuntos con 1 elemento	Subconjuntos con 2 elementos	Subconjuntos con 3 elementos	Subconjuntos con 4 elementos
{ }	{(2;1)}	{(2;1),(2;2)}	{(2;1),(2;2),(3;1)}	{(2;1),(2;2),(3;1),(3;2)}
	{(2;2)}	{(2;1),(3;1)}	{(2;1),(2;2),(3;2)}	
	{(3;1)}	{(2;1),(3;2)}	{(2;1),(3;1),(3;2)}	
	{(3;2)}	{(2;2),(3;1)}	{(2;2),(3;1),(3,2)}	
		{(2;2),(3;2)}		
		{(3;1),(3;2)}		

EJEMPLO 4 :

Considere una de estas relaciones, por ejemplo:

$$R=\{(2;1),\ (3;1)\}$$

Sean $C = \{1;2;3;4;5;6\}$, $D = \{1;2;3;4\}$ y R la siguiente relación de C en D :

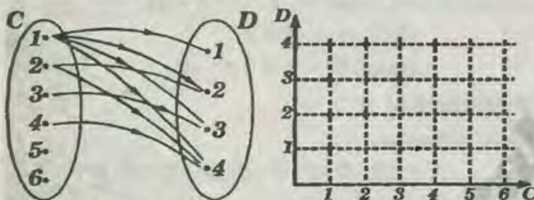
$$R = \{(x;y) \in C \times D / x \text{ es un divisor de } y\}$$

Representar gráficamente R .

RESOLUCIÓN:

$$R=\{(1;1),(1;2),(1;3),(1;4),(2;2),(2;4),(3;3),(4;4)\}$$

DIAGRAMA SAGITAL DIAGRAMA CARTESIANO



EJEMPLO 5 :

¿Cuántas relaciones de A a B se pueden formar si:

$$A = \{3;5;7;15\} \quad B = \{a;b;c\}$$

RESOLUCIÓN :

*Como A tiene 4 elementos y B tiene 3 elementos, entonces, $A\times B$ tiene 4×3 , es decir, 12 elementos ; en consecuencia, $A\times B$ tendrá 2^{12} subconjuntos , lo mismo que 2^{12} relaciones.

*De la definición de una relación R del conjunto A al conjunto B, $R=A \to B$ el conjunto A se llama conjunto de partida y el conjunto B de llegada.

EJEMPLO 6 :

Sea : $M = \{(2;3), (7;4), (1;1), (2;4), (8;4)\}$

Calcular : $R = \{(x;y) \in M / x + y \leq 6\}$

RESOLUCIÓN:

* Será el conjunto de todos los pares de la forma:

$$\{(x,y) / x + y < 6\}$$

* Entonces: $R = \{(2;3), (1;1), (2;4)\}$

EJEMPLO 7:

Sea $N = \{(3;4), (\sqrt{21}; 2), (3;5), (4;3)\}$

Halle la relación $R=\left\{(a;b)\in N/\sqrt{a^2+b^2}=5\right\}$

RESOLUCIÓN :

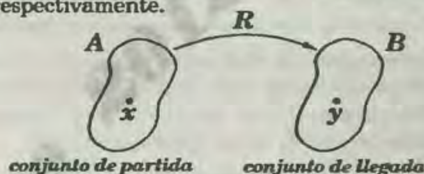
Se quiere el conjunto de los pares ordenados de la forma $(a;b)\in N/\sqrt{a^2+b^2}=5$

*Luego : $R = \{(3;4), (\sqrt{21}; 2), (4;3)\}$

*Vemos que cada par ordenado cumple la propiedad requerida $(\sqrt{a^2+b^2}=5)$

CONJUNTO DE PARTIDA y CONJUNTO DE LLEGADA

Si R es una relación de A en B, llamaremos conjunto de partida y conjunto de llegada a los conjuntos A y B , respectivamente.



$$\boxed{R=\{(x,y)/x\in A \wedge y\in B\}}$$

DOMINIO DE UNA RELACIÓN

El dominio de una relación es el conjunto de todas las primeras componentes de los pares ordenados que definen a la relación.

Notación : $Dom\ R$ = dominio de R

$$\boxed{Dom R=\{a\in A/(a;b)\in R\}}$$

* O también:

$$\boxed{Dom(R)=\{x\in A/\exists\ y\in B,(x;y)\in R\}}$$

RANGO DE UNA RELACIÓN

El rango de la relación, llamado tambien imagen del dominio o conjunto de imágenes de los elementos del dominio , es el conjunto de las segundas componentes de los pares ordenados que definen a la relación.

NOTACIÓN :

Ran R = rango de la relación

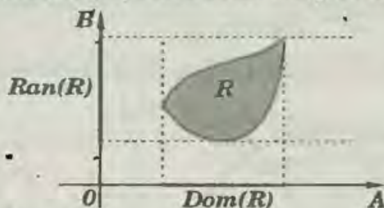
$$\boxed{Ran R=\{b\in B/(a;b)\in R\}}$$

* O también :

$$Ran(R)=\{y\in B/\ \exists\ x\in A,(x;y)\in R\}$$

En forma gráfica podemos representar estos

conjuntos como sigue ; si R representa la gráfica de la relación , la proyección sobre los ejes resulta :



EJEMPLO 1 :

Dada la relación :

$R = \{(1;1),(1;3),(2;3),(3;5),(4;7)\}$

Entonces :

$Dom(R) = \{1; 2; 3; 4\}$

$Ran(R) = \{1; 3; 5; 7\}$

EJEMPLO 2 :

Sean los conjuntos :

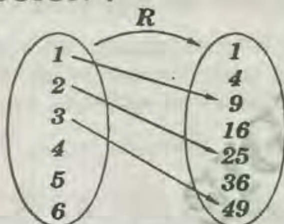
$A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$

$B = \{1; 4; 9; 16; 25; 36; 49\}$

$R = \{(x; y) / y = (2x + 1)^2\}$

Halle su dominio y su rango

RESOLUCIÓN :



*De donde : $Dom\ R = \{1;2;3\}$

$Ran\ R = \{9;25;49\}$

CLASES DE RELACIONES

I) RELACIÓN REFLEXIVA :

Una relación es reflexiva cuando todo elemento del conjunto A está relacionado consigo mismo, es decir, si $a \in A \Rightarrow (a;a) \in \mathbb{R}$.

* Formalmente :

Una relación R se dirá reflexiva si y sólo si

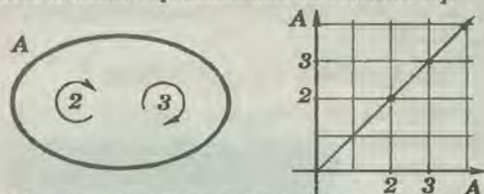
$$(a,a) \in \mathbb{R}, \forall a \in A, R : A \to A$$

EJEMPLO :

Dados $A = \{2; 3\}$ y su producto : $A \times A = \{(2;2),(2;3),(3;2),(3;3)\}$, establecemos las relaciones R_1 y R_2 definidas por «$a = b$» y «$a \neq b$» respectivamente.

$R_1 = \{(2;2),(3;3)\}$ R_1 es reflexiva $R_2 = \{(2;3),(3;2)\}$ R_2 no es reflexiva porque $(2;2)$ y $(3;3)$ no pertenece a R_2

Observa cómo representamos la relación R_1.



* Una relación R es reflexiva en un conjunto A cuando todos los pares de $A \times A$ cuyos componentes son iguales y pertenecen a R.

* Una relación es reflexiva cuando en su diagrama de flechas todos los elementos tienen un lazo (◯) y en su diagrama cartesiano todos los elementos de la diagonal están señalados.

CONCLUSIÓN :

$$\boxed{R \text{ es reflexiva en } A \Leftrightarrow \forall a \in A, (a,a) \in \mathbb{R}}$$

EJEMPLO :

Si $A = \{1;2;3\}$ las relaciones en A

* $R_1 = \{(1;1), (2;2), (3;3)\}$ es reflexiva en A

* $R_2 = \{(1;1), (2;2)\}$ no es reflexiva en A porque falta $(3;3)$

II) RELACION SIMÉTRICA :

Una relación R en A , diremos que es simétrica si $(a; b) \in R$ implica que $(b; a) \in R$, esto es:

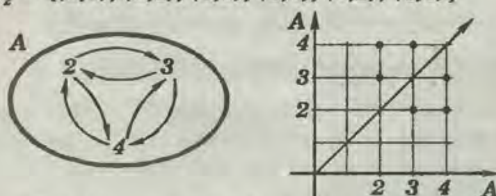
$$\boxed{R \text{ es simétrica} \Leftrightarrow \forall (a;b) \in R \Rightarrow (b;a) \in R}$$

EJEMPLO 1 :

Dados $A = \{2; 3; 4\}$ y su producto

$A \times A = \{(2;2), (2;3), (2;4), (3;2), (3;3), (3;4), (4;2), (4;3), (4;4)\}$, establecemos la relación "$a \neq b$" y la graficamos:

$R_2 = \{(2;3), (2;4), (3;2), (3;4), (4;2), (4;3)\}$



* En el diagrama de flechas de una relación simétrica todos los pares están unidos por flechas dobles y en el diagrama cartesiano los puntos correspondientes a esta relación son simétricos.

EJEMPLO 2 :

Si $A = \{2; 4; 6\}$

* $R_1 = \{(2;2), (4;2), (6;2), (2;4), (2;6)\}$ es simétrica porque $(x;y) \in R_1 \Rightarrow (y;x) \in R_1$

* $R_2 = \{(2;4), (4;6), (6;4)\}$ no es simétrica porque falta $(4;2)$

III) RELACION TRANSITIVA :

Una relación es transitiva siempre que si un elemento está relacionado con un segundo y éste con un tercero, el primero está relacionado con el tercero.

Es decir una relación R en A, diremos que es transitiva si: $(a;b) \in R \wedge (b;c) \in R$ implica que $(a;c) \in R$ esto es:

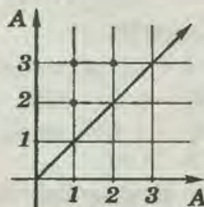
$$R \text{ es transitiva} \Leftrightarrow \forall a;b;c \in A, [(a;b) \in R \wedge (b;c) \in R \Rightarrow (a;c) \in R]$$

EJEMPLO 1:

Dado $A = \{1;2;3\}$ establecemos en él la relación definida por «$a < b$» y la graficamos.

$$R = \{(1;2),(2;3),(1;3)\}$$





* Si en una relación transitiva hay dos flechas consecutivas, siempre hay una tercera flecha que une el origen de la primera con el extremo de la segunda.

EJEMPLO 2 :

Si $A = \{1;3;7;9\}$ las relaciones en A.

* $R_1 = \{(1;7),(3;3),(7;9),(1;9)\}$ es transitiva porque $(1;7) \in R_1 \wedge (7;9) \in R_1 \Rightarrow (1;9) \Rightarrow R_1$

* $R = \{(7;1),(3;3), (1;3)\}$ no es transitiva porque $(7;1) \in R_2 \wedge (1;3) \in R_2$ pero $(7;3) \notin R_2$

IV) RELACIÓN ANTISIMÉTRICA :

Una relación binaria es antisimétrica si para todo $(a;b) \in R$ y $a \neq b$, si "a" está relacionado con "b", entonces "b" no está relacionado con "a".

FORMALMENTE :

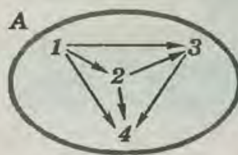
Una relación R en A, diremos que es antisimétrica si : $\forall a;b \in A (a;b) \in R$ y $(b;a) \in R$ implica que $a=b$, esto es:

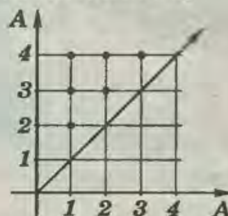
$$R \text{ es antisimétrica} \Leftrightarrow \forall a;b \in A [(a;b) \in R \wedge (b;a) \in R \Rightarrow a=b]$$

EJEMPLO 1:

Dado $A = \{1;2;3;4\}$, establecemos la relación a R b: $b-a \in A$" y la graficamos.

$$R = [(1;2),(1;3),(1;4),(2;3),(2;4),(3;4)]$$





* En el diagrama de flechas de una relación antisimétrica no hay ningún par de elementos unidos por flechas dobles y en el diagrama cartesiano ningún punto es simétrico a otro.

EJEMPLO 2 :

$R = \{(2;3);(2;1)\}$ es antisimétrica puesto que $(2;3) \in R \wedge (3;2) \notin R$.

CONCLUSIÓN :

Una relación $R : A \rightarrow A$ es antisimétrica siempre que $(a;b) \in R$ con $a \neq b \Rightarrow (b;a) \notin R$.

V) RELACIÓN DE EQUIVALENCIA :

Una relación R en un conjunto no vacío A, es una «relación de equivalencia» en A, si en forma simultánea satisface las siguientes condiciones:

I) R es ***Reflexiva***: $\forall a \in A ;(a;a) \in R$

II) R es ***Simétrica:*** $(a;b) \in R \rightarrow (b;a) \in R$

III) R es ***Transitiva*** :

$$[(a;b) \in R \wedge (b;c) \in R] \rightarrow (a;c) \in R$$

* Es decir:

*Una relación R en A, diremos que es de equivalencia si es **reflexiva**, **simétrica** y **transitiva**.*

EJEMPLO 1 :

Dados : $A = \{a;b;c;d\}$ y

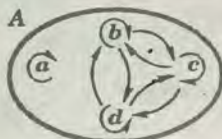
$$ARA = \{(a;a);(b;b);(b;c);(b;d);(c;b);(c;c);(c;d);(d;b);(d;c);(d;d)\}$$, ***observamos :***

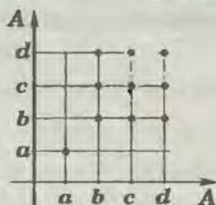
$(a;a) \in R, \forall a \in A$ ....*(propiedad reflexiva)*

$(a;b) \in R, (b;a) \in R, \forall a,b \in A$.......*(propiedad simétrica)*

$(a;b) \in R, (b;c) \in R, \Rightarrow (a;c) \in R, \forall a,b,c \in A$....*(propiedad transitiva).*

* La relación $R : A \rightarrow A$ es una relación de equivalencia porque cumple con las tres propiedades.





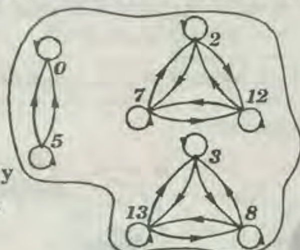
EJEMPLO 2 :

Sean $A = \{0; 2; 3; 5; 7; 8; 12; 13\}$ y

$R = \{(x;y) \in A \times A \ / \ x - y$ es divisible por $5\}$. Hallar R como un conjunto de pares ordenados, hacer el diagrama sagital de R y determinar si R es o no relación de equivalencia.

RESOLUCIÓN :

$R = \{(0;0);(0;5);(2;2);(2;7);(2;12);(3;3);(3;8);(3;13);$
$(5;0);(5;5);(7;2);(7;7);(7;12);(8;3);(8;8);(8;13);$
$(12;2);(12;7);(12;12);(13;3);(13;8);(13;13)\}$



R es:
* ***reflexiva***
* ***simétrica*** y
* ***transitiva***

Luego R es una relación de equivalencia.

CLASIFICACIÓN

Toda relación R de equivalencia definida sobre un conjunto A, determina en él clases de equivalencia, es decir, define una clasificación en ese conjunto.

Dado el conjunto

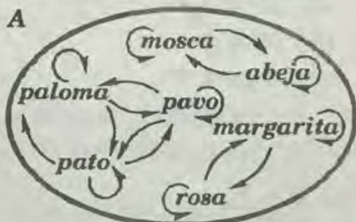
$A=\{$*paloma, mosca, margarita, rosa, pato, pavo, abeja*$\}$,

determinamos en él la relación R definida como «... es de la misma especie...» y la graficamos:

$A_1 = \{$***paloma, pato, pavo***$\}$ ....***(aves)***

$A_2 = \{$***mosca, abeja***$\}$ ....***(insectos)***

$A_3 = \{$***margarita, rosa***$\}$ ....***(flores)***



Las clases de equivalencia tienen las siguientes propiedades:

* Ninguna clase es el conjunto vacío :

$$A_1 \neq \varnothing,\ A_2 \neq \varnothing,\ A_3 \neq \varnothing$$

* Las clases son disjuntas dos a dos :

$$A_1 \cap A_2 = \varnothing,\ A_1 \cap A_3 = \varnothing,\ A_2 \cap A_3 = \varnothing$$

* La unión de todas las clases de equivalencia forma el conjunto A : $A_1 \cup A_2 \cup A_3 = A$

CONJUNTO COCIENTE :

Conjunto cociente es el conjunto que tiene por elementos cada una de las clases de una clasificación.

EJEMPLO :

Tomamos la relación de equivalencia anterior R de A en A, y la representamos : $A/R = \{A_1, A_2, A_3\}$



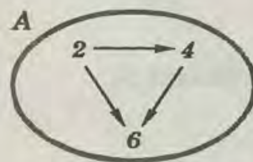
RELACIÓN DE ORDEN ESTRICTO

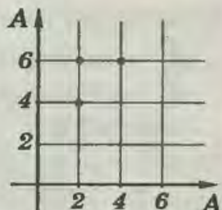
Una relación es de orden estricto cuando cumple sólo las propiedades antisimétrica y transitiva.

EJEMPLO :

Establecemos la relación R en el conjunto $A=\{2;4;6\}$ definida por «$a < b$» y la graficamos:

$R=\{(2;4),\ (4;6),\ (2;6)\}$





Observa que se cumple las propiedades antisimétrica y transitiva . Por lo tanto la relación es de orden estricto.

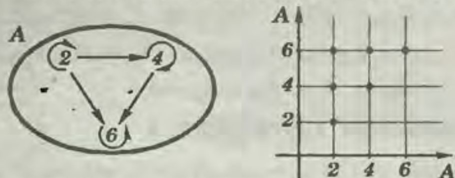
RELACIÓN DE ORDEN Y ORDEN TOTAL

Una relación ***es de orden*** cuando cumple las propiedades ***reflexiva, antisimétrica*** y ***transitiva.*** Además , una relación es de orden total cuando todos sus elementos están relacionados entre sí.

EJEMPLO :

Dado $A=\{2;4;6\}$ establecemos en él la relación R definida por « $a < b$ »

$$R = \{(2;2), (2;4), (2;6), (4;4), (4;6), (6;6)\}$$



Observa que se cumplen las propiedades reflexiva, antisimétrica y transitiva. Por lo tanto, la relación es de orden.

RELACIÓN INVERSA :

Dada una relación R de A en B, se llama relación inversa de R y se denota R^{-1} a la relación de B en A.

$$\boxed{R^{-1} = \{(y;x) \in B \times A / (x;y) \in R\}}$$

O sea:

$$\boxed{(y;x) \in R^{-1} \Leftrightarrow (x;y) \in R}$$

EJEMPLO 1 :

Dados los conjuntos:

$$A = \{0;1;2\},\ B = \{0;2;4;6\}$$

y las relaciones:

$R_1 : A \to B \ / R_1=\{(0;2),(2;4)\}$

$R_2 : A \to B \ / R_2=\{(0;2),(2;4),(2;2),(2;6),(1;0)\}$

Determinar :

$$R_1^{-1} \qquad\qquad R_2^{-1}$$

RESOLUCIÓN :

$R_1^{-1} = \{(2;0),(4;2)\}$

$R_2^{-1} = \{(2;0),(4;0),(2;2),(6;2),(0;1)\}$

EJEMPLO 2 :

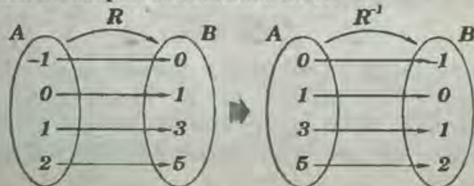
Sea R la relación definida por :

$$R=\{(-1;0),(0;1),(1;3),(2;-5)\}$$

Su relación inversa R^{-1} es :

$$R^{-1} = \{(0;-1),(1;0),(3;1),(-5;2)\}$$

Observamos que R^{-1} se obtiene con sólo invertir el orden de los pares ordenados de R.



PROPIEDADES DE LA RELACIÓN INVERSA

Dadas las relaciones R_1, R_2, tal que :

$R_1: A \to B$ y $R_2: A \to B$ se cumple:

I) $dom(R_1) = ran(R_1^{-1})$

II) $ran(R_1) = dom(R_1^{-1})$

III) $\left(R_1^{-1}\right)^{-1} = R_1$

IV) $(R_1 \cup R_2)^{-1} = R_1^{-1} \cup R_2^{-1}$

IV) $(R_1 \cap R_2)^{-1} = R_1^{-1} \cap R_2^{-1}$

IV) $(R_1 - R_2)^{-1} = R_1^{-1} - R_2^{-1}$

RELACIÓN COMPUESTA

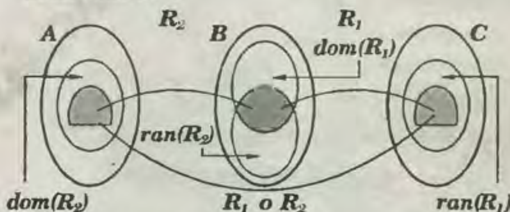
Dadas las relaciones :

$$R_1: B \to C \ \text{ y } \ R_2: A \to B$$

Se llama relación compuesta de R_2 y R_1 y se denota $R_1 \circ R_2$, a la relación de A, en C, tal que :

$$\boxed{R_1 \circ R_2 = \{(x;z) \in A \times C / \exists\, y \in B, (x;y) \in R_2 \wedge (y;z) \in R_1\}}$$

* Graficamente :



OBSERVACIONES :

I) $R_1 \circ R_2 \neq \phi$ siempre que :

$$dom(R_1) \cap ran(R_2) \neq \phi$$

II) $(x;y) \in R_2 \wedge (y;z) \in R_1 \mapsto (x;z) \in R_1 \circ R_2$

III) La composición de relaciones no es conmutativa.

EJEMPLO 1 :

Sean los conjuntos :

$$A = \{1; 2; 3; 4\}$$
$$B = \{1; 3; 5; 7\}$$
$$C = \{0; 2; 4; 6\}$$

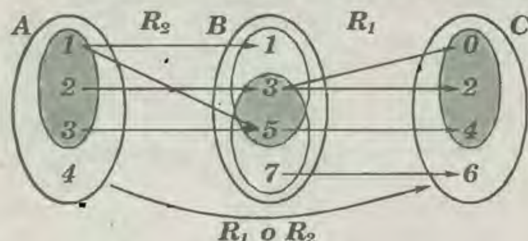
$R_1: B \to C \ / \ R_1=\{(3;0),(3;2),(5;4),(7;6)\}$

$R_2: A \to B \ / \ R_2=\{(1,1),(1;5),(2;3),(3;5)\}$

Determinar : $R_1 \circ R_2$

RESOLUCIÓN :

* Graficamente :



* Del gráfico deducimos :

$dom(R_1) \cap ran(R_2) = \{3;5\} \rightarrow R_1 \text{ o } R_2 = \phi$

* Los elementos de R_1 o R_2 son :

$(1;5) \in R_2 \wedge (5;4) \in R_1 \rightarrow (1;4) \in R_1 \text{ o } R_2$

$(2;3) \in R_2 \wedge (3;0) \in R_1 \rightarrow (2;0) \in R_1 \text{ o } R_2$

$(2;3) \in R_2 \wedge (3;2) \in R_1 \rightarrow (2;2) \in R_1 \text{ o } R_2$

$(3;5) \in R_2 \wedge (5;4) \in R_1 \rightarrow (3;4) \in R_1 \text{ o } R_2$

$\rightarrow R_1 \text{ o } R_1 = \{(1;4),(2;0),(2;2),(3;4)\}$

EJEMPLO 2 :

Sean las relaciones:

$R = \{(1;2),(3;4),(2;5),(1;3),(2,0)\}$

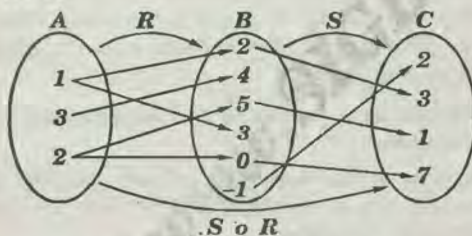
$S = \{(-1;2),(2;3),(5;1),(0;7)\}$

Halle :

I) S o R *II)* R o S

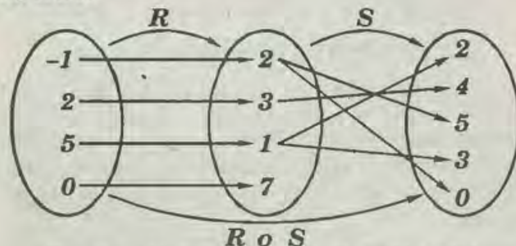
RESOLUCIÓN :

I) S o R



$S \text{ o } R = \{(1;3),(2;1),(2;7)\}$

II) R o S



$R \text{ o } S = \{(-1;5),(-1;0),(2;4),(5;2),(5;3)\}$

* Algebraicamente , se define la composición de relaciones :

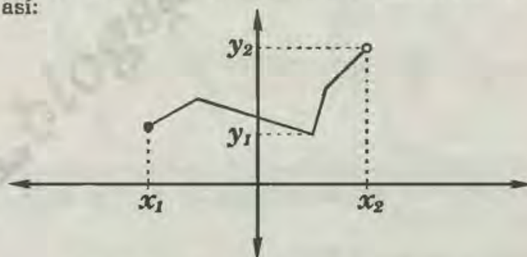
$$R \text{ o } S = \begin{cases} * \, Dom R o S = \{x \in Dom\, S \wedge S(x) \in Dom R\} \\ * \, (R \text{ o } S)(x) = R(S(x)) \end{cases}$$

RELACIONES DEFINIDAS EN LOS REALES ($\mathbb{R}$)

Para el estudio de las relaciones definidas en los reales es de gran ayuda la gráfica de las mismas en el plano cartesiano; para esto se puede aplicar las siguientes recomendaciones dependiendo de la dificultad de la gráfica.

I) Como R tiene infinitos elementos para esbozar su gráfica se determinan algunos pares de la misma mediante una tabla, para esbozar la tendencia de la gráfica.

Una vez realizado el bosquejo de la gráfica se puede determinar el dom(R) proyectando la gráfica al eje «X» y el ran(R) proyectando la gráfica al eje «Y»; así:



$dom(R) = [x_1; x_2\rangle \quad ran(R) = [y_1; y_2\rangle$

II) Algunas veces es recomendable determinar analíticamente el:

* $dom(R)$, para esto, se despeja "y" en función de «x» y se determina las restricciones de «x» para que $y \in \mathbb{R}$

* ran(R), para esto, se despeja «x» en función de «y» y se determina las restricciones de «y» para que $x \in \mathbb{R}$

Una vez determinado el dom(R) y el ran(R) se determina si la gráfica corta al eje X haciendo, $y=0$ o al eje Y haciendo , $x = 0$, determinando otros pares de la misma mediante una tabla, para esbozar la tendencia de la gráfica.

EJEMPLO :

Esbozar la gráfica e indicar dominio y rango.

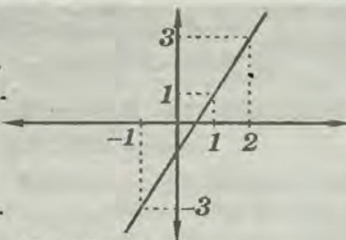
$$R_1 = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 / y = 2x - 1\}$$

RESOLUCIÓN :

I) Determinemos algunos elementos de la relación R_1 mediante la tabla.

Así :

x	y
0	–1
–1	–3
1	1
2	3

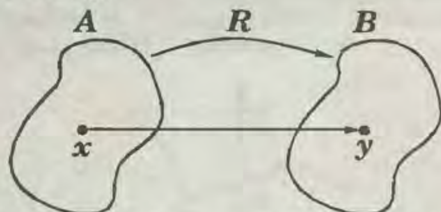


II) De la gráfica , tenemos:

$$Dom(R_1) = \mathbb{R} \quad ran(R) = \mathbb{R}$$

REGLA DE CORRESPONDENCIA

Es una representación algebraica que define la relación existente entre los elementos del dominio y las del rango.



De lo anterior se afirma que "y" es una relación de "x" o "y "es una dependencia de "x". Se denota por : $y = R(x)$

se lee: «y es igual a *R* de *x*».

EN GENERAL :

La regla de correspondencia de la relación *R* es:

$$R = \{(x;y)/\ y = R(x)\}$$

EJEMPLO :

Graficar :

$$R = \{(x;y)/y = 2x - 1\ x \in [-2;3\rangle\}$$

RESOLUCIÓN :

*Es una relación cuyo dominio es $[-2;3\rangle$, su rango puede hallarse a partir de su dominio, así:

$$-2 \le x < 3 \Rightarrow -4 \le 2x < 6 \Rightarrow -5 \le 2x - 1 < 5$$

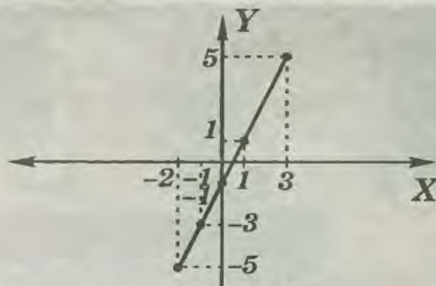
$$\Rightarrow RangR = [-5;5\rangle$$

Tabulando una cantidad significativa de puntos veremos que su gráfica es una línea recta.

Tomemos algunos puntos:

x	–2	–1	0	1	2	3
y	–5	–3	–1	1	3	5

* En el plano cartesiano :



GRÁFICA DE RELACIONES EN $\mathbb{R}$ DEFINIDAS POR UNA ECUACIÓN :

La representación geométricas de todos los pares ordenados *(x ;y)* se llama plano cartesiano o sistema de coordenadas cartesianas, y se denota por $\mathbb{R}^2$.

$$\mathbb{R}^2 = \{(x;y)/x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R}\}$$

Se establece una relación buinívoca entre cada punto del plano cartesiano y cada par *(x ; y)* de $\mathbb{R}^2$ en el siguiente sentido: «*A* cada punto *P* del plano cartesiano le corresponde un único par *(x; y)* y, recíprocamente, a cada par *(x ; y)* de $\mathbb{R}^2$ le corresponde un único punto en el plano cartesiano.

RELACIONES LINEALES EN DOS VARIABLES

Una relación que se puede escribir en la forma $Ax+By = C$, donde *A* , *B* y *C* son números reales, con *A* y *B* no simultáneamente cero, es una ecuación lineal en dos variables.

La relación $2x + y = 23$ es una ecuación lineal en dos variables.

* La tabla muestra algunos pares ordenados de números que convierten la ecuación en una proposición verdadera :

x	y	2x + y = 23
1	21	$2(1)+21 = 2+21=23$
5	13	$2(5)+13=10+13=23$
7	9	$2(7)+ 9=14+ 9=23$

Todo par ordenado de números reales que convierte una ecuación lineal en dos variables en una proposición verdadera es una solución de la ecuación.

EJEMPLOS :

Determinar si el par ordenado *(2 ; 1)* es una solución de la ecuación lineal $5x - 2y = 8$.

RESOLUCIÓN :

* Se reemplaza $x = 2$ y $y = 1$ en la ecuación

$5x - 2y = 8.$

$5(2) - 2(1) = 10 - 2 = 8.$

* Luego : $(2 ; 1)$ es una solución de la ecuación $5x - 2y=8$

OBSERVACION :

El conjunto solución de la ecuación :

$2x + 5y = 40$ se puede expresar así :

$$\{(x;y) / 2x + 5y = 40\}$$

Sin embargo , algunas veces cuando se usa esta notación conjuntista , la ecuación dada se reemplaza por una ecuación equivalente en la que una de las variables se expresa en términos de la otra. Como la ecuación $2x + 5y=40$ es equivalente a la ecuación $y=8-\frac{2}{5}x$,entonces el conjunto solución de la ecuación :

$2x + 5y = 40$, se puede expresar como:

$$\left\{(x;y)/y=8-\frac{2}{5}x\right\}$$

GRÁFICAS DE LAS ECUACIONES LINEALES EN DOS VARIABLES

La gráfica de una ecuación en dos variables es la representación en el plano cartesiano del conjunto de puntos que corresponden a los pares ordenados que son soluciones de la ecuación.

EJEMPLOS :

Trazar la gráfica de $2x+y= 3$ en el plano cartesiano.

RESOLUCIÓN :

* En primer lugar se resuelve para y. Después se hace una tabla de valores.

$2x + y = 3$

$y = 3 - 2x$

si $x = 0;\ y = 3$

si $y = 0;\ x = \frac{3}{2}$

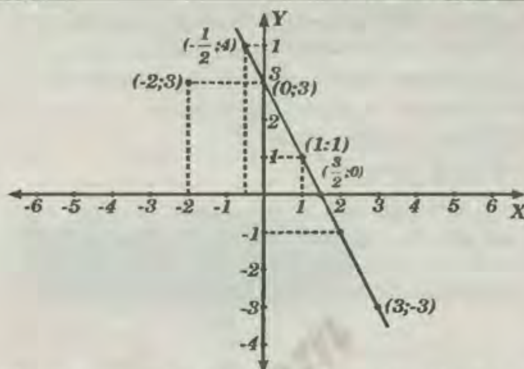
si $x = 1;\ y = 1$

si $x = -\frac{1}{2};\ y = 4$

si $x = 2;\ y = -1$

x	y
0	3
$\frac{3}{2}$	0
1	1
$-\frac{1}{2}$	4
2	-1

Se representan estos puntos en un plano cartesiano y se unen porque x e y pueden tomar cualquier valor real. Así:



Observe que : $(0; 3)$ está también en la recta y que $(0; 3)$ es una solución de $2x + y = 3$. Si la gráfica de una ecuación es una recta, entonces las coordenadas de cada punto de la recta son solución de la ecuación.

EN GENERAL:

Si A , B y C son números reales, con A y B no simultáneamente cero, entonces la gráfica de cualquier ecuación de la forma $Ax + By = C$ es una recta.

Similarmente toda recta en el plano cartesiano tiene una ecuación de forma $Ax + By = C$ que es una ecuación lineal en dos variables.

OTROS EJEMPLOS :

I) Trazar la gráfica de $y = -3$

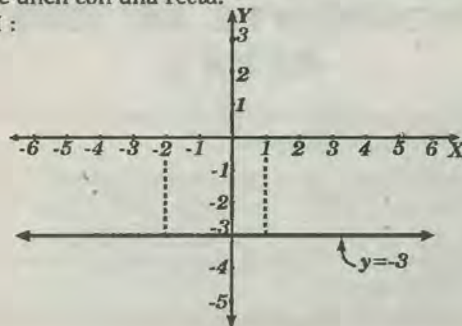
RESOLUCIÓN :

La ecuación $y = -3$ se puede escribir como $0x+y= -3$. Se usa esta ecuación para hacer una tabla de valores.

x	y
0	-3
1	-3
-2	-3

Se representan estos puntos en el plano cartesiano y se unen con una recta.

Así :



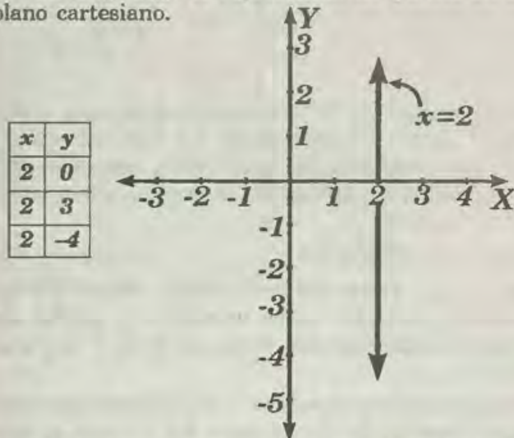
La gráfica es una recta horizontal, paralela al eje X, trazada 3 unidades debajo del eje X.

Para cada punto en la recta, la coordenada y es -3 y la coordenada x es un número real.

II) Trazar la gráfica $x = 2$.

RESOLUCIÓN :

* La ecuación $x = 2$ se puede escribir como $x + 0y = 2$. Se usa esta ecuación para hacer una tabla de valores y luego se representan los puntos en el plano cartesiano.



x	y
2	0
2	3
2	–4

La gráfica es una recta vertical, paralela al eje Y, trazada 2 unidades a la derecha del eje Y. Para cada punto en la recta la coordenada x es 2 y la coordenada y es un número real. En general:

* La gráfica de una ecuación de la forma $By = C$ ó $y = \frac{C}{B}$, donde $B \neq 0$, es una recta horizontal, paralela al eje X.

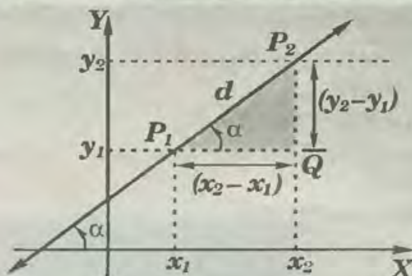
* La gráfica de una ecuación de la forma $Ax = C$ ó $x = \frac{C}{A}$, donde $A \neq 0$, es una recta vertical, paralela al eje Y.

PENDIENTE DE UNA RECTA

La pendiente de una recta es un número que indica la inclinación de la recta.

Para encontrar la pendiente de una recta (no vertical) en el plano, se escogen dos puntos en la recta y se encuentra el cociente : diferencia de las coordenadas y, dividida por la diferencia de las coordenadas x.

Usualmente se representa mediante la letra «m».



$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Si se conoce a la pendiente m; el ángulo de inclinación se calcula mediante:

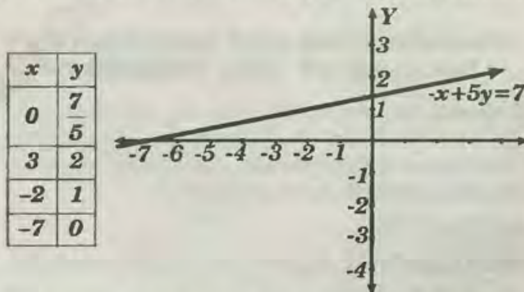
$$\alpha = arc\ tan(m)$$

EJEMPLO :

Trazar la gráfica de $-x + 5y = 7$ y encontrar su pendiente.

RESOLUCIÓN :

Se hace una tabla de valores y se traza la gráfica :



x	y
0	$\frac{7}{5}$
3	2
–2	1
–7	0

* Se escogen dos puntos cualesquiera de la recta, digamos $\left(0;\frac{7}{5}\right)$ y $(-2;1)$ y se usa la fórmula de la pendiente

$$\rightarrow m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1 - \frac{7}{5}}{-2 - 0} = \frac{-\frac{2}{5}}{-2} = \frac{1}{5}$$

* Observe que la recta interseca al eje X en el punto $(-7;0)$ y al eje Y en el punto $\left(0;\frac{7}{5}\right)$.

NOTA:

El y–intersecto de una recta es la coordenada «y» del punto dónde interseca el eje Y. El x – intersecto es la coordenada x del punto donde la recta interseca el eje X.

EJEMPLO :

Encontrar el x y y – ***intersectos*** de la recta

$2x + 6y = 12$ y usarlos para trazar la gráfica.

RESOLUCIÓN :

* Para hallar el *x – intersecto* se toma $y = 0$, así :

$2x + 6(0) = 12$

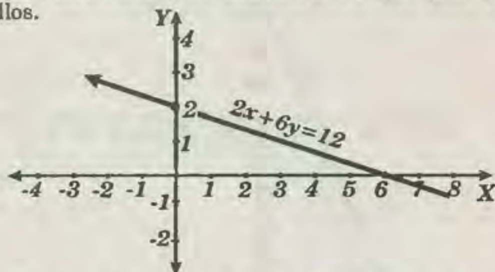
$\rightarrow 2x = 12 \rightarrow x = 6$

* Para hallar el *y – intersecto* se toma $x = 0$, así:

$2(0) + 6y = 12$

$\rightarrow 6y = 12 \Rightarrow y = 2$

* Se representan los puntos *(6; 0) y (0; 2)* en un plano cartesiano y se traza la recta que pasa por ellos.



FORMA EXPLÍCITA DE LA ECUACIÓN DE UNA RECTA

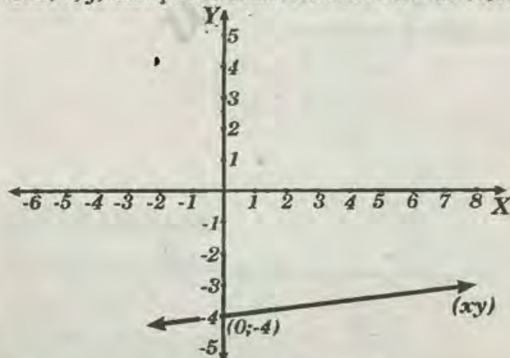
Nuestro objetivo en esta parte es obtener la ecuación de una recta, es decir asociarle a dicha figura geométrica una ecuación matemática. Empezaremos por hallar las ecuaciones de aquellas rectas las que su ubicación sean fáciles de deducir para finalmente hacer una generalización.

EJEMPLO 1:

Encontrar la ecuación de la recta con pendiente $\frac{1}{8}$ y *y-intersecto – 4*.

RESOLUCIÓN :

* Sea $(x ; y)$ otro punto de la recta diferente de $(0;4)$.



* Luego : $m = \frac{y-(-4)}{x-0} \Rightarrow \frac{1}{8} = \frac{y+4}{x}$

* Resolviendo esta ecuación para y se obtiene:

$$y + 4 = \frac{1}{8}x \rightarrow y = \frac{1}{8}x - 4$$

*Observe que en la ecuación $y = \frac{1}{8}x - 4$, el coeficiente de x es igual a la pendiente y el término constante es el *y – intersecto.*

* *EN GENERAL:*

Si una recta tiene pendiente *m* , *y – Intersecto* b, y *(x; y)* es otro punto de la recta diferente del *y–intersecto (0; b)*, entonces una ecuación de la recta es:

$$\boxed{\frac{y-b}{x} = m} \quad \text{ó} \quad \boxed{y = mx + b}$$

* La forma explícita de la ecuación de una recta es $y = mx + b$. La pendiente es m y el *y – intersecto* es b.

EJEMPLOS :

I) La pendiente de una recta es $\frac{1}{8}$ y el *y-intersecto* es -4. Escribir la ecuación de la recta en forma explícita.

RESOLUCIÓN :

$m = \frac{1}{8}$, y , $b = -4$. La ecuación $y = mx + b$ queda entonces : $y = \frac{1}{8}x - 4$

II) Escribir la ecuación $-3x + 5y = 15$ en forma explícita y dibujar su gráfica.

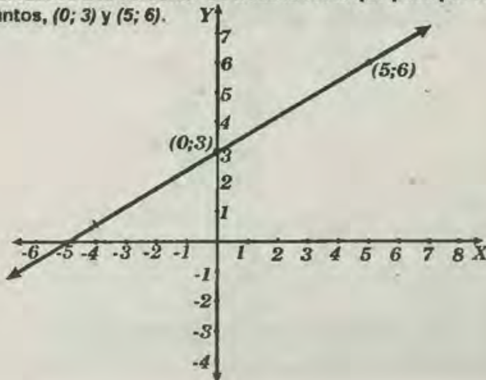
RESOLUCIÓN:

* Se resuelve para *y*:

$$-3x + 5y = 15 \rightarrow 5y = 3x + 15$$

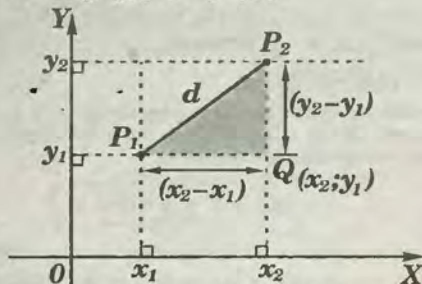
$$\rightarrow y = \frac{3x+15}{5} \rightarrow y = \frac{3}{5}x + 3$$

***La pendiente de la recta es $m = \frac{3}{5}$ y el *y–intersecto* es 3. Así que *(0; 3)* está en la gráfica. Para dibujar la gráfica, se empieza en *(0; 3)*, se suben 3 unidades y después se cuentan 5 unidades a la derecha. Se traza la recta que pasa por los 2 puntos, *(0; 3)* y *(5; 6)*.**



DISTANCIAS ENTRE DOS PUNTOS DEL PLANO

Dado dos puntos cualesquiera en el plano cartesiano, tales como $P_1(x_1;y_1)$ y $P_2(x_2;y_2)$:



En el triángulo rectángulo P_1QP_2 ;

$\overline{P_1P_2}$ =hipotenusa $\overline{P_1Q}$ y $\overline{P_2Q}$ = *catetos*.

Aplicando el Teorema de Pitágoras.

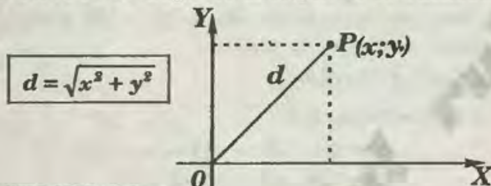
$$d(P_1P_2)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

Que viene a ser la fórmula para calcular la distancia entre dos puntos del plano cartesiano.

CASO PARTICULAR :

La distancia de un punto al origen de coordenadas:

$$d=\sqrt{x^2+y^2}$$



EJEMPLOS :

I) Encontrar la distancia entre *(2; 9)* y *(3; 4)*.

RESOLUCIÓN :

* La distancia *d* está dada por :

$$d=\sqrt{(2-3)^2+(9-4)^2}\rightarrow d=\sqrt{(-1)^2+5^2}=\sqrt{26}$$



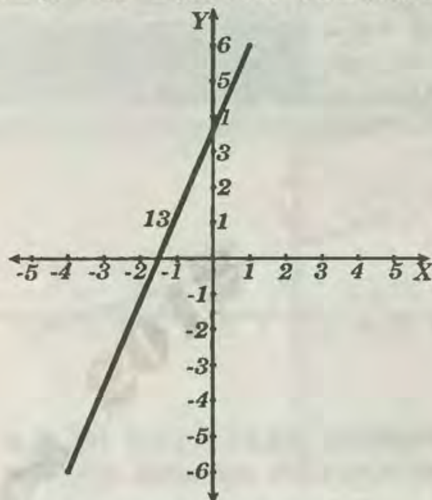
II) Hallar la distancia entre *(1; 6)* y *(–4; –6)*.

RESOLUCIÓN :

* La distancia *d* está dada por:

$$d=\sqrt{[1-(-4)]^2+[6-(-6)]^2}=$$

$$\rightarrow d=\sqrt{5^2+12^2}=\sqrt{25+144}\rightarrow d=\sqrt{169}=13$$



RELACIONES CUADRÁTICAS

Se caracteriza porque una o ambas variables están elevadas al cuadrado, por ejemplo:

$$R_1=\{(x;y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\,/\,y=x^2-2\}$$

$$R_2=\{(x;y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\,/\,x^2+y^2=9\}$$

EJEMPLO 1 :

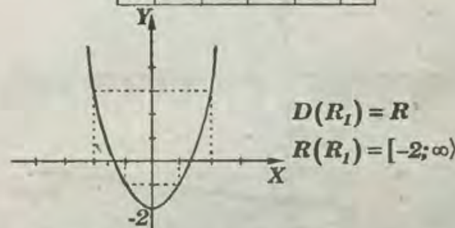
Graficar la relación definida por :

$$R_1=\{(x;y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\,/\,y=x^2-2\}$$

RESOLUCIÓN :

* La tabla de valores es:

x	–2	–1	0	1	2
y	2	–1	–2	–1	2



$D(R_1)=\mathbb{R}$

$R(R_1)=[-2;\infty\rangle$

EJEMPLO 2 :

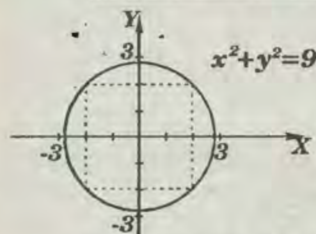
Graficar la relación definida por :

$$R_2 = \{(x;y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} / x^2 + y^2 = 9\}$$

RESOLUCIÓN :

* La tabla de valores es:

x	–3	–2	0	2	3
y	0	± 2,2	± 3	± 2,2	0



$D(R_1) = [-3;3]$
$R(R_1) = [-3;3]$

LA CIRCUNFERENCIA

Una circunferencia es el conjunto de puntos en un plano que están a una distancia dada de un punto fijo. La distancia dada es el radio de la circunferencia y el punto fijo es el centro.



En la figura, C es el centro, r la longitud del radio, P, Q, R, y S puntos de la circunferencia.

EJEMPLOS :

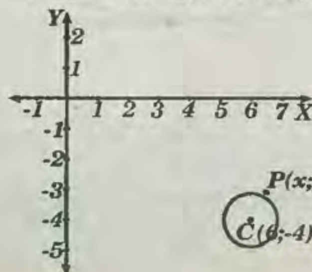
I) Escribir una ecuación de la circunferencia con centro $C(6\,;-4)$ y radio $r = 1$.

RESOLUCIÓN :

*Como C es el centro de la circunferencia un punto $P(x;y)$ está en la circunferencia si y solamente si $CP = 1$. Por la fórmula de la distancia:

$$CP = \sqrt{(x-6)^2 + [y-(-4)]^2}$$

$$\rightarrow CP = \sqrt{(x-6)^2 + (x+4)^2}$$



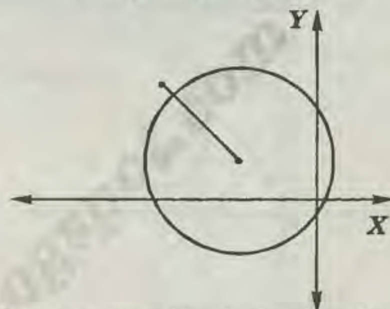
* Por tanto, una ecuación de la circunferencia es:

$$\sqrt{(x-6)^2 + (y+4)^2} = 1 \text{ ó } (x-6)^2 + (y+4)^2 = 1$$

EN GENERAL :

Si el centro de una circunferencia es $C(h;k)$ y el radio es r, un punto $P(x;y)$ está en la circunferencia si y solamente si $CP = r$. Por la fórmula de la distancia.

$$CP = \sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2}$$



Por tanto una ecuación de la circunferencia es $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$. Esta es la forma estándar de la ecuación de la circunferencia con centro $(h;k)$ y radio r. Si el centro es el origen $(0;0)$ la ecuación se simplifica a $x^2 + y^2 = r^2$.

OBSERVACIÓN :

Como existen rectas verticales (paralelas al eje Y) que cortan a la circunferencia en más de un punto, entonces la ecuación de la circunferencia define una relación cuadrática que no es una función.

II) Escribir una ecuación de la circunferencia con centro $(1;6)$ y radio 5.

RESOLUCIÓN :

* Una ecuación es:

$$(x-1)^2+(y-6)^2=5^2 \text{ ó } (x-1)^2 + (y-6)^2 = 25$$

III) Encontrar el centro y el radio de la circunferencia cuya ecuación es:

$$x^2 + y^2 + 2x + 4y = 11$$

RESOLUCIÓN :

* Como la ecuación no está en la forma estándar, para llevarla a esta forma se debe completar el cuadrado:

$$x^2 + y^2 + 2x + 4y = 11$$

$\rightarrow (x^2+2x)+(y^2+4y)=11$

.... Se asocian los términos en x y los términos en y.

$\rightarrow (x^2+2x+1^2)+(y^2+4y+2^2)=11+1^2+2^2$

(se completan los cuadrados)

$\rightarrow (x^2+2x+1)+(y^2+4y+4)=16$

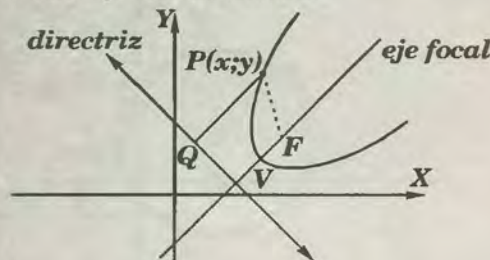
$\rightarrow (x+1)^2+(y+2)^2=16$

$\rightarrow (x-(-1))^2+(y-(-2))^2=4^2$

* Luego, el centro de la circunferencia es $C(-1;-2)$ y el radio es $r = 4$.

LA PARÁBOLA

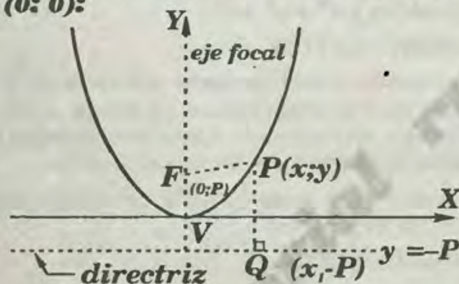
La parábola se define como un conjunto de puntos que equidistan de un punto fijo llamado foco y de una recta fija llamada directriz.



Definición: $\boxed{d(PQ) = d(P;F)}$

F : foco *V : vértice*

PARÁBOLA EN EL EJE Y, CON VÉRTICE EN (0; 0):

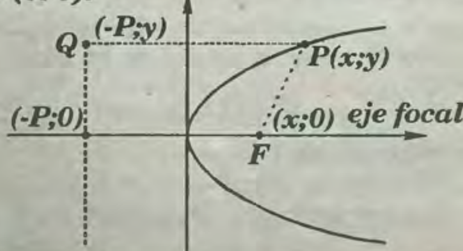


* De la definición : $|d(PF)|^2 = |d(PQ)|^2$

$$x^2 + (y-P)^2 = (x-x)^2 + (y+P)^2$$

* De donde : $\boxed{x^2 = 4Py}$

PARÁBOLA EN EL EJE X, CON VÉRTICE EN (0; 0):

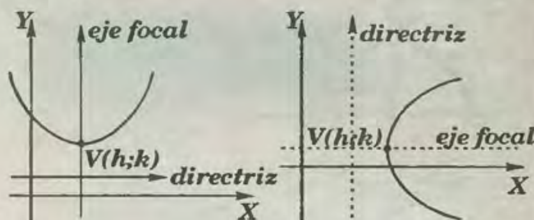


* De la definición : $|d(PQ)|^2 = |d(P;F)|^2$

$$(x+P)^2 + (y-y)^2 = (x-P)^2 + y^2$$

* De donde : $\boxed{y^2 = 4Px}$

PARÁBOLA CON EL VÉRTICE EN (h; k):



$\boxed{(x-h)^2 = 4P(y-k)}$ $\boxed{(y-k)^2 = 4P(x-h)}$

EJEMPLOS:

I) Escribir una ecuación para la parábola con foco $F(0; 5)$ y directriz $y = -5$.

RESOLUCIÓN:

* Un punto $P(x; y)$ está en la parábola si y solamente si $PF = PD$

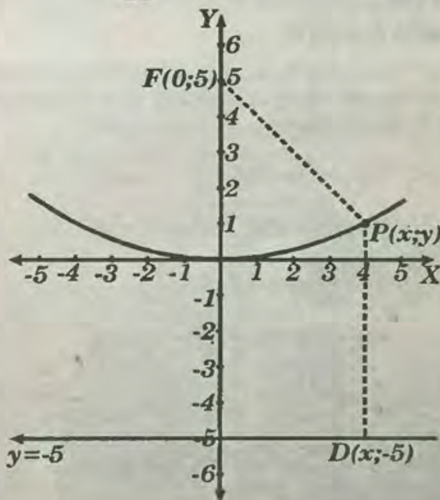
$$\sqrt{(x-0)^2+(y-5)^2} = \sqrt{(x-x)^2+(y+5)^2}$$

$$\rightarrow \sqrt{x^2+(y-5)^2} = \sqrt{(y+5)^2}$$

$$\rightarrow x^2+(y-5)^2 = (y+5)^2$$

$$\rightarrow x^2+y^2-10y+25 = y^2+10y+25$$

$$\rightarrow x^2 = 20y \rightarrow \frac{1}{20}x^2 = y$$



* Luego, una ecuación de la parábola es:

$$x^2 = 20y \text{ ó } y = \frac{1}{20}x^2$$

EN GENERAL:

$x^2 = 4py$ es la ecuación de la parábola con foco $F(0;p)$ y directriz $y = -p$.

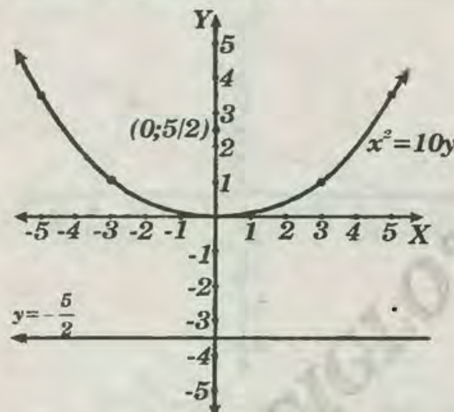
II) Identificar el foco y la directriz de la parábola cuya ecuación es: $x^2 = 10y$.

RESOLUCIÓN:

* La forma general de la ecuación es $x^2 = 4py$
* de donde : $4p = 10$

$$\rightarrow p = \frac{10}{4} \rightarrow p = \frac{5}{2}$$

* Por tanto, el foco es $\left(0;\frac{5}{2}\right)$ y la directriz $y = -\frac{5}{2}$



OBSERVACIÓN

* En esta gráfica para cada $(x;y)$ en la parábola, el punto $(-x;y)$ también está en la parábola. Esto significa que la parábola es simétrica respecto al eje Y.

* El vértice de una parábola es el punto donde la recta de simetría (o eje de simetría) interseca a la parábola. En este caso, el vértice es $(0;0)$.

III) Escribir una ecuación de la parábola con foco $F(3;0)$ y directriz $x = -3$.

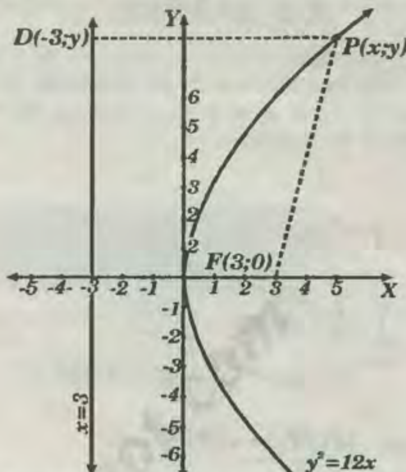
RESOLUCIÓN:

* Un punto $P(x;y)$ está en la parábola si y solamente si $PF = PD$.

$$\sqrt{(x-3)^2+(y-0)^2} = \sqrt{(x+3)^2+(y-y)^2}$$

$$\rightarrow \sqrt{(x-3)^2+y^2} = \sqrt{(x+3)^2} \rightarrow (x-3)^2+y^2 = (x+3)^2$$

$$\rightarrow x^2 = 6x+9+y^2 = x^2+6x+9 \rightarrow y^2 = 12x$$



Luego, una ecuación de la parábola es : $y^2 = 12x$

OBSERVACIÓN

En esta gráfica para cada $(x;y)$ en la parábola, el punto $(x;-y)$ está también en la parábola. Esto significa que la parábola es simétrica con respecto al eje **X**. El vértice es el punto $(0;0)$.

EN GENERAL:

$y^2 = 4px$ es la ecuación de la parábola con foco $(p;0)$ y directriz $x = -p$.

Observe que esta ecuación define una relación cuadrática que no es una función.

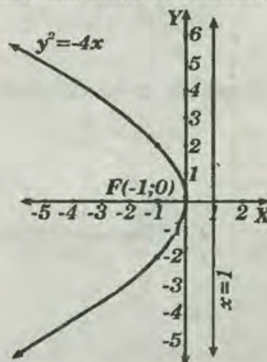
IV) Identificar el foco, la directriz, el vértice y la recta de simetría de la parábola cuya ecuación es $y^2 = -4x$.

RESOLUCIÓN:

* En este caso $4p = -4$, por tanto $p = -1$. Luego, el foco es $(-1;0)$ y la directriz de la recta $x = 1$.

El vértice $(0;0)$ y la recta de simetría $y = 0$. Para trazar la gráfica se hace una tabla de valores :

x	-1	-4
y	± 2	± 4



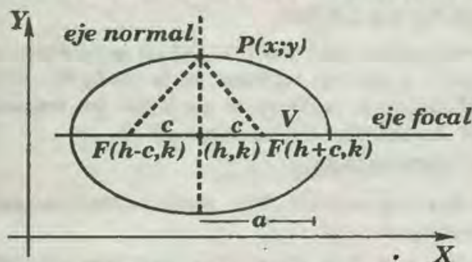
LA ELIPSE

La elipse se define como un conjunto de puntos $P(x;y)$, tales que la suma de las distancias de P a los focos F_1, F_2 es igual a una constante $2a$ (a es radio mayor de la elipse).



Definición : $\boxed{d(PF_1)+d(PF_2)=2a}$

EJE FOCAL PARALELO AL EJE X :



* Por definición $d(F_1;P) + d(F_2;P) = 2a$

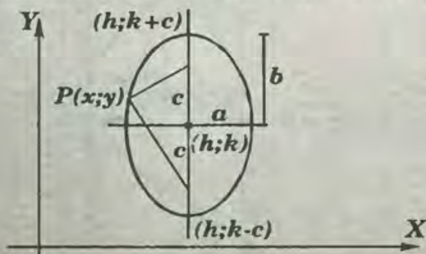
$$\sqrt{(x-h+c)^2+(y-k)^2}+\sqrt{(x-h-c)^2+(y-k)^2}=2a$$

$$\rightarrow\sqrt{(x-h+c)^2+(y-k)^2}=2a-\sqrt{(x-h-c)^2+(y-k)^2}$$

* Elevando al cuadrado y sabiendo que :
$a^2 = b^2 + c^2$ (se demuestra ubicando P en el eje normal y la diferencia de elipse) y reduciendo se tendrá :

$$\boxed{\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1},a>b$$

EJE FOCAL PARALELO AL EJE Y:



* Por definición, se probará que $b^2=a^2+c^2$ se obtiene la ecuación:

$$\boxed{\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1},b>a$$

EJEMPLOS :

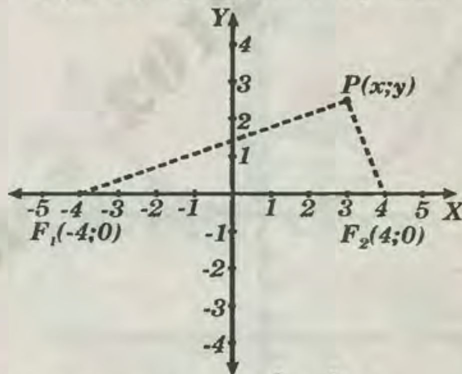
I) Escribir una ecuación de la elipse cuyos focos son $F_1(-4\ ;\ 0)$ y $F_2(4\ ;\ 0)$ y la suma de las distancias focales es **10**.

RESOLUCIÓN:

* Un punto $P(x;\ y)$ está en la elipse si y solamente si $PF_1 + PF_2 = 10$.

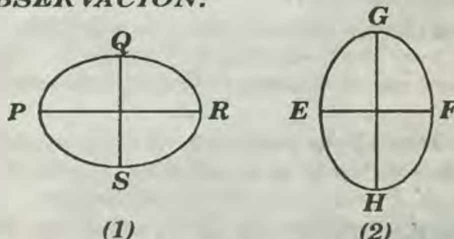
Se usa la fórmula de la distancia para expresar PF_1 y PF_2 en términos de x y y : $PF_1 + PF_2 = 10$

$$\rightarrow\sqrt{(x+4)^2+y^2}+\sqrt{(x-4)^2+y^2}=10$$



* Reduciendo se obtiene : $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$

OBSERVACIÓN:



La elipse *(1)* es simétrica con respecto a $\overline{PR}$ y a $\overline{QS}$. El segmento de mayor longitud , $\overline{PR}$, se llama eje mayor de la elipse . El segmento $\overline{QS}$ es el eje menor de la elipse . Los puntos finales del eje mayor, P y R , son los vértices de la elipse.

La elipse *(2)* es simétrica con respecto a $\overline{EF}$ y $\overline{GH}$. El eje mayor es $\overline{GH}$ y el eje menor $\overline{EF}$. Los vértices son los puntos G y H.

El punto donde el eje mayor y el eje menor se intersecan es el centro de la elipse.

La gráfica de cualquier ecuación de la forma $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ es una elipse cuyo centro es el punto *(0;0)* y cuyos vértices están en el eje **X** o en el eje **Y**.

II) Trazar la gráfica de la elipse cuya ecuación es $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$. Encontrar las longitudes de los ejes, identificar los vértices y el centro de la elipse.

RESOLUCIÓN :

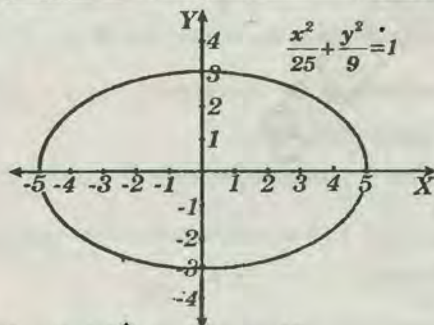
$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1 \rightarrow y=\pm\, 3\sqrt{1-\frac{x^2}{25}}$$

* Si $x = 0$, entonces $y = \pm 3$. Los y – ***intersectos*** son ***3*** y ***–3***.

* Si $y = 0$, entonces $x = \pm 5$. Los x – ***intersectos*** son ***5*** y ***–5***.

Se hace una tabla de valores para unos pocos puntos en el primer cuadrante. Después se usa la simetría para completar la gráfica :

x	1	2	3	4
y	$\frac{3}{5}\sqrt{24}\simeq 2{,}9$	$\frac{3}{5}\sqrt{21}\simeq 2{,}7$	$\frac{12}{5}$	$\frac{9}{5}$



* La longitud del eje mayor es ***10***.

* La longitud del eje menor es ***6***.

* Los vértices son ***(5; 0)*** y ***(–5; 0)***. El centro es ***(0;0)***.

III) Trazar la gráfica de la elipse $49x^2+16y^2=784$. Encontrar los vértices y las longitudes de los ejes.

RESOLUCIÓN:

* De : $49x^2 + 16y^2 = 784$

$\rightarrow \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{49}=1$ se multiplica por $\frac{1}{784}$ ambos lados de la ecuación.

Los x – ***intersectos*** son ± 4.

Los y – ***intersectos*** son ± 7.

* La elipse queda enmarcada en el rectángulo formado por las rectas $x = -4$, $x = 4$, $y = -7$ y $y=7$.

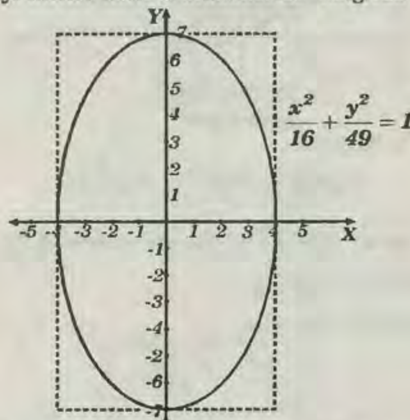
* Se calcula las coordenadas de unos pocos puntos en el primer cuadrante y se usa la simetría de la elipse para completar la gráfica:

x	1	2	3
y	6,8	6,0	4,6

* Los vértices son ***(0; 7)*** y ***(0; –7)***.

El eje mayor tiene ***14*** unidades de longitud.

* El eje menor tiene ***8*** unidades de longitud.



IV) Encontrar los focos de la elipse cuya ecuación es : $\frac{x^2}{81}+\frac{y^2}{4}=1$

RESOLUCIÓN :

$a^2 = 81$ y $b^2 = 4$, de donde $|a| = 9$ y $|b| = 2$.

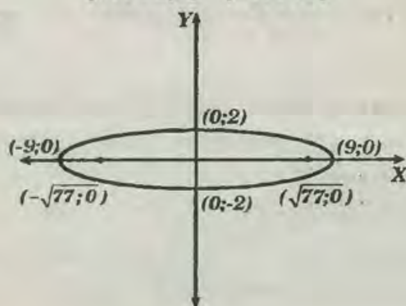
Como $|a|>|b|$, entonces el eje mayor es el segmento horizontal que une los puntos ***(–9 ; 0)*** y ***(9 ; 0)***.

* Los focos están en el eje mayor a $|c|$ unidades del centro ***(0; 0)***, donde $c^2 = |a^2 - b^2|$

$$\Rightarrow c^2=|81-4|=77 \rightarrow |c|=\sqrt{77}$$

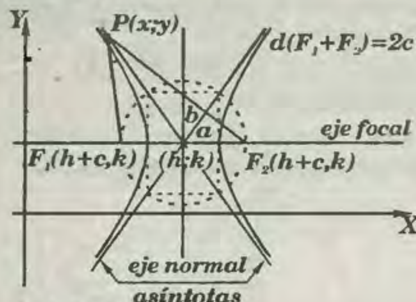
* Luego, los focos son los puntos :

$$(\sqrt{77};0) \text{ y } (-\sqrt{77};0)$$



LA HIPÉRBOLA

La hipérbola se define como el conjunto de puntos $P(x;y)$, tales que el valor absoluto de la diferencia entre las distancias de P a los focos F_1, F_2 es igual a la constante $2a$.



* De la definición :

$$\boxed{|d(PF_2)-d(PF_1)|=2a<2c}$$

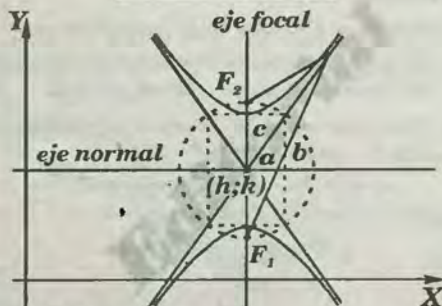
$$\left|\sqrt{(x-h+c)^2+(y-k)^2}-\sqrt{(x-h+c)^2+(y-k)^2}\right|=2a$$

* Además : $c^2=a^2+b^2$
* De donde se reduce a :

$$\boxed{\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1}$$

* Cuando el eje focal es paralelo al eje Y la ecuación es:

$$\boxed{\frac{(y-k)^2}{b^2}-\frac{(x-h)^2}{a^2}=1}$$



EJEMPLO 1:

Trazar la gráfica de la hipérbola cuya ecuación es $36y^2-16x^2=576$. Identificar el centro, los vértices y las asíntotas.

RESOLUCIÓN:

$36y^2-16x^2=576 \rightarrow \frac{y^2}{16}-\frac{x^2}{36}=1$.......(se divide a ambos lados de la ecuación por 576)

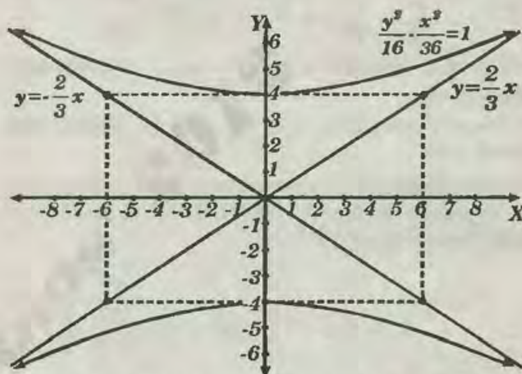
$$\rightarrow \frac{y^2}{4^2}-\frac{x^2}{6^2}=1$$

* Los *y–intersectos* son 4 y -4.
* No hay *x–intersectos*.
* Ninguna parte de la gráfica está entre las rectas $y=4$ y $y=-4$.

Se hace una tabla de valores para unos pocos puntos en el primer cuadrante.

x	1	2	7
y (aprox.)	4,05	4,2	6

Se usa la simetría de la hipérbola para completar la gráfica.



* El centro es $(0;0)$; los vértices son $(0;-4)$, y $(0;4)$.

Las asíntotas son las rectas $y=\frac{2}{3}x$ y $y=-\frac{2}{3}x$.

EN GENERAL:

La gráfica de cualquier ecuación de la forma:

a) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ es una hipérbola con las siguientes propiedades:

1) La hipérbola es simétrica con respecto a ambos ejes.

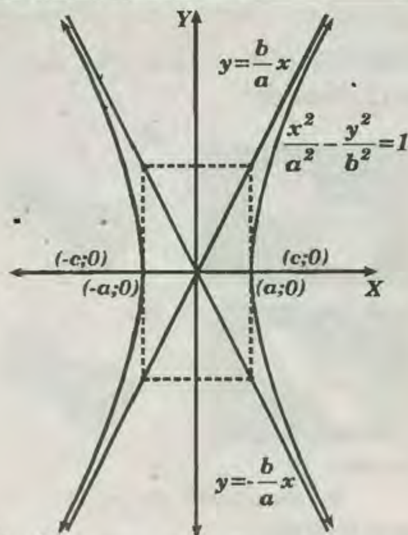
2) Los x–intersectos son a y $-a$.
No hay y–intersectos.

3) Ninguna parte de la hipérbola está entre las rectas $x=a$ y $x=-a$.

4) Las asíntotas son las rectas $y=\frac{b}{a}x$ y $y=-\frac{b}{a}x$.

5) Los focos son los puntos $(-c;0)$ y $(c;0)$ donde $c^2=a^2+b^2$.

6) Gráfica:



b) $\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$ es una hipérbola con las siguientes propiedades:

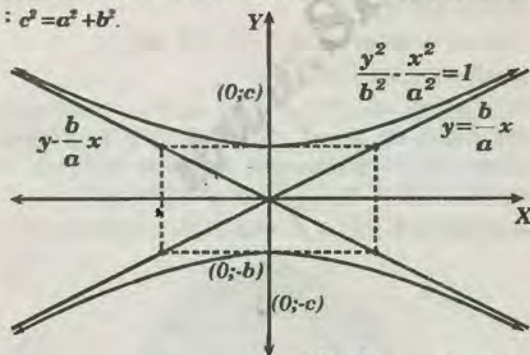
1) La hipérbola es simétrica con respecto a ambos ejes.

2) Los ***y- intersectos*** son b y $-b$. No hay ***x-intersectos.***

3) Ninguna parte de la hipérbola está entre las rectas $y = b$ y $y = -b$.

4) Las asíntotas son las rectas $y=\frac{b}{a}x$ y $y=-\frac{b}{a}x$.

5) Los focos son los puntos $(0\,;-c)$ y $(0\,;c)$ donde : $c^2=a^2+b^2$.



$a=b$, entonces las gráficas de $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ y $\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$ son hipérbolas equiláteras. Las asíntotas de cada hipérbola son las rectas $y = x$ y $y = -x$.

EJEMPLO:

Encontrar los focos de la hipérbola cuya ecuación es : $4x^2-16y^2=64$.

RESOLUCIÓN:

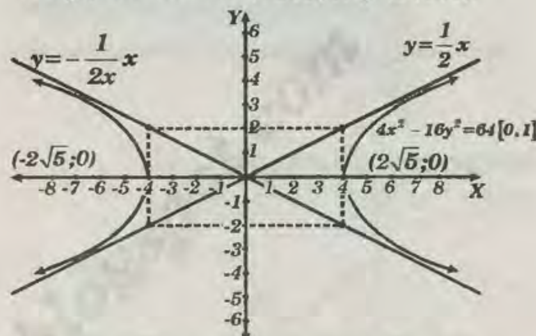
$4x^2-16y^2=64$

$\rightarrow\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{4}=1$ ....(se dividen ambos lados de la ecuación por **64**)

$\rightarrow\frac{x^2}{4^2}-\frac{y^2}{2^2}=1\rightarrow c^2=a^2+b^2$

$\rightarrow c^2=4^2+2^2\rightarrow c^2=20\rightarrow|c|=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$

* Luego, los focos son $(-2\sqrt{5};0)$ y $(2\sqrt{5};0)$.



GRÁFICA DE RELACIONES DEFINIDAS POR INECUACIONES

Para graficar una relación definida por una desigualdad : se obtiene graficando la igualdad ; esta divide al plano cartesiano en dos regiones, tal que una de ellas corresponde a la relación dada ; para determinar cuál de las regiones satisface , probamos con un punto cualquiera de una región y si sus componentes verifican la inecuación es la región correcta ; de lo contrario la región correspondiente a la relación es la otra.

EJEMPLO 1:

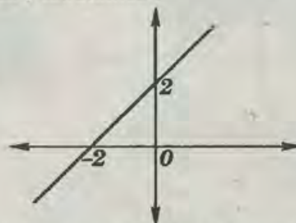
$$R=\{(x;y)\in R^2\,/\,y\geq x+2\}$$

RESOLUCIÓN:

* Graficamos: $y = x + 2$

como es una recta , tabulamos :

x	y
0	2
–2	0

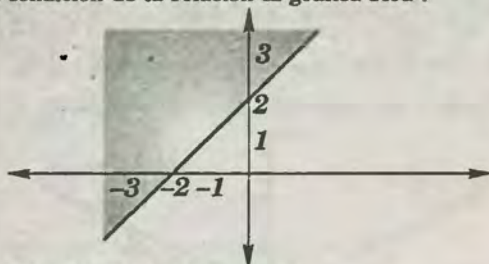


* Observamos que la recta divide al plano en dos regiones R_1, R_2 ; probemos con el punto *(0; 0)* que pertenece a R_1.

$(0;0) \rightarrow y \geq x+2$

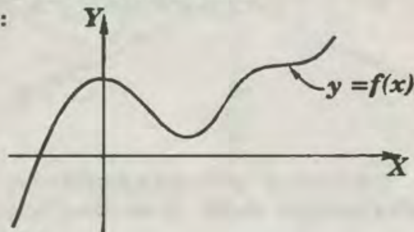
$0 \geq 0+2 \rightarrow 0 \geq 2$ ....*(Falso)*

* Como *(0; 0)* $\in R_1$ y transforma a la inecuación en una proposición falsa , entonces, la R_2 cumple con la condición de la relación la gráfica será :



EJEMPLO GENERAL:

Dado :



Graficar :

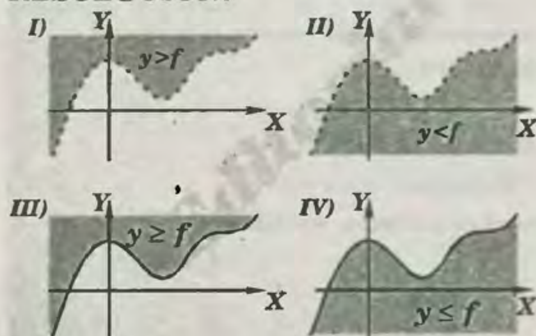
I) $y > f(x)$

II) $y < f(x)$

III) $y \geq f(x)$

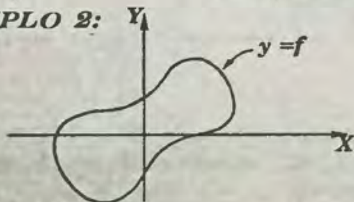
IV) $y \leq f(x)$

RESOLUCIÓN:



EJEMPLO 2:

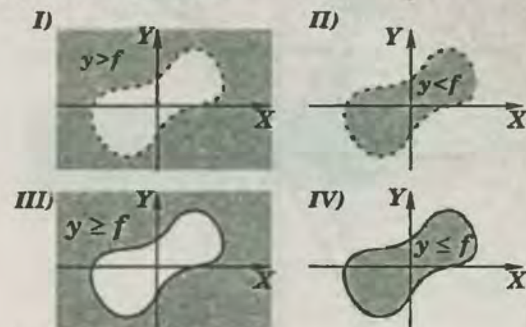
Dado :



Graficar :

I) $y > f(x)$ II) $y < f(x)$ III) $y \geq f(x)$ IV) $y \leq f(x)$

RESOLUCIÓN:



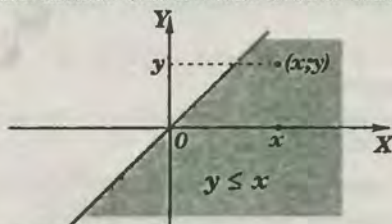
EJEMPLO 3:

$$S = \{(x;y) \in R \times R \,/\, y \leq x\}$$

RESOLUCIÓN:

* El punto *(x; y)* satisface la condición $y \leq x$

Cuando x toma todos los valores en el eje x la semirecta hallada barrerá toda la zona sombreada.

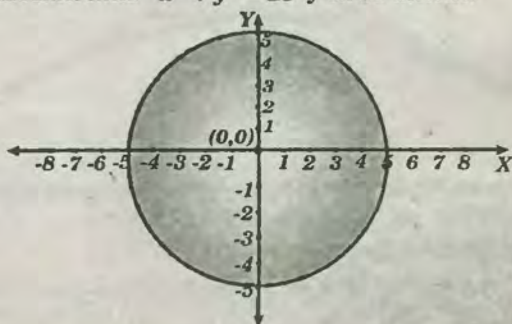


EJEMPLO 4:

Graficar la desigualdad : $x^2 + y^2 \leq 25$

RESOLUCIÓN:

* La gráfica de $x^2 + y^2 = 25$ es el conjunto cuya distancia de *(0 ; 0)* es *5*. La gráfica de la desigualdad consiste en los puntos cuya distancia de *(0 ; 0)* es menor o igual a *5*. Estos puntos están en la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$ y en su interior.



EJEMPLO 5:

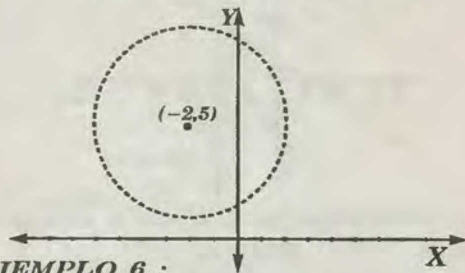
Graficar la desigualdad $(x+2)^2+(y-5)^2<16$.

RESOLUCIÓN:

* de : $(x+2)^2+(y-5)^2<16$

$$\to (x-(-2))^2+(y-5)^2<4^2$$

*La gráfica consiste en todos los puntos cuya distancia de *(-2; 5)* es menor que 4. Estos puntos son los puntos que están en el interior de la circunferencia. La gráfica no incluye los puntos que están en el círculo $(x-(-2))^2+(y-5)^2=4^2$.



EJEMPLO 6 :

Graficar la desigualdad : $y^2<-2x$.

RESOLUCIÓN:

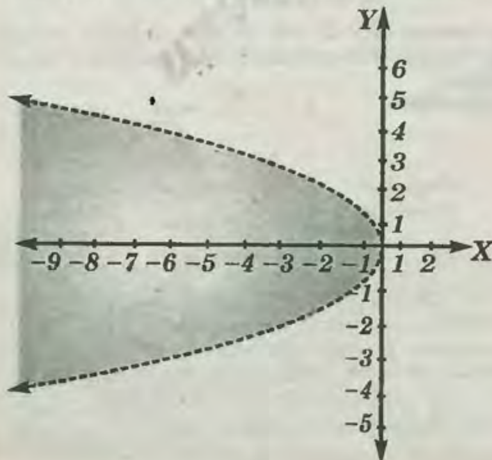
* Se traza la gráfica de : $y^2=-2x$

x	0	-2	-8
y	0	±2	±4

* Se toma un punto en una de las regiones determinadas por la parábola y se verifica si cumple la desigualdad. Tome por ejemplo *(-3; 0)*.

$$y^2<-2x \to 0^2<-2(-3) \to 0<6$$

*Como $0<6$ es verdadero, la gráfica consta de los puntos que están en el interior de la parábola.



EJEMPLO 7:

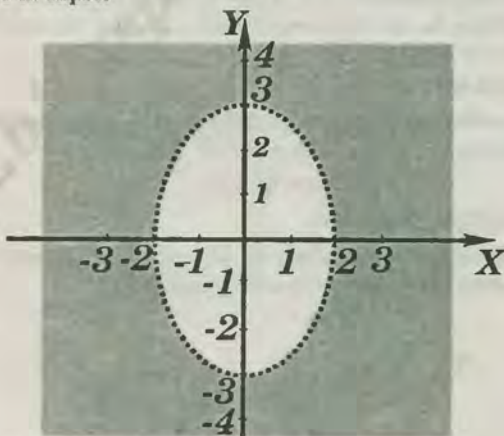
Graficar la desigualdad : $9x^2+4y^2>36$

RESOLUCIÓN:

* de : $9x^2+4y^2>36 \to \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}>1$ se multiplica a ambos lados por $\frac{1}{36}$

* Se traza , punteada la elipse $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ (punteada porque la desigualdad es estrictamente mayor que).

* Se toma un punto en una de las regiones determinadas por la elipse. Tome por ejemplo *(0; 0)* que está en el interior de la elipse. Se verifica si cumple la desigualdad $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}>1$. Como $0>1$ es falso, la gráfica consta de los puntos en el exterior de la elipse.

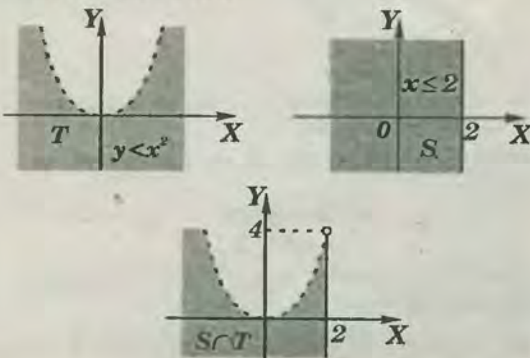


EJEMPLO 8:

Halle la gráfica de intersección de las relaciones:

$$S=\{(x;y)/x\le 2\} \wedge T=\{(x;y)/y<x^2\}$$

RESOLUCIÓN :



SISTEMAS DE DESIGUALDADES LINEALES EN DOS VARIABLES

Se consideran sistemas de desigualdades lineales en dos variables , x e y , tales como:

$$\begin{cases} 2x - 3y > 6 \\ x + 2y \leq 2 \end{cases}$$

La solución de un sistema de desigualdades lineales consiste de todos los pares ordenados $(a\ ;\ b)$ tales que la sustitución $x = a$, $y = b$ satisfacen todas las desigualdades .

Las gráficas de las desigualdades lineales se pueden usar para resolver sistemas de desigualdades lineales.

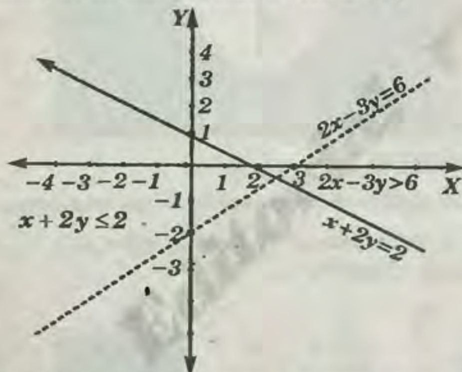
Gráficamente la solución de un sistema de dos desigualdades lineales con dos variables es el conjunto de todos los pares ordenados de números correspondientes a los puntos de intersección de las gráficas de las dos desigualdades lineales (si estos puntos existen).

EJEMPLO 1:

Resolver gráficamente el sistema de desigualdades lineales : $\begin{cases} 2x - 3y > 6 \\ x + 2y \leq 2 \end{cases}$

RESOLUCIÓN:

* Se trazan las gráficas de las dos desigualdades lineales en un mismo plano cartesiano :



* La solución del sistema es la región que aparece más oscura (sombreada)

* Observe que el par $(2; -3)$ es una solución del sistema:

$$\begin{cases} 2x - 3y > 6 \\ x + 2y \leq 2 \end{cases}$$

*Porque la sustitución $x = 2$, $y = -3$ satisface ambas desigualdades :

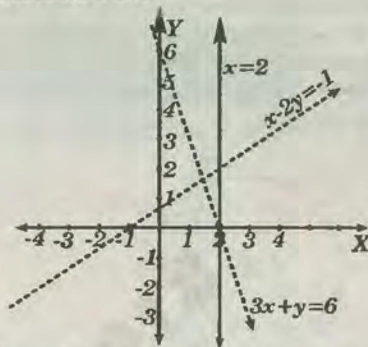
$$2(2) - 3(-3) = 13 > 6 \ \wedge \ 2 + 2(-3) = -4 \leq 2$$

EJEMPLO 2:

Resolver gráficamente el sistema de desigualdades:

$$\begin{cases} 3x + y \leq 6 \\ x - 2y \leq -1 \\ x \geq 2 \end{cases}$$

RESOLUCIÓN:



* La intersección de las soluciones es ϕ, luego el sistema : $\begin{cases} 3x + y \leq 6 \\ x - 2y \leq -1 \\ x \geq 2 \end{cases}$ no tiene solución.

OBSERVACIÓN :

Como ya sabemos lo que es una relación, diremos que una función en matemática también es una relación.

* Una función es un tipo especial de relación pero no toda relación puede ser una función.

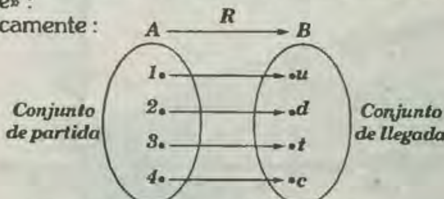
* Daremos unas nociones previa antes de dar la definición de FUNCIÓN.

* Sean los conjuntos :

$$A = \{1;2;3;4\}$$
$$B = \{u,d,t,c,\}$$

Y la relación «R» de «A» en «B», definida por: «a cada número le corresponde la primera letra de su nombre» :

* Gráficamente :



$$R = \{(1;u),\ (2;d),\ (3;t),\ (4;c)\}$$

* Observamos que a cada elemento de «A» le corresponde un único elemento de «B». A este tipo de relaciones se les llama funciones y se denota por:

$$f:\ A \longrightarrow B \quad ó \quad A \xrightarrow{f} B$$

* Se lee : función «f» de «A» en «B»

* De donde : $f = \{(1;u),\ (2;d),\ (3;t),\ (4;c)\}$

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1:

Sean :

$U = \{1;2;3;4\}$

$R_1 = \{(x;y) \in U^2 / x < y\}$

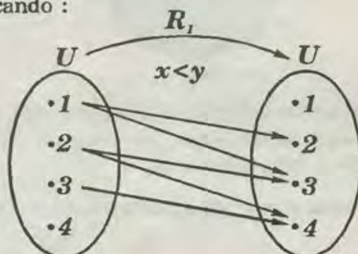
$R_2 = \{(x;y) \in U^2 / x + y = 5\}$

Dos relaciones, determinar el número de elementos de $R_1 \cup R_2$.

A) 13 B) 10 C) 6 D) 8 E) 2

RESOLUCIÓN:

* Graficando :



* De donde :

$R_1 = \{(1;2),(1;3),(1;4),(2;3),(2;4),(3;4)\}$

$R_2 = \{(1;4),(2;3),(3;2),(4;1)\}$

* Entonces :

$R_1 \cup R_2 = \{(1;2),(1;3),(1;4),(2;3),(2;4),(3;4),(3;2),(4;1)\}$

* Luego : $n(R_1 \cup R_2) = 8$

RPTA: "D"

PROBLEMA 2:

Sea :

$$S = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 - y^2 - 3x + 2y - 1 = 0\}$$

Determinar el dominio de «S».

A) $\langle 0;3]$ B) $\langle -\infty;0] \cup [3;+\infty\rangle$ C) $\mathbb{R}$ D) ϕ E) $\mathbb{R} - \{0\}$

RESOLUCIÓN:

* Esta relación está definida por una igualdad. En relaciones de este tipo se suele despejar una variable y analizar los valores de la otra variable :

* Para hallar $Dom(S)$, «despejamos y», completando cuadrados :

$$y^2 - 2y + 1 = x^2 - 3x$$

$$\rightarrow (y-1)^2 = x^2 - 3x$$

* Como $(y-1)^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 - 3x \geq 0$

$$\Rightarrow x(x-3) \geq 0$$



$\rightarrow Dom(S) = \langle -\infty;0] \cup [3;+\infty\rangle$

RPTA: "B"

PROBLEMA 3:

Sea $A = \{x \in \mathbb{N} / x \leq 8\}$; si definimos:

$R_1 = \{(x;y) \in A^2 / y = 2x\}$

$R_2 = \{(x;y) \in A^2 / y = x^2 - 1\}$

$R_3 = \{(x;y) \in A^2 / x \leq 2 \wedge y > 6\}$, *entonces*

$n(R_1) + n(R_2) + n(R_3)$ *es igual a:*

A) 15 B) 17 C) 19 D) 14 E) 12

RESOLUCIÓN :

*Determinemos los elementos de R_1, R_2 y R_3:

$R_1 = \{(0;0),(1;2),(2;4),(3;6),(4;8)\}$

$R_2 = \{(1;0),(2;3),(3;8)\}$

$R_3 = \{(0;7),(0;8),(1;7),(1;8),(2;7),(2;8)\}$

* Luego :

$n(R_1) = 5$, $n(R_2) = 3$, $n(R_3) = 6$

$\Rightarrow n(R_1) + n(R_2) + n(R_3) = 14$

RPTA: "D"

PROBLEMA 4:

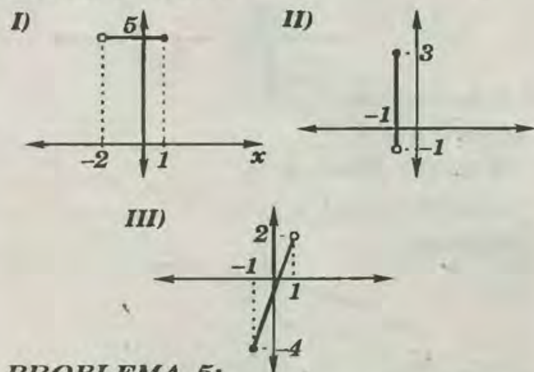
Graficar las siguientes relaciones :

I) $R_1 = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 / y = 5,\ x \in \langle -2;1]\}$

II) $R_2 = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 / x = -1,\ y \in \langle -1;3]\}$

III) $R_3 = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 / y = 3x - 1,\ x \in [-1;1\rangle\}$

RESOLUCIÓN:



PROBLEMA 5:

Graficar :

$R = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 / (x+y)(x-y+1) = 0,\ x \in \langle -2;2\rangle\}$

RESOLUCIÓN:

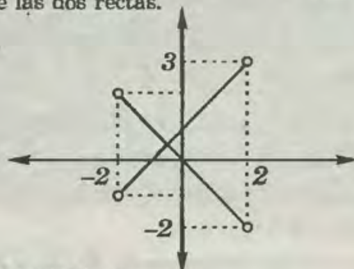
* Como la regla de correspondencia de R es :

$(x+y)(x-y+1)=0 \leftrightarrow$

$$x+y=0 \ \vee \ x-y+1=0$$

$$y=-x \ \vee \ y=x+1$$

* Tiene dos condiciones , entonces , la gráfica es la unión de las dos rectas.



PROBLEMA 6:

Graficar :

I) $R_1=\{(x;y)\in \mathbb{R}^2 / y=-x^2+4x-1,\ x\in[0;3\rangle\}$

II) $R_2=\{(x;y)\in \mathbb{R}^2 / x=y^2-4y-2,\ x\in[-2;3\rangle\}$

RESOLUCIÓN :

I) Transformando : $y=-x^2+4x-1$

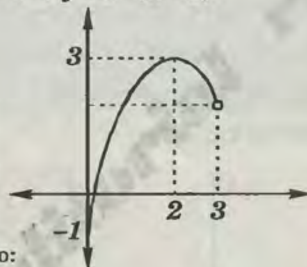
$\rightarrow -y=x^2-4x+1$

$\rightarrow -y=x^2-4x+4-4+1$

$\rightarrow -y=(x-2)^2-3 \rightarrow y=3-(x-2)^2$

* Graficando :

x	y
0	-1
3	2



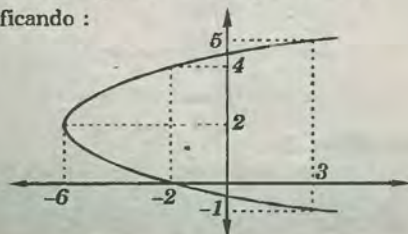
II) Transformando:

$x=y^2-4y-2$

$\rightarrow x=y^2-4y+4-4-2$

$\rightarrow x+6=(y-2)^2 \rightarrow x=(y-2)^2-6$

* Graficando :



PROBLEMA 7:

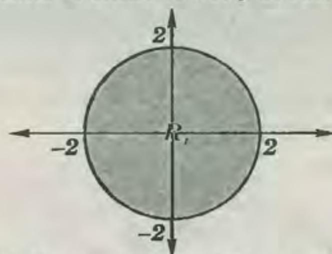
$$R_1=\{(x;y)\in \mathbb{R}^2 / x^2+y^2\leq 4\}$$

$$R_2=\{(x;y)\in \mathbb{R}^2 / y\leq x\}$$

Determinar el área determinada por $R_1\cap R_2$

RESOLUCIÓN:

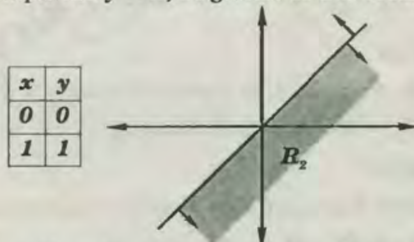
* Graficamos $x^2+y^2=4$; su gráfica es una circunferencia de centro $(0;0)$ y de radio 2.



* Como $(0;0)$ transforma a la inecuación en una proposición verdadera, la región interior corresponde a la gráfica de R_1.

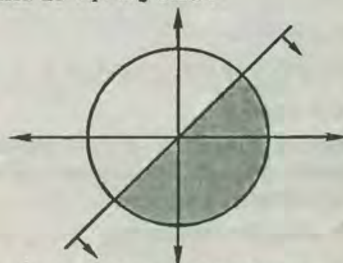
* Grafiquemos $y=x$; su gráfica es una recta.

x	y
0	0
1	1



* Como $(0;-1)\in R_2$ transforma a la inecuación $y\leq x$ en una proposición verdadera, la región R_2 corresponde a la gráfica.

* La gráfica de $R_1\cap R_2$ será :



* El área de la región sombreada es:

$$S_1=\pi r^2/2 \rightarrow S_1=\frac{\pi(2)^2}{2}=2\pi$$

PROBLEMA 8:

Resolver el siguiente sistema de inecuaciones:

$$\begin{cases} 2x+5y\le 60 \\ 2x+y\le 30 \\ x\ge 0 \\ y\ge 0 \end{cases}$$

RESOLUCIÓN:

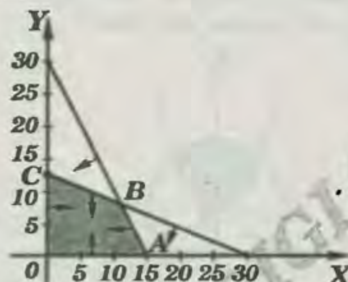
OBSERVACIONES :

* Cada inecuación representa un semiplano , incluida la recta frontera.

* Geométricamente, ¿Qué representa el conjunto solución del sistema , es decir , el conjunto de los pares ordenados de números reales que satisfacen a la vez las cuatro inecuaciones?

* Para determinar cuál es la región del plano que corresponde a la inecuación, basta encontrar un par ordenado cualquiera que satisfaga la inecuación. La región a la que pertenece el punto es la solución.

* El conjunto de pares ordenados de números reales $(x;y)$ que satisfacen al sistema anterior es la región sombreada.



* Esta región poligonal convexa de los puntos solución suele denominarse región de puntos posibles.

* Podemos desear conocer cuáles de los puntos posibles maximizan o minimizan cierta función (que se llamará ***función objetivo***) que depende del sistema dado.

PROBLEMA 9 :

Hallar el complemento de la intersección del Dominio y Rango de la relación .

$$R=\{(x;y)\in R^2 / |y-x|\le x\}$$

A) $\langle-\infty;0\rangle\cup\langle 0;+\infty\rangle$ B) $[0;\infty\rangle$ C) $\langle-\infty;0]$

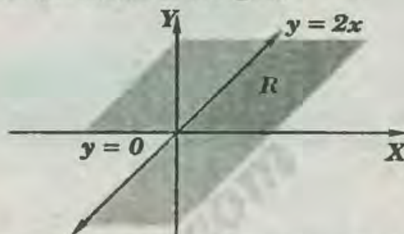
D) $\langle-\infty;0\rangle$ E) $\langle 0;\infty\rangle$

RESOLUCIÓN :

* Esta relación (en R^2) está definida por una desigualdad. En relaciones de este tipo (con desigualdades) la gráfica resulta una región del plano.

$$R: |y-x|\le x \wedge x\ge 0$$
$$\Rightarrow -x\le y-x\le x$$
$$\Rightarrow 0\le y \wedge y\le 2x$$

* Graficamos primero las rectas $y=0$ (eje X) $\wedge$ $y=2x$ (los bordes de la región)



* Luego, ubicamos las regiones correspondientes

$y\ge 0$: es la región sobre el eje X, el semiplano superior (incluyendo la recta).

$y\le 2x$: es la región en la que los pares tienen ordenada menor o igual que la de la recta (región bajo la recta $y=2x$).

* Luego R es la intersección de estos semiplanos.

$$\to Dom(R)=[0;+\infty\rangle = Ran(R)$$

* Así $Dom(R)\cap Ran(R)=[0;+\infty\rangle$

RPTA: "B"

PROBLEMA 10:

Determine el rango de la relación :

$$R=\{(x;y)\in R\times R / x^2+y^2\le 2\wedge y^2\le x\}$$

A) $[-1;\sqrt{2}]$ B) $[-\sqrt{2};\sqrt{2}]$ C) ϕ

D) $[-1;1]$ E) $[0;1]$

RESOLUCIÓN:

* Graficamos

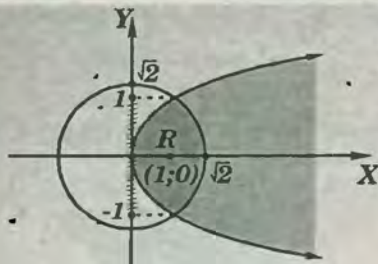
$$R: x^2+y^2\le 2 \wedge y^2\le x$$

$$\mathscr{C}: x^2+y^2=2 \wedge \mathscr{P}: y^2=x$$

OBSERVACIONES

* La circunferencia separa al plano en dos regiones disjuntas y sólo una corresponde a la desigualdad $x^2+y^2\le 2$. Por ello bastará probar con algún punto de una de las regiones, por ejemplo $(0;0): 0^2+0^2\le 2$ es verdadera. Luego $x^2+y^2\le 2$ corresponde la región sombreada, que contiene el punto $(0;0)$.

* Análogamente podemos usar $(1;0)$ en $y^2\le x\to 0^2\le 1$ es verdadera, luego es la otra región sombreada que contiene el punto $(1;0)$.



* De la intersección de estas dos regiones (sombreadas) del plano, resulta gráficamente la relación R.

$$\mathscr{C} \cap \mathscr{P}: \begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ y^2 = x \,, x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x = 1 \,, y = \pm 1$$

* Luego, proyectando la gráfica de R al eje Y se tiene:

$Ran(R) = [-1;1]$.

RPTA: "D"

PROBLEMA 11:

Si el dominio de la relación:

$$R = \{(x;y) \in R^2 \,/\, x^2 + y - 2 \leq 0 \wedge y - x - 1 \geq 0\}$$

es $[a;b]$, hallar $2a+4b$

A) $\sqrt{5}$ B) $2\sqrt{5}-1$ C) $\sqrt{5}+1$ D) $\sqrt{5}-3$ E) 1

RESOLUCIÓN:

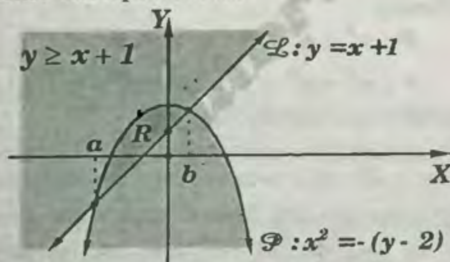
$$R: x^2 + y - 2 \leq 0 \wedge y - x - 1 \geq 0$$

* Graficamos:

$$\mathscr{P}: x^2 = -(y-2) \wedge \mathscr{L}: y = x + 1$$

$$V(0;2),\ p < 0$$

* Probamos con el punto $(0;0)$ para determinar las regiones correspondientes:



* $\mathscr{P} \cap \mathscr{P}: x^2 = -(x+1-2)$

$\Rightarrow x^2 + x - 1 = 0$

$$\Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4(1)(-1)}}{2(1)} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$\Rightarrow a = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} \,;\ b = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$$

* Luego, $2a + 4b = -1 - \sqrt{5} + -2 + 2\sqrt{5} = \sqrt{5} - 3$

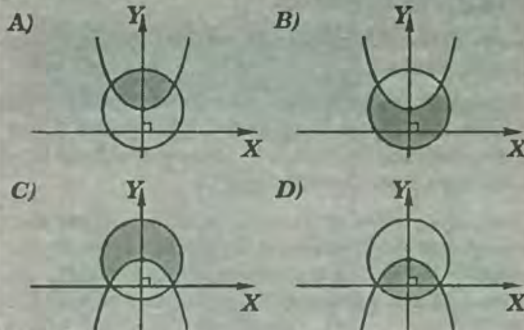
RPTA: "D"

PROBLEMA 12:

La gráfica de la región definida por el conjunto

$$A = \{(x;y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \,/\, x^2 + y^2 \leq 4y + 16 \wedge x^2 + 2 \leq y\}$$

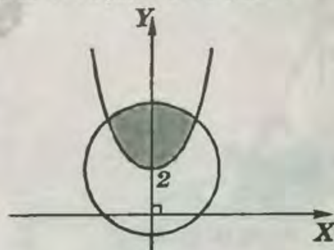
es:



RESOLUCIÓN:

* De la primera : $x^2 + (y-2)^2 \leq (2\sqrt{5})^2$

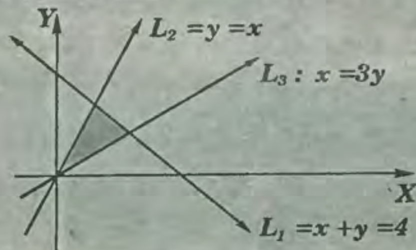
* Graficando el conjunto A se tiene :



RPTA: "A"

PROBLEMA 13:

En la figura adjunta se muestra la región R limitada por las rectas L_1, L_2 y L_3. ¿Cuál de los siguientes puntos pertenece a R?



A) (2,4;1) B) (2;2) C) (3;1) D) $\left(2;\frac{2}{3}\right)$ E) (1;1)

RESOLUCIÓN:

* De la figura, la región está definida por:

$$\begin{cases} y < x \text{ .... } (I) \\ 3y > x \text{ .... } (II) \\ y < 4 - x \text{ .... } (III) \end{cases}$$

* De **(II) – 3(III)**:

$$0 > x - 3(4 - x) \rightarrow x < 3 \rightarrow 0 < x < 3$$

* Para $x = 1$:

$$\begin{cases} y < 1 \\ y > \dfrac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{3} < y < 1$$

* Ninguno de los pares dados satisfacen éstas condiciones.

* Para $x = 2$:

$$\begin{cases} y < 2 \\ y > \dfrac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow \frac{2}{3} < y < 2$$

* También ningún par satisfacen las condiciones anteriores.

* Para $x = 2{,}4$:

$$\begin{cases} y < 2{,}4 \\ y > 0{,}8 \end{cases} \Rightarrow 0{,}8 < y < 2{,}4$$

* Luego , el par es: $(2{,}4\ ;1)$

RPTA: "A"

PROBLEMA 14:

Si el siguiente conjunto

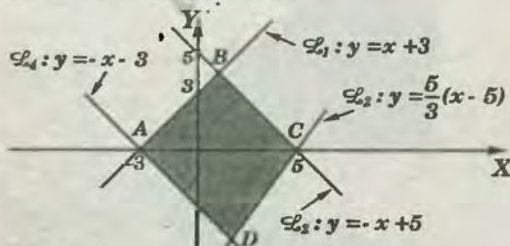
$$A = \left\{(x;y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \,/\, y \leq x + 3 \wedge y \leq -x + 5 \wedge y \geq \frac{5}{3}(x-5) \wedge y \geq -x-3\right\}$$

representa una región poligonal, entonces la suma de las componentes de todos los vértices del polígono es:

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) –3

RESOLUCIÓN:

* Realizando la gráfica de A :



$A = (-3;0)$

$C = (5;0)$

$B = \mathscr{L}_1 \cap \mathscr{L}_3 \rightarrow y = x + 3 \wedge y = -x + 5$

$\rightarrow x = 1 \wedge y = 4 \rightarrow B = (1;4)$

$D = \mathscr{L}_2 \cap \mathscr{L}_4 \rightarrow y = \dfrac{5}{3}(x-5) \wedge y = -x - 3$

$\mathscr{L}_3 : y = -x + 5$

$\rightarrow x = 2 \wedge y = -5 \rightarrow D = (2;-5)$

* Luego, la suma de componentes es:

$$-3 + 5 + 5 - 3 = 4$$

RPTA: "C"

PROBLEMA 15:

Si x e $y \in Z$ tal que satisfacen el sistema

$$\begin{cases} y - x^2 + 6x - 12 \geq 0 \\ 2y - x \leq 4 \end{cases}$$

Entonces , el mayor valor que admite $(x + y)$ es :

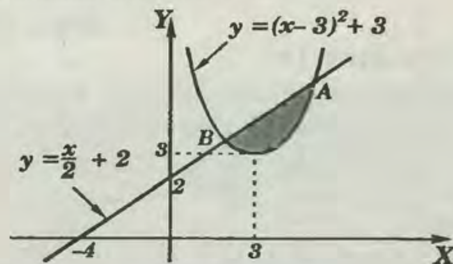
A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 8

RESOLUCIÓN :

* De :

$$\begin{cases} y \geq x^2 - 6x + 12 \\ y \leq \dfrac{x}{2} + 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y \geq (x-3)^2 + 3 \\ y \leq \dfrac{x}{2} + 2 \end{cases}$$

* Graficando el sistema :



* En A: $y = (x-3)^2 + 3 = \dfrac{x}{2} + 2$

$\rightarrow 2x^2 - 13x + 20 = 0$

$\rightarrow x_1 = 4 \vee x_2 = \dfrac{5}{2}$

* Para $x_1 = 4 : y_1 = 4 \rightarrow A = (4;4)$

* Para $x_2 = \dfrac{5}{2} : y_2 = \dfrac{13}{4} \rightarrow B = \left(\dfrac{5}{2};\dfrac{13}{4}\right)$

* Luego : $(x+y)_{máx} = 8$

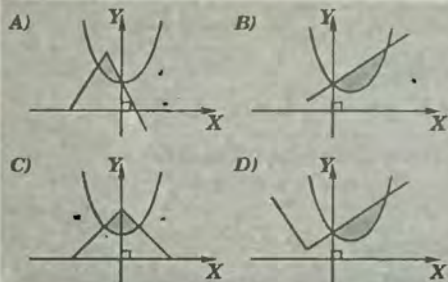
RPTA: "E"

PROBLEMA 16:

La gráfica de la región definida por el conjunto

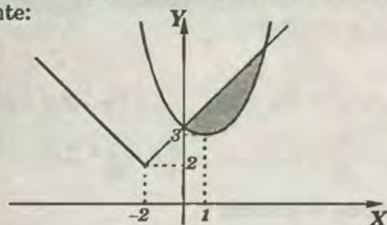
$$A = \left\{(x;y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \,/\, y + 2x \geq 4 + x^2 \wedge y - 2 \leq |x + 2|\right\}$$

es:



RESOLUCIÓN:

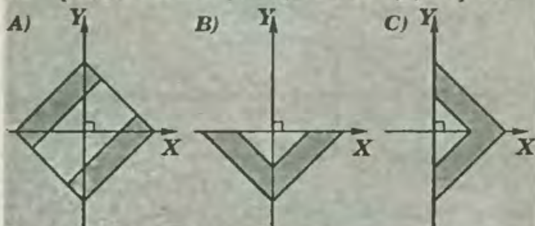
* La primera: $y \geq (x-1)^2+3$
* La segunda: $y \leq |x+2|+2$
* Haciendo la gráfica del conjunto, se obtiene lo siguiente:



RPTA: "D"

PROBLEMA 17:

La gráfica de la región definida por el conjunto $M=\{(x;y)\in R\times R/|x-y|\geq 1 \wedge |x|+|y|\leq 2\}$ es:

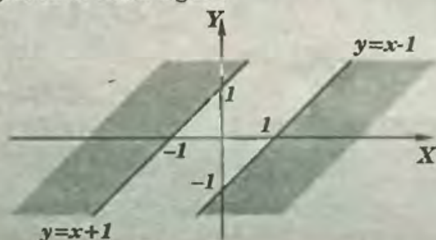


RESOLUCIÓN:

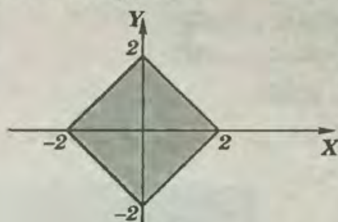
* De:

$$|x-y|\geq 1 \rightarrow x-y\geq 1 \vee x-y\leq -1$$
$$\rightarrow y\leq x-1 \vee y\geq x+1$$

y su gráfica es como sigue :



* La gráfica de $|x|+|y|\leq 2$ es:

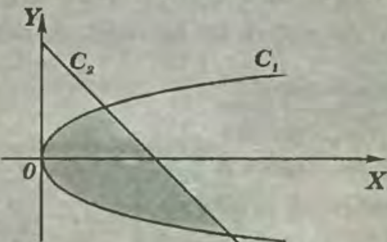


* La intersección de éstas dos es la región definida por M.

RPTA: "A"

PROBLEMA 18:

En la figura adjunta se muestra la región R limitada por las curvas $C_1: x=3y^2$ y $C_2: x+y=2$. Determine el sistema cuya representación gráfica es R.

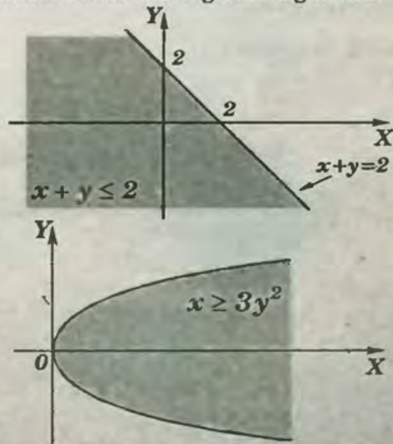


A) $\begin{cases} x\leq 3y^2 \\ x+y\leq 2 \end{cases}$ B) $\begin{cases} 3y^2\leq x \\ x\leq 2-y \end{cases}$ C) $\begin{cases} 3y^2\leq x \\ x\geq 2-y \end{cases}$

D) $\begin{cases} x\leq 3y^2 \\ x+y\geq 2 \end{cases}$ E) $\begin{cases} 3x\leq y^2 \\ x+y\leq 2 \end{cases}$

RESOLUCIÓN:

* Nótese que la región R de la figura es la intersección de las dos regiones siguientes:



* Luego , el sistema será :

$$\begin{cases} x + y \le 2 \\ x \ge 3y^2 \end{cases} \text{ ó } \begin{cases} x \le 2 - y \\ 3y^2 \le x \end{cases}$$

RPTA: "B"

PROBLEMA 19:

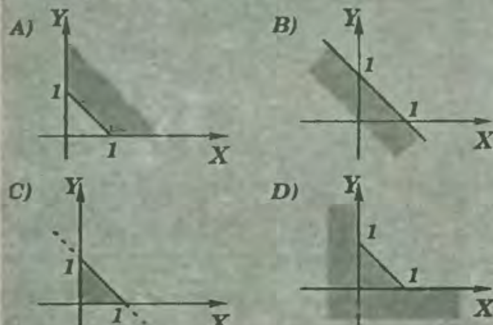
Si A, B y C son conjuntos definidos por :

$A = \{(x;y) \in R \times R / x < 0\}$

$B = \{(x;y) \in R \times R / x + y \le 1\}$

$C = \{(x;y) \in R \times R / y \ge 0\}$

Entonces la figura que mejor representa al conjunto $(A \cup B^C)^C \cap D$ es:



RESOLUCIÓN :

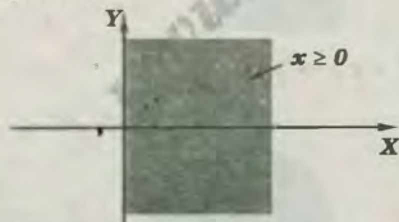
* De lo pedido :

$(A \cup B^C)^C \cap D = A^C \cap B \cap D.$

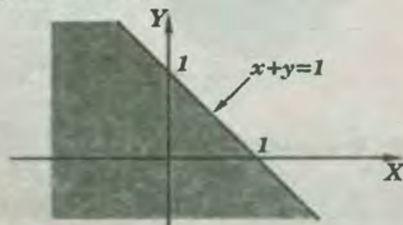
$A^C = \{(x;y) \in R \times R / \sim(x < 0)\}$

$\rightarrow A^C = \{(x;y) \in R \times R / x \ge 0\}$

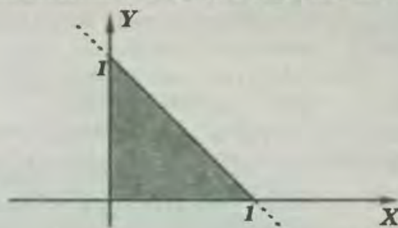
* Y su gráfica es:



* La gráfica de B es:



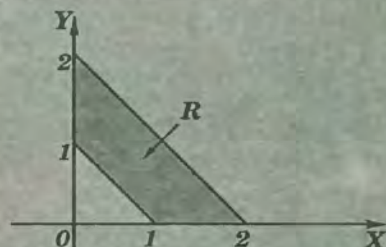
* La gráfica de D es el semiplano por encima del eje «x». Intersectando estas tres regiones, se obtiene:



RPTA: "C"

PROBLEMA 20 :

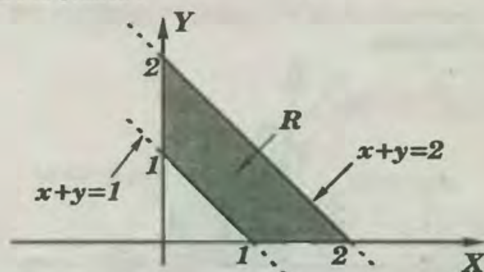
Si R es una región cerrada cuya gráfica se muestra en la figura adjunta, entonces el sistema de inecuaciones que definen la región R es:



A) $\begin{cases} 1 \le y - x \le 2 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$ B) $\begin{cases} 1 \le x \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$ C) $\begin{cases} x + y \le 1 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$ D) $\begin{cases} 1 \le x + y \le 2 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$

RESOLUCIÓN:

* De la gráfica :



* R está en el primer cuadrante (incluido los ejes) $\rightarrow x \ge 0 \wedge y \ge 0$

* La franja de R es la intersección de las regiones definidas por: $x + y \ge 1 \wedge x + y \le 2$

* Luego: R está definida por :

$$\begin{cases} 1 \le x + y \le 2 \\ x \ge 0 \wedge y \ge 0 \end{cases}$$

RPTA: "D"

PROBLEMA 21:

Una de las aplicaciones del sistema de inecuaciones lineales es la programación lineal, el cual consiste en optimizar (maximizar o minimizar) una función objetivo, sujeto a ciertas restricciones (Las cuales forman una región poligonal cerrada).

Para optimizar la función objetivo $F(x; y)$ se evalúa en cada uno de los vértices de la región poligonal.

APLICACIÓN:

En una urbanización se van a construir casas de dos tipos, económicas y súper económicas. La empresa constructora dispone de **1800 000** dólares, el costo de cada tipoo de casa es **30 000** y **20 000** dólares respectivamente. La municipalidad exige que el número total de casas no deben ser superior a **80**. Sabiendo que el beneficio por la venta de una casa económica es de **$ 4000** y por la súper económica es **$ 3 000**, entonces el número de casas de cada tipo que se deben construir para obtener el máximo beneficio es:

A) 0;80 B) 60;20 C) 50;30 D) 40;40 E) 20;60

RESOLUCIÓN :

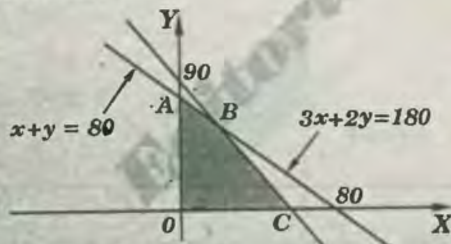
* Sea x : N° casas económicas
  y: N° casas súper económicas
* y sea F la función «*Beneficio*»

$F(x;y) = 4000x + 3000y$ ó $F(x;y) = 10^3(4x + 3y)$

* Restricciones: $x, y \in N_o$

$$\begin{cases} 30\,000x + 20\,000y \le 1800\,000 \\ x + y \le 80 \end{cases}$$

* Graficando la región poligonal generada por las restricciones:



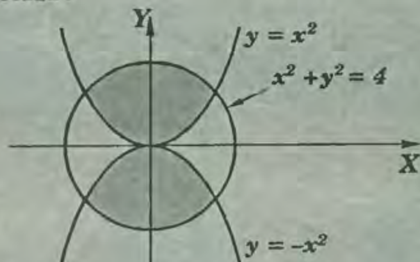
* Donde: $A = (0;80)$, $B = (20;60)$
  $C = (60;0)$, $O = (0;0)$
* Evaluando F en cada uno de éstos puntos:
* En A: $F(0;80) = 10^3(3 \times 80) = 240\,000$
* En B: $F(20;60) = 10^3(4 \times 20 + 3 \times 60) = 260\,000$
* En C: $F(60;0) = 10^3(4 \times 60) = 240\,000$
* En O: $F(0;0) = 0$
* Luego , el máximo beneficio se obtiene para:

$$x = 20 \wedge y = 60$$

RPTA: "E"

PROBLEMA 22:

En la figura adjunta se muestra la región R sombreada :

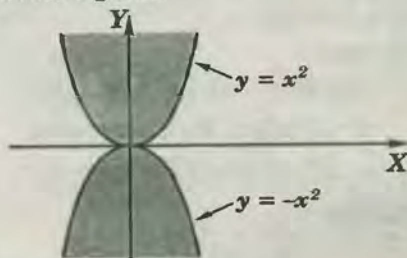


Si la región R se puede representar mediante un sistema de inecuaciones, entonces el sistema es:

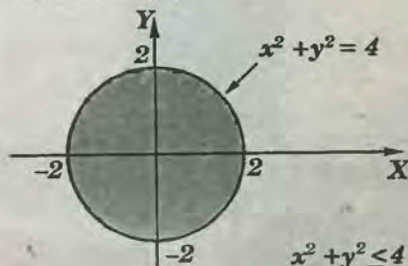
A) $\begin{cases} |y| \ge x^2 \\ x^2 + y^2 \le 4 \end{cases}$ B) $\begin{cases} |y| \le x^2 \\ x^2 + y^2 \ge 4 \end{cases}$ C) $\begin{cases} |y| \ge x^2 + 1 \\ x^2 + y^2 \le 4 \end{cases}$

RESOLUCIÓN:

* Nótese que la región sombreada es la intersección de estas dos regiones:



$y \ge x^2 \vee y \le -x^2 \rightarrow |y| \ge x^2$



* Luego, R está definida por : $\begin{cases} |y| \ge x^2 \\ x^2 + y^2 \le 4 \end{cases}$

RPTA: "A"

PROBLEMA 23:

Si A es un conjunto definido por:

$A=\{(x;y)\in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} / x^2+y^2\leq 1 \wedge x^2+y^2\leq 6y-8 \wedge y\leq -x^2\}$,

entonces el cardinal del conjunto A es:

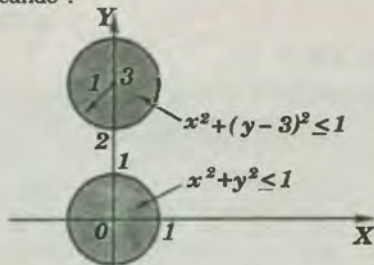
A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

RESOLUCIÓN:

* De: $x^2+y^2\leq 1 \wedge x^2+y^2\leq 6y-8$

$\rightarrow x^2+y^2\leq 1 \wedge x^2+(y-3)^2\leq 1$

* Graficando :



*No hay intersección , Con lo cual : $A=\phi$; $n(A)=0$

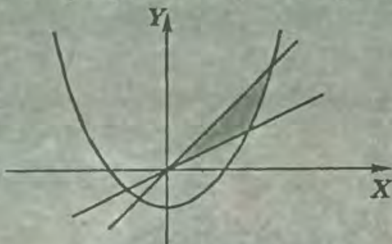
RPTA: "A"

PROBLEMA 24 :

Si M y S son dos conjuntos definidos por :

$$M=\left\{(x;y)\in R\times R / \frac{y}{2}\leq x\leq 2y\right\}$$

$$S=\{(x;y)\in R\times R / y+1<x^2\}$$



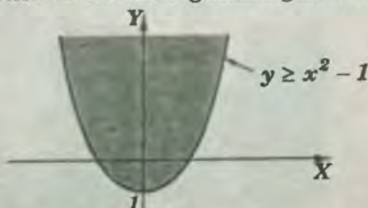
Entonces la región sombreada mostrada en la figura adjunta, se puede representar mediante:

A) $M\cup S$ B) $M\cap S$ C) $(M\cap S)^C$ D) $M-S$

RESOLUCIÓN:

* Nótese que la región sombreada de la figura es la intersección de las dos regiones siguientes:

1°)

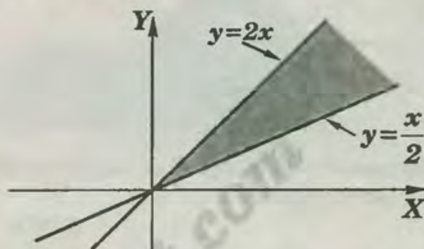


Si $S=\{(x;y)\in R\times R / y+1<x^2\}$

$\rightarrow$ La región anterior está dada por :

$S^C=\{(x;y)\in R\times R / y+1\geq x^2\}$

2°) $y\leq 2x \wedge y\geq \frac{x}{2}$



$\Rightarrow \frac{y}{2}\leq x \wedge x\leq 2y \Rightarrow \frac{y}{2}\leq x\leq 2y$

$\rightarrow$ La región está dada por M.

* Luego, la región pedida está dada por :

$$S^C\cap M=M-S$$

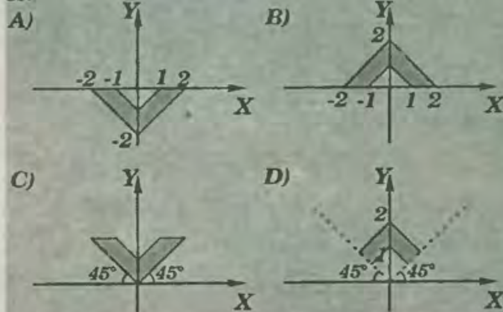
RPTA: "D"

PROBLEMA 25:

La figura que mejor representa la gráfica de la región definida por el conjunto.

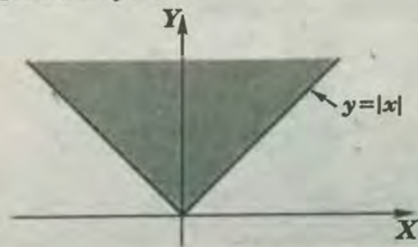
$A=\{(x;y)\in \mathbb{R}\times\mathbb{R} / y\geq |x| \wedge |x|+|y|\geq 1 \wedge |x|+|y|\leq 2\}$

es:

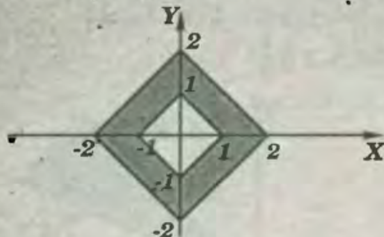


RESOLUCIÓN:

* La gráfica de $y\geq |x|$ es:



*La gráfica de : $|x|+|y|\geq 1 \wedge |x|+|y|\leq 2$ que es lo mismo que : $1\leq |x|+|y|\leq 2$ es :



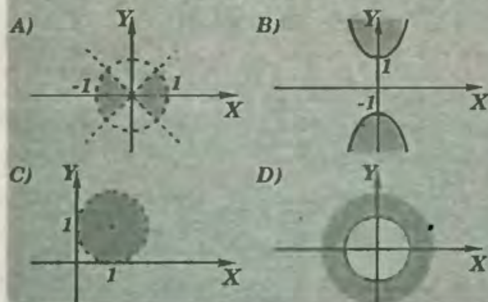
La intersección de éstas dos genera la región definida por el conjunto **A** .

RPTA: "D"

PROBLEMA 26 :

La figura que mejor representa la gráfica de la región definida por el conjunto:

$$M=\left\{(x;y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\,/\,\frac{1}{|x^3y^2|-|x^2y^3|}\geq 0\wedge\frac{1}{x^4y^2+x^2y^4-x^2y^2}\leq 0\right\}$$



RESOLUCIÓN :

* De «M», se obtiene :

$|x^3y^2|-|x^2y^3|>0 \wedge x^4y^2+x^2y^4-x^2y^2<0$

$\rightarrow x^2y^2(|x|-|y|)>0 \wedge x^2y^2(x^2+y^2-1)<0$

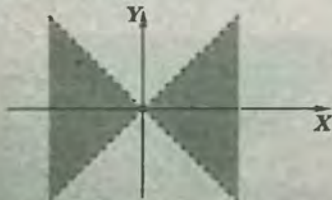
$\rightarrow xy\neq 0 \wedge |x|-|y|>0 \wedge x^2+y^2-1<0$

$\rightarrow xy\neq 0 \wedge |x|>|y| \wedge x^2+y^2<1$

* Con lo cual **M** queda así:

$M=\{(x;y)\in R\times R\,/\,xy\neq 0 \wedge |x|>|y| \wedge x^2+y^2<1\}$

* La gráfica de $|x|\geq|y|$ es:



* La gráfica de: $x^2+y^2<1$ es el interior de un disco, centrado en el origen y con radio *1* (sin el borde).

* Luego , intersectando se obtiene :



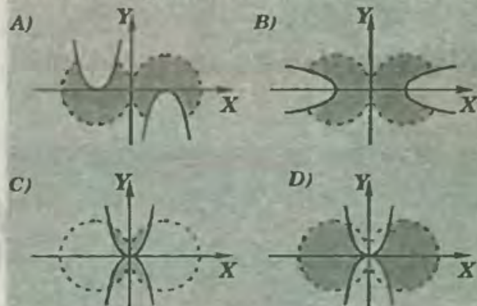
RPTA: "A"

PROBLEMA 27:

Los valores reales x e y que satisfacen el sistema:

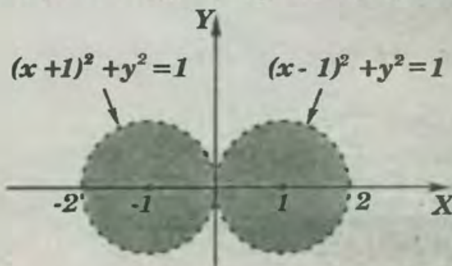
$$\begin{cases}x^2+y^2<2|x|\\|y|\leq x^2\end{cases}$$

Forman la región sombreada representada por:

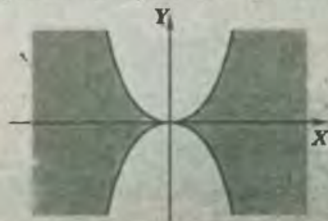


RESOLUCIÓN:

* De la primera : $(|x|-1)^2+y^2<1$ cuya gráfica es :



* De la segunda: $-x^2\leq y\leq x^2$ y su gráfica es:



* La intersección de éstas dos regiones es la región definida por el sistema.

RPTA: "D"

PRIMERA PRACTICA DIRIGIDA

01 Si $(4a-2; 2b+1) = (18; 7)$

Hallar: "$a + b$"

A) 2 B) 4 C) 6 D) 8 E) 9

02 Si los pares ordenados $(a^2 + 1; b-2)$ y $(10; 5)$ son iguales. Hallar $(a ; b)$.

A) (4 ; 5) B) (1 ; 2) C) (3 ; 7) D) (2 ; 3) E) (1 ;2)

03 Si los pares ordenados $(3y-1 ; 10)$,$(11;2x+4)$.

Hallar: $x - y$

A) 3 B) −1 C) −2 D) 4 E) −6

04 Dado los conjuntos:

$A = \{2 ; 4 ; 5\}$ y $B = \{7 ; 9 ; 10\}$

Hallar: a) $A \times B$ b) $B \times A$

05 Dado los conjuntos:

$A=\{x \in N / 1 < x < 6\}$ $B = \{x \in N / 3 \le x \le 7\}$

Hallar: a) $n(A \times B)$ b) $n(B \times A)$

06 Sea "R" dedefinida en $A \times A$ tales que:

$A=\{3 ; 5 ; 7\}$ $R = \{(a ; b) \in A \times A / x < y\}$

A) R es transitiva B) R es reflexiva C) R es sinétrica
D) A y B E) B y C

07 Dado: $A = \{1; 2; 3; 4\}$

Hallar: $A \times A$

08 Sean los conjuntos:

$A = \{1; 2; 3; 8; 9\}$; $B = \{1;3; 5;7; 9\}$.

Se define la relación

$R=\{(a;b) \in A \times B / a + b =$ impar$\}$

Calcular: $n(R)$

A) 7 B) 8 C) 9 D) 10 E) 12

09 Dado los conjuntos:

$A = \{2 ; 4 ; 6 ; 8\}$; $B = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$.

Se define la relación $R=\{(a;b) \in A \times B / a \le B\}$

Calcular $Dom(R)$

A) {2 ; 4 ; 6} B) {2 ; 4 ; 6 ; 8} C) {1 ; 2 ; 3 ; 4}
D) {2 ; 4 ; 8} E) N.A.

10 Sean los conjuntos:

$A = \{2; 4; 5; 6; 8\}$, $B = \{1; 2; 3; 4; 5\}$ y "R" una relación:

$R = \{(a ; b) \in A \times B / a < b\}$; Calcular $n(R)\}$

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

11 Sea: $A=\{3; 4; 5\}$, $B=\{9; 12; 14\}$. Sea la relación:

$R=(a;b) \in A \times B / b=3a$; Calcular $n(R)$

A) 2 B) 3 C) 5 D) 7 E) 4

12 Sea: $A = \{2 ; 5 ; 7 ; 8\}$; $B = \{4 ; 10 ; 14 ; 15\}$.
Sea la relación:

$R=\{(a;b) \in A \times B / b=2a\}$; Calcular $n(R)$

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

13 En una relación "R" definida en "$A \times B$". Indicar Verdadero (V) o Falso (F) según corresponda:

A) $n(A \times B) = n(A) \times n(B)$ B) $Dom(R) \subset A$
C) $Rango (R) = B$ D) $A \times B = B \times A$

A) FVVF B) VFFV C) FVFV D) FVVV E) N.A.

14 En el conjunto $A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ se define la relación por $R = \{(x; y) \in A \times A$ / "x es divisor de y"$\}$. Hallar el valor de verdad de las siguientes afirmaciones.

I) R es reflexiva II) R es Transitiva
III) R es simétrica.

A) VFF B) FVV C) VFV D) FVF E) N.A.

15 Sea el conjunto $A = \{1; 2; 3\}$ en el cuál se define la relación R.

$R=\{(x; y) / x + y \le 6\}$, entonces "R" será

A) Simétrica B) Reflexiva C) Transitiva
D) Simétrica y transitiva E) N.A

16 Si: $A = \{1; 2; 3\}$. Determinar cual(es) de las siguientes relaciones es reflexiva.

$R_1 = \{(1 ; 1); (1 ; 2); (2 ; 2); (3 ; 1)\}$
$R_2 = \{(1 ; 1); (2 ; 2,); (3,3)\}$
$R_3 = \{(1 ; 3); (2 ; 2); (1;1); (1 ; 2); (3 ; 3)\}$

A) Todas B) R_1 C) R_2 D) R_3 E) R_2 y R_3

17 Sea el conjunto $A=\{2; 3;5\}$ en el cuál se define la relación "R"

$R=\{(x ; y) / x + y \le 8\}$, entonces "R" será:

A) Reflexiva *B) Reflexiva, simétrica* *C) Simétrica*
D) Transitiva *E) Simétrica y Transitiva*

18 Dada la siguiente igualdad de pares ordenados:

$(2x ; y + 6) = (x + 4 ; 3y)$.

Indicar "xy"

A) 6 *B) 8* *C) 10* *D) 12* *E) 16*

19 Sean los conjuntos:

$A = \{1; 3; 4; 5; 6\}$; $B = \{2; 4; 6\}$ y la relación "R"

$R = \{(a; b) \in A \times B \ / \ a + b = 7\}$

¿Cuántos elementos tiene R?

A) 2 *B) 3* *C) 4* *D) 5* *E) 6*

20 Si tenemos el conjunto $A = \{2; 3; 4; 5; 6\}$ y la relación "R"

$$R = (x; y) \in A \times A \ / y > x\}$$

Hallar $D_F \wedge R_F$

A) {6} *B) {3, 4}* *C) {2,6}* *D) {2,3,4}* *E) {3, 4, 5}*

TAREA DOMICILIARIA

01 Dada la siguiente igualdad de pares ordenados:

$$(2x + 5; 18) = (17 ; 4y - 2)$$

Indicar "$xy - x + y$"

02 Dados los conjuntos:

$A = \{a \in N \ / \ a$ *es impar*$\}$ $B = \{b \in N$ si b *es par*$\}$

$R = \{(a; b) \in A \times B \ / \ a + b$ es primo menor que $10\}$

Calcular $n(R)$.

03 Calcular "$a + b$" sabiendo que:

$$(a + b; 8) = (16; a - b)$$

04 Sean: $A = \{2 ; 3; 4; 5\}$; $B = \{3; 6; 7; 10\}$ y

$R = \{ (x; y) \in A \times B \ /$ "x divide a y" exactamente$\}$

entonces $n(R)$ es:

05 Dados los conjuntos:

$A = \{1; 2; 3; 4; 5\}$; $B = \{3; 4 ; 6; 7; 8\}$

y $R = \{(x; y) \in A \times B \ / \ y = x + 2\}$

06 Si: $A = \{x \ / \ x$ es par menor que $5\}$

$R = \{(a; b) \in A \times A \ / \ a = b\}$; entonces "$R$" será:

A) reflexiva *B) simétrica* *C) transitiva*
D) A y B *E) B y C*

07 La relación "R" está definida en el conjunto:

$A = \{2; 3; 5\}$ siendo $R = \{(a; b) \in A \times A \ / \ a \neq b\}$

¿Qué propiedad o propiedades cumple "R"?

A) reflexiva *B) simétrica* *C) transitiva*
D) A y B *E) N.A.*

08 Sea "R" definida en "$A \times A$" tales que:

$A = \{2; 4; 6\}$; $R = \{(a ; b) \in A \times A \ / \ a$ es múltiplo de $6\}$

entonces "R" es :

A) R es simétrica *B) R es reflexiva*
C) R es transitiva *D) R es de equivalencia*
E) N.A.

09 Dado:

$A = \{2; 4; 6\}$ se define la relación "R" tal que si:

$R = \{(2;2); (2; 4); (2 ; 6); (4 ; 4); (4 ; 6); (6;6)\}$

entonces "R" es:

A) Reflexiva *B) Simétrica*
C) Simétrica y Transitiva *D) A y C*
E) R es de orden

10 Sea "R" definida en "$A \times A$" tales que:

$A = \{1 ; 3 ; 6 ; 9\}$; $R = \{(a ; b) \in A \times A \ /$ "..... es divisor de ......"$\}$

entonces "R" es:

A) R es simétrica *B) R es reflexiva*
C) R es transitiva *D) A y B*
E) R es equivalente

SEGUNDA PRACTICA DIRIGIDA

01 Si: $A = \{x \ / \ x \in N \ ; \ 4 < x < 8\}$, el número de pares de $B = \{(a; b) \in A \times A \ / \ a + b = 12\}$ es:

A) 1 *B) 2* *C) 3* *D) 4*

02 Si $A = \{1; 2 ; 3\}$ y $B = \{0 ; 1 ; 2\}$, halla el número de elementos de $A \times B$

A) 6 *B) 5* *C) 9* *D) 3*

03 Si $A = \{2 ; 4 ; 6 ; 8\}$, $B = \{1; 3 ; 5 ; 7\}$ y $C = \{(a; b) \in A \times B \ / \ a < b\}$, el número de elementos de C es:

A) 5 *B) 3* *C) 4* *D) 6*

04 Si el par ordenado $(x + 3; y - 2)$ es igual a $(4 ; 3)$, el valor de $x + y$ es:

A) 6 *B) 7* *C) 5* *D) 8*

05 Sabiendo que $C=\{(a;b)\in A\times B/a-b=2\}$, ¿cuál de los siguientes pares ordenados no pertenece a C?

A) (3; 1) B) (6; 7) C) (–4; –6) D) (–3; –5)

06 Si los pares ordenados: $(2a+2;14)$, $(10;b^2-2)$ son iguales . Hallar «$a+b$»

A) 8 B) 9 C) 10 D) 11 E) 12

07 Si: $A=\{4;7;10;12\}$ y $B=\{1;3;8\}$

Determinar: $R=\{(a;b)\in A\times B/a<b\}$; dar «$n(R)$»

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

08 Si: $A=\{1;2;4\}$ y $B=\{1;4;9\}$

Determinar «R» y dar el número de elementos de su dominio.

$$R=\{(x;y)\in A\times B/x^2=y\}$$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

09 Indicar verdadero (V) o falso (F), según corresponda; respecto a una relación «R» definida de «A» en «B»

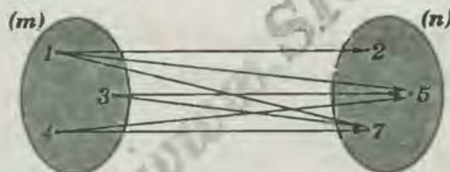
I) $n(A\times B)=n(A)\times n(B)$

II) (Rango) =n(Dominio)

III) $R\subset A\times B$

A) VFV B) VVF C) VVV D) VFF E) FVV

10 En el diagrama sagital, cuál es la regla de correspondencia:



A) $M\leq N$ B) $M=N$ C) $M+1=N$
D) $M<N$ E) más de una es correcta

11 Dado el conjunto: $A=\{1;2;3;4\}$

¿Cuáles de las siguientes relaciones son reflexivas?

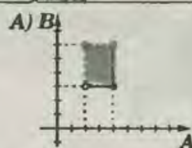
$R_1=\{(1;1),(2;2),(4;4)\}$

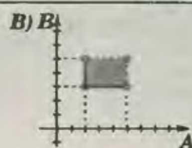
$R_2=\{(1;1),(3;3),(4;4)\}$

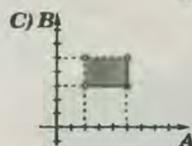
$R_3=\{(1;1),(2;2),(3;3),(4;4)\}$

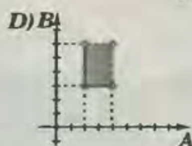
A) Todas B) Sólo R_1 C) Sólo R_2
D) Sólo R_3 E) R_1 y R_3

12 ¿Cuál es la gráfica del producto cartesiano $A\times B$ de los intervalos: $A=[2;4\rangle$ y $B=[3;6\rangle$?

A)


B)


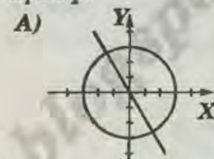
C)


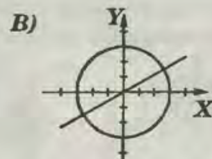
D)


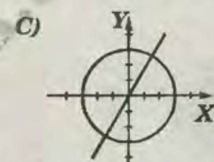
13 En $\mathbb{R}$ se definen las relaciones:

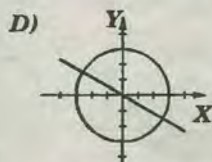
$$R_1=\{(x;y)\in \mathbb{R}\times\mathbb{R}/x^2+y^2=9\}$$
$$R_2=\{(x;y)\in \mathbb{R}\times\mathbb{R}/x-3y=0\}$$

¿Cuál de las siguientes gráficas representa mejor a $R_1\cup R_2$?

A)


B)


C)


D)


14 Dados los intervalos: $A=\langle -1;4\rangle$ y $B=[-2;5]$ ¿cuál de los siguientes pares ordenados pertenecen al producto cartesiano de A y B?

A) (–1; –2) B) (–1; 5) C) (4; –2)
D) (4; 5) E) (1; –2)

15 En $\mathbb{R}$ se definen las relaciones:

$$S=\{(x;y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}/y=x^2-4x+3\}$$
$$T=\{(x;y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}/y=-2x-2\}$$

¿Cuál es el número de elementos de $S\cap T$?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

16 Hallar el rango de la relación definida por:

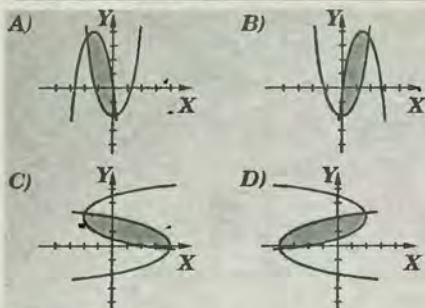
$$R=\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}/x^2+y^2-4x-6y+9=0\}$$

A) [–2; 2] B) [–3; 1] C) [1;5] D) [–4 ;0] E) [0 ; 4]

17 En $\mathbb{R}$ se definen las relaciones:

$$R_1=\{(x;y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}/y=x^2-2\}$$
$$R_2=\{(x;y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}/y=-x^2+4x\}$$

¿Cuál de las siguientes gráficas representa mejor la región comprendida entre R_1 y R_2?



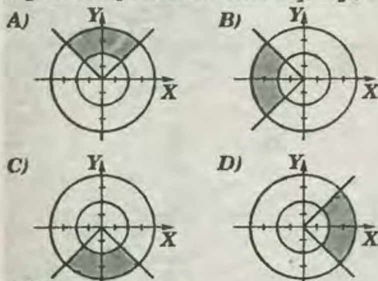
18 En $\mathbb{R}$ se definen las relaciones:

$R_1=\{(x;y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\ /\ x^2+y^2=4\}$

$R_2=\{(x;y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\ /\ x^2+y^2=16\}$

$R_3=\{(x;y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}/\ y=|x|\}$

¿Cuál de las siguientes gráficas representa mejor la región comprendida entre R_1, R_2 y R_3?



19 En $\mathbb{R}$ se definen las relaciones:

$R_1=\{(x;y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}/\ y=x^2+2x-2\}$

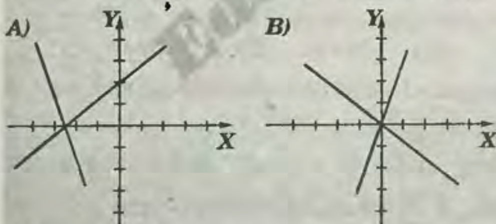
$R_2=\{(x;y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}/\ y=x\}$

Hallar el dominio de la relación determinada por la región comprendida entre R_1 y R_2.

A) $[-2; 1]$ B) $[-3; 0]$ C) $[1; 4]$ D) $[-4; -1]$ E) $[0; 3]$

20 Bosquejar la gráfica de la relación:

$R=\{(x;y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}/x^2-xy-2y^2=0\}$



21 Sea la relación «R» definida en los números naturales por: $R=\{(a;b)\in\mathbb{N}/\mathbb{N}a+2b=10\}$

Hallar: $Dom(R)\cap Ran(R)$

A) $\{4\}$ B) $\{2; 4\}$ C) $\{0; 2; 4\}$
D) $\{0; 2\}$ E) $\{4; 6\}$

22 Sea la relación «R» definida en «A», donde :

$A=\{1; 2; 3\}$

$R=\{(1;1), (2;2), (1;2), (2;1), (3;3), (3;1), (1;3)\}$

Afirmamos:

I) «R» es reflexiva II) «R» es simétrica
III) «R» es transitiva

A) Sólo I B) Sólo II C) Sólo III
D) I y II E) Todas

23 Si: $M=\{2; 3; 4\}$, hallar «$n(R)$», si:

$R=\{(x; y)\in M^2/x+y\le 6\}$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 6

24 Si: $A=\{2; 3; 4; 5\}$

Hallar el $n[Ran(R)]$; si $R=\{(x; y)\in A^2\ /\ x+y=7\}$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

TAREA DOMICILIARIA

01 El valor de $x+y$ si $(2x-y\ ;\ x+2y)=(5;5)$ es:

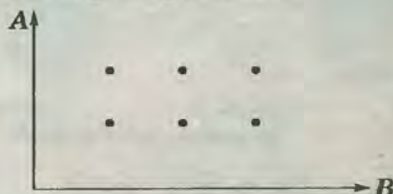
A) 6 B) 5 C) 4 D) 3

02 Sabiendo que: $A=\{1; 5; 9; 13\}$ y $B=\{2; 6; 10\}$, halla el número de elementos R si:

$R=\{(a; b)/(a;b)\in B\times A\ ,\ \text{si } a>b\}$

A) 3 B) 4 C) 6 D) 5

03 Si A tiene 2 elementos y B tiene 3 elementos, el siguiente diagrama pertenece a :



A) A×A B) B×B C) B×A D) A×B

CLAVES DE LA SEGUNDA PRACTICA

01) C	02) C	03) D	04) A	05) B
06) A	07) B	08) B	09) A	10) E
11) D	12) D	13) B	14) E	05) C
16) E	17) B	18) A	19) A	
01) C	02) C	03) C		



OBJETIVOS :

* Saber reconocer a una función, así como determinar su dominio y rango.
* Graficar adecuadamente todo tipo de funciones elementales.
* Conocer otras características de algunas funciones especiales.

INTRODUCCIÓN :

Uno de los conceptos más importantes del análisis matemático es sin duda el concepto de función cuyo origen e invención no están del todo claro, tal es así que durante todo el siglo ***XVIII*** se desató una larga y cruel polémica entre los matemáticos ingleses y los del continente europeo. Los ingleses acusaban a Leibnitz de haber traducido la obra de Newton (Inglaterra ***1642 – 1727)*** y los del contienente europeo argumentaban que Newton era el ladrón.

Actualmente, mediante una función, los matemáticos buscan describir de la forma más precisa , la relación que existe entre dos variables ; en especial si éstas corresponden a aspectos de la vida real , como por ejemplo: ciertos cambios de los fenómenos físicos en el tiempo; la relación entre el precio de un producto y su aceptación en el mercado , o la dependencia entre el costo financiado de un bien y el número de cuotas a pagar , etc. En síntesis, empleamos ***funciones*** para ***analizar numéricamente*** las ***relaciones de causa y efecto***, es decir la correspondencia entre un valor de entrada y otro de salida .

Una función es una relación especial.

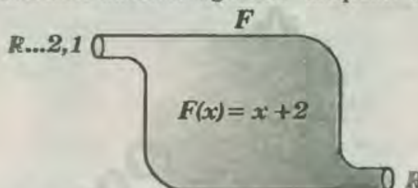
Ilustremos esta especialidad con unos ejemplos:



La máquina "***F***" realiza una función : cumple la tarea de colocar una única tapa a cada botella.

Observemos que en nuestro ejemplo relacionamos dos conjuntos , las botellas que llamaremos dominio y las tapas que llamaremos codominio de la relación. ***A*** esta clase de relación la llamaremos "***Función***"

Consideremos ahora la siguiente "máquina" ***F***.



El dominio de la función ***F*** es el conjunto de los reales y el codominio es el mismo.

Al entrar un número en ***F***, la "***máquina***" lo triplica y le suma dos ; por ejemplo , al entrar el ***1*** sale el ***5***; al entrar el ***3*** sale el ***11***, etc. Realmente lo que se tiene es una relación entre dos conjuntos ; y la formalizamos, así :

$F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que a cada x del dominio le asigna un único elemento en el codominio , los elementos del codominio que son asignados a elementos del domino se les llama ***imágenes.*** Nuestro ejemplo se formaliza , así :

$F: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad F(x) = 3x + 2$

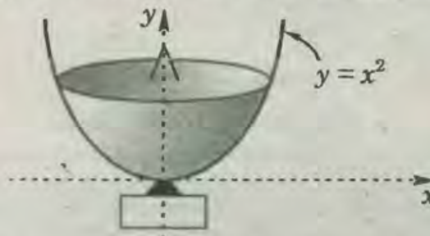
$1 \to 5$

$2 \to 8$

$x \to F(x)$

Muchas figuras geométricas que se ven en la vida cotidiana , pueden representarse por gráficas de funciones.

* La parábola $y = x^2$ en una antena parabólica.

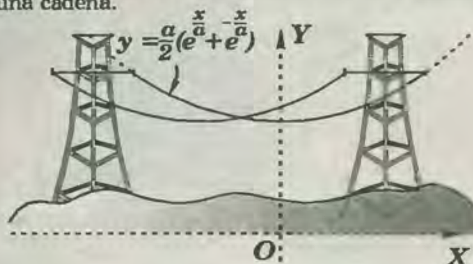


* El electroencefalograma de una persona durante el sueño profundo, tiene similitud a la gráfica de un senoide .



* La ecuación que representa la forma del cable es: $y=\frac{a}{2}(e^{x/a}+e^{-x/a})$ donde a es un número real.

Se dice que la gráfica tiene forma de catenaria, palabra derivada del latín, que designa lo referente a una cadena.



CONCEPTOS PREVIOS

CORRESPONDENCIA:

La noción de correspondencia se nos presenta con frecuencia en nuestra vida diaria, y es un punto importante para entender lo que es una función.

EJEMPLOS :

* A cada libro de una biblioteca le corresponde un número de páginas que tiene .

* A cada ser humano le corresponde una fecha de nacimiento .

Para cada correspondencia en el ejemplo anterior se necesitan dos conjuntos, *A* y *B*. En el primer ejemplo, *A* representa el conjunto de libros de una biblioteca, y *B* es el conjunto de enteros positivos. *A* cada libro, *x*, en "*A*", corresponde un entero positivo "*y*" en *B* , que es el número de páginas de ese libro.

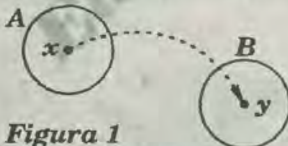


Figura 1

A veces se representan las correspondencias mediante diagrama del tipo de la ***Figura 1***, en el cual los conjuntos *A* y *B* están representados por puntos dentro de regiones de un plano. La flecha curva indica que el elemento ***y*** de *B* corresponde al elemento *x* de *A* . Es importante hacer notar que a cada "*x*" en *A* corresponde exactamente una "*y*" en *B*.

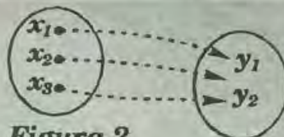


Figura 2

Sin embargo, el mismo elemento de *B* puede corresponder a diversos elementos de *A* (***ver figura 2***). Por ejemplo dos libros pueden tener el mismo número de páginas , dos personas o más pueden tener el mismo aniversario.

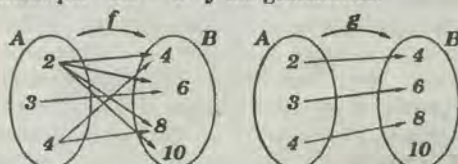
APLICACIÓN :

Una aplicación es una correspondencia en la que a cada elemento del conjunto de partida se le asocia un único elemento del conjunto de llegada.

Toda aplicación es una correspondencia pero no toda correspondencia es una aplicación. Sabemos que en una correspondencia podemos asociar un elemento de *A* con cualquiera de los elementos de *B*, dado un criterio establecido que los relaciona. Una correspondencia , bajo ciertas condiciones, es una ***aplicación*** .

EJEMPLO:

Dados $A=\{2;3;4\}$ y $B=\{4;6;8;10\}$, establecemos la correspondencia ***f*** definida por «a divide b» y ***g*** definida por «$2a=b$» y las graficamos.



$f{:}A\to B=\{(2;4),(2;6),(2;8),(2;10),(3;6),(4;4),(4;8)\}$

$g{:}A\to B=\{(2;4),(3;6),(4;8)\}$

*En los ejemplos vemos dos tipos de correspondencia .

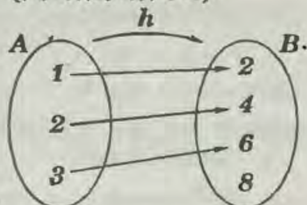
Sólo: $g: A\to B$ responde al concepto de aplicación porque en ella el conjunto de partida coincide con el conjunto dominio y a cada elemento del domino le corresponde ***una sola imagen.***

APLICACIÓN INYECTIVA :

Una aplicación es inyectiva cuando todo elemento del conjunto de llegada que es imagen sólo tiene una antimagen en el conjunto dominio.

Dados: $A=\{1;2;3\}$ y $B=\{2;4;6;8\}$, definimos la correspondencia $h: A\to B$ por el criterio «$a=\frac{b}{2}$» y la graficamos.

$h:A \to B = \{(1;2),(2;4),(3;6)\}$



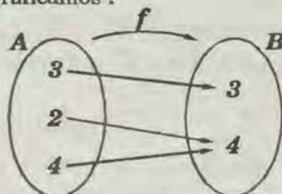
En una aplicación inyectiva, no es necesario que el conjunto ***rango coincida*** con el conjunto de llegada.

APLICACIÓN SURYECTIVA :

Una aplicación es suryectiva cuando el conjunto de llegada coincide con el conjunto rango.

EJEMPLO:

Dados $A=\{3;2;4\}$ y $B=\{3;4\}$, establecemos la correspondencia $f:A \to B$ definida por «*a* es divisor de *b*» y la graficamos :



$f:A \to B = \{(3;3),(2;4),(4;4)\}$

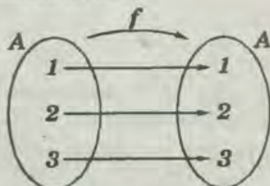
* En esta aplicación el conjunto ***rango*** coincide con el conjunto de llegada , por eso *f* es una aplicación suryectiva.

APLICACIÓN BIYECTIVA :

Una aplicación es biyectiva cuando es a la vez inyectiva y suryectiva.

EJEMPLO:

Dado : $A=\{1;2;3\}$, establecemos la aplicación $f: A \to A$ definida por «*a* = *b*» y la representamos en el diagrama de flechas.



$f:A \to A = \{(1;1),(2;2),(3;3)\}$

Observamos que :

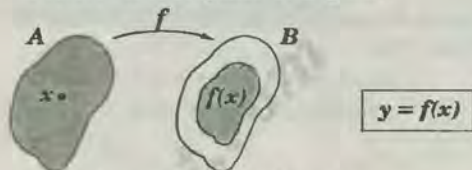
* $f: A \to A$ es una aplicación inyectiva , porque cada elemento de A que es imagen , sólo tiene una antiimagen.

* $f: A \to A$ es una aplicación suryectiva , porque el conjunto rango coincide con el conjunto final.

* Por lo tanto la aplicación $f: A \to A$ es biyectiva.

OBSERVACIÓN

Para una aplicación , todo el conjunto de partida es el domino de la aplicación , sin embargo, el rango está incluido en el conjunto de llegada .



dominio conjunto de llegada

FUNCIONES

Dados dos conjuntos no vacíos **A** y **B** llamaremos función de **A** en **B** al conjunto de pares ordenados ***(x; y)*** tales que a cada $x \in A$, le corresponde un único $y \in B$.

* Es decir toda relación entre dos conjuntos no vacíos **A** y **B**, que verifique:

I) Todo elemento de **A** está relacionado con alguno del conjunto **B**.

II) Cada elemento de **A** está relacionado con un único elemento de **B**.

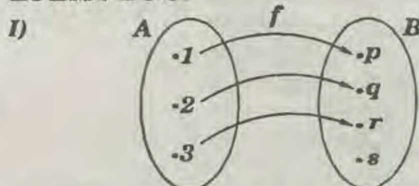
Se llama función de **A** en **B**. Formalmente:

$f \subset A \times B$ es una función de **A** en **B**, sí y sólo si:

$$\forall x \in A, \exists ! y \in B / (x;y) \in f$$

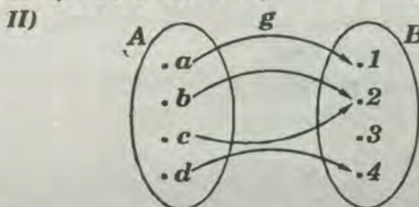
EJEMPLOS:

I)



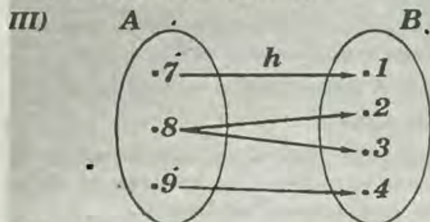
$f=\{(1;p),(2;q),(3;r)\}$ .....«***es una función***»

II)



$g=\{(a;1),(b;2),(c;2),(d;4)\}$ .... «*es una función*»

III)

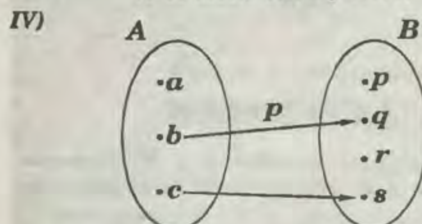


«*h*» no es función pues no cumple con la condición de la definición :

«...le asocia un único elemento...»

(8 se asocia con 2 y con 3)

IV)



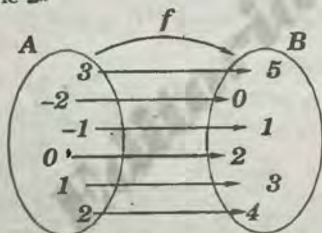
«*p*» no es función pues no cumple con la condición de la definición:

«...a todo elemento del conjunto A...»

(«*a*» no se asocia con algún elemento de *B*)

OBSERVACION :

Toda aplicación biyectiva entre conjuntos numéricos es también una función. Dados $A=\{2;3;1\}$ y $B=\{4;7;1\}$, veamos la aplicación $f:A\to B$ definida por el criterio «multiplicar por 2 y restarle 2»



* Ningún elemento de *A* tiene más de una imagen . (*Aplicación inyectiva*)

* Todos los elementos de *B* tienen antiimagen. (*Aplicación suryectiva*)

* Entonces, esta aplicación es biyectiva y por lo tanto, es una función.

NOTA :

Toda función es una relación, pero no toda relación es una función.

NOTACIÓN:

La función *f* de *A* en *B* se denota por :

$f:A\to B$ ó $A\xrightarrow{f}B$

Se lee *f* es una función de *A* en *B*.

CONDICIÓN DE EXISTENCIA Y UNICIDAD

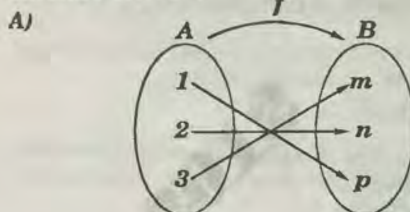
Sea : $f:A\to B$, una función luego se debe cumplir:

I) Para cada $x\in A,\ \exists!\ y\in B/(x,y)\in f$

II) Si: $(x;y)\in f\ \wedge\ (x;z)\in f$, entonces $y=z$

EJEMPLO 1 :

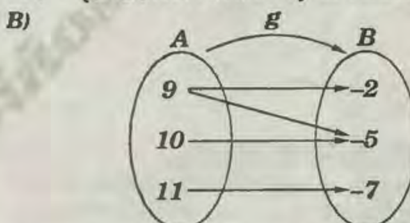
A)



* Cumple la condición *I* y *II*

$\to f=\{(1;p),(2;n),(3;m)\}$ es función

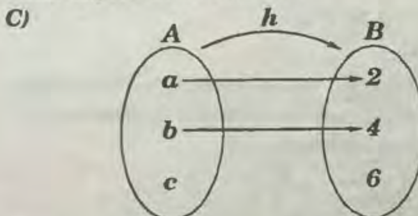
B)



* No cumple *II*, pues $(9;-2)$ y $(9;-5)\in g$.

$\to g=\{(9;-2),(9;-5),(10;-5),(11;-7)\}$ es una relación pero no es función.

C)



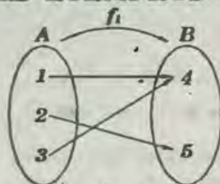
* No cumple *I* pues el elemento $c\in A$ no está relacionado con ningún elemento de *B*.

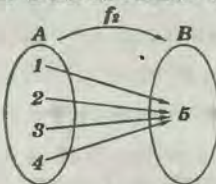
$\to h=\{(a;2),(b;4)\}$ es una relación pero no es función.

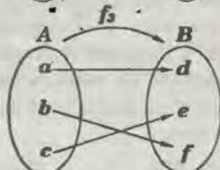
NOTA :

En una función , dos pares ordenados distintos no deben tener la misma primera componente.

MÁS EJEMPLOS DE FUNCIONES :

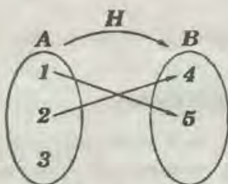


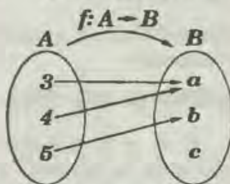






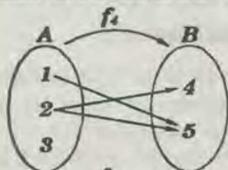
$f=\{(1;7),(3;4),(2;6)\}$

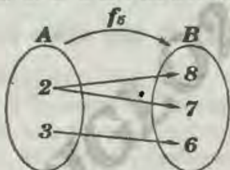


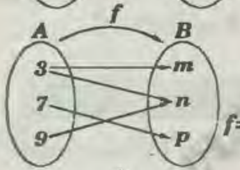


$H=\{(1;5),(2;4),(3;4)\}$ $\quad f=\{(3;a),(4;a),(5;b)\}$

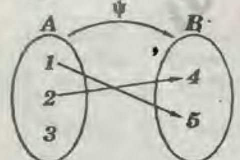
MÁS EJEMPLOS DE NO FUNCIONES:





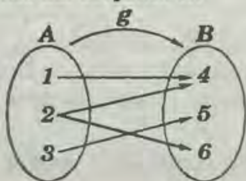


$f=\{(3;m),(3;n),(7;p),(9;n)\}$



No es función es una relación

ψ: No es función ya que 3 no se corresponde con ningún elemento del conjunto B.



$g=\{(1;4),(2;4),(2;6),(3;5)\}$

Vemos $(2;4)\in g \wedge (2;6)\in g$ pero $4\neq 6$

$\rightarrow g$ no es función es relación.

$f=\{(-2;1),(2;1),(5;6),(6;7),(5;8)\}$

«f» no es función pues $(5;6)\in f \wedge (5;8)\in f$ pero $6\neq 8$

EJERCICIO:

Hallar los valores de «a» y «b» para que el siguiente conjunto de pares ordenados sea una función.

$A=\{(2;5),(-1;-3),(2;2a-b),(-1;b-a),(a+b^2;a)\}$

RESOLUCIÓN:

* En una función dos pares distintos nunca tienen el mismo primer elemento.

$(2;5)$ y $(2;2a-b)\in A \Rightarrow 5=2a-b$ ....(I)

$(-1;-3)$ y $(-1;b-a)\in A \Rightarrow b-a=-3$

* De (I) y (II), resulta :

$a=2$ y $b=-1$

$\Rightarrow f=\{(2;5),(-1;-3),(3;2)\}$

FUNCIÓN REAL EN VARIABLE REAL

Una función $f: A\rightarrow B$ es una función real en variable real si y sólo si A y B son sólo subconjuntos de $\mathbb{R}$, es decir, el dominio y el rango son subconjuntos de los números reales.

Aunque en nuestro estudio estaremos interesados principalmente en funciones que tienen dominio y rango en $\mathbb{R}$, el concepto de función es más general, puesto que podemos hablar de conjunto de pares ordenados de elementos sin restricción alguna sobre la naturaleza de los elementos. Por ejemplo, en la correspondencia de un conjunto de estudiantes, con las notas que les asigna su profesor, cada par ordenado tiene como primer elemento un estudiante, el cual no es un número real.

NOTACIÓN FUNCIONAL :

Las notaciones en matemática han sido fundamentales para el avance de esta ciencia; la elección de una notación adecuada puede ahorrarnos gran cantidad de trabajo al resolver un problema. Hace mucho tiempo los matemáticos idearon una notación èspecial para denotar funciones, esta notación marcaba la dependencia de la variable.

Para nombrar a la función se utiliza una letra, como f, g, h. Entonces $f(x)$ que se lee f de x representa la función evaluada en el punto x; es decir, el valor que la función asigna a x.

También se le puede representar así :

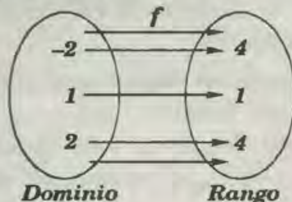
$$f: A \to B$$
$$x \to f(x)$$

en donde A es el domino y B el conjunto de llegada . El rango de la función R_f está contenido en el conjunto de llegada $(R_f \subset B)$.

EJEMPLO 1:

Si f es la función con dominio $D_f = \{-2;1;2\}$ que a cada valor le asigna su cuadrado, tendremos:

$f(-2)=4$; $f(1)=1$; $f(2)=4$



y en general: $f(x) = x^2$

A este último resultado se le llama ***regla de correspondencia de f***, la cual nos indica de manera breve y directa lo que f hace con cualquier número x.

Además de la notación $f(x)$, podemos indicar las correspondencias entre valores del dominio y del rango, mediante flechas, observándose, con mayor claridad, que a cada elemento del dominio le corresponde exactamente un elemento del rango.

EJEMPLO 2 :

Sea la función $f(x)$, que a cada valor de x le asigna su cuadrado aumentado en cinco.

*En este caso: $f(x)=x^2+5$ es la regla de correspondencia de la función.

* Si deseamos hallar $f(4)$, reemplazaremos $x=4$ en la fórmula.

* Esto es : $f(4) = 4^2 + 5 = 21$

* Si escribimos: $f(a) = a^2 + 5$; $f(z) = z^2 + 5$

* Estamos representando la misma función, la letra utilizada para la variable del dominio no tiene importancia, pero en general se usará x. En este caso al no existir restricciones para x, asumimos que $D_f = \mathbb{R}$

* Al parecer no existen problemas al usar esta notación , pero si en lugar de x se sustituye una expresión algebraica , se debe proceder con cuidado.

* Veamos :

$$f(x^2) = (x^2)^2 + 5 = x^4 + 5$$
$$f(3x) = (3x)^2 + 5 = 9x^2 + 5$$
$$f(x+h) = (x+h)^2 + 5 = x^2 + 2xh + h^2 + 5$$

OBSERVACIÓN :

Una función $f: A \to B$ consta de tres partes un conjunto A llamado dominio de la función (ó conjunto de partida), un conjunto B donde está incluida el rango de la función (ó conjunto de llegada) y una regla que permite asociar de manera bien deteminada a cada $x \in A$ con un único elemento $f(x) \in B$, llamado la imagen de x .

No se debe confundir f con $f(x)$ ya que f es la función, mientras $f(x)$ es la imagen de un punto x de su dominio.

Definamos correctamente cada una de las partes de una función:

DOMINIO DE UNA FUNCIÓN:

Sea : $f: A \to B$ una función de A en B llamaremos dominio de la función f al conjunto de todas sus primeras componentes de los pares ordenados de la función , al cual denotaremos por ***Dom f*** , es decir :

$$Dom f = \{x \in A / \exists! y \in B / (x;y) \in f\}$$

RANGO DE UNA FUNCIÓN :

Sea : $f: A \to B$ una función de A en B llamaremos rango de la función f al conjunto de todas sus las segundas componentes de los pares ordenados que pertenecen a la función , y se denota por ***Ran f*** , es decir : $Ran f = \{y \in B / x \in A \wedge (x;y) \in f\}$

EJEMPLOS:

	La función	Dominio	Rango
1	$f(x)=\{(2;3),(5;6),(3;-4),(4;7),(-5;9)\}$	$\{2;5;3;4;-5\}$	$\{3;6;-4;-7;9\}$
2	$f(x)=3x^3-7$	Todos los números reales	Todos los números reales
3	$f(x)=\sqrt{2x-8}$	$[4;+\infty[$	$[0;+\infty[$
4	$f(x)=\frac{x-1}{x-2}$	$\mathbb{R}-\{2\}$	$\mathbb{R}-\{1\}$

Expliquemos el ejemplo ***4 :*** Observamos que el único valor no admisible es **2** , dado que la división entre cero no está definida ; luego el dominio de la función será : $\mathbb{R}-\{2\}$.

5) Para hallar el rango de la función $f(x)=2-3x$,

$x\in[-3;2]$ vemos que el dominio de la función es $[-3;2]$, entonces: $-3\le x\le 2$ y buscando la forma de $f(x)$, tendremos: $-3\le x\le 2$.

$\to 9+2\ge 2-3x\ge -6+2$, luego $-4\le 2-3x\le 11$ ó $-4\le f(x)\le 11$.

El rango de f es $[-4;11]$

6) A veces, la función se define en un dominio dividido o «particionado» de modo que se da una regla de correspondencia para cada parte del dominio . Esto se denomina ***función definida por partes*** **FUNCIÓN SECCIONADA).**

Una función de este tipo es:

$$f(x)=\begin{cases}-1 & ;si\ -4\le x<0\\ 0 & ;si\ \ 0\le x<2\\ x+1 & ;si\ \ 2\le x\le 4\end{cases}$$

El dominio es $[-4;4]$ y se ha dividido en tres partes. El valor de x determina la regla que se ha de usar. Así, para hallar $f(-2)$, como $x=-2$ cumple con $-4\le x<0$, se aplica la primera regla y , según ella, $f(-2)=-1$.

Verifica que: $f(1)=0$ y $f(3)=4$

NOTA :

* Dominio de f, se abrevia como D_f
* Rango de f, se abrevia como R_f

REGLA DE CORRESPONDENCIA

Dada la función $f:A\to B$, f se puede escribir en la forma : $f=\{(x;y)\in A\times B\,/\,y=f(x)\}$

Donde la ecuación $y=f(x)$ es llamada regla de correspondencia , y nos permite calcular la imagen de un elemento del dominio.

$$f:A\to B$$
$$x\mapsto y=f(x)$$

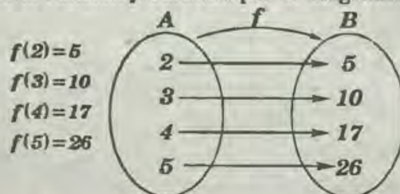
Donde podemos decir que :

x es la variable independiente

y es la variable dependiente

EJEMPLO 1:

* Dada la función f definida por el diagrama.

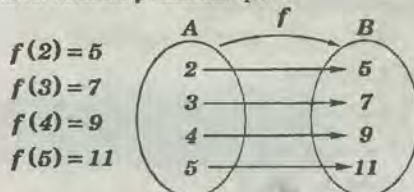


* Su regla de correspondencia está dada por :

$$y=f(x)=x^2+1\,;\,x\in A$$

EJEMPLO 2 :

* Dada la función f definida por :



* Su regla de correspondencia está dada por:

$$y=f(x)=2x+1;x\in A$$

OBSERVACIONES :

* El dominio de una función es llamado también conjunto de partida o conjunto de las preimágenes.
* El rango de una función es llamado también conjunto de llegada o conjunto de las imágenes.
* Una función queda bien definida si se tiene su dominio y su regla de correspondencia.

CRITERIO PARA EL CÁLCULO DEL DOMINIO Y RANGO DE UNA FUNCIÓN REAL DE VARIABLES REAL

El dominio de una función f se determina analizando todos los valores posibles que pueda tomar «x» , de tal manera que $f(x)$ sea real salvo el caso en que el dominio sea especificado.

El rango se determina partiendo de la condición dada para los x en el dominio y se construye las cotas o valores adecuados para $y=f(x)$

Pero teniendo varias formas de hallar el rango, presentaremos las más conocidas:

* Cuando tenemos una función donde su dominio no presenta rango , se despeja «x» en función de «y».
* Cuando tenemos un intervalo como dominio usamos desigualdades.

EJEMPLO 1:

Para la función definida por :

$$g(x)=2x^2+3x+2\,;\,x\in\mathbb{R}$$

RESOLUCIÓN :

* Primero hacemos:

$$y=2x^2+3x+2\to 2x^2+3x+(2-y)=0$$

* Despejamos «x», así: $x=\dfrac{-3\pm\sqrt{9-4(2)(2-y)}}{2(2)}$
* Si «x» $\in\mathbb{R}$; «y» también $\in\mathbb{R}$

* Pero : $\Delta \geq 0;\ 9-8(2-y)\geq 0 \rightarrow y \geq 7/8$

$\rightarrow R_g = [7/8\,;\infty\rangle$

EJEMPLO 2:

Para la función definida por :

$$h(x)=x^2-4x+7\ ;\ x\in[2;3]$$

RESOLUCIÓN :

$$y=x^2-4x+7 \rightarrow y=(x-2)^2+3$$

* Como : $2\leq x\leq 3 \rightarrow 0\leq x-2\leq 1$

$$\rightarrow 0\leq (x-2)^2\leq 1$$

* Más tres : $3\leq (x-2)^2+3\leq 4$

$$\rightarrow R_h=[3;4]$$

EJEMPLO 3:

Para la función : $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+1}$

RESOLUCIÓN:

$$y=\frac{x^2}{x^2+1}\rightarrow yx^2+y=x^2 \rightarrow x^2(y-1)=-y$$

$$\rightarrow x^2=\frac{y}{1-y} \rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{y}{1-y}}$$

$$\rightarrow \frac{y}{1-y}\geq 0;\ \frac{y}{y-1}\leq 0$$



$\rightarrow y\in[0\,;1\rangle \rightarrow R_h=[0\,;1\rangle$

EJEMPLO 4 :

Hallar el dominio y el rango de la función :

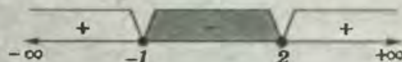
$$f(x)=\sqrt{2+x-x^2}$$

RESOLUCIÓN:

* ***CALCULANDO EL DOMINIO*** :

$y=\sqrt{2+x-x^2}$ «y» es real si $2+x-x^2\geq 0$

$\rightarrow x^2-x-2\leq 0 \Rightarrow (x-2)(x+1)\leq 0$



* Luego : $Dom\ f=[-1;2]$

* ***CALCULANDO EL RANGO :***

$$2+x-x^2=-\left(x^2-x+\frac{1}{4}\right)+\frac{9}{4}=-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{4}$$

* Como : $-1\leq x\leq 2 \Rightarrow -\dfrac{3}{2}\leq x-\dfrac{1}{2}\leq \dfrac{3}{2}$

$$\Rightarrow 0\leq\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\leq\frac{9}{4}\Rightarrow \frac{-9}{4}\leq -\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\leq 0$$

$$\rightarrow 0\leq -\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{4}\leq\frac{9}{4}\Rightarrow 0\leq\sqrt{2+x-x^2}\leq\frac{3}{2}$$

* Luego ***Ranf***: $\left[0;\dfrac{3}{2}\right]$

EJEMPLO 5:

Dada la función «***F***» cuya regla de correspondencia es :

$$F(x)=\sqrt{x^2-4x+8}+1,\ \forall x\in[1;5]$$

hallar su rango :

RESOLUCIÓN:

* Del dominio : $1\leq x\leq 5$
* Restando 2 : $-1\leq x-2\leq 3$
* Al cuadrado : $0\leq x^2-4x+4\leq 9$
* Sumando 4 : $4\leq x^2-4x+8\leq 13$

$$\rightarrow 2\leq\sqrt{x^2-4x+8}\leq\sqrt{13}$$

* Sumando 1 : $3\leq\underbrace{\sqrt{x^2-4x+8}+1}_{F(x)}\leq\sqrt{13}+1$

* Como : $y=F(x)\rightarrow Rf=\left[3\,;\sqrt{13}+1\right]$

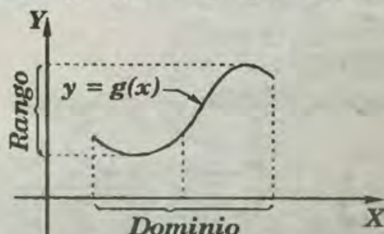
GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN

Una función real de variable real es un conjunto de pares ordenados de números reales y, por tanto puede considerarse como un conjunto de puntos del plano cartesiano, los cuales constituyen la representación gráfica de la función. Así logramos ilustrar de manera más efectiva, el comportamiento de la función, mostrando cómo cambian los valores de $f(x)$ cuando x varía dentro de su dominio.

DEFINICIÓN:

Si g es una función real de variable real la gráfica de g es la representación geométrica de todos los pares ordenados que pertenecen a g.

$$Graf\ g=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ /\ y=g(x);x\in Dom\,g\}$$

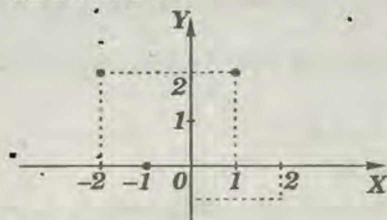


EJEMPLO 1:

Graficar la función f :

$f = \{(1 ; 2),(2 ; -1),(-1 ; 0),(-2 ; 2)\}$

RESOLUCIÓN:



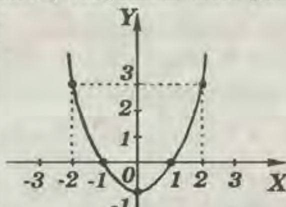
EJEMPLO 2 :

Graficar : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, y = f(x) = x^2 - 1$

RESOLUCIÓN :

*Para tener una idea del gráfico de ***f*** es necesario obtener algunos pares ordenados de ***f*** y obtener su correspondiente gráfico, y luego unir estos puntos.

x	*y*	*(x;y)*
0	–1	(0;1)
1	0	(1;0)
–1	0	(–1;0)
2	3	(2;3)
–2	3	(–2;3)



PROPIEDAD GEOMÉTRICA

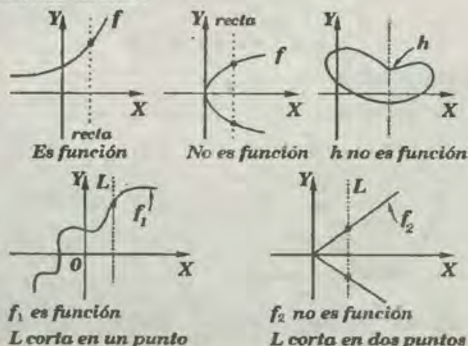
Si cada línea paralela al eje **Y** corta a la curva en un solo punto, o bien no la corta, la curva es la gráfica de una función. Si por el contrario, alguna línea vertical corta a la curva en más de un punto, dicha curva no es la gráfica de una función.

TEOREMA :

Sea $f : R \to R$

Si toda recta paralela al eje *«Y»* corta a la gráfica de ***f*** en a lo más un punto , dicha gráfica será la representación de una función .

EJEMPLOS:



Es función — *No es función* — *h no es función*

f_1 es función *L corta en un punto* — *f_2 no es función* *L corta en dos puntos*

FUNCIÓN DEFINIDA POR VARIAS REGLAS DE CORRESPONDENCIA

Sea ***f*** una función tal que :

$$f_{(x)} = \begin{cases} f_1(x) \ ; \ x \in Dom(f_1) \\ f_2(x) \ ; \ x \in Dom(f_2) \end{cases}$$

$Dom(f) = Dom(f_1)\ Dom(f_2)$

$Rang(f) = Rang(f_1)\ Rang(f_2)$

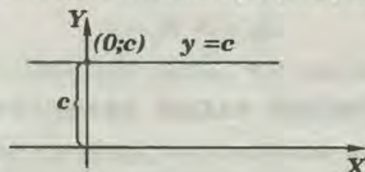
FUNCIONES ELEMENTALES

Debido a su importancia, en esta sección estudiaremos algunas funciones reales de variable real, que aparecen con frecuencia en aplicaciones de la matemática y a la vez sirven para ilustrar algunas propiedades particulares de funciones. Cada una se identifica con un nombre especial e incluso algunas tienen símbolos ya establecidos para representarlas, por ejemplo las barras | | son el símbolo de la ***FUNCIÓN VALOR ABSOLUTO***.

I) FUNCIÓN CONSTANTE :

La función constante asigna a todos los valores reales un mismo número. Se representa por:

f(x)=c , en donde ***c*** es un número real «Su gráfica es una línea recta horizontal que pasa por ***(0;c)***



EJEMPLOS:

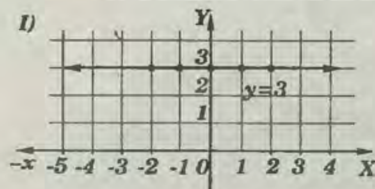
I) y= f(x)= 3, tiene por gráfica una recta horizontal que pasa por ***(0 ;3)***.

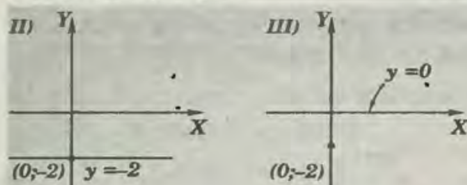
II) y= g(x)= –2, tiene por gráfica una recta horizontal que pasa por ***(0 ; –2)***

III) y = h(x)= 0, tiene por gráfica el eje ***X***.

TABLA DE VALORES PARA: y = 3

x	...	–2	–1	0	1	2	...
y =	...	3	3	3	3	3	...



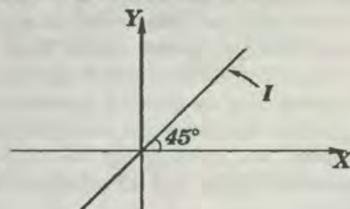


II) FUNCIÓN IDENTIDAD :

Es la función denotada por ***I***, cuyo dominio es $\mathbb{R}$ y regla de correspondencia.

$$I(x) = x$$

Su rango es $\mathbb{R}$ y su gráfica es:



* O también está expresada por la ecuación $y = x$, es decir , en todos los pares de la relación los valores de las variables son iguales. Se expresa

$$F: \{(x ; y) / y = x\}$$

* Regla de correspondencia : $f(x) = x$

$$D_f = \mathbb{R} \wedge \mathbb{R}_f = \mathbb{R}$$

* Significa que : $f = \{...(1;1), (2;2), (3;3)...\}$

III) FUNCIÓN VALOR ABSOLUTO :

La función valor absoluto es aquella que asigna un valor positivo a todo valor de su dominio. Se define como $F = \{(x ; y) / y = |x|\}$

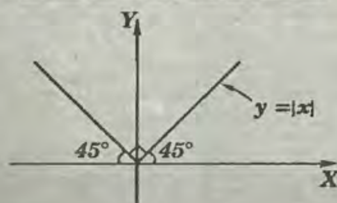
* Es decir su dominio es $\mathbb{R}$ y regla de correspondencia :

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x; & x \geq 0 \\ -x; & x < 0 \end{cases}$$

* Su rango es $\mathbb{R}_0^+ = [0;+\infty\rangle$ y su gráfica es :

Tabla de valores :

x	...	−2	−1	0	1	2	...
y	...	2	1	0	1	2	...



El gráfico de la función valor absoluto de x está formado por dos semirectas cuyo origen es el punto ***0***, y que coinciden con las bisectrices del primer y segundo cuadrante.

PROPIEDADES DEL VALOR ABSOLUTO :

1) $|x| > 0$

2) $|xy| = |x|\ |y|$

3) $\sqrt{x^2} = |x|$

4) $|x + y| < |x| + |y|$......(Desigualdad triangular)

5) $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}; y \neq 0$

EJEMPLO:

Dada la función: $f(x) = \frac{x - |x|}{x}$, hallar el dominio y rango de ***f***.

RESOLUCIÓN:

* Para que $f(x)$ sea un número real, se debe cumplir que $x \neq 0$, luego: $D_f : \mathbb{R} - \{0\}$

* A continuación calculamos el rango:

* Si : $x > 0$, $f(x) = \frac{x - x}{x} = 0$,

Si : $x < 0$, $f(x) = \frac{x - (-x)}{x} = 2$

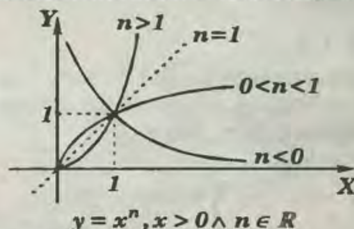
$f(x)$ toma sólo dos valores ***0*** y ***2***, por lo tanto:

$$R_f = \{0 ; 2\}$$

IV) FUNCIÓN POTENCIAL :

* Se denota por : $f(x) = x^n$, $x > 0$, donde $n \in \mathbb{R}$

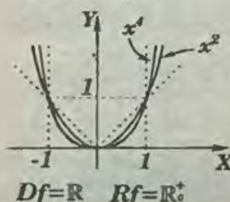
* Cuya gráfica tiene forma distinta, dependiendo de ***n***.



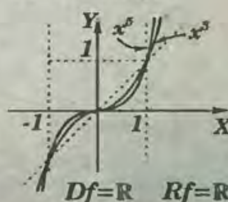
$$y = x^n, x > 0 \wedge n \in \mathbb{R}$$

EJEMPLOS:

Si «***n***» es par



Si «***n***» es impar

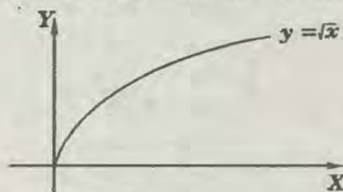


V) FUNCIÓN RAÍZ CUADRADA :

La función raíz cuadrada tiene como regla de correspondencia.

$$f(x) = \sqrt{x}\ ;\ \forall x \geq 0$$

El dominio es el conjunto de todos los números reales no negativos; El rango también. su gráfica es un arco semiparabólico, como se muestra en la figura.



" $\sqrt{x}$ es un número real no negativo y cuyo cuadrado es x"

* Su rango es $R_0^+ = [0;+\infty\rangle$
* Significa que: $f = \{(0;0),(1;1),(2;\sqrt{2}),(3;\sqrt{3})...\}$

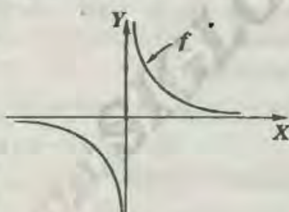
VI) FUNCIÓN INVERSO MULTIPLICATIVO :

Es aquella función cuyo dominio es $R-\{0\}$ y regla de correspondencia:

$$f(x) = \frac{1}{x}; x \neq 0$$

Su rango es: $R-\{0\}$ y su gráfica es:

x	$y = x^{-1}$
1/3	3
1/2	2
1	1
−1	−1
−1/2	−2
−1/3	−3



VII) FUNCIÓN ESCALAR UNITARIO :

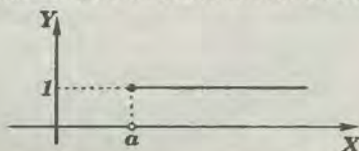
Es una función denotada por: $U_a(x)$, «a» es fijo y definida por :

$$f(x) = U_a(x) = \begin{cases} 1 & ; si\ x \geq a \\ 0 & ; si\ x < a \end{cases}$$

***Dom f* = R**

***Rang f* = {1;0}**

* Su gráfica es la unión de dos funciones constantes.



VIII) FUNCIÓN SIGNO :

Es una función denotada por *sgn(x)* y se define:

$$sgn(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|}; & Si\ x \neq 0 \\ 0\ ; & Si\ x = 0 \end{cases}$$

Equivalentemente :

$$sgn(x) = \begin{cases} 1\ ; & Si\ x > 0 \\ 0\ ; & Si\ x = 0 \\ -1\ ; & Si\ x < 0 \end{cases}$$

Con : ***Dom f* = R**

***Rang f* = {−1;0;1}**

Su gráfica es la unión de tres funciones constantes.



Tabla de valores

x	...	−3	−2	−1	0	1	2	3	...
y	...	−1	−1	−1	0	1	1	1	...

MÁXIMO ENTERO ([ ])

Antes de definir la mencionada función, consideraremos algunos conceptos:

I) Cualquier número real x tiene la siguiente propiedad : x está entre dos enteros consecutivos , es decir existen n y $n+1$, tal que : $n < x < n+1$

II) El número n que es el mayor entero menor o igual a x se llama el máximo entero de x.

NOTACIÓN:

$$[x] = n\ ,\ si:\ n \leq x < n+1$$

* Así: $[2] = 2$, *pues:* $2 < 2 < 3$

$[1,5] = 1$, pues: $1 < 1,5 < 2$

$[0,5] = 0$, pues: $0 < 0,5 < 1$

$[-1,5] = -2$, pues: $-2 < -1,5 < -1$

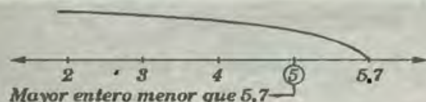
$[\pi] = 3$, pues: $3 < \pi < 4$

DEFINICIÓN : :

Se llama máximo entero de un número real «x» y se denota por $[x]$, al mayor entero menor o igual que el número real «x».

EJEMPLO 1:

Calcular $[5,7]$ entonces hallemos el mayor entero menor o igual que 5,7.



* Entonces: $[5,7]=5$

EJEMPLO 2 :

Resolver : $\left[\frac{x-5}{3}\right]=2$

RESOLUCIÓN :

* Usando la definición :

$$2\leq\frac{x-5}{3}<3\Rightarrow 6<x-5<9$$

$$\Rightarrow 11<x<14\Rightarrow x\in[11;14\rangle$$

PROPIEDADES:

A) $[x]\in Z\ ;\forall x\in R$

B) $[x]\leq x<[x]+1:\forall x\in R$

C) $[x+n]=[x]+n\Leftrightarrow n\in Z$

D) Si $n\in Z\Rightarrow([x]>n\Leftrightarrow x\geq n+1)$

E) Si $n\in Z\Rightarrow([x]<n\Leftrightarrow x<n)$

F) Si $n\in Z\Rightarrow([x]\leq n\Leftrightarrow x<n+1)$

G) Si $n\in Z\Rightarrow([x]\geq n\Leftrightarrow x\geq n)$

H) $[nx]=[x]+\left[x+\frac{1}{n}\right]+\left[x+\frac{2}{n}\right]+...+\left[x+\frac{n+1}{n}\right],n\in Z^{+}$

I) Si : $[x]=x\Leftrightarrow x\in Z$

J) $[x]\leq x\leq[x]+1;\forall x\in R$

K) $[x]+[y]<[x+y];\forall x,y\in R$

L) $[x]+[-x]=\begin{cases}0\ ;\ si\ x\in Z\\-1\ ;\ si\ x\in(R-Z)\end{cases}$

EJEMPLO:

Resolver : $[4x]\leq 63$

RESOLUCIÓN:

* Por la propiedada «F»:

$4x<63+1$

$\Rightarrow 4x<64\ x<16$

$\Rightarrow x\in\langle-\infty;16\rangle$

IX) FUNCIÓN MÁXIMO ENTERO :

Es la función denotada por $[\ ]$, cuyo dominio es R y regla de correspondencia:

$$f(x)=[R]$$

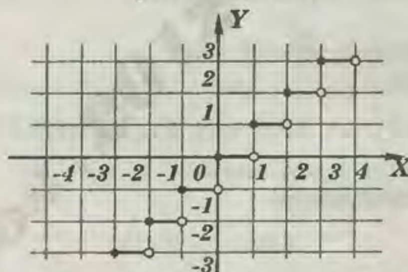
* Donde $[x]$ es el mayor entero no mayor que x
* Esto es: $[x]=n\Leftrightarrow n<x<n+1\ ;n\in Z$
* De aquí se deduce que:

$[x]\leq x\quad\forall x\in R$

$[x]=x\Leftrightarrow x\in Z$

* El rango de la función es Z
* La función entera asocia a cada número real x su parte entera, es decir, el entero que está inmediatamente a su izquierda en la recta real.
* Particionando el dominio :

$$f_{(x)}=\begin{cases}-3;\ si:-3\leq x<-2\\-2;\ si:-2\leq x<-1\\-1;\ si:-1\leq x<0\\0;\ si:0\leq x<1\\1;\ si:1\leq x<2\\2;\ si:2\leq x<3\\3;\ si:3\leq x<4\end{cases}$$



* Observa que todo número comprendido en el intervalo $[0;1[$ tiene como imagen 0; los comprendidos en $[1;2[$ tienen como imagen 1, etc.

EJEMPLO :

Hallar el rango y la gráfica de la función :

$$f(x)=[x]-x\ ;x\in R$$

RESOLUCIÓN :

* Si x es entero : $x=n$

$$f(n)=n-n=0$$

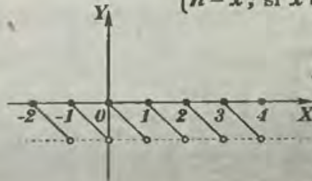
* Si x no es entero y $n<x<n+1$

$$f(x)=n-x\ \text{con}\ -1<f(x)=n-x<0$$

* Por lo tanto :

$$x\in R\ \text{si y sólo si}\ f(x)=0\vee-1<f(x)<0$$

* Luego : $Ranf=\langle-1;0]$
* Su gráfica : Como $f(x)=\begin{cases}0\ ;\ si\ x\in Z\\n-x;\ si\ x\in\langle n;n+1\rangle\end{cases}$



FUNCIONES POLINOMIALES

I) FUNCIÓN LINEAL :

Una función lineal es aquella que tiene por regla de correspondencia :

$f(x) = ax$; $a \neq 0$



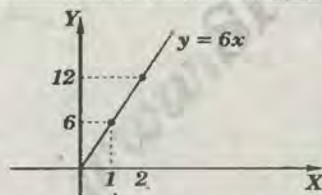
* Su dominio es el conjunto de números reales y su rango también.

* Su gráfica es una recta inclinada que pasa por el origen .

EJEMPLO:

$f(x)=6x$ es una función lineal con $a=6$. Este tipo de función es muy importante en situaciones de la vida real: supón que un kilogramo de naranjas cuesta 6 soles , si x es el número de kilogramos comprados y $f(x)$ representa el costo de las naranjas, de la tabla podemos deducir que $f(x)$ representa el costo de las naranjas, de la tabla podemos deducir que $f(x)= 6x$.

x	1	2	3	4	...	x
$f(x)$	6	12	18	24	...	$6x$



* La gráfica muestra la recta que pasa por el origen y como varía el precio.

II) FUNCIÓN AFÍN LINEAL :

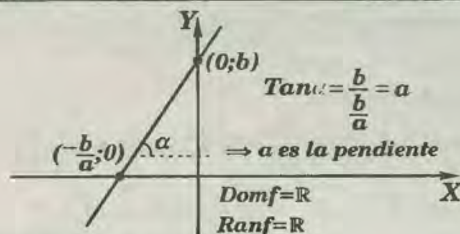
Función polinomial de primer grado.

$$f = \{(x;y) \,/\, y = ax + b \,;\, a \neq 0\}$$

* Gráficamente, representa una línea recta que corta al eje Y en b y al eje X en $-b/a$.

* La función afín lineal puede verse como una traslación de la función lineal, su regla de correspondencia es:

$f(x)=ax+b$, donde a y b son números reales, $a \neq 0$



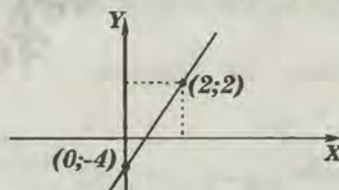
EJEMPLO 1:

* Para representar gráficamente la función $f(x)=3x - 4$, primero notamos que es afín lineal, entonces sólo necesitamos dos puntos, puesto que su gráfica es una recta.

* Si $x = 0$; $f(0) = 3\times0 - 4 = -4$. Se obtiene el punto $(0 ; -4)$

* Si $x = 2$; $f(2)=3\times2-4=2$. Se obtiene el punto $(2;2)$

Finalmente trazamos la recta que pasa por ambos puntos.



EJEMPLO 2:

Si $y = f(x)$ es una función afín lineal tal que:

$f(0) = -1$ y $f(2) = 3$, encontrar $f(x)$.

RESOLUCIÓN:

* Como es afín lineal , es de la forma : $f(x)=ax+b$ y debemos determinar a y b.

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = -1 \Rightarrow -1 = a\times0 + b \Rightarrow b = -1 \\ f(2) = \ 3 \Rightarrow \ \ 3 = a\times2 - 1 \Rightarrow a = 2 \end{array}\right\} f(x) = 2x - 1$$

III) FUNCIÓN CUADRÁTICA :

Es la función cuyo dominio es R y regla de correspondencia :

$$f(x)= ax^2+ bx + c \,;\, a \neq 0 \,;\, \{a; b; c\} \subset R$$

* Su gráfica es una parábola simétrica respecto a una recta vertical (llamada eje de simetría) abierta hacia arriba si $a>0$ y hacia abajo si $a<0$

* Su gráfica es una parábola con vértice en :

$$V(-b/2a;\ f(-b/2a))$$

* Su regla de correspondencia :

$y = ax^2+ bx + c$; $a \neq 0$, es posible llevarlo a la forma : $y = a(x - h)^2+K$

Donde : $V=(h \,;\, K)$ es el vértice de la parábola.

EJEMPLO :

Dado : $y=3x^2-6x+2$

* Transformando :

$$y=3\left(x^2-2x+\frac{2}{3}\right)=3\left(x^2-2x+1-1+\frac{2}{3}\right)$$

$$\rightarrow y=3\left[(x-1)^2-\frac{1}{3}\right]\rightarrow y=3(x-1)^2-1$$

OBSERVACIÓN :

Dado : $y=ax^2+bx+c$

Cada uno de ellos nos indica lo siguiente :

a : La orientación de las ramas o sea la concavidad

b : El desplazamiento del eje de la parábola

c : El desplazamiento del vértice

* De acuerdo al discrimante $(\Delta=b^2-4ac)$ se presentan los siguientes casos:

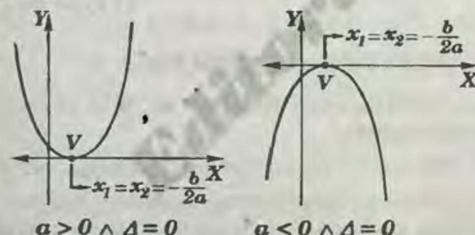
A) $\Delta>0$: $f(x)$ presenta 2 raíces reales diferentes x_1 y x_2

* Es decir : $f(x_1)=0$ y $f(x_2)=0$



* La gráfica corta al eje « X » en dos puntos que serían las raíces de la ecuación .

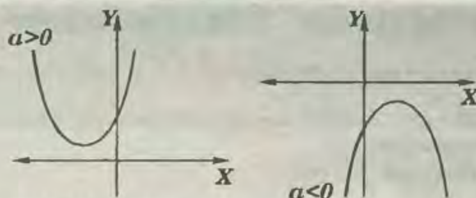
B) $\Delta=0$ $f(x)$ presenta 2 raíces reales e iguales $(x_1=x_2)$



* $\{x_1;x_2\}$ raíces iguales a la ecuación, cuando $y=0$

C) Si $\Delta<0$; la gráfica no corta al eje «x» esto quiere decir que la ecuación: $ax^2+bx+c=0$ no tiene raíces reales, si no raíces complejas conjugadas. Es decir: $x_1, x_2 \in \mathbb{C} \wedge x_1=x_2$

Note que x_1, x_2 no son reales.



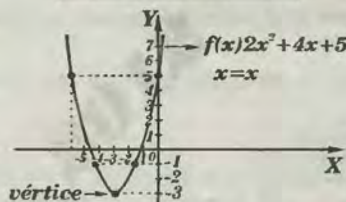
EJEMPLO 1:

Graficar : $y=2x^2+4x+5$

RESOLUCIÓN:

* Transformando : $y=2(x+2)^2-3$

x	–4	–3	–2	–1	0
y	5	–1	–3	–1	5



* Nótese que $y>-3$; Rango : $[-3;\infty\rangle$

* El mínimo valor que toma "y" es –3

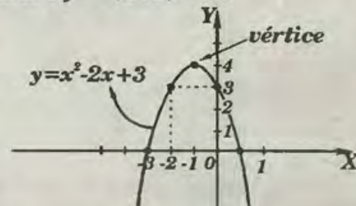
EJEMPLO 2:

Graficar : $y=-x^2-2x+3$

RESOLUCIÓN :

* Transformando : $y=-(x+1)^2+4$

x	y
–3	0
–2	3
–1	4
0	3
1	0



* Como : $y<4$

$\rightarrow$ **Rango :** $\langle-\infty;4]$

* El máximo valor que toma $\mathbb{R}$ es +4

EJEMPLO 3:

Graficar :

I) $f_{(x)}=x^2-5x+6$

II) $g_{(x)}=x^2-8x+16$

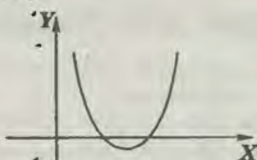
III) $h_{(x)}=x^2+4x+5$

RESOLUCIÓN:

I) $f_{(x)}=x^2-5x+6$; $\Delta=(-5)^2-4(6)=1$

$\Rightarrow$ Las raíces son reales y diferentes

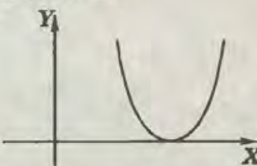
* Además $f_{(x)}=(x-3)(x-2) \Rightarrow$ las raíces son: $x=2$ ó $x=3$



II) $g_{(x)}=x^2-8x+16$; $\Delta=(-8)^2-4(16)=0$

$\Rightarrow$ Las raíces son reales e iguales.

* Además : $g_{(x)}=(x-4)^2$
* Luego la raíz es : $x=4$



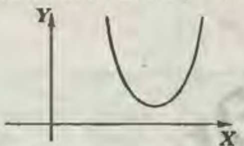
III) $h_{(x)}=x^2+4x+ \Rightarrow \Delta=4^2-4(5)<0$

$\Rightarrow$ Las raíces son complejas (no reales) conjugadas

* Además : $f_{(x)}=x^2+4x+4+1$

$$f_{(x)}=(x+2)^2+1$$

* Luego las raíces son : $-2+i$, $-2-i$



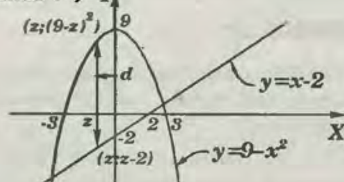
EJEMPLO 4:

Calcular la máxima distancia vertical que se determina en la región limitada por la gráfica de las funciones.

$$f_{(x)}=9-x^2 \quad \text{y} \quad g_{(x)}=x-2$$

RESOLUCIÓN:

* Graficando :



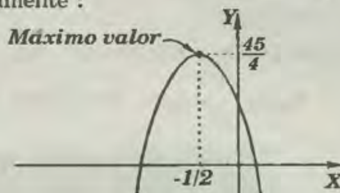
$$d_{(z)}=(9-z)^2-(z-2)=z^2-z+11$$

* Completando cuadrados :

$$d_{(z)}=-\left(z+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{45}{4} \rightarrow V=\left(1/2\,;\frac{45}{4}\right)$$

Función Distancia

* Entonces la distancia máxima será : $\frac{45}{4}$ unidades
* Gráficamente :

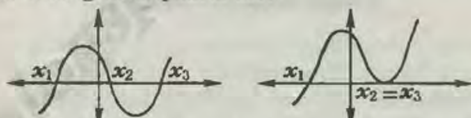


IV) FUNCIÓN CÚBICA :

Es aquella función cuya regla de correspondencia es :

$$F(x)=ax^3+bx^2+cx+d$$

aquí su dominio y rango son los números Reales, a su gráfica se le denomina a veces parábola cúbica y si $a>0$ su gráfica podría ser:



$y=a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$ $\quad$ $y=a(x-x_1)(x-x_2)^2$

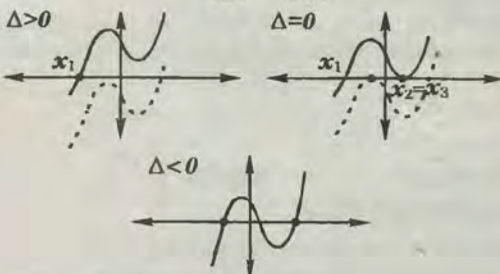


$y=a(x-x_1)(x^2+px+q)$ $\quad$ $y=a(x-x_1)^3$

* También si reemplazamos «x» por $x=b/3a$ la ecuación se transforma en : $k(x^3+px+q)$

$\rightarrow f_1(x)=x^3+px+q$,de raíces x_1 y x_2 con discriminate

$$\Delta=\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3$$



OBSERVACIONES :

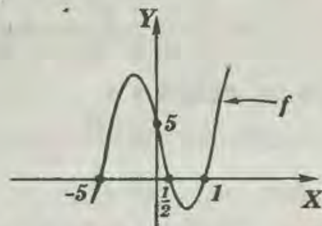
* La intersección con el eje **X** , representa a una raíz real.
* Punto de tangencia implica por lo menos dos raíces reales e iguales.

EJEMPLO:

Graficar : $f(x) = 2x^3 + 6x^2 - 14x + 5$

RESOLUCIÓN:

* Resolviendo $f(x)=0$, para hallar las raíces se tendrá $x_1=-5$; $x_2=\frac{1}{2}$; $x_3=1$ las raíces reales y distintas.



FUNCIÓN POLINOMIAL DE UNA VARIABLE REAL

En esta sección presentamos los aspectos más importantes relacionados con las funciones polinomiales de una variable real, empezamos definiendo que debemos entender por una función polinomial de una variable real.

DEFINICIÓN I :

Una función polonomial es una función de la forma:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

donde $a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0$ son números reales y n es un entero no negativo. El dominio lo constituyen todos los números reales.

De acuerdo a esta definición, una función polinomial es aquella función cuya regla de correspondencia está dada por un polinomio en una variable. El grado de una función polinomial es el grado del polinomio en una variable.

EJEMPLO:

Determine, cuales de las funciones siguientes son polinomiales, indicando el grado de aquellas que lo sean.

I) $f(x) = x^4 + x^3 - 2$ IV) $f(x) = \sqrt{x} + 2$

II) $g(x) = 8$

III) $h(x) = 0$ V) $g(x) = \dfrac{x^2+2}{x^3-1}$

RESOLUCIÓN:

I) f es una función polinomial de grado 4.

II) g es una función constante diferente de cero, es una función polinomial de grado cero.

III) h es la función polinomial cero, no se le asigna grado alguno.

IV) f no es función polinomial.

V) g no es función polinomial, es más bien el cociente de dos polinomios, el cual se le llama una función racional.

GRÁFICOS DE POLINOMIOS

Para hacer la gráfica con precisión de una función polinomial se requieren técnicas que van más allá del objetivo de este capítulo. Aceptamos que la gráfica de toda función polinomial es suave y continua. Por suave queremos decir que la gráfica no tiene esquinas o cúspides y continua significa que la gráfica puede ser dibujada sín interrupciones.

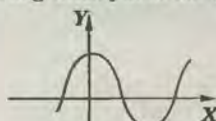


Figura 1
Gráfica de una función polinomial

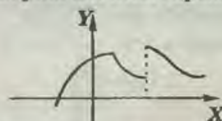
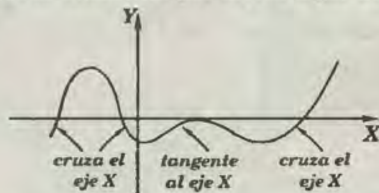


Figura 2
Gráfica de una función no polinomial

* La figura **3** muestra la gráfica de una función polinomial con cuatro intersecciones con el eje **X**. Ahora obsérvese que en estas intersecciones con el eje X la gráfica debe cruzar o ser tangente al eje X y por lo tanto entre dos intersecciones consecutivas la gráfica se encuentra por arriba o por debajo del eje **X**.



* Para localizar las intersecciones con el eje x se resuelve la ecuación $f(x)=0$, por ejemplo si $f(x)=(x+2)^2(x-3)$ entonces :

las intersecciones con el eje x se obtienen de:

$$f(x) = (x+2)^2(x-3) = 0$$

las cuales son -2 y 3, esto nos lleva a definir el concepto de raíz de un polinomio.

DEFINICIÓN II:

Sea f una función polinomial de grado mayor o igual a 1, un número real para el cual $f(r)=0$ es llamado una raíz (real) de f.

Por lo tanto, las raíces reales de una función polinomial son las intersecciones de su gráfica con el eje X.

Además si $x-r$ es un factor de f, es decir $f(x)=(x-r)Q(x)$ entonces $f(r)=0$ y luego r es una raíz de f. Si el factor $x-r$ aparece más de una vez entonces r es llamado una raíz múltiple de f, para más precisión damos la siguiente definición.

DEFINICIÓN III :

Una raíz r de una función polinomial f se dice que es de multiplicidad m si :

$$f(x)=(x-r)^m g(x), \text{ donde } g(r)\neq 0$$

Según sea $m = 1, 2, 3, ...$ se acostumbra llamar raíz simple, doble, triple, en general raíz de orden m veamos el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 1:

Sea : $f(x) = (x-1)^2(x-3)^3(x-5)$

luego :

* $x = 1$ es una raíz doble de f.
* $x = 3$ es una raíz triple de f.
* $x = 5$ es una raíz simple de f.

EJEMPLO 2:

Para la función polinomial $f(x)=x^2(x-3)$.

A) Hallar sus raíces reales (intersecciones con el eje x)

B) Hallar sus intersecciones con el eje y.

C) Utilizando *(A)* determine los intervalos donde la gráfica de f está por arriba o por abajo del eje x.

D) Trazar la gráfica de f.

RESOLUCIÓN:

A) Las raíces de (intersección con el eje x) se hallan resolviendo en $\mathbb{R}$, $f(x) = 0$

$$x^2(x-3) = 0$$

* Luego : $x = 0$ es una raíz doble de f.
  $x = 3$ es una raíz simple de f.

B) La intersección con el eje y es :

$$f(0)= 0^2(0-3)=0 \rightarrow f(0)=0$$

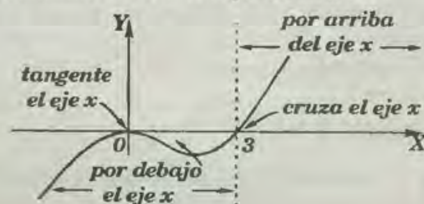
C) Las raíces reales de f divide el eje X en los intervalos $-\infty< x < 0 ; 0 < x < 3 ; x > 3$, para determinar los intervalos donde la gráfica de f está por arriba del eje X resolvemos $f(x) > 0$ [o por debajo del eje X, $f(x)< 0$].

* Luego :

$$f(x)= x^2(x-3)> 0 \leftrightarrow x>3$$

$$f(x)= x^2(x-3)< 0 \leftrightarrow 0< x< 3 \vee -\infty< x<0$$

D) Graficamos la función polinomial :



Obsérvese del ejemplo anterior que la gráfica de f cruza al eje X en $x=3$, la cual es una raíz simple de f y es tangente al eje X en $x=0$ la cual es una raíz doble de f. Esto sugiere el siguiente resultado.

1) Si $x = r$ es una raíz real de multiplicidad par, la gráfica es tangente al eje X en r, el signo de f no cambia de un lado al otro de r.

2) Si $x = r$ es una raíz real de multiplicidad impar, la gráfica cruza al eje X, el signo de f cambia de un lado al otro de r.

* En resumen para graficar una función polinomial:

I) Se factoriza completamente en $\mathbb{R}$.

II) Se determinan los ceros reales de f.

• En una raíz real de multiplicidad par ; la gráfica de f es tangente al eje X.

• En una raíz real de multiplicidad impar ; la gráfica de f cruza al eje X.

III) Entre raíces reales consecutivas, determine si la gráfica de f está por arriba o por debajo del eje X.

*IV) Teniendo en cuenta **II** y **III** trace la gráfica de f.*

Veamos a continuación un corolario del algoritmo de la división el cual es llamado frecuentemente teorema del residuo.

TEOREMA DEL RESIDUO

Sea f la función polinomial de grado mayor o igual a 1, entonces el residuo de la división de f entre $x-a$ es igual al valor numérico de la función polinomial en $x=a$. Es decir.

$$\text{Residuo : } R = f(a)$$

PRUEBA:

En efecto, por el algoritmo de la división de polinomios se cumple :

$$f(x) = (x-a)Q(x) + R \;;\; R \text{ constante}$$

y si en esta relación reemplazamos $x = a$ en ambos miembros, entonces :

$$f(a) = (a-a)Q(a) + R$$

* es decir : $f(a)=R$

EJEMPLO:

Hallar el residuo de la división de :

$$f(x)=x^3 + 2x^2 - 3x+1 \text{ entre } x+1$$

RESOLUCIÓN:

* Por el teorema del residuo :

$$R = f(-1)= (-1)^3 + 2(-1)^2 - 3(1)+1=5$$

$\rightarrow R = 5$

* Una consecuencia del teorema del residuo es el teorema del factor.

TEOREMA DEL FACTOR

Sea f una función polinomial de grado mayor o igual a 1, entonces $x-r$ es un factor de $f(x)$ si y sólo si $f(r)=0$, nótese que el teorema del factor consta de dos enunciados separados:

I) Si $f(r)=0 \Rightarrow x-r$ es un factor de $f(x)$

II) Si $x-r$ es un factor de $f(x) \Rightarrow f(r)=0$

Un empleo del teorema del factor es para determinar si un polinomio tiene un factor en particular.

EJEMPLO 1:

¿Es $x+1$ un factor de $f(x)=x^3+x+2$?

RESOLUCIÓN:

* Como $x+1=x-(-1)$, $r=-1$, hallamos $f(-1)=(-1)^3-1+2=0$ entonces por el teorema del factor, $x+1$ es un factor de $f(x)$.

EJEMPLO 2 :

¿Es $x+2$ un factor de $f(x)=x^3+x-3$?

RESOLUCIÓN:

* Como $x+2=x-(-2)$, $r=-2$, hallamos $f(-2)=(-2)^3+(-2)-3=-13\neq 0$.

* entonces por el teorema del factor $x+2$ no es un factor de $f(x)=x^3+x-3$.

NÚMERO DE RAÍCES DE UNA FUNCIÓN POLINOMIAL

Las raíces de una función polinomial son las soluciones de la ecuación $f(x)=0$. Las raíces de una función polinomial pueden ser reales o complejas. Las raíces reales de f son las soluciones reales de la ecuación $f(x)=0$, geométricamente son las intersecciones de la gráfica de f con el eje X, las raíces complejas no tienen una interpretación geométrica tan directa. Sin embargo , en la mayoría de los casos, las raíces de una función polinomial son díficiles de encontrar, no existen fórmulas sencillas disponibles como en el caso de la ecuación cuadrática. Aún cuando existen fórmulas para hallar las raíces para funciones polinomiales de grado 3 y 4 estas son complicadas y díficiles de usar, además se ha demostrado que no existen fórmulas generales para hallar las raíces de funciones polinomiales de grado 5 o mayor.

El primer teorema que presentamos está referido al número de raíces reales que una función polinomial puede tener . Al contar las raíces de una función polinomial, contamos cada raíz tantas veces como sea su multiplicidad.

TEOREMA 1

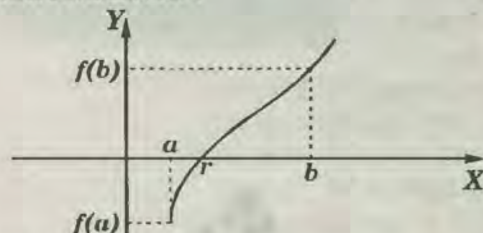
Toda función polinomial de grado n tiene a lo más n raíces reales.

* El siguiente teorema es usado para localizar las raíces reales de una función polinomial.

TEOREMA 2

Sea f una función polinomial, si $a<b$ y si $f(a)$ y $f(b)$ son de signos opuestos , entonces hay al menos una raíz real de f entre a y b.

GRAFICAMENTE :



EJEMPLO:

Demuestre que $f(x)=x^3+x-1$ tiene exactamente una raíz real en el intervalo $[0;1]$

RESOLUCIÓN:

Como $f(0)=-1$ y $f(1)=1$, los cuales son de signos opuestos , entonces por el teorema anterior , f tiene al menos una raíz real en $\langle 0;1\rangle$. La unidad de esta raíz real es consecuencia del hecho de que f es estrictamente creciente en $[0;1]$.

En general no es posible garantizar cuando una función polinomial tiene una raíz real, por ejemplo $f(x)=x^2+1$ no tiene raíces reales.

El siguiente teorema establece una condición suficiente para que una función polinomial tenga una raíz real.

TEOREMA 3 :

Toda función polinomial (con coeficientes reales) de grado impar tiene al menos una raíz real.

EJEMPLO:

Demostrar que : $f(x)=x^5+x^2-1$ tiene al menos una raíz real en el intervalo $[0;1]$

RESOLUCIÓN :

* Al ser f una función polinomial de grado 5 por el teorema anterior, tiene al menos una raíz real y como $f(0)=-1$, $f(1)=1$ se deduce del teorema del valor intermedio que una raíz real está en el intervalo $\langle 0;1\rangle$.

TEOREMA 4 :

Sean a y b dos ***números racionales*** tales que $\sqrt{b}$ es irracional , y sea f una función polinomial con

coeficientes racionales. Si $a+\sqrt{b}$ es una raíz de f entonces $a-\sqrt{b}$ también es raíz de f.

EJEMPLO:

Hallar una función polinomial de menor grado con coeficientes racionales y que tenga como raíces a 2 y $2+\sqrt{3}$.

RESOLUCIÓN:

* Si $2+\sqrt{3}$ es una raíz entonces por el teorema anterior $2-\sqrt{3}$ también debe de serlo y por lo tanto puede escribirse como:

$$f(x)=(x-2)(x-(2+\sqrt{3}))(x-(2-\sqrt{3}))$$

* Efectuando operaciones :

$$f(x)=x^3-6x^2+9x-2$$

* Es la función polinomial buscada.

RAÍCES RACIONALES DE UN POLINOMIO

TEOREMA 5 (*DE LAS RAÍCES RACIONALES*) :

Sea f una función polinomial de grado mayor o igual a 1 de la forma :

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$$

con $a_n\neq 0$, $a_0\neq 0$ con cada coeficiente entero. Si $\frac{p}{q}$, sin factores comunes , es una raíz racional de f entonces:

p es un divisor del término independiente a_0

q es un divisor del coeficiente principal a_n

Este teorema nos dice que las posibles raíces reales de f solo pueden hallarse entre aquellos números racionales de la forma $\frac{p}{q}$ donde p es divisor de a_0 y q es divisor de a_n.

COROLARIO 1:

Si la función polinomial del teorema de las raíces racionales, tiene coeficiente principal a_n, igual a 1, entonces toda raíz racional es un número entero y es divisor del término independiente a_0.

EJEMPLO :

Determinar las raíces racionales , si existen, de:

$$2x^3+\frac{29}{3}x^2-\frac{40}{3}x+4$$

RESOLUCIÓN:

* Para aplicar el teorema de las raíces racionales , los coeficientes deben ser enteros, así es que :

$$f(x)=\frac{1}{3}(6x^3+29x^2-40x+12)$$

y es suficiente trabajar con $6x^3+29x^2-40x+12$, sus posibles raíces racionales serán de la forma:

$$\frac{p}{q}=\frac{divisor\ de\ a_0}{divisor\ de\ a_3}=\frac{divisor\ de\ 12}{divisor\ de\ 6}$$
$$=\frac{\pm1;\pm2;\pm3;\pm4;\pm6;\pm12}{1;2;3;6}$$

*Es decir $\frac{p}{q}$ solo podrá tomar tres de los siguientes valores posibles.

$$\pm1;\pm2;\pm3;\pm4;\pm6;\pm12;\pm\frac{1}{2};\pm\frac{3}{2};\pm\frac{1}{3};\pm\frac{4}{3}$$

*Al probar cada uno de ellos mediante la división sintética vemos que las únicas que producen el residuo $R=0$ son -6, $1/2$, $2/3$, en efecto.

	6	29	−40	12
1/2		3	16	−12
	6	32	−24	0
−6		−36	24	
	6	−4	0	
2/3		4		
	6	0		

* Por lo tanto :

$$f(x)=\frac{1}{3}(6)\left(x-\frac{2}{3}\right)(x+6)\left(x-\frac{1}{2}\right)$$

* Es decir : $f(x)=2\left(x-\frac{2}{3}\right)(x+6)\left(x-\frac{1}{2}\right)$

RELACIÓN ENTRE LAS RAÍCES Y LOS COEFICIENTES :

Presentamos un teorema que establece la relación entre las raíces y los coeficientes de una función polinomial.

TEOREMA 6 :

Sea la función polinomial :

$$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+a_{n-3}x^{n-3}+...+a_1x+a_0$$

y $x_1, x_2, ..., x_n$ sus raíces , entonces:

$$x_1+x_2+...+x_n=\frac{a_{n-1}}{a_n}$$
(suma de las raíces)

$$x_1x_2+x_1x_3+...+x_{n-1}x_n=\frac{a_{n-2}}{a_n}$$
(suma de los dobles productos de las raíces)

$$x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+...+x_{n-2}x_{n-1}x_n=\frac{a_{n-3}}{a_n}$$
(suma de los triples productos de las raíces)

$$x_1\times x_2\times x_3....x_n=(-1)^n\frac{a_0}{a_n}$$
(productos de las raíces)

* La prueba de este teorema consiste en desarrollar la expresión :

$$P(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2)...(x - x_n)$$

y comparar los coeficientes.

EJEMPLO 1:

Hallar todas las raíces de $R(x)=x^6 - 2x^3-9x^2-6x$

RESOLUCIÓN:

* Según el teorema de las raíces $R(x)$ tiene **6** raíces. Podemos expresar a $R(x)$ con el factor común x: $R(x) = x(x^5 - 2x^2 - 9x - 6)$.

* Calculemos a $R(x)$ en los factores de -6 para descubrir alguna de sus raíces:

$R(1)\neq 0, R(-2)\neq 0, R(3)\neq 0, R(-3)\neq 0, R(6)\neq 0$ y $R(-6)\neq 0 : 1 ; -2 ; 3 ; -3 ; 6$ y -6 no son raíces.

$R(-1) = 0$, $R(2) = 0$, entonces -1 y 2 son raíces de $R(x)$. Además, como $R(0)=0$, 0 es raíz.

* Entonces : $(x-(-1))=(x + 1)$, $(x-2) = (x-2)$, y $(x-0)= x$ son factores de $R(x)$.

*Por divisiones sintéticas llegamos a factorizar:

$$R(x) = x(x + 1)(x + 1)(x - 2)(x^2 + 3)$$

* Como $x^3+3=[x^2-(-3)]=[x^2-(\sqrt{3}i)^2]$, entonces:

$$r(x) = x(x + 1)^2(x - 2)(x - \sqrt{3}i)(x + \sqrt{3}i)$$

* Por tanto, las **6** raíces son : $0 ; -1 ; -1 ; 2 ; \sqrt{3}i$ y $-\sqrt{3}i$. Notése que -1 es raíz doble de $R(x)$.

EJEMPLO 2 :

Dibujar la gráfica de la función polinómica

$$f(x)= x^4 + x^3 + 2x - 4; x \in R$$

RESOLUCIÓN :

* Entre los factores de $-4 : 1 ; -1 ; 2 ; -2 ; 4$ y -4 , sólo $f(1) = 0$ y $f(-2) = 0$.

* Entonces : $(x - 1)$ y $(x + 2)$ son factores de $f(x)$

* Realicemos : $(x - 1)(x + 2) = (x^2 + x - 2)$

* Por división algebraica y raíces complejas:

$$f(x)\div(x^2+x-2)= x^2+ 2=(x - \sqrt{2}i)(x+\sqrt{2}i)$$

* Así:

$$f(x)=(x - 1)(x + 2)(x - \sqrt{2}i)(x + \sqrt{2}i)$$

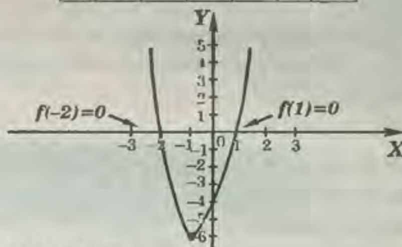
* Las raíces reales **1** y **−2** serán los ceros en la gráfica de la función $f(x)$.

* Nótese que $\sqrt{2}i$ y $-\sqrt{2}i$ no son ceros en la gráfica porque no son raícess reales.

Los ceros en la gráfica nos permiten afirmar que $f(x)$ corta al eje X en los valores **1** y **− 2**.

* Por último , hacemos una tabla de valores antes y después de cada cero en la gráfica.

x	−3	−2	−1	0	1	2
y	44	0	−6	−4	0	24



EJEMPLO 3:

Graficar la función polinómica :

$$g(x)=x^5 -15x^3 - 16x=x(x^4 - 15x^2 -16)$$

RESOLUCIÓN :

* Como $g(0)=0$, entonces $x=0$ es raíz de $g(x)$.

* Entre los factores de $-16 : 1; -1; 2 ; -2 ; 4 ; -4 ; 8; -8 ; 16 ; -16$ encontramos que : $g(4)= 0=g(-4)$; Entonces, $(x - 4)$ y $(x + 4)$ son factores de $g(x)$.

* Realicemos el producto : $x(x-4)(x+4)= x^3-16x$

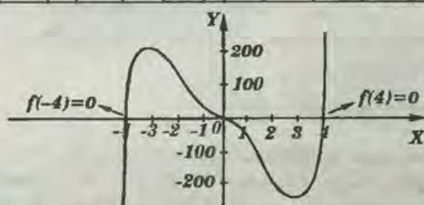
* Como $x^2+1=x^2- (i)^2=(x - i)(x+i)$, factoricemos :

$$g(x) = x(x - 4)(x + 4)(x - i)(x + i)$$

* Las raíces reales: $x = 0$; $x = 4$ y $x = -4$ son los ceros en la gráfica de $g(x)$, y la gráfica de $g(x)$ corta al eje **X** en $g(0)$; $g(4)$ y $g(-4)$.

* Hacemos una tabla de valores entre las raíces:

x	−4,5	−4	−3,5	−3	−2	0	1	2	3	3,5	4	5
g(x)	−406	0	174	210	120	0	−30	−120	−210	−174	0	1170



TÉCNICAS DE GRAFICACIÓN

Uno de los métodos para determinar la gráfica de una función consiste en calcular laboriosamente sus pares ordenados y representar una gran cantidad de ellos por puntos sobre el plano y unirlos por medio de una curva suave. Este método produce muchas veces una gráfica imprecisa e incompleta, por eso, en esta sección, nuestro objetivo será desarrollar técnicas y conceptos que nos permitan trazar la gráfica de una función en forma más precisa, completa y rápida, mejorando el método de unir puntos, al cual recurriremos sólo como apoyo a las

técnicas que estudiaremos .

I) PROCEDIMIENTO BÁSICO :

Para empezar , sugerimos estas pautas :

I) Determina los puntos en los que la gráfica interseca a los ejes coordenados , de este modo: la intersección con el eje **X** se logra haciendo $y=0$, y para el eje **Y**, haciendo $x=0$.

II) Averigua si la función es simétrica, procediendo así :

- Si la función no se altera al sustituir x por $-x$, dicha gráfica será simétrica respecto al eje **Y**.
- Si la función no se altera al sustituir y por $-y$, dicha gráfica será simétrica respecto al eje **X**.
- Si la función no varía al sustituir x por $-x$, e y por $-y$, dicha gráfica es simétrica con respecto al origen.

III) Determina el dominio y rango de la función para luego tabular algunos valores particulares y ubicarlos en un plano cartesiano.

V) Finalmente bastará con unir dichos puntos para obtener la gráfica de la función.

EJEMPLO:

1) Para graficar la función $f(x)=x^2+2x+2$

a) Buscamos los puntos que intersecan a los ejes coordenados:

- $x=0 \Rightarrow y = 0^2+2(0)+2 \Rightarrow y=2$

De acuerdo con este paso, la gráfica corta al eje y en el punto cuyas coordenadas son: $(0\,;2)$

- $y=0 \Rightarrow 0 = x^2+2x+2 \Rightarrow 0=(x+1)^2+1$

Dado que esta ecuación no tiene solución real para x, diremos que la gráfica no interseca al eje x.

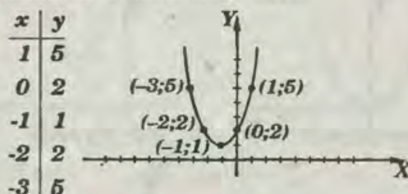
B) No es simétrica con respecto a ningún eje ni respecto al origen.

C) $f(x) = x^2+2x+2 \Rightarrow Df: \mathbb{R}$

$y = x^2+2x+1+1 \Rightarrow y=(x+1)^2+1$

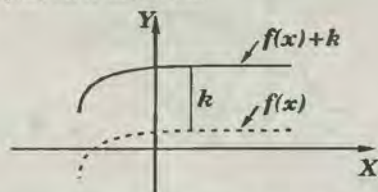
$y-1=(x+1)^2 \geq 0 \Rightarrow y-1 \geq 0 \Rightarrow y \geq 1 \ Rf:[1;\infty[$

D) Finalmente unimos los puntos:

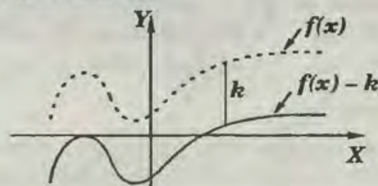


II) DESPLAZAMIENTOS VERTICALES

I) La gráfica de $g(x) = f(x) + k\ ; k > 0$, se obtiene desplazando verticalmente hacia arriba la gráfica de $y = f(x)$ en k unidades.



II) La gráfica de $g(x) = f(x) - k\ ,\ k > 0$ se obtiene desplazando verticalmente hacia abajo la gráfica de $y= f(x)$ en k unidades.

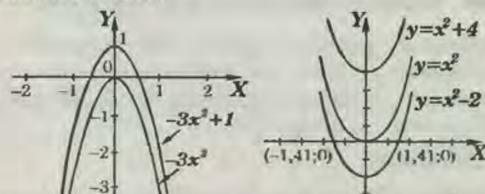


* Es decir :

DESPLAZAMIENTOS VERTICALES (c>0)

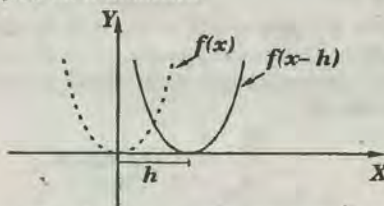
Para obtener las gráficas de :	Se desplaza la gráfica de $y = f(x)$
$y = f(x) - c$	c unidades hacia abajo
$y = f(x) + c$	c unidades hacia arriba

EJEMPLOS:

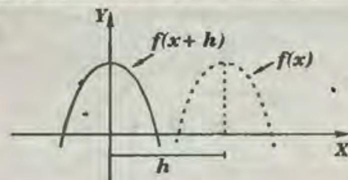


III) DESPLAZAMIENTOS HORIZONTALES

I) La gráfica de $g(x) = f(x-h),\ h > 0$, se obtiene desplazando horizontalmente a la derecha la gráfica de $y = f(x)$ en h unidades.



II) La gráfica de $g(x) = f(x+h),\ h > 0$, se obtiene desplazando horizontalmente a la izquierda la gráfica de $y = f(x)$ en h unidades.



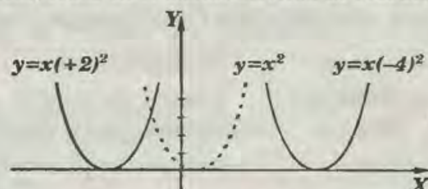
* Es decir:

DESPLAZAMIENTOS HORIZONTALES (c >0)

Para obtener las gráficas de :	*Se desplaza la gráfica de y = f(x)*
$y = f(x - c)$	*c unidades hacia la derecha*
$y = f(x + c)$	*c unidades hacia la izquierda*

EJEMPLOS :

A partir de la gráfica de $y = x^2$, trazar la gráfica de $y=(x-4)^2$ y de $y=(x + 2)^2$. Aplicando las reglas para desplazamientos horizontales, obtenemos las gráficas, todas en el mismo sistema de coordenadas.



POR DOBLE DESPLAZAMIENTO:

También se pueden realizar desplazamientos combinados; es decir, uno vertical seguido de otro horizontal, o viceversa , aplicando las reglas dadas, como se verá en el siguiente

EJEMPLO:

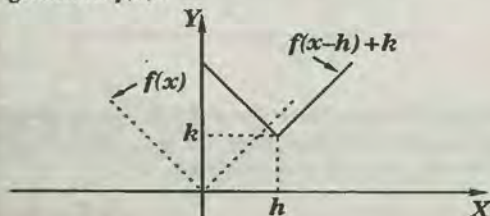
* Siendo h y k positivos, se presentan los siguientes casos :

$g(x) = f(x - h) + k \qquad g(x) = f(x - h) - k$

$g(x) = f(x + h) + k \qquad g(x) = f(x + h) - k$

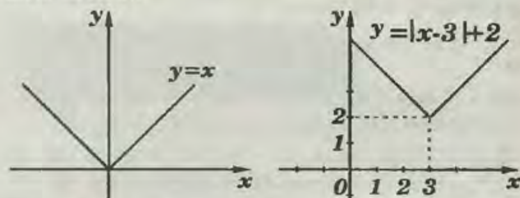
EJEMPLO 1:

La gráfica de $g(x)= f(x - h) + k$ se obtiene desplazando horizontalmente a la derecha h unidades y verticalmente hacia arriba k unidades la gráfica de $f(x)$.



EJEMPLO 2:

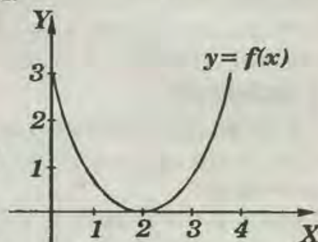
A partir de la gráfica de $y = |x|$, trazar la gráfica de $y = |x - 3| + 2$. En este caso, aplicamos simultáneamente las dos reglas, porque hay un desplazamiento horizontal (tres unidades a la derecha) y un desplazamiento vertical (dos unidades hacia arriba).



EJEMPLO 3 :

En la figura se muestra la gráfica de una función f con dominio $0 < x < 4$. Trazar las gráficas de las siguientes funciones.

a) $y = f(x + 2)$
b) $y = f(x) + 2$
c) $y = f(x) - 2$
d) $y = f(x - 1) + 1$



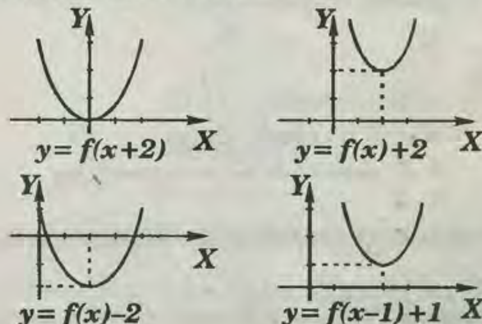
RESOLUCIÓN:

a) Para graficar $y = f(x + 2)$ es suficiente hacer un desplazamiento horizontal hacia la izquierda de 2 unidades.

b) Para $y = f(x) + 2$ se hace un desplazamiento vertical hacia arriba de 2 unidades.

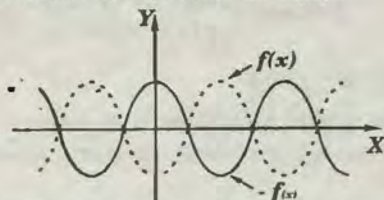
c) Para $y = f(x) - 2$ se hace un desplazamiento hacia abajo de 2 unidades.

d) Para $y = f(x - 1) + 1$ hacemos un desplazamiento horizontal hacia la derecha de 3 unidades y otro hacia arriba de 1 unidad.

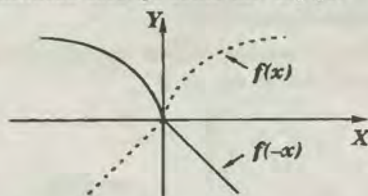


IV) REFLEXIONES :

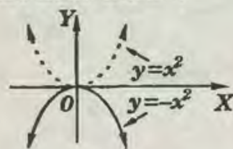
I) La gráfica de $g(x) = -f(x)$ se obtiene por reflexión de la gráfica de $y=f(x)$ respectoal eje **X**, comportándose este eje como un espejo.

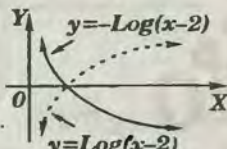


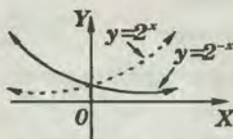
II) La gráfica de $g(x) = f(-x)$ se obtiene por reflexión de la gráfica de $y=f(x)$ respecto al eje**Y**, comportándose este eje como un espejo.

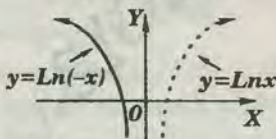


EJEMPLOS :





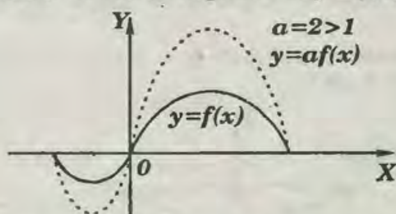




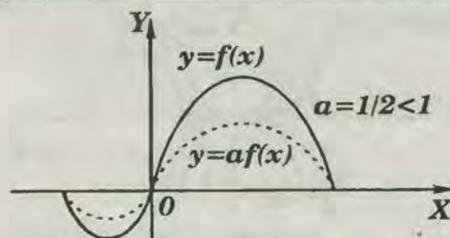
V) DILATACIÓN O CONTRADICCIÓN DE $y=f(x)$:

CASO 1 : $y = af(x)$, $a > 0$

* Si $a>1$, la gráfica de $y=af(x)$ es la dilatación (expansión) vertical de la gráfica de $y = f(x)$

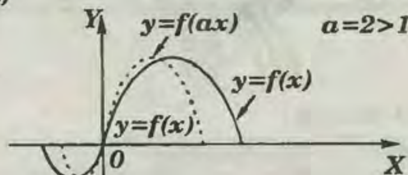


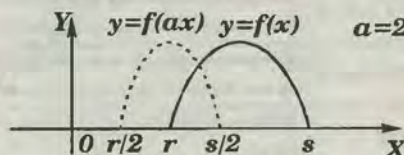
* Si $0 < a < 1$, la gráfica de $y = af(x)$ es el encogimiento (contracción) vertical de la gráfica de $y = f(x)$



CASO 2 : $y = f(ax)$; $a > 0$

* Si $a>1$ la gráfica de $y=f(ax)$ es la gráfica de $y=f(x)$

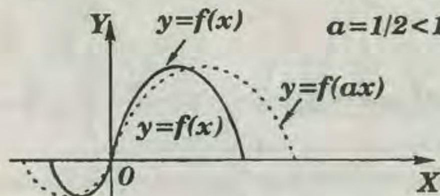


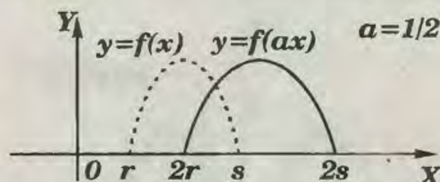


* De la figura

$$y = f(x),\ r \le x \le s \Rightarrow y = f(ax),$$
$$r \le a \le s \Leftrightarrow M_a \le x \le s/a$$

* Si $0 < a < 1$; la gráfica de $y = f(ax)$ es la dilatación (expansión) horizontal de la gráfica de $y = f(x)$

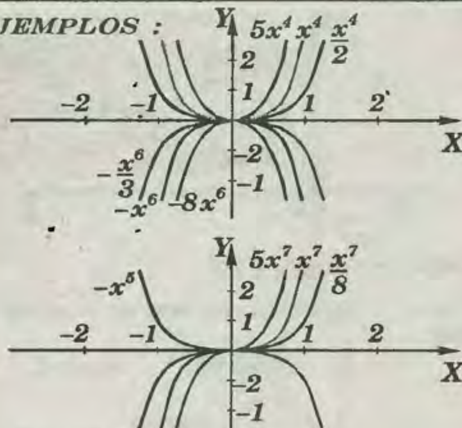




* De la figura

$$y = f(x),\ r \le x \le s \Leftrightarrow y = f(ax),$$
$$r \le ax \le r \Leftrightarrow \frac{r}{a} \le x \le \frac{r}{a}$$

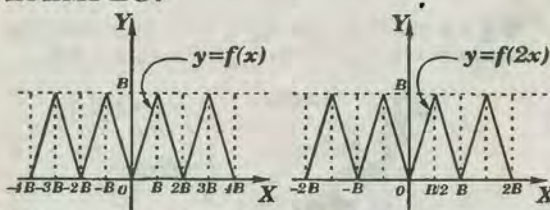
EJEMPLOS :



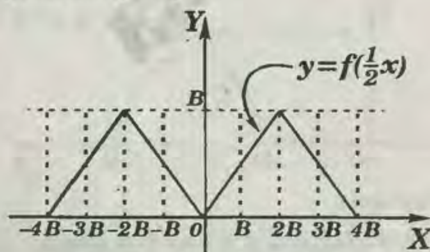
RECUERDE:

Función	*Procedimiento*
$y=kf(x);k>0$	*Alarga o comprime la gráfica de f en un factor k, verticalmente.*
$y=f(kx);k>0$	*Alarga o comprime la gráfica de f en un factor k, horizontalmente*
$y=-f(x)$	*Refleja la gráfica de f, respecto al eje x*
$y=f(-x)$	*Refleja la gráfica de f, respecto al eje y*

EJEMPLO:



* Con respecto a la gráfica de la función $y = f(x)$, la gráfica de la función $y = f(2x)$ se contrae (comprime) hacia el eje **Y**.



* Con respecto a la gráfica de la función $y = f(x)$, la gráfica de la función $y = f\left(\frac{1}{2}\right)^x$ se estira (expande) a partir del eje **Y**.

VI) GRÁFICA DEL VALOR ABSOLUTO DE F(X)

$$|f(x)|=\begin{cases} f(x) & ; f(x)\geq 0 \\ -f(x); & f(x)<0 \end{cases}$$

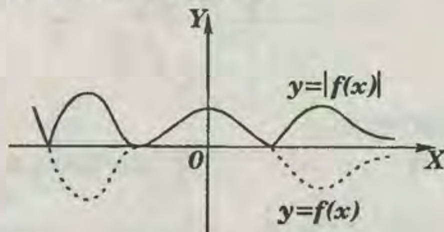
CASO 1 : $y = |f(x)|$

Como $y = |f(x)| \forall x \in Domf$, su gráfica estará totalmente en el semiplano superior o sobre el eje $y; y > 0$.

Así para obtener la gráfica de $y = |f(x)|$ a partir de $y = f(x)$ se procede de la siguiente manera:

I) Se mantienen la parte de la gráfica de f que está sobre el eje **Y** o en el eje **Y** .

II) Se refleja, respecto al eje **X**, la parte de la gráfica de *f* que está debajo del eje **Y** .



CASO 2 : $y = f(|x|)$

* Si $x \geq 0 \wedge x \in Domf$ entonces:

$$f(|x|)=f(|-x|)=f(x)$$

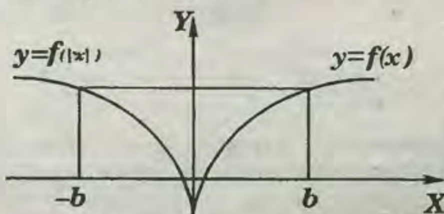
Si $x < 0 \wedge x \in Domf$ entonces $x < |x|$ y en general $f(x) \neq f(|x|)$ o no existe $f(|x|)$.

Así la gráfica de $y = f(|x|)$ se obtiene de la siguiente manera:

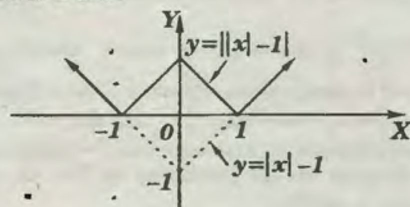
I) Si $x \geq 0$ y $x \in Domf$, la gráfica de $y=f(|x|)$ es exactamente la gráfica de $y = f(x)$ para este caso.

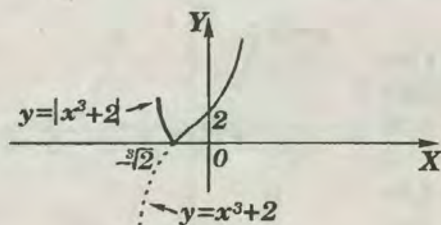
II) Si $x < 0$ y $|x| \in Domf$, la gráfica de $y = f(|x|)$ es la reflexión de la gráfica del caso ***I)***, respecto al eje **Y** .

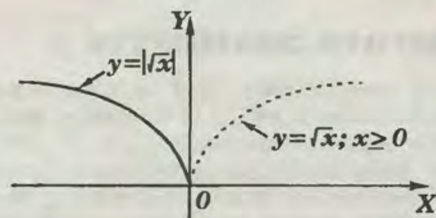
* Es decir la gráfica de $y = f(|x|)$ es simétrico respecto al eje **Y** .

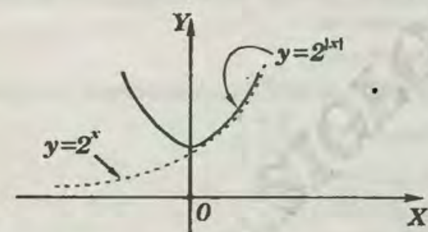


EJEMPLOS:







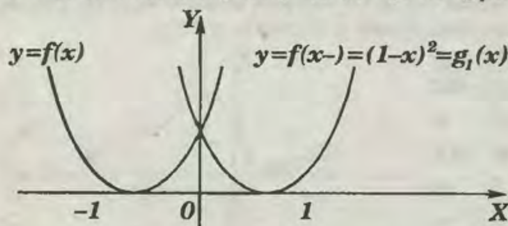


EJERCICIO 1:

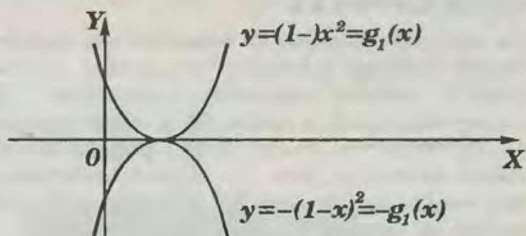
Graficar : $y = -1(1-x)^2$ a partir de $y = (x+1)^2$

RESOLUCIÓN:

* Primero graficamos $y=(1-x)^2$ tomando como punto de partida la gráfica de $y=(x+1)^2=f(x)$, estamos en el caso 2 pues $y=(1-x)^2=f(-x)=g_1(x)$.



* Luego graficamos $y=-(1-x)^2$, estamos en el caso *I.*

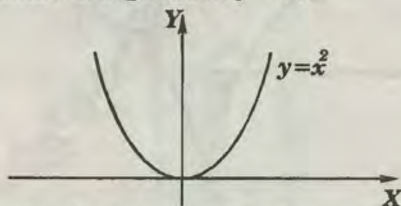


EJERCICIO 2:

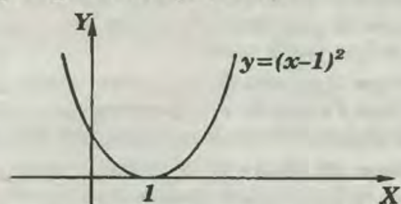
Hallar la gráfica de $y=-(|x|-1)^2$

RESOLUCIÓN:

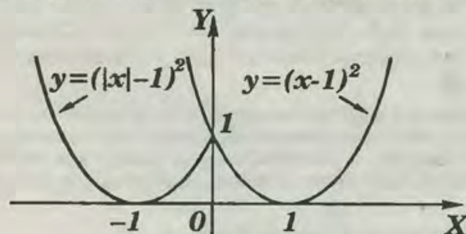
Inicialmente si la gráfica de $y = (x)^2$



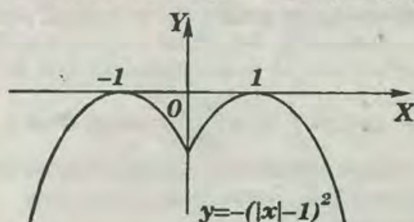
* Luego la gráfica de : $y=(x-1)^2$



* En seguida la gráfica de : $y=(|x|-1)^2$: $y=(x-1)^2$

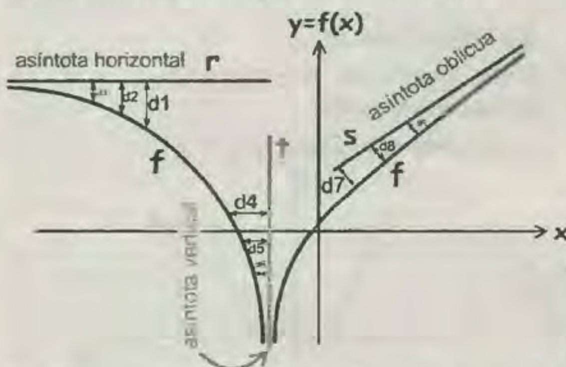


* Finalmente se tiene la gráfica de : $y=-(|x|-1)^2$



VII) ASÍNTOTAS

Las asíntotas son rectas de referencia que, cuando existen, facilitan el trazado de la gráfica de una función porque permiten visualizar el comportamiento de la función en la región cercana a estas rectas. Su estudio formal corresponde al cálculo diferencial, pero por ahora consideramos una versión no rigurosa del concepto, a fin de ampliar las técnicas de graficación estudiadas.



Aquí vemos la representación gráfica de una función ***f***, que nos va a ayudar a entender las ***3*** clases de asíntotas que puede haber.

En la zona izquierda de la gráfica, vemos que la distancia de ***f*** a la recta ***r*** va disminuyendo, a medida que nos alejamos hacia la izquierda: ***d1, d2, d3.***

En la zona del centro de la gráfica, vemos que la distancia de ***f*** a la recta ***t*** va disminuyendo, a medida que nos alejamos hacia abajo: ***d4, d5, d6.***

En la zona derecha de la gráfica, vemos que la distancia de **f** a la recta **s** va disminuyendo, a medida que nos alejamos hacia la arriba y a la derecha: ***d7, d8, d9.***

Entonces a medida que nos alejamos, en el sentido de las x o de las y, esto es, si aumentan las absisas o las ordenadas, en valor absoluto, la distancia entre la función y la asíntota disminuye tanto como se quiera; diremos que se acerca a cero.

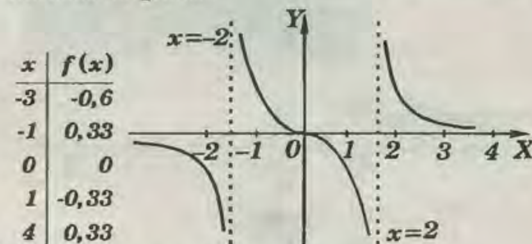
ASÍNTOTA VERTICAL :

Es una recta paralela al eje ***Y***, a la cual se acerca progresivamente la gráfica de la función, pero sin llegar a tocarla. Se determina en forma práctica, igualando a cero el denominador de una función racional del tipo $f(x)=\frac{P(x)}{q(x)}$; donde ***P(x)*** y ***q(x)*** son funciones polinómicas. Su expresión se reduce a la forma $x = k$, siendo ***k*** un número real.

EJEMPLO:

Para encontrar las asíntonas verticales en $f(x)=\frac{x}{x^2-4}$ igualamos a cero al denominador: $x^2-4=0$ de donde obtenemos $x = 2;\ x = -2$ que son las asíntonas verticales.

Con una calculadora, analizamos el comportamiento de la función en las cercanías de ***2*** y ***–2***, luego trazamos la gráfica.



x	f(x)
-3	-0,6
-1	0,33
0	0
1	-0,33
4	0,33

ASÍNTOTA HORIZONTAL :

Es una recta paralela al eje ***X*** , a la cual se acerca progesivamente la gráfica de la función, pero sin llegar a tocarla . Para determinarla, en caso que exista , basta con despejar la variable ***x*** e igualar a cero el denominador de la expresión que se obtiene. Su expresión general es de la forma $y = h$, siendo ***h*** un número real.

EJEMPLO:

* Determinar las asíntotas horizontales y la gráfica de la función : $y=\frac{x+1}{x-2}$

* Despejamos x

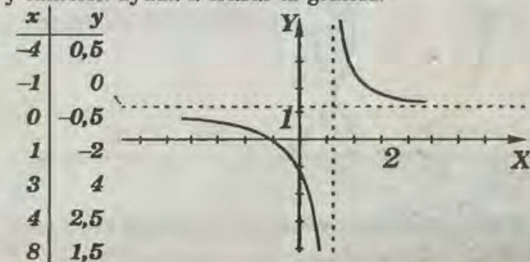
$y(x-2) = x + 1$

$\rightarrow yx - 2y = x + 1$

$\Rightarrow yx - x = 2y + 1 \Rightarrow x = \frac{1+2y}{y-1}$

* Igualando a cero el denominador : $y - 1 = 0 \rightarrow y = 1$, esta es la asíntota horizontal . La gráfica se determina calculando valores de la función y marcando los puntos correspondientes.

* Nótese que $x=2$ también es asíntota, pero vertical, y también ayuda a trazar la gráfica.



x	y
–4	0,5
–1	0
0	–0,5
1	–2
3	4
4	2,5
8	1,5

FUNCIONES NOTABLES

1) FUNCIÓN PAR :

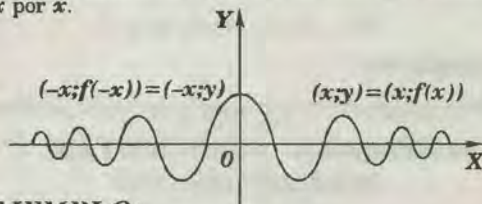
Una función f es la función par , si cumple las condiciones :

I) $x \in Domf \Rightarrow -x \in Domf$...*(Dominio Simétrico)*

II) $f(x) = f(-x), \forall x \in Domf$

Gráficamente f es simétrica respecto al eje **Y**.

* Es decir, la ecuación $y = f(x)$ no cambia al sustituir $-x$ por x.



EJEMPLO:

$f(x) = x^2 - 1$, es par , ya que al sustituir $-x$ por x , se obtiene : $f(-x) = (-x)^2 - 1 \to f(-x) = x^2 - 1$

* Entonces : $f(-x) = f(x)$

2) FUNCION IMPAR :

Una función F es impar si cumple dos condiciones :

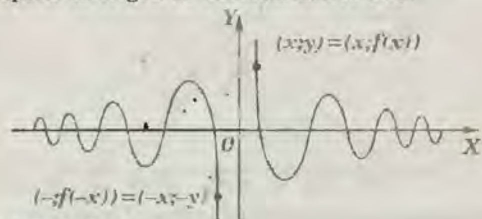
I) Si $x \in DomF \Rightarrow -x \in DomF$ (Dominio Simétrico)

II) $F(-x) = -F(x);\ \forall x \in DomF$

Es decir, la ecuación $y = f(x)$ cambia por su opuesto al sustituir $-x$ por x.

NOTA:

La gráfica de una función impar es simétrica con respecto al origen de coordenadas *(0 ; 0)*.



EJEMPLO 1:

La función $F(x) = -5x^3 ; x \in \mathbb{R}$, es impar , ya que :

I) Siendo $DomF = \mathbb{R};\ \forall x \in DomF$ se verifica que $-x \in DomF$

II) $F(-x) = -5(-x)^3 = 5x^3 = -F(x)$

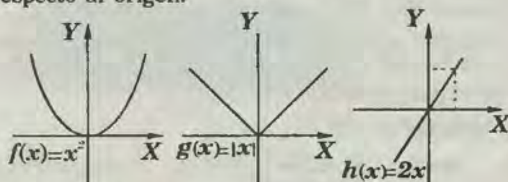
EJEMPLO 2 :

* La función dada por $f(x) = x^2$ es par , ya que $f(-x) = f(x)$.

* La función valor absoluto $g(x) = |x|$ es par , porque $|-x| = |x|$.

* La función lineal $h(x) = 2x$ es impar porque $h(-x) = -h(x)$

Como vemos en sus gráficas , f y g son simétricas respecto al eje **Y**, mientras que h es simétrica respecto al origen.



EJEMPLO 3:

Determinar si cada una de las siguientes funciones es par , impar o de ninguno de estos tipos :

a) $f(x) = x^2 - 2$ *b)* $g(x) = x^3 - 2x$ *c)* $h(x) = x + 1$

RESOLUCIÓN:

* En a : podemos verificar que **f** es par:

$$f(-x) = (-x)^2 - 2 = x^2 - 2 = f(x).$$

* En b :

$$g(-x) = (-x)^3 - 2(-x) = -x^3 + 2x = -g(x)$$

esto es , **g** es impar.

* En *c*: $h(-x) = -x + 1 = -(x - 1)$; esto es **h** no es par ni impar.

* Sin graficar , podemos asegurar que f es simétrica respecto al eje **Y**, g es simétrica respecto al origen y h no tiene estas simetrías.

3) FUNCIÓN PERIÓDICA :

Una función F es periódica con período $T(T > 0)$ si cumple las condiciones :

I) $\forall x \in DomF$, se tiene que $(x + T) \in DomF$

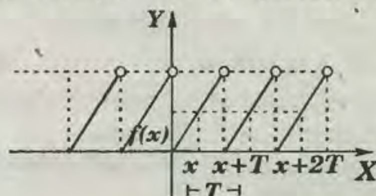
II) $F(x + T) = F(x) ;\ \forall x \in DomF$

* El número T se llama período T.

* Gráficamente una función periódica de período $T>0$ repite su gráfico en cada intervalo de longitud T.

* Además si:

$$f(x) = f(x + T) = f((x + T) + T) = f((x+2T) + T) = ...$$



* Se observa que : $f(x) = f(x + T)$

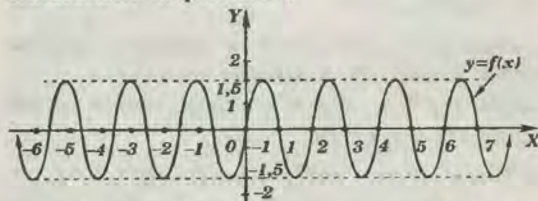
* Toda función periódica con período T tiene su gráfica de tal manera que la misma forma que tiene en un intervalo de longitud T, se repite horizontal y periódicamente en el siguiente intervalo consecutivo (y anterior) de longitud T.

* Observamos además que si T es un período de f, entonces $2T$, $3T$, ..., también son períodos de f.

* El menor número positivo T (si es que lo hay) para el que $f(x+T) = f(x)$ se denomina período principal o fundamental de f.

EJEMPLO 1:

La función f cuya gráfica mostramos a continuación es períodica .



Los valores de la función se repiten cada dos unidades a medida que nos movemos sobre el eje X. En otras palabras para cualquier x, tenemos que $f(x) = f(x + 2)$. Para ver esto desde otro punto de vista , la parte de la gráfica entre 0 y 2 sobre el eje X, observada se repite al resto de la gráfica (como si fueran copias). Si trasladamos la gráfica dos unidades será la gráfica original . Decimos entonces que f tiene un período igual a **2**.

EJEMPLO 2:

$F(x) = Cosx; \ \in R$

I) $\forall x \in DomF$, se cumple que $(x + 2\pi) \in DomF$

II) $F(x + 2\pi) = Cos(x + 2\pi) = Cosx = F(x)$

$\Rightarrow$ el período es $T = 2\pi$

EJEMPLO 3:

Pruebe que la función seno es una función periódica impar con período mínimo $T = 2\pi$.

RESOLUCIÓN:

*Supongamos que existe $T \neq 0$ tal que :

$sen\ (x+T) = senx, \ \forall x \in \mathbb{R}$. Tomemos en particular

$x = 0 \Rightarrow senT = 0 \Rightarrow T = 2kp; \ k \in Z$.

* Luego $T \in \mathbb{R} \Rightarrow (x+T) \in \mathbb{R}$

* Entonces, la función seno es periódica con período T.

* Cuando $k \in Z^+ \Rightarrow T = 2\pi, 4\pi, ...$

* Luego decimos que $T = 2\pi$ es el período mínimo de la función seno

* Veamos ahora que $f(x) = senx$ es una función impar .

* Sea $x \in \mathbb{R} \Rightarrow (-x) \in \mathbb{R}$, luego :

$f(-x) = sen(-x) = -senx; \ \forall x \in \mathbb{R}$

* Luego: $f(x) = -f(x), \ \forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ La función seno es impar.

4) FUNCIÓN ANTIPERIÓDICA :

Sea f una función se llamará antiperiódica si existe algún Real no nulo $T (T \neq 0)$ tal que:

$$F(x + T) = -F(x); \ \forall x \in R$$

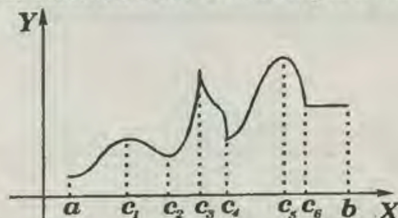
TEOREMA:

Si F es antiperiódica, entonces también es periódica.

FUNCIONES CRECIENTES Y DECRECIENTES

Al observar la gráfica de una función y recorrer su trazo de izquierda a derecha, podemos notar que algunas porciones suben, otras bajan y otras se mantienen horizontales . En estos casos, la función es creciente, decreciente y constante , respectivamente.

Por ejemplo , si la gráfica mostrada fue trazada por cierto instrumento que mide y registra alguna cantidad física , donde el eje X representa el tiempo , y las ordenadas son los valores medidos por el instrumento , que pueden ser temperatura , presión arterial de una persona , cantidad de bacterias en un cultivo , intensidad de un sonido , etc . entonces obtenemos información directa y valiosa con observar sus detalles de crecimiento y decrecimiento



Observamos que la cantidad aumentó en el intervalo $[a ; c_1]$, disminuyó durante $[c_1 ; c_2]$, aumentó durante, $[c_2 ; c_3]$, etc.; asimismo que el mayor valor se registró en c_5 y el menor en a. Pero si solo se considera el intervalo $[c_1 ; c_4]$, el máximo y el mínimo ocurren en c_3 y c_2 respectivamente y así por el estilo, hay otros máximos y mínimos , según el intervalo que se tome. Cuando el trazo es horizontal, la cantidad no varía , esto se nota en $[c_6 ; b]$, ahí la cantidad es constante.

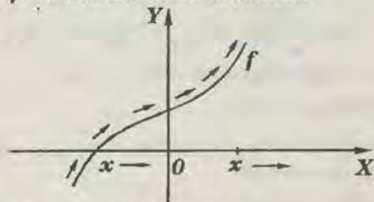
5) FUNCIÓN CRECIENTE :

Sea *f* una función tal que $\forall x_1, x_2 \in Dom f$:

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$, entonces decimos que *f* es una función creciente.

NOTA:

Si ocurre la desigualdad $f(x_1) < f(x_2)$ se dice que la función *f* es estrictamente creciente.

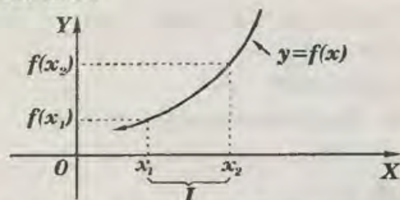


OBSERVACIÓN :

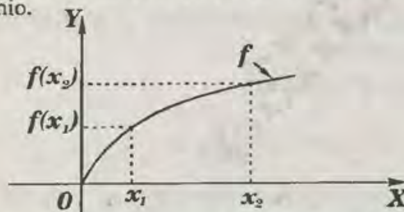
f es creciente en un intervalo *I*

Si : $f(x_1) < f(x_2)$ para todo $x_1 < x_2$

EJEMPLO:



La función *f* tal que $f(x) = \sqrt{x}$ es creciente en su dominio.



6) FUNCIÓN DECRECIENTE :

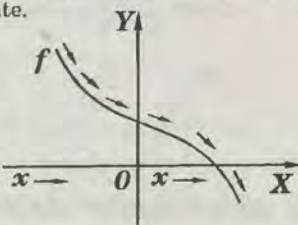
Sea *f* una función tal que $\forall x_1, x_2 \in Dom f$:

$x_1 < x_2 \; f(x_1) > f(x_2)$, entonces decimos que *f* es una función decreciente.

NOTA :

Si ocurre la desigualdad :

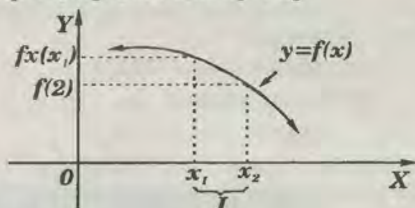
$f(x_1) > f(x_2)$ se dice que la función *f* es estrictamente decreciente.



OBSERVACIÓN

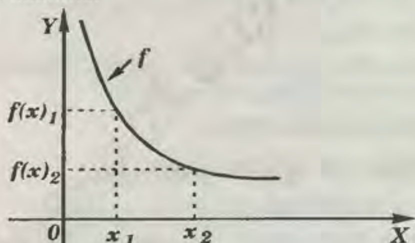
f es decreciente en un intervalo *I*

Si: $f(x_1) > f(x_2)$ para todo $x_1 < x_2$

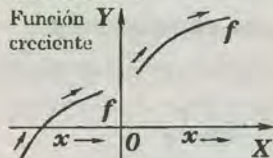


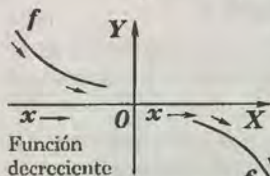
EJEMPLO:

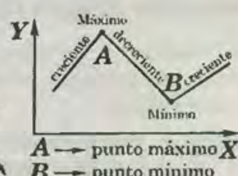
La función *f* tal que : $f(x) = \frac{2}{x}; x > 0$ es decreciente en su dominio.



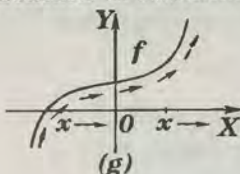
MÁS EJEMPLOS :

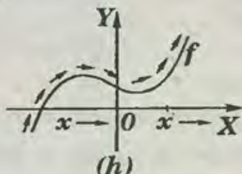


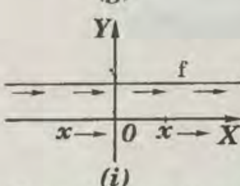


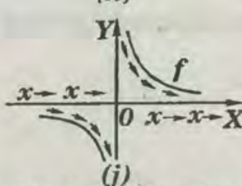


* Las siguientes gráficas no son de funciones crecientes ni decrecientes.









Existen funciones como *(g)*, *(i)* o la función máximo entero donde la gráfica sube (asciende) o se mantiene

horizontal es decir , en ningún momento bajan (descienden) , estas funciones suelen llamarse función no decreciente.

Es decir f es no decreciente si cumple:

Si $\forall x_1, x_2 \in Dom\, f$, $x_1 < x_2$
entonces : $f(x_1) < f(x_2)$

Análogamente existen funciones que bajan (descienden) o se mantienen horizontal , es decir , no suben (ascienden) en ninguna parte , ellas se llaman función no creciente.

Así f es no creciente si cumple:

Si $\forall x_1, x_2 \in Dom\, f ; x_1 < x_2$
entonces : $f(x_1) > f(x_2)$

Se puede notar que cualquier función constante es no creciente y además no creciente.

OBSERVACIONES :

FUNCIÓN NO DECRECIENTE :

Sea f una función tal que $\forall x_1, x_2 \in Domf$:

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$, entonces decimos que f es una función no decreciente.

FUNCIÓN NO CRECIENTE :

Sea f una función tal que $\forall x_1, x_2 \in Domf$:

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$, entonces decimos que f es una función no creciente.

FUNCIÓN MONÓTONA :

Una función es monótona , si es cualquiera de las anteriores (creciente , decreciente , no decreciente y no creciente).

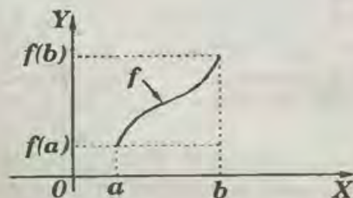
REGLA PRÁCTICA PARA CALCULAR RANGOS DE FUNCIONES CRECIENTES Y DECRECIENTES

Sea f una función cuyo dominio es $[a; b]$ y cuya gráfica es una curva continua de un sólo trazo (sin saltos bruscos verticales)

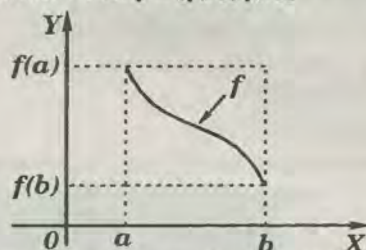
Luego :

* Si es creciente $\Rightarrow Ranf = [f(a); f(b)]$
* Si f es decreciente $\Rightarrow Ranf = [f(b); f(a)]$

INTERPRETACIÓN GRÁFICA :



f es creciente : $Ranf = [f(a); f(b)]$



f es decreciente : $Ranf = [f(b); f(a)]$

OBSERVACION:

Análogamente se calcula el rango de una función f cuando su dominio es :

$(a ; b)$ y $f(a), f(b)$ existen:

f creciente $\Rightarrow Ranf = \langle f(a); f(b) \rangle$

f decreciente $\Rightarrow Ranf = \langle f(b); f(a) \rangle$

EJEMPLO 1:

Sea la función g tal que : $g(x) = cosx; x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right\rangle$

Determinar su Rango

RESOLUCIÓN :

* g es una función decreciente $\forall x \in [0, \pi/2\rangle$
* Entonces : $Rang = \langle cos\pi/2 ; cos 0]$

$\rightarrow Rang = \langle 0 ; 1]$

EJEMPLO 2 :

Demostrar que la función $f: [2; 5] \rightarrow \mathbb{R} ;\ f(x) = \frac{x-10}{x-6}$ es creciente

RESOLUCIÓN:

* Como : $f(x) = \frac{x-6-4}{x-6} = 1 - \frac{4}{x-6}$
* Sea x_1, x_2 en $[2 ; 5]$ tal que $2 < x_1 < x_2 < 5$

$$\Leftrightarrow -4 < x_1 - 6 < x_2 - 6 < -1$$

$$\Leftrightarrow -1 \le \frac{1}{x_2 - 6} < \frac{1}{x_1 - 6} \le -\frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow -4 \le \frac{4}{x_2 - 6} \le -1 \Leftrightarrow 1 \le -\frac{4}{x_1 - 6} \le 4$$

$$\Leftrightarrow 2 \le 1 - \frac{4}{x_1 - 6} < 1 - \frac{4}{x_2 - 6} \le 5$$

$$\Leftrightarrow 2 < f(x_1) < f(x_2) < 5$$

* Por lo tanto f es creciente

7) FUNCIONES ACOTADAS :

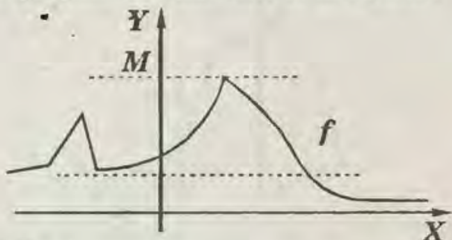
Una función F está acotada sobre un conjunto $A \subset DomF$ si y solo si el conjunto de imágenes

$F(A) = \{F(x)/x \in A \subset DomF\}$ está acotado.

En forma equivalente:

$|F(x)| < M; \forall x \in A$, siendo $M > 0$ la cota.

* Es decir una función es acotada cuando el valor absoluto de la función es menor que cierto número real fijo , para cualquier valor de la variable .



NOTA :

A) Si $F(x) < M, \forall x \in A \subset DomF$, entonces F está acotada superiormente por M sobre el conjunto A .

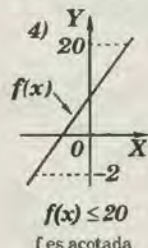
B) Si $F(x) > m, \forall x \in A \subset DomF$, entonces F está acotada inferiormente por m sobre el conjunto A.

EJEMPLOS:

*1)*En el conjunto $A = [0;+\infty[$ la función $F(x)=4-x^2$ está acotada superiormente por $M = 4$.

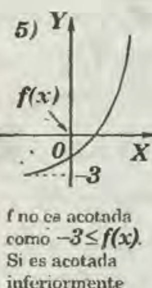
*2)*En el conjunto $A =]-\infty;0]$ la función $G(x)=x^2-3$ está acotada inferiormente por $m = -3$.

3) En el conjunto $A=[-2;2]$ la función $F(x)=x^2-1$ está acotado por $M = 3$; ya que $|F(x)|<3$; $\forall x \in [-2;2]$.

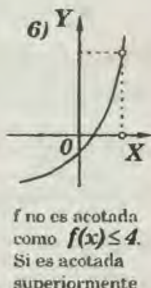


$f(x) \leq 20$

f es acotada



f no es acotada como $-3 \leq f(x)$. Si es acotada inferiormente



f no es acotada como $f(x) \leq 4$. Si es acotada superiormente

EJERCICIO:

Sea la función $f(x)=\dfrac{1}{2x^2-3x+5}$ hallar el menor valor positivo k tal que $|f(x)|<k$, $\forall x \in Domf$ donde Domf es el mayor conjunto posible.

RESOLUCIÓN:

* Como : $f(x)=\dfrac{1}{2x^2-3x+5}=\dfrac{1}{2\left(x-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{31}{8}}$

* Puesto que :

$$\left(x-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{31}{8} \geq \frac{31}{8}, \forall x \in R$$

* Invirtiendo :

$$\frac{1}{2(x-3/4)^2+31/8} \leq \frac{8}{31} = h \Rightarrow \forall x \in R$$

Entonces : $\left|\dfrac{1}{2(x-3/4)^2+31/8}\right| \leq \dfrac{8}{37}$

8)FUNCIÓN INYECTIVA O UNIVALENTE

La función F es inyectiva (univalente o uno a uno) cuando para cada imagen «y» le corresponde una y sólo una pre-imagen «x».

* Simbólicamente :

Si : $f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow x_1=x_2; \forall x_1, x_2 \in Domf$

o equivalentemente:

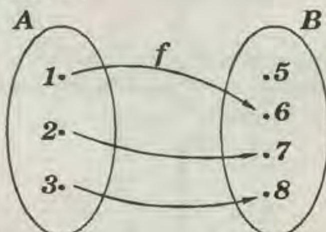
Si: $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)\ \forall x_1, x_2 \in Domf$

Estos nos indica que ninguna de las imágenes está relacionada con más de una pre-imagen. Si se analiza los pares ordenados de una función inyectiva , se observa que ninguna segunda componente aparece más de una vez.

REGLA PRÁCTICA :

Si f es una función inyectiva , una paralela al eje x debe intersecar a la gráfica de la función a lo más en un punto es decir cualquier recta horizontal que corte a la gráfica , lo hará en un solo punto.

EJEMPLO 1:



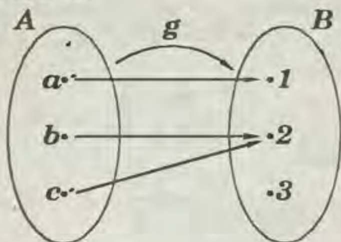
* La gráfica de la figura define la aplicación $f: A \rightarrow B$.

* Esto es:

$$f = \{(1;6),(2;7),(3;8)\}$$

Es una función inyectiva , porque a los elementos diferentes ***1 ; 2*** y ***3*** del dominio le corresponden las imágenes ***6 ; 7*** y ***8*** que también son diferentes.

EJEMPLO 2:



* Al existir dos elementos en el dominio con la misma imagen bastará para afirmar que «f» no será inyectiva.

EJEMPLO 3 :

¿ Es inyectiva $f(x) = -3x + 2$?

RESOLUCIÓN :

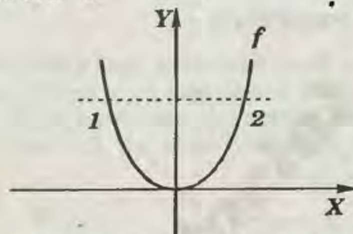
* Partimos de dos imágenes que sean iguales $f(x_1)=f(x_2)$. Si logramos establecer que $x_1=x_2$, habremos demostrado que es inyectiva.

Entonces:

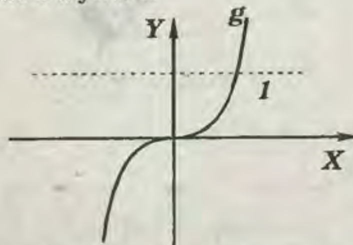
$-3x_1+2=-3x_2+2 \Rightarrow -3x_1=-3x_2$ y de aquí $x_1=x_2$

* Por lo tanto, la función es inyectiva . La gráfica de esta función corresponde a una recta inclinada , lo cual implica que cualquier paralela al eje X la intersecará en un solo punto , como era de esperarse.

EJEMPLO 4:



* La recta horizontal corta en dos puntos al gráfico de la función $f(x) = x^2$, entonces la función no es univalente o inyectiva.

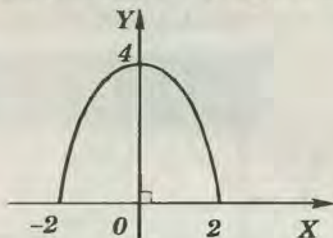


* La recta horizontal corta en un solo punto al gráfico de la función $g(x) = x^3$, entonces la función es univalente o inyectiva.

* Para averiguar si una función es inyectiva cualquier recta horizontal debe cortar a la gráfica de la función a lo más en un punto.

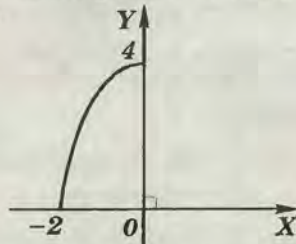
EJEMPLO 5 :

La función $F(x)=4-x^2;\ x\in[-2;2]$ al ser graficada , será :



* No es inyectiva dado que existen rectas horizontales , que cortan al gráfico en dos puntos .

* Pero si restringimos , el dominio a $[-2;0]$ resultaría



En este caso si sería inyectiva .

EJEMPLO 6 :

Mostrar $f:\langle-\infty;-1] \rightarrow \mathbb{R}$ con :

$$f_{(x)}=11-\sqrt{x^2-4x-5} \text{ es inyectiva.}$$

RESOLUCIÓN:

* Sean $x_1, x_2 \in Domf$, luego : $f(x_1) = f(x_2)$

$\Leftrightarrow 11-\sqrt{x_1^2-4x_1-5}=11-\sqrt{x_2^2-4x_2-5}$

$\Leftrightarrow \sqrt{x_1^2-4x_1-5}=\sqrt{x_2^2-4x_2-5}$

$\Leftrightarrow \sqrt{(x_1-2)^2-9}=\sqrt{(x_2-2)^2-9}$

$\Leftrightarrow (x_1-2)^2=(x_2-2)^2 \Leftrightarrow |x_1-2|=|x_2-2|$

$\Leftrightarrow x_1-2=x_2-2$

ya que $x_1,x_2\in\langle-\infty;-1\rangle \Leftrightarrow x_1=x_2$

$\Rightarrow f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow x_1=x_2;\ \forall x_1,x_2\in Domf,$

f es inyectiva.

EJEMPLO 7:

Sea la función : $f(x)=-x^2-4x-3$, si $x\geq -2$

determinar si f es univalente .

RESOLUCIÓN :

* Hagamos $f(x_1)=f(x_2)$. Si la única solución de esta ecuación es $x_1 = x_2$ entonces f será univalente . Así

Si $f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow -x_1^2-4x_1-3=-x_2^2-4x_2-3$

$$\Rightarrow x_2^2-x_1^2+4x_2-4x_1=0$$
$$\Rightarrow (x_2-x_1)(x_2+x_1+4)=0$$
$$\Rightarrow x_2-x_1=0 \text{ ó } x_1+x_2+4=0$$

Si : $x_2-x_1=0 \Rightarrow x_1=x_2$ .... ***(I)***

* Veamos si se verifica $x_1+x_2+4=0$ como $x_1 \geq 2$ y

$$x_2 \geq 2 \Rightarrow x_1+x_2 \geq 4$$
$$\Rightarrow x_1+x_2+4 \geq 0$$

* Así parece que puede ser que $x_1+x_2+4=0$. Pero esto se obtiene solo si ambos x_1 y x_2 son iguales *a* -2. Entonces $x_1=x_2=-2$, verifica ***(I)*** por lo que f es univalente , ya que en cualquier otro caso :

$$x_1+x_2+4>0$$

TEOREMA :

Si f es una función creciente (o decreciente), entonces f es inyectiva.

DEMOSTRACIÓN:

* Sea f una función creciente y sean

$$x_1, x_2 \in Domf \text{ tal que: } x_1 \neq x_2$$

Luego : $x_1<x_2 \vee x_2<x_1$

Entonces:

a) Si $x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$

b) Si $x_2<x_1 \Rightarrow f(x_2)<f(x_1)$

Es decir : $f(x_1) \neq f(x_2)$

Por tanto , f es una función inyectiva. Análogamente se prueba cuando la función f es decreciente.

9) FUNCIÓN SOBREYECTIVA O SURYECTIVA :

Se dice que una función es sobreyectiva cuando todos los elementos del conjunto de llegada *(B)* son imagen de algún elemento del conjunto de partida *(A)*.

f ***es sobreyectiva*** $\Leftrightarrow \forall y \in B,\ \exists x \in A / f(x)=y$

* Esto equivale afirmar que es sobreyectiva la función cuyo rango es igual al conjunto de llegada.

* Cuando una función sobreyectiva se expresa en forma de pares ordenados, se observa que todos los elementos del conjunto de llegada aparecen, al menos una vez, como segunda componente de algún par.

DEFINICIÓN:

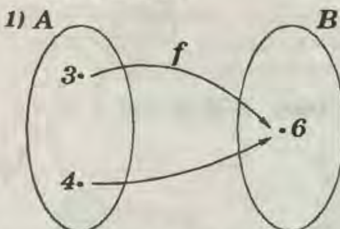
Una función $f: X \to Y$ es suryectiva (sobreyectiva o epiyectiva) si todo elemento del conjunto de llegada es imagen de , por lo menos, un elemento del dominio de f.

Es decir : f ***es suryectiva*** $\Leftrightarrow Ranf=Y$

Existe sobreyección , si todos los elementos de Y tienen su preimagen en el conjunto de partida X , con la alternativa de que un elemento de Y puede ser imagen de varios elementos de X.

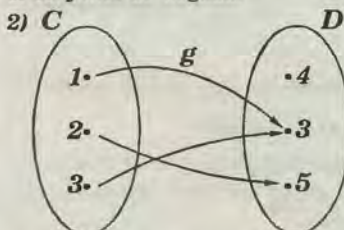
EJEMPLOS :

1)



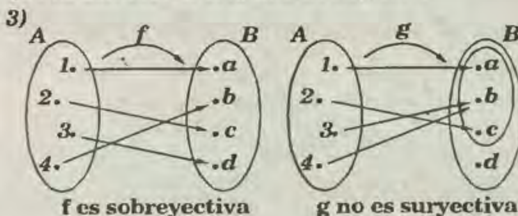
* La función $f=\{(3;6),(4;6)\}$, definida de **A** en B según la figura es sobreyectiva , porque el rango de «f» está formado por el conjunto $\{6\}$, que es todo el conjunto de llegada.

2)



* La función : $g=\{(1;3),(2;5),(6;3)\}$, definida según la figura de C en D, no es sobreyectiva, porque el rango de g está formado por los elementos *3* y *5*, que no son todo el conjunto de llegada .

3)



f es sobreyectiva **g no es suryectiva**

4) Sea la función numérica f definida por $f(x)=3x-4$, ésta es sobreyectiva; porque, cualquiera que sea el número real v, la ecuación $3x-4=y$ admite la solución: $x=(y+4)/3$, donde $y\in\mathbb{R}$.

5) ¿Es sobreyectiva la función $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}/h(x)=x^2$?

RESOLUCIÓN :

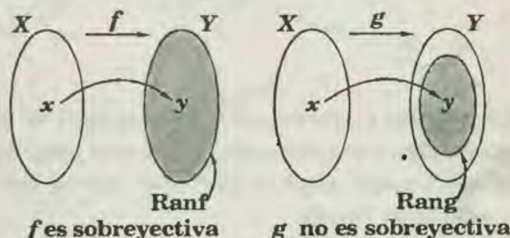
* Se coloca la imagen en función de la pre-imagen y obtenemos: $x=\sqrt{y}$

* Como la raíz es de índice par, notamos con facilidad que los únicos valores de y que pueden aparecer como imagen, son los nulos o los positivos; y así el conjunto de llegada no será igual al rango y tendremos que la función no es sobreyectiva.

CONCLUSIÓN :

Por lo anterior se concluye que para ver si una función es sobreyectiva , bastará hallar su rango y compararlo con el conjunto de llegada.

INTERPRETACIÓN GRÁFICA :



***f* es sobreyectiva** — ***g* no es sobreyectiva**

NOTA :

* Sea $f: A\to B$ suryectiva con A y B conjuntos finitos , entonces : $n(A)\geq n(B)$

* En aquellas funciones donde no se indica el conjunto de llegada, se les considera suryectiva.

EJERCICIO 1 :

Sea la función $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, definida por $f(x)=x^2-1$ Averigue si f es sobreyectiva.

RESOLUCIÓN :

* Para que f sea sobreyectiva debe cumplirse que $Ranf=\mathbb{R}$.

* Hallemos el Rango de f , como $x\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow x^2\geq 0 \Rightarrow x^2-1\geq -1$

$\Rightarrow f(x)\geq -1 \Rightarrow Ranf=[-1;+\infty\rangle$

* Luego $Ranf\neq\mathbb{R}$

* Por tanto , f no es sobreyectiva

EJERCICIO 2 :

Averiguar si :

$f:\langle 0;5]\Rightarrow[-4;5]$ es sobreyectiva con $f(x)=x^2-4x$

RESOLUCIÓN :

$0<x\leq 5 \Leftrightarrow -2<x-2\leq 3\Leftrightarrow 0\leq(x-2)^2\leq 9$

$\Leftrightarrow -4\leq(x-2)^2-4\leq 5 \Leftrightarrow -4\leq f(x)\leq 5$

$\Leftrightarrow Rang(f)=[-4;5]$

$\to Rang(f)=[-4;5]$ luego f es suryectiva.

EJERCICIO 3:

Si $f:\langle-\infty;1]\to[2;\infty\rangle$ es una función decreciente (estrictamente decreciente) y suryectiva tal que $f(x)=\dfrac{ax+b}{2}, \forall x\leq 1$ y $f(0)=-a$. Hallar $b-a$.

RESOLUCIÓN :

* Como f es suryectiva $R_f=B=[2;\infty\rangle$ como f es decreciente : $f(1)=2$ ¿por qué?

* Resolvemos :

$$f(1)=2\Rightarrow\frac{a+b}{2}=2\Rightarrow a+b=4$$

$$f(0)=-a\Rightarrow\frac{b}{2}=-a\Rightarrow b=-2a$$

$$\Rightarrow a=4\wedge b=8$$

* Piden : $b-a=8-(-4)=12$

EJERCICIO 4 :

La función f: $[-1,3]\to B$ con $f(x)=|2x|-x+1$ es sobreyectiva (suryectiva), entonces se pide hallar B

RESOLUCIÓN :

$$f(x)=\begin{cases}x+1; & 0\leq x\leq 3\\ -3x+1; & -1\leq x<0\end{cases}$$ ¿por qué?

* Como f es suryectiva $R_f=R_{f_1}\cup R_{f_2}$

Si $0\leq x\leq 3\Rightarrow 1\leq x+1\leq 4\Rightarrow R_{f_1}=[1;4]$

Si $-1\leq x<0\Rightarrow 3\geq -3x>0\Rightarrow 4\geq -3x+1>1$

$\Rightarrow R_{f_2}=\langle 1;4]$

$R_f=[1;4]\cup\langle 1;4]=[1;4]$

NOTA :

Toda función f es sobreyectiva sobre su rango.

10) FUNCIÓN BIYECTIVA

Una función es biyectiva cuando es inyectiva y sobreyectiva a la vez . Se le conoce porque su gráfica es cortada por cualquier recta paralela al eje **X** y , además, este corte se produce en un solo punto.

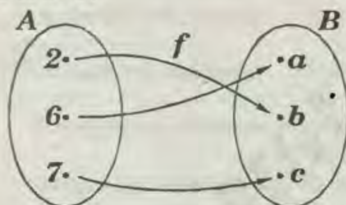
f es biyectiva ⇔ *f es inyectiva* y *sobreyectiva*

INTERPRETACIÓN GRÁFICA :



* Observamos que el rango coincide con el conjunto de llegada y cada elemento de éste es imagen de un sólo elemento del dominio, es decir, es sobreyectiva e inyectiva a la vez.

EJEMPLO 1:



* Sea la función *f*: $\{(2;b),(6;a),(7;c)\}$, definida de **A** en **B** mediante el gráfico de la figura.

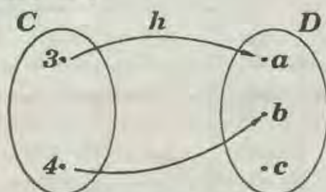
* Podemos afirmar que :

I) **A** elementos diferentes del dominio le corresponden imágenes diferentes.

II) El rango de «*f*» está formado por los elementos a , b , c que forman todo el conjunto de llegada **B** .

* De *(I)* y *(II)* concluímos que la aplicación «*f* es biyectiva de **A** en **B**»

EJEMPLO 2 :

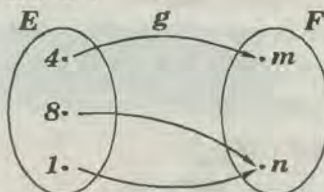


* Dada la función h:$\{(3;a),(4;b)\}$, definida de **C** en **D** según el gráfico de la figura , podemos afirmar que

* El rango de la aplicación «*h*» está formado por los elementos «*a*» y «*b*», que no son todos los elementos del conjunto **D**.

* Luego , la aplicación «*h*» de **C** en **D** no es biyectiva.

EJEMPLO 3 :



* Dada la función *g*: $\{(4;m);(8;n);(1;n)\}$, definida de **E** en **F** , según el gráfico de la figura, podemos afirmar que :

* A los elementos **8** y **1** del dominio, que son diferentes, les corresponde la misma imagen «*n*».

* Es decir $8 \neq 1$ y $f(8)=f(1)=n$

* Por esta razón , la aplicación «*g*» de **E** en **F** no es biyectiva.

CONCLUSIÓN :

Una función de **A** en **B** es biyectiva si cumple con las condiciones siguientes:

I) El rango de la aplicación es todo el conjunto de llegada, o sea **B**.

II) **A** elementos diferentes de **A** les corresponde imágenes diferentes . Es decir, la aplicación es **INYECTIVA** y **SOBREYECTIVA.**

En otras palabras :

Una aplicación *f* de **A** en **B** es biyectiva , si a cualquier elemento de **B** le corresponde un único elemento de **A** y reciprocamente, a cualquier elemento de **A** le corresponde un único elemento de **B**.

EJEMPLO 4:

Sea la función $f:\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ definida por: $f(x)=x^2$

I) Será sobreyectiva , porque $f(\mathbb{R}^+)=\mathbb{R}^+$

II) Será inyectiva , porque $x_1^2=x_2^2$ y , como son positivos , se deduce que $x_1=x_2$

* Luego se trata de una función biyectiva.

EJEMPLO 5 :

Averigue si la función : $f:[-1;6\rangle \to [-7;11\rangle$ definida por: $f(x)=2x-5$, es biyectiva

RESOLUCIÓN :

* Veamos si *f* es inyectiva

* Sean $x_1; x_2 \in Domf = [-1;6\rangle$
* Luego :

$f(x_1)=f(x_2)$ implica $2x_1 - 5 = 2x_2 - 5 \Rightarrow x_1 = x_2$

* Por tanto, f es inyectiva
* Veamos si f es sobreyectiva:
* Hallemos el rango de f como $x \in [-1;6\rangle$

$$\Rightarrow -7 \leq 2x-5 < 7 \Rightarrow -7 \leq y < 7$$

$$\Rightarrow Ranf = [7;7\rangle$$

* Luego $Ranf = [-7;11\rangle$
* Por tanto f no es sobreyectiva .
* Finalmente f no es biyectiva .

EJEMPLO 6 :

Sea :

$f: [2;4] \to A$, $f(x) = 1-2x$ biyectiva y

$g: A \to B$, $g(x) = \dfrac{7}{x+1}$ igualmente biyectiva calcular B.

RESOLUCIÓN:

* Como f es biyectiva $Ranf = A$

$$2 \leq x \leq 4 \Rightarrow -4 \geq -2x \geq -8 \Rightarrow -3 \geq -2x+1 \geq -7$$

$$\Rightarrow A = [-7;-3]$$

* Como g es biyectiva $Rang = B$

$$-7 \leq x \leq -3 \Rightarrow -6 \leq x+1 \leq -2 \Rightarrow -\frac{1}{6} \geq \frac{1}{x+1} \geq -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow -\frac{7}{2} \leq \frac{7}{x+1} \leq -\frac{7}{6} \Rightarrow B = \left[-\frac{7}{2};-\frac{7}{6}\right]$$

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

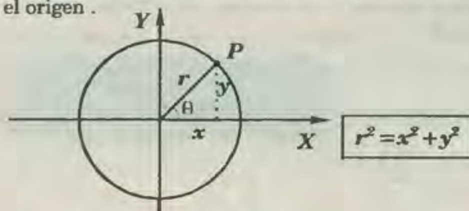
En esta sección haremos un breve repaso de las funciones trigonométricas que serán usadas en otras unidades del texto, asímismo se hará un listado de las identidades trigonométricas que más se empleará sobre todo en el estudio de los límites y las técnicas de integración. El detalle más importante será el tratamiento de las definiciones, ya no basadas solamente en ángulos y triángulos, sino también en el círculo trigonométrico, donde los dominios son conjuntos de números en vez de conjuntos de ángulos.

DEFINICIÓN :

Toda función trigonométrica es un conjunto de pares ordenados $(\alpha, f.t(\alpha))$, donde los primeros términos vienen a ser números reales (variables en radianes) y los segundos, los correspondientes valores de las razones trigonométricas de dichos arcos $(f.t(\alpha))$.

Las funciones trigonométricas de un número real α, para las cuales son válidas las definiciones de razones trigonométricas de un ángulo cualquiera, vienen dadas de la siguiente manera:

* Consideremos una circunferencia de radio r con centro en el origen .



y los cocientes $\frac{x}{r},\frac{y}{r},\frac{x}{y},\frac{y}{x},\frac{r}{y},\frac{r}{x}$ donde x e y son las coordenadas de un punto P sobre la circunferencia. A medida que el punto P recorre la circunferencia, el ángulo q (medido en radianes) que forman el radio de la circunferencia y el eje X , varía y se puede asociar a cada valor del ángulo un valor a cada uno de los cocientes mencionados . Estas relaciones son las funciones circulares o trigonométricas.

$sen\theta = \frac{y}{r}$	*seno del ángulo θ*
$cos\theta = \frac{x}{r}$	*coseno del ángulo θ*
$tg\theta = \frac{y}{x}$	*tangente del ángulo θ*
$sec\theta = \frac{r}{x}$	*secante del ángulo θ*
$csc\theta = \frac{r}{y}$	*cosecante del ángulo θ*
$ctg\theta = \frac{x}{y}$	*cotangente del ángulo θ*

*«Ahora si consideramos el radio 1 , a la circunferencia se le llama «circunferencia trigonométrica »

* Como $sen\theta = \frac{y}{1} \Rightarrow y = sen\theta \quad cos\theta = \frac{x}{1} \Rightarrow x = cos\theta$

Función Trigonométrica		Dominio: θ	Rango: f.t.
seno	$sen\theta = y$	$\mathbb{R}$	$[-1;1]$
coseno	$cos\theta = x$	$\mathbb{R}$	$[-1;1]$
tangente	$tg\theta = \frac{y}{x}$	$\mathbb{R}-(2n+1)\frac{\pi}{2}; n \in \mathbb{Z}$	$\mathbb{R}$
cotangente	$ctg\theta = \frac{x}{y}$	$\mathbb{R}-n\pi; n \in \mathbb{Z}$	$\mathbb{R}$
secante	$sec\theta = \frac{1}{x}$	$\mathbb{R}-(2n+1)\frac{\pi}{2}; n \in \mathbb{Z}$	$\mathbb{R}-]-1;1[$
cosecante	$csc\theta = \frac{1}{y}$	$\mathbb{R}-n\pi; n \in \mathbb{Z}$	$\mathbb{R}-]-1;1[$

AMPLITUDES Y PERIODOS

DEFINICIÓN :

Afirmamos que una función f es períodica si existe un $T \neq 0$, tal que :

$f(x)=f(x+T)$; $x \in D_f$ en el cual si: $x \in D_f \Rightarrow (x+T) \in D_f$, entonces T es el período de $f(x)$, siendo además el menor número positivo que cumple está condición.

EJEMPLO :

* La función seno es periódica , porque :

$senx = sen(x+2\pi) = sen(x+4\pi) = sen(x+8\pi)$
$= sen(x-4\pi) = sen(x-2\pi)$

* Vemos que el menor número $T>0$ es 2π . Luego diremos que la función seno tiene como período 2π .

DEFINICIÓN :

Si $y = asenbx$ ó $y = acosbx$, para los números reales a y b distintos de cero , la ordenada máxima $|a|$ es la amplitud de la gráfica y el período es $\frac{2\pi}{|b|}$

EJEMPLO :

$f(x) = 2Sen3x$; tiene una amplitud $a=2$ y su período , en vista que $b = 3$, es $2\pi/3$.

I) GRÁFICA DE LA FUNCIÓN SENO :

Es una función denotada por «sen» con dominio todos los reales y su regla de correspondencia: $y = f(x) = senx$.

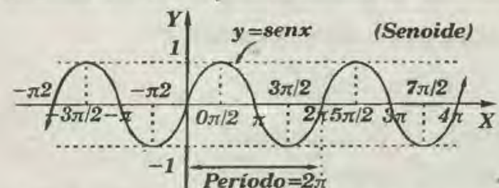
$f = \{(x;y) / y = senx,\ x \in R\}$ ó $f(x) = senx$

$Domf = R, Ranf = [-1;1]$

pues: $-1 \leq senx \leq 1;\ \forall x \in R$

* Algunos valores particulares de la función seno.

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$3\pi/4$	$5\pi/6$	π
$y = senx$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0



* Observamos que después de que x ha recorrido 2π se repiten las características . En este caso se dirá que el seno es una función períodica de período 2π, es decir :

$senx = sen(x+2\pi) = sen(x+4\pi) = ... = sen(x+2k\pi)$

ANÁLISIS DEL GRÁFICO :

1) D_f: $\mathbb{R}$ (Dominio); $\mathbb{R}_f$: $[-1;1]$ (rango).

2) Valor máximo : 1; valor mínimo $= -1$.

3) La función es periódica, de período 2π.

4) La función es impar , $sen(-x) = -senx$.

5) Es creciente en el I y $IV\ C$, decreciente en el II y $III\ C$.

6) Corta al eje x en $x = k\pi;\ k \in R$.

7) Es simétrica respecto al origen .

8) No es inyectiva .

9) Es continua $\forall x \in R$, o sea es continua en su dominio .

10) Es creciente $\forall x \in \left\langle -\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right\rangle$ y decreciente $\forall x \in \left\langle \frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \right\rangle$; donde $k \in \mathbb{Z}$

II) GRÁFICA DE LA FUNCIÓN COSENO

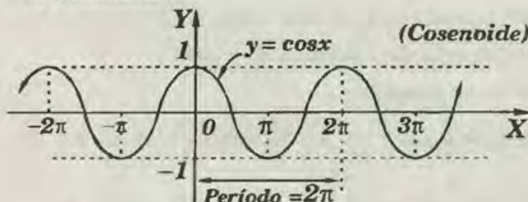
Es una función denotada por «cos» con dominio todos los reales y su regla de correspondencia $y = f(x) = cosx$.

$f = \{(x;y) / y = cosx,\ x \in \mathbb{R}\}$ ó $f(x) = cosx$

* Algunos valores particulares de la función coseno.

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	...
$cosx$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0	...

* *Gráficamente :*



ANÁLISIS DEL GRÁFICO:

1) D_f: $\mathbb{R}$; R_f: $[-1;1]$, pues $-1 < cosx < 1;\ \forall x \in R$

2) Valor máximo $= 1$, valor mínimo $= -1$.

3) La función es periódica, de período 2π.

4) La función es par : $cos(-x) = cosx$.

5) Es decreciente en el I y IIC; creciente en III y $IV\ C$.

6) Corta al eje X en $x = \frac{\pi}{2} + k\pi;\ \ k \in \mathbb{Z}$.

7) Es simétrica respecto al eje ***Y***.

8) No es inyectiva.

9) Es continua $\forall x \in \mathbb{R}$, o sea, es continua en su dominio.

10) Es decreciente $\forall x \in \langle 2k\pi ; 2k\pi + \pi \rangle$ y creciente $\forall x \in \langle \pi + 2k\pi ; 2\pi + 2k\pi \rangle$, donde $k \in \mathbb{Z}$.

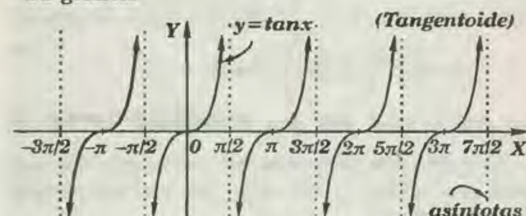
III) GRÁFICA DE LA FUNCIÓN TANGENTE

Es una función denotada por «*tg*» con dominio todo $\mathbb{R}$ menos los de la forma $(2k+1)\pi/2;\ k \in \mathbb{Z}$.

Su regla de correspondencia : $f(x) = y = tanx$.

$$f = \{(x;y)/\ y = \tan x,\ x \in \mathbb{R} - (2k+1)\pi/2;\ k \in \mathbb{Z}\}$$

* Su gráfica:



ANÁLISIS DEL GRÁFICO :

1) D_f: $\mathbb{R} - \left\{(2n+1)\frac{\pi}{2}\right\};\ n \in \mathbb{Z}; R_f : \mathbb{R}$

2) No tiene máximo ni mínimo valor.

3) La función es periódica, de período π.

4) La función es impar, es decir $tg(-x) = -tgx$.

5) Es creciente en cada cuadrante.

6) Corta al eje en x en $x = k\pi;\ k \in \mathbb{Z}$.

7) Es simétrica respecto al origen.

8) No es inyectiva.

9) Es creciente $\forall x \in \left\langle -\frac{\pi}{2} + k\pi ; \frac{\pi}{2} + k\pi \right\rangle;\ k \in Z$

10) Es continua $\forall x \in \left\langle -\frac{\pi}{2} + k\pi ; \frac{\pi}{2} + k\pi \right\rangle;\ k \in Z$.

Es decir, es continua en su dominio.

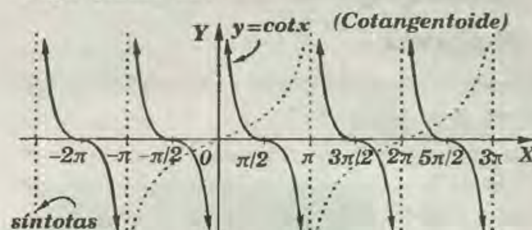
IV) GRÁFICA DE LA FUNCIÓN CONTANGENTE

Es una función denotada por «*cot*», se define:

$$cotx = \frac{1}{tanx} / tanx \neq 0$$

$$f = \{(x;y)/\ y = \cot x,\ x \in \mathbb{R} - k\pi;\ k \in \mathbb{Z}$$

* Cuya gráfica es :



ANÁLISIS DEL GRÁFICO :

1) Df: $\mathbb{R} - \{n\pi\};\ n \in \pi;\ R_f : \mathbb{R}$

2) No tiene máximo ni mínimo.

3) La función es periódica, de período π.

4) La función es impar: $ctg(-x) = -ctgx$.

5) Es decreciente en cada cuadrante.

6) Corta al eje ***X*** en $x = \frac{\pi}{2} + k\pi;\ h \in Z$

7) Es simétrica respecto al origen.

8) No es inyectiva.

V)GRÁFICA DE LA FUNCIÓN SECANTE

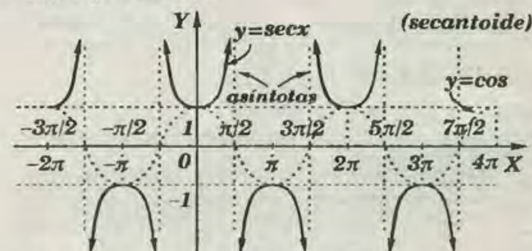
Es una función denotada por sec, se define:

$$secx = \frac{1}{cosx} / cosx \neq 0$$

* Funcionalmente :

$$f = \{(x;y)/\ y = \sec x,\ x \in \mathbb{R} - (2k+1)\pi/2;\ k \in \mathbb{Z}$$

* Cuya gráfica es :



ANÁLISIS DEL GRÁFICO :

1) $D_f: \mathbb{R} - \left\{(2n+1)\frac{\pi}{2}\right\};\ n \in \mathbb{Z}$;

su rango es $\langle -\infty; -1] \cup [1; +\infty\rangle$

2) No tiene máximo ni mínimo.

3) La función es periódica, de período 2π.

4) La función es par: $sec(-x) = secx$.

5) Es creciente en ***I*** y ***II C***; decreciente en el ***III*** y

IV C.

6) No corta al eje *X*.

7) Es simétrica respecto al eje *X*.

8) No es inyectiva.

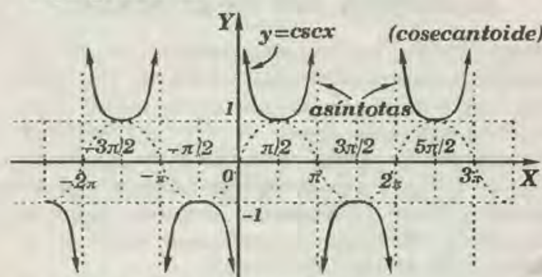
VI) GRÁFICA DE LA FUNCIÓN COSECANTE

Es una función denotada por «**csc**», define:

$$cscx = \frac{1}{senx} / senx \neq 0$$

$$f = \{(x,y) / y = \csc x,\ x \in \mathbb{R} - k\pi;\ k \in \mathbb{Z}$$

* Cuya gráfica es:



ANÁLISIS DEL GRÁFICO :

1) $D_f: \mathbb{R} - \{n\pi\};\ n \in \mathbb{Z}$; su rango es $\langle -\infty; -1] \cup [1; +\infty\rangle$.

2) No tiene máximo ni mínimo.

3) La función es periódica, de período 2π.

4) La función es impar: $csc(-x) = -cscx$.

5) Es decreciente en *I* y *IV C* ; creciente en el *II* y *III C.*

6) No corta al eje en *Y*.

7) Es simétrica respecto al origen.

8) No es inyectiva.

9) Es continua $\forall x \in \langle k\pi; k\pi + \pi\rangle;\ k \in \mathbb{Z}$, es decir, es continua en su dominio.

RESUMEN :

PROPIEDADES:

A	$sen^2x + cos^2 x = 1$
B	$1 + tan^2 x = sec^2 x$
C	$1 + cot^2 x = csc^2 x$
D	$senx \cdot csc x = 1;\ x \in \mathbb{R} - \{n\pi\};\ n \in \mathbb{Z}$
F	$tan x \cdot cot x = 1;\ x \in \mathbb{R} - \frac{n}{2}\pi;\ n \in \mathbb{Z}$
G	$sen(x \pm y) = senx\cos y \pm cos\, xseny$
H	$cos(x \pm y) = cos\, x\cos y \mp senxseny$
I	$tan(x + y) = \frac{tan\, x + tan\, y}{1 - tan\, x tan\, y}$
J	$sen2x = 2senx\cos x$
K	$cos\, 2x = cos^2 x - sen^2 x$
L	$cos\, x - cos\, y = -2sen\left(\frac{x+y}{2}\right)sen\left(\frac{x-y}{2}\right)$
M	$cos\, x + cos\, y = 2cos\left(\frac{x+y}{2}\right)cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$
N	$senx + seny = 2sen\left(\frac{x+y}{2}\right)cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$

Con el fin de recordar las propiedades correspondientes a las funciones trigonométricas , proponemos un grupo de ejemplos cuya solución se relaciona con las gráficas , dominios , rangos , períodos y amplitudes estudiados.

EJERCICIO 1 :

¿Cuáles de estas proposiciones son verdaderas?

I) La función **senx** es creciente en $]0; \pi[$

II) La función **cosx** es decreciente en $]0; \pi[$

III) La función **tgx** es creciente en $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$

IV) La función **secx** es decreciente en $]0; \pi/2[$

RESOLUCIÓN:

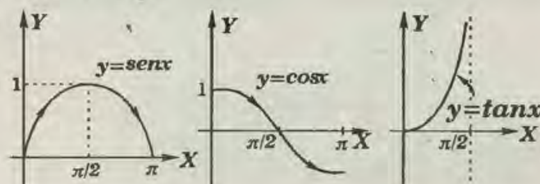
I) (*FALSA*) La función sen*x* es creciente en:

$]0; \pi/2[$ y decreciente en $]\pi/2; \pi[$. (ver figura ***a***).

II) (***VERDADERA***) La función cos*x* en el intervalo $]0; \pi[$ es decreciente (ver figura ***b***).

III) (***VERDADERA***) La función **tgx** es creciente en el intervalo $]0, \pi/2[$. (Ver figura ***c***).

IV) (***FALSA***) Del gráfico de la función secante Obtenemos que *IV* es falso.



EJERCICIO 2 :

Calcular la amplitud, el período y trazar la gráfica de : $y = 3\,sen\,2x$

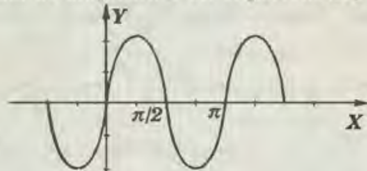
RESOLUCIÓN:

* Aplicando el teorema de amplitudes y períodos , con $a=3$ y $b=2$ tenemos:

* Amplitud $= |a| = |3| = 3$

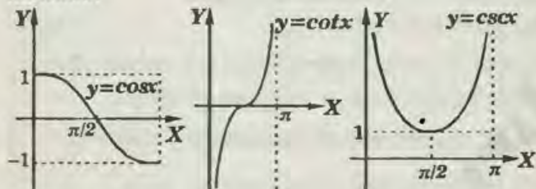
Período $= \dfrac{2\pi}{|b|} = \dfrac{2\pi}{2} = \pi$

* La gráfica se indica en la figura adjunta, observa que hay exactamente una onda sinusoidal de amplitud 3 en el período $[0;\ \pi]$.



EJERCICIO 3 :

¿Cuál es el gráfico que no corresponde a la función indicada?



RESOLUCIÓN :

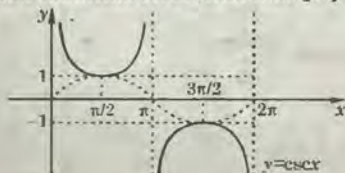
Comparando las gráficas dadas , con las que estamos estudiando, deducimos que la gráfica incorrecta es la $ctgx$, dado que dicha gráfica es en realidad decreciente en cada uno de los cuadrantes.

EJERCICIO 4 :

Si: $\pi < \alpha < 2\pi$; el mayor valor que puede tomar $y = csc\alpha$ es:

RESOLUCIÓN :

* Observando el sector de la gráfica de la función: $y=csc\alpha$ en el intervalo $]\pi\,;\,2\pi[$ deducimos que el mayor valor admitido en el intervalo $]\pi\,;\,2\pi[$ es -1



EJERCICIO 5 :

Calcular el máximo valor de : $sen^2x - 4cos^3z$

RESOLUCIÓN :

* En general :

$$0 < sen\,2x < 1 \ \wedge\ -1 < cos^3 z < 1$$
$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad\qquad \forall z \in \mathbb{R}$$

* Como la expresión es una diferencia, el valor máximo se obtendrá considerando el minuendo máximo y el sustraendo mínimo.

$$\underbrace{sen^2x}_{máx} - \underbrace{4cos^3z}_{mín} = 1 - 4(-1) = 1 + 4 = 5$$

ALGEBRA DE FUNCIONES

Aunque las funciones no son números , con ellas se pueden realizar operaciones similares . Así como dos números a y b pueden ser sumados para producir un nuevo número $a + b$, dos funciones f y g se pueden sumar para producir una nueva función $f + g$. Y esto no es todo , porque también pueden restarse, multiplicarse, dividirse , y generar así nuevas funciones . A continuación daremos las definiciones de estas operaciones .

I) IGUALDAD DE FUNCIONES :

Dos funciones son iguales si tienen el mismo dominio y la misma regla de correspondencia, es decir sean f y g dos funciones.

$$f = g \Rightarrow \begin{cases} I)\ \ f(x) = g(x) \\ II)\ Domf(x) = Domg(x) \end{cases}$$

EJEMPLO 1 :

Las funciones :

$$f(x) = x^2 - 3x + 1\ ;\ g(x) = x^2 - 3x + 1$$

* Son iguales porque $Dom\,f = Domg = \mathbb{R}$ y $f(x) = g(x)$.

EJEMPLO 2 :

$$f(x) = \sqrt{(x-1)(x-6)};\ \ g(x) = \sqrt{x-1}\sqrt{x-6}$$

no son iguales puesto que :

$$Domf = \langle -\infty\,;1] \cup [6;+\infty\rangle$$
$$Domg = [6;+\infty\rangle;\ \ Domf \neq Domg$$

Según esto , no basta que dos funciones tengan la misma regla de correspondencia , también deben tener el mismo dominio.

EJEMPLO 3 :

Sean f y g funciones tales que :

$f = \{(x; y) / y = x^2 + 1 \ ; \ 0 < x < 3\}$
$g = \{(x; y) / y = x^2 + 1 \ ; \ 1 < x < 4\}$

Las funciones f y g son diferentes pues a pesar de tener igual regla de correspondencia tienen diferentes dominio.

EJEMPLO 4 :

Sean f y g funciones tales que :

$$F(x) = x^2 \quad ; \quad g(x) = x|x|$$

Se sabe que :

$$|x| = \begin{cases} x; & si\ x \geq 0 \\ -x; & si\ x < 0 \end{cases}$$

* Entonces :

$$f(x) = x^2 \ ; \ g(x) = \begin{cases} x^2 \ ; & si\ x \geq 0 \\ -x^2 \ ; & si\ x < 0 \end{cases}$$

Se observa que aunque f y g tienen el mismo dominio ($x \in \mathbb{R}$) no son iguales pues no tienen la misma regla.

II) UNIÓN DE FUNCIONES :

(*Función con más de una regla de correspondencia*) La unión de funciones genera otra función si y sólo si la intersección de sus dominios es vacío , salvo en los extremos donde las imágenes son iguales .

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x); & x \in Domf_1 \\ f_2(x); & x \in Domf_2 \\ f_3(x); & x \in Domf_3 \\ \vdots & \vdots \\ f_n(x); & x \in Domf_n \end{cases}$$

Si $f(x)$ es una unión de funciones, $f(x)$ será otra función si $Dom\ f_1 \cap Dom\ f_2 \cap ..... Domf_n = \phi$, salvo en los extremos donde sus imágenes coinciden.

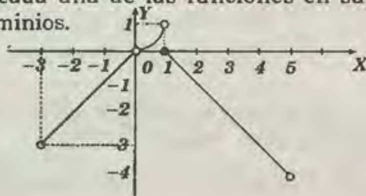
$$Ran\ f = Ran\ f_1 \cup Ran\ f_2 \cup Ran\ f_3 \cup Ran\ f_4$$

EJEMPLO :

Graficar : $f(x) = \begin{cases} x \ ; & x \in \langle -3;0 \rangle \\ x^2 \ ; & x \in [0;1\rangle \\ 1 - x \ ; & x \in [1;5\rangle \end{cases}$

RESOLUCIÓN :

* Graficando cada una de las funciones en sus respectivos dominios.



III) ADICIÓN DE FUNCIONES (FUNCIÓN SUMA)

Sean f y g dos funciones bien definidas , luego definimos y denotamos:

$$f + g = \{ (x ; (f + g)(x)) / x \in Domf \cap Domg\}$$

* Es decir :

$$f + g = \begin{cases} I) \ Dom(f + g) = Domf \cap Domg \\ II) \ (f + g)(x) = f(x) + g(x) \end{cases}$$

EJEMPLO 1 :

Hallar : $f + g$

Si : $f = \{(-1;2),(0 ; 0),(2 ; 4),(3 ;-1);(4 ;3)\}$
$g = \{(2 ; 0),(3 ;4),(4 ;7),(6 ; 2)\}$

RESOLUCIÓN :

* Calculemos el $Dom\ f$ y $Dom\ g$:

$Domf = \{-1; 0; 2; 3; 4\}$
$Domg = \{2; 3; 4; 6\}$

* Luego :

$$Dom\ (f + g) = Domf \cap Domg = \{2 ; 3; 4\}$$

$$(f + g)_{(2)} = f_{(2)} + g_{(2)} = 4 + 0 = 4$$
$$(f + g)_{(3)} = f_{(3)} + g_{(3)} = -1 + 4 = 3$$
$$(f + g)_{(4)} = f_{(4)} + g_{(4)} = 3 + 7 = 10$$

$\rightarrow f + g = \{(2 ;4),(3 ;3),(4 ;10)\}$

EJEMPLO 2 :

Sean las funciones $f(x) = x - 3$ y $g(x) = \sqrt{x}$

Podemos formar una nueva función $f + g$ que asigne a x el valor $x - 3 + \sqrt{x}$, es decir :

$$(f + g)\ (x) = f(x) + g(x) = x - 3 + \sqrt{x}$$

En cuanto a sus dominios , debemos ser cuidadosos, porque x debe ser un número en el que tanto f como g existan. Es decir , el dominio de $f+ g$ es la intersección de los dominios de f y g.

* Así , tenemos que el dominio de f es el conjunto de los números reales , mientras que el de g es el de los reales positivos incluyendo al cero , luego el dominio de $f + g$ es la intersección de estos dominios, es decir , el dominio de g. Así:

$$D_f :]-\infty;+\infty[; \qquad D_g : [0;+\infty[$$
$$D_{(f+g)} = Df \cap Dg = [0;+\infty[$$

EJEMPLO 3 :

Dadas f y g dos funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ definidas por

$f(x) = 2x$ y $g(x) = x + 1$, hallar $f + g$ y representarlo gráficamente .

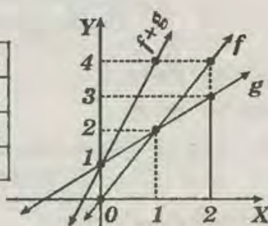
RESOLUCIÓN :

* Tenemos :

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$
$$\rightarrow (f+g)(x) = 2x + (x+1)$$
$$\rightarrow (f+g)(x) = 3x + 1$$

* Tabulando :

x	0	1	2	...
$f(x)$	0	2	4	...
$g(x)$	1	2	3	...
$(f+g)(x)$	1	4	7	...



EJEMPLO 4 :

Construya el gráfico de la función f; si :

$$f(x) = x + \operatorname{sen} x$$

RESOLUCIÓN :

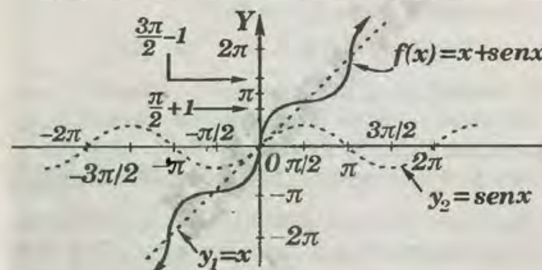
* Consideremos :

$$y_1 = x \text{ e } y_2 = \operatorname{sen} x$$

* Seleccionemos algunos valores de $x \in Dom\ f$ y evaluemos la suma de ordenadas $y_1 + y_2$.

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$f(x) = y_1 + y_2$	0	$\frac{\pi}{2}+1$	π	$\frac{3\pi}{2}-1$	2π

* Aplicando la suma de ordenadas , tenemos :



Sean :

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & ; x \in Domf_1 \\ f_2(x) & ; x \in Domf_2 \\ \vdots & \quad \vdots \\ f_n(x) & ; x \in Domf_n \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} g_1(x) & ; x \in Domg_1 \\ g_2(x) & ; x \in Domg_2 \\ \vdots & \quad \vdots \\ g_m(x) & ; x \in Domg_m \end{cases}$$

* Luego :

$$(f+g)(x) = \begin{cases} (f_1+g_1)(x) ; & x \in [Domf_1 \cap Domg_1] \\ (f_1+g_2)(x) ; & x \in [Domf_1 \cap Domg_2] \\ \vdots & \quad \vdots \\ (f_i+g_i)(x) ; & x \in [Domf_i \cap Domg_i] \\ (f_n+g_m)(x) ; & x \in [Domf_n \cap Domg_m] \end{cases}$$

NOTA :

$(f_i + g_i)(x)$ esta definido si y sólo si $Domf_i \cap Domg_i \neq \phi$

EJEMPLO 5 :

Sean las funciones f y g funciones tales que :

$$f(x) = 5x + 1 \ ; x \in \langle -3; 2]$$
$$g(x) = 2x - 3 \ ; x \in [-1; 5\rangle$$

Hallar : $f + g$

RESOLUCIÓN :

* Primero :

$$Dom\ f + g = Dom\ f \cap Dom\ g$$
$$\rightarrow Dom\ f + g = \langle -3; 2] \cap [-1; 5\rangle = [-1; 2]$$

* Luego :

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$
$$\rightarrow (f+g)(x) = 5x + 1 + 2x - 3 = 7x - 2$$

* Entonces :

$$(f+g)(x) = 7x - 2 \ ; x \in [-1; 2]$$

IV) SUSTRACCIÓN DE FUNCIONES (FUNCIÓN DIFERENCIAL) :

Son f y g dos funciones bien definidas, luego definimos y denotamos :

$$f - g = \{x ; (f-g)(x) / x \in Domf \cap Domg\}$$

como la función diferencia de f y g, es decir:

$$f - g = \begin{cases} I) & Dom(f-g) = Domf \cap Domg \\ II) & (f-g)(x) = f(x) - g(x) \end{cases}$$

V) MULTIPLICACIÓN DE FUNCIONES (FUNCIÓN PRODUCTO) :

Sean f y g dos funciones bien definidas luego

definimos y denotamos :

$$f\times g=\{x;(fg)(x)/x\in Domf\cap Domg\}$$

como la función producto de f y g, es decir :

$$f\times g=\begin{cases} I) & Dom(f\times g)=Domf\cap Domg \\ II) & (f\times g)(x)=f(x)\times g(x)\end{cases}$$

VI) DIVISIÓN DE FUNCIONES (FUNCIÓN COCIENTE) :

Sean f y g dos funciones bien definidas luego definimos y denotamos :

$$\frac{f}{g}=\left\{x;\left(\frac{f}{g}\right)(x)/x\in(Domf\cap Domg)\wedge g(x)\neq 0\right\}$$

como la función cociente de f y g, es decir:

$$f/g=\begin{cases} \text{I)} & Dom(f/g)=Domf\cap Domg\wedge g(x)\neq 0 \\ \text{II)} & \left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}\end{cases}$$

CASOS PARTICULARES :

I) $F(cx)=cF(x)$; $c\in\mathbb{R}\wedge Dom(cF)=DomF$

II) $(1/G)(x)=(G^{-1})(x)=[G(x)]^{1}$

$DomG^{-1}=DomG-\{x/G(x)=0\}$

III) POTENCIACIÓN DE FUNCIONES :

$$f^{n}(x)=\underbrace{f(x)\cdot f(x)......f(x)}_{\text{"n" multiplicaciones indicadas}}$$

$Dom(f^{n})=Dom(f)$; $n,\in\mathbb{N}$ $n\geq 2$

PROPIEDADES :

Sean f, g y h funciones reales bien definidas, luego

I) CONMUTATIVA :

$$f+g=g+f \wedge f\cdot g=g\cdot f$$

II) ASOCIATIVA :

$$(f\cdot g)\cdot h=f\cdot(g\cdot h) \quad (f+g)+h=f+(g+h)$$

III) DISTRIBUTIVA :

$$(f+g)h=f\cdot h+g\cdot h$$

EJEMPLO 1:

A partir de las funciones definidas por pares ordenados:

$$f=\{(1;2),(2;3),(3;4),(4;5)\}$$
$$g=\{(0;2),(2;2),(3;5)\}$$

* Podemos hallar la suma y el producto. Obsérvese que $D_f\cap D_g=\{3;5\}$, entonces sólo debemos sumar y multiplicar las componentes correspondientes a este dominio :

$$f+g=\{(2;5),(3;9)\}$$
$$f\times g=\{(2;6),(3;20)\}$$

EJEMPLO 2:

Sean las funciones f y g tal que :

$$f=\{(1;4),(2;6),(5;15),(6;4)\}$$
$$g=\{(1;2),(2;3),(3;7),(6;0)\}$$

Determinar :

A) $f+g$ *B)* $f-g$ *C)* $f\times g$ *D)* f/g

RESOLUCIÓN :

* Primero veamos los dominios:

$$Domf=\{1;2;5;6\}$$
$$Domg=\{1;2;3;6\}$$

* Entonces :

$$Domf\cap Domg=\{1;2;6\}$$

* Entonces :

A) $(f+g)(1)=f(1)+g(1)=4+2=6$

$(f+g)(2)=f(2)+g(2)=6+3=9$

$(f+g)(6)=f(6)+g(6)=4+0=4$

* Luego : $f+g=\{(1;6),(2;9),(6;4)\}$

* Análogamente , hallamos :

B) $f-g=\{(1;2),(2;3),(6;4)\}$

C) $f\cdot g=\{(1;8),(2;18),(6;0)\}$

D) En el caso de f/g se tiene :

$Domf/g(Domf\cap Domg)-x\in\{Domg/g(x)=0\}$

$Domf/g=\{1;2;6\}-\{6\}=\{1;2\}$

* Luego : $f/g=\left\{\left(1;\frac{4}{2}\right),\left(2;\frac{6}{3}\right)\right\}$

$\rightarrow$ $f/g=\{(1;2),(2;2)\}$

EJEMPLO 3 :

* Dadas las funciones :

$F=\{(3;2),(4;-1),(5;6),(8;1)\}$

$G=\{(3;4),(2;7),(5;0),(9;-3)\}$

* Entonces :

$$DomF=\{3;4;5;8\}$$

$$DomG=\{3;2;5;9\}$$

y el dominio común : $DomF\cap DomG=\{3;5\}$,

Luego :

* $F+G=\{(3;2+4),(5;6+0)\}=\{(3;6),(5;6)\}$
* $F-G=\{(3;2-4),(5;6-0)\}=\{(3;-2),(5;6)\}$
* $FG=\{(3;2\times4),(5;6\times0)\}=\{(3;+8),(5;0)\}$
* Para F/G:

$$Dom(F/G)=\{3;5\}-\{x/G(x)=0\}$$
$$=\{3;5\}-\{5\}$$
$$=\{3\}$$

$\rightarrow F/G=\{(3;2/4)\}=\{(3;1/2)\}$

EJEMPLO 4 :

Sean funciones tales que :

$$f(x)=\sqrt{4-x^2}\ \wedge\ g(x)=\sqrt{x^2-4}$$

Halle : $f+g$, $f-g$, fg

RESOLUCIÓN :

* Calculemos los dominios de f y g :
* $Domf:\ 4-x^2\geq0\Leftrightarrow-2\leq x\leq2$

$\rightarrow Domf=[-2;2]$

* $Domg:x^2-4\geq0\Leftrightarrow(x\leq-2\ \vee\ x\geq2)$

$\rightarrow Domg=\langle-\infty;-2]\cup[2;+\infty\rangle$

* Luego : $Domf\cap Domg=\{-2;2\}$
* Entonces :

$$(f+g)(-2)=f(-2)+g(-2)=0$$
$$(f+g)(2)=f(2)+g(2)=0$$

$\rightarrow f+g=\{(-2;0),(2;0)\}$

* Análogamente hallamos :

$$f-g=\{(-2;0),(2;0)\}$$
$$f\cdot g=\{(-2;0),(2;0)\}$$

EJEMPLO 5 :

Sean f y g funciones definidas en los números reales, tales que : $f(x)=\sqrt{x-3}$; $g(x)=\dfrac{x-4}{x-5}$

Hallar :

a) $(f-g)(x)$; $Dom(f-g)$

b) $\dfrac{f}{g}(x)$; $Dom\left(\dfrac{f}{g}\right)$

RESOLUCIÓN :

* $Domf=[3;\ \infty[$ $Domg=R-\{5\}$
* $Dom(f-g)=Domf\cap Domg=[3;5[\cup]5;\infty[$
* La regla de correspondencia :

$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)=\sqrt{x-3}-\frac{x-4}{x-5}$$

* Para el dominio de $\dfrac{f}{g}$, es necesario que $g(x)\neq0$;

esto implica $\dfrac{x-4}{x-5}\neq0\Rightarrow x\neq4$

* $Dom\left(\dfrac{f}{g}\right)=[3;4[\cup]4;5[\cup]5;\infty[$
* La regla de correspondencia :

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\sqrt{x-3}}{\dfrac{x-4}{x-5}}=\frac{(x-5)\sqrt{x-3}}{x-4}$$

EJEMPLO 6 :

Sean f y g funciones tales que :

$$f(x)=x^2+3x+1$$
$$f(x)=\{(0;5),(-1;\sqrt{2}),(3;7),(\sqrt{2};9)\}$$

Halle :

I) $(f^2-3g)(\sqrt{2})$

II) $(5g^2-3f)(-1)$

RESOLUCIÓN :

* Veamos los dominios:

$$Domf=R\ \text{ y }\ Domg=\{0;-1;3;\sqrt{2}\}$$

$\Rightarrow Domf\cap Domg=\{0;-1;3;\sqrt{2}\}$

I) $(f^2-3g)(\sqrt{2})=f^2(\sqrt{2})-3g(\sqrt{2})$

$$=[(f(\sqrt{2}))]^2-3[g(\sqrt{2})]$$
$$=[3(1+\sqrt{2})]^2-3(9)$$

$\rightarrow(f^2-3g)(\sqrt{2})=18\sqrt{2}$

II) $(5g^2-3f)(-1)=5g^2(-1)-3f(-1)$

$$=5[g(-1)]^2-3[f(-1)]$$
$$=5(\sqrt{2})^2-3(-1)$$

$\rightarrow(5g^2-3f)(-1)=13$

EJEMPLO 7 :

Sean las funciones :

$$f=\{(0;0),(1;0),(2;1),(3;2),(4;3);(6;10)\}$$
$$g(x)=\sqrt{x+2},\ x\in\langle -2;2\rangle$$

si $(g^2+f)(n)=3$, halle n^2+2

RESOLUCIÓN :

* Consideremos: $Dom_g = D_g$

$$g^2(x)=x+2\ ,\ Dg^2=Dg=\langle -2;2\rangle$$

* $Domf=Df=\{0;1;2;3;4;6\}$ luego $D(g^2+f)=\{0;1\}$

* Así :

$$g^2+f=\{(0,g^2(0)+0),(1,g^2(1)+0)\}=\{(0;2),(1;3)\}$$

$\rightarrow n=1$ y $n^2+2=3$

EJEMPLO 8 :

Sean las funciones:

$$f(x)=|x|,\ x\in R$$

* Luego :

$$g(x)=\begin{cases}x, & x\ge 2\\ x^2, & x<2\end{cases}$$

$$\frac{f}{g}(x)=\begin{cases}x/x & ;x\ge 0\wedge x\ge 2\wedge x\ne 0\\ x/x^2 & ;x\ge 0\wedge x<2\wedge x^2\ne 0\\ -x/x & ;x<0\wedge x\ge 2\wedge x\ne 0\text{...(no existe)}\\ -x/x^2 & ;x<0\wedge x<2\wedge x^2\ne 0\end{cases}$$

$$\rightarrow \frac{f}{g}(x)=\begin{cases}1 & ;\ x\in[2;\infty\rangle\\ 1/x & ;\ x\in\langle 0;2\rangle\\ -1/x & ;\ x\in\langle -\infty;0\rangle\end{cases}$$

EJEMPLO 9 :

Construya el gráfico de la función f si :

$$f(x)=xsenx$$

RESOLUCIÓN :

* Consideramos $y_1=x$ e $y_2=senx$

* Seleccionamos algunos valores de $x\in Domf$ y evaluamos el producto y_1 , y_2 .

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$f(x)=y_1\cdot y_2$	0	$\frac{\pi}{2}$	0	$-\frac{3\pi}{2}$	0

* Además , si evaluamos :

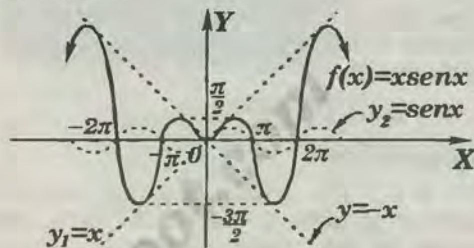
$f(-x)=(-x)(-senx)=xsenx$, entonces $f(-x)=f(x)$ verificamos que la función es par , luego el gráfico de f es simétrico respecto al eje Y .

* Analizando para $x>0\ \wedge\ -1\le senx\le 1$

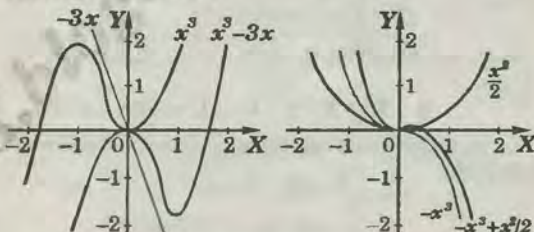
$\Rightarrow$ multiplicando por (x) a los valores del $senx$

$-x\le xsenx\le x$

* Así la gráfica de f se encuentra entre las rectas $y=x$ e $y=-x$



EJEMPLO 10 :

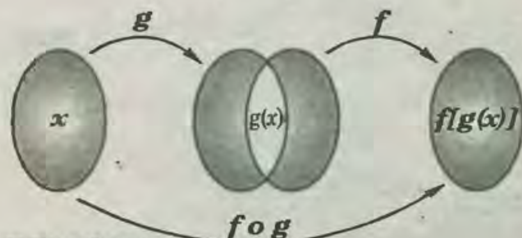


COMPOSICIÓN DE FUNCIONES

Además de la adición , multiplicación y división de funciones , hay otra operación fundamental llamada **composición** , la cual se considera como una función de función y se define así:

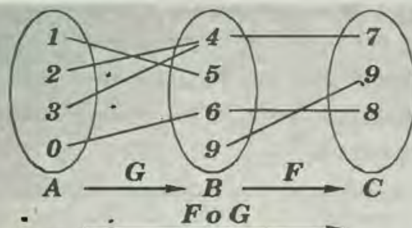
La función de f con g, denotada por $f\circ g$ y que se lee «f composición g» es la función cuyo dominio consiste en los elementos $x\in D_g$ tales que $g(x)\in D_f$ y cuya regla de correspondencia es:

$$[fog](x)=f[g(x)]$$



EJEMPLO :

* Del gráfico adjunto determinar $F\circ G$



Se consideran sólo los elementos asociados a líneas que hacen el recorrido completo de A hacia C, pasando por B.

$$F \circ G = \{(2;7),(3;7),(0;8)\}$$

DEFINICIÓN :

Si f y g son dos funciones en sus dominios respectivos, se define la composición de funciones denotados por fog "f compuesta con g", así :

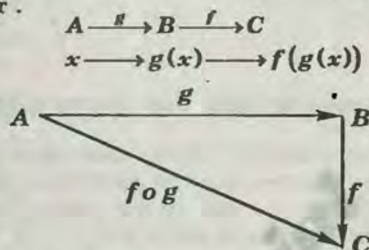
$$fog:\begin{cases} I) & Dom\, f\, o\, g = \{x \in Dom\, g / g(x) \in Dom\, f\} \\ II) & (f\, o\, g)(x) = f(g(x)) \end{cases}$$

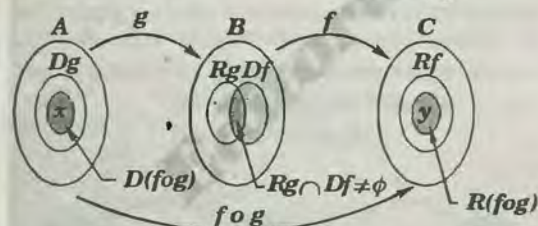
* Sean los conjuntos A, B y C y las funciones f y g tal que :

$$g : A \to B \text{ y } f : B \to C \Rightarrow fog : A \to C$$

* Los siguientes diagramas ilustran la definición anterior .

$$A \xrightarrow{g} B \xrightarrow{f} C$$
$$x \longrightarrow g(x) \longrightarrow f(g(x))$$





* De esta representación gráfica se tiene :

$$I)\, D(fog) \subseteq D(g) \subseteq A$$
$$II)\, R(fog) \subseteq R(F) \subseteq C$$

NOTA

La composición de funciones es una operación no conmutativa es decir :

$$(fog)(x) \neq (gof)(x)$$

EJEMPLO 1 :

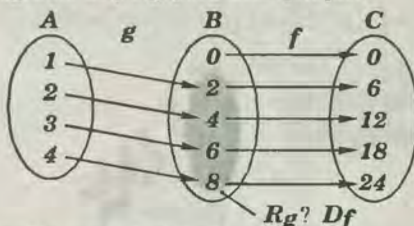
Determina la función $f \circ g$ siendo :

$$f = \{(0;0),(2;6),(4;12),(6;18),(8;24)\}$$
$$g = \{(1;2),(2;4),(3;6),(4;8)\}$$

RESOLUCIÓN:

*Para que exista la función $f \circ g$ es necesario , según la definición , que el rango de g se encuentre contenido en el dominio de f, esto es, que exista $R_g \cap D_f$. Si g tiene dominio en A y rango en B , y f tiene rango en C, entonces

$f \circ g$ tiene dominio en A y rango en C . La figura da un diagrama de $f \circ g$ para este ejemplo.



La función compuesta será :

$$f \circ g = \{(1;6),(2;12),(3;18),(4;24)\}$$

EJEMPLO 2 :

Dadas las funciones:

$$f = \{(-1;0),(2;3),(5;6),(7;9)\}$$
$$g = \{(1;-1),(0;2),(3;5),(4;6)\}$$

Hallar : **A)** $f \circ g$ **B)** $g \circ f$

RESOLUCIÓN:

A) Veamos si existe $f \circ g$

$$Dom f = \{-1;2;5;7\}$$
$$Ran g = \{-1;2;5;6\}$$
$$\to Dom f \cap Ran g = \{-1;2;5\} \neq 0$$

* Entonces existe $f \circ g$

* Nos interesa los pares ordenados de g y f que tengan como segundas y primeras componentes A : -1 ; 2 y 5 respectivamente . Luego :

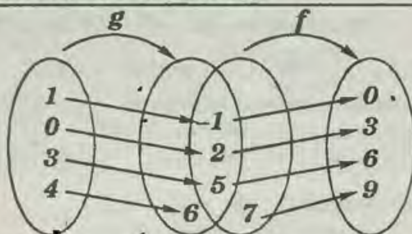
$$(1;-1) \in g \wedge (-1;0) \in f \longrightarrow (1;0) \in fog$$

$$(0;2) \in g \wedge (2;3) \in f \longrightarrow (0;3) \in fog$$

$$(3;5) \in g \wedge (5;6) \in f \longrightarrow (3;6) \in fog$$

$$\to fog = \{(1;0),(0;3),(3;6)\}$$

* También :



$\rightarrow fog = \{(1;0),(0;3),(3;6)\}$

B) De manera similar , se halla $g\ o\ f$

$Domg = \{1;0;3;4\}$

$Ranf = \{0;3;6;9\}$

$\rightarrow Domg \cap Ranf = \{0;3\} \neq 0$

* Luego :

$(-1;0) \in f \wedge (0;2) \in g \longrightarrow (-1;2) \in gof$

$(2;3) \in f \wedge (3;5) \in g \longrightarrow (2;5) \in gof$

$\rightarrow gof = \{(-1;2),(2;5)\}$

EJEMPLO 3 :

Determine $f\,o\,g$ si :

$f = \{(1;2),(2;3),(3;4),(4;5)\}$

$g = \{(0;1),(1;1),(2;4),(3;9)\}$

RESOLUCIÓN :

$Dom(g) = \{0;1;2;3\}$; $Rang(g) = \{1;4;9\}$

$Dom(f) = \{1;2;3;4\}$; $Rang(f) = \{2;3;4;5\}$

* Si $x = 0 \in Dom(g) \wedge g(0) = 1 \in D(f)$

$\Rightarrow f(g(0)) = 2 \Rightarrow (f\,o\,g)(0) = 2 \Rightarrow (0;2) \in f\,o\,g$

* Si $x = 1 \in D(g) \wedge g_{(1)} = 1 \in D(f)$

$\Rightarrow f(g_{(1)}) = 2 \Rightarrow (f\,o\,g)_{(1)} = 2 \Rightarrow (1;2) \in f\,o\,g$

* Si $x = 2 \in D(g) \wedge g_{(2)} = 4 \in D(f)$

$\Rightarrow f(g_{(2)}) = 5 \Rightarrow (f\,o\,g)_{(2)} = 5 \Rightarrow (2;5) \in f\,o\,g$

* Si $x = 3 \in D(g) \wedge g_{(3)} \notin D(f)$; no existe

$\rightarrow fog = \{(0;2),(1;2),(2;5)\}$

EJEMPLO 4 :

Dadas las funciones :

$g = \{(3;6),(5;9),(8;4),(7;6),(10;5)\}$

$h = \{(3;9),(5;12),(7;9),(8;7)\}$

Halle la función f tal que: $h = f\,o\,g$

RESOLUCIÓN :

* Como : $h(x) = (f\,o\,g)(x) = f(g(x))$

* Entonces:

$h(3) = f(g(3)) \Rightarrow 9 = f(6) \Rightarrow (6;9) \in f$

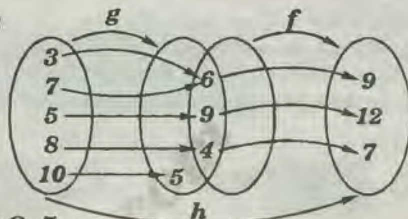
$h(5) = f(g(5)) \Rightarrow 12 = f(9) \Rightarrow (9;12) \in f$

$h(7) = f(g(7)) \Rightarrow 9 = f(6) \Rightarrow (6;9) \in f$

$h(8) = f(g(8)) \Rightarrow 7 = f(4) \Rightarrow (4;7) \in f$

$\rightarrow f = \{(6;9),(9;12),(4;7)\}$

* También :



EJEMPLO 5 :

Dadas las funciones :

$f = \{(1;2),(2;3),(3;5),(4;7)\}$

$g = \{(0;3),(1;2),(2;1),(3;4)\}$

Hallar el producto de los elementos del rango de la función : $h = (f\,o\,g) + (g\,o\,f)$

RESOLUCIÓN :

* En este caso es posible seguir el siguiente procedimiento :

* En caso de $f\,o\,g$: $\underbrace{(x, g(x))}_{\in g} \wedge \underbrace{(g(x), f(g(x)))}_{\in f}$

entonces $(x; f(g(x))) \in f\,o\,g$ y en caso $g\ o\ f$:

$\underbrace{(x, f(x))}_{\in f} \wedge \underbrace{(f(x), g(f(x)))}_{\in g}$ entonces $(x, g(f(x))) \in g\,o\,f$

* Así:

Para $f\,o\,g$:

$(1;2) \in g \wedge (2;3) \in f \Rightarrow (1;3) \in f\,o\,g$

$(0;3) \in g \wedge (3;5) \in f \Rightarrow (0;5) \in f\,o\,g$

$(2;1) \in g \wedge (4;2) \in f \Rightarrow (2;2) \in f\,o\,g$

$(3;4) \in g \wedge (4;7) \in f \Rightarrow (3;7) \in f\,o\,g$

* Por consiguiente

$f\,o\,g = \{(1;3),(0;5),(2;2),(3;7)\}$

* Para $g\,o\,f$: $(1;2) \in f \wedge (2;3) \in g \Rightarrow (1;3) \in g\,o\,f$

$(2;3) \in f \wedge (3;4) \in g \Rightarrow (2;4) \in g\,o\,f$

* Para $x = 3$: $f(3) = 5 \notin Dg \Rightarrow$ *no existe* $g(f(3))$

$x = 4$: $f(4) = 7 \notin Dg \Rightarrow$ *no existe* $g(f(4))$

* Por lo tanto $g\,o\,f = \{(1;1),(2;4)\}$

* Como D_{fog}Ç$D_{gof} = \{1;2\} = D_h$ entonces

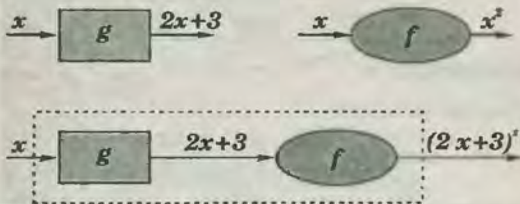
$h = (f\,o\,g) + (g\,f) = \{(1;3+1),(2;2+4)\} = \{(1;4),(2;6)\}$

$R_h = \{4;6\}$, entonces $4 \times 6 = 24$

OBSERVACIÓN :

Volviendo ahora la manera de ver a las funciones como máquinas, podemos entender la operación de composición como un acoplamiento de una máquina con otra. Por ejemplo, si tenemos la función $f(x)=x^2$, la cual es una máquina que recibe x y la eleva al cuadrado, la función

$g(x) = 2x + 3$ es una máquina que recibe x ; la multiplica por 2 y luego suma 3, componer f con g consiste sólo en acoplar la máquina de g con la de f. Le suministramos a f, la «producción» de g.



La expresión o regla de correspondencia de $f \circ g$ es:

$$(f \circ g)(x)f[g(x)]=f[2x+3]=(2x+3)^2$$

$$\rightarrow (f \circ g)(x)=(2x+3)^2$$

EJEMPLO 6 :

Dadas las funciones: $f(x)=\sqrt{4x-x^2}$. $g(x)=x-2$. Hallar $f \circ g$.

RESOLUCIÓN:

* Calculamos los dominios de cada función:

* Para $f(x)$:

$4x-x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2-4x \leq 0 \Rightarrow x(x-4) \leq 0;\ x \in [0;4]$

$Domf = [0;4]$

*Para $g(x)$: $y = x-2$ es una función lineal $Domg=\mathbb{R}$

* Como los dominios tienen infinitos elementos, aplicamos el método analítico para resolver el problema.

* Tenemos :

$$Domf \circ g = \{x \in Domg / g(x) \in Domf\}$$
$$= \{x \in \mathbb{R} / g(x) \in Domf\}$$

* Trabajamos con $\{x \in \mathbb{R} / g(x) \in Domf\}$

* De $g(x) \in Domf$ se tiene :

$$(x-2) \in [0;4] \Rightarrow 0 \leq x-2 \leq 4$$
$$\Rightarrow 2 \leq x \leq 6 \Rightarrow x \in [2;6]$$

* En (2) : $\{x/g(x) \in Domf\} = [2;6]$

* En (1) : $Domf \circ g = \mathbb{R} \cap [2;6] = [2;6]$

* Además :

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x-2) = \sqrt{4(x-2)-(x-2)^2}$$

$$(f \circ g)(x) = \sqrt{-x^2+8x-12};\ Domf \circ g = [2;6]$$

* Hemos determinado $f \circ g$ indicando su regla de correspondencia y su dominio.

EJEMPLO 7 :

Dadas las funciones f y g, tales que :

$$f(x) = 2x - 1 ;\ x \in \langle 1;10 \rangle$$
$$g(x) = 3x + 1 ;\ x \in \langle -1;2 \rangle$$

Hallar : $f \circ g$ si existe .

RESOLUCIÓN :

A) Primero veamos si existe $f \circ g$

$Dom\ f : \langle 1;10 \rangle$

$Ran\ g : -1<x<2$

$-3<3x<6$

$-2<3x+1<7$

$\rightarrow Ran g : \langle -2;7 \rangle$

* Luego : $Domf \cap Rang = \langle 1;7 \rangle \neq 0$

$\rightarrow$ Existe $f \circ g$

* Calculemos : $Dom(f \circ g)$

$$Dom(f \circ g) = \{x / x \in Domg \wedge g(x) \in Domf\}$$

* Luego :

$$x \in \langle -1;2 \rangle \wedge 1 < 3x+1 < 10$$
$$\rightarrow x \in \langle -1;2 \rangle \wedge 0 < 3x < 9$$
$$\rightarrow x \in \langle -1;2 \rangle \wedge 0 < x < 3$$
$$\rightarrow x \in \langle -1;2 \rangle \cap x \in \langle 0;3 \rangle$$

* Entonces : $Df \circ g = \langle 0;2 \rangle$

* Ahora , calculemos : $(f \circ g)_{(x)}$

$$(f \circ g)_{(x)} = f(g(x)) = f(3x+1)$$
$$\rightarrow (f \circ g)_{(x)} = 2(3x+1)-1$$
$$\rightarrow (f \circ g)_{(x)} = 6x+1$$

* Finalmente : $(f \circ g)_{(x)} = 6x+1;\ x \in \langle 0;2 \rangle$

PROPIEDADES :

Sean las funciones f, g y h:

I) Otra forma sencilla de presentar el dominio de una composición es :

$$Dom(f \circ g) = Domg \cap \{x/g(x) \in Domf\}$$

II) $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$ .... *(Asociativa)*

III) Si I es la función identidad , luego

$\forall$ función $f : f \circ I = f \wedge I \circ f = f$

IV) $(f+g) \circ h = (f \circ h) + (g \circ h)$

V) $(f \cdot g) \circ h = (f \circ h) \cdot (g \circ h)$

VI) $I^n \circ f = f^n$, $\forall n \in Z^+$, *I*: identidad

FUNCIÓN INVERSA

Sea *f* una función biyectiva, entonces *f* posee inversa denotada por f^{-1} o f^*, y se define de la siguiente manera :

$$f^* = \{(y;x) / y \in f(x) ; x \in Domf\}$$

* La inversa de *f* es la función que se obtiene al intercambiar la primera y segunda componente en cada par ordenado de *f*.

* El dominio de f^* es el rango de *f* y el rango de f^* es el dominio de *f*.

$$Domf = Rangf^* = x$$
$$Rangf = Domf^* = y$$

CÁLCULO DE LA FUNCIÓN INVERSA

Si *f* es una función : $y = f(x)$ biyectiva

I) Se despeja x, $x = g(y)$

II) Se reemplaza y por x y a la función y se llama inversa de *f* y se denota por f^*.

$$\Rightarrow x = f^*(x)$$

* Calcular el $Ran(f)$ que será exactamente el dominio de f^* y así se obtiene f^*.

EJEMPLO 1:

¿Cuáles de las siguientes funciones tienen inversa?

$$I) f = \{(1;2),(2;3),(3;4)\}$$
$$II) f = \{(2;1),(3;2),(4;1),(5;3)\}$$

RESOLUCIÓN:

I) Es inyectiva : A cada imagen y le corresponde una pre-imagen x, por lo tanto, existe $f^{-1}(x)$.

II) No es inyectiva , pues a la imagen $y = 1$ le corresponde dos pre-imágenes. No existe $f^{-1}(x)$.

NOTA

* Si g es la inversa de *f*, entonces también *f* es la inversa de g, es decir : $(f^{-1})^{-1} = f$

* La notación empleada para la función inversa no debe confundirse con la ley de la potenciación, aquí el símbolo superior -1 no es un exponente , en general : $f^{-1}(x) \neq \dfrac{1}{f(x)}$

EJEMPLO 2 :

Para hallar $f^{-1}(x)$, dado $f(x) = \sqrt{x} + 3$, que es inyectiva, de $y = \sqrt{x} + 3$ despejamos x y obtenemos: $x = (y-3)^2$, luego intercambiamos x con , y: $y = (x-3)^2$, entonces $f^{-1}(x) = (x-3)^2$.

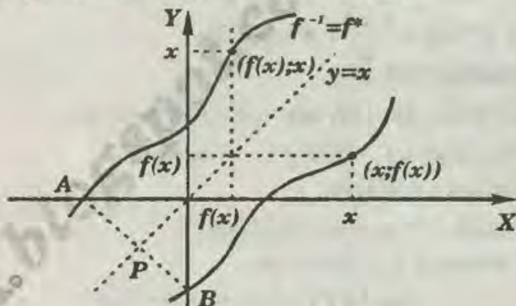
Además :

$D_f = [0;\infty[$; $R_f = [3;\infty[$; $D_{f^{-1}} = [3;\infty[$; $R_{f^{-1}} = [0;\infty[$

GRÁFICA DE LA FUNCIÓN INVERSA

* Para que "*f*" tenga inversa a la gráfica de la relación f^* toda recta vertical debe cortarla a lo más en un punto o que es lo mismo : que a la gráfica de *f* toda recta horizontal la corte a lo más en un punto (en otras palabras *f* debe ser inyectiva).

* Para obtener la gráfica de f^* se refleja la gráfica de *f* en la recta $L : y = x$ (eje de simetría)



* *P* es punto medio de $\overline{AB}$

EJEMPLO 3:

Determinar y graficar la función inversa de $f(x) = x^3 + 2$

RESOLUCIÓN :

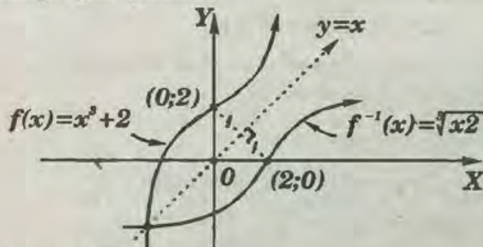
* Como se trata de una función biyectiva :

$y = x^3 + 2$, despejando x

$x = \sqrt[3]{y-2}$, intercambiando variables (x por y e y por x) $y = \sqrt[3]{x-2}$ es la función inversa de *f*.

* Además : $Domf^{-1} = R$, $Ranf^{-1} = R$

* Luego grafiquemos :



EJEMPLO 4 :

Hallar la función inversa de :

$$F(x)=2x-1;\ x\in\left]-1;5\right]$$

RESOLUCIÓN :

* Con el cambio : $F(x)=y \qquad y=2x-1$

* Despejando "x": $x=\dfrac{y+1}{2} \Rightarrow F^*(y)=\dfrac{y+1}{2}$

* Además del dominio de F : $-1\leq x\leq 5$

* Luego : $-1\leq \dfrac{y+1}{2}\leq 5$

* Resolviendo : $-3<y\leq 9$

$\rightarrow RanF=DomF^*=\left]-3;9\right]$

* Finalmente : $F^*(y)=\dfrac{y+1}{2};\ y\in\left]-3;9\right]$

$\rightarrow F^*(x)=\dfrac{x+1}{2};\ x\in\left]-3;9\right]$

EJEMPLO 5 :

Sea $f:(-5;-2)\rightarrow(5;26)$ una función tal que :

$f(x)=x^2+1$. Halle f^* ; si existe .

RESOLUCIÓN :

* Existe $f^*\Leftrightarrow f$ es biyectiva :
* Veamos si f es inyectiva:

$$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1^2+1=x_2^2+1$$
$$\rightarrow x_1^2=x_2^2 \Rightarrow x_1^2-x_2^2=0$$
$$\rightarrow (x_1+x_2)(x_1-x_2)=0$$

* Como : $x_1\wedge x_2\in(-5;-2)\rightarrow x_1+x_2\neq 0$
* Luego : $x_1-x_2=0\Rightarrow x_1=x_2$
* Por tanto , f es inyectiva.
* Veamos si f es sobreyectiva calculemos el rango de f:

$$-5<x<-2$$
$$\rightarrow 4<x^2<25\Rightarrow 5<x^2+1<26$$
$$\rightarrow 5<y<26\Rightarrow Ranf=\langle 5;26\rangle$$

$\rightarrow f$ es sobreyectiva

* Luego f es biyectiva y existe f^*
* Cálculo de f^*:

$$y=f(x)\Rightarrow x=f^*(y)$$
$$y=x^2+1\Leftrightarrow x^2=y-1\Leftrightarrow |x|=\sqrt{y-1}$$

* Como $x\in\langle -5;-2\rangle\Rightarrow |x|=-x$
* Luego : $-x=\sqrt{y-1}\Leftrightarrow x=-\sqrt{y-1}$

$$\Leftrightarrow f^*(y)=-\sqrt{y-1};\ y\in\langle 5;26\rangle$$

* En términos de x :

$$f^*(x)=-\sqrt{x-1};\ x\in\langle 5;26\rangle$$

* Donde :

$$Domf^*=\langle 5;26\rangle \wedge Ranf^*=\langle -5;-2\rangle$$

EJEMPLO 6:

Hallar y graficar la función inversa (de existir) de:

$$y=f(x)=x^2-2x-1;\ x\in[2;\infty\rangle$$

RESOLUCIÓN :

* De : $y=x^2-2x-1$

$$\rightarrow y=(x-1)^2-2\Leftrightarrow (x-1)^2=y+2$$
$$\Leftrightarrow |x-1|=\sqrt{y+2}$$

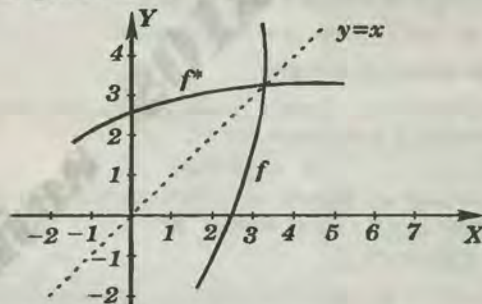
$\Leftrightarrow x-1=\sqrt{y+2}$, (ya que: $x\geq 2$)

$\Leftrightarrow x=1+\sqrt{y+2}=f^*(y)$

* De donde : $f^*(x)=1+\sqrt{x+2}$
* El rango de f^* será el dominio de "f" es decir:

$$Rang(f^*)=[2;+\infty\rangle$$

* La gráfica será :



EJEMPLO 7:

Si $f(x)=-2|x-1|-2, x\in[2;3]$ determinar $f^*(5)$

RESOLUCIÓN :

* Recordando que si $(x;y)\in f\Rightarrow(y;x)\in f^*$

$-2|x-1|-2=5\Rightarrow |x-1|=\dfrac{3}{2}\begin{cases}x=5/2, \text{ si}\\ x=-1/2, \text{ no ¿porqué?}\end{cases}$

*Luego $(5/2;5)\in f\Rightarrow(5;5/2)\in f^*\Rightarrow f^*(5)=5/2$

PROPIEDADES :

I) f^* es biyectiva , existe f^{**} y como :

$$f^*=\{(y;x)/x\in Domf\}$$

entonces: $f^{**}=\{(x;y)/x\in Domf\}$

Luego : $f^{**}=f$

II) Si I es la función identidad , entonces:

$$f\circ f^*=I, \text{ sobre } Domf^*$$
$$f^*\circ f=I, \text{ sobre } Domf$$

III) Inversa de una función compuesta.

Si f y g son biyectivas tal que existe $f\circ g$, entonces: $(f\circ g)^*$

existe: $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$

NOTA

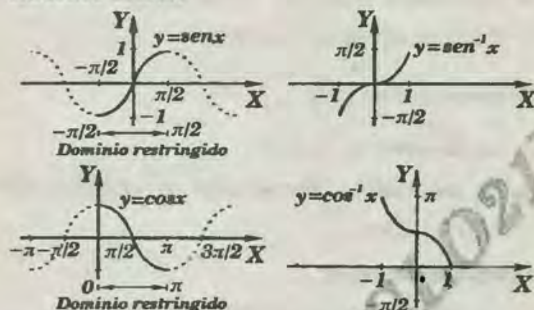
* Sean f y g funciones tales que : una de ellas o ambas pueden no ser biyectivas, sin embargo la función $(f \circ g)^*$ puede existir :

* En este caso , no se aplica : $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$ pues no existe $g^* \circ f^*$, ya que al menos una de las funciones f^* o g^* (o ambas) no existe.

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

Las funciones trigonométricas son periódicas y por lo tanto no son inyectivas (puesto que para cada y de su rango , hay infinitas x que le corresponden). Sin embargo, mediante una ***restricción del dominio*** podemos introducir la noción de inversa para cada una de ellas.

EJEMPLOS:



I) FUNCIÓN ARCO SENO :

A partir de la función $y = senx$ dado que; $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ obtenemos su función inversa considerando el siguiente procedimiento.

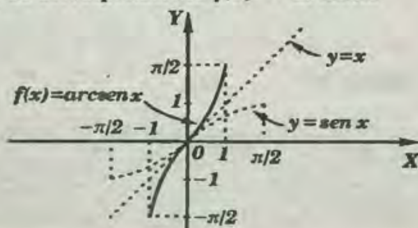
* Despejando x, en términos de $y : x = arc\,seny$ o $x = sen^{-1}y$

* Cambiando la variable x por y e y por x, se tiene :

$y = arcsenx$ o $y = sen^{-1}x$

(se lee: "y es un arco cuyo seno es x")

* Obteniéndose así la función inversa definida con regla de correspondencia $f(x) = arcsenx$



ANÁLISIS DE LA GRÁFICA :

1) $Domf = [-1;1]$

2) $Ranf = \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$

3) es inyectiva

4) es impar

5) No es períodica

6) La función es creciente en todo su dominio.

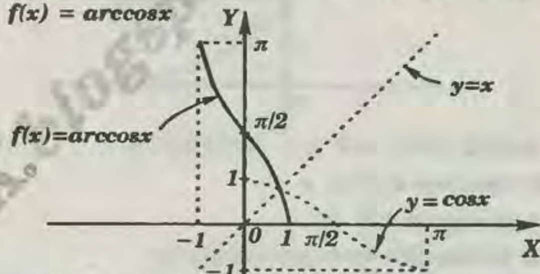
II) FUNCIÓN ARCO COSENO

A partir de la función $y = cosx$ dado que $0 \leq x \leq \pi$ obtenemos su función inversa considerando que $x = arccosy$ ó $x = cos^{-1}y$ además cambiando la variable x por y e y por x ; obteniéndose:

$y = arccosx$ o $y = cos^{-1}x$

(se lee: "y es un arco cuyo coseno es x")

Obteniéndose la regla de correspondencia $f(x) = arccosx$



ANÁLISIS DE LA GRÁFICA :

1) $Domf = [-1;1]$

2) $Ranf = [0;\pi]$

3) es univalente

4) no es par, ni impar

5) no es períodica

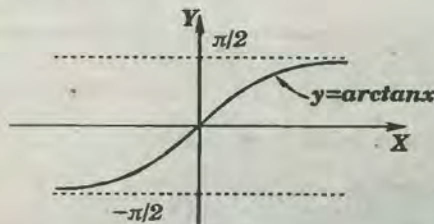
6) la función es decreciente en todo su dominio.

III) FUNCIÓN ARCO TANGENTE .

$$f = \{(x;y)/y = arctanx,\ x \in R\}$$

* De : $y = tanx \Rightarrow x = arctany$
$\Rightarrow y = arctanx,\ x \in R$

* Graficando :



Análisis de la gráfica:

1) Dominio de f es R

2) Rango de f es $\left\langle -\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right\rangle$

3) La función es impar

4) La función es creciente en todo su dominio.

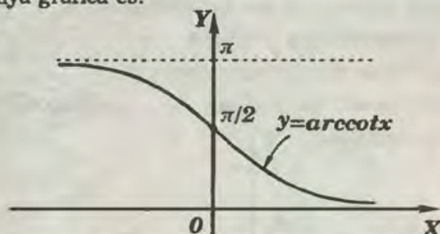
IV) FUNCIÓN ARCO COTANGENTE :

$$f = \{(x;y)/y = arccotx,\ x \in R\}$$

* De: $y = cotx \Rightarrow x = arccoty$

$\Rightarrow y = arccotx,\ x \in R$

* Cuya gráfica es:



ANÁLISIS DE LA GRÁFICA :

1) Dominio de f es R

2) Rango de f es $\langle 0;\pi\rangle$

3) La función no es par, ni impar

4) La función es decreciente en todo su dominio.

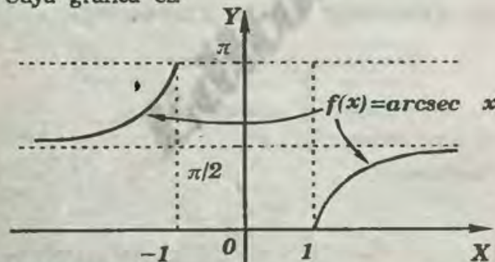
V) FUNCIÓN ARCO SECANTE :

$$f = \{(x;y)/y = arcsecx,\ x \in R - \langle -1;1\rangle\}$$

* De : $y = secx \Rightarrow x = arcsecy$

$\Rightarrow y = arcsecx,\ x \in \langle -\infty;-1] \cup [1;+\infty\rangle$

* Cuya gráfica es:



ANÁLISIS DE LA GRÁFICA :

1) Dominio de f es $R - \langle -1;1\rangle$

2) Rango de f es $[0;\pi] - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$

3) La función no es par , ni impar

4) La función es creciente en el intervalo $\langle -\infty;-1\rangle \vee \langle 1;+\infty\rangle$

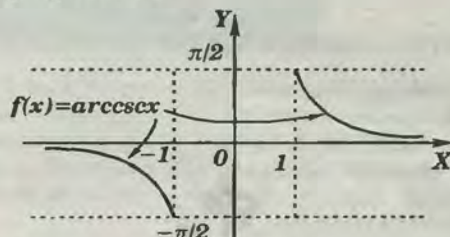
VI) FUNCIÓN ARCO COSECANTE :

$$f = \{(x;y)/y = arccscx,\ x \in R - \langle -1;1\rangle\}$$

* De : $y = cscx \Rightarrow x = arccscy$

$\Rightarrow y = arccscx,\ x \in R - \langle -1;1\rangle$

* Cuya gráfica es :



ANÁLISIS DE LA GRÁFICA :

1) Dominio de *f* es $R - \langle -1;1\rangle$

2) Rango de *f* es $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right] - \{0\}$

3) La función es impar

4) La función es decreciente en el intervalo $\langle -\infty;-1\rangle \vee \langle 1;+\infty\rangle$

OBSERVACIÓN :

* De todo lo anterior se puede deducir que:

A) $y = sen^{-1}x \Leftrightarrow senx = y$, para todo $-1 \le x \le 1$ y $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$

B) $y = cos^{-1}x \Leftrightarrow cosy = x$, para todo $-1 \le x \le 1$ y $-0 \le y \le \pi$

C) $y = tg^{-1}x \Leftrightarrow tgy = x;\ x \in R$ y $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$

D) $y = ctg^{-1}x \Leftrightarrow ctgy = x;\ x \in R$ y $0 < y < \pi$

E) $y = sec^{-1}x \Leftrightarrow secy = x;\ x \in R -]-1;1[\,;0 \le y \le \pi; y \ne \frac{\pi}{2}$

F) $y = csc^{-1}x \Leftrightarrow cscy = x;\ x \in R -]-1;1[\,;-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}; y \ne 0$

EJEMPLOS :

* $sen^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \theta$; implica: $sen\,\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$, y como $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, $\theta = \frac{\pi}{4}$

• $sen^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)=\alpha$; implica: $sen\,\alpha=\frac{1}{2}$, y como

$\alpha\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right], \alpha=\frac{\pi}{6}$

• $cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\beta$; implica: $cos\beta=\frac{\sqrt{3}}{2}$, y como

$\beta\in[0;\pi],\ \beta=\frac{\pi}{6}$

* Recordando que:

I) $f\ o\ f^{-1}(y)=y;\ y\in Ranf$

II) $f^{-1}\ o\ f(x)=x;\ x\in Domf$

* Se obtendrá:

A) $sen(arcsenx)=x;\ x\in[-1;1]$

B) $sec(arcsecx)=x;\ x\in R-\langle -1;1\rangle$

C) $arccos(cosx)=x;\ x\in[0;\pi]$

D) $arccot(cotx)=x;\ x\in\langle 0;\pi\rangle$

PROPIEDADES :

1) $arcsen(-x)=-arcsenx,\ x\in[-1;1]$

2) $arccos(-x)=-arccosx,\ x\in[-1;1]$

3) $arctan(-x)=-arctanx, x\in R$

4) $arcsec(-x)=-arcsecx,\ x\in R-\langle -1;1\rangle$

5) $arccot(-x)=-arccotx,\ x\in R$

6) $arccsc(-x)=-arccscx,\ x\in R-\langle -1;1\rangle$

7) $arcsenx+arccosx=\frac{\pi}{2},\ x\in[-1;1]$

8) $arctanx+arccotx=\frac{\pi}{2},\ x\in R$

9) $arcsecx+arccscx=\frac{\pi}{2},\ x\in R-\langle -1;1\rangle$

10) $arctanx+arctany=arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)+\pi k$

* Si $xy<1\Rightarrow k=0$
* Si $xy>1,\ x>0\Rightarrow k=1$
* Si $xy>1,\ x<0\Rightarrow k=-1$

MODELIZACIÓN

FUNCIONES COMO MODELOS MATEMÁTICOS :

Un modelo matemático es un proceso mental que conduce a convertir un problema difuso de la realidad en un problema claramente matemático , de modo que, resolviendo este último , se consiga una solución, o al menos un buen conocimiento del primero . En su proceso de elaboración , las funciones constituyen una herramienta fundamental.

Al proceso que permite traducir una situación real en una función matemática se le denomina modelización . A continuación , presentamos algunos ejemplos de esta técnica .

EJEMPLOS :

COSTO DE CONSTRUCCIÓN DE UNA CISTERNA: Un grupo de ingenieros construye una cisterna , de modo que su capacidad sea de ***300*** metros cúbicos de agua . La cisterna tiene como base un cuadrado , cuatro caras verticales , todas hechas de concreto, y una tapa cuadrada de acero . Si el concreto cuesta ***$1,5*** el metro cuadrado y el acero , ***$4*** el metro cuadrado, determinar el costo total ***C*** , como una función de la longitud del lado de la base cuadrada.

RESOLUCIÓN:

* El prisma tiene las siguientes dimensiones: largo : x , ancho: x , altura: h

* Como el volumen debe ser de $300\ m^3$, entonces,

$(x)(x)(h)=300$, de donde: $h=\frac{300}{x^2}$

* Elaboramos la función costo , multiplicando las áreas de las caras por el costo del metro cuadrado respectivo :

$$C(x)=4(x)(h)(1,5)+(x)(x)(1,5)+(x)(x)(4)$$

$$\rightarrow C(x)=\frac{1800}{x}+5,5x^2\ ;\ x>0$$

EJEMPLO 2 :

COSTO DE NARANJAS AL POR MAYOR: Un ambulante puede comprar naranjas en el mercado mayorista a los precios siguientes : ***60*** céntimos , si adquiere ***20*** kilos o menos ; ***50*** céntimos , si compra más de veinte y hasta cuarenta kilos ; y ***40*** céntimos si la compra excede los ***40 kg*** . Determinar el costo ***C*** en función del número de kilos de naranjas compradas ***(x)***.

En este caso , la función está segmentada , ya que tiene distintas reglas de correspondencia, dependiendo de los valores de x.

Si $0\le x\le 20$, $C(x)=0,60x$

Si $20<x\le 40$, $C(x)=0,50x$

Si $40<x$, $C(x)=0,40x$

$$ó(x)=\begin{cases}0,60x & si\ \ 0\le x\le 20\\ 0,50x & si\ \ 20<x\le 40\\ 0,40x & si\ \ 40<x\end{cases}$$

EJEMPLO 3 :

UN PROBLEMA DE OPTIMIZACIÓN : Un fabricante de relojes puede producir un reloj en particular con un costo de **$15** por unidad. Se estima que si el precio de venta del reloj es x, entonces el número de relojes que se vende por semana es $125 - x$.

a) Expresar el monto semanal de las utilidades del fabricante como función x.

b) Utilizar el resultado anterior para determinar las utilidades semanales, si el precio de venta es **$45** por reloj.

c) Determinar cuál debe ser el precio de venta, si se busca que las utilidades semanales alcancen un valor máximo.

RESOLUCIÓN :

a) Las utilidades se obtienen restando del ingreso total, el costo total. Considérese R el ingreso semanal, en dólares. Como el ingreso es el producto del precio de venta de cada reloj por el número de relojes vendidos, se tiene $R=x(125-x)$.

Sea C el costo total de los relojes que se venden por semana; como este costo es el producto del costo de cada reloj por el número

de relojes vendidos, se tiene $C = 15(125 - x)$.

Sea $P(x)$ la función que representa a la utilidad semanal, entonces:

$$P(x) = R - C$$

$$\rightarrow P(x) = x(125 - x) - 15(125 - x)$$

$$\rightarrow P(x) = (125 - x)(x - 15)$$

b) Si el precio de venta es **$45**, el monto de utilidad semanal es $P(45)$:

$$P(45) = (125 - 45)(45 - 15)$$

$$= 80\times 30$$

$$= 2\,400$$

* Las utilidades son de **$2 400** cuando los relojes se venden a **$45** por unidad.

c) Efectuamos operaciones en la fórmula algebraica que representa a $P(x)$:

$$P(x) = (125 - x)(x - 15)$$

$$\rightarrow P(x) = -x^2 + 140x - 1875$$

* Esta es una función cuadrática del tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$ con $a = -1$; $b = 140$. Como $a< 0$; P tiene un valor máximo en el punto donde:

$$x = -b/2a = -\frac{140}{-2} = 70$$

* Así pues, las utilidades semanales alcanzarán un valor máximo cuando cada reloj se venda a **$70**.

*También podemos hallar el x que dé P máximo, transformando $P(x)$ por completación de cuadrados:

$$P(x) = -(x^2 - 140x) - 1875$$

$$\rightarrow P(x) = -(x-70)^2 - 1875 + 70^2$$

$$\rightarrow P(x) = 3025 - (x-70)^2$$

* Aquí notamos que P es máximo cuando $x = 70$, y que dicho valor máximo es $P(70)=3025$.

EJEMPLO 4 :

CONSTRUCCIÓN DE UN CERCO: El Departamento Vial de un distrito ha decidido construir un área de picnic para automovilistas al lado de una carretera. Será rectangular y tendrá una superficie de $5\,000\ m^2$ y estará cercada en los tres lados no adyacentes a la carretera. Expresar la cantidad de metros del cerco requerido como una función de la longitud del lado no cercado.

RESOLUCIÓN :



Carretera

* Hacemos un diagrama y expresamos la longitud del cerco en función de los lados x e y del rectángulo:

$$L = x + 2y$$

* Para expresar L sólo en función de x, debemos utilizar al dato del área del terreno a cercar, así:

$x.y = 5000$, de donde $y = \frac{5000}{x}$

* Sustituyendo en la ecuación para L :

$$L = x + 2.\frac{5000}{x}$$

*Y ya tenemos L como función del lado x :

$$L(x) = x + \frac{10000}{x}$$

* Si quisiéramos hallar el valor de x y obtener la cantidad mínima de cerco C, podemos tabular y graficar la función, eligiendo según la gráfica el valor óptimo de x.

EJEMPLO 5:

EXPANSIÓN DE UN INCENDIO: Un incendio comienza en un campo abierto y seco, extendiéndose en forma de círculo. El radio de tal círculo aumenta a razón de $6\ m/min$. Expresar el área de fuego como una función del tiempo t.

RESOLUCIÓN:

*LLamaremos t al número de minutos transcurridos desde que se prendió el fuego : r al radio del círculo en donde se desarrolla el incendio y A el área incendiada. $A=\pi r^2;\ r=6t$

* Aquí , $r = 6t$ porque el radio aumenta a una velocidad de **6** metros por minuto . Sustituyendo r en A : $A=\pi(6t)^2$

* Obtenemos A en función del tiempo t :

$$A=36\pi t^2$$

EJEMPLO 6 :

Una empresa ***ABC–SA*** produce artefactos electrodomésticos y puede tener una utilidad de *20* dólares en cada artículo si se producen semanalmente no más de ***800*** artículos. La utilidad en cada artículo decrece **2** centavos de dólar por artículo que sobrepase los ***800***. ¿Cuántos artículos deben fabricarse a la semana para obtener la máxima utilidad?

A) 800 *B)850* *C)900* *D)950* *E)1 000*

RESOLUCIÓN :

* Sea $U_{(x)}$ la función que da la utilidad total , donde:

$$U_{(x)}=\begin{pmatrix}\text{Utilidad por}\\ \text{cada artículo}\end{pmatrix}x$$

* Donde x es el número de artículos

* Para $x\le 800$: $U_{(x)}=20x$

* Para $x>800$:

x	$U_{(x)}$
801	$\left(20-\frac{2}{100}.1\right)801$
802	$\left(20-\frac{2}{100}.2\right)802$
803	$\left(20-\frac{2}{100}.3\right)803$
⋮	⋮
x	$\left(20-\frac{2}{100}.(x-800)\right)x$

$$\to U_{(x)}=\left(20-\frac{2}{100}(x-800)\right)x$$

$$U_{(x)}=-\frac{2}{100}x^2+36x$$

$$U_{(x)}=-\frac{2}{100}(x^2-1800x+900^2)+\frac{2}{100}.900^2$$

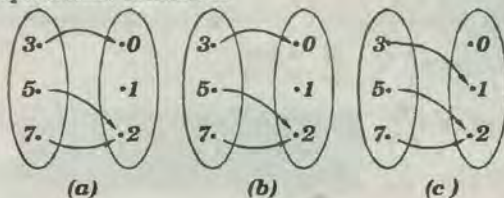
$$\to U_{(x)}=-\frac{2}{100}(x-900)^2+16\,200$$

Luego la utilidad será máxima para $x = 900$

RPTA: "C"

EJERCICIOS

01 Señala cuáles de estos diagramas sagitales representan funciones:



02 Verifica cuáles de los siguientes conjuntos de pares ordenados son funciones :

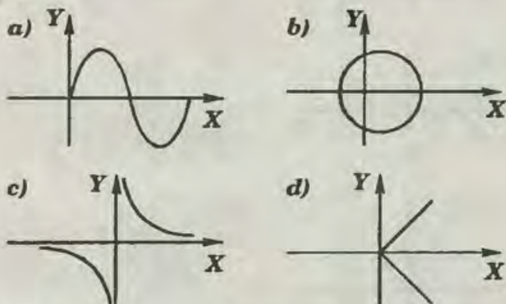
a) $\{(2;0),(-1;5),(0;0),(6;2)\}$

b) $\{(-3;1),(-3;0),(4;2),(7;5)\}$

c) $\{(-5;2),(1;2),(3;2),(5;2)\}$

d) $\left\{(0;\sqrt{2}),\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right),\left(1;\frac{1}{4}\right),\left(\frac{1}{2};0\right)\right\}$

03 Señala las gráficas que representan a una función:



04 Determina el dominio y el rango de las siguientes funciones:

a) $F=\{(1;1),(2;1),(3;2),(4;3)\}$

b) $f=\{(2;4),(4;2),(1;0),(0;3)\}$

c) $h=\{(-2;1),(-1;1),(0;1),(1;1),(2;1)\}$

d) $g=\begin{cases}x-2; & x\in\{-1;0;1;2\}\\ 3x\ ; & x\in\{3;4;5\}\end{cases}$

05 Halla el dominio de cada función:

a) $f(x)=\frac{1}{x}$ *b)* $g(x)=\sqrt{x-2}$

c) $h(x)=\frac{1}{2x-1}$ *d)* $F(z)=z^2$

e) $g(t)=\frac{t}{t^2-1}$ *f)* $f(x)=\sqrt{x+1}$

06 Determina el rango de cada función:

a) $f(x)=\sqrt{x}$; *b)* $h(x)=\dfrac{1}{x-2}$; *c)* $g(t)=t^2$

07 Halla el dominio y el rango de estas funciones:

a) $f(x)=\begin{cases}-1; & Si \quad x\le 0\\ 1; & Si \quad x>0\end{cases}$

b) $g(x)=\begin{cases}0; & Si \quad x<0\\ x; & Si \quad x\ge 0\end{cases}$

c) $f(x)=\sqrt{x^2-9}$

08 En los gráficos de ***I*** al ***VIII*** relaciona cada gráfica con una de las siguientes funciones:

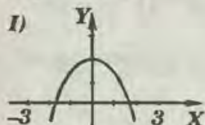
a) $y=x^2+2$ *e)* $y=(x-2)^2$

b) $y=-x^2+2$ *f)* $y=-(x+2)^2$

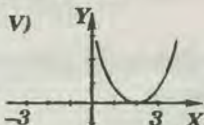
c) $y=|x|+2$ *g)* $y=2x^2$

d) $y=-|x|+2$ *h)* $y=-|x+2|$

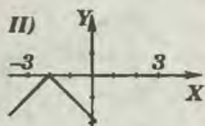
I)



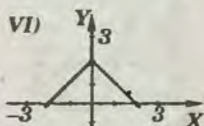
V)



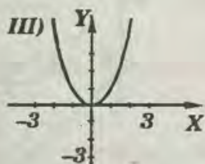
II)



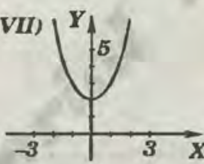
VI)



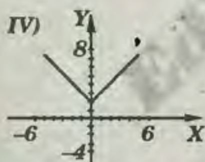
III)



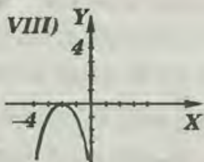
VII)



IV)



VIII)



09 Determina cuáles de los siguientes enunciados son verdaderos y cuáles son falsos:

A) Si el dominio de una función consta de dos números, el rango consta por lo menos de dos números.

B) Si el rango de una función consta de un solo número, su dominio consta de un solo número.

C) El dominio natural de $f(x)=\sqrt{x-3}$ es $[3;\infty[$

D) El rango de $f(x)=x^2-6$ es $[-6;\infty[$

Si $f(x)=4x-1$ entonces $f(x+h)=4x+h-1$

E) Una recta vertical corta a la gráfica de una función en no más de un punto.

F) Si el dominio de $f(x)=x^2+1$ es $[1;2]$, el rango de *f* es $[2;5]$

G) Si $y=f(x)$ tiene como dominio a $\mathbb{R}$, su gráfica corta al eje y en *f(0)*

H) Si $f(x+1)=x^2+2x+1$

entonces: $f(x-1)=x^2-2x+1$

I) La función que asigna a cada número real positivo x, su cuadrado disminuido en su raíz cuadrada, se expresa por: $f(x)=\left(x-\sqrt{x}\right)^2$

10 Traza la gráfica de las siguientes funciones; especifica, según cada caso, el dominio y el rango:

A) $f(x) = x2$ *B)* $f(x) = 2x + 1;\ x\in[-1;3]$

C) $f(x) = \sqrt{1-x}$ *D)* $f(x) = \dfrac{1}{x+1};\ x\in[-2;2]$

E) $f(x) =\begin{cases}2 & ; \ x\le 0\\ x+1 & ; \ x>0\end{cases}$ *F)* $f(x) =\begin{cases}-x & ; \ x\le 0\\ x^2 & ; \ x>0\end{cases}$

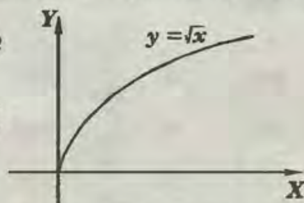
11 Mediante la gráfica adjunta de $f(x) = \sqrt{x}$, traza las gráficas de las siguientes funciones.

A) $y=\sqrt{x}+2$

B) $y=-\sqrt{x}$

C) $y=\sqrt{x-2}$

D) $y=2\sqrt{x}$



12 ¿Cuáles de los siguientes enunciados son verdaderos y cuáles son falsos?

A) Para encontrar la interseca de la gráfica de la función *f* con el eje **Y**, dado $y = f(x)$, se hace $x = 0$ y se calcula y.

B) Si la gráfica de $y = f(x)$ interseca al eje de las x en $x = a$, entonces la gráfica de $y = f(x + h)$ interseca al eje de las x, en $x = a - h$

C) Para gràficar $y = f(x) + a$ a partir de la gráfica de $y = f(x)$, se traslada esta última a unidades hacia arriba.

D) La gráfica de $y=|2x|$ es una versión comprimida de la gráfica de $y=|x|$

E) La gráfica de $y=\frac{1}{x}$ tiene dos asíntotas, una horizontal y otra vertical.

F) La gráfica de $y=\frac{1}{x^2-4}$ tiene dos asíntotas verticales.

13 Determina cuáles de estas afirmaciones son verdaderas y cuáles son falsas.

A) La gráfica de una función lineal es una recta que siempre pasa por el origen.

B) La gráfica de la función valor absoluto es simétrica respecto el eje X.

C) La función *f* definida por $f(x) = x$ es creciente en $[-2;2]$..

D) La función valor absoluto es impar.

E) Si $f(x) = \sqrt{x-1}$; *f* es creciente en todo su dominio.

F) La función definida por $f(x) = x^3 - x$ es impar.

G) La función definida por $f(x) = |x| - x$ es constante si $x > 0$

H) Cualquier función *f* puede ser escrita como la suma de una función par e impar.

I) La función definida por $f(x) = x(x + 2)$ tiene un valor mínimo.

J) La función definida por $f(x) = 4 - |x|$ tiene un valor máximo.

14 Si $f(x) = x + 3$ y $g(x) = x^2 - 5$, encuentra lo siguiente:

A) $(f+g)(x)$ *B)* $(f+g)(0)$ *C)* $(f-g)(x)$
D) $(fg)(-2)$ *E)* $(f/g)(x)$ *F)* $(f \circ g)(x)$
G) $(f \circ g)(3)$ *H)* $(g \circ f)(x)$

15 ¿Cuáles de los enunciados siguientes son verdaderos y cuáles son falsos?

A) Si *f* es una función cualquiera, $f(2x) = 2f(x)$.

B) Si *f* es cualquier función real, $f(x)+f(2x) = f(3x)$.

C) La suma de dos funciones pares es una función par.

D) El producto de dos funciones impares es una función impar.

E) Si *f* y *g* tienen el mismo dominio, $\frac{f}{g}$ también tiene ese dominio.

F) Si $f(x) = x^2$ y $g(x) = x^3$, entonces $f \circ g = g \circ f$.

G) Una función y su inversa tiene el mismo dominio.

H) En una función inyectiva, el dominio y el rango son iguales.

I) Una función inyectiva siempre es creciente o siempre es decreciente.

J) Si *f* y *g* son una inversa de otra $f \circ g = g \circ f$.

16 ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuáles son falsas?

A) El valor máximo de $y = \text{sen } 2x$ es 2.

B) Las funciones seno y cosecante tienen igual signo en cada valor de su dominio.

C) La cotangente y secante de un ángulo del segundo cuadrante tiene signo positivo.

D) La función $y = cosx$ es par.

E) La función $y = xsenx$ es impar.

F) El período de la función secante es π.

G) Siempre se cumple que $tg(x + \pi) = tgx$ para toda x en el dominio de la función tangente.

FUNCIÓN CUADRÁTICA

El estudio de las funciones cuadráticas resulta de interés no sólo en matemática sino también en física y en otras áreas del conocimiento como por ejemplo: la trayectoria de una pelota lanzada al aire, la trayectoria que describe un río al caer desde lo alto de una montaña, la forma que toma una cuerda floja sobre la cual se desplaza un equilibrista, el recorrido desde el origen, con respecto al tiempo transcurrido, cuando una partícula es lanzada con una velocidad inicial.

Puede ser aplicada en la ingeniería civil, para resolver problemas específicos tomando como punto de apoyo la ecuación de segundo grado, en la construcción de puentes colgantes que se encuentran suspendidos en uno de los cables amarrados a dos torres.

Los biólogos utilizan las funciones cuadráticas para estudiar los efectos nutricionales de los organismos.

Existen fenómenos físicos que el hombre a través de la historia ha tratado de explicarse. Muchos hombres de ciencias han utilizado como herramienta principal para realizar sus cálculos la ecuación cuadrática. Como ejemplo palpable, podemos mencionar que la altura S de una partícula lanzada verticalmente hacia arriba desde el suelo está dada por $S= V_0t-\frac{1}{2}gt^2$, donde S es la altura, V_0 es la velocidad inicial de la partícula, g es la constante de gravedad y t es el tiempo.

La función cuadrática responde a la fórmula:

$y= a x^2 + b x + c$ con $a \neq 0$. Su gráfica es una curva llamada parábola cuyas características son:

Si a es mayor a 0 es cóncava y admite un mínimo. Si a es menor a 0 es convexa y admite un máximo.

Vértice: Puntos de la curva donde la función alcanza el máximo o el mínimo.

Eje de simetría: $x = x_v$

intersección con el eje Y.

Intersecciones con el eje X: se obtiene resolviendo la ecuación de segundo grado.

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1:

Si f es una función definida por :

$f=\{(4;k),(2;5k),(7;2k^2+1),(4;2k-1)\}$,entonces la suma de los elementos del rango es:

A) 6 B) 8 C) 9 D)11 E) 13

RESOLUCIÓN :

* Como se trata de una función , luego :

Si: $(4;k) \wedge (4;2k-1)$ pertenecen a «f», entonces :

$k=2k-1 \rightarrow 1=k$

* Con lo que la función dada , será equivalente a :

$$f=\{(4;1),(2;5),(7;3)\}$$
$$\Rightarrow Ranf=\{1;5;3\}$$

* Se pide : $1+5+3=9$

RPTA: "C"

PROBLEMA 2 :

Sean los conjuntos $A=\{-3;-2;0;6;4;11\}$ y $B=Z$ (conjunto numérico de los enteros). Si $f:A\rightarrow B$ tal que :

$f=\{(-2;4),(-3;1),(0;3a+2b),(-2;2a+b),(2a+b;4),(6;7),(0;5),(3a-b;a+b)\}$, entonces para que f sea una funcion , el valor de $T=a-b$, es:

A) –5 B) –1 C) 1 D) 4 E) 5

RESOLUCIÓN :

* Por definición de función , se deduce que de "f", plantearemos:

Si: $(-2;4) \wedge (-2;2a+b)\in f$

* Entonces : $2a+b=4$ .... (I)

* Ahora analizando el dominio dado y el que se muestra explícitamente , plantearemos :

$Domf=\{-3;-2;0;6;4;11\}=\{-2;-3;0;2a+b;6;3a-b\}$

$\rightarrow 3a-b=11$......................(II)

* De (I) y (II), resolviendo :

$a=3 \wedge b=-2 \rightarrow T=3-(-2)=5$

RPTA: "E"

PROBLEMA 3 :

Determinar el dominio de las siguientes funciones :

I) $f(x)=\sqrt{x-4}$ III) $f(x)=\dfrac{4x-1}{\sqrt{5-x}}$

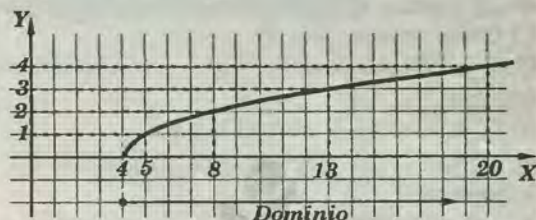
II) $f(x)=\sqrt{x^2-9}$ IV) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

RESOLUCIÓN :

I) La raíz cuadrada , por ser una raíz par , no está definida para números reales menores que cero . La función está definida para valores en los cuales $x-4\ge 0$

* Entonces : $x\in[4;\infty\rangle \Rightarrow Domf=[4;\infty\rangle$

* Por lo tanto , el dominio de la función $f(x)=\sqrt{x-4}$ es el conjunto de los números reales que son mayores o iguales que cuatro.



II) Se tiene en cuenta que también es una raíz par, la cual no está definida para números negativos . Es decir , está definida para valores de x en los cuales $x^2-9\ge 0$

$x^2-9\ge 0$ equivale a $(x+3)(x-3)\ge 0$



* Entonces : $x\in\langle-\infty;-3]\cup[3;+\infty\rangle$

* Por consiguiente el dominio de la función es:

$$Domf=\langle-\infty;-3]\cup[3;+\infty\rangle$$

III) Cuando se pide el dominio , se pregunta equivalentemente o para qué valores de la variable x, está definida la función $f(x)$.

$f(x)$ está definida en R si $5-x>0$

$\Rightarrow x<5 \rightarrow Domf=\langle-\infty;5\rangle$

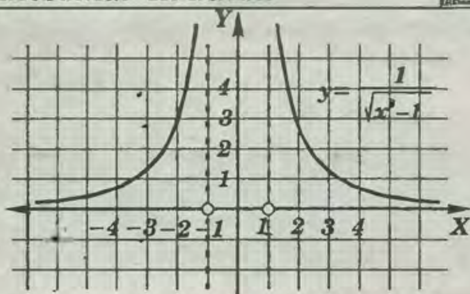
IV) La función $f(x)$ es el cociente de dos funciones. La cantidad subradical x^2-1 debe ser mayor o igual que cero . Pero como el denominador debe ser diferente de cero ,

entonces x^2-1 es estrictamente mayor que cero.

Si: $x^2-1>0$ entonces $(x+1)(x-1)>0$



* Entonces : $Domf=\langle-\infty;-1\rangle\cup\langle 1;+\infty\rangle$



PROBLEMA 4 :

Determinar el rango de cada una de las siguientes funciones:

II) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

III) $f(x) = 2x + 5,\ x \in \langle -4\,;2]$

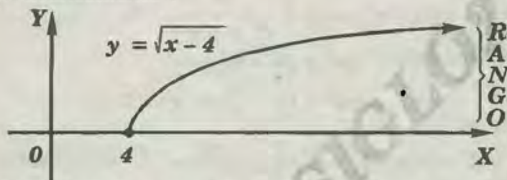
IV) $f(x) = 3 - \sqrt{5 + x^2}\ ;\ x \in \langle -\sqrt{2}\,;\sqrt{2}\rangle$

V) $y = \dfrac{1}{\sqrt{3x-2}}$

VI) $y = \dfrac{x^2 - 3x - 4}{x-4}$

RESOLUCIÓN :

I) Gráficamente :



*Se deduce que «*y*» siempre es positivo , ya que es igual a un radical $(\sqrt{x-4})$, entonces: $Ranf = [0\,;\infty\rangle$

II) Como : $x^2 \geq 0$

$\Rightarrow x^2 + 1 \geq 1 \Rightarrow 0 < \dfrac{1}{x^2+1} \leq 1 \Rightarrow 0 < \sqrt{\dfrac{1}{x^2+1}} \leq 1$

$\Rightarrow 0 < y \leq 1 \Rightarrow Ranf = \langle 0\,;1]$

III) Aquí el dominio será $\langle -4\,;2]$

* Para hallar su rango , habrá que hallar la variación de $f(x)$.

$-4 < x \leq 2 \Leftrightarrow -8 < 2x \leq 4 \Leftrightarrow -3 < 2x + 5 \leq 9$

$\Leftrightarrow -3 < f(x) \leq 9 \rightarrow Ranf = \langle -3\,;9]$

IV) Partiendo del dominio $x \in \langle -\sqrt{2}\,;2\rangle$

$\Leftrightarrow -\sqrt{2} < x < 2 \Leftrightarrow 0 \leq x^2 < 4 \Rightarrow 0 \geq -x^2 > -4$

$\Rightarrow 5 \geq 5 - x^2 > 1 \Rightarrow 1 < \sqrt{5 - x^2} \leq \sqrt{5}$

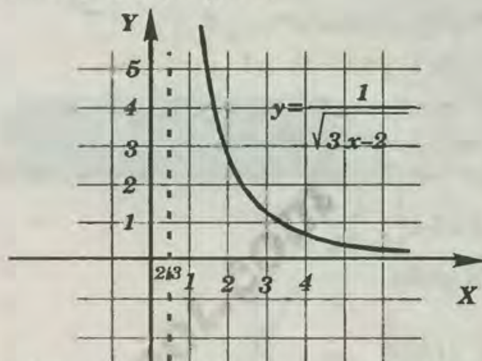
$\Rightarrow -1 > -\sqrt{5-x^2} \geq -\sqrt{5} \Rightarrow 2 > 3 - \sqrt{5-x^2} \geq 3 - \sqrt{5}$

$\Rightarrow 3 - \sqrt{5} \leq f(x) < 2 \rightarrow Ranf = [3 - \sqrt{5}\,;2\rangle$

V) Por simple análisis, se deduce que:

$y = \dfrac{1}{\sqrt{3x-2}} > 0$

* Entonces: $Ranf = \langle 0;+\infty\rangle$



VI) Esta se hace más simple , si se factoriza el numerador y se cancelan los factores iguales:

$$y = \frac{(x+1)(x-4)}{(x-4)} = (x+1);\ x \neq 4$$

$\rightarrow f(x) = x + 1$; excluyendo : $f(4) = 4 + 1 = 5$

*Pero como se trata de una función afín lineal (donde $y \neq 5$) , entonces : $Ranf = \mathbb{R} - \{5\}$

PROBLEMA 5 :

Sea : $g(x) = \dfrac{\sqrt{4+x}}{1-x}$

I) Determine *Domg*

II) Calcular : $g(5)\ ;\ g(-2)$ y $g(\pi)$

RESOLUCIÓN:

I) Para que $g(x)$ sea un número real , el radicando $(4 + x)$ es no negativo y el denominador $(1 - x)$, no es igual a cero.

* Así : $g(x)$ existe si y sólo si :

$$4 + x \geq 0 \ \wedge\ 1 - x \neq 0$$
$$x \geq -4 \ \wedge\ x \neq 1$$

* Intersectando , tenemos : $Domg = [-4\,;+\infty\rangle - \{1\}$

II) $g(5) = \dfrac{\sqrt{4+5}}{1-5} = \dfrac{\sqrt{9}}{-4} = -\dfrac{3}{4}$

$g(-2) = \dfrac{\sqrt{4+(-2)}}{1-(-2)} = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$

$g(\pi) = \dfrac{\sqrt{4+\pi}}{1-\pi}$

PROBLEMA 6 :

Para la función $f(x) = |x-1| - x, x \in \mathbb{R}$, hallar su rango y su gráfica.

RESOLUCIÓN :

I) Para hallar el rango de f analicemos su regla de correspondencia en dos partes de su dominio $\langle -\infty;\infty\rangle$:

Si : $x \geq 1;\ f(x) = x - 1 - x = -1$

Si : $x < 1;\ f(x) = (1 - x) - x = 1 - 2x$

*De : $x < 1 \leftrightarrow -2x > -2 \leftrightarrow f(x) = 1 - 2x > -1$

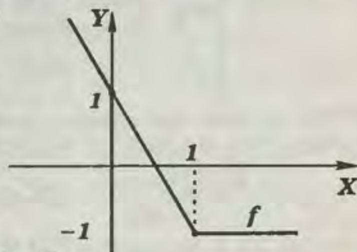
$\rightarrow x \in \langle -\infty;\infty\rangle$ si y sólo si :

$f(x) \in \langle -\infty;-1\rangle \cup \{-1\} = \langle -\infty;-1] \rightarrow Ranf = \langle -\infty;-2]$

$$\rightarrow f(x) = \begin{cases} -1; & x \geq 1 \\ 1 - 2x; & x < 1 \end{cases}$$

* Su gráfica :

x	$f(x)$
$x \geq 1$	-1
$1/2$	0
0	1



PROBLEMA 7 :

Si $\langle a;b]$ es el dominio de la función f definida por $f = \left\{\left(\frac{2x+1}{2x+3};x\right) / x \in \langle 0;10]\right\}$, entonces la relación correcta entre los valores de a y b, es:

A) $a + 3b = 25$ B) $3a + 6b = 10$

C) $6a + 23b = 25$ D) $6a + 46b = 44$

E) $5a + 6b = 36$

RESOLUCIÓN :

* Lo dado lo podemos expresar , así :

$$f = \left\{(Z,x) / Z = \frac{2x+1}{2x+3} \wedge x \in \langle 0;10]\right\}$$

$$\rightarrow Domf = \left\{Z \in R / Z = \frac{2x+1}{2x+3} \wedge x \in \langle 0;10]\right\}$$

* Luego : $Z = \frac{2x+1}{2x+3} = 1 - \frac{2}{2x+3}$

* Ahora como :

$0 < x \leq 10 \Rightarrow 0 < 2x \leq 20$

$\rightarrow 3 < 2x + 3 \leq 23 \rightarrow \frac{1}{3} > \frac{1}{2x+3} \geq \frac{1}{23}$

$\rightarrow -\frac{2}{3} < -\frac{2}{2x+3} \leq -\frac{2}{23} \rightarrow -\frac{1}{3} < 1 - \frac{2}{2x+3} \leq \frac{21}{23}$

$\rightarrow \frac{1}{3} < t \leq \frac{21}{23} \rightarrow Domf = \left\langle \frac{1}{3};\frac{21}{23}\right]$

*Luego : $a = \frac{1}{3} \wedge b = \frac{21}{23}$

*Buscando la correspondencia pedida, se obtendrá : $6a + 46b = 44$

RPTA: "D"

PROBLEMA 8 :

Halle el dominio de la función :

$$f(x) = \frac{x+5}{\sqrt{1 - \sqrt{x-2}}}$$

A) ϕ B) $[2;4]$ C) $[2;3\rangle$ D) R

RESOLUCIÓN :

* Se está pidiendo el campo de existencia de la función :

* Luego : $\underline{1 - \sqrt{x-2} > 0} \wedge x - 2 \geq 0$

$\rightarrow 1 > \sqrt{x-2} \wedge x \geq 2 \rightarrow 1 > x - 2 \wedge x \geq 2$

$\rightarrow x < 3 \wedge x \geq 2 \Rightarrow x \in [2;3\rangle$

$\rightarrow Domf = [2;3\rangle$

RPTA: "C"

PROBLEMA 9 :

Halle el rango de la función : $G(x) = \frac{x}{x^2 + x + 4}$

A) $\langle -\infty;0]$ B) $R - \{1\}$ C) ϕ D) $\left[-\frac{1}{3};\frac{1}{5}\right]$

RESOLUCIÓN :

*Sea : $G(x) = y \rightarrow y = \frac{x}{x^2 + x + 4}$

* Efectuando : $yx^2 + yx + 4y = x$

$$\rightarrow yx^2 + (y-1)x + 4y = 0$$

* Como :

$x \in R \Rightarrow (y-1)^2 - 4y(4y) \geq 0$ .... (Discriminante)

*Por diferencia de cuadrados :

$$(y - 1 + 4y)(y - 1 - 4y) \geq 0$$

$$\rightarrow (5y-1)(3y+1) \leq 0 \rightarrow y \in \left[\frac{-1}{3};\frac{1}{5}\right]$$

$$\rightarrow Rango(G) = \left[-\frac{1}{3};\frac{1}{5}\right]$$

RPTA: "D"

ROBLEMA 10 :

Sea f una función real de variable real «a» se llama punto fijo de f si y sólo si $f(a) = a$ según ello encuentre los puntos fijos de la función :

$$G(x) = \frac{6x^2 + x - 20}{x + 1}$$

A) $\{2;3\}$ B) $\{1\}$ C) $\{4;0\}$ D) $\{2;-2\}$ E) $\{1;-1\}$

RESOLUCIÓN :

* Por definición de punto fijo :

$$\frac{6x^2 + x - 20}{x + 1} = x \rightarrow 6x^2 + x - 20 = x^2 + x$$

$\rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = 2$ ó $x - 2$

$\rightarrow$ Puntos fijos son 2 ó -2

RPTA: "D"

PROBLEMA 11 :

Dada la función $f(x) = \dfrac{2x}{1+2x} / x \in \langle 1;5]$

Halle su rango .

A) $\left\langle \dfrac{2}{3}; \dfrac{10}{11} \right]$ B) ϕ C) $\mathbb{R} - \{0\}$ D) $\{0\}$ E) $\mathbb{R}$

RESOLUCIÓN :

* Veamos:

$$f(x) = \frac{2x}{2x+1} = \frac{2x+1}{2x+1} - \frac{1}{2x+1} = 1 - \frac{1}{2x+1}$$

* Pero : $1 < x \leq 5$

$\rightarrow 2 < 2x \leq 10 \rightarrow 3 < 2x + 1 \leq 11$

$\rightarrow \dfrac{1}{11} \leq \dfrac{1}{2x+1} < \dfrac{1}{3} \rightarrow -\dfrac{1}{11} \geq -\dfrac{1}{2x+1} > -\dfrac{1}{3}$

* Sumando 1 : $\dfrac{10}{11} \geq 1 - \dfrac{1}{2x+1} > \dfrac{2}{3}$

$\rightarrow$ Su rango es : $\left\langle \dfrac{2}{3}; \dfrac{10}{11} \right]$

RPTA: "A"

PROBLEMA 12 :

Si h es una función definida por $h(x) = x + \dfrac{2}{x}$ con $x > 0$, entonces la afirmación correcta es :

A) $Ran(f) \subset [4;\infty\rangle$ B) $Ran(f) \cap \langle 0;2] \neq \phi$

C) $Ran(f) \cup \langle -\infty; 2\sqrt{2}] = R$ D) $Ran(f) \cap \langle 0;2\rangle \neq 0$

RESOLUCIÓN :

* Como $x > 0$, y recordando que :

$$\begin{pmatrix} Media \\ Aritmética \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} Media \\ Geométrica \end{pmatrix} \rightarrow \frac{x + \frac{2}{x}}{2} \geq \sqrt{(x)\left(\frac{2}{x}\right)}$$

$\rightarrow \dfrac{h(x)}{2} \geq \sqrt{2} \rightarrow h(x) \geq 2\sqrt{2}$

* Entonces : $Ranh = [2\sqrt{2}; +\infty\rangle$

*De donde según alternativas , lo correcto , será :

$Ranh \cup \langle -\infty; 2\sqrt{2}] = R$

RPTA: "C"

PROBLEMA 13 :

Si f es una función definida por :

$$f(x) = \begin{cases} xf(x) + x - 1; & x > 1 \\ 4 & ; \ x \leq 1 \end{cases}$$

Entonces, el valor de $T = \dfrac{f(500) + 3f(580)}{f(0)}$, es :

A) -1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

RESOLUCIÓN :

* Para $x > 1 : f(x) = xf(x) + x - 1$

$\rightarrow (1-x)f(x) = x - 1$

$\rightarrow f(x) = \dfrac{x-1}{1-x} \rightarrow f(x) = -1$

* Luego : $f(x) = \begin{cases} -1; & x > 1 \\ 4; & x \leq 1 \end{cases}$

* Se pide: $T = \dfrac{f(500) + 3f(580)}{f(0)} = \dfrac{-1 + 3(-1)}{4} = -1$

RPTA: "A"

PROBLEMA 14 :

Halle el rango de : $f(x;y) = x^2 + xy + y^2$

A) $\{0\}$ B) $\mathbb{R}$ C) $\mathbb{R}_0^+$ D) $\langle 0;7\rangle$ E) $[0;7]$

RESOLUCIÓN:

* De : $f(x;y) = x^2 + xy + y^2 = \left(x + \dfrac{y}{2}\right)^2 + \dfrac{3y^2}{4}$

$\rightarrow f(x;y) \geq 0; \ \forall x,y \in \mathbb{R}$

$\rightarrow Ranf = [0;\infty\rangle$

RPTA: "C"

PROBLEMA 15 :

Si f es una función definida por :

$f(x) = x^2 - 5x + 2$, $\forall x \in \langle -3;5\rangle$, entonces el rango de f es :

A) $\left[-\dfrac{17}{4}; 26\right]$ B) $[0;26]$ C) $\left[0; \dfrac{17}{4}\right]$

D) $\left[-\dfrac{17}{4}; 26\right\rangle$ E) $\left\langle -26; \dfrac{17}{4}\right]$

* Haciendo :

$$y = x^2 - 5x + \frac{25}{4} + 2 - \frac{25}{4} \rightarrow y = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{17}{4}$$

* Pero como : $x \in \langle -3;5\rangle \rightarrow -3 < x < 5$

$\rightarrow -\dfrac{11}{2} < x - \dfrac{5}{2} < \dfrac{5}{2} \rightarrow 0 \leq \left(x - \dfrac{5}{2}\right)^2 < \dfrac{121}{4}$

$\rightarrow -\dfrac{17}{4} \leq \left(x - \dfrac{5}{2}\right)^2 - \dfrac{17}{4} < \dfrac{121}{4} - \dfrac{17}{4} \rightarrow -\dfrac{17}{4} \leq y < 26$

*Luego : $Ranf = \left[-\dfrac{17}{4}; 26\right\rangle$

RPTA: "D"

PROBLEMA 16 :

Si f es una función definida por :

$f(x) = \sqrt{6-x} + \sqrt{x-2}$, entonces el rango de f es :

A) $[2\,;\,8]$ B) $[\sqrt{2}\,;\,8]$ C) $[2\sqrt{2}\,;\,8]$
D) $[0\,;2\sqrt{2}]$ E) R^+

RESOLUCIÓN :

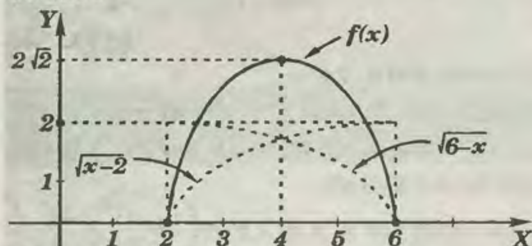
* Primero determinemos :

$$Domf=\{x\in R/6-x\geq 0\ \wedge\ x-2\geq 0\}$$

$\rightarrow Domf=\{x\in R/6\geq x\ \wedge\ x\geq 2\}$

$\rightarrow Domf=[2\,;\,6]$

*Luego grafiquemos adecuadamente en dicho dominio :



* De donde se aprecia que :

$$Ranf=[0\,;\,2\sqrt{2}]$$

RPTA: "D"

PROBLEMA 17 :

Si *f* es una función definida por :

$f(x)=\dfrac{\sqrt{4x^2-3x+2}+\sqrt[3]{x-2}}{\sqrt{3x^2-x-2}}$, entonces el dominio de *f* es :

A) R B) ϕ C) $\left\langle -\infty;-\dfrac{2}{3}\right\rangle$

D) $\left\langle -\infty;-\dfrac{2}{3}\right\rangle\cup\langle 1;\infty\rangle$ E) $\left\langle -\infty;-\dfrac{2}{3}\right]\cup[1;\infty\rangle$

RESOLUCIÓN :

* Primero determinemos :

$Domf: 4x^2-3x+2\geq 0\ \wedge\ 3x^2-x-2>0$

* Pero : $4x^2-3x+2>0,\ \forall x\in R$, pues su discriminante : $\Delta<0\ \wedge\ 4>0$

$\rightarrow Domf: 3x^2-x-2>0$

$\rightarrow (3x+2)(x-1)>0\ \rightarrow\ x<-\dfrac{2}{3}\vee x>1$

$\rightarrow Domf=\left\langle -\infty;-\dfrac{2}{3}\right\rangle\cup\langle 1;+\infty\rangle$

RPTA: "D"

PROBLEMA 18 :

Si *f* es una función definida por :

$f(x)=\sqrt{\dfrac{\sqrt{x^2-3x-4}}{\sqrt{21}-\sqrt{x^2-4}}}$, entonces el intervalo positivo del dominio de *f* es :

A) $[4\,;\,5\rangle$ B) $\langle 1\,;\,5]$ C) $\langle 2\,;\,6]$
D) $[1\,;\,\infty\rangle$ E) $\langle -\infty\,;\,2]$

RESOLUCIÓN :

* Como : $\dfrac{\sqrt{x^2-3x-4}}{\sqrt{21}-\sqrt{x^2-4}}\geq 0$

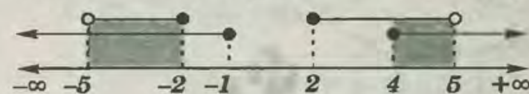
$\rightarrow x^2-3x-4\geq 0\ \wedge\ \sqrt{21}-\sqrt{x^2-4}>0$

$\rightarrow (x-4)(x+1)\geq 0\ \wedge\ \sqrt{x^2-4}<\sqrt{21}$

$\rightarrow (x\leq -1\vee x\geq 4)\ \wedge\ (x^2-4\geq 0\ \wedge\ x^2-4<21)$

$\rightarrow (x\leq -1\vee x\geq 4)\ \wedge\ (4\leq x^2<25)$

$\rightarrow (x\leq -1\vee x\geq 4)\ \wedge\ (-5<x\leq -2\ \vee\ 2\leq x<5)$



$\rightarrow x\in\langle -5;-2]\cup[4:5\rangle$

$\rightarrow Domf=\langle -5;-2]\cup[4:5\rangle$

RPTA: "A"

PROBLEMA 19 :

Si *f* es una función definida por :

$f(x)=|x-4|+|x-5|+3$, con $x\in[1\,;6]$, entonces el rango de *f* es :

A) $[4\,;10]$ B) $\langle 4\,;\,10]$ C) $[4\,;\,10\rangle$
D) $\langle 4\,;10\rangle$ E) $\langle 4\,;\infty\rangle$

RESOLUCIÓN :

* Redefiniendo :

$$f(x)=\begin{cases}4-x+5-x+3 & ;\ 1\leq x<4\\ x-4+5-x+3 & ;\ 4\leq x<5\\ x-4+x-5+3 & ;\ 5\leq x\leq 6\end{cases}$$

$$\rightarrow f(x)=\begin{cases}12-2x & ;\ 1\leq x<4\\ 4 & ;\ 4\leq x<5\\ 2x-6 & ;\ 5\leq x\leq 6\end{cases}$$

* Para la primera : $1\leq x<4\ \rightarrow\ -2\geq -2x>-8$

$\rightarrow 10\geq 12-2x>4\ \rightarrow\ Ranf_1=\langle 4;10]$

* Para la tercera : $5\leq x\leq 6\ \rightarrow\ 10\leq 2x\leq 12$

$\rightarrow 4\leq 2x-6\leq 6\ \rightarrow\ Ranf_3=[4;6]$

* Luego : $Ranf=Ranf_1\cup\{4\}\cup Ranf_3$

$\rightarrow Ranf=\langle 4;10]\cup\{4\}\cup[4;6]$

$\rightarrow Ranf=[4;10]$

RPTA: "A"

PROBLEMA 20 :

Si *f* es una función definida por :

$f(x)=|2x^2-8|x|+5|$, con $x\in[-2;2]$, entonces el rango de *f* es :

A) $[0;+\infty\rangle$ B) $[0;2]$ C) $[0;5]$
D) $[5;10]$ E) $[1;4]$

RESOLUCIÓN :

* Transformando adecuadamente :

$$f(x)=\left|2\left(|x|^2-4|x|+4\right)-3\right| \rightarrow f(x)=\left|2(|x|-2)^2-3\right|$$

* Pero como :

$$-2\le x\le 2 \rightarrow 0\le |x|\le 2$$

$$\rightarrow -2\le |x|-2\le 0 \rightarrow 4\ge (|x|-2)^2\ge 0$$

$$\rightarrow 8\ge 2(|x|-2)^2\ge 0 \rightarrow 5\ge 2(|x|-2)^2-3\ge -3$$

$$\rightarrow 5\ge \left|2(|x|-2)^2-3\right|\ge 0$$

$$\rightarrow 5\ge f(x)\ge 0 \rightarrow Ranf=[0;5]$$

RPTA: "C"

PROBLEMA 21 :

Si f es una función definida por :

$$f(x)=\begin{cases}-x^2-2x-4 & ; \quad x\le 0\\ |x-2|+3 & ; \quad 0<x\le 3\end{cases}$$, entonces el rango de f es :

A) $\langle-\infty;3\rangle\cup\langle 3;5\rangle$ B) $\langle-\infty;-3\rangle\cup\langle 3;5]$
C) $\langle-\infty;0\rangle\cup\langle 3;5\rangle$ D) $\langle-\infty;-3]\cup[3;5\rangle$

RESOLUCIÓN :

* De lo dado se obtiene :

$$f(x)=\begin{cases}-(x+1)^2-3 & ; \quad x\le 0\\ |x-2|+3 & ; \quad 0<x\le 3\end{cases}$$

* Para la primera : $x\le 0 \rightarrow x+1\le 1$

$$\rightarrow (x+1)^2\ge 0 \rightarrow -(x+1)^2\le 0$$

$$\rightarrow -(x+1)^2-3\le -3 \rightarrow f_1(x)\le -3$$

$$\rightarrow Ranf_1=\langle-\infty;-3]$$

* Para la segunda : $0<x\le 3$

$$\rightarrow -2<x-2\le 1 \rightarrow 0\le |x-2|<2$$

$$\rightarrow 3\le |x-2|+3<5 \rightarrow 3\le f_1(x)<5$$

$$\rightarrow Ranf_2=[3;5\rangle$$

* Luego: $Ranf=Ranf_1\cup Ranf_2$

$$\rightarrow Ranf=\langle-\infty;3]\cup[3;5\rangle$$

RPTA: "D"

PROBLEMA 22 :

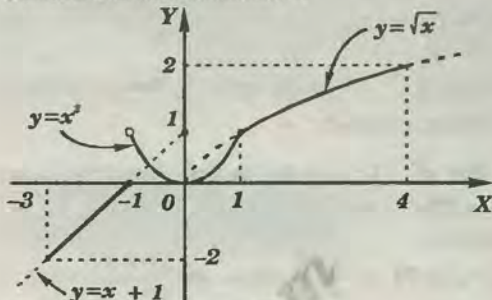
Si f es una función cuya regla de correspondencia es :

$$f(x)=\begin{cases}x+1 & ; \quad -3<x\le -1\\ x^2 & ; \quad -1<x\le 1\\ \sqrt{x} & ; \quad 1<x\le 4\end{cases}$$, entonces el rango de f es :

A) $[-3;4\rangle$ B) $\langle-3;4]$ C) $\langle-2;4]$
D) $\langle-2;2]$ E) $[-2;2]$

RESOLUCIÓN :

* Graficando adecuadamente :



* De la figura : $Ranf=\langle-2;2]$

RPTA: "D"

PROBLEMA 23 :

Si f es una función definida por :

$$f(x)=\begin{cases}5x-2 & ; \quad x>2\\ |x-1|-2 & ; \quad -2\le x\le 2\\ \dfrac{x^2}{2} & ; \quad x<-2\end{cases}$$

Entonces el rango de f es :

A) $[-2;1]\cup\langle 2;\infty\rangle$ B) $\langle-2;1\rangle\cup\langle 2;\infty\rangle$ C) $[1;2]$
D) $\langle 1;2]$ E) $\langle-1;2]$

RESOLUCIÓN :

* Analizando por partes :

I) $x>2 \rightarrow 5x>10 \rightarrow 5x-2>8$

$$\rightarrow f_1(x)>8 \rightarrow Ranf_1=\langle 8;+\infty\rangle$$

I) $-2\le x\le 2 \rightarrow -3\le x-1\le 1$

$$\rightarrow 0\le |x-1|\le 3 \rightarrow -2\le |x-1|-2\le 1$$

$$\rightarrow -2\le f_2(x)\le 1 \rightarrow Ranf_2=[-2;1]$$

III) $x<-2 \rightarrow x^2>4 \rightarrow \dfrac{x^2}{2}>2$

$$\rightarrow f_3(x)>2 \rightarrow Ranf_3=\langle 2;+\infty\rangle$$

* Luego : $Ranf=Ranf_1\cup Ranf_2\cup Ranf_3$

$$\rightarrow Ranf=\langle 8;+\infty\rangle\cup[-2;1]\cup\langle 2;+\infty\rangle$$

$$\rightarrow Ranf=[-2;1]\cup\langle 2;+\infty\rangle$$

RPTA: "A"

PROBLEMA 24 :

Si f y g son dos funciones definidas por :

$$f(x)=\begin{cases}0; & x<0\\ 1; & x\le 0\end{cases}$$

$$g(x)=\begin{cases}x^2 f\left(x^2-2x+1\right) & ; \quad x\in[-2;2]\\ (x+1)\,sgn\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right) & ; \quad x\in\langle 2;7]\end{cases}$$

Además $sgn(x)=\begin{cases}-1 & ; & x<0\\ 0 & ; & x=0\\ 1 & ; & x>0\end{cases}$, entonces el rango de g es :

A)$[2;8]$ *B)*$[-2;7]$ *C)*$[0;8]$
D)$[1;7]$ *E)*$[2;8]$

RESOLUCIÓN :

* Como $x^2-2x+1\geq 0;\ \forall x\in\mathbb{R}$, entonces :

$$f(x^2-2x+1)=1$$

* Además :

$$x\in\langle 2;7]\rightarrow \frac{x+1}{x-1}>0\rightarrow sgn\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=1$$

* Luego : $g(x)=\begin{cases}x^2 & ; & x\in[-2;2]\\ x+1 & ; & x\in\langle 2;7]\end{cases}$

I) $-2\leq x\leq 2\rightarrow 0\leq x^2\leq 4$
$\rightarrow 0\leq g_1(x)\leq 4\rightarrow Rang_1=[0;4]$
II) $2<x\leq 7\rightarrow 3<x+1\leq 8$
$\rightarrow 2<g_2(x)\leq 8\rightarrow Rang_2=\langle 2;8]$
$Rang=Rang_1\cup Rang_2$
$\rightarrow Rang=[0;4]\cup\langle 2;8]$
$\rightarrow Rang=[0;8]$

RPTA: "C"

PROBLEMA 25 :

Se define :

$f(f(x))=f_2(x),\ f(f(f(x)))=f_3(x)$ sucesivamente

Además $f_n(x)=10+f_{n-1}(x)$

Si f es creciente en todo su dominio halle $f_{2001}(10)$

A) 200 *B)* 2002 *C)* 20020 *D)* 100 *E)* 1002

RESOLUCIÓN :

* De : $f_n(x)-f_{n-1}(x)=10$
* Dando valores :

$n=2\Rightarrow f_2(x)-f_1(x)=10$
$n=3\Rightarrow f_3(x)-f_2(x)=10$
$\vdots$
$f_n(x)-f_{n-1}(x)=10$ (⊕)

$f_n(x)-f_1(x)=10(n-1)$

$\rightarrow f_n(x)=10(n-1)+f_1(x)$

* Pero : $f_2(x)=10+f_1(x)$

$$\Rightarrow f(f(x))=10+f(x)$$

* Sea $f(x)=ax+b$, evaluando $a=1\wedge b=10$
$\Rightarrow f(x)=x+10\rightarrow f_{2001}(x)=2000(10)+x+10$
$\rightarrow f_{2001}(10)=20020$

RPTA: "C"

PROBLEMA 26 :

Halle el rango de la función $f(x)$

Si : $f(x)=\begin{cases}2x-f(x)\ ;\ x\leq 1\\ xf(x)-x+1\ ;\ x<1\end{cases}$

A)$\langle -1;0\rangle$ *B)*$\langle -\infty;-100]$ *C)*$[-50;-20\rangle$
D)$\langle 0;1]$ *E)*$[1;+\infty\rangle$

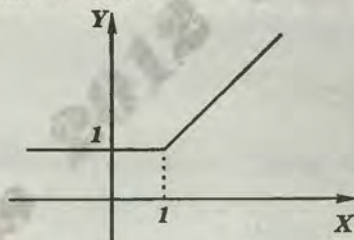
RESOLUCIÓN :

* Analizando por partes :

I) $x\geq 1\rightarrow f(x)=2x-f(x)$
* Luego $f(x)=x;\ x\geq 1$

II) $x<1\rightarrow f(x)=xf(x)-x+1;\ x<1$
* Luego : $f(x)=1;\ x<1$

La gráfica de $f(x)$:



$\rightarrow$ Rango de f es $[1;+\infty\rangle$

RPTA: "E"

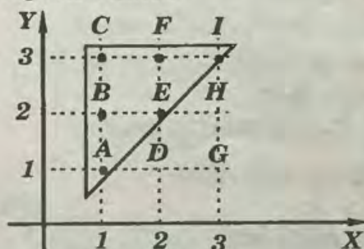
PROBLEMA 27 :

Si $f:\{1;2;3\}\rightarrow\{1;2;3\}$, ¿cuántas funciones se pueden formar tal que $\forall x\in dom f;\ f(x)\geq x$?

A) 8 *B)* 7 *C)* 9 *D)* 6 *E)* más de 9

RESOLUCIÓN :

* Veamos gráficamente :



* Del gráfico se observa que :

$f_1=\{A;E;I\}$ $f_4=\{B;F;I\}$
$f_2=\{A;F;I\}$ $f_5=\{C;F;I\}$
$f_3=\{B;E;I\}$ $f_6=\{C;E;I\}$

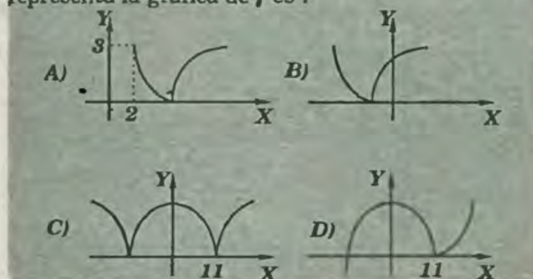
* Son las únicas funciones en la cual $f(x)\geq x$

RPTA: "D"

PROBLEMA 28 :

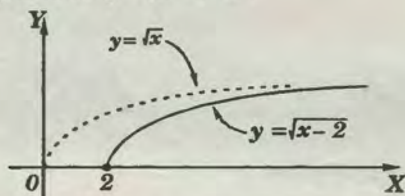
Si f es una función definida por :

$f(x) = |\sqrt{x-2}-3|$, entonces la figura que mejor representa la gráfica de f es :

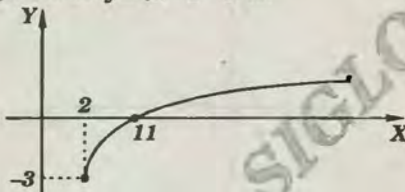


RESOLUCIÓN :

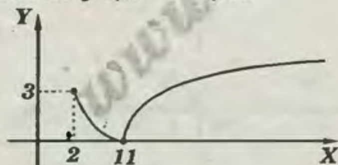
* La gráfica de $y=\sqrt{x-2}$ es :



* La gráfica de $y=\sqrt{x-2}-3$ es:



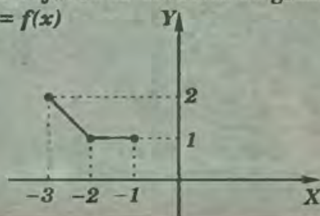
* La gráfica de $y=|\sqrt{x-2}-3|$ es:



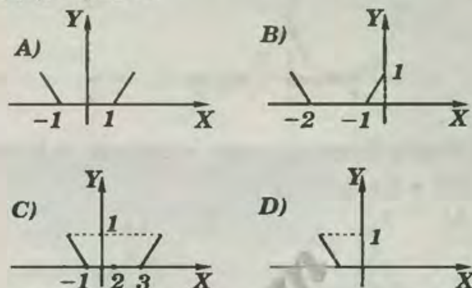
RPTA: "A"

PROBLEMA 29 :

En la figura adjunta se muestra la gráfica de la función : $y = f(x)$

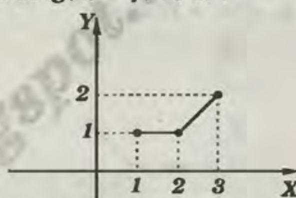


Entonces la figura que mejor representa la gráfica de $f(-|x-1|)-1$ es:

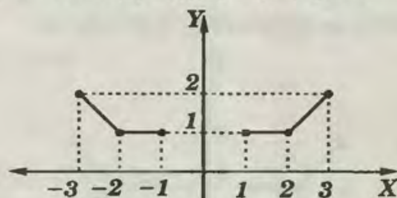


RESOLUCIÓN :

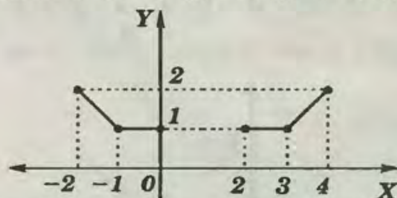
* La gráfica de $g(x) = f(-x)$ es :



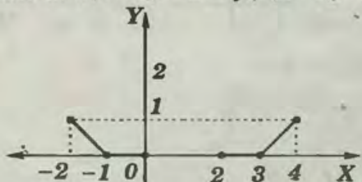
* La gráfica de $h(x)=g(|x|)=f(-|x|)$ es :



* La gráfica de $h(x-1)=g(|x-1|)=f(-|x-1|)$ es :



* La gráfica de $h(x-1)-1 = f(-|x-1|)-1$ es :

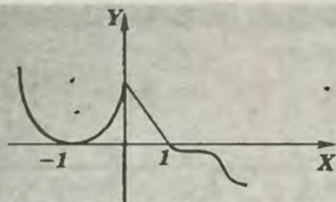


RPTA: "C"

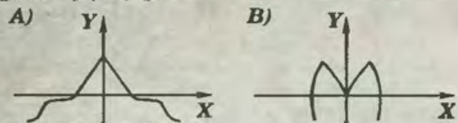
PROBLEMA 30 :

En la figura adjunta se muestra la gráfica de la función $y = f(x)$

www.SIGLO21X.blogspot.com

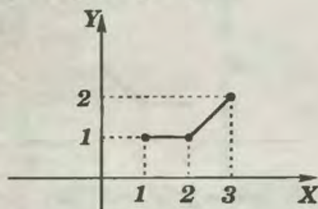


Entonces la figura que mejor representa la gráfica de $g(x) = f(1-|x|)$ es :

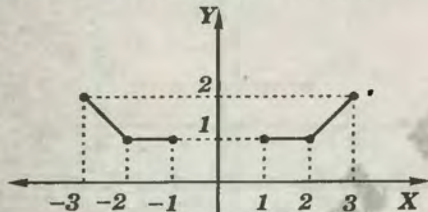


RESOLUCIÓN :

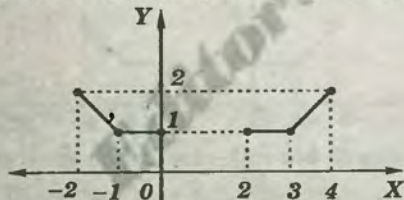
* La gráfica de $g(x) = f(-x)$ es :



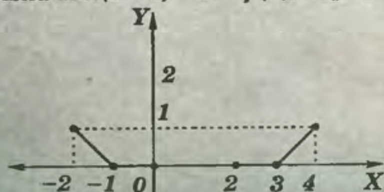
* La gráfica de $h(x) = g(|x|) = f(-|x|)$ es :



* La gráfica de $h(x-1) = g(|x-1|) = f(-|x-1|)$ es :



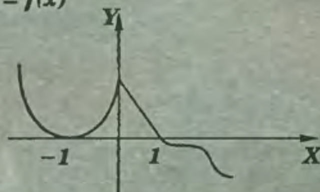
* La gráfica de $h(x-1) - 1 = f(-|x-1|) - 1$ es :



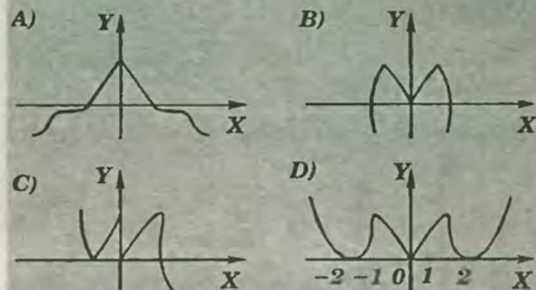
RPTA: "C"

PROBLEMA 30 :

En la figura adjunta se muestra la gráfica de la función $y = f(x)$

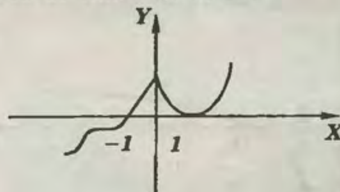


Entonces la figura que mejor representa la gráfica de $g(x) = f(1-|x|)$ es :

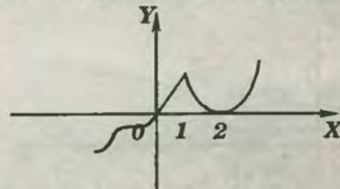


RESOLUCIÓN :

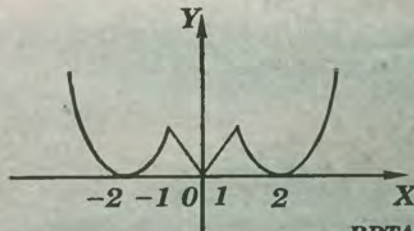
* La gráfica de $h(x) = f(-x)$ es :



* La gráfica de $h(x-1) = f(1-x)$ es :



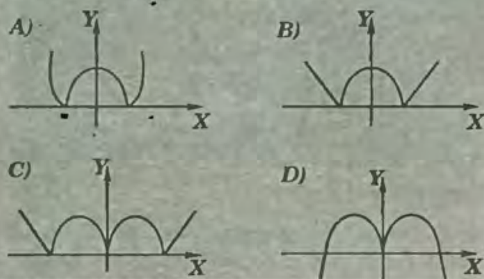
* La gráfica de $P(|x|) = f(1-|x|)$ es :



RPTA: "D"

PROBLEMA 31 :

La figura que mejor representa la gráfica de la función $f(x) = |x^2 - 2|x||$; $x \in R$ es :

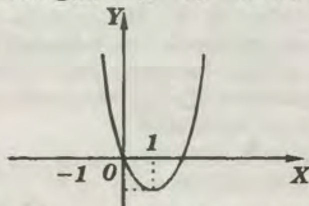


RESOLUCIÓN:

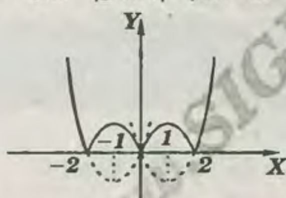
* De : $f(x) = |x^2 - 2|x||; x \in R$

$\rightarrow f(x) = |(|x|-1)^2 - 1|; x \in R$

* La gráfica de $g(x) = (x-1)^2 - 1$ es :



La gráfica de $f(x) = |g(|x|)| = |(|x|-1)^2 - 1|$ será:



RPTA: "C"

PROBLEMA 32 :

Graficar : $f(x) = sgn\left[\dfrac{(x+1)(x-4)}{\sqrt{6-x-x^2}}\right]$

RESOLUCIÓN :

* Hallamos su dominio :

$$6 - x - x^2 > 0 \Leftrightarrow (x+3)(x-2) < 0$$

$$\Leftrightarrow x \in \langle -3; 2\rangle$$

* De la definición :

$$f(x) = \begin{cases} 1; & si\ (x+1)(x-4) > 0 \\ 0; & si\ (x+1)(x-4) = 0 \\ -1; & si\ (x+1)(x-4) < 0 \end{cases}$$

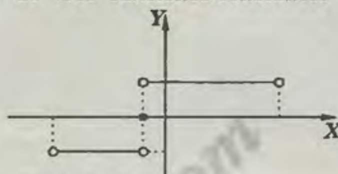
* En $x \in \langle -3\ ;\ 2\rangle \Rightarrow x - 4 < 0$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} 1; & si\ x+1 > 0 \\ 0; & si\ x+1 = 0 \\ -1; & si\ x+1 < 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow f(x) = \begin{cases} 1; & x > -1 \wedge x < 2 \\ 0; & x = -1 \\ -1; & x < -1 \wedge x > -3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} 1; & \text{si } x \in \langle -1; 2\rangle \\ 0; & \text{si } x = -1 \\ -1; & \text{si } x \in \langle -3; -1\rangle \end{cases}$$

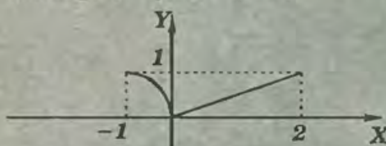
* Unión de tres funciones constantes

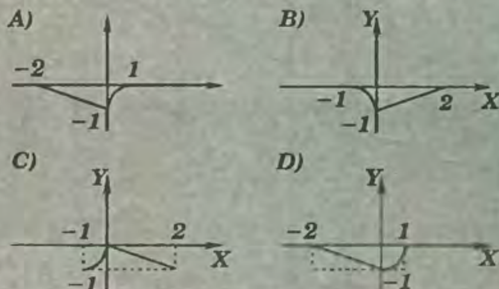


PROBLEMA 33 :

En la figura adjunta se muestra la gráfica de una función *f*.

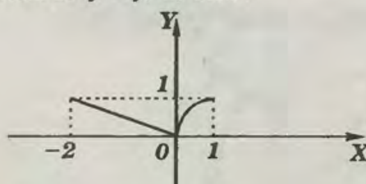
Entonces la figura que mejor representa la gráfica de la función $g(x) = f(-x) - 1$ es :



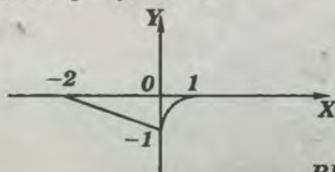


RESOLUCIÓN :

*La gráfica de $y = f(-x)$ será :



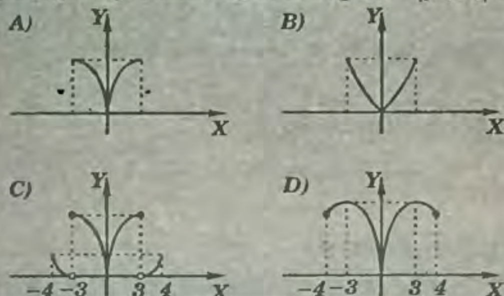
* La gráfica de $y = f(-x) - 1$



RPTA: "A"

PROBLEMA 34 :

Si f es una función definida por $f(x)=x^2-6x\,;x\in[-1;\,4]$. Entonces, la figura que mejor representa la gráfica de $g(x)=|f(|x|)|$ es:

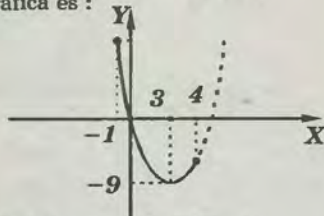


RESOLUCIÓN :

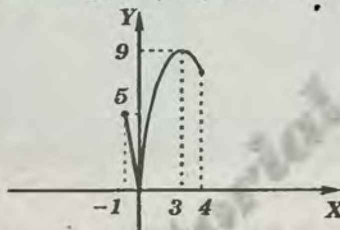
* De: $f(x)=x^2-6x;\ \ x\in[-1;4]$

$\rightarrow f(x)=(x-3)^2-9;\ x\in[-1;3]$

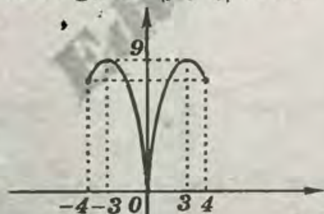
* Cuya gráfica es :



$\rightarrow$ La gráfica de $g(x)=|f(x)|$ será :



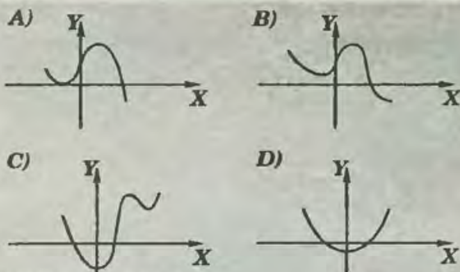
$\rightarrow$ La gráfica de $g(|x|)=|f(|x|)|$ será :



RPTA: "D"

PROBLEMA 35 :

¿Cuál de las siguientes gráficas puede ser la de una función polinomial de la forma: $P(x)=x^3+ax+b;\ a\neq 0$?



RESOLUCIÓN :

* Como, por condición, $a\neq 0$; entonces el conjunto solución de la función polinomial puede ser 3 soluciones reales o 1 solución real y 2 imaginarias.

*La solución imaginaria siempre se da en pares conjugados.

*Una solución real viene a ser una intersección de la función polinómica con el eje **X**.

*Según los gráficos **A, C** y **D** existen dos soluciones reales, lo cual implicaría una solución imaginaria de un sólo número complejo. Esto es totalmente falso ya que, como se dijo, las soluciones imaginarias vienen en pares conjugados.

*La alternativa **B** es la correcta ya que su gráfica indica una sola solución real.

RPTA: "B"

PROBLEMA 36 :

¿Cuántas soluciones tiene la ecuación:

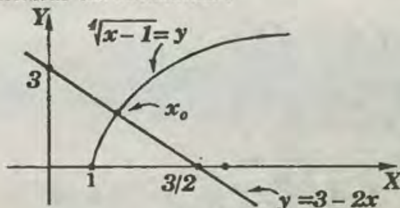
$$\sqrt[4]{x-1}+2x-3=0$$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

RESOLUCIÓN :

$$\sqrt[4]{x-1}=3-2x/x\geq 1$$

* Graficando las funciones :



*Observemos un solo punto en la intersección de las gráficas .

$\rightarrow$ Existe una sola solución real .

RPTA: "A"

PROBLEMA 37 :

Hallar los valores reales de **A** y **B** para que la función $x^3+2x^2+Ax+B=0$ tenga una raíz doble y además admita $a-4$ como raíz simple .

RESOLUCIÓN :

$x^3+2x^2+Ax+B=(x-a)^2(x+4)$

$\rightarrow x^3+2x^2+Ax+B=x^3+(4-2a)x^2+(a^2-8a)x+4a^2$

* Entonces : $2=4-2a \Rightarrow a=1$

$\rightarrow A=a^2-8a \Rightarrow A=-7 \rightarrow B=4a^2 \Rightarrow B=4$

PROBLEMA 38 :

Dada la siguiente función polinomial $p(x)=1+bx^3-ax^5-2x^7$ donde a es entero positivo y b es entero negativo, dar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I) Una raíz de $p(x)=0$ es $1/3$

II) Si $x_1<x_2$ entonces $p(x_1)<p(x_2)$

III) $p(x)=0$ tiene una sola raíz real.

RESOLUCIÓN :

I) FALSO : si $x=1/3$ *f* con raíz *1* debe ser divisor del término independiente el cual es *1* y *3* debe ser divisor del coeficiente principal el cual es *-2* y esto último es falso.

II) FALSO : veamos porqué, escribimos

$$p(x)=-(2x^7+ax^5-bx^3-1)$$

* Ahora : $x_1<x_2 \rightarrow 2x_1^7<2x_2^7$

$x_1<x_2 \rightarrow ax_1^5<ax_2^5$

$x_1<x_2 \rightarrow -bx_1^3<-bx_2^3$

$2x_1^7+ax_1^5-bx_1^3<2x_2^7+ax_2^5-bx_2^3$

* Luego :

$2x_1^7+ax_1^5-bx_1^3+1<2x_2^7+ax_2^5-bx_2^3+1$

* Entonces :

$$\underbrace{-(2_1^7+ax_1^5-bx_1^3+1)}_{p(x_1)}>\underbrace{-(2_2^7+ax_2^5-bx_2^3+1)}_{p(x_2)}$$

$x_1<x_2 \rightarrow p(x_1)>p(x_2)$

III) *VERDADERO :* en la parte *II)* probamos que *p(x)* es estrictamente decreciente y además *p(x)* es de grado impar y por lo tanto tiene al menos una raiz real, pero al ser estrictamente decreciente la raíz real es única.

PROBLEMA 39 :

De la ecuación $p(x)=4x^4+1=0$ se afirma.

I) Tiene cuatro raíces reales.

II) Sobre los números reales el polinomio *p(x)* tiene exactamente dos factores primos.

III) Tiene dos raíces que son números racionales.

RESOLUCIÓN :

I) $p(x)=4x^4+1$ se puede escribir en la forma

$$p(x)=4x^4+4x^2+1-4x^2=(2x^2+1)^2-4x^2$$
$$=(2x^2+1+2x)(2x^2+1-2x)$$
$$=(2x^2+2x+1)(2x^2-2x+1)$$

$\rightarrow p(x)=(2x^2+2x+1)(2x^2-2x+1)$

* Cada factor cuadrático tiene discriminante negativo, entonces las raíces de *p(x)* son números complejos , luego :

I) FALSO

II) VERDADERO : porque los factores de *p(x)*, son $2x^2+2x+1, 2x^2-2x+1$ y estos son primos .

III) FALSO : por lo desarrollado en *I* .

PROBLEMA 40 :

Sea : $f(x)=\begin{cases}0, & x\in\langle 0;1\rangle \\ 1, & x\in[1;2\rangle\cup\langle 4;5\rangle \\ 2, & x=2 \\ 3, & x\in\langle 2;3\rangle\end{cases}$

Entonces *f(x)* es :

A) No creciente en $\langle 0;2]$

B) No creciente en $\langle 2;5\rangle$

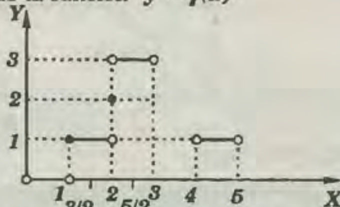
C) No decreciente en $\langle 2;5\rangle$

D) Constante en $\langle 1;3\rangle$

E) No decreciente en $\langle 3/2;5/2\rangle$

RESOLUCIÓN :

* Graficando la función $y=f(x)$



*Una función es no creciente en un intervalo si se mantiene constante o es decreciente: en cambio, es no decreciente si es creciente o es constante .

*Analizando en cada uno de los tramos propuestos.

A) Tramo $\langle 0;2]$: *f(x)* es creciente

B) Tramo $\langle 2;5\rangle$

No se puede afirmar nada ya que *f(x)* no existe en $[3;4]$.

C) Similar a la parte ***B***

D) Tramo $\langle 1;3\rangle$: *f(x)* es creciente

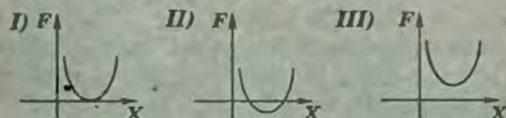
E) Tramo $\langle 3/2;5/2\rangle$

f(x) es creciente, y por lo tanto no decreciente .

RPTA: "E"

ROBLEMA 41 :

Dada la función f, cuya regla de correspondencia es: $f(x)=x^2-2x+a$, entonces podemos afirmar que los gráficos adjúntos corresponde :



A) El gráfico I ocurre cuando $a>1$
B) El gráfico II ocurre cuando $a<1$
C) El gráfico III ocurre cuando $a=1$
D) El gráfico I ocurre cuando $a<1$
E) El gráfico II ocurre cuando $a>1$

RESOLUCIÓN :

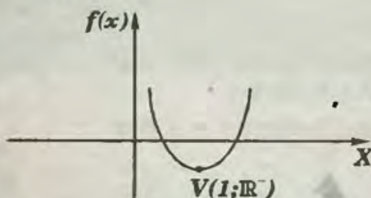
*A la función $f(x)=x^2-2x+a$ podemos representarlo : $[y-(a-1)]=(x-1)^2$

*Donde el vértice de esta parábola esta representado por el punto : $V=(1;a-1)$

* Si : $a=1\Rightarrow V=(1;0)$

$a>1\Rightarrow V=(1;R^+)$

$a<1\Rightarrow V=(1;R^-)$



* Luego , el gráfico **II** ocurre cuando $a<1$

RPTA: "A"

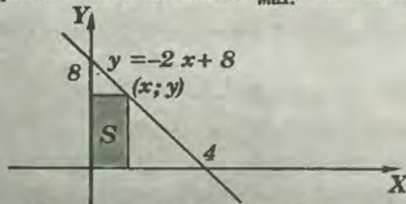
PROBLEMA 42 :

Un rectángulo tiene dos de sus lados sobre los ejes coordenados y el cuarto sobre la recta de ecuación $y=-2x+8$. El área máxima que puede tener el rectángulo es igual a:

A) 8 B) 9 C) 10 D) 11 E) 12

RESOLUCIÓN :

*Nos piden el área máxima $(S_{máx.})$ del rectángulo :



* Del gráfico, el área del rectángulo es :

$S=xy$ donde : $y=-2x+8$

* Reemplazando "y" en S, el área en función de x es:

$$S=x(-2x+8)\rightarrow S=-x^2+8x$$

$$\rightarrow S=8-\underbrace{(x-2)^2}_{0};\quad 0\le x\le 4$$

* Entonces, el área será máxima cuando $x=2$ siendo $S=8$.

* Por tanto el área máxima es **8**.

RPTA: "A"

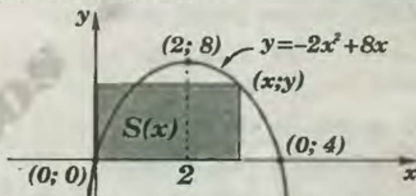
PROBLEMA 43 :

El rectángulo de mayor área , en el primer cuadrante , con dimensiones enteras , cuyos lados son paralelos a los ejes , dos de ellos sobre los ejes y un vértice en la parábola de ecuación $y=-2x^2+8x$, tiene como área :

A) 6 B) 12 C) 14 D) 16 E) 18

RESOLUCIÓN :

* Nos piden el área máxima del rectángulo , para $x\in Z$ y $x\in$ a la parábola.



* De la figura : $S(x)=xy=-2x^3+8x^2$

* $S(x)$: Área del rectángulo en función de x .

* En el primer cuadrante x toma los siguientes valores :

$x=0$: $S(x)=0$ $\quad$ $x=3$: $S(x)=18$

$x=1$: $S(x)=6$ $\quad$ $x=4$: $S(x)=0$

$x=2$: $S(x)=16$

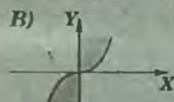
$\rightarrow S(x)$ máximo es **18**.

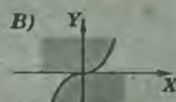
RPTA: "E"

PROBLEMA 44 :

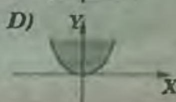
La gráfica del conjunto :

$$A=\left\{(x;y)/\frac{x}{|x|}y\le x^2\right\}\cup\{(0;0)\}\text{ es :}$$





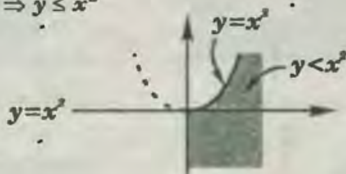




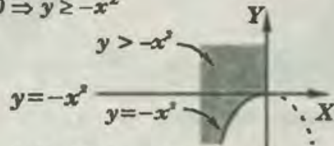
RESOLUCIÓN :

* De **A** :

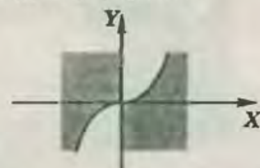
I) Si : $x > 0 \Rightarrow y \leq x^2$



II) Si: $x < 0 \Rightarrow y \geq -x^2$



* Finalmente *(I)* **U** *(II)* queda :



RPTA: "C"

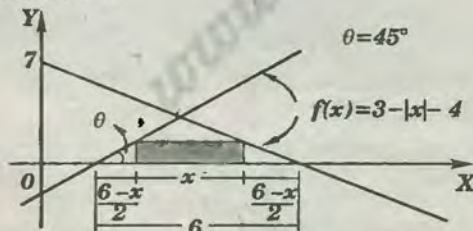
PROBLEMA 45 :

En la región determinada por el eje x y la grafica de la función f tal que $f(x) = 3 - |x - 4|$, se inscribe un rectángulo , una de cuyas bases está sobre el eje x y los otros dos vértices están en la gráfica de f. Hallar la medida del área máxima de dicho rectángulo .

A) $(3/2)u^2$ *B)* $2u^2$ *C)* $(9/4)u^2$ *D)* $4u^2$ *E)* $(9/2)u^2$

RESOLUCIÓN :

* Graficando :



$$\text{Área} = x\left(\frac{6-x}{2}\right) = -\frac{1}{2}(x^2 - 6x)$$

$$\rightarrow \text{Área} = -\frac{1}{2}\left[(x-3)^2 - 9\right]$$

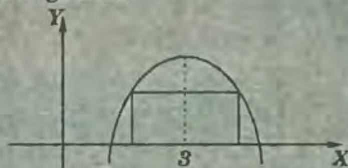
$$\rightarrow \text{Área} = -\frac{1}{2}(x-3)^2 + \frac{9}{2};\ \text{para } x = 3$$

$$\Rightarrow A_{máxima} = \frac{9}{2}u^2$$

RPTA: "E"

PROBLEMA 46 :

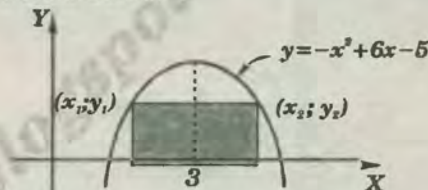
La gráfica adjunta corresponde a $y = -x^2 + 6x - 5$. Se inscribe un rectángulo con lados paralelos a los ejes coordenados. Entonces la expresión para el área de ese rectángulo es :



A) $2(x-3)\left[4-(x-3)^2\right]$ *B)* $(3-x)\left[2-(x-3)^2\right]$

C) $(3-x)\left[4-(x-3)^2\right]$ *D)* $(3-x)\left[2-\left(\frac{x-3}{2}\right)^2\right]$

RESOLUCIÓN :



* El área del rectángulo está dado por:

$S = y_2(x_2 - x_1)$ .... *(*)*

* Donde : $x_1,\ x_2,\ y_2 \in y = -x^2 + 6x - 5$
* En el punto $(x_1; y_2) : y_2 = -x_1^2 + 6x_1 - 5$ ....*(I)*
* En el punto $(x_2; y_2) : y_2 = -x_2^2 + 6x_2 - 5$ ...*(II)*
* De *(I)* y *(II)* :

$$-x_1^2 + 6x_1 - 5 = -x_2^2 + 6x_2 - 5$$

$$x_2^2 - x_1^2 + 6(x_1 - x_2) = 0$$

$$\rightarrow (x_2 - x_1)(x_1 + x_2 - 6) = 0$$

$$\rightarrow x_1 = 6 - x_2$$

* Reemplazando en *(*)* tenemos:

$$S = y_2\left[x_2 - (6 - x_2)\right]$$

$$S = y_2(2x_2 - 6) = 2y_2(x_2 - 3) \text{ ....} (III)$$

* De *(II)* y *(III)* :

$$S = 2\left(-x_2^2 + 6x_2 - 5\right)(x_2 - 3)$$

* En general para un $x \in y = -x^2 + 6x - 5$

$$S = 2\left(-x^2 + 6x - 5\right)(x - 3)$$

$$\rightarrow S = 2(x-3)\left[4-(x-3)^2\right]$$

RPTA: "A"

PROBLEMA 47 :

Si S es una relación definida por :

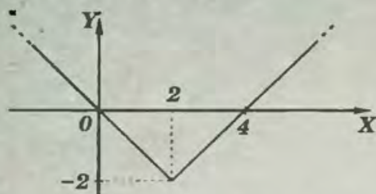
$S = \{(x; y) \in R \times R / y = ||x-2| - 2| - 3\}$, entonces

el área *(en u^2)* de la región limitada por la gráfica de S y el eje X es :

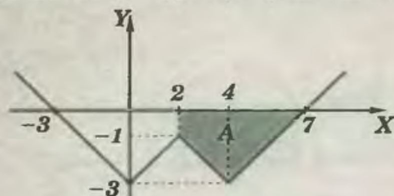
A) 17 *B) 16* *C) 15* *D) 14 .* *E) 13*

RESOLUCIÓN :

* De $S=\{(x;y)\in R\times R\,/\,y=\|x-2|-2|-3\}$
* La gráfica de : $y=|x-2|-2$ es :



→La gráfica de $y=||x-2|-2|-3$ será :



* El área pedida será **2A** , entonces :

$$2A=2(\square+\triangledown)=2\left(\left(\frac{3+1}{2}\right)\cdot 2+\frac{3\times 3}{2}\right)u^2$$

$\rightarrow 2A=17u^2$

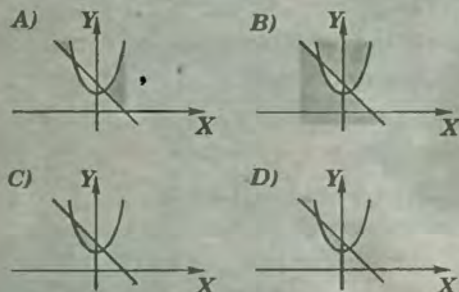
RPTA: "A"

PROBLEMA 48 :

Sea : $A=\{(x;y)\,/\,y<2x^2+3\}$

$B=\{(x;y)\,/\,y>-4/5x+4\}$

una de las regiones sombreadas adjunta representa $(A-B)\cup(B-A)$

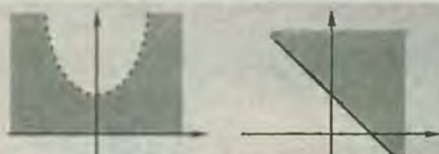


RESOLUCIÓN :

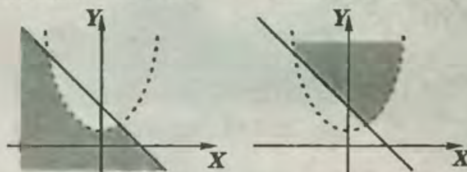
* Graficando el conjunto **A** y **B :**

$A=\{(x;y)/y<2x^2+3\}$

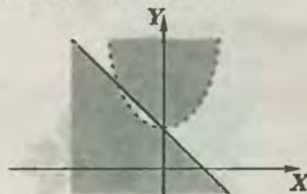
$B=\{(x_1;y)/y>4/5x+4\}$



* Graficando $A-B$: * Graficando $B-A$:



* Finalmente : $(A-B)\cup(B-A)$



RPTA: "B"

PROBLEMA 49 :

Sea el siguiente sistema de inecuaciones :

$3x^2+2y<4$ .... (α)

$2x-3y^2<-2$ .... (β)

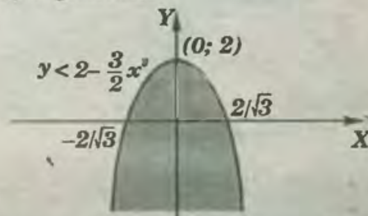
Entonces, el conjunto solución está representado por la región .



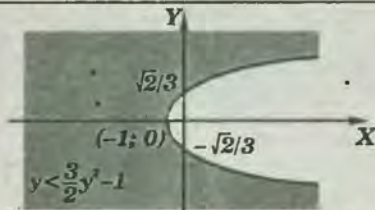
A) I *B) II* *C) III* *D) IV* *E) V*

RESOLUCIÓN :

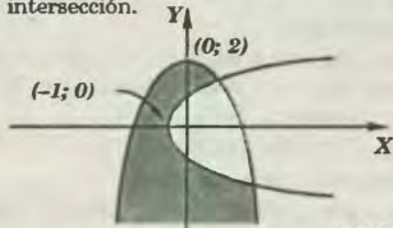
* De *(α)* : graficamos



* La región sombreada nos representa el conjunto solución de *(I)*
* De *(β)* graficamos :



* La región sombreada nos representa la solución de (α). Entonces, la solución del sistema está dada por la intersección.



RPTA: "D"

PROBLEMA 50 :

Sean f y g funciones tales que:

$f(x) = 3x - 1;\ x \in \langle -6;5]$

$g(x) = x^3 + 1;\ x \in [-4;2\rangle$

Halle : $f + g$, gráfica dominio , rango .

RESOLUCIÓN:

* $Dom(f+g) = Domf \cap Domg$

$\rightarrow Dom(f+g) = [-4;2\rangle$

* Luego :

$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$

$\rightarrow (f+g)(x) = x^3 + 3x;\ x \in [-4;2\rangle$

* $Ran(f+g):\ y = x^3 + 3x$

$\rightarrow x^2 + 3x = \frac{1}{4}[4x^2 + 12x + 9 - 9] = \frac{1}{4}[(2x+3)^2 - 9]$

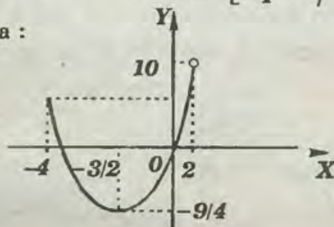
* Como: $-4 < x < 2 \Rightarrow -8 < 2x < 4$

$\Rightarrow -5 < 2x + 3 < 7 \Rightarrow 0 < (2x+3)^2 < 49$

$\Rightarrow -9 \le \underbrace{(2x+3)^2 - 9}_{4y} < 40 \Rightarrow -9 \le 4y < 40$

$-\frac{9}{4} \le y < 10 \Rightarrow Ran(f+g) = \left[-\frac{9}{4};10\right\rangle$

* Gráfica :



PROBLEMA 51 :

Sean «f» y «g» dos funciones definidas por :

$f = \{(2;1), (-2;3), (1;5), (-3;4), (7;8)\}$

$g = \{(3;-2), (7;2), (-3;1), (2;4)\}$

Entonces la función $\left(\frac{f}{g}\right) \cap (f \cdot g)$ es:

A) $\{(2;-3)\}$ B) $\{(-2;4)\}$ C) $\{(-3;1)\}$
D) $\{(-3;4)\}$ E) $\{(-1;8)\}$

RESOLUCIÓN :

$Domf = \{2;-2;1;-3;7\}$

$Domg = \{3;7;-3;2\}$

Nótese que : $g(x) \neq 0, \forall x \in Domg$

$*Dom\left(\frac{f}{g}\right) = Domf \cap Domg = \{2;-3;7\}$

$x = 2:\ \left(\frac{f}{g}\right)_{(2)} = \frac{f_{(2)}}{g_{(2)}} = \frac{1}{4}$

$x = -3:\ \left(\frac{f}{g}\right)_{(-3)} = \frac{f_{(-3)}}{g_{(-3)}} = \frac{4}{1} = 4$

$x = 7:\ \left(\frac{f}{g}\right)_{(7)} = \frac{f_{(7)}}{g_{(7)}} = \frac{8}{2} = 4$

$\frac{f}{g} = \left\{\left(2;\frac{1}{4}\right), (-3;4), (7;4)\right\}$

* $Dom(fg) = Domf \cap Domg = \{2;-3;7\}$

$x = 2:\ (fg)_{(2)} = f_{(2)} \cdot g_{(2)} = 1 \times 4 = 4$

$x = -3:(fg)_{(-3)} = f_{(-3)} \cdot g_{(-3)} = 4 \times 1 = 4$

$x = 7:\ (fg)_{(7)} = f_{(7)} \cdot g_{(7)} = 8 \times 2 = 16$

$\rightarrow fg = \{(2;4), (-3;4), (7;16)\}$

* Luego : $\left(\frac{f}{g}\right) \cap (fg) = \{(-3;4)\}$

RPTA: "D"

PROBLEMA 52 :

Sean f y g dos funciones definidas por :

$f(x) = |x^2 - 6x| + |x - 3| + x;\ x \in [0;3]$

$g(x) = x\ |x| - 6;\ x \in \langle -2;4]$

Entonces , al función $(f+g)$ es :

A) $6x - 3;\ x \in [0;3]$ B) $6x + 3;\ x \in [0;3]$
C) $-6x + 3;\ x \in [0;3]$ D) $-6x - 3;\ x \in [0;3]$

RESOLUCIÓN :

* $Dom(f+g) = Domf \cap Domg$

$\rightarrow Dom(f+g) = [0;3] \cap \langle -2;4] = [0;3]$

* Con esto : $x^2 - 6x < 0 \wedge x - 3 < 0$

$\rightarrow f(x) = 6x - x^2 + 3 - x + x = -x^2 + 6x + 3$

$\wedge g(x) = x(x) - 6 = x^2 - 6$

www.SIGLO21.blogspot.com

$(f+g)_{(x)} = f_{(x)} + g_{(x)} = -x^2 + 6x + 3 + x^2 - 6$

$\rightarrow (f+g)_{(x)} = 6x - 3\ ;\ x \in [0\ ;\ 3]$

RPTA: "A"

PROBLEMA 53 :

Si H y G son dos funciones definidas por :

$$H(x) = \begin{cases} x^2 - 3 & ;\ x < -1 \\ 2x - 4 & ;\ x > 2 \end{cases}$$

$G = \{(-3;4), (-2;-2), (-1;3), (2;7), (3;6), (4;10), (5;9)\}$

Entonces, el rango de la función $(H-G)$ es :

A) $\{2;-2;1;-4;6\}$ B) $\{1;2;-3;-5\}$ C) $\{3;4;-6;-2\}$
D) $\{2;3;-4;-6\}$ E) $\{2;3;-3;-4;-6\}$

RESOLUCIÓN :

* $DomH = \langle -\infty;-1\rangle \cup \langle 2;+\infty\rangle$
* $DomG = \{-3;-2;-1;2;3;4;5\}$
* $Dom(H-G) = DomH \cap DomG$

$\rightarrow Dom(H-G) = \{-3;-2;3;4;5\}$

$x = -3:\ (H-G)_{(-3)} = H_{(-3)} - G_{(-3)} = 6 - 4 = 2$

$x = -2:\ (H-G)_{(-2)} = H_{(-2)} - G_{(-2)} = 1 - (-2) = 3$

$x = 3:\ (H-G)_{(3)} = H_{(3)} - G_{(3)} = 2 - 6 = -4$

$x = 4:\ (H-G)_{(4)} = H_{(4)} - G_{(4)} = 4 - 10 = -6$

$x = 5:\ (H-G)_{(5)} = H_{(5)} - G_{(5)} = 6 - 9 = -3$

* Luego : $Ran(H-G) = \{2;3;-4;-6;-3\}$

RPTA: "E"

PROBLEMA 54 :

Sea f una función definida por :

$$f(x) = \begin{cases} -4x + 7 & ;\ x < 0 \\ 4x + 1 & ;\ 0 \le x < 2 \\ 2x + 3 & ;\ x \ge 2 \end{cases}$$

Si $r \in \left\langle \frac{3}{4};1 \right\rangle$, entonces el valor de $M = f(4r) - f(2r-1)$ es:

A) 8 B) 6 C) $16r+7$ D) $16r-4$ E) $16r-9$

RESOLUCIÓN :

* De : $r \in \left\langle \frac{3}{4};1 \right\rangle \rightarrow \frac{3}{4} < r < 1$
* $3 < 4r < 4 \rightarrow f(4r) = 2(4r) + 3$
* $\frac{3}{4} < 2r < 2 \rightarrow \frac{1}{2} < 2r - 1 < 1$

$\rightarrow f(2r-1) = 4(2r-1) + 1$

* Entonces : $M = f(4r) - f(2r-1)$

$\rightarrow M = 8r + 3 - (8r - 3) = 6$

RPTA: "B"

PROBLEMA 55 :

Sea f la función tal que : $f(x) = \begin{cases} x^2 & ,\ 0 \le x < 2 \\ 2x + 1 & ,\ 2 \le x < 5 \end{cases}$

Si $1 < x < 3/2$, hallar el valor de :

$$f(2x-1) - f(2x^2)$$

A) $2x^2 + 2x - 1$ B) $-4x$ C) $4x^2 - 6x$
D) $-1 - 4x$ E) $x^2 - 2x - 1$

RESOLUCIÓN :

* Para hallar $f(2x-1)$ debemos acotar, en primer lugar, $2x - 1$.
* De la condición :

$1 < x < 3/2 \Rightarrow 2 < 2x < 3 \Rightarrow 1 < 2x - 1 < 2$

* Como se observa , tiene la forma de la primera ecuación , Luego :

$f(2x-1) = (2x-1)^2 = 4x^2 - 4x + 1$

* Análogamente , para $2x^2$

$1 < x < 3/2 \Rightarrow 1 < x^2 < 9/4 \Rightarrow 2 < 2x^2 < 9/2$

* En este caso tiene la forma de la segunda ecuación, Luego :

$f(2x^2) = 2(2x^2) + 1 = 4x^2 + 1$

* Finalmente : $f(2x-1) - f(2x^2) = 4x^2 - 4x + 1 - 4x^2 - 1 = -4x$

PROBLEMA 56 :

Dadas las funciones :

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 4};\ g(x) = \frac{1}{\sqrt{x-2}}$$

Hallar el rango de $f(x)\,g(x)$.

A) $\langle 2\ ;\ 4\rangle$ B) $\langle 2\ ;+\infty\rangle$ C) $\langle -\infty\ ;-2\rangle$
D) $\langle -4\ ;-2\rangle$ E) $\langle 0\ ;+\infty\rangle$

RESOLUCIÓN :

* De : $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}\ \ ;\ x^2 - 4 > 0$

$\Rightarrow Domf(x) = \langle -\infty;-2] \cup [2\infty\rangle$

* De: $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x-2}}\ \ ;\ x - 2 > 0$

$\Rightarrow Domg(x) = \langle 2\ ;\ \infty\rangle$

* Luego : $f(x).g(x) = \sqrt{x^2-4}.\frac{1}{\sqrt{x-2}}$

$\rightarrow f(x).g(x) = \sqrt{x+2}.\sqrt{x-2}.\frac{1}{\sqrt{x-2}}$

$\rightarrow f(x).g(x) = \sqrt{x+2}$

* $Domf(x).g(x) = Domf(x) \cap Domg(x)$

$= \{\langle -\infty;-2] \cup [2;\infty\rangle\} \cap \langle 2;\infty\rangle$

$= \langle 2\ ;\ \infty\rangle$

$\Rightarrow Ranf(x).g(x) = \langle 2;\infty\rangle$

RPTA: "B"

PROBLEMA 57 :

Sean las funciones :

$G = \{(3;9), (4;16), (5;25), (6;36)\}$

$GoF=\{(1;9), (2;16), (3;25), (4;36)\}$

Obtener F

A) $F = \{(1;4), (2;3), (3;5), (4;6)\}$
B) $F = \{(1;2), (2;4), (3;6), (4;5)\}$
C) $F = \{(1;3), (2;4), (4;6), (5;5)\}$
D) $F = \{(1;3), (2;4), (3;5), (4;36)\}$
E) $F = \{(1;3), (2;4), (3;5), (4;6)\}$

RESOLUCIÓN :

* Si: $G = \{(3;9), (4;16), (5;25), (6;36)\}$

$\Rightarrow G(x) = x^2$

$GoF= \{(1;9), (2;16), (3;25), (4;36)\}$

$\Rightarrow GoF= G[F(x)] = (x + 2)^2$

$\Rightarrow F(x) = x + 2$

$F = \{(1;3), (2;4), (3;5), (4;6)\}$

RPTA: "E"

PROBLEMA 58 :

Sean f y g dos funciones definidas por :

$f = \{(2;3), (0;-1), (4;5), (1;-1)\}$

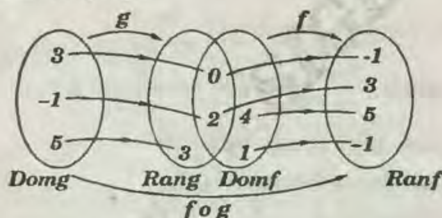
$g = \{(3;0), (-1;2), (5;3)\}$

Entonces, el $ran(f \circ g) \cap ran(g \circ f)$ es :

A) $\{3\}$ B) $\{-1;3\}$ C) $\{0;2;3\}$ D) ϕ

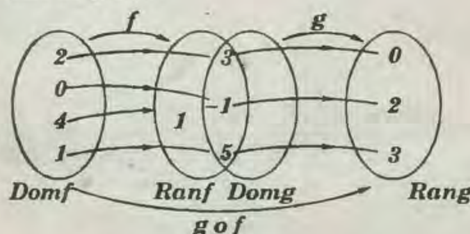
RESOLUCIÓN :

* Cálculo de $f \circ g$:



$\rightarrow f \circ g = \{(3;-1), (-1;3)\}$

Cálculo de $g \circ f$:



$\rightarrow g \circ f = f(2 ; 0), (0 ; 2), (4 ; 3)$

* Luego : $Ran(f \circ g) = \{-1; 3\}$

$\rightarrow Ran(g \circ f) = \{0 ;2 ; 3\}$

$Ran(f \circ g) \cap Ran(g \circ f) = \{3\}$

RPTA: "A"

PROBLEMA 59 :

En la siguiente tabla aparecen valores de las funciones F y H.

x	5	6	7	8
$F(x)$	8	7	6	5
$H(x)$	7	8	6	5

Entonces, el valor de $\left[\dfrac{(H+F)oF-2}{HoH}\right](6)$ es:

A) -1 B) 1 C) 0 D) 2 E) 3

RESOLUCIÓN :

* Se pide : $\dfrac{(H+F)oF_{(6)} - 2_{(6)}}{HoH_{(6)}}$ ....(I)

* De la tabla :

* $(H+F)\circ F_{(6)} = (H+F)_{(F(6))} = (H+F)_{(7)}$
$= H_{(7)} + F_{(7)} = 6 + 6 = 12$

* $H\circ H_{(6)} = H(H_{(6)}) = H_{(8)} = 5$

* En (I) : $\left(\dfrac{(H+F)oF-2}{HoH}\right)(6) = \dfrac{12-2}{5} = 2$

RPTA: "D"

PROBLEMA 60 :

San f y g dos funciones definidas por :

$f(x) = \sqrt{x+1}$; $x \in [-1;3]$

$g(x) = x^2 + 2x$; $x \in [0;5]$

Entonces , el dominio de $f \circ g$ es:

A) $\langle 0 ; 1\rangle$ B) $[0 ; 1]$ C) $[-1 ; 1]$
D) $\langle -2 ; 5]$ E) $\langle -1 ; 1]$

RESOLUCIÓN :

* $Dom(f \circ g) = \{x / x \in Domg \wedge g_{(x)} \in Domf\}$

$\rightarrow Dom(f \circ g) = \{x/x \in [0;5] \wedge (x^2 + 2x) \in [-1;3]\}$

* Pero:

$x^2 + 2x \in [-1;3] \rightarrow -1 \leq x^2 + 2x \leq 3$

$\rightarrow 0 \leq x^2 + 2x + 1 \leq 4 \rightarrow (x + 1)^2 \leq 4$

$\rightarrow -2 \leq x + 1 \leq 2 \qquad \rightarrow -3 \leq x \leq 1$

$\rightarrow Dom(f \circ g) = \{x/x \in [0;5] \wedge x \in [-3;1]\}$

$\rightarrow Dom(f \circ g) = [0;1]$

RPTA: "B"

PROBLEMA 61 :

Si f es una función definida por :

$f=\left\{\left(x;\frac{1}{x-1}\right)/x\in\langle-\infty\,0]\right\}$, entonces la función $(f\circ f)$ es:

A) $\left\{\left(x;\frac{1}{x}\right)/x<0\right\}$ B) $\left\{\left(x;\frac{x-1}{2-x}\right)/x\in\langle-\infty;0]\right\}$

C) $\left\{\left(x;\frac{2-x}{x-1}\right)/x\leq0\right\}$ D) $\left\{\left(x;\frac{x+1}{2+x}\right)/x\in[0;+\infty\rangle\right\}$

RESOLUCIÓN :

* La función dada es : $f(x)=\frac{1}{x-1}\ ;\ x\leq0$

* $Dom(f\circ f)=\{x/x\in Domf\wedge f(x)\in Domf\}$

$Dom(f\circ f)=\{x/x<0\wedge\frac{1}{x-1}<0\}$

*Pero : $\frac{1}{x-1}<0\rightarrow x-1<0\rightarrow x<1$

$\rightarrow Dom(f\circ f)=\{x/x<0\wedge x<1\}$

$\rightarrow Dom(f\circ f)=\{x/x<0\}$

* $f\circ f(x)=f(f(x))=f\left(\frac{1}{x-1}\right)=\frac{1}{\frac{1}{x-1}-1}$

$\rightarrow f\circ f(x)=\frac{x-1}{2-x}$

$\rightarrow f\circ f=\left\{\left(x;\frac{x-1}{2-x}\right)/x\leq0\right\}$

RPTA: "B"

PROBLEMA 62 :

Hallar todas las funciones lineales $f(x)$ que verifican la condición

$$(f\circ f)\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{9-4x}{x};\ \forall x\neq0$$

Dar como respuesta el producto de la suma de coeficientes de la primera función con la suma de coeficientes de la otra función.

A) 0 B) –3 C) –2 D) 3 E) 1

RESOLUCIÓN :

* De : $(f\circ f)\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{9-4x}{x}=9\left(\frac{1}{x}\right)-4$

$\rightarrow(f\circ f)(x)=9x-4$

* Como $f(x)$ es lineal , sea $f(x)=ax+b$

$\rightarrow f\circ f(x)=f(f(x))=f(ax+b)=$

$=a(ax+b)+b=a^2x+ab+b$

* Luego : $9x-4=a^2x+ab+b$

$\rightarrow a^2=9\wedge ab+b=-4$

$\rightarrow(a=3\vee a=-3)\wedge b(a+1)=-4$

$\rightarrow(a=3\wedge b=-1)\vee(a=-3\wedge b=2)$

* De donde: $f_1(x)=3x-1$

$f_2(x)=-3x+2$

* Se pide : $(3-1)(-3+2)=-2$

RPTA: "C"

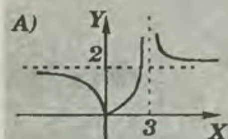
PROBLEMA 63 :

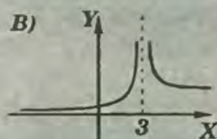
si f y g son dos funciones definidas por :

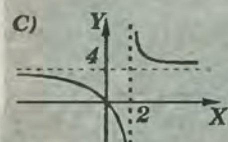
$$f(x)=|x|-1$$

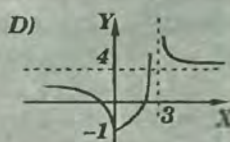
$$g(x)=\frac{4x}{x-3}$$

Entonces, la figura que mejor representa la gráfica de $(f\circ g)$ es:

A)


B)


C)


D)


RESOLUCIÓN :

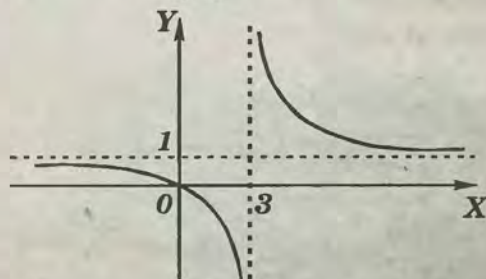
* De: $(f\circ g)_{(x)}=f(g(x))=f\left(\frac{4x}{x-3}\right)$

$\rightarrow f(g(x))=\left|\frac{4x}{x-3}\right|-1=4\left|1+\frac{3}{x-3}\right|-1$

* Donde $Dom(f\circ g)=\mathbb{R}-\{3\}$

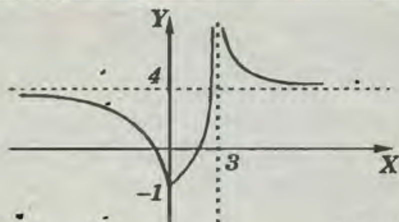
y su gráfica se obtiene así:

La gráfica de $y=\frac{3}{x-3}+1$ es :



$\rightarrow$ La gráfica de $y=4\left|1+\frac{3}{x-3}\right|-1$

Será :



RPTA: "D"

PROBLEMA 64 :

Si f es una función definida por :

$$f(x)=\begin{cases}5-2|x|^2 & ; |x|\le 1\\ \dfrac{3}{|x|} & ; |x|>1\end{cases}$$

Entonces, indicar el valor de verdad, de las siguientes afirmaciones:

I) f es una función impar

II) f es una función par

III) f es decreciente en $\langle 0;+\infty\rangle$

A) FVV *B) VVF* *C) VFV* *D) VFF* *E) FVF*

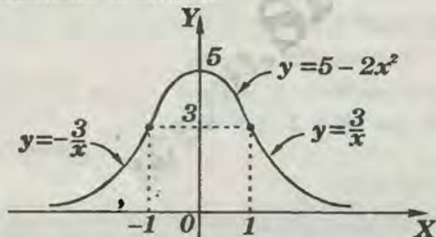
RESOLUCIÓN :

* $Domf = \mathbb{R} \rightarrow \forall x \in Domf : -x \in Domf$

$$*f(-x)=\begin{cases}5-2|-x|^2\\ \dfrac{3}{|x|}\end{cases}=\begin{cases}5-2|x|^2\\ \dfrac{3}{|x|}\end{cases}=f(x)$$

→ f es una función par.

→ Graficando la función:



* Luego:

I) f no es impar .... (*FALSA*)

II) f es par .... (*VERDADERA*)

III) f es decreciente en $\langle 0;+\infty\rangle$ ..... (*VERDADERA*)

RPTA: "A"

PROBLEMA 65 :

Indicar el valor de cada una de las siguientes proposiciones :

p : Si *f* y *g* son dos funciones no acotadas sobre **A**, entonces *(f + g)* no es acotada sobre **A**.

q : Si *f* no es acotada sobre **A** , entonces $|f|$ es acotada sobre **A** .

r : Si *f* y *g* son dos funciones no acotadas sobre **A**, entonces $|f+g|$ no es acotada sobre **A**.

A) VVV *B) FFF* *C) VFF* *D) FFV* *E) FVF*

RESOLUCIÓN :

I) Si *f* y *g* son dos funciones no acotadas sobre A → *(f+g)* puede ser o no acotada en **A**. Por ejemplo $f(x) = x + 1 \wedge g(x) = -x + 2$ no son acotadas en $\mathbb{R}$, sin embargo :

$(f + g)_{(x)} = 3$ es acotada en $\mathbb{R}$

* Luego , p es falsa .... (*FALSA*)

II) Si *f* no es acotada sobre **A**, entonces:

$$\forall M > 0 : |f(x)| > M;\ \forall x \in A$$

$$\rightarrow \forall M > 0 : \|f(x)\| > M;\ \forall x \in A$$

$\rightarrow |f(x)|$ no es acotada en A

* Luego, q es falsa .... (*FALSA*)

III) Si *f* y *g* son dos funciones, no acotadas sobre **A** → como se vió en la primera $f + g$ puede ser o no acotada en **A**.

$\rightarrow |f + g|$ puede ser o no acotada en **A**.

* Luego , r es falsa .... (*FALSA*)

RPTA: "B"

PROBLEMA 66 :

Sean $f : A \rightarrow \mathbb{R}$; $g: B \rightarrow \mathbb{R}$; además A y $B \subset \mathbb{R}$. Determinar el valor de verdad de las siguientes proposiciones :

p : Si $Dom(f+g) \neq \phi$, además *f* y *g* son acotadas, entonces *(f+g)* es acotada .

q : Si $Dom\left(\dfrac{f}{g}\right) \neq \phi$, además *f* y *g* son acotadas, entonces $\dfrac{f}{g}$ es acotada .

e: Si *f* y *g* son acotadas, entonces *f. g* es acotada.

A) VVV *B) VVF* *C) VFV* *D) FVV* *E) FVF*

RESOLUCIÓN :

$f: A \rightarrow R$ y $g : B \rightarrow R$ son acotadas

I) Si $Dom(f+g) \neq \phi \rightarrow f+g$ existe , además: $|f_{(x)}|<M,\ |g_{(x)}|<N,\ M,N\ \mathbb{R}^+$

$$|(f+g)_{(x)}| = |f_{(x)}+g_{(x)}| < |f_{(x)}|+|g_{(x)}|$$

$\rightarrow |(f+g)_{(x)}| < M + N,\ M + N \in \mathbb{R}^+$

→ *(f+g)* es acotada

* Luego, p es verdadera .... (*VERDADERA*)

II) Si $Dom\left(\dfrac{f}{g}\right) \neq \phi \rightarrow \dfrac{f}{g}$ puede ser o no acotada,

POR EJEMPLO :

* Si $f(x)=\frac{1}{x} \wedge g(x)=\frac{1}{x^2}\ ;\ x \geq 1$

* Donde : $0 < f(x) < 1 \wedge 0 < g(x) < 1$, es decir : $f \wedge g$ son acotadas ; se tiene

$$\left(\frac{f}{g}\right)_{(x)}=\frac{f_{(x)}}{g_{(x)}}=\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}}=x \rightarrow \left(\frac{f}{g}\right)_{(x)} \geq 1$$

* Esto es : $\left(\frac{f}{g}\right)$ no es acotada.

* Luego : q es falsa ....(FALSA)

III) $f \wedge g$ son acotadas , entonces :

$$|f(x)| < M \wedge |g(x)| < N; M, N \in R^+$$

$$\rightarrow |(fg)_{(x)}| = |f_{(x)} \cdot g_{(x)}| = |f_{(x)}| \cdot |g_{(x)}|$$

$\rightarrow |(fg)_{(x)}| \leq M.N \rightarrow fg$ es acotada

* Luego : r es verdadera .... (VERDADERA)

RPTA: "C"

PROBLEMA 67 :

Sea $f(x)=\frac{1}{x-1};\ x \in \langle -1;1 \rangle$. Determinar el valor de verdad de cada una de las siguientes afirmaciones:

p : f es acotada inferiormente

q : f es acotada superiormente

$r : -\frac{1}{2}$ es el mayor elemento del rango de f

A) VVV *B) FVF* *C) FFV* *D) VFV* *E) FFF*

RESOLUCIÓN :

* De : $f(x)=\frac{1}{x-1};\ x \in \langle -1;1 \rangle$

$$-1 < x < 1 \rightarrow -2 < x-1 < 0 \rightarrow \frac{1}{x-1} < -\frac{1}{2}$$

$$\rightarrow f(x) < -\frac{1}{2}\quad Ran(f) = \left\langle -\infty; -\frac{1}{2} \right\rangle$$

I) f no es acotada inferiormente . Luego p es falsa .... (FALSA)

II) f es acotada superiormente . Luego q es verdadera .... (VERDADERA)

III) $-\frac{1}{2} \notin Ran(f)$, por lo que $-\frac{1}{2}$ no es el mayor elemento de $Ran(f)$, en realidad no existe ese mayor elemento del $Ran(f)$.

* Luego, r es falsa .... (FALSA)

RPTA: "B"

PROBLEMA 68:

Indicar el valor de verdad de las siguientes afirmaciones :

p : La función $f(x) = sen\ x$ es acotada $\forall x \in R$

q : La función $f(x)=\frac{1}{x}$, no es acotada $\forall x \in R-\{0\}$

r : La función $f(x)=\frac{1}{x}$ es acotada $\forall x \in [1;10]$

s : La función $f(x) = 2x^2 - 4x + 5$ es acotada $\forall x \in R$

Si M y N representan el número de afirmaciones verdaderas y falsas respectivamente , entonces la afirmación correcta es :

A) M=N *B) N>M* *C) 3N=M*
D) 3M=N *E) $M + N^2 = 10$*

RESOLUCIÓN :

I) $f(x) = Senx,\ x \in R$

$-1 < Senx < 1 \rightarrow -1 < f(x) < 1$

$\rightarrow f$ es acotada, $\forall x \in R$

* Luego, p es verdadera .... (VERDADERA)

II) $f(x)=\frac{1}{x};\ x \in R-\{0\} \rightarrow \frac{1}{x} \in R-\{0\}$

$\rightarrow f(x) \in R-\{0\},\ \forall x \in R-\{0\}$

$\rightarrow f$ no es acotada

* Luego, q es verdadera. ....(VERDADERA)

III) $f(x)=\frac{1}{x},\ \forall x \in [1;10]$

$$1 < x < 10 \rightarrow 1 > \frac{1}{x} > \frac{1}{10}$$

$\rightarrow \frac{1}{10} < f(x) < 1 \rightarrow f$ es acotada

* Luego , r es verdadera .... (VERDADERA)

IV) $f(x) = 2x^2 - 4x + 5 = 2(x-1)^2 + 3$

$$\forall x \in R : (x-1)^2 > 0 \rightarrow 2(x-1)^2 > 0$$

$\rightarrow 2(x-1)^2 + 3 > 3 \rightarrow f(x) > 3$

$\rightarrow f$ no es acotada, $\forall x \in R$

* Luego , s es falsa .... (FALSA)

* Por lo que $M = 3 \wedge N = 1$

RPTA: "C"

PROBLEMA 69 :

Considere que f es una función , ¿Cuál de las afirmaciones siguientes establecen que f es inyectiva?

I) Toda recta horizontal intersecta a la gráfica de f una sola vez .

II) Toda recta horizontal intersecta a la gráfica de f a lo más una vez .

III) Toda recta horizontal que intersecta a la gráfica de f lo hace una sola vez .

IV) Para cada $y \in ran(f)$, la ecuación $f(x)=y$, $x \in dom(f)$ tiene solución única .

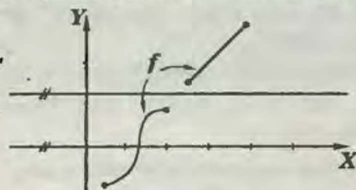
A) Todas *B) I y II* *C) II, III y IV*
D) I, II y III *E) I y III*

RESOLUCIÓN :

* Para una función inyectiva :

I) Toda recta horizontal intersecta a la gráfica de f una sola vez .

* ***FALSO :*** puede que no la intersecte por ejemplo :



.... *(FALSA)*

II) Toda recta horizontal intersecta a la gráfica de f a lo más una vez .... *(VERDADERA)*

III) Toda recta horizontal que intersecta a la gráfica de f, lo hace una sola vez . Esto equivale a lo anterior .... *(VERDADERA)*

IV) Para cada $y \in Ran(f)$, la ecuación $f(x)=y$, $x \in Dom(f)$ tiene solución única verdadera, porque si tuviera más de una por ejemplo x_1, x_2, entonces $(x_1 ; y)$ $(x_2 ; y)$ serían dos elementos de f con la misma segunda componente, con lo cual la función no sería inyectiva .... *(VERDADERA)*

RPTA: "C"

PROBLEMA 70 :

Si la función $f: \ A \to \langle 1;10]$ es suryectiva tal que $f(x)=\dfrac{4-11x}{4-2x}$, entonces el conjunto A es :

A) $\langle -\infty;0\rangle \cup [4;+\infty\rangle$ B) $\langle -\infty;1\rangle \cup \langle 5;+\infty\rangle$
C) $\langle -\infty;2] \cup \langle 5;+\infty\rangle$ D) $\langle -\infty;3\rangle \cup \{5\}$

RESOLUCIÓN :

* Como es suryectiva $\to Ranf = \langle 1;10]$

$$\to 1 < f(x) < 10 \ \to \ 1 < \frac{4-11x}{4-2x} \le 10$$

$$\to 1 < \frac{11x-4}{2x-4} \le 10 \to 1 < \frac{11x-4}{2x-4} \wedge \frac{11x-4}{2x-4} \le 10$$

$$\to \frac{11x-4}{2x-4} - 1 > 0 \ \wedge \ 10 - \frac{11x-4}{2x-4} \ge 1$$

$$\to \frac{9x}{2x-4} > 0 \ \wedge \ \frac{9x-36}{2x-4} \ge 00$$

$$\to (x < 0 \vee x > 2) \wedge (x < 2 \ \vee x > 4)$$

$$\to x < 0 \vee \ x > 4$$

* Luego : $A = Domf = \langle -\infty;0\rangle \cup [4;+\infty\rangle$

RPTA: "A"

PROBLEMA 71 :

Si $f: [0;1\rangle \to B$ tal que $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$ es una función suryectiva , entonces el conjunto B es :

A) $\langle 0 ; 1\rangle$ B) $\langle -\infty ; -1]$ C) $\langle -\infty ; 1\rangle$
D) $\langle -\infty ; -1\rangle$ E) $\langle -\infty; 2\rangle$

RESOLUCIÓN :

* Como es suryectiva $\to Ranf = B$

$$\to y = \frac{x+1}{x-1} \to y = 1 + \frac{2}{x-1}$$

$$\to 0 < x < 1 \to -1 < x-1 < 0$$

$$\to -1 > \frac{1}{x-1} \to -2 > \frac{2}{x-1}$$

$$\to -1 > 1 + \frac{2}{x-1} \to -1 > y$$

* Luego : $B = Ranf = \langle -\infty; -1]$

RPTA: "B"

PROBLEMA 72 :

La función inversa de :
$f(x) = Log_2(x-2) + Log_2(x+2)$ es :

A) $f^*(x) = -x^2 + 4$ B) $f^*(x) = \sqrt{x^2-4}$
C) $f+(x) = \sqrt{2^x - 4}$ D) $f^*(x) = -\sqrt{2^x + 4}$
E) $f^*(x) = \sqrt{2^x + 4}$

RESOLUCIÓN :

* Datos: $f(x) = Log_2(x-2) + Log_2(x+2)$

$$x \in Df: x-2 > 0 \wedge x+2 > 0$$

$$\to x > 2 \wedge \ x > -2$$

$$\to x \in \langle 2;^+ \infty\rangle$$

* Luego: $f(x) = Log_2(x-2) + log_2(x+2)$
$\to y = f(x) = Log_2(x^2-4)$

* Por propiedad de los logaritmos
$2^y = x^2 - 4$

$$\to \sqrt{2^y+4} = \sqrt{x^2} \to \sqrt{2^y+4} = |x| = f^*(y)$$

* Siendo :

$$x \in \langle 2,^+ \infty\rangle \Rightarrow f^*(x) = \sqrt{2^x+4}$$

RPTA: "E"

PROBLEMA 73 :

La inversa de la siguiente función:
$f(x) = \sqrt{5-x}\left(|x-5| + 1 + x\right)$ es dada por:

A) $\dfrac{20-x^2}{36}$; $x \in [0;\infty\rangle$ B) $\dfrac{180-x^2}{36}$; $x \in [0;\infty\rangle$

C) $\dfrac{x^2-20}{36}$; $x \in \langle 0;\infty\rangle$ D) $\dfrac{x^2-180}{36}$; $x \in [0;\infty\rangle$

RESOLUCIÓN :

* De : $f(x)=\sqrt{5-x}\,(|x-5|+1+x)$

$\rightarrow \sqrt{5-x}\geq 0 \rightarrow 5-x\geq 0 \rightarrow x\leq 5$

$\Rightarrow Domf=\langle-\infty;5] \Rightarrow f(x)=\sqrt{5-x}\,(6)$

* Luego : $R_f=[0;+\infty\rangle$

$y=(5-x)^{1/2}6 \rightarrow y^2=(5-x)(36)$

$\rightarrow x=5-\dfrac{y^2}{36} \Rightarrow f^*(x)=5-\dfrac{x^2}{36}=\dfrac{180-x^2}{36}$

* Donde : $Dom\ f^*(x)=Rf=[0;+\infty\rangle$

$$f^*(x)=\frac{180-x^2}{36};\quad x\in[0;+\infty\rangle$$

RPTA: "B"

PROBLEMA 74 :

Indicar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

p : La función $f(x)=\sqrt{x}+2; x>1$, tiene inversa.

q : La función $g(x)=x^2+1; x\in\langle-6;3\rangle$, tiene inversa.

t : La función $h(x)=\sqrt{x^2-3}, x>3$,, tiene inversa.

A) VFV B) FVF C) FFV D) FVV E) VVF

RESOLUCIÓN :

I) Para $f(x)=\sqrt{x}+2; x>1$

Sean $x_1,x_2\in Domf / f(x_1)=f(x_2)$

$\rightarrow \sqrt{x_1}+2=\sqrt{x_2}+2 \rightarrow x_1=x_2$

$\rightarrow f$ es inyectiva $\rightarrow f$ tiene inversa

* Luego : p es verdadera ....(*VERDADERA*)

II) Para : $g(x)=x^2+1; -6<x<3$

Sean $x_1,x_2\in Domg / g(x_1)=g(x_2)$

$\rightarrow x_1^2+1=x_2^2+1 \rightarrow (x_1+x_2)(x_1-x_2)=0$

$\rightarrow x_1=-x_2 \vee x_1=x_2 \rightarrow$ ***g no es inyectiva***

$\rightarrow$ ***g no posee inversa.***

* Luego : q es falsa ....(*FALSA*)

III) Para : $h(x)=\sqrt{x^2-3}, x>3$

Sean $x_1, x_2\in Domh / h(x_1)=h(x_2)$

$\rightarrow \sqrt{x_1^2-3}=\sqrt{x_2^2-3} \rightarrow x_1^2=x_2^2$

$\rightarrow (x_1+x_2)(x_1-x_2)=0$

como $x_1>3 \wedge x_2>3 \rightarrow x_1+x_2>6$

$\rightarrow x_1-x_2=0 \rightarrow x_1=x_2$

$\rightarrow h$ es inyectiva $\rightarrow h$ tiene inversa

* Luego : t es verdadera ....(*VERDADERA*)

RPTA: "A"

PROBLEMA 75 :

Determinar el valor de verdad de las siguientes proposiciones :

p : Si f es inyectiva creciente , entonces f también es inyectiva creciente .

q : Si f es inyectiva impar , entonces f^* también es inyectiva e impar

t : Si f es inyectiva , entonces f^2 también es inyectiva

A) VVV B) VVF C) VFV D) FVV E) FVF

RESOLUCIÓN :

I) f es inyectiva creciente, entonces: $\forall x_1,x_2\in Domf$:

$$x_1<x_2 \rightarrow f(x_1)<f(x_2)$$

* Si f es inyectiva $\rightarrow f^*$ es inyectiva

Sea $f(x_1)=y_1 \wedge f(x_2)=y_2$

$x_1=f^*(y_1) \wedge x_2=f^*(y_2)$

$f(x_1)<f(x_2) \rightarrow y_1<y_2 \rightarrow f^*(y_1)<f^*(y_2)$

* (Pues $x_1<x_2$) $\rightarrow f^*$ es creciente

* Luego , p es verdadera ....(*VERDADERA*)

II) f es inyectiva impar , entonces, f^* es inyectiva.

f es impar $\rightarrow \forall y\in Domf$:

$$-x\in Domf \wedge f(-x)=-f(x)$$

* Sea $f(x)=y \rightarrow f^*(y)=x$

$\forall y\in Domf^*$: Como $f(-x)=-y$

$\rightarrow -y\in Ranf=Domf^*$

$\wedge f^*(-y)=f^*(f(-x))=-x=-f^*(y)$

$\rightarrow f^*$ es impar

* Luego , q es verdadera .... (*VERDADERA*)

III) Si f es inyectiva , entonces f^2 no necesariamente es inyectiva , por ejemplo, si $f(x)=x$ (inyectiva) $\rightarrow$ la función: $f^2(x)=x^2$ no es inyectiva .

* Luego , t es falsa .... (*FALSA*)

RPTA: "B"

PROBLEMA 76 :

Si f es una función definida por $f(x)=x+\sqrt{x}$, $x>1$, entonces la f^* es :

A) $f^*(x)=\dfrac{4x+1-\sqrt{4x+1}}{2}$ B) $f^*(x)=\dfrac{3x+1-\sqrt{3x-1}}{2}$

C) $f^*(x)=\dfrac{3x+1-\sqrt{4x+1}}{2}$ D) $f^*(x)=\dfrac{2x+1+\sqrt{4x+1}}{2}$

E) $f^*(x)=\dfrac{2x+1-\sqrt{4x+1}}{2}$

RESOLUCIÓN :

*De : $f(x)=x+\sqrt{x}$; $x>1$; además como:

f es inyectiva $\rightarrow f^*$ existe

* Sea : $y=x+\sqrt{x}$ $4y = 4x + 4\sqrt{x}$

$\rightarrow 4y + 1=4x + 4\sqrt{x}+ 1$

$\rightarrow 4y + 1=(2\sqrt{x}+ 1)^2 \rightarrow \sqrt{4y+1}=2\sqrt{x}+1$

$\rightarrow \sqrt{x} = \dfrac{\sqrt{4y+1}-1}{2}$ *al cuadrado*

$\rightarrow x = \dfrac{4y+1+1-2\sqrt{4y+1}}{4} \rightarrow x = \dfrac{2y+1-\sqrt{4y+1}}{2}$

* Cambiando x por $y \wedge y$ por x :

$$y=\frac{2x+1-\sqrt{4x+1}}{2}$$

$$\rightarrow f^*(x) = \frac{2x+1-\sqrt{4x+1}}{2}$$

RPTA: "E"

PROBLEMA 77 :

Si f es una función definida por :

$$f(x)=\sqrt[3]{x+\sqrt{x^2-1}}+\sqrt[3]{x-\sqrt{x^2-1}}$$

entonces la función f^* es :

A) $f^*(x)=\dfrac{x^2-2x}{3}$ B) $f^*(x)=\dfrac{x^3-3x}{2}$

C) $f^*(x)=\dfrac{x^4-1}{6}$ D) $f^*(x)=\dfrac{5x-1}{2}$

E) f^* *no existe*

RESOLUCIÓN :

$$Domf=\{x\in R / x^2-1\geq 0\}$$

$$Domf=\langle -\infty;-1]\cup[1;+\infty\rangle$$

* Sea $x_1,\ x_2 \in Domf / f(x_1) = f(x_2) = y_0$

$$\rightarrow \sqrt[3]{x_1+\sqrt{x_1^2-1}}+\sqrt[3]{x_1-\sqrt{x_1^2-1}}=$$

$$=\sqrt[3]{x_2+\sqrt{x_2^2-1}}+\sqrt[3]{x_2-\sqrt{x_2^2-1}}=y_0$$

* Elevando al cubo, se tiene:

$$2x_1+3(1)(y_0)=2x_2+3(1)(y_0)$$

$\rightarrow x_1 = x_2 \rightarrow f$ es inyectiva $\rightarrow f^*$ existe

* Sea : $y=\sqrt[3]{x+\sqrt{x^2-1}}+\sqrt[3]{x-\sqrt{x^2-1}}$

$\rightarrow y^3 = 2x + 3(1)y$

$\rightarrow y^3 - 3y = 2x \rightarrow x = \dfrac{y^3-3y}{2}$

* Cambiando $x \leftrightarrow y$

$$y=f^*_{(x)}=\frac{x^3-3x}{2}$$

RPTA: "B"

PROBLEMA 78 :

Si f es una función cuya regla de correspondencia es $f(x)=\dfrac{2^x}{2^x+1}$, entonces la función inversa $f^*(x)$ indicando su dominio es :

A) $f^*(x)=Log_2\left(\dfrac{x}{1-x}\right),\ x\in\langle 0;1\rangle$

B) $f^*(x)=Log_2\left(\dfrac{1-x}{x}\right),\ x\in\langle 0;1\rangle$

C) $f^*(x)=Log_2\left(x-\dfrac{1}{1-x}\right),\ x\in\langle 1;2\rangle$

D) $f^*(x)=2Log_2\left(\dfrac{1}{1-x}\right),\ x>0$

RESOLUCIÓN :

* De : $f(x)=\dfrac{2^x}{2^x+1}=1-\dfrac{1}{2^x+1};\ x\in R$

* Claramente, la función es inyectiva por lo que f^* existe; además:

$$\forall x\in R: 2^x>0 \rightarrow 2^x+1>1$$

$$\rightarrow 0<\frac{1}{2^x+1}<1 \rightarrow 0>-\frac{1}{2^x+1}>-1$$

$$\rightarrow 1>1-\frac{1}{2^x+1}>0 \rightarrow 1>f(x)>0$$

* Luego: $Ranf=\langle 0;1\rangle=Domf^*$

*Por otro lado : $y=1-\dfrac{1}{2^x+1}$

RPTA: "A"

PROBLEMA 79 :

Una tienda comercial ha vendido *200* reproductores de discos compactos a la semana a un precio de *350* dólares cada una. Una investigación de mercado indica que por cada *10* dólares de descuento que se ofresca a los compradores, el número de aparatos vendidos se incrementará en *20* unidades más.

A) ¿Cuánto debe ser la rebaja para maximizar el ingreso?

B) ¿Cuál debe ser el precio de venta para maximizar el ingreso?

C) ¿Cuál es el ingreso máximo?

Entonces, la respuesta en ese orden es:

A) 125; 250; 100 250 B) 75; 225; 111 250
C) 100; 450; 102 250 D) 25; 125; 101 250
E) 125; 225; 101 250

RESOLUCIÓN :

* Sea $I_{(x)}$ el ingreso de la tienda donde x es el descuento en el precio de venta. Inicialmente, sin

descuentos. $I_{(0)} = (200)(350)$

* Además:

Descuento	Ingreso $I_{(x)}$
0	200×350
10	$(200+2\times 10)(350-10)$
20	$(200+2\times 20)(350-20)$
30	$(200+2\times 30)(350-30)$
⋮	⋮
x	$(200+2\times x)(350-x)$

$\rightarrow I_{(x)} = (200+2\times x)(350-x)$

$\rightarrow I_{(x)} = -2x^2+500x+70000$

$\rightarrow I_{(x)} = -2(x^2-250x+125^2)+2\times 125^2$

$\rightarrow I_{(x)} = -2(x-125)^2+101250$

(A) I será máximo, para $x = 125$
(B) El precio de venta, para I_{max} es $350 - 125 = 225$
(C) $I_{max} = 101\ 250$

RPTA: "E"

PROBLEMA 80 :

Una empresa de plásticos ha recibido un pedido del departamento de recreación de la ciudad de Lima para fabricar ***8 000*** tablas de plástico para su programa veraniego de natación . La empresa posee ***10*** máquinas , cada una de las cuales puede producir ***30*** tablas por hora . El costo de la puesta en marcha de las máquinas para producir las tablas es de ***$ 20*** por máquina . Una vez puesta en marcha las máquinas , la operación es totalmente automatizada y puede ser vigilada por un sólo supervisor de producción que gana ***S$4,80*** por hora . ¿Cuántas máquinas deberían emplearse para minimizar el costo de producción?

A) 6 *B) 7* *C) 8* *D) 9* *E) 10*

RESOLUCIÓN :

* Sea x : N° de máquinas a usar
∧ t : N° de horas de trabajo de las máquinas

* Como cada máquina puede producir ***30*** tablas por hora, entonces las «x» máquinas en «t» horas deberán producir las 8000 tablas pedidas, es decir:

$$(30t)x = 8000 \rightarrow x = \frac{800}{3t} \text{..............................} (I)$$

* Por otra parte, para producir esas tablas, el costo será:

$$Costo = \begin{pmatrix} \text{Costo puesta en} \\ \text{marcha de maq.} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \text{costo de} \\ \text{supervisión} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow Costo = 20x + 4{,}8\,t$$

* Reemplazando (I) : $c(t) = 20\left(\frac{800}{3t}\right) + 4{,}8t$

* Para que éste sea mínimo (derivamos):

$$c'(t) = 0 \Rightarrow c'(t) = -20\left(\frac{800}{3t^2}\right) + 4{,}8 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{16\times 3}{10} = \frac{20\times 800}{3t^2} \Rightarrow t = \frac{100}{3}$$

*Luego en (I) :

$$x = \frac{800}{3\left(\frac{100}{3}\right)} = 8$$

RPTA: "C"

PRACTICA DE EJERCICIOS #1

01 ¿Será cierto que : $F=\{(1;2),(3;7),(5;3),(1;9)\}$? es una función :

A)si *B)no* *C)quizás*

02 Indicar cuáles de los siguientes conjuntos determinan una función:

$A = \{(2;3),(5;7),(1;4)\}$
$B = \{(4;1),(9;8),(3;6)\}$
$C = \{(2;3),(1;7),(3;5)\}$

A)Sólo A *B)Sólo B* *C)Sólo C* *D)Ninguno* *E)Todos*

03 Dados los conjuntos :

$P = \{(1;2),(2;3),(3;4),(4;5)\}$
$Q = \{(5;1),(3;9),(5;6)\}$
$R = \{(2;3),(5;1),(9;4)\}$

Entonces :

A)P no es función *B)Q es función*
C)R no es función *D)P y Q son funciones*
E)P y R son funciones

04 Si se tiene :

$A=\{(\sqrt{5};3),(\sqrt{4};1),(5;4)\}$
$B=\{(2;7),(5;\sqrt{49}),(3;7)\}$
$C=\{(1;4),(3;5),(7^{o};2)\}$

Entonces :

A)B no es función *B)A es función*
C)A y C son funciones *D)A y B no son funciones*
E)A y C no son funciones

05 Efectuar : $f(x)=3x+6$. Si : $x=2$

A)10 *B)12* *C)13* *D)14* *E)16*

06 Calcular : $f(3) + f(0)$. Si: $f(x)=4x^2$

A)36 B)40 C)30 D)42 E)50

07 Hallar «x» Si : $f(x)=3$

Además $f(x)=x-1$

A)5 B)4 C)3 D)2 E)6

08 Hallar el valor de «x» para que las funciones $f(x)=3x-4$ y $g(x)=x+8$ sean iguales.

A)8 B)6 C)7 D)5 E)10

09 Calcular : $f(5)$. Si : $f(x)=3x-2$

A)10 B)14 C)13 D)12 E)16

10 Calcular «$f_{(-3)}$» , si : $f_{(x)}=2x^2-1+x$

A)12 B)14 C)20 D)5 E)1

11 Evaluar : $f(x)=7x^2-x+1$; cuando : $x=-2$

A)28 B)–31 C)30 D)31 E)–30

12 Si : $f_{(x)}=\frac{5}{6}x^2-7$, calcular «$f_{(-1)}$»

A) $-\frac{17}{6}$ B) $-\frac{11}{6}$ C) $-\frac{37}{6}$ D) $-\frac{1}{6}$ E) $\frac{1}{6}$

13 Evaluar : $f(x)=7x^2+3-5x$; para : $x=1$

A)5 B)–1 C)3 D)2 E)8

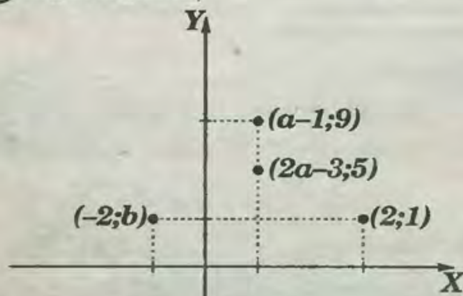
14 Si tenemos el siguiente gráfico :



Entonces :

A)Determina una función B)No determina una función
C)Posee 5 pares ordenados D)A y C

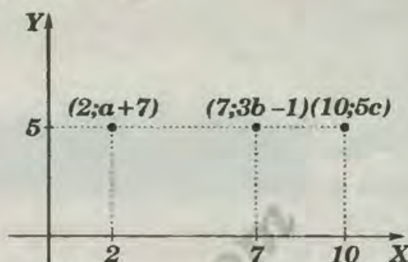
15 Según el gráfico :



El valor de «a+b» es :

A)1 B)2 C)3 D)4 E)5

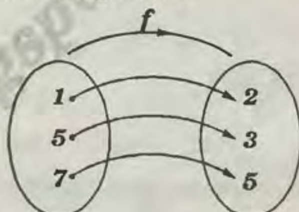
16 Del gráfico :



Hallar : «a+b+c»

A)1 B)2 C)3 D)4 E)5

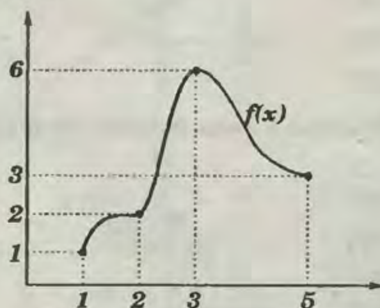
17 De acuerdo al gráfico :



Calcular : $f_{(1)}+f_{(5)}+f_{(7)}$

A)10 B)5 C)2 D)3 E)13

18 Del gráfico :



Hallar :

$$J=\frac{f_{(5)}+f_{(1)}}{f_{(2)}+f_{(3)}}$$

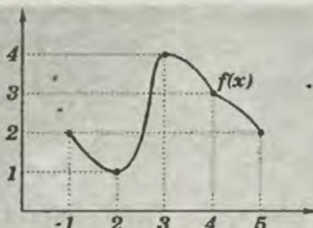
A)0,5 B)1,0 C)2,75 D)3,25 E)2,0

19 Determinar el valor de :

$$\frac{f_{(f_{(1)})}+f_{(f_{(3)})}}{f_{(5)}}$$

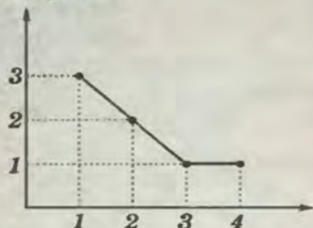
Sabiendo que para la función tenemos :

www.SIGLO21X.blogspot.com



A)2 B)5 C)4 D)1 E)3

20 Según el gráfico :

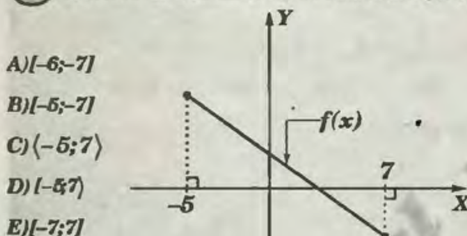


Hallar: $\dfrac{f_{(1)}+f_{(2)}+f_{(3)}}{2}$

A)1 B)2 C)3 D)4 E)5

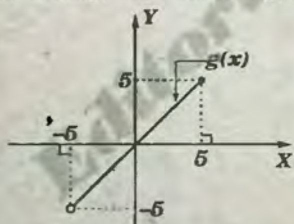
21 Calcular el dominio de la función : *f(x)*

A)[-6;-7]
B)[-5;-7]
C) ⟨-5;7⟩
D) [-5;7⟩
E)[-7;7]



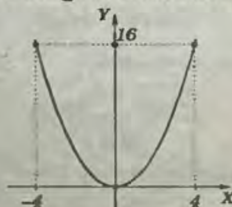
22 Calcular el rango de la función *g(x)* si:

A)[-5;5]
B) ⟨-5;5⟩
C) ⟨-5;5]
D) [-5;5⟩
E)[-7;7]



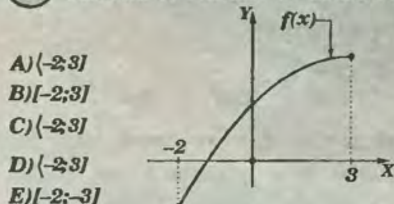
23 Calcular el rango de la función

A) ⟨0;4⟩
B) ⟨-4;4⟩
C) ⟨0;16⟩
D)[0;16]



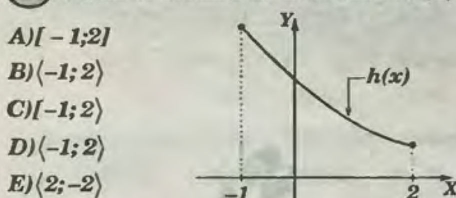
24 Calcular el dominio de la función *f*

A)⟨-2;3]
B)[-2;3]
C)⟨-2;3]
D)⟨-2;3]
E)[-2;-3]



25 Hallar el dominio de la función : *h(x)*

A)[- 1;2]
B)⟨-1; 2⟩
C)[-1; 2⟩
D)⟨-1; 2⟩
E)⟨2;-2⟩



26 Dados los conjuntos :

$$M=\{(\sqrt{16};5),(7;4),(-4;5)\}$$

$$N=\left\{(3^0;7),\left(6;\frac{1}{2}\right),((-3);4)\right\}$$

$$P=\left\{(\sqrt{49};6),\left(1;\frac{2}{5}\right),(0,4),(7;\sqrt{36})\right\}$$

A)M no es función *B)N y P son funciones*
C)N es función *D)P es función*
E)M y P no son funciones

27 Del gráfico



El conjunto de pares ordenados .....

A)Determina una función *B)No determina una función*
C)Tiene tres elementos *D)Es un absurdo*
E)Forman un triangulito

28 Sabiendo que :

$$F=\{(2a;3),(3;7),(1;4),(8;10)\}$$

es una función, ¿qué valor natural puede no tomar «*a*»?

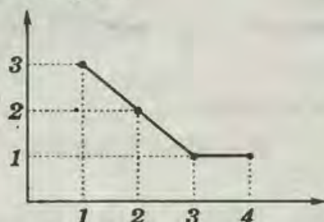
A)1 B)2 y 5 C)3 D)4 y 8 E)4

29 Si el conjunto :

$$J=\left\{(8;x),(5;3),\left(-\frac{1}{2};5\right),(8;2x-3)\right\}$$

es una función, entonces el valor de «x» es :
A)2 B)1 C)5 D)4 E) –1

30 Según el gráfico :



Hallar : $\dfrac{f_{(1)}+f_{(2)}+f_{(3)}}{f_{(4)}}$

A)1 B)2 C)3 D)4 E)6

PRACTICA DE EJERCICIOS #2

01 $A=\{x / x \in N; 3 \le x \le 5\}$
$B = \{7\}$

Hallar : $A \times B$

A){(7;3),(7;4)} B){(3;7),(4;7),(5;7)} C){(7;3),(7;5)}
D){(3;7),(4;7)} E)N.A.

02 Si : $A=\{x / x \in N; 4 < x < 7\}$
$B = \{2\}$

Hallar : $B \times A$

A){(2;5),(2;7)} B){(2;5),(2;6)} C){(2;5),(3;6)}
D){(2;5),(6;7)} E)N.A.

03 Siendo : $M=\{x / x \in N; 5 < x \le 6\}$
$N=\{2\}$

hallar la suma de pares de : $M \times N + N \times M$

A)(2;6) B)(6;2) C)(8;8) D)(7;8) E)N.A.

04 Hallar «(a;b)», si: (a;3)+(5;b)=(10;11)

A)(6;2) B)(8;5) C)(5;8) D)(3;2) E)N.A.

05 Efectuar « $m \times n^2$», si :

(2;3) + (7;1)=(m;n)

A)144 B)72 C)36 D)108 E)54

06 Calcular «A×B» si :

A={3} B={4;5;6}

A){(3;4),(3;5)} B){(3;4)} C){(3;6)}
D){(3;5),(3;6)} E){(3;4),(3;5),(3;6)}

07 Hallar «A×B», si :

A={3} ; B={2;3}

A){(3;4),(2;5)} B){(3;2),(3;3)} C){(5;3),(5;2)}
D){(3;3),(2;3)} E)N.A.

08 Hallar «B×A», si :

A = {3;2;1} ; B = {2}

A){(3;2),(4;1),(6;1)} B){(2;3),(2;2),(2;1)}
C){(2;2),(2;1)} D){(2;3),(3;2),(1;2)} E)N.A.

09 Hallar «M×N», si:

M={1} ; N={2;3;4;5}

A){(2;1),(3;1),(4;1)} B){(1;2),(1;3),(1;4),(1;5)}
C){(4;1),(5;1),(6;1)} D){(1;2),(1;3),(1;4)} E)N.A.

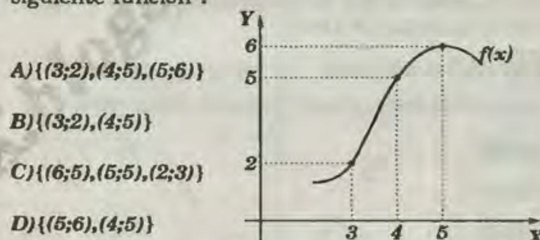
10 Hallar «N×M», si:

M={1} ; N={2;3;4;5}

A){(2;1),(3;1),(4;1)} B){(2;1),(3;1),(4;1),(5;1)}
C){(4;1),(5;1),(2;1)} D){(3;1),(6;1),(7;1)} E)N.A.

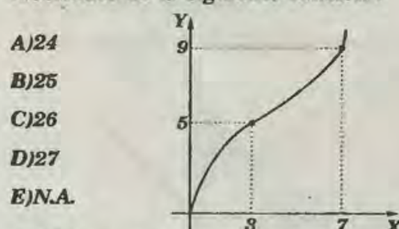
11 Hallar los pares ordenados mostrados de la siguiente función :

A){(3;2),(4;5),(5;6)}
B){(3;2),(4;5)}
C){(6;5),(5;5),(2;3)}
D){(5;6),(4;5)}



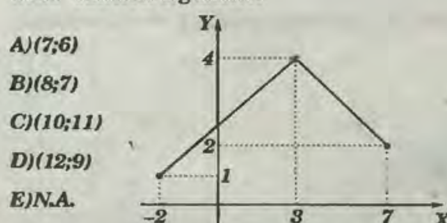
12 Hallar la suma de los pares ordenados mostrados de la siguiente función :

A)24
B)25
C)26
D)27
E)N.A.



13 Hallar la suma de pares ordenados mostrados de la función siguiente:

A)(7;6)
B)(8;7)
C)(10;11)
D)(12;9)
E)N.A.



14 Hallar los pares ordenados mostrados de la siguiente función. Dar las primeras componentes.

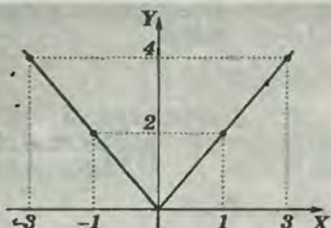
A) $\{-3;1;-1\}$

B) $\{-3;-1;1;3\}$

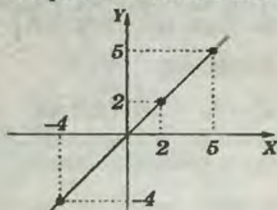
C) $\{-3;-1;0;1;3\}$

D) $\{4;2;1;3\}$

E) N.A.



15 Hallar los pares ordenados mostrados de la función :



A) $\{(5;5),(2;2),(-4;-4)\}$ B) $\{(2;2),(5;5)\}$ C) $\{(-4;-4),(2;2)\}$
D) $\{(-4;-4),(0;0),(2;2),(5;5)\}$ E) N.A.

16 Hallar los pares ordenados mostrados de la siguiente función. Dar la suma de todos ellos.

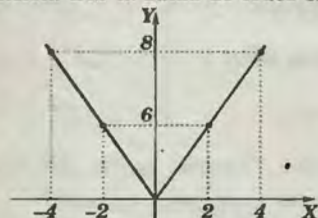
A) $(0;25)$

B) $(0;28)$

C) $(0;12)$

D) $(7;13)$

E) N.A.



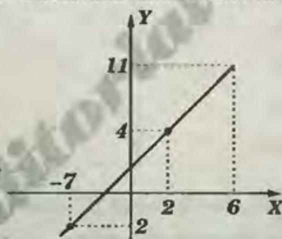
17 Hallar los pares ordenados mostrados de la siguiente función :

A) $\{(2;4),(6;11)\}$

B) $\{(-7;-2),(2;4)\}$

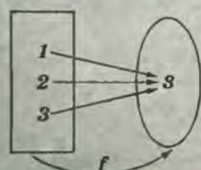
C) $\{(-7;-2),(2;4),(6;11)\}$

D) $\{(6;5),(7;3)\}$

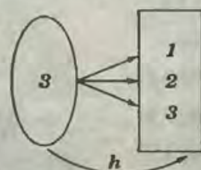


18 ¿Cuál de los siguientes gráficos son funciones?

I)



II)



A) Sólo I B) Sólo II C) I y II D) Ninguna E) F.D.

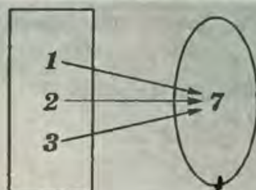
19 Hallar los pares ordenados de la siguiente función:

A) $\{(1;7),(2;7)\}$

B) $\{(1;7),(2;7),(3;7)\}$

C) $\{(2;7),(3;7)\}$

D) $\{(1;7),(2;7),(4;7)\}$



20 Siendo la función :

$$f = \{(2;3),(3;7),(4;6)\}$$

hallar : $f_{(2)} + f_{(3)}$

A) 9 B) 10 C) 11 D) 12 E) N.A.

21 Siendo : $f_{(2)} = 3$

ademas la función : $f_{(x)} = x + a$ hallar «a»

A) 1 B) 0 C) 2 D) 3 E) 4

22 Sea la función : $f_{(x)} = 2x + m$

además : $f_{(2)} = 3$ hallar el valor de «m»

A) 0 B) -1 C) 2 D) 1 E) -2

23 Hallar la suma de pares ordenados de la siguiente función :

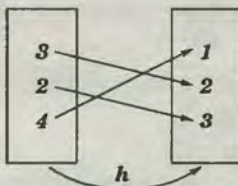
A) $(7;8)$

B) $(9;6)$

C) $(6;3)$

D) $(10;11)$

E) N.A.



24 ¿Cuál de las siguientes relaciones son funciones?

$f = \{(2;3),(3;4),(3;6)\}$

$g = \{(3;2),(7;2),(8;3)\}$

A) Sólo f B) Sólo g C) f v g D) Ninguna E) F.D.

25 Hallar los pares de la siguiente función :

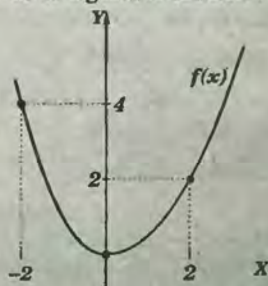
A) $\{(-2;4),(2;2)\}$

B) $\{(4;2),(2;2)\}$

C) $\{(2;2),(0;0),(-2;4)\}$

D) $\{(4;2),(5;2)\}$

E) N.A.



26 ¿Cuál de las siguientes relaciones son funciones?

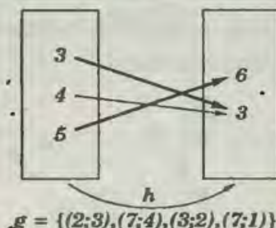
A) Sólo g

B) Sólo h

C) N.A

D) Las 2

E) F.D.



$g = \{(2;3),(7;4),(3;2),(7;1)\}$

27 Siendo : $A=\{2,3\}$ $B=\{5\}$ decir si es verdadero o falso.

$A \times B$ es función .... ( )

$B \times A$ es función .... ( )

A)VF B)VF C)VV D)FF E)N.A.

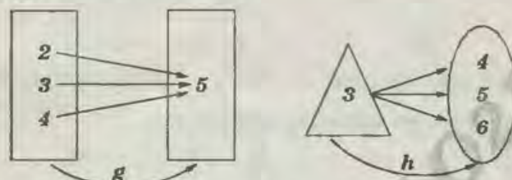
28 Calcular el número de pares ordenados, donde:

$$A = \{2;3;4\} \quad B = \{2;3\}$$

El producto cartesiano es $B \times A$

A)5 B)6 C)4 D)3 E)2

29 Sean las relaciones :



Indicar cuáles son funciones.

A)Sólo h B)Sólo g C)h y g D)N.A. E)F.D.

30 ¿Cuál de las siguientes relaciones son funciones?

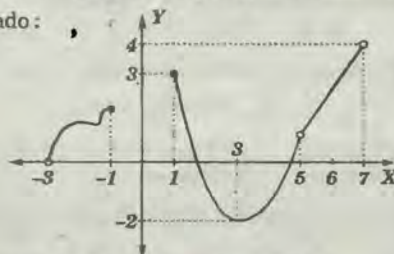
$R_1 = \{(2;3),(3;4),(7;8)\}$

$R_2 = \{(3;2),(5;3),(6;7)\}$

$R_3 = \{(7;2),(5;2),(5;3)\}$

A)R_1 y R_3 B)R_1 y R_2 C)R_2 y R_3 D)Las 3 E)N.A.

31 Dado :



Marcar con verdadero (V) o falso (F) :

I) La gráfica es una función .... ( )

II) El dominio es : $\langle -3;-1] \cup [1;7\rangle$........( )

III) El rango es: $[-2;3]$........( )

IV) Es continua en $[3;3]$........( )

V) Es discontinua en $[3;7\rangle$........( )

VI) Un mínimo de la curva es –2 .... ( )

VII) Un máximo de la curva es 4 .... ( )

VIII) Es creciente de $[3;5\rangle$........( )

FUNCIONES

Una función, en matemáticas, es el término usado para indicar la relación o correspondencia entre dos o más cantidades. El término función fue usado por primera vez en 1637 por el matemático francés René Descartes para designar una potencia x^n de la variable x. En 1694 el matemático alemán Gottfried Wilhelm Leibniz utilizó el término para referirse a varios aspectos de una curva, como su pendiente. Hasta recientemente, su uso más generalizado ha sido el definido en 1829 por el matemático alemán, J.P.G. Lejeune-Dirichlet (1805-1859), quien escribió: «Una variable es un símbolo que representa un número dentro de un conjunto de ello. Dos variables X y Y están asociadas de tal forma que al asignar un valor a X entonces, por alguna regla o correspondencia, se asigna automáticamente un valor a Y, se dice que Y es una función (unívoca) de X. La variable X, a la que se asignan libremente valores, se llama variable independiente, mientras que la variable Y, cuyos valores dependen de la X, se llama variables dependientes. Los valores permitidos de X constituyen el dominio de definición de la función y los valores que toma Y constituye su recorrido».

APLICACIONES DE LAS FUNCIONES REALES

Generalmente se hace uso de las funciones reales, (aún cuando el ser humano no se da cuenta), en el manejo de cifras numéricas en correspondencia con otra, debido a que se está usando subconjuntos de los números reales. Las funciones son de mucho valor y utilidad para resolver problemas de la vida diaria, problemas de finanzas, de economía, de estadística, de ingeniería, de medicina, de química y física, de astronomía, de geología, y de cualquier área social donde haya que relacionar variables.

Cuando se va al mercado o a cualquier centro comercial, siempre se relaciona un conjunto de determinados objetos o productos alimenticios, con el costo en pesos para así saber cuánto podemos comprar; si lo llevamos al plano, podemos escribir esta correspondencia en una ecuación de función «x» como el precio y la cantidad de producto como «y».

FUNCIÓN AFÍN :

Se puede aplicar en muchas situaciones, por ejemplo en economía (uso de la oferta y la demanda) los ecónomos se basan en la linealidad de esta función y las leyes de la oferta y la demanda son dos de las relaciones fundamentales en cualquier análisis económico. Por ejemplo, si un consumidor desea adquirir cualquier producto, este depende del precio en que el artículo esté disponible. Una relación que especifique la cantidad de un artículo determinado que los consumidores estén dispuestos a comprar, a varios niveles de precios, se denomina ley de demanda. La ley más simple es una relación del tipo P= mx + b, donde P es el precio por unidad del artículo y m y b son constantes.

PRIMERA PRACTICA DIRIGIDA

01 Si $F(x)$ es función :

$$F=\{(3;7);(5;3);(3;a^2+3);(a;7);(2;3)\}$$

Indicar: $\frac{a+5}{3}$

A) $\frac{7}{3}$ B) $\frac{3}{7}$ C) $\frac{5}{3}$ D) 1 E) 3

02 Si $H(x)$ es función:

$$H=\{(3;2);(5;3)(3;m+2n);(6;2);(7;3n-m)\}$$

además: $F(7)=13$, indique : mn

A) 12 B) 6 C) 15 D) –12 E) –15

03 Sea F una función definida por:

$$(1;5);(9;6)(3;a^2);(3;2a+3);(-a;7)$$

Hallar el valor de a.

A) 3 B) 1 C) – 1 y 3 D) $\frac{1}{2}$ E) – 3

04 Dado el conjunto $A=\{1;2;3;4\}$, se define la función F con dominio en A donde:

$$F=\{(1;1);(2;5)(3;5);(1;p-k)(p;k)\}$$

Hallar: $p+k$

A) 9 B) 8 C) 10 D) 7 E) 11

05 Dada la función:

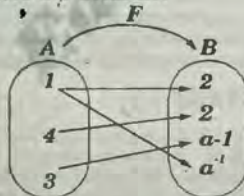
$$F=\{(1;a-b),(1;4),(2;a+b),(3;4),(2;6)\}$$

Hallar "ab".

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

06 Dada la función $F=A\to B$. Calcular la suma de los elementos del dominio.

A) 5
B) 4
C) 3
D) 2
E) 8



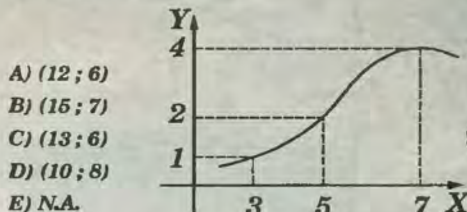
07 Indicar la suma de los elementos del rango de la función "F" tal que: $F_{(x)}=2x-1$

Donde: $x\in\{1;2;3;4\}$

A) 4 B) 8 C) 16 D) 12 E) 20

08 Hallar las sumas de coordenadas de los puntos de la siguiente función:

A) (12 ; 6)
B) (15 ; 7)
C) (13 ; 6)
D) (10 ; 8)
E) N.A.

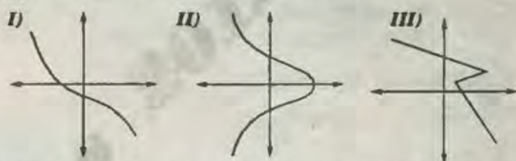


09 Hallar las coordenadas de $M\times N$:

$$M=\{2;3\};N=\{5\}$$

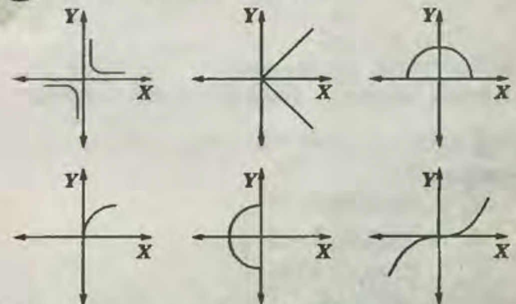
A) {(2 ; 5),(3 ; 5)} B) {(2 ; 6), (3 ; 5)}
C) {(2 ; 3)} D) {(5 ; 2), (5 ; 3)}

10 Indicar cuáles son funciones :



A) I y II B) I y III C) Sólo I D) Sólo I E) Sólo III

11 De los siguientes gráficos :



¿Cuántas corrresponden a funciones?

A) 6 B) 5 C) 4 D) 3 E) 2

12 Indique la función lineal que cumpla :

$$F_{(1)}=3;\ F_{(2)}=2F_{(3)}$$

A) $F(x)=-x+2$ B) $F(x)=-x+9$ C) $F(x)=x+4$
D) $F(x)=-x+4$ E) $F(x)=-x+8$

13 Dada la función: $F=\{(a;b),(3;c),(1;3),(2b;4)\}$

Además : $F_{(x)}=x-2a$, indique el producto de elementos de : $D_F\cap R_F$

A) 3 B) 2 C) –3 D) –1 E) 1

14 Hallar el dominio de :

$$F_{(x)}=\sqrt[4]{x-2}+\sqrt[16]{3-x}+\sqrt[32]{x}$$

A) $\langle-\infty;2]\cup[3;+\infty\rangle$ B) $\varnothing$ C) $\langle 2;5]$
D) $\langle 2;8]$ E) $[2;3]$

15 Obtener el dominio en : $F_{(x)}=\sqrt{x-2}+2002$

A) $[2;2002]$ B) $[2;+\infty\rangle$ C) $\langle 5;+\infty\rangle$ D) R^+ E) $[1;+\infty\rangle$

16 Indique el rango en : $F_{(x)}=x^2-4x+9;\ \forall\ x\in\mathbb{R}$

A) $[7;+\infty\rangle$ B) $[2;+\infty\rangle$ C) $[-2;+\infty\rangle$
D) $[5;+\infty\rangle$ E) $[-2;5\rangle$

17 Sea :

$$F_{(x)}=\begin{cases}x-2;\ x\in\langle-5;8\rangle\\ x+1;\ x\in\langle 8;+\infty\rangle\end{cases}$$

Hallar : $F_{(7)}+F_{(10)}$

A) 17 B) 15 C) 16 D) 14 E) 13

18 Hallar el rango en : $g_{(x)}=\dfrac{5x-1}{3x+2}$

A) $R-\{5\}$ B) $R-\left\{\dfrac{5}{3}\right\}$ C) $R-\left\{-\dfrac{2}{3}\right\}$

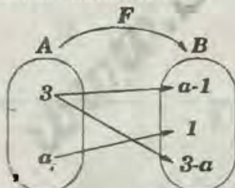
D) $R-\left\{-\dfrac{1}{3}\right\}$ E) $R-\left\{-\dfrac{5}{3}\right\}$

19 Hallar el dominio de la función : $F_{(x)}=\dfrac{x^2-10}{x^2-9}$

A) $R-\{3\}$ B) $R\{-3;3\}$ C) $[-3;3]$.
D) $R[-3;3]$ E) $R\{-3\}$

20 Dada la función : $F:A\to B$, calcular la suma de los elementos del dominio :

A) 5
B) 6
C) 7
D) 8
E) 9



21 Del problema anterior; la suma de los elementos del rango es :

A) 3 B) 5 C) 0 D) 1 E) –1

22 Dadas las funciones :

$F_{(x)}=3x+5$

$G_{(x)}=4x^2-3x+1-2x(2x-5)$

Luego es posible afirmar:

A) $R_f\cap R_g=\varnothing$ B) $R_f\cup R_g=R$ C) $R_f\cap R_g=R$
D) $R_f=R_g=R^+$ E) *Hay dos correctas.*

23 Sea : $H_{(x)}=\sqrt{\dfrac{2x-1}{x-5}}$

Hallar su dominio.

A) $\left[\dfrac{1}{2};5\right\rangle$ B) $\left\langle\dfrac{1}{2};5\right\rangle$ C) $\left\langle-\infty;\dfrac{1}{2}\right]\cup\langle 5;+\infty\rangle$

D) $\langle-\infty;-2]\cup\langle 5;+\infty\rangle$ E) $\langle 2;5\rangle$

24 Sean:

$F_{(x)}=x^2+5$

$G_{(x)}=6x$

¿En cuántos puntos se intersectan?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

25 Sea la función : $F_{(x)}=\sqrt{x-20}+\sqrt[3]{x-40}$

Hallar su dominio .

A) $[20;40]$ B) $[40;+\infty\rangle$ C) $[20;+\infty\rangle$
D) $\langle-\infty;20]$ E) $\langle-\infty;40]$

TAREA DOMICILIARIA

01 Dada la función : $H=\{(5;2),(6;3),(7;n)\}$

tal que : $H_{(6)}+H_{(7)}+H_{(5)}=15$

Halle "$n+1$"

A) 10 B) 11 C) 12 D) 13 E) 14

02 Sea la función : $H=\{(a;a^b),(a;a^{a-b}),(2b;b^a)\}$

Indicar "$a+b$"

A) 1 B) 4 C) 6 D) 8 E) 10

03 Indicar el dominio de la función :

$$F_{(x)}=\sqrt[4]{x}+\sqrt[6]{6-x}+\sqrt[8]{x-2}$$

A) $\langle 2;6]$ B) $[2;6]$ C) $\langle 0;6\rangle$ D) $[0;6]$ E) $[0;2]$

04 Obtener el rango en : $F_{(x)}=\dfrac{x^2}{x^2+1}$

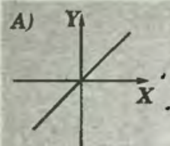
A) $\langle-1;1]$ B) $[0;2]$ C) $\langle 0;2]$ D) $[0;1\rangle$ E) $\langle-\infty;0]$

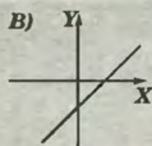
05 Obtener el dominio en : $F_{(x)}=2002x-2002$

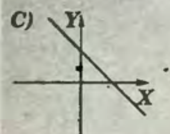
A) R B) $R-\{2002\}$ C) R^+ D) $\varnothing$ E) R^-

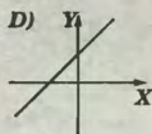
SEGUNDA PRACTICA DIRIGIDA

01 ¿Cuál de las siguientes gráficas corresponden a la función: $f_{(x)}=4x+3$?

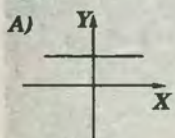
A) 

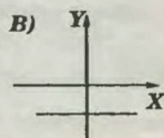
B) 

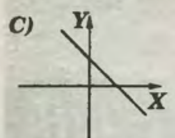
C) 

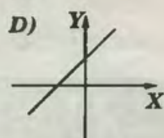
D) 

02 Graficar : $G_{(x)}=3$

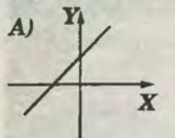
A) 

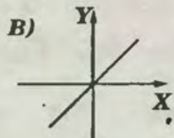
B) 

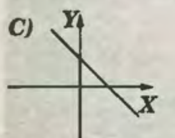
C) 

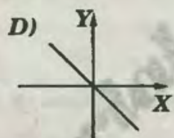
D) 

03 Graficar : $f_{(x)}=x$

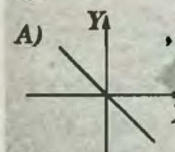
A) 

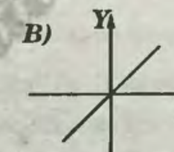
B) 

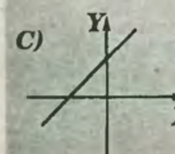
C) 

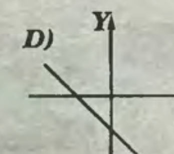
D) 

04 Graficar : $f_{(x)}=-x$

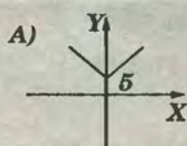
A) 

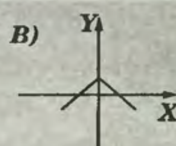
B) 

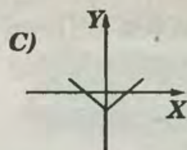
C) 

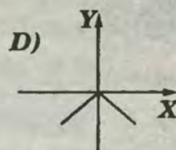
D) 

05 Graficar : $g_{(x)}=|x|+5$

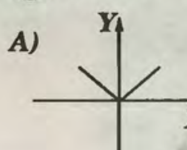
A) 

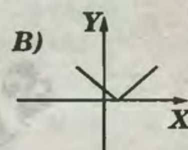
B) 

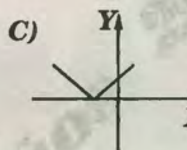
C) 

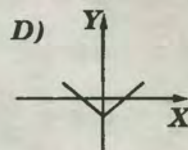
D) 

06 Graficar : $h_{(x)}=|x-2|$

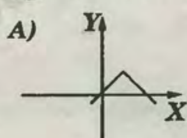
A) 

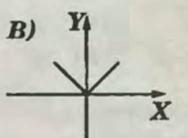
B) 

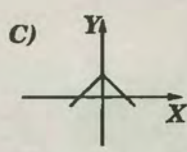
C) 

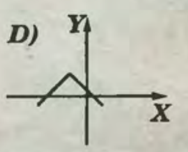
D) 

07 Graficar : $f_{(x)}=-|x-3|+2$

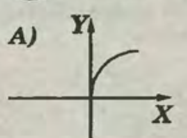
A) 

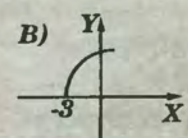
B) 

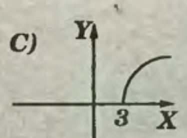
C) 

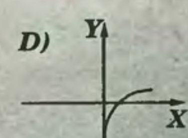
D) 

08 Graficar : $f_{(x)}=\sqrt{x-3}$

A) 

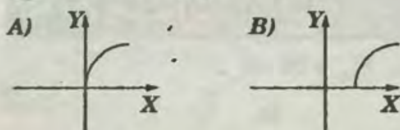
B) 

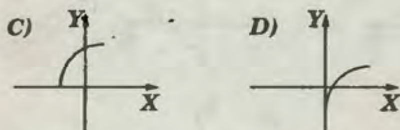
C) 

D) 

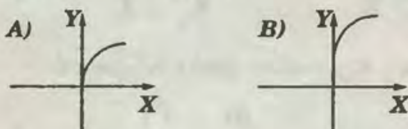
Editorial Rubiños 2012

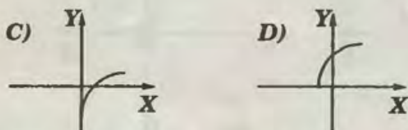
09 Graficar : $f_{(x)} = \sqrt{x+4}$



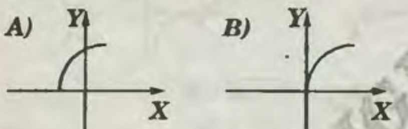


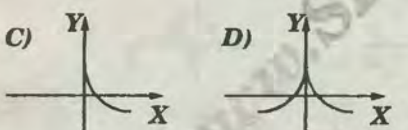
10 Graficar: $g_{(x)} = \sqrt{x} + 1$



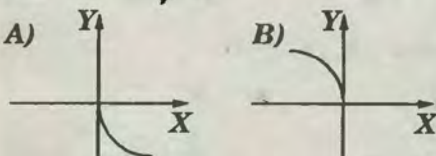


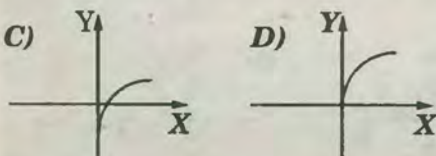
11 Graficar : $h_{(x)} = -\sqrt{x} + 1$



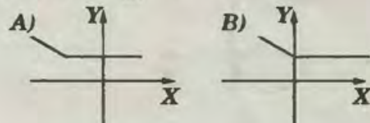


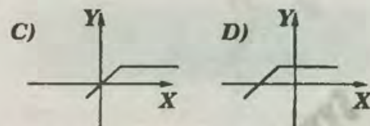
12 Graficar : $f_{(x)} = 3\sqrt{x}$





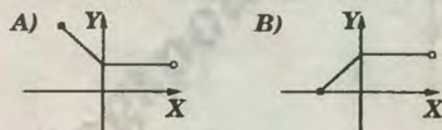
13 ¿Cuál de las gráficas dadas pertenece a la función : $f_{(x)} = |x+1| - x$?

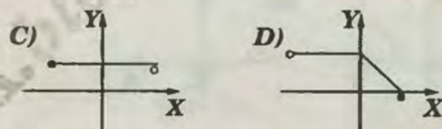




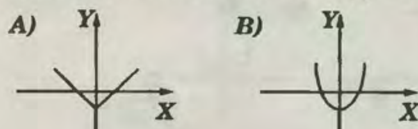
14 La gráfica correspondiente a la función :

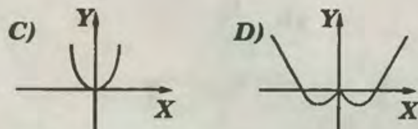
$$f_{(x)} = 4|x| - 4x + 4;\ x \in [-1;10\rangle$$



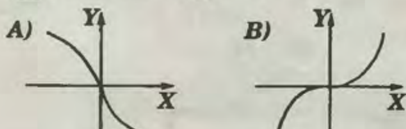


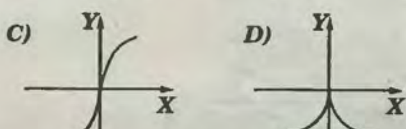
15 ¿Cuál es la gráfica correspondiente a la siguiente función cuadrática : $f_{(x)} = x^2 - 16$?



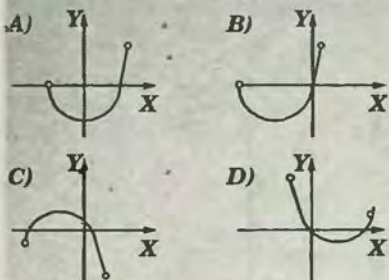


16 Graficar : $f_{(x)} = \sqrt[3]{x}$

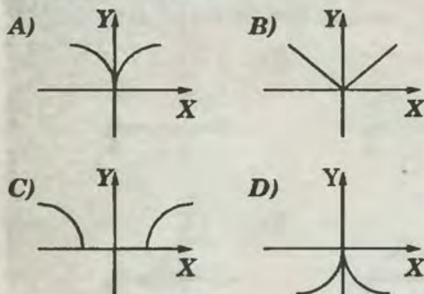




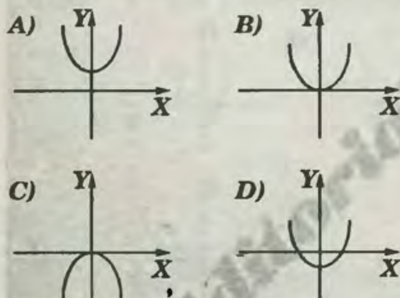
17 Graficar : $f_{(x)} = x^2 - 4x + 2 \; ; \; x \in \langle -1 ; 4 \rangle$



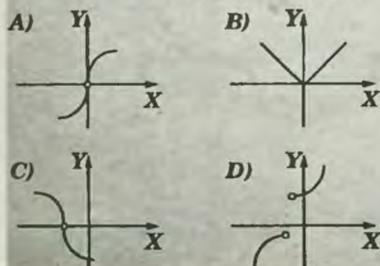
18 Graficar : $f_{(x)} = \sqrt{x^2 - 9}$



19 Graficar : $h_{(x)} = \dfrac{x^4 - 8x^2 + 15}{x^2 - 5} \; ; \; x^2 - 5 \neq 0$

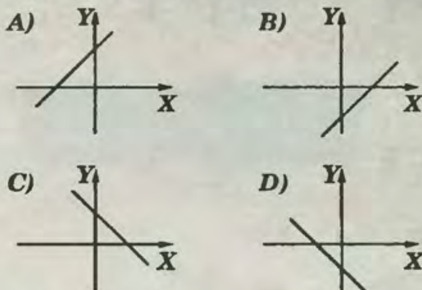


20 Graficar : $f_{(x)} = \dfrac{x^3 + x^2 + x + 1}{|x + 1|}$

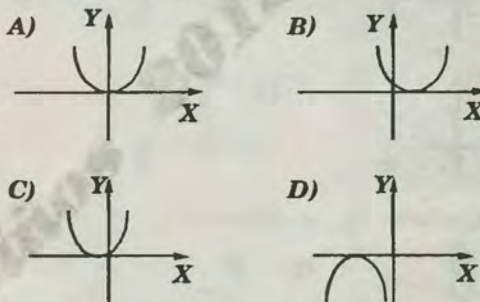


TAREA DOMICILIARIA

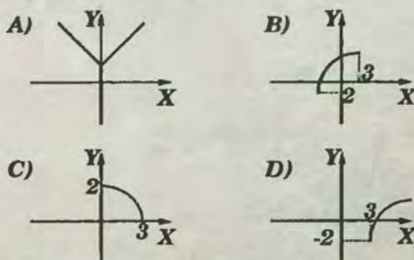
01 Graficar : $F_{(x)} = 2x - 1$



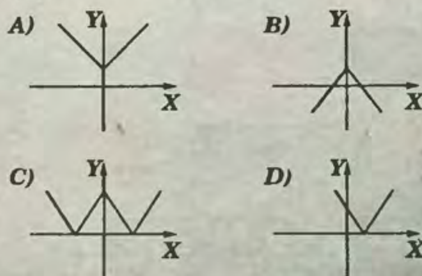
02 Graficar : $F_{(x)} = x(x - 2m) + m^2 \; ; \; m < 0$



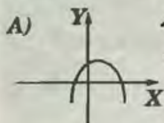
03 Graficar : $F_{(x)} = \sqrt{x - 3} - 2$

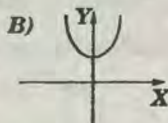


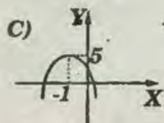
04 Graficar : $F_{(x)} = \big| |x| - 3 \big|$

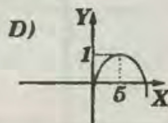


05 Graficar : $F_{(x)} = -3x^2 - 6x + 2$

A)


B)


C)


D)


TERCERA PRACTICA DIRIGIDA

01 Si:

$$G(x-2) = \frac{x}{\sqrt{x+2}}$$

calcule el mínimo valor entero del dominio de $G(x)$.

A) –6 B) –7 C) –5 D) –3 E) –4

02 Si: $F(x+1) = \frac{1}{3x+1}$

halle el dominio de $F(x)$.

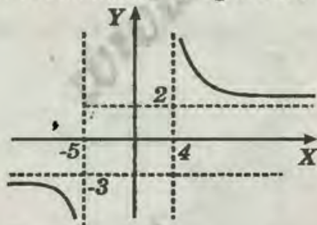
A) $R - \left\{\frac{2}{3}\right\}$ B) $R - \left\{-\frac{2}{3}\right\}$ C) $R - \left\{\frac{3}{2}\right\}$

D) $R - \{1\}$ E) $R - \left\{-\frac{1}{3}\right\}$

03 De la función: $F(x)=(x-n)^2+0{,}5n$ resolver para «n» ; $F(2)>0$

A) $R - \{0\}$ B) { } C) R D) R^+ E) R^-

04 Hallar el dominio de la siguiente función:



A) $<-\infty; -5> \cup <4; +\infty>$ B) $<-\infty; -3> \cup <4; +\infty>$

C) $<-\infty; -5> \cup <2; +\infty>$ D) $<-\infty; +\infty>$ E) $<-5; 4>$

05 Dada la función F mediante la siguiente definición:

$$F = \{(x;y) / x \in <-1; 4>;\ y = 4x-1\}$$

calcular el mayor elemento entero del rango.

A) 10 B) 17 C) 19 D) 14 E) 23

06 ¿Para qué valor de «ab» la relación:

$R = \{(2; 5), (-1; -3), (2; 2a-b), (-1; b-a), (a+b^2; a)\}$ es una función?

A) –2 B) 5 C) 3 D) –1 E) –3

07 Sea $F(x) = mx$. Si: $F(4) + F(12) = 64$

calcule:

$$\sum_{i=1}^{10} F(i)$$

A) 10 B) 100 C) 120 D) 220 E) 250

08 Sea $F(x) = ax^2 + bx + c$, tal que:

$$F(x_1) = F(x_2) = 0;\ x_1; x_2 \in R;\ a \neq 0$$

Hallar $(x_1 + x_2)^2$

A) $\frac{b^2}{a^2}$ B) c C) ab D) $-c$ E) abc

09 Sea una función: $G(x) = \frac{1}{\sqrt{|x+1| - x}}$

Halle $Dom\{G\} \cap Ran\{G\}$

A) $\left\langle -\infty; -\frac{1}{2} \right\rangle$ B) $\left\langle -\infty; -\frac{1}{2} \right]$ C) $\left\langle -\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right\rangle$

D) { } E) $\{\phi\}$

10 Sea <1; 3] el rango de:

$$G(x) = \frac{x-1}{x+2}$$

Halle su dominio.

A) $\left[\frac{7}{2}; 10\right]$ B) $\left\langle -\infty; -\frac{7}{2}\right]$ C) $\left\langle -\infty; \frac{7}{2}\right]$

D) $\left\langle \frac{7}{2}; 10\right]$ E) <1; 3]

11 De la siguiente función:

$$H = \left\{ (\sqrt{(x-1)^2}; |1-x|) / x \in R \right\}$$

calcule: $\frac{H(20)}{19} - \frac{1}{H(0)}$

A) 1 B) $\frac{2}{3}$ C) 0 D) 3 E) 4

12 Halle el rango de: $H(x) = \frac{x+1}{x^2-1}$

A) R B) $R - \{0\}$ C) $R - \{1\}$ D) $R - \{\pm 1\}$ E) $R - \{-1\}$

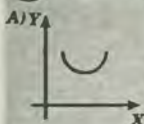
13 Sea la función $J(x) = |x + m|$. Si: $(0; 2) \in J(x)$ calcule un valor de «m».

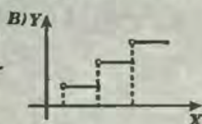
A) 4 B) –4 C) –2 D) 3 E) –3

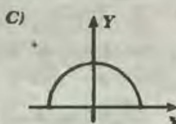
14 Sea $G(x) = |x - 2|$. Si $x \in [-3; 4]$, hallar el rango.

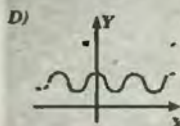
A) [0; 5] B) [–5; 0] C) [0; 7] D) [2; 5] E) [–5; 2]

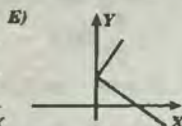
15 Identifique qué gráfica no es función.

A) 

B) 

C) 

D) 

E) 

16 De la función:

$$\{(3; -1), (5; 7), (3; 4n), (5; k^3)\}$$

calcule la suma de los elementos del rango.

A)6 B)12 C)8 D)16 E)14

17 Sea la función:

$$G(x) = -x^2 + 8x - 7$$

Calcule el número de valores enteros del rango, si $Dom(G) = [1; 7]$

A) 35 B) 30 C) 40 D)50 E)45

18 Si: $H(x) = x^2 - 3; -2 \le x < 4$ determine el rango.

A)$[-3; 13[$ B) $[-3; 13]$ C) $]-3; 13[$
D) $]-3; 13]$ E) $[-13; 3]$

19 Hallar el rango de : $G(x) = -3x + 7$

si $x \in <0; 2>$

A)$<-1;0>$ B)$<1;7>$ C)$<-7;-1>$ D)$<0;1>$ E)$<-1;2>$

20 Sea la función:

$$T(x) = \sqrt{25 - x^2}$$

Determine $|m| + |n|$, si $Dom(T) = [m;n]$

A)0 B)-10 C)10 D)25 E)15

CUARTA PRACTICA DIRIGIDA

01 Indicar la tabla de verdad en:

( ) $F(x)=8$ es una función constante.

( ) $G(x)=3x-1$ es una función lineal.

( ) $H(x)=-x$ es la función identidad.

A)VVV B)VFV C)FFV D)VVF E)FVF

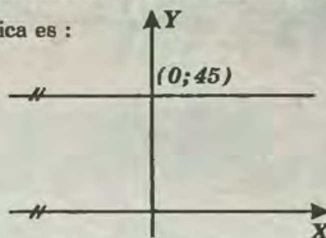
02 Sea G una función constante tal que:

$$\frac{G(2\,008) + 2G(-6)}{G(\sqrt{2}) - 4} = 5$$

Calcular: $\sqrt{6 + G(2\,009)}$

A)3 B)5 C)2 D)4 E)6

03 Dada la función constante: $F(x)=2n-3$ cuya gráfica es :

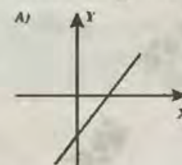


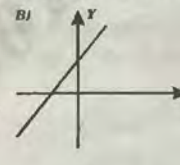
calcular: $S=1+2+3+4+...+n$

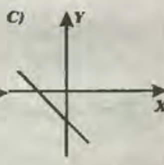
A)280 B)320 C)360 D)400 E)300

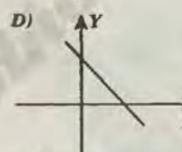
04 A partir $(2a-7b;5)=(20;a-b)$

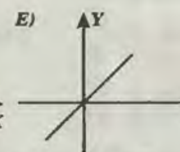
indicar la gráfica de: $F(x)=ax+b$

A) 

B) 

C) 

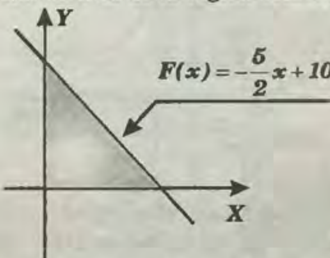
D) 

E) 

05 La gráfica de la función $F(x)=x^2+4$ en el plano cartesiano no pasa por el:

A) IVC B) III ∧ IVC C) II ∧ IIIC
D) I ∧ IIIC E) I ∧ IVC

06 Calcular el área de la región sombreada.



A) $10u^2$ B) $20u^2$ C) $40u^2$ D) $15u^2$ E) $25u^2$

07 Calcular el área que generan en el *IC* la parte superior de la función constante $F(x)=16$ con la parte superior de la gráfica de la función identidad.

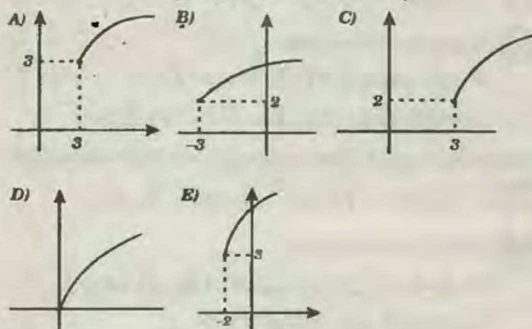
A) $80\ u^2$ B) $96\ u^2$ C) $176\ u^2$ D) $160\ u^2$ E) $128\ u^2$

08 Si $(a;0) \wedge (b;0)$ es la intersección de la gráfica de la función $F(x) = |x+3| - 5$, calcular : a^2+b^2.

A) 72 B) 56 C) 68 D) 80 E) 44

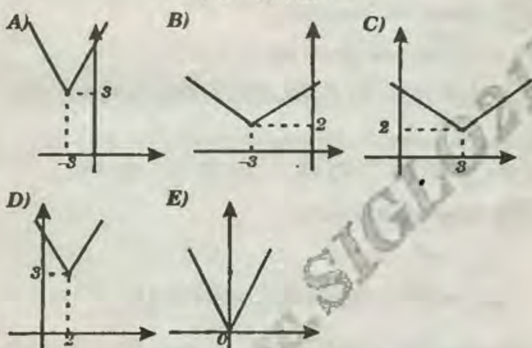
09 Dar aproximadamente la gráfica de:

$$F = \{(x;y) / y = 2 + \sqrt{x-3}\}$$



10 Indicar la gráfica aproximada de:

$$F(x) = |x+3| + 2$$



11 Sea F una función lineal, además:

$$F(2) = 1 \wedge F(-1) = -8$$

Calcular el valor de: $F(0).F(1)$

A) 8 B) 12 C) 6 D) 10 E) 14

12 Dar la tabla de verdad con respecto a la función:

$$F(x) = ax^2 + bx + c;\ a \neq 0$$

( ) El vértice de la parábola tiene como coordenadas:

$$\left(-\frac{b}{2a}; \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$$

( ) Si $a>0 \Rightarrow F$ tiene mínimo.

( ) Si $c=0 \Rightarrow$ la gráfica pasa por el origen de coordenadas.

A) VVV B) VFV C) FVF D) VVF E) FFV

13 ¿Cuál(es) de las siguientes funciones cuadráticas corta(n) al eje X en dos puntos diferentes?

$F(x) = x^2 + 2x + 5$

$G(x) = x^2 - 6x + 9$

$H(x) = x^2 - 3x - 10$

A) Sólo F B) Sólo G C) Sólo H D) $F \wedge G$ E) $G \wedge H$

14 Al graficar la función: $F(x) = -2x^2 + 6x - 3$ el vértice de la parábola tiene coordenadas $(a; b)$. Calcular el valor de: $a-b$

A) 3 B) –3 C) 0 D) 1 E) –2

15 Dada la función: $F(x) = 3(x-7)^2 + 5$ hallar las coordenadas del vértice de la parábola.

A) (2; –9) B) (5; 7) C) (7; 5) D) (7; –5) E) (–7; 5)

16 Indicar un punto en donde se cortan las gráficas de las funciones:

$F(x) = x^2 - x - 8$

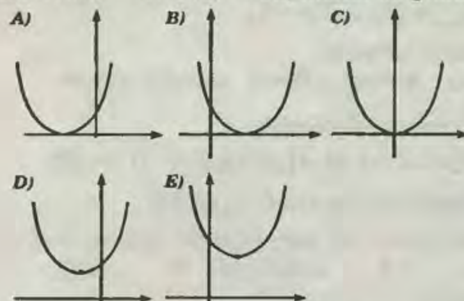
$G(x) = x + 7$

A) (1; –6) B) (3; –4) C) (–5; 12) D) (5; –12) E) (–3; 4)

17 Dada la función cuadrática:

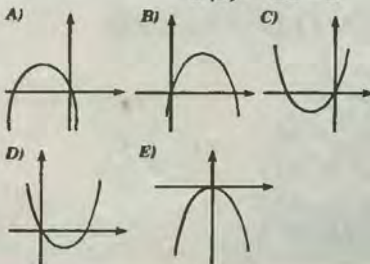
$$F(x) = x^2 + ax + b$$

además $F(0) = 9 \wedge F(1) = 16$, indicar su gráfica



18 Indicar la gráfica aproximada de:

$$F(x) = 2x - x^2$$



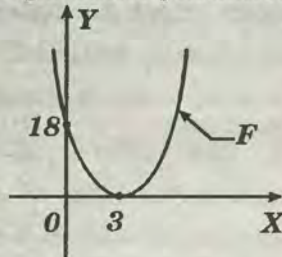
www.SIGLO21X.com

19 Calcular el área del triángulo formado por los ejes coordenados y la gráfica de la función:

$$F(x)=(\sqrt{2}-1)x+(\sqrt{2}-2)$$

A) $(\sqrt{2})u^2$ B) $(2-\sqrt{2})u^2$ C) $(\sqrt{2}-1)\,u^2$
D) $(2+\sqrt{2})u^2$ E) $(1+\sqrt{2})u^2$

20 Dar la regla de correspondencia de la función F.



A) $F(x) = x^2 - 6x + 9$ B) $F(x) = x^2 + 6x + 9$
C) $F(x) = 2x^2 + 12x + 18$ D) $F(x) = 2x^2 - 12x + 18$
E) $F(x) = x^2 - 6x + 18$

QUINTA PRACTICA DIRIGIDA

01 Sean las funciones :

$$F_{(x)} = \sqrt{x-1}\times\sqrt{x-2}$$
$$G_{(x)} = \sqrt{(x-1)(x-2)}$$

Indicar lo correcto .

A) $F=G$ B) $F=2G$ C) $F=-G$ D) $F=3G$ E) $F\neq G$

02 Sean las funciones :

$$F=\{(-3;2),(0;0),(2;4),(3;-1),(4;3)\}$$
$$G=\{(2;0),(3;4),(4;7),(6;2)\}$$

Hallar la suma de elementos del dominio de $F\times G$.

A) -4 B) 9 C) 17 D) 18 E) 21

03 Dadas las funciones :

$$f=\{(-3;2),(0;0),(2;4),(3;-1),(4;4)\}$$
$$g=\{(2;0),(3;4),(4;7),(6;2)\}$$

Hallar el rango de : $\dfrac{f}{g}$

A) $\left\{-\frac{1}{4};\frac{2}{7}\right\}$ B) $\left\{\frac{1}{4};\frac{3}{7}\right\}$ C) $\left\{-\frac{1}{4};\frac{3}{7}\right\}$
D) $\left\{\frac{1}{2};\frac{2}{5}\right\}$ E) $\left\{\frac{1}{2};\frac{2}{3}\right\}$

04 Dadas las funciones :

$$F_{(x)}=\{(-1;0),(0;1),(1;2),(2;5)\}$$
$$G_{(x)}=\{(0;3),(1;0),(2;1),(3;6),(4;8)\}$$

Hallar la suma de valores extremos de la función $F\times G$.

A) 3 B) 0 C) -1 D) 5 E) 8

05 Dadas las funciones:

$$F=\{(1;3),(2;6),(4;8),(6;2)\}$$
$$G=\{(0;1),(1;2),(2;-1),(4;5),(7;0)\}$$

Indicar la suma de elementos del rango de la función $F+G$.

A) 10 B) 5 C) 13 D) 23 E) 18

06 Sean las funciones :

$$F=\{(-3;2),(0;0),(2;4),(3;-1),(4;3)\}$$
$$G=\{(2;0),(3;4),(4;7),(6;2)\}$$

Hallar el mayor elemento del rango de F^2+3G.

A) 13 B) 16 C) 30 D) 36 E) 48

07 Dadas las funciones :

$$F_{(x)}=2\sqrt{x}\ ;\ x\in[0;+\infty\rangle$$
$$G_{(x)}=\{(-3;6),(-2;1),(0;2),(1;2),(2;3),(4,-2)\}$$

Hallar la suma de valores extremos de : F^2+G^3 .

A) 8 B) 20 C) 47 D) 43 E) 50

08 Sean las funciones :

$$f_{(x)}=x^2-3x-7$$
$$g_{(x)}=\{(-2;1),(0;1),(1;4),(2;5)\}$$

Calcular: $\left(3f^2+2g\right)^{(-2)}$

A) 25 B) 29 C) 31 D) 17 E) -6

09 Sean las funciones :

$$f_{(x)}=2x-3\ ;\ x\in\langle 3;6\rangle$$
$$g_{(x)}=x+2\ ;\ x\in\langle 2;5\rangle$$

Hallar: $(f+g)_{(x)}$

A) $(f+g)_{(x)}=3x-1\ ;\ x\in\langle 3;6\rangle$
B) $(f+g)_{(x)}=3x-1\ ;\ x\in\langle 2;5\rangle$
C) $(f+g)_{(x)}=3x-1\ ;\ x\in\langle 3;5\rangle$
D) $(f+g)_{(x)}=3x+1\ ;\ x\in\langle 3;6\rangle$
E) $(f+g)_{(x)}=3x+1\ ;\ x\in\langle 3;5\rangle$

10 Sean:

$F_{(x)}=\sqrt{x-3}$

$G_{(x)}=\{(0;1),(1;4),(2;3),(4;5);(6;-2)\}$

Indicar el producto de elmentos del rango de : $F^2(x)+3G(x)$

A) 16 B) 32 C)–32 D) –48 E) 54

11 Sean las funciones :

$F_{(x)}=\sqrt{6-x}\ ;\ G_{(x)}=\sqrt{x-1}$

Hallar el dominio de la función : "F× G".

A)$\langle 2;8\rangle$ B)$[1;13]$ C)$[1;6]$ D)$[1;4]$ E)$\langle 1;13\rangle$

12 Dadas las funciones :

$f=\{(-1;3),(0;2),(1;1),(2;4)\}$

$g=\{(-1;-1),(0;0),(1;1)\}$

Hallar z tal que: $\left(\dfrac{f^2}{g^3}\right)_{(z)}=-9$

A) –2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 2

13 Sea: $f_{(x)}=x^3$, con $Domf=R$ y la función : $g=\{(1;1),(2;4),(0;0),(-1;1)\}$

La suma de los elementos del dominio de $\left(\dfrac{f+2g}{g}\right)$ es :

A) 1 B) 2 C) 0 D) –2 E) –1

14 Sean :

$f_{(x)}=\sqrt{6+x-x^2}$

$G_{(x)}=\sqrt{4-x}$

¿Para qué intervalo existe $(f^2-g^2)_{(x)}$?

A) $[-2;4]$ B) $[-3;4]$ C) $-\langle -\infty;-2]$

D) $[-2;3]$ E) R

15 Sean las funciones:

$f=\{(2;0),(3;1),(4;6),(6;8)\}$

$g=\{(1;2),(0;3),(2;5),(3;4)\}$

Hallar : $f o g$

A)$\{(1;0),(2;1),(3;6)\}$ B)$\{(1;0),(0;1),(2;6)\}$

C)$\{(0;1),(1;0),(3;6)\}$ D)$\{(0;1),(1;2),(2,3)\}$

E)$\{(1;0),(2;1),(3;4)\}$

16 Si : $f=\{(0;2),(-1;6),(4;0),(5;1)\}$

$g=\{(2,1),(6;2),(1;3),(3;7)\}$

Hallar : $g\ o\ f$ indicando el producto de elementos del rango.

A) 4 B) 6 C) 12 D) 15 E) 24

17 Sean :

$f_{(x)}=\sqrt{1-x}$

$g_{(x)}=\sqrt{4-x^2}$

Hallar : $g\ o\ f$ señalando su dominio.

A)$\langle -3;1\rangle$ B)$[-3;1\rangle$ C)$\langle -3;1]$ D)$[-3;1]$ E)$\langle -\infty;1]$

18 Sean :

$f=\{(0;1),(1;2),(3;7)\}$

$g=\{(2;0),(3;1),(1;1)\}$

Hallar : $Ran(f o g)\cap Ran(g o f)$

A) {0} B) {0 ; 1} C) {1} D) {1 ; 2} E) {0 ; 2}

19 Sean :

$F=\{(-2;0),(0;2),(2;6),(4;3),(5;2),(6;0)\}$

$G=\{(0;3),(2;3),(5;2),(4;2),(3;6),(-1;0)\}$

Hallar la suma de valores extremos de FoG.

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 6

20 Si: $FoG=\{(3;5),(1;3),(0;7)\}$ y además:

$G=\{(3;2),(1;4),(0;5),(9;7),(11;-3)\}$

Determinar: $F_{(4)}+F_{(5)}$

A) 4 B) 7 C) 10 D) 11 E) No existe.

21 Si: $F_{(x)}=x^2+2x+2$; hallar G(x) tal que:

$(FoG)_{(x)}=x^2-4x+5$

A) $x-3$ B) $1-x$ C) $3-x$ D) A o B E) A o C

22 Sean :

$f_{(x)}=3x-2\ ;\ x\in\langle 1;7\rangle$

$g_{(x)}=2x+3\ ;\ x\in\langle 0;3\rangle$

Hallar : $f o g$

A)$fog=6x+7\ ;\ x\in\langle -1;2\rangle$ B)$fog=6x-1\ ;\ x\in\langle 0;3\rangle$

C)$fog=6x+7\ ;\ x\in\langle 0;2\rangle$ D)$fog=6x+1\ ;\ x\in\langle -1;2\rangle$

E)$fog=6x+3\ ;\ x\in\langle 0;2\rangle$

23 Dadas las funciones :

$f=\{(1;2),(2;-3),(-3;1)\}$

$g=\{(2;b),(1;2),(-3;1)\}$

Si: $gof=f+g$, calcule : $a+b$

A) 6 B) 5 C) -3 D) - 4 E) - 1

24 Sean las funciones :

$g=\{(3;6),(5;9),(8;4),(10;5),(7;6)\}$

$h=\{(3;9),(5;12),(7;9),(8;7)\}$

Halle la función f tal que $h = fog$

Indicar la suma de elementos del dominio .

A) 13 B) 15 C) 17 D) 19 E) 23

25 Dadas las funciones : $f_{(x)} = \sqrt{x}$; $g_{(x)} = 2x + 3$

Halle: $Dom(fog) \cap Ran(fog)$

A) $\langle 0;1\rangle$ B) $\left\langle 0;\frac{3}{2}\right\rangle$ C) $\left\langle -\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right\rangle$

D) $[0;+\infty\rangle$ E) $\left[-\frac{3}{2};+\infty\right\rangle$

26 Sean las funciones :

$f=\{(0;1),(3;5),(4;2),(-2;6)\}$

$g=\{(-1;0),(0;3),(1;4),(3;-1)\}$

Hallar $f \circ g$ indicando la suma de elementos del rango.

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

27 Sean :

$f_{(x)} = x + 1$

$g_{(x)} = x - 1$

Hallar : $f \circ g$

A) $x+1$ B) $x-1$ C) x D) $x+2$ E) x^2-1

SEXTA PRACTICA DIRIGIDA

01 Sea f una función $f: N \to N$, tal que :

$f(x)=4x-1$

¿Cuántas de las afirmaciones son verdaderas?

1) $f_{(f(3))}= f_{(12)}-3$
2) $f_{(5)}=f_{(2)}+12$
3) $f_{(2a+3b)}=2f_{(a)}+f_{(b)}$
4) $f_{(f(2))}=27$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

02 Sea f una función definida en R por la ecuación $f_{(x+3)}=x+7$, calcular $f_{(3/2)}$.

A) 1/2 B) 11/2 C) 13/2 D) 15/2 E) 17/2

03 Sea : $A=\{1;2;3;4\}$ y una función definida en A por : $f=\{(1;3),(2;a),(a+1;2),(1;b-1)\}$

Hallar : $f_{(1)}-f_{(2)}+f_{(4)}$

A) 6 B) 5 C) 4 D) 3 E) 2

04 Sea f una función definida en Q cuya regla de correspondencia es : $f(x) = x^2 - 1$

Hallar: $f_{(a)}$, si: $f_{(a-1)}=f_{(a)}$

A) -3/4 B) -1 C) 1/2 D) 3/4 E) 1/4

05 Se sabe que : $f=\{(a;b),(3;c),(1;3),(2b;4)\}$ y que $f: f(x)=x-2a$, entonces , el producto de los elementos de :

$Dom(f) \cap Ran(f)$; es :

A) -3 B) -2 C) -1 D) 1 E) 3

06 Hallar el rango de la función :

$f=\{(1;b),(1;b^2-2),(b;2),(-1;3)\}$

A) {3} B) {-1; 2; 3} C) {-1; 3}
D) {2; 3} E) {1; -2; 2; 3}

07 Sea la función $F: A \to B$

Siendo : $F=\{(1;2),(3;4),(6;7),(8;9),(10;6)\}$

Hallar : $L= F(1)+F(3)+F(6)-F(8)-F(10)$

A) -15 B) -16 C) -2 D) -13 E) -18

08 Sea la función lineal $F(x)=mx+b$

Si : $F(1)=-15 \wedge F(5)=-3$

Resolver la ecuación : $F(x) + 6 = 0$

Indicar su solución :

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

09 Si el conjunto F:

$F=\{(1;7a+3b),(-2;3a+2b),(2;1),(1;-8),(-2;-2),(a+b;4),(-3;2b),(6;4)\}$

es una función. Halle $\frac{a}{b}$

A) 5 B) 4 C) 3 D) -1 E) 2

10 Hallar el rango de la función :

$F=\{(1;b),(1;b^2-2),(b;2),(-1;3)\}$

A) {3} B) {-1; 2; 3} C) {-1;3}
D) {2; 3} E) {1; -2; 2; 3}

11 Sea la función «F» tal que :

$F=\{(2;5),(3;a^2),(3;4),(a;5)\}$

Hallar «a».

A) -2 B) 4 C) 6 D) 3 E) -6

12 Sean las funciones :

$F=\{(-3;2),(-4;1),(0;-2),(1;-2)\}$

$G=\{(0;3),(-4;3),(7;1),(8;-3)\}$

Hallar : $E=\dfrac{F_{(-4)}+G_{(7)}}{F_{\left(G_{(7)}\right)}}$

A) 1 *B) -1* *C) 0* *D) 2* *E) - 2*

13 Hallar el dominio de : $F_{(x)}=\dfrac{x^2-5x+6}{x-2}$

A) R *B)* $R-\{2\}$ *C)* $R-\{2\}$ *D)* $R-\{3\}$ *E)* $-R\{1\}$

14 Hallar el dominio de la siguiente función :

$$V=\sqrt{x^2-4}$$

A) $x\geq 2\wedge x\geq 2$ *B)* $x\geq 2$ *C)* $x\leq -2$

D) $x\leq 1$ *E)* $\langle -\infty;-2]\cup[2;+\infty\rangle$

15 Hallar el dominio de la función : $F_{(x)}=\dfrac{4x-2}{x+4}$

A) $x\in R$ *B)* $x\in R-\{2\}$ *C)* $x\in R-\{-4\}$
D) $x\in R-\{4\}$ *E)* $x\in R-\{1\}$

16 Hallar el rango de la función : $F_{(x)}=\dfrac{4x-1}{x+2}$

A) $y\in R-\{-4\}$ *B)* $y\in R-\{4\}$ *C)* $y\in R-\{2\}$
D) $y\in R-\{-2\}$ *E)* $y\in\phi$

17 Hallar el rango de la función : $F_{(x)}=\dfrac{5x-1}{2x-3}$

A) $y\in R-\left\{-\dfrac{5}{2}\right\}$ *B)* $y\in R-\left\{\dfrac{5}{2}\right\}$

C) $y\in R-\left\{\dfrac{2}{3}\right\}$ *D)* $y\in R-\left\{\dfrac{3}{2}\right\}$

18 Halle el rango de la función :

$$F_{(x)}=\frac{2}{\sqrt{x^2-1+1}}+\frac{\sqrt{1-x^2}}{2}$$

A) 4 *B) -2* *C) {2}* *D) 2* *E) 3*

19 Halle el rango de la función : $y=\dfrac{4x}{x^2+x+1}$

A) $\langle -2\,;2\rangle$ *B)* $[-4;4/3]$ *C)* $[4;5]$ *D)* $\{4\}$ *E)* $\{7\}$

20 Halle el rango de la función :

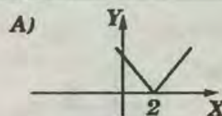
$$F_{(x)}=|x-1|+5;0<x\leq 4$$

A) $\left\langle 0;\frac{1}{2}\right\rangle$ *B)* $\langle 0;1\rangle$ *C)* $\langle 0;2\rangle$ *D)* $\langle 0;3\rangle$ *E)* $[0;3]$

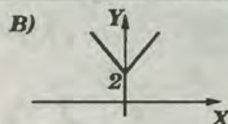
TAREA DOMICILIARIA

01 Graficar : $y=|x+2|$

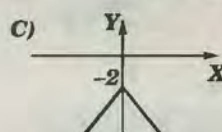
A)



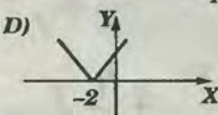
B)



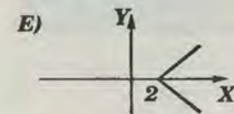
C)



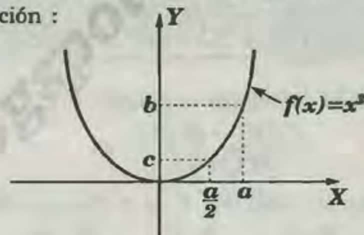
D)



E)

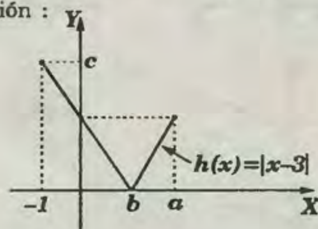


02 Sea f una función cuya gráfica se da a continuación :



Entonces se cumple que:
A) $b=2c$ *B)* $b=4c$ *C)* $b=3c$ *D)* $b=5c$ *E)* $b=16c$

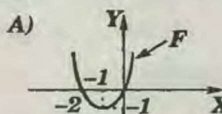
03 Sea f una función cuya gráfica se da a continuación :



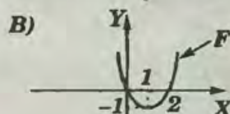
Calcule $a+b+c$
A) 13 *B) 1* *C) 2* *D) 7* *E) 9*

04 Grafique la siguiente función : $f(x)=x^2+2x$

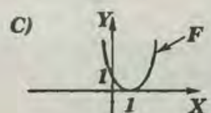
A)



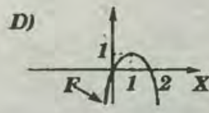
B)



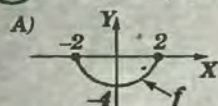
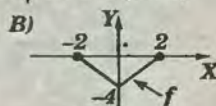
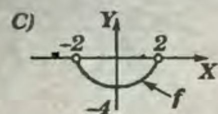
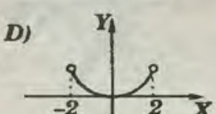
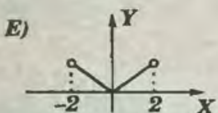
C)



D)



05 Grafique $f(x)=|x^2+1|-5;\ x\in\langle -2;2\rangle$

A) 
B) 
C) 
D) 
E) 

SEPTIMA PRACTICA DIRIGIDA

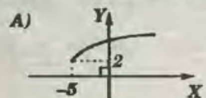
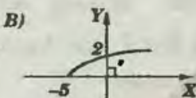
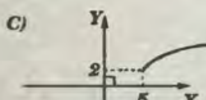
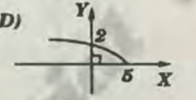
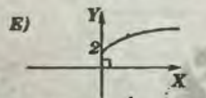
01 Hallar la función constante F tal que :

$$\frac{11F(3)+2F(5)}{3F(1)+5}=6$$

e indique el valor de : $F(1)+F(2)+F(3)$

A) 0 B) 18 C) –1 D) –12 E) 12

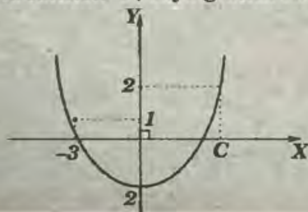
02 Graficar : $F(x)=\sqrt{x-5}+2$

A) 
B) 
C) 
D) 
E) 

03 Hallar el área que limita los ejes coordenados y la recta : $y=-\frac{2}{3}x+4$

A) $3u^2$ B) $2u^2$ C) $6u^2$ D) $12u^2$ E) $18u^2$

04 Dada la función F, cuya gráfica es :



Siendo $F(x)=ax^2+b$, halle : $\frac{b}{ac}$

A) 6 B) $3\sqrt{2}$ C) $-\sqrt{3}$ D) $3\sqrt{3}$ E) 1

05 Si la gráfica de F dada por :

$F(x)\equiv x^2-(n+1)x+2n-2$ es tangente al eje de las abscisas, hallar el valor de n .

A) 2 B) 3 C) 4 D) –5 E) –6

06 Para qué valores de «n» la gráfica de la función cuadrática F dada por :

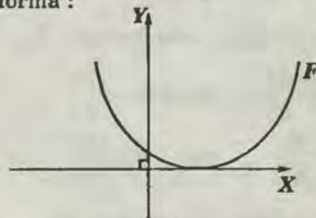
$F(x)\equiv x^2-2x+n+1$ intercepta al eje de las abscisas en dos puntos diferentes .

A) $n<0$ B) $n>0$ C) $n>1$ D) $n<1$ E) $n\in R$

07 Para que valores de «n» la función cuadrática F dada por : $F(x)\equiv x^2+6x-n$; no tiene interceptos con el eje de las abscisas .

A) $n>9$ B) $n<-9$ C) $n>2$ D) $n<0$ E) $1<n<3$

08 Hallar el valor de «m» para que el gráfico de la función F, definida por : $F(x)\equiv x^2-mx+m+5$ adopte la forma :



Indique : m^2+m

A) 100 B) 110 C) 26 D) 34 E) 180

09 Indicar que polinomios tienen sus gráficas que interceptan al eje de las abscisas

$P(x)=x^2+x+1$ $Q(x)=x^2-3x+1$

$R(x)=2x^2+7x-1$

A) Sólo $Q(x)$ B) Todos C) Ninguno
D) $P(x)$ y $Q(x)$ E) $Q(x)$ y $R(x)$

10 Hallar la función cuadrática F, que pasa por los puntos $(2;0)$, $(3;0)$ y $(1;4)$. Indicar su regla de correspondencia .

A) $y=2x^2-6x+8$ B) $y=-2x^2+3x+6$ C) $y=2x^2-5x+6$
D) $y=2x^2-10x+12$ E) $y=3x^2-54x+6$

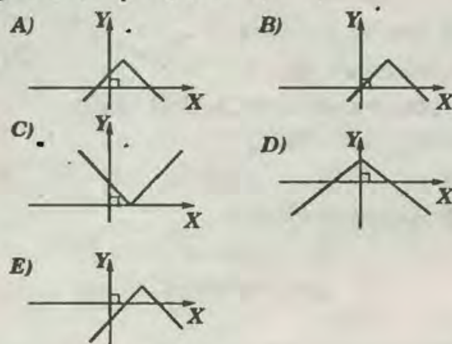
11 Dadas las funciones F y G tales que :

$F(x)\equiv x^2-4$ $G(x)\equiv x+2$

hallar uno de los puntos comunes de F y G

A) (–2; 8) *B) (–1; 9)* *C) (3; 5)* *D) (–2; 5)* *E) (3; 8)*

12 Grafique : $F(x) = 4 - |x - 3|$



13 Hallar el rango de F si :

$$F(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 5} - 3; -2 \le x < 6$$

A) $[-2;\sqrt{17}-3[$ *B)* $[\sqrt{7}-3;\infty[$ *C)* $]-\infty\,;3]$
D) $[-2;\sqrt{17}-3]$ *E)* $[3\,;\infty[$

14 Sea la función :

$$F = \left\{(x;y) \in R^2 \,/\, y = 4 + 2x - x^2\,;\; x \in [-2;4]\right\}$$

Hallar su rango

A) [–4;5] *B) [–2;2]* *C) [–2;3]* *D) [–5;5]* *E) [–4;4]*

15 Indicar el área de la región limitada por las gráficas de : $F(x) = |x - 2|$ y $G(x) = 3$

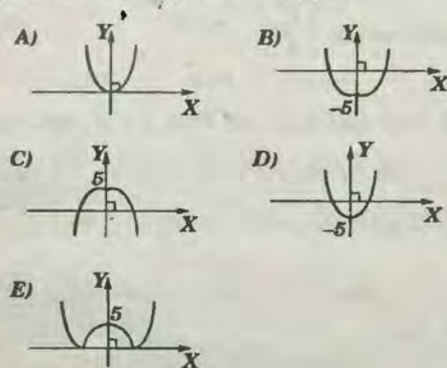
A) $3\,u^2$ *B)* $6\,u^2$ *C)* $9\,u^2$ *D)* $12\,u^2$ *E)* $15\,u^2$

16 Sea : $F(x) = x^2 - 4|x| - 2$

hallar su rango.

A) $[-2\,;\infty\rangle$ *B)* [–4 ; ¥⟩ *C)* $[2;4]$
D) $[-6\,;\infty\rangle$ *E)* $[-8;6]$

17 Graficar : $F(x) = x^2 - 4|x| - 5$



18 Halle el valor de «m» de tal manera que :

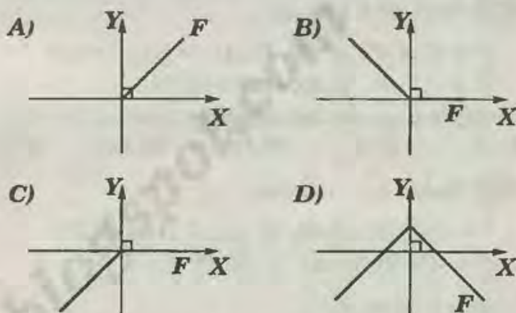
$F(x) \ge F(m), \forall x \in R$, siendo $F(x) = x^2 - 6x$

A) 2 *B) 3* *C) 4* *D) 5* *E) 6*

19 Sea : $F(x) = \sqrt{18 - 2x^2}$, hallar la intersección entre su dominio y su rango .

A) $[-3;0]$ *B)* $[0;9]$ *C)* $\langle 0\,;2]$ *D)* $[0;3]$ *E)* $[0;5]$

20 Indicar la gráfica de F, si : $F(x) = x + \sqrt{x^2}$



TAREA DOMICILIARIA

01 Hallar el rango de F, si : $F(x) = \dfrac{1}{x^2 + 4}$

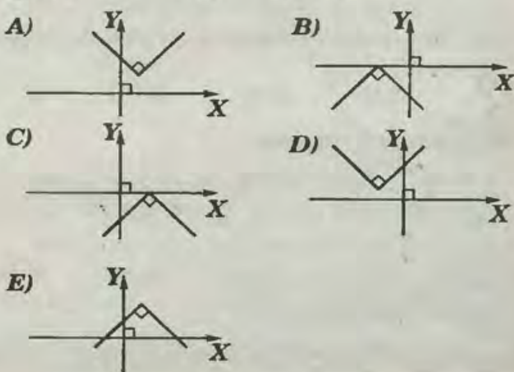
A) $\langle 0\,;1/4]$ *B)* $\langle 0\,;4]$ *C)* $[4\,;\infty\rangle$
D) $[1/4\,;\infty\rangle$ *E)* $[-1/4\,;1/4]$

02 Hallar el rango de F, si:

$$F(x) = x^2 - 6x + 3;\; x \in \langle -2;5\rangle$$

A) $\langle -6\,;19\rangle$ *B)* $[-5;10]$ *C)* $[-6\,;19\rangle$
D) $\langle -6\,;\,6\rangle$ *E)* $[-7\,;10\rangle$

03 Graficar : $F(x) = 3 - |x - 2|$



OCTAVA PRACTICA DIRIGIDA

ALGEBRA DE FUNCIONES

01 Sean las funciones :

$F(x)=\sqrt{x-1}.\sqrt{x-2}$ $\quad G(x)=\sqrt{(x-1)(x-2)}$

Indicar lo correcto:

A) F=G B) F=2G C) F=–G D) F=3G E) F≠G

02 Sean las funciones :

$F = \{(-3;2), (0;0), (2;4), (3;-1), (4;3)\}$

$G = \{(2;0), (3;4), (4;7), (6;2)\}$

Hallar la suma de elementos del dominio de $F \cdot G$

A) –4 B) 9 C) 17 D) 18 E) 21

03 Dadas las funciones :

$f = \{(-3;2), (0;0), (2;4), (3;-1), (4;3)\}$

$g = \{(2;0), (3;4), (4;7), (6;2)\}$

Hallar el rango de $\dfrac{f}{g}$

A) $\left\{-\dfrac{1}{4};\dfrac{2}{7}\right\}$ B) $\left\{\dfrac{1}{4};\dfrac{3}{7}\right\}$ C) $\left\{-\dfrac{1}{4};\dfrac{3}{7}\right\}$

D) $\left\{\dfrac{1}{2};\dfrac{2}{5}\right\}$ E) $\left\{\dfrac{1}{2};\dfrac{2}{3}\right\}$

04 Dadas las funciones :

$F(x) = \{(-1;0), (0;1), (1;2), (2;5)\}$

$G(x) = \{(0;3), (1;0), (2;1), (3;6), (4;8)\}$

Hallar la suma de valores extremos de la función $F\times G$

A) 3 B) 0 C) –1 D) 5 E) 8

05 Dadas las funciones :

$F = \{(1;3), (2;6), (4;8), (6;2)\}$

$G = \{(0;1), (1;2), (2;-1), (4;5), (7;0)\}$

Indicar la suma de elementos del rango de la función $F+G$

A) 10 B) 5 C) 13 D) 23 E) 18

06 Sean las funciones :

$F = \{(-3;2), (0;0), (2;4), (3;-1), (4;3)\}$

$G = \{(2;0), (3;4), (4;7), (6;2)\}$

Hallar el mayor elemento del rango de F^2+3G

A) 13 B) 16 C) 30 D) 36 E) 48

07 Dadas las funciones :

$F(x)=2\sqrt{x}\ ;\ x\in[0;+\infty\rangle$

$G(x) = \{(-3;6), (-2;1), (0;2), (1;2), (2;3), (4;-2)\}$

Hallar la suma de valores extremos de: «F^2+G^3»

A) 8 B) 20 C) 47 D) 43 E) 50

08 Sean las funciones :

$f(x) = x^2 - 3x - 7$

$g(x) = \{(-2;1), (0;1), (1;4), (2;5)\}$

Calcular : $(3f^2+2g)_{(-2)}$

A) 25 B) 29 C) 31 D) 17 E) –6

09 Sean las funciones :

$f(x) = 2x - 3;\ x\in\langle 3;6\rangle$

$g(x) = x + 2;\ x\in\langle 2;5\rangle$

Hallar : $(f+g)_{(x)}$

B) $(f+g)_{(x)} = 3x-1\ ;\ x\in\langle 3;6\rangle$

C) $(f+g)_{(x)} = 3x-1\ ;\ x\in\langle 2;5\rangle$

D) $(f+g)_{(x)} = 3x+1\ ;\ x\in\langle 3;5\rangle$

E) $(f+g)_{(x)} = 3x+1\ ;\ x\in\langle 3;5\rangle$

10 Sean : $F(x)=\sqrt{x-3}$

$G(x) = \{(0;1), (1;4), (2;3), (4;5), (6;-2)\}$

Indicar el producto de elementos del rango de :

$F^2(x)+3G(x)$

A) 16 B) 32 C) – 32 D) –48 E) 54

11 Sean las funciones :

$F(x)=\sqrt{6-x}\ ;\ G(x)=\sqrt{x-1}$

Hallar el dominio de la función «$F\times G$»

A) $\langle 2;8\rangle$ B) $[1;13]$ C) $[1;6]$

D) $[1;4]$ E) $\langle 1;13\rangle$

12 Dadas las funciones :

$f = \{(-1;3), (0;2), (1;1), (2;4)\}$

$g = \{(-1;-1), (0;0), (1;1)\}$

Hallar z tal que: $\left(\dfrac{f^2}{g^3}\right)_{(z)} = -9$

A) –2 B) –1 C) 0 D) 1 E) 2

13 Sea : $f(x) = x^3$, con $Dom\ f = \mathbb{R}$ y la función:

$g = \{(1;1), (2;4), (0;0), (-1;1)\}$

La suma de los elementos del dominio de : $\left(\dfrac{f+2g}{g}\right)$ es :

A) 1 B) 2 C) 0 D) –2 E) –1

14 Sean :

$f(x)=\sqrt{6+x-x^2}\ ;G(x)=\sqrt{4-x}$

¿Para qué intervalo existe $(f^2 - g^2)_{(x)}$?

A) [-2;4] B) [-3;4] C) $\langle -\infty; -2]$ D) [-2;3] E) R

15 Si: $f(x) = \begin{cases} x+1 & ; & x<2 \\ x-1 & ; & x>3 \end{cases}$

$g(x) = \begin{cases} x-1 & ; & x<1 \\ x+1 & ; & x>4 \end{cases}$

Determinar : $f(x) + g(x)$

A) $f+g = \begin{cases} 2x & ; & x<1 \\ 2x & ; & x>4 \end{cases}$ B) $f+g = \begin{cases} x & ; & x<1 \\ x & ; & x>4 \end{cases}$

C) $f+g = \begin{cases} 2x & ; & x<2 \\ 2x & ; & x>3 \end{cases}$

16 Sean : $f(x) = \sqrt{x-2}$

$g(x) = \sqrt{5-x}$

Hallar el dominio de: $f(x) - g(x)$

A) $\langle 2;5\rangle$ B) $\langle 0;2\rangle$ C) [2;5] D) [0;2] E) $[5;\infty\rangle$

17 Sean : $F(x) = \{(-2;0), (3;1), (4;0), (-3;1)\}$

$G(x) = \sqrt{x+2}$

Dar la suma de elementos del rango de : $H = 2F - 3G^2$

A) 18 B) –18 C) –14 D) –31 E) –34

18 Sean las funciones :

$f(x) = 3x - 1 ; \quad x \in \langle 1;6\rangle$

$g(x) = x+2 ; \quad x \in \langle -1;3\rangle$

Hallar : $f(x) + g(x)$

A) $(f+g)(x) = 4x+1; \ x \in \langle 1;6\rangle$

B) $(f+g)(x) = 4x+1 ; \ x \in \langle 1;3\rangle$

C) $(f+g)(x) = 4x+1 ; \ x \in \langle -1;3\rangle$

D) $(f+g)(x) = 4x-1 ; \ x \in \langle 1;3\rangle$

E) $(f+g)(x) = 4x-1 ; \ x \in \langle 1;6\rangle$

TAREA DOMICILIARIA

01 Sean las funciones :

$f(x) = x ; \ g(x) = \sqrt{x^2}$

Indicar verdadero o falso.

I) $f(x) = g(x)$

II) Dom f = Dom g

III) Rang f = Rang g

A) VVV B) VVF C) FVV D) FVF E) FFF

02 Sean las funciones :

$F = \{(-3;2), (0,0), (2;4), (3;-1); (4;3)\}$

$G = \{(2;0), (3;4), (4;7), (6;2)\}$

Hallar : $F + G$

A) {(2;4), (3;8), (4;10)} B) {(2;4), (3;3), (4;10)}
C) {(2;4), (3;2), (4;11)} D) {(2;4), (3;8), (4;11)}
E) {(2;4), (3;9), (4;12)}

03 Dadas las funciones :

$A(x) = \{(1;6), (2;8), (4;3), (7;1)\}$

$B(x) = \{(1;2), (2;4), (4;0), (-1;0)\}$

Halle : $A(x)/B(x)$; indicar el producto de elementos del rango

A) 6 B) 10 C) 15 D) 20 E) 0

C) $H_{(x)} = \sqrt{x+2} - 4 ; \ x \in \langle 2;3]$

D) $H_{(x)} = \dfrac{1}{\sqrt{(x+2)^2 - 4}} ; \ x \in [2;3]$

E) $H_{(x)} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 4 + 2}} ; \ x \in [2;3]$

04 Sean las funciones *f* y *g* tal que :

$f = \{(3;5), (2;6), (5;0), (6;1)\}$

$g = \{(2;4), (6;3), (3;1), (7;-1)\}$

Halle : $f+g$, indique su rango

A) {6;8;10} B) {4;6;8} C) {4;8;10}
D) {4;6;10} E) {6;10;12}

05 Sean las funciones :

$F = \{(-3;5), (0;1), (2;3), (3;-1), (5;3)\}$

$G = \{(2;1), (3;2), (5;7), (6;0)\}$

Hallar la suma de valores extremos de : $F \times G$

A) 18 B) 22 C) 1 D) 24 E) 19

NOVENA PRACTICA DIRIGIDA

ALGEBRA DE FUNCIONES

01 Sean las funciones :

$F = \{(-3;2), (0;0), (2;4), (3;-1), (4;3)\}$

$G = \{(2;0), (3;4), (4;7), (6;2)\}$

Determinar $Ran(F+G)$

A) {4;3;10} B) {4;3} C) {3;10}
D) {4;3;10;12} E) {4;3;10;14}

02 Sean las funciones **F** y **G** tales que:

$F = \{(-1;3); (2;0); (4;-1); (5;4)\}$

$2G = \{(8;2); (4;6); (2;6); (1;9)\}$

Entonces encuentre el rango de **FG**

A) ϕ B) {0} C) {–3} D) {0;–3} E){0;–6}

03 Dadas las funciones numéricas:

$F = \{(3;1); (4;2); (7;3); (0;6); (1;4)\}$

$G = \{(1;3); (2;5); (3;0); (8;4); (7;1)\}$

Determinar la función *(F+G)*

A) {(1;7); (3;4); (0;3)} B) {(4;7); (2;4); (0;4)}
C) {(1;7); (3;1); (7;4)} D) {(4;7); (2;1); (0;7)}
E) {(3;1); (2;7); (4;1)}

04 De las funciones numéricas expuestas :

$H = \{(4;6); (7;1); (-2;6); (6;8); (3;10)\}$

$G = \{(5;4); (4;2); (0;9); (-2;3); (6;0)\}$

Efectuar el producto de $(H\times G)$

A) {(4;10); (–2;6); (6;8)} B) {(4;12); (–2;6); (6;0)}
C) {(4;10); (–2;18); (6;8)} D) {(4;12); (–2;18); (6;0)}
E) {(3;0); (–2;12); (4;6)}

05 A partir de las funciones :

$F = \{(1;4); (2;3); (3;2); (4;5); (7;-1)\}$

$G = \{(0;2); (1;2); (2;-1); (3;0); (5;2)\}$

Determinar F^2+2G

A) {(1;20); (2;5); (3;4)} B) {(1;20); (2;7); (3;4)}
C) {(1;20); (2;5); (3;2)} D) {(1;20); (2;7); (3;2)}
E) {(1;9); (2;6); (3;11)}

06 Hallar el rango de *F* o *G* para :

$F = \{(1;-2); (2;-5); (3;0); (4;-1)\}$

$G = \{(0;1); (1;0); (3;3); (-1;4); (2;1)\}$

A) {–1;0} B) {–2;–1;0} C) {–5;–2}
D) {–2;0} E) {–5;0}

07 Consideremos las funciones :

$G = \{(-1;0); (2;3); (4;1); (-3;2); (0;0); (6;1)\}$

$F = \{(0;5); (1;-1); (2;3); (-1;7); (7;0)\}$

Luego el producto de los elementos del rango de *F* o *G* es :

A) –5 B) 0 C) –105 D) 15 E) –15

08 Dadas las funciones reales de variable real:

$F = \{(x;y)/y=2x+1; -5<x<10\}$

$G = \{(x;y)/y=x^2+4; -3<x\leq 4\}$

Hallar el dominio de : *F o G*

A)]–6;6[B) [–6;6] C)]–6;6]
D) [–6;6[E) $\left]-\sqrt{6};\sqrt{6}\right[$

09 Para : $F(x)=\sqrt{1-x}$ y $G(x)=\sqrt{-x^2+4}$

Hallar *G o F*. Dar su dominio.

A)]–3;1[B) [–3;1[C)]–3;1] D) [–3;1] E)]–∞;1]

10 Hallar todas las funciones lineales *F*, tales que:

$$(FoF)\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{4-x}{x};x\neq 0$$

Indicar una de ellas

A) $F(x) = 2x + 2$ B) $F(x) = 1 - 2x$ C) $F(x) = 1 + 4x$
D) $F(x) = 1 - 4x$ E) $F(x) = 2x + \frac{1}{3}$

11 Determinar *F + G* donde :

$$F(x)=\begin{cases}x^2;x\in Q\\-x^2;x\in Q'\end{cases}$$

$$G=\{(\sqrt{2};4);(7;0);(3;8)\}$$

Dar como respuesta la suma de los elementos del rango de *(F+G)*

A) 64 B) 68 C) 70 D) 72 E) 76

12 Marque verdadero *(V)* o falso *(F)* según corresponda:

( ) $F = \{(t;t^2)/0\leq t<4\}$ es una función par

( ) $G = \{(x;y)/y=|x+2|\}$ es una función par

( ) $\forall x\in\,]-2;2[$, la función *H*, es impar, donde: $H(x) = x^3$

A) VFF B) VVV C) FFV D) FVF E) VFV

13 Sean las funciones:

I) $F(x) = 3x^4 - 2x^2$

II) $G(x)=|x^3+2x|;x\in\,]-3;3[$

III) $H(x) = x^5$

IV) $J(x) = x^3 - x$

¿cuántas son funciones pares?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) Ninguna es función par

14 Sea : $F(x) = x^2 + x + 1$

$H(x) = F(x) + F(-x)$

$G(x) = F(x) - F(-x)$

Determinar cuál de las siguientes proposiciones es verdadera:

A) H es par y G es impar B) H es impar y G es par
C) H y G son impares D) H y G son pares
E) H es par y G no es par ni impar

15 Encontrar una función lineal «*F*» tal que:

$$F(2) = 3 \text{ y } F(3) = 2F(4)$$

A) $F(x) = x+2$ B) $F(x) = 3x+6$ C) $F(x) = 2x+3/2$
D) $F(x) = x/2+2$ E) $F(x) = -x+5$

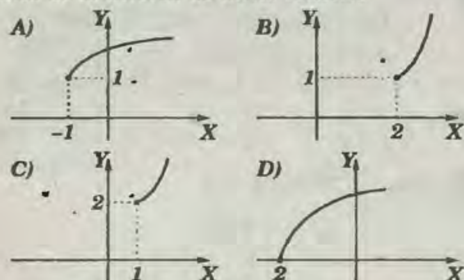
16 Sea «*F*» una función de proporcionalidad tal que : $F(4) + F(12) = 64$

Hallar $(F(31/4) - F(21/4))^2$

A) 25 B) 100 C) 36 D) 49 E) 64

17 Sea la función $F(x)=\sqrt{x-1}+2$, bosquejar la

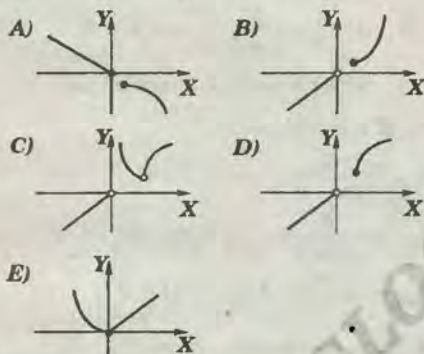
gráfica de la inversa de dicha función.



E) No existe

18 Indicar el gráfico de la inversa de $F(x)$ si:

$$F(x)=\begin{cases}3x; x\in\langle-\infty;0\rangle\\ x^3; x\in[1;+\infty\rangle\end{cases}$$



19 Dada la función biyectiva :

$$F:[1;4]\rightarrow[2;6]/F(x)=\frac{1}{ax+b}$$

Hallar la suma de los valores que puede tomar «b»

A) 1/2 *B) 2* *C) 3* *D) 1/6* *E) 2/3*

20 Hallar , si existe la función inversa de :

$$F(x)=x-[x] \;;\; 0\le x\le 1$$

NOTA :

[ ] indica el máximo entero

A) $F^*(x)=x; x\in[0;1]$ *B)* $F^*(x)=x; x\in]0;1[$
C) $F^*(x)=-x; x\in[0;1]$ *D)* $F^*(x)=-x; x\in]0;1[$
E) $2F^*$

21 Dada la función :

$$F(x)=-\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{2}x-\frac{1}{4}$$

Si : $x<2$, hallar si existe la inversa de F .

A) $-3+2\sqrt{x+2}$ *B)* $3-2\sqrt{2+x}$ *C)* $4-\sqrt{x+1}$
D) $3-\sqrt{x+2}$ *E) No existe inversa*

22 Si : $F(x)=4\sqrt{x}-x;\ x\in[0;1]$

Hallar F^*

A) $F^*(x)=\left(2-\sqrt{4-x}\right)^2; x\in[0;3]$
B) $F^*(x)=\left(2+\sqrt{4-x}\right)^2; x\in[0;3]$
C) $F^*(x)=\sqrt{(1+x)^2}+1; x\in[0;1]$
D) $F^*(x)=\sqrt{(1+x)/x}-1; x\in[0;3]$
E) $F^*(x)=\sqrt{1-x}-1; x\in[0;2]$

23 Halle la inversa de la función :

$$F(x)=4-\sqrt{1-x^2}\,;\, x\in[-1;0]$$

Si existe

A) $F^*(x)=\sqrt{1+(4-x)^2}$ *B)* $F^*(x)=-\sqrt{1+(4-x)^2}$
C) $F^*(x)=\sqrt{1-(x+4)^2}$ *D)* $F^*(x)=\sqrt{1+(x-4)^2}$
E) No existe inversa

24 Sea la función «F» indicar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

Si: $F(x)=x^3-x^2$

( ) Es creciente en $]0;1[$
( ) Es estrictamente decreciente en $]-\infty;0]$
( ) Es estrictamente creciente en $]2/3;\infty[$

A) FFV *B) FFF* *C) VFF* *D) FVF* *E) VFV*

DECIMA PRACTICA DIRIGIDA

COMPOSICIÓN -FUNCION INVERSA

01 Sean las funciones:

$f=\{(2;0),(3;1),(4;6),(6;8)\}$
$g=\{(1;2),(0;3),(2;5),(3;4)\}$

Hallar : $f\,o\,g$

A) $\{(1;0),(2;1),(3;6)\}$ *B)* $\{(1;0),(0;1),(2;6)\}$
C) $\{(0;1),(1;0),(3;6)\}$ *D)* $\{(0;1),(1;2),(2;3)\}$
E) $\{(1;0),(2;1),(3;4)\}$

02 Si : $f=\{(0;2),(-1;6),(4;0),(5;1)\}$

$g=\{(2;1),(6;2),(1;3),(3;7)\}$

Hallar : $g\,o\,f$ indicando el producto de elementos del rango .

A) 4 *B) 6* *C) 12* *D) 15* *E) 24*

03 Sean : $f(x)=\sqrt{1-x}$

$g(x)=\sqrt{4-x^2}$

Hallar : $g\,o\,f$ señalando su dominio .

A) $\langle-3;1\rangle$ *B)* $[-3;1\rangle$ *C)* $\langle-3;1]$
D) $[-3;1]$ *E)* $\langle-\infty;1]$

04 Sean : $f = \{(0;1), (1;2), (3;7)\}$

$g = \{(2;0), (3;1), (1;1)\}$

Hallar : $Ran\ (f \circ g) \cap Ran\ (g \circ f)$

A) $\{0\}$ B) $\{0;1\}$ C) $\{1\}$ D) $\{1;2\}$ E) $\{0;2\}$

05 Sean :

$F = \{(-2;0), (0;2), (2;6), (4;3), (5;2), (6;0)\}$

$G = \{(0;3), (2;3), (5;2), (4;2), (3;6), (-1;0)\}$

Hallar la suma de valores extremos de $F \circ G$

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 6

06 Si $FoG = \{(3;5), (1;3), (0;7)\}$; y además :

$G = \{(3;2), (1;4), (0;5), (9;7), (11;-3)\}$

Determinar : $F_{(4)} + F_{(5)}$

A) 4 B) 7 C) 10 D) 11 E) No existe

07 Si : $F(x) = x^2 + 2x + 2$; hallar $G(x)$ tal que:

$(FoG)_{(x)} = x^2 - 4x + 5$

A) $x-3$ B) $1-x$ C) $3-x$ D) A o B E) A o C

08 Sean : $(x) = 3x - 2$; $x \in \langle 1; 7 \rangle$

$g(x) = 2x + 3$; $x \in \langle 0; 3 \rangle$

Hallar $f \circ g$

A) $f \circ g = 6x + 7$; $x \in \langle -1; 2 \rangle$

B) $f \circ g = 6x - 1$; $x \in \langle 0; 3 \rangle$

C) $f \circ g = 6x + 7$; $x \in \langle 0; 2 \rangle$

D) $f \circ g = 6x + 1$; $x \in \langle -1; 2 \rangle$

E) $f \circ g = 6x + 3$; $x \in \langle 0; 2 \rangle$

09 Dadas las funciones :

$f = \{(1;2), (2;-3), (-3;1)\}$

$g = \{(2;b), (1;2), (-3;a)\}$

si $g \circ f = f + g$, calcule : $a + b$

A) 6 B) 5 C) -3 D) -4 E) -1

10 Sean las funciones:

$g = \{(3;6), (5;9), (8;4), (10;5), (7;6)\}$

$h = \{(3;9), (5;12), (7;9), (8;7)\}$

Halle la función f tal que $h = f \circ g$

Indicar la suma de elementos del dominio

A) 13 B) 15 C) 17 D) 19 E) 23

11 Dadas las funciones :

$f(x) = \sqrt{x}$; $g(x) = 2x + 3$

Halle $Dom(f \circ g) \cap Ran\ (f \circ g)$

A) $\langle 0; 1 \rangle$ B) $\left\langle 0; \frac{3}{2} \right\rangle$ C) $\left\langle -\frac{3}{2}; \frac{3}{2} \right\rangle$

D) $[0; +\infty\rangle$ E) $\left[-\frac{3}{2}; +\infty \right\rangle$

12 Sean las funciones :

$f = \{(0;1), (3;5), (4;2), (-2;6)\}$

$g = \{(-1;0), (0;3), (1;4), (3;-1)\}$

Hallar f o g indicando la suma de elementos del rango

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

13 Sean : $f(x) = x + 1$

$g(x) = x - 1$

Hallar: $f \circ g$

A) $x+1$ B) $x-1$ C) x D) $x+2$ E) x^2-1

14 Si : $f(x^2 - 1) = 2x^2 + 4$

$G(x) = 3x + 2$

Hallar $(F \circ G)(2x - 1)$

A) $8x+2$ B) $2x+4$ C) $9x-6$ D) $6x+6$ E) $12x-4$

15 Si : $F(x) = \dfrac{1}{x+2}$; $x \in [0; 4]$

$G(x) = \sqrt{x^2 - 4}$; $x \in [2; 3]$

Halle : $H = F \circ G$

A) $H_{(x)} = \dfrac{1}{\sqrt{x-4}}$; $x \in [2; 3\rangle$

B) $H_{(x)} = \dfrac{1}{\sqrt{x+2}}$; $x \in [2; 3]$

C) $H_{(x)} = \sqrt{x+2} - 4$; $x \in \langle 2; 3]$

D) $H_{(x)} = \dfrac{1}{\sqrt{(x+2)^2 - 4}}$; $x \in [2; 3]$

E) $H_{(x)} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 4} + 2}$; $x \in [2; 3]$

16 Sean : $f(x) = \sqrt{3 - x}$

$g(x) = \sqrt{x - 2}$

Hallar f o g, indicando su dominio :

A) $[2; \infty\rangle$ B) $[3; \infty\rangle$ C) $[2; 3]$

D) $[2; 13]$ E) $[3; 13]$

17 Siendo : $F(x) = x^2 - 2x + 3$, hallar $G(x)$ tal que : $(F \circ G)(x) = x^2 + 6x + 11$

A) $x+3$ B) $-x-3$ C) $-x-2$ D) A o B E) A o C

18 Dadas las funciones :

$G = \{(2;5), (4;6), (5;8), (7;1)\}$

$H = \{(2;7), (4,9), (5;3)\}$

Halle una función f de mínima cantidad de elementos tal que $H = F \circ G$, indique la suma de elementos del rango de F.

A) 14 B) 17 C) 19 D) 21 E) 24

19 Dadas las funciones :

$$f(x)=\frac{1}{x-3} \ ; \ x\in\langle 3;8\rangle$$

$$g(x)=x^2-1 \ ; \ x\in\langle -2\ ;\ 5\rangle$$

Hallar : $D f o g$

A) $\langle -2\ ;\ 5\rangle$ B) $\langle -2\ ;\ 3\rangle$ C) $\langle -3\ ;-2\rangle$
D) $\langle 2\ ;\ 5\rangle$ E) $\langle 2\ ;\ 3\rangle$

20 Sean : $f(x)=x+2$; $g(x)=x-3$

Hallar : $f(g_{(x)})$

A) x+1 B) x–1 C) x–2 D) x–2 E) x+1

TAREA DOMICILIARIA

01 Sean las funciones:

$f=\{(3;1),(2;1),(5;1),(4;7)\}$
$g=\{(-1;3),(1;2),(0;4),(7;6)\}$

Hallar : $f o g$

A) {(–1;1), (1;1), (0;1)} B) {(–1;1), (1;1), (0;7)}
C) {(3;2), (2;2), (4;6)} D) {(–1;1), (2;2), (4;6)}
E) {(3;2), (2;2), (0;1)}

02 Sean : $F=\{(-3\ ;1),(-1\ ;0),(0\ ;-1),(3\ ;2)\}$

$G=\{(1\ ;7),(0\ ;2),(2\ ;4),(7\ ;6)\}$

Hallar el producto de valores extremos de F o G

A) 6 B) 8 C) 12 D) 14 E) 28

03 Si : $f=\{(-1;3),(0;2),(1;4),(2;5)\}$

$g=\{(3;1),(2;5),(5;3),(6;0)\}$

Hallar g o f, señalando la suma de elementos del rango

A) 8 B) 9 C) 10 D) 12 E) 13

04 Sean : $f=\{(2;0),(3;1),(1;1)\}$

$g=\{(0;1),(1;2),(3;7)\}$

Hallar : $Ran\ (g o f)\cap Ran\ (g-f)$

A) {0} B) {1} C) {2} D) {0;1} E) {1;2}

05 Sean : $f=\{(0;1),(1;2),(2;3),(4;3),(5;2)\}$

$g=\{(6;7),(5;4),(4;3),(2;4),(1;4),(0;7)\}$

Hallar $Dom\ (f o g)\cap Dom\ (g o f)$

A) {1} B) {5} C) {2} D) {1;5} E) {1;2}

06 Indicar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

p : La función $f(x)=\sqrt{x}+2; x>1$, tiene inversa.

q : La función $g(x)=x^2+1; x\in\langle -6\ ;\ 3\rangle$, tiene inversa.

t : La función $h(x)=\sqrt{x^2-3}$, $x>3$, tiene inversa.

A) VFV B) FVF C) FFV D) FVV E) VVF

07 Una tienda comercial ha vendido 200 reproductores de discos compactos a la semana a un precio de 350 dólares cada una. Una investigación de mercado indica que por cada 10 dólares de descuento que se ofrezca a los compradores, el número de aparatos vendidos se incrementará en 20 unidades más.

A) ¿Cuánto debe ser la rebaja para maximizar el ingreso?

B) ¿Cuál debe ser el precio de venta para maximizar el ingreso?

C) ¿Cuál es el ingreso máximo?

Entonces, la respuesta en ese orden es:

A) 125; 250; 100 250 B) 75; 225; 111 250
C) 100; 450; 102 250 D) 25; 125; 101 250
E) 125; 225; 101 250

DECIMA PRIMERA PRACTICA

FUNCIONES

01 Si el conjunto:

$F=\{(1;a^2),(1;a+2),(2;a^3+1),(a;3a+1)\}$

nos representa a una función, entonces la suma de los elementos del rango es:

A) 20 B) 10 C) 3 D) –1 E) –5

02 Sea el conjunto:

$F=\{(1;5),(2;6),(3;8),(4;12),(x;10)\}$

Calcular la suma de los valores que no admite "x" para que F nos represente a una función.

A) 3 B) 5 C) 10 D) 13 E) 18

03 ¿Cuál(es) de los siguientes conjuntos:

$$F=\{(x-y;xy)/x,y\in R\}$$

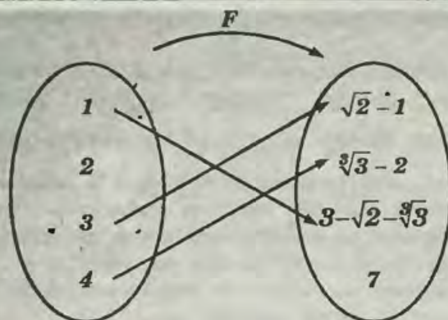
$$G=\left\{(\sqrt{x^2-4x+4};|2-x|)/x\in R\right\}$$

$$H=\left\{(t^2+2;t+3)/t\in R\right\}$$

nos representa(n) a una función?

A) Sólo F B) Sólo G C) Sólo H D) F y G E) G y H

04 Dado el siguiente diagrama sagital:



calcular el valor de:

$$E=\frac{F(1)^3+F(3)^3+F(4)^3}{F(1)\times F(3)\times F(4)}$$

A) 9 B) 3 C) 1 D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{1}{9}$

05 La suma de los elementos enteros del dominio de la siguiente función:

$$F(x)=\sqrt{x+5}+\frac{1}{\sqrt{8-x}}+\frac{1}{x-7}$$

es:

A) 6 B) 13 C) 14 D) 19 E) 26

06 El dominio maximal de la siguiente función:

$$F(x)=\sqrt{x-\sqrt{x+2}}$$

es:

A) $[-1;2]$ B) $[0;2]$ C) $[-1;0]$ D) $[4;+\infty[$ E) $[2;+\infty[$

07 Determine el rango de:

$$F(x)=x+\frac{2b}{x}$$

sabiendo que: $D_F=\mathbb{R}^+ \wedge b\in\mathbb{R}^+$

A) $\left[2\sqrt{b};+\infty\right[$ B) $\left]2\sqrt{b};+\infty\right[$ C) $\left[2\sqrt{2b};+\infty\right[$

D) $\left[-2\sqrt{b};+\infty\right[$ E) $\left[-2\sqrt{b};2\sqrt{b}\right]$

08 Sea: $F=\{(x;x^2-2)/\ D_F=]-2;2]\}$

Entonces la suma de los elementos del rango de F es:

A) −2 B) −1 C) 0 D) 1 E) 2

09 Si la intersección del dominio y rango de la siguiente función:

$$F(x)=\frac{10x+5}{2x+4}$$

es: $\mathbb{R}-\{a;b\}$, entonces el valor de ab es:

A) 10 B) −5 C) −1 D) 5 E) 10

10 Si $[a;b]$ es el rango de la función:

$$F(x)=\frac{x+1}{x^2+3}$$

entonces el valor de $a^{-1}+b^{-1}$ es:

A) −8 B) −4 C) −2 D) 4 E) 8

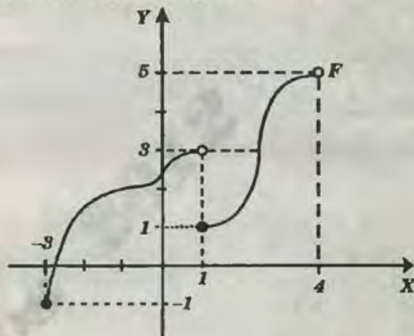
11 Con respecto a la siguiente función:

$$F(x)=3+\sqrt{16-x^2}$$

el $Dom(F)\cap Ran(F)$ es:

A) $[-4;7]$ B) $[-4;3]$ C) $[4;7]$ D) $[3;4]$ E) $[3;7]$

12 Dado el siguiente gráfico:



calcular la suma de los elementos enteros del $D_F\cap R_F$.

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 9

13 Sea F una función lineal, tal que:

$$F(10)=11 \text{ y } F(50)=15.$$

Calcular el valor de: $J=F(3)+F(7)$

A) 30 B) 28 C) 25 D) 23 E) 21

14 Calcular el área de la región encerrada por la gráfica de las funciones:

$$F(x)=x+2\ ;\ G(x)=-\frac{2x}{3}+\frac{16}{3}$$

y el eje de las abscisas.

A) 40 u^2 B) 30 u^2 C) 20 u^2 D) 10 u^2 E) 5 u^2

15 Sea F una función de proporcionalidad, tal que:

$$F(0{,}1)+F(0{,}2)+F(1{,}7)=0{,}02$$

Entonces el valor de $F(0{,}01)$ es:

A) 10^{-5} B) 10^{-4} C) 10^{-3} D) 10^{-2} E) 10^{-1}

16 Sea la función: $F(x)=x^2-4x;\ 3x\in]-3;15[$

Si $Ran(F)=[a;b[$, entonces el valor de $2a+3b$ es:

A) 7 B) 4 C) −2 D) −4 E) −7

17 Sean las funciones:

$$F(x) = 2x^2 - x - 1 \;;\; G(x) = -x^2 + 3x + 1$$

Si $Ran(F) \cap Ran(G) = [a; b]$, entonces el valor de $2a+b$ es:

A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 2

18 Sean las funciones:

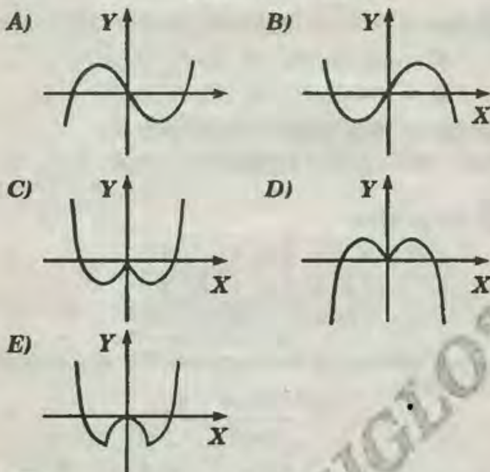
$$F(x) = x^2 - 4x + 8 \wedge G(x) = mx - 1$$

Calcular la suma de los valores de "m" en valor absoluto para que la gráfica de las funciones se corten en un punto (interpretar geométricamente)

A) 8 B) 9 C) 10 D) 11 E) 12

19 Esbozar la gráfica de la función:

$$F(x) = |x|\,x - 3x$$



20 Sea F una función real de variable real, tal que:

$$F(x^2) - F(y^2) + 2x + 1 = F(x+y).F(x-y)$$

Entonces el valor de $F(-0{,}009)$ es:

A) 0,119 B) 0,919 C) 0,091 D) 0,999 E) 0,991

DECIMA SEGUNDA PRACTICA

FUNCIONES :PERIODICA , MONÓTONA , ACOTADA , ALGEBRA DE FUNCIONES

01 ¿Cuál(es) de las siguientes funciones:

$F(x) = x^8 + 1; x \in [-2; 2]$

$G(x) = x^5 - x; x \in]-3; 3[$

$H(x) = |x| - 1; x \in]-2; 2]$

es(son) par?

A) Sólo F B) Sólo G C) Sólo H D) F y G E) F y H

02 Sea F una función par. Dar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

( ) $H(x) = F(|x|)$ es par

( ) $H(x) = F(-x)$ es impar

( ) $H(x) = F(x) + 5$ es par

A) VVV B) FVV C) FFF D) VFV E) VVF

03 Dar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

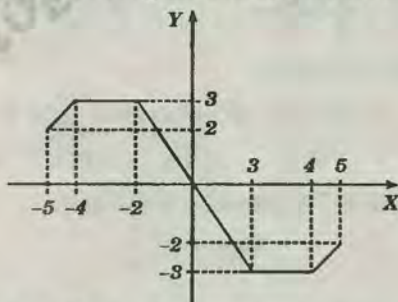
( ) La gráfica de toda función par es simétrica respecto al eje Y.

( ) La gráfica de toda función impar es simétrica respecto al origen.

( ) Toda función con dominio simétrico se puede expresar como la suma de una función par y otra impar.

A) FFF B) VVF C) VVV D) FVV E) VFF

04 Se muestra la gráfica de la función F:



Entonces podemos afirmar que:

A) F es par B) F es impar C) F no es par
D) F no es impar E) Faltan datos

05 Sean las funciones:

$$F = \{(-3; 1), (-2; 0), (1; 4), (2; -1)\}$$
$$G = \{(-5; 2), (-3; 2), (-2; 5), (1; 6), (3; 7)\}$$

Calcular la suma de los elementos del rango de:

$$F + G + F.G$$

A) 11 B) 22 C) 33 D) 44 E) 55

06 Dadas las siguientes funciones:

$$F = \{(-3; 5), (-1; 4), (2; 7), (3; 9)\}$$
$$G = \{(-3; -2), (-1; 1), (2; -2), (4; 7)\}$$

Si: $\dfrac{F}{G+2} = \{(a+1; b)\}$, calcular el valor de:

$$E = b^{-1} - a$$

A) 2,5 B) 2,75 C) 3 D) 3,25 E) 3,75

07 Sean las funciones:

$F(x+3)=x^2+2;\ x\in[1;2]$

$G\left(\frac{x}{2}+1\right)=-2x-3;\ x\in[6;8[$

Si el rango de $F+G$ es $]a;b]$, entonces el valor de $a-b$ es:

A) -25 B) 25 C) 1 D) -1 E) 0

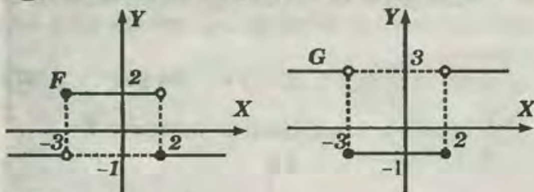
08 Sean las funciones:

$$F(x)=\sqrt{9-x^2}\ \wedge\ G(x)=\sqrt[4]{x^2-1}$$

Hallar: $Dom(F^3+5G)$

A) $[-3;-1]$ B) $[1;3]$ C) $[-3;1]$
D) $[-1;3]$ E) $[-3;-1]\cup[1;3]$

09 Se muestran las gráficas de las funciones:



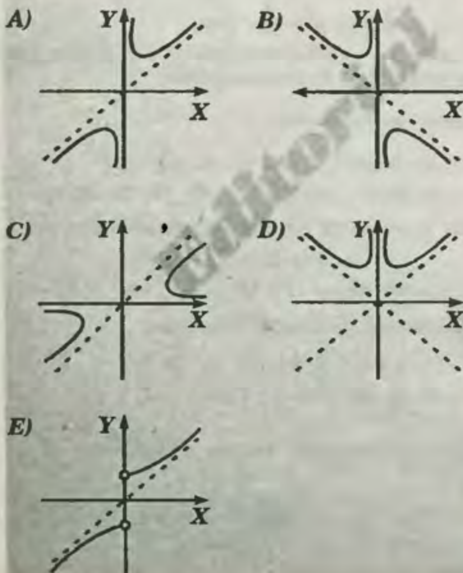
Calcular el valor de:

$$E=(F+G)(-3)+(F.G)(2)+\left(\frac{G}{F}\right)(-4)$$

A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 2

10 Esbozar la gráfica de la función:

$$F(x)=x+\frac{1}{x}$$



11 Sean G y H dos funciones definidas por:

$G=\{(1;0),(3;3),(-1;4),(2;1)\}$
$H=\{(-1;-6),(2;-2),(3;9)\}$

Si: $FoG=H$, entonces la suma de los elementos del rango de F es:

A) -3 B) -1 C) 1 D) 2 E) 3

12 Sean F y G dos funciones: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, tal que:

$$G(x)=x+2\ \wedge\ (FoG)(x)=3x^2+14x+9$$

Entonces la regla de correspondencia de F es:

A) $3x^2+2x-7$ B) $3x^2-2x+7$ C) $3x^2-7$
D) $3x^2+7$ E) $2x-7$

13 Sean F y G dos funciones definidas por:

$F=\{(2;3),(0;-1),(4;5),(1;-1)\}$
$Q=\{(3;0),(-1;2),(5;3)\}$

Entonces el $Ran(FoG)\cap Ran(GoF)$ es:

A) $\{3\}$ B) $\{-1;3\}$ C) $\{0;2;3\}$ D) Φ E) $\{1;2\}$

14 En la tabla:

x	5	6	7	8
$F(x)$	8	7	6	5
$H(x)$	7	8	6	5

aparecen valores de las funciones F y H. Calcular el valor de:

$$T=\left(\frac{(H+F)oF-2}{HoH}\right)(6)$$

A) -1 B) 0 C) 1 D) 2 E) 3

15 Dadas las funciones:

$F(x)=\dfrac{1}{2x+7};\ x\in[-3;6]$

$G(x)=x^2-4x-8;\ 6<x\le 12$

Según ello, determine el $Dom(FoG)$

A) $]6;2+5\sqrt{2}]$ B) $]-2-3\sqrt{2};2+3\sqrt{2}]$
C) $]6;2-3\sqrt{2}]$ D) $]6;2-5\sqrt{2}]$
E) $]6;2+3\sqrt{2}]$

16 Sean las funciones:

$$F(x)=\frac{1}{x-2};\ x\ge 3$$

$$G(x)=2+\frac{1}{x};\ x\ge 0,5$$

Calcular: GoF

A) $(GoF)(x)=x, \forall x \in [3;4]$

B) $(GoF)(x)=\dfrac{2x+1}{x}; \forall x \geq 3$

C) $(GoF)(x)=\dfrac{x}{x-2}; \forall x > -3,5$

D) $(GoF)(x)=\dfrac{x}{x-1}; \forall x \in \left]-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right[$

E) $(GoF)(x)=\dfrac{2x+1}{x-2}; \forall x \in [0;2[$

17 Si F es una función estrictamente creciente y M es el conjunto definido por:

$$M=\left\{x \in \mathbb{R} / F(\sqrt{4-x^2}+\sqrt{x+1}) > F\left(\frac{x-3}{|x+7|}\right)\right\}$$

entonces M es igual a:

A) $]-\infty;-1[$ B) $]-2;+\infty[$ C) $[-2;4]$

D) $[-1;2]$ E) $[-2;+\infty[$

18 Dada la función:

$$F(x)=\begin{cases}\sqrt{x-2}; \text{si } x \geq 2\\ 2-|x|; \text{si } -2<x<2\\ x^2-4; \text{si } x \leq -2\end{cases}$$

Dar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

( ) F es creciente en $]-2;2[$

( ) F es decreciente en $]-\infty;-2[$

( ) F es decreciente en $]0;2]$

A) VVV B) FVV C) VVF D) FFV E) FVF

19 Si F es una función definida por:

$$F(x)=\frac{6}{x^2-2x+3}-2; \forall x \in \mathbb{R}$$

el menor valor de "k", tal que:

$|F(x)| \leq k; \forall x \in D_F$, es:

A) $\dfrac{1}{3}$ B) $\dfrac{1}{2}$ C) 1 D) 2 E) 3

20 Si el rango de la función:

$$F(x)=\sqrt{16-x^2}+\sqrt{8x-x^2}$$

es: $\left[a;a\sqrt{b}\right]$, calcular el valor de:

$$E=a^b+b^a$$

A) 116 B) 125 C) 128 D) 134 E) 145

DECIMA TERCERA PRACTICA

COMPOSICIÓN - FUNCION INVERSA, TRAZADO DE GRAFICAS

01 Calcular la suma de los valores que no admite "y" para que la función:

$F=\{(1;5), (2;7), (3;9), (4;11), (5;20), (6;y)\}$

sea inyectiva.

A) 50 B) 51 C) 52 D) 53 E) 54

02 Si F es un función inyectiva definida por:

$F(x)=x^2-6x+5; x \in]-\infty;\lambda+2]$ entonces es verdad que:

A) $\lambda \leq 2$ B) $\lambda \geq 2$ C) $\lambda \geq 1$ D) $\lambda \leq 1$ E) $\lambda \leq -1$

03 Determine el conjunto de valores del parámetro "λ", para que la función:

$$F(x)=\left\{(x;y) \in \mathbb{R}^2 / y=\frac{4+\lambda x}{\lambda+x}\right\}$$

sea inyectiva.

A) $\mathbb{R}-\{2\}$ B) $\mathbb{R}-\{4\}$ C) $\mathbb{R}-\{-4;4\}$

D) $\mathbb{R}-\{0;1;2\}$ E) $\mathbb{R}-\{-2;2\}$

04 ¿Cuál(es) de las siguientes funciones;

I) $F(x)=\dfrac{2x-5}{x-2}; D_F=]3;+\infty[$

II) $G(x)=\sqrt{x^2-16}-1; D_G=]-5;-4[$

III) $H(x)=-x^2+2x+2; D_H=]0;2]$

es(son) inyectiva(s)?

A) Sólo I B) Sólo III C) Sólo II D) I y II E) I y III

05 Si la función:

$$F:[3;8[\to [a;b[/ F(x)=x^2-6x+20$$

es suryectiva, entonces el valor de $\sqrt{b-a}$ es:

A) $\sqrt{5}$ B) $\sqrt{7}$ C) $\sqrt{2}$ D) 4 E) 5

06 Sea la función:

$$F: A \to]1;3[/ F(x)=\frac{4x-6}{x-3}$$

Si dicha función es suryectiva, determinar el conjunto A.

A) $]-2;1[$ B) $]-3;1[$ C) $]-3;2[$ D) $]0;+\infty[$ E) $]-2;2[$

07 Si la función $F:[2;5] \to [1;4]$ es lineal, biyectiva y decreciente, determine el valor de:

$$E=\sum_{i=1}^{100}\frac{F^*(i)}{F(i)}$$

A) 0,01 B) 0;1 C) 1 D) 10 E) 100

08 Si la función:

$$F:[a;4]\rightarrow[6;b]\ /\ F(x)=-2x^2+16x-24$$

es biyectiva, entonces el valor de $a+b$ es:

A) 5 B) 6 C) 7 D) 9 E) 11

09 Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

( ) La función: $F(x)=x^7+x+1$ es inyectiva.

( ) La función: $F:\ ]-2;3[\ \rightarrow[0;0,9[$, tal que:

$$F(x)=\frac{x^2}{x^2+1}$$ es suryectiva.

( ) La función:

$$F:\mathbb{R}-\{1\}\rightarrow\mathbb{R}-\{2\}\ /\ F(x)=3x-1$$

es biyectiva.

A) FFF B) VFV C) VFF D) FVV E) VVV

10 Dada la función:

$$F=\{(2;3);(3;5);(6;9);(5;2)\}$$

determine la suma de elementos del rango de la función: $F+F^*$

A) 12 B) 16 C) 18 D) 20 E) 22

11 Se define a la función F como:

$$F(x)=\begin{cases}-x;\text{si } x<0\\-x^2;\text{si } x\geq 0\end{cases}$$

Calcular el valor de: $E=F^*(-4)+F^*(4)$

A) –3 B) –2 C) 0 D) 2 E) 3

12 Sean las funciones.

$$F(2x-1)=3x-1,\ \text{si } -1<x<2$$

$$G(x)=\frac{|F(x)-x|}{2},\text{si } -3<x<-1$$

Entonces la función G^* es:

A) $G^*(x)=-4x-1;\ x\in\left]0;\frac{1}{2}\right[$ B) $G^*(x)=-4x-1;\ x\in]3;11[$

C) $G^*(x)=-4x+1;\ x\in]-1;1[$ D) $G^*(x)=-4x+3;\ x\in]-2;3[$

E) $G^*(x)=5x-3;\ x\in]-3;2[$

13 Si: $F(x)=\sqrt{x^2+16}+2x;\ x\in[0;3]$, entonces $F^*(x)$ es:

A) $F^*(x)=\frac{2x+\sqrt{x^2-48}}{3}$ B) $F^*(x)=\frac{2x-\sqrt{x^2+48}}{3}$

C) $F^*(x)=\frac{x+\sqrt{x^2+48}}{3}$ D) $F^*(x)=\frac{x-\sqrt{x+2}}{3}$

E) $F^*(x)=\frac{x+\sqrt{x^2+4}}{5}$

14 Sea F una función inyectiva, tal que:

$F^*\left(\frac{x-4}{x+4}\right)=a$. Si el C.S de la inecuación:

$F(a)\leq\frac{x-3}{2x-1}$, es: $]a;b[\cup]c;d[$, determine el valor de: $M=\frac{bcd}{a}$

A) –4 B) –3 C) –2 D) 0 E) 2

15 Dadas las funciones:

$$F=\{(-1;2);(-5;4);(0;3);(1;2);(4;7)\}$$

$$G=\{(x;4-x)/\ 0\leq x<3\}$$

calcular el máximo valor de: a^2+b^2, si $(a;b)\in FoG^*$

A) 20 B) 25 C) 36 D) 47 E) 65

16 Considere la función:

$$F(x)=\sqrt{4-x^2}\left(|x^2-4|+x^2\right)$$

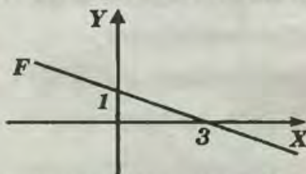
con dominio maximal posible, de manera que sea univalente; luego halle F^*.

A) $\frac{1}{4}\sqrt{64-x^2};\ x\in[0;8]$ B) $-\frac{1}{4}\sqrt{64-x^2};\ x\in[0;8]$

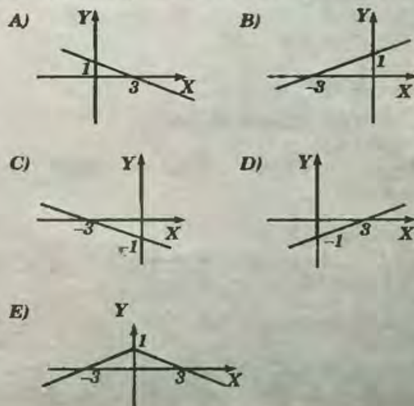
C) $\frac{1}{4}\sqrt{64-x^2};\ x\in[-8;0]$ D) $-\frac{1}{4}\sqrt{64-x^2};\ x\in[-8;0]$

E) Dos son correctas

17 Se muestra la gráfica de la función F:



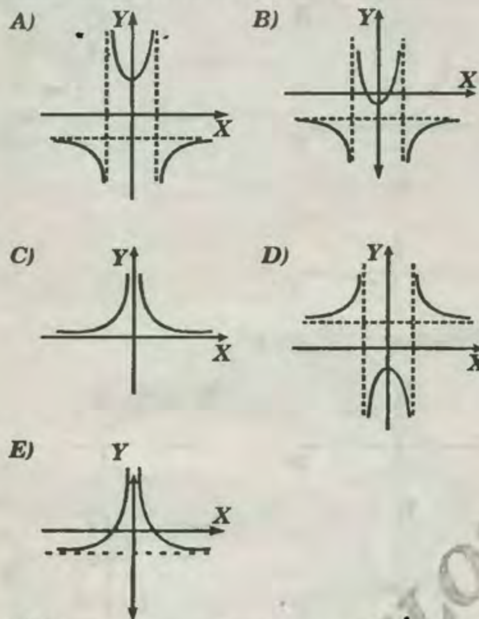
Esbozar la gráfica de la función: $H(x)=-F(x)$



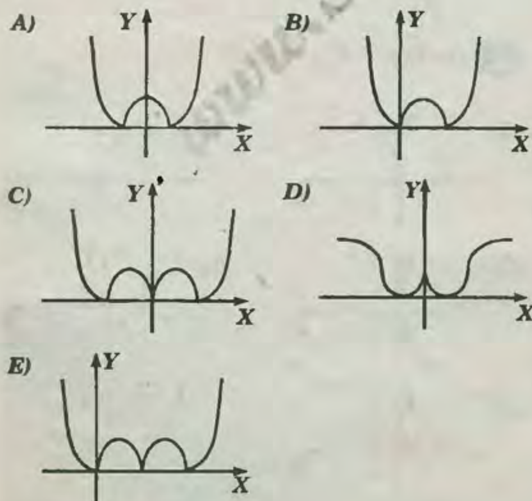
18 Si F es una función definida por:

$F(x)=\dfrac{x+2}{x-2}$,

entonces la figura que mejor representa a la gráfica de la función $H(x)=F(|x|)$, es :



19 La figura que mejor represente a la gráfica de la función: $F(x)=\left|x^2-2|x|\right|$, es:

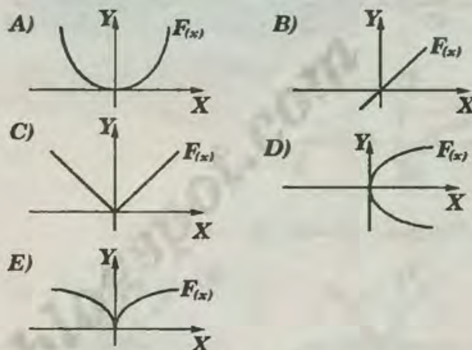


20 ¿Cuántas raíces imaginarias admite la ecuación: $x^{14}-1=x^2+2x$?

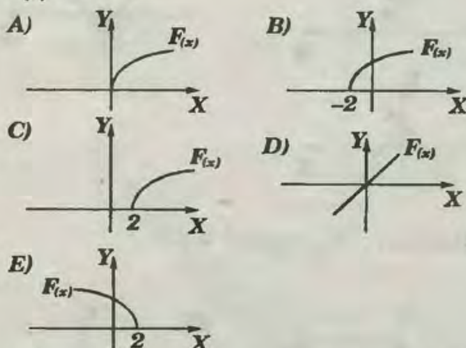
A) 14 *B) 12* *C) 10* *D) 8* *E) 6*

DECIMA CUARTA PRACTICA

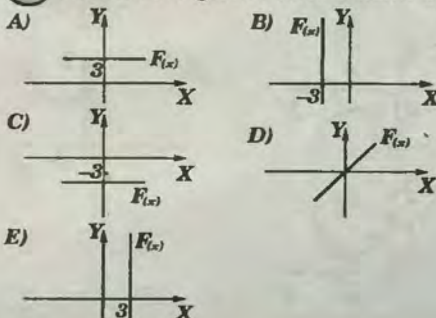
01 ¿Cuál de las siguientes gráficas no pertenece a una función?



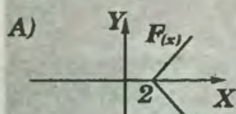
02 Construir la gráfica de la función : $F_{(x)}=\sqrt{x-2}$

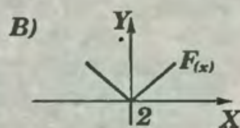


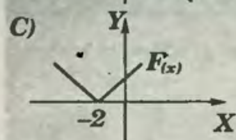
03 Construir la gráfica de la función :$F_{(x)}=-3$

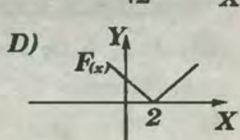


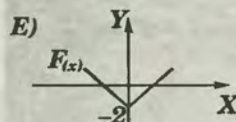
04 Graficar : $y = |x-2|$

A)


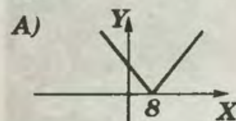
B)


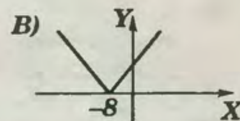
C)


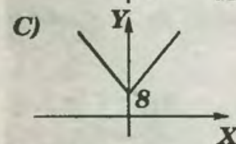
D)


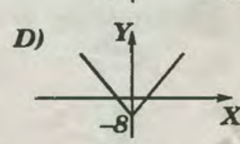
E)


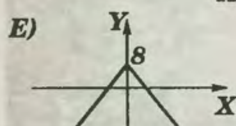
05 Graficar : $y = |x| - 8$

A)


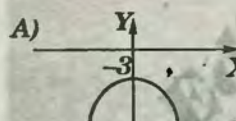
B)


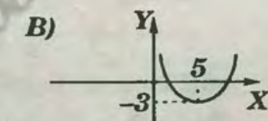
C)


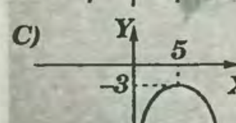
D)


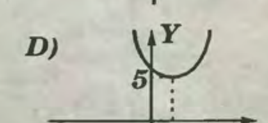
E)


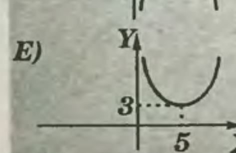
06 Graficar : $F_{(x)} = (x-5)^2 + 3$

A)


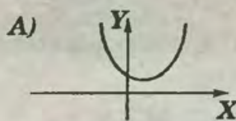
B)


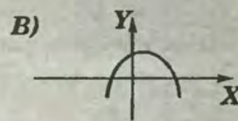
C)


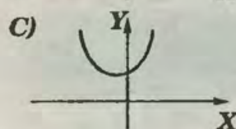
D)


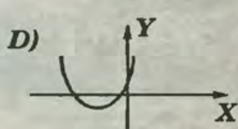
E)


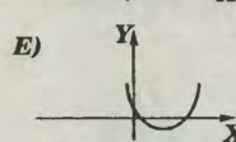
07 Graficar: $F_{(x)} = (x+3)^2 - 5$

A)


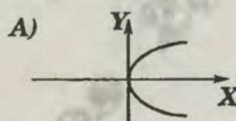
B)


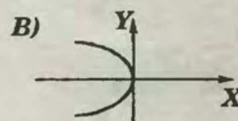
C)


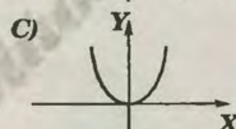
D)


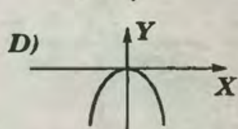
E)


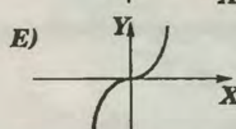
08 Graficar : $F_{(x)} = -x^2$

A)


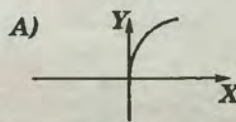
B)


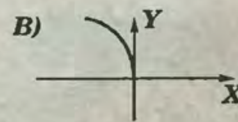
C)


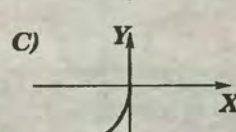
D)


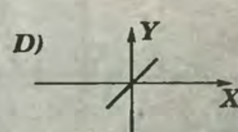
E)


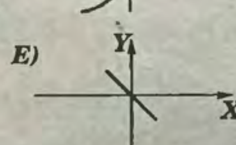
09 Graficar : $F_{(x)} = -\sqrt{-x}$

A)


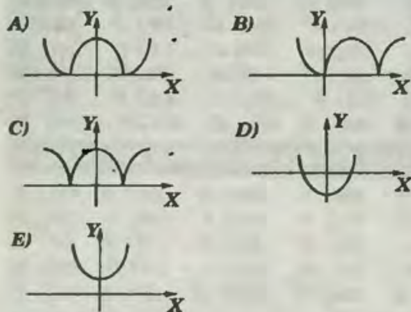
B)


C)


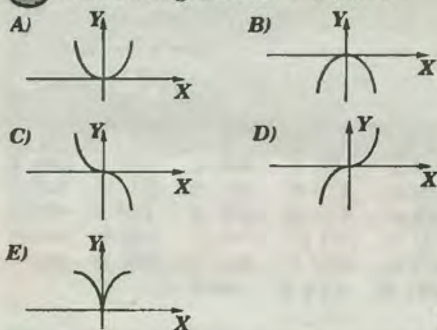
D)


E)


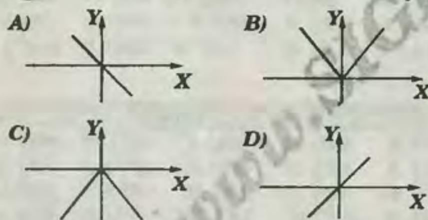
10 Graficar : $F_{(x)} = \left|x^2 - 5\right|$



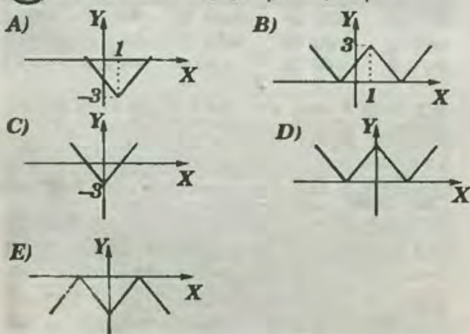
11 Esbozar el gráfico de : $F(x)=x^3$



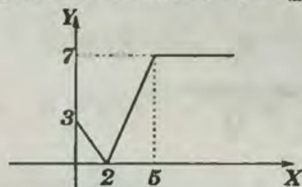
12 Indicar el gráfico de la función : $F(x) = x$



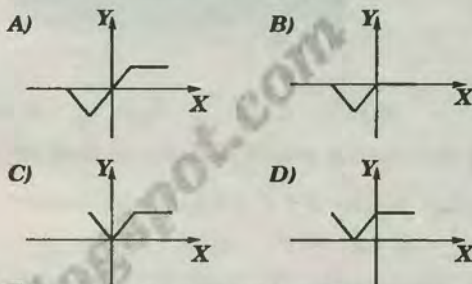
13 Graficar : $F(x) = \left|\left|x-1\right|-3\right|$



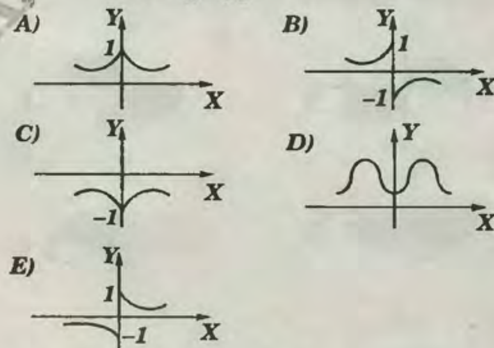
14 Si la gráfica de la función : $y=F_{(x)}$ es :



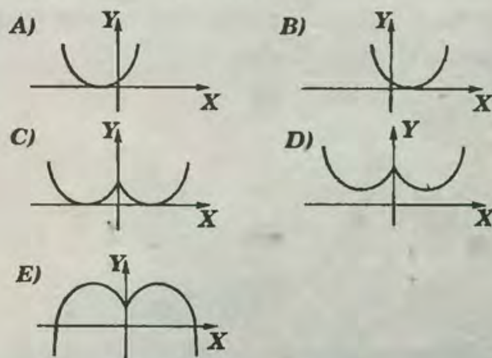
Graficar la función : $y=F_{(x+5)}-7$



15 Cuál de las siguientes gráficas representa la función : $F_{(x)} = \dfrac{-1}{x^2+1}$



16 Graficar : $y = \left(\left|x\right| - 4\right)^2$

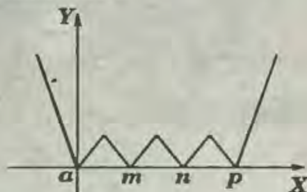


www.SIGLO21X.blogspot.com

17 Si la gráfica de la función :

$$F_{(x)} = \left|\left||x-3|-2\right|-1\right|$$

es aproximadamente :



Hallar *«m+n+p+a»*

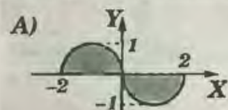
A) 2 *B) 4* *C) 12* *D) 14* *E) 18*

18 Determine el área de la región formada por la función : $F_{(x)} = -|x| + 4$ y el eje de las abscisas .

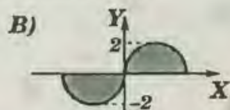
A) 8u² *B) 12* *C) 16* *D) 32* *E) 64*

19 Sea la función : $F_{(x)}=x(x-2)$. Indicar cuál de las siguientes gráficas representa el área limitada por el eje de abscisas y la función: $F(|x|)$

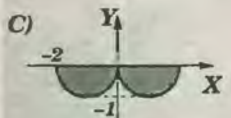
A)



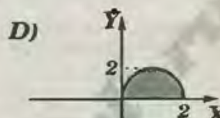
B)



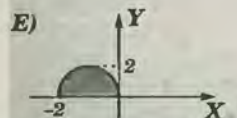
C)



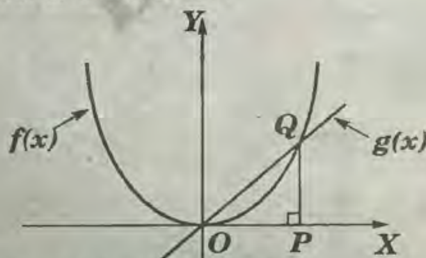
D)



E)



20 Sea : $f(x)=x^4 \wedge g(x)=x$ una función cuya gráfica se da a continuación



Halla el área del triángulo *OPQ*

A) 1/2 *B) 1* *C) 2* *D) 4* *E) 3*

CLAVES DE LA PRIMERA PRACTICA

01) D	02) D	03) A	04) D	05) E
06) E	07) C	08) B	09) A	10) D
11) C	12) D	13) A	14) E	15) B
16) D	17) C	18) B	19) B	20) A
21) A	22) E	23) C	24) B	25) C
01) B	02) C	03) D	04)D	05) A

CLAVES DE LA SEGUNDA PRACTICA

01) A	02) A	03) B	04) A	05) A
06) B	07) A	08) C	09) C	10) B
11) C	12) D	13) A	14) A	15) B
16) C	17 D	18) C	19) D	20) D
01) B	02) C	03) D	04)C	05) C

CLAVES DE LA TERCERA PRACTICA

1)B	2)A	3)C	4)A	5)D	6)A	7)D	8)A	9)D	10)B
11)C	12)B	13)C	14)A	15)E	16)A	17)E	18)A	19)B	20)C

CLAVES DE LA CUARTA PRACTICA

1)D	2)D	3)E	4)A	5)D	6)B	7)E	8)C	9)C	10)B
11)D	12)A	13)C	14)C	15)C	16)E	17)A	18)B	19)C	20)D

CLAVES DE LA QUINTA PRACTICA

01) E	02) C	03) C	04) D	05) E
06) C	07) D	08) B	09) C	10) D
11) C	12) B	13) B	14) D	15) C
16) B	17) D	18) C	19) E	20) C
21) D	22) C	23) B	24) D	25) D
26) E	27) C	28) *		

CLAVES DE LA OCTAVA PRACTICA

01) E	02) C	03) C	04) D	05) E
06) C	07) D	08) B	09) C	10) D
11) C	12) B	13) B	14) D	15) A

CLAVES DE LA NOVENA PRACTICA

01) A	02) D	03) C	04) D	05) B
06) A	07) E	08) A	09) A	10) B
11) B	12) C	13) B	14) A	15) E
16) B	17) B	18) D	19) E	20) A
21) B	22) A	23) B	24) A	25) A

CLAVES DE LA DECIMA PRACTICA

01) C	02) B	03) D	04) C	05) E
06) C	07) D	08) C	09) B	10) D
11) D	12) E	13) E	14) B	15) E

CLAVES DE LA DÉCIMA PRIMERA

1)D	2)C	3)B	4)B	5)A	6)E	7)C	8)C	9)A	10)B
11)D	12)D	13)E	14)C	15)B	16)A	17)D	18)E	19)A	20)E

CLAVES DE LA DECIMA SEGUNDA

1)A	2)D	3)C	4)B	5)D	6)B	7)D	8)E	9)B	10)A
11)C	12)A	13)A	14)D	15)E	16)A	17)D	18)B	19)D	20)E

CLAVES DE LA DECIMA TERCERA

1)C	2)D	3)E	4)D	5)E	6)B	7)E	8)E	9)E	10)D
11)B	12)A	13)B	14)C	15)B	16)E	17)C	18)D	19)C	20)B

MISCELANEA ECUACIONES

PARTE I :

01 Resolver las ecuaciones:

1. $x^2 = 7x$
2. $(x+1)(x-3) = 12$
3. $15x^2 - 34x + 15 = 0$
4. $(x+3)(x+5) = 13x^2$
5. $x(x-1997) = (x-1997)$

indicar la ecuación que posee la menor raíz.

A) 1 D) 4 B) 2
E) 5 C) 3

02 Dadas las ecuaciones:

$y = x^2 - 2x - 15$
$y = m(x+5)$
$y = m(x^2 - 2x - 24) + 9$

si $y = 9$ satisface las mismas. Hallar la suma de los posibles valores de "m"

A) 54/11 D) 92/11 B) 74/11
E) 108/11 C) 81/11

03 Hallar una de las raíces de la ecuación:

$a(b-c)x^2 + b(c-a)x + c(a-b) = 0$

si x es la incógnita

A) $\dfrac{b-c}{a-b}$ D) $\dfrac{a-b}{c-a}$ B) $\dfrac{c-a}{b-c}$

E) $\dfrac{c(a-b)}{a(b-c)}$ C) $\dfrac{b(a-c)}{a(b-c)}$

04 Resolver la ecuación:

$$x + 3\sqrt{x} = 10$$

dar como respuesta la suma de sus raíces

A) 4 D) 29 B) −3
E) 25 C) 10

05 Resolver e indicar la solución:

$$\sqrt{x-2+\sqrt{2x-5}} + \sqrt{x+2+3\sqrt{2x-5}} = 7\sqrt{2}$$

A) 7 D) 5 B) 13
E) 16 C) 15

06 ¿Qué se puede afirmar acerca de las raíces de las ecuación?

$ax^2 - bx - a = 0 \ (a, b \in \mathbb{R}^+)$

A) son reales y distintas
B) son reales e iguales
C) son complejas imaginarias
D) son imaginarios puras
E) No se puede determinar

07 Calcular "m" para que la ecuación:

$$6x^2 + (2m+3)x + m = 0$$

tenga una raíz solamente

A) 3 D) 3/2 B) 3/4
E) 5/3 C) 1/2

08 Si la ecuación:

$$x^2 + px + q = 0$$

tiene por conjunto solución (r,s) si $r - s = 4$ y $r^3 - s^3 = 208$ entonces p/q es :

A) 2/3 D) 2/7 B) 3/2
E) 1/7 C) 2/5

09 Hallar el valor de "a" para que las raíces de la ecuación:

$$x^2 - (a+3)x + \frac{a^2}{4} + 1 = 0$$

se diferencian en 5

A) 5/3 D) 5/6 B) 7/3
E) 20/3 C) 10/3

10 Sea $(x_1 ; x_2)$ el conjunto solución de: $3x^2 - x - 1 = 0$

además se define: $P(n) = \sqrt[n]{x_1^n + x_2^n}$

Calcular: $P(2)$

A) $\dfrac{\sqrt{10}}{3}$ D) $\dfrac{1}{3}$ B) $\dfrac{\sqrt{11}}{2}$

E) $\dfrac{1}{9}$ C) $\dfrac{\sqrt{7}}{3}$

11 En la ecuación cuadrática:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

afirmamos

I) Si la suma de sus raíces es igual a su producto entonces $b + c = 0$.

II) Si una raíz es la opuesta de la otra entonces $b = 0$.

III) Si una raíz es el doble de la otra, entonces $2b^2 = 9ac$

A) Las 3 firmas son verdaderas
B) solo I y II son verdaderas
C) solo I y III son verdaderas
D) solo II y III son verdaderas
E) solo II es verdadera

12 Sabiendo que las raíces de la ecuación:

$$x^2 - (3n-2)x + n^2 - 1 = 0$$

son números enteros y una de ellas es el triple de la otra. Calcular éstas

A) 4 y 12 D) 3 y 2 B) 2 y 6
E) 1 y 3 C) 5 y 15

13 Dada la ecuación:

$$x^2 - 2x + m = 0$$

calcular "m" si una de las raíces es $1 + 2i$, $(i = \sqrt{-1})$; $m \in \mathbb{R}$

A) 2 D) 5 B) 3
E) 8 C) 4

14 Formar la ecuación de 2do. grado con coeficientes reales que admite como raíz al complejo:

$$3 - \sqrt{7}i$$

A) $x^2 + 6x + 16 = 0$
B) $x^2 + 6x - 16 = 0$
C) $x^2 - 6x + 16 = 0$
D) $x^2 + 6x - 16 = 0$
E) $x^2 - 6x - 16 = 0$

15 Cierto número de revistas se han comprado por **100** soles. Si el precio por ejemplar hubiera sido un sol menos, se tendría **5** ejemplares más por el mismo precio. ¿Cuántas revistas se compró?. Dar su respuesta como la suma de los dígitos del número

A) 1 D) 4 B) 2
E) 5 C) 3

PARTE II :

01 Con respecto al polinomio:

$P(x) \equiv (x^2-3)^3(x+5)^2(2x-7)x^5$

y dadas las siguientes afirmaciones:
I) Admite 14 raíces complejas.
II) Admite una raíz simple
III) Admite dos raíces triples
IV) $P(x) = 0$; admite 5 soluciones
son ciertas

A)0 D)3 B)1
E)4 C)2

02 Con respecto al polinomio:

$$(x^2-(1-5i)x-5i)(x^2+\sqrt{2}x+\sqrt{3})$$

podemos afirmar:
A) Admite 2 raíces reales y 2 raíces imaginarias.
B) Admite 3 raíces reales y 1 raiz imaginaria
C) Admite 3 raíces imaginarias y 1 raíz real
D) Admite 4 raíces imaginarias
E) Admite 4 raíces reales.

03 Sabiendo que: **2, 3** y **6** son las raíces del polinomio $P(x)$ además $P(7) = 80$, calcule usted la suma de coeficientes de dicho polinomio

A)44 D)–23 B)36
E) –40 C) 12

04 Sabiendo que a; b y c son las raíces de la ecuación:

$$x^3 + 5x + 1 = 0$$

calcule usted el valor de:

$$E = a^4 + b + c$$

A)10 D)40 B)20
E)50 C)30

05 Si a; b y son raíces de:

$$x^3 + x + k^2 + 1 = 0$$

calcular el valor de la expresión:

$$G=\frac{(a+b)^3+(b+c)^3+(c+a)^3+6abc}{abc}$$

A) 3 D)0 B)3k
E)6 C) k^2

06 Sabiendo que las raíces de:

$$x^3 - bx^2 + cx + 2a = 0;$$
$$abc \neq 0$$

son a b y c, calcular la ecuación cuyas raíces sean: ab, bc y ca

A) $x^3 + x^2 - 3x - 2 = 0$
B) $x^3 - x^2 - 4x + 2 = 0$
C) $x^3 + x^2 - 4x - 4 = 0$
D) $x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0$
E) $x^3 + x^2 - x - 1 = 0$

07 Formar la ecuación de grado mínimo y de coeficiente racionales, si admite por raíces a:

A) $x^4 + 12x^3 + 50x^2 + 84x + 13 = 0$
B) $x^4 - 12x^3 + 50x^2 - 84x + 13 = 0$
C) $x^4 - 12x^3 - 50x^2 - 84x + 13 = 0$
D) $x^4 - 13x^3 + 50x^2 - 84x + 12 = 0$
E) $x^4 + 12x^3 - 50x^2 + 84x - 13 = 0$

08 Sabiendo que una de las raíces de la ecuación con coeficientes racionales:

$$3x^3 + ax^2 + bx + 12 = 0$$

es $(1-\sqrt{3})$, calcule usted el valor de: $a + b$

A)–1 D)–6 B)–2
E)–8 C) –4

09 En el siguiente polinomio:

$$P(x) \equiv x^3 - 28x + q$$

Proporcione el menor valor de "q" de tal modo que una de las raíces de $P(x)$ sea el doble de la otra

A)–48 D)–64 B) –36
E)–72 C)–12

10 Sabiendo que la ecuación polinomial

$$x^3 - 5x^2 + \beta x + 3 = 0$$

admite como raíz a:

$$x_1 = 1 + \sqrt{2}\ ;\ x_2 \text{ y } x_3$$

calcule usted el valor de:

$$M = \frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2\beta + 1}{x_1 x_2 x_3}$$

A) 26/3 D)–5 B)2
E)–26/3 C)7/3

11 Si dos raíces de la ecuación:

$$3x^3 - 6x^2 - 9x + n = 0$$

se diferencian en **1**, calcular el valor de "n"

A)0 D)A o B B)140/9
E)A o C C) –150/9

12 Sea: $P(x) \equiv ax^3 - bx^2 + bx - a$

$a \neq 0$; además $P(1/7) = 0$, podemos afirmar que:

A) $x = -7$ es una raíz de $P(x)$
B) $x = 7$ es una raíz de $P(x)$
C) $x = -1$ es una raíz de $P(x)$
D) $x = 1$ es una raíz de $P(x)$
E) Más de una es correcta

13 Sabiendo que la suma de las inversas de las raíces de:

$$x^3 + 4x^2 + (a^2+8)x - (a-1)(2a+5)\ ;\ a>0$$

es igual a **17/22**, calcular una de sus raíces

A) 1 D) –5 B) –1
E) –2 C) 3

14 Dados los siguientes polinomios:

P(x): de grado mínimo y de coeficientes racionales si admite por raíces a $\sqrt{3}$ y $-\sqrt{5}$

Q(x): de grado mínimo y de coeficientes reales, si admite por raíces a $\sqrt{3}$ y $-\sqrt{5}$

entonces:

A) $Gdo(P) < Gdo(Q)$
B) $Gdo(P) > Gdo(Q)$
C) $Gdo(P) = 2$
D) $Gdo(Q) = 2$
E) $Gdo(P) = Gdo(Q)$

PARTE III :

01 Indique el intervalo al que debe pertenecer β a fin de que:

$$x^4 - (4\beta - 5)x^2 + 3\beta(\beta - 5) = 0$$

admita **2** raíces imaginarias y dos raíces reales

A)]0; 5[D)]3; 5[B)]0; 5]
E)]3; 5] C)[0; 5[

02 A partir de la ecuación bicuadrada:

$$x^4 - \sqrt{2}(a+b)x^2 + (a-b)^2 = 0$$

determinar el valor de la suma de las cuartas potencias de sus raíces

A)ab D)2ab B)8ab
E)16ab C)4ab

03 Una raíz irracional de:

$$\frac{x^2}{5} + \frac{20}{x^2} = 9\left(\frac{x}{5} - \frac{2}{x}\right) + \frac{2}{5}$$

es :

A) $-3+\sqrt{19}$ D) $2+\sqrt{19}$

B) $3+\sqrt{13}$ E) $3-\sqrt{10}$

C) $3+\sqrt{19}$

04 Formar una ecuación bicuadrada cuyas dos de sus raíces, son las raíces de la ecuación:

$$5x^2-3x+1=0$$

A) $25x^4-x^2+1=0$
B) $25x^4+x^2+1=0$
C) $25x^4-3x^2-1=0$
D) $25x^4-3x^2+1=0$
E) $25x^4-9x^2+1=0$

05 Dado el polinomio:
$P(x)=ax^5+bx^4+bx+a$
además:
$P(c)=0\ /\ c\in\mathbb{R}-\{0\}$, podemos afirmar que:

A) $x=1$ es una raíz de $P(x)$
B) $x=-c$ es una raíz de $P(x)$
C) $x=-1$ no es una raíz de $P(x)$
D) $x=-c^{-1}$ es una raíz de $P(x)$
E) $x=c^{-1}$ es una raíz de $P(x)$

06 Indicar la menor raíz de:

$$6x^4+5x^3-38x^2+5x+6=0$$

A) -2 D) -6 B) -1/2
E) 3 C) -3

07 Una de las raíces de una ecuación bicuadrada es **2**.
Si: $x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot x_4=64$. ¿Cuál es la ecuación?

A) $x^4+8x^2+64=0$
B) $x^4-20x^2+64=0$
C) $x^4+12x^2+64=0$
D) $x^4+20x^2+64=0$
E) $x^4-8x^2+64=0$

08 Calcular el valor de :
$\lambda\ (\lambda>0)$, si la ecuación:

$$x^4-(8+4)x^2+(8+1)^2=0$$

posee dos raíces positivas que suman **6**.

A) 10 D) 18 B) 14
E) 20 C) 12

09 Indicar una raíz de : $x^4+1=0$

A) $\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$ D) $\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{i}{\sqrt{2}}$

B) $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}$ E) $1-i$

C) $-i$

10 Si : *3* raíces de una ecuación recíproca de sexto grado son $\{a;b;c\}$ y también son las raíces de una ecuación bicuadrada. Indicar el producto de la suma de las otras raíces por la cuarta raíz de la bicuadrada

A) abc D) $-abc$ B) 1
E) Absurdo C) -1

11 Resolver la siguiente ecuación recíproca :

$$x^6-10x^5+25x^4-25x^2+10x-1=0$$

Dar como respuesta la suma de los cuadrados de sus raíces

A) 64 D) 121 B) 50
E) 144 C) 100

12 Construir una nueva ecuación cuyas raíces sean, las raíces de la ecuación

$$x^4-x^3+2x^2-x+1=0$$

pero elevadas al cuadrado

A) $x^4+3x^3+4x^2+3x+1=0$
B) $x^4-3x^3+4x^2-3x+1=0$
C) $x^4+3x^3-4x^2+3x+1=0$
D) $x^4-x^3+x^2-x+1=0$
E) $x^4-4x^2+1=0$

13 Determine el número de raíces imaginarias de la ecuación :

$$x^5-x^3(4x-7)-x(7x-4)-1=0$$

A) 5 D) 3 B) 1
E) 4 C) 2

14 Luego de resolver la ecuación

$$:\ \frac{(x+2)(x-4)}{7(x+3)(x-5)}-\frac{(x+4)(x-7)}{12(x+5)(x-8)}=\frac{5}{84}$$

indique el número de soluciones

A) 0 D) 3 B) 1
E) 4 C) 2

15 Asumiendo que x_1, x_2, x_3 y x_4, son raíces de :

$$8x^4-8x^3-10x^2+4x+3=0$$

además : $x_1<x_2<x_3<x_4$
determinar:

$$M=x_1x_3+2x_2x_4$$

A) -1 D) 1 B) -2
E) 2 C) -3

Claves-parte I

1.	D	4.	E	7.	E	10.	C	13.	C
2.	A	5.	C	8.	D	11.	A	14.	C
3.	D	6.	D	9.	D	12.	C		

Claves-parte II

1.	E	4.	E	7.	B	10.	E	13.	A
2.	C	5.	A	8.	D	11.	D	14.	A
3.	E	6.	C	9.	A	12.	E	15.	

Claves-parte III

1.	C	4.	B	7.	B	10.	C	13.	C
2.	E	5.	E	8.	A	11.	B	14.	B
3.	C	6.	B	9.	D	12.	C	15.	C

ECUACIONES DE 1ER GRADO

Forma General : $ax+b=0$

Casos para su Resolución:

1. $a\neq 0$: $x=-b/a$
2. $a=0\ \wedge\ b=0$: $x\in\mathbb{R}$
3. $a=0\ \wedge\ b\neq 0$: $x\in\phi$

Clases de Ecuaciones

Compatible: cuando tiene solución. Se subdivide en dos.

Determinado: si tiene un número finito de soluciones.

Indeterminado: Si tiene infinitas soluciones.

Incompatible: cuando no tiene solución.

SISTEMAS DE ECUACIONES DE 1ER GRADO

Para resolver un sistema se utiliza el proceso denominado MÉTODO ALGEBRAICO, que consiste en la eliminación progresiva de las incógnitas por medio de transformación realizados en el sistema. Este proceso genera los métodos por REDUCCIÓN, IGUALDAD y SUSTITUCIÓN.



OBJETIVOS:

* Presentar la séptima operación de la Matemática, su definición, sus propiedades y sus diversas aplicaciones en la Física, Química, Biología, Estadística, etc.

* Notar la trascendencia de los sistemas de logaritmos más usuales: Los logaritmos decimales, vulgares o de BRIGGS, cuya base es el número trascendente *«e»*.

*Aprenderemos a resolver ecuaciones e inecuaciones logarítmicas dentro del conjunto $\mathbb{R}$, para lo cual debemos establecer todas las restricciones posibles que permitan que estas relaciones (de igualdad y de orden), estén definidas en el conjunto de los números reales.

* Exponer la importancia del operador inverso de logaritmo, denominado antilogaritmo o exponencial de un número real; así como también del cologaritmo y sus propiedades.

INTRODUCCIÓN :

Los logaritmos se atribuyen a John Napier (a veces se le referencia como Neper) . Publicó su trabajo en ***1614*** en el libro Mirifici logarithmorum canonis descriptio (Descripción de la maravillosa regla de los logaritmos).

Napier era un terrateniente (no matemático) escocés de la baja nobleza (barón). Parece que se dedicaba o que estaba particularmente interesado en la medición de fincas (donde a grandes números se le pueden corresponder graves errores y perjuicios) y , en su época , la forma de operar con grandes números era confusa y compleja (regla de la inversa del seno, etc.)

Napier estudió las sucesiones de las potencias de un número y se percató que los productos y cocientes de dos números de dichas sucesiones son iguales a las potencias de las sumas o diferencias de los exponentes de dichos números ($a^n.a^m = a^{(n+m)}$) . Pero estas sucesiones no resultaban útiles para el cálculo porque entre dos potencias sucesivas había un hueco muy grande y la interpolación que había que hacer era muy imprecisa .

Entonces descubrió cierto paralelismo entre la progresión geométrica de los exponenciales y la más sencilla progresión aritmética y como se podían transformar los primeros en los segundos para operar con estos y , una vez hallado el resultado volver a trasformarlos en los números originales . Con la primera se hacían cálculos muy difíciles y engorrosos y con la segunda se resolvía fácilmente . Así, por ejemplo , asoció la progresión $a^1,a^2,a^3,...,a^i,...a^n$, ***con 1; 2 ;3; ..., i ;... ;n***

Napier llamó al principio a estos número artificiales, pero más tarde se decidió por la unión de dos palabras griegas logos (razón) y arithmos (número). Este sistema de cálculo fue aceptado con gran rapidez.

Entre los más entusiastas estaba Henry Briggs. Briggs visitó a Napier en ***1615*** y entre los dos vieron la posibilidad de hacer algunas modificaciones.

En ***1617*** (póstumamente) se publicó *Logarithnmorum* chilias prima (Logaritmos de los números ***1*** al ***1000***) y en ***1624*** publicó Arithmética logarithmica.

Las tablas de logaritmos y las reglas de cálculo (reglas numeradas con multitud de tablas paralelas) eran imprescindibles en cualquier centro de cálculo, hasta la aparición de las calculadoras y ordenadores. Actualmente ya no son necesarios para lo que fueron descubiertos . Sin embargo , ciertas características y utilidades que , durante estos siglos de gran utilidad se les han descubierto los han hecho sobrevivirlos al desarrollo de la electrónica . Esto ha sido necesario también en el campo de la Economía .

LOGARITMO

Sean los números reales **"a"** y **"b"**, si $b>0,\ b\neq 1$ y $N>0$, el número real x se denomina logaritmo del número **"N"** en base **"b"** y se denota por $Log_b N$

si y sólo si : $b^x = N$

* de la definición se tiene:

$$x = Log_b N \Leftrightarrow b^x = N$$

donde:

b : *Base de logaritmo*

N : *Número de logaritmo*

x : Logaritmo de "b" en la base "a"

EJEMPLOS:

* $Log_7 49=2$; porque : $49=7^2$
* $Log_{\frac{1}{2}} 8=-3$; porque : $8=\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$
* $Log_3 1=0$; porque : $1=3^0$
* $Log_2 16=4$; porque : $2^4=16$
* $Log_4 8=3/2$; porque : $4^{3/2}=\sqrt{4}^3=8$
* $Log_{0,2} 25=-2$; porque $(0,2)^{-2}=\left(\frac{1}{5}\right)^{-2}=5^2=25$

OBSERVACIÓN :

Dada la siguiente expresion:

$b^x = N$ .... *(potenciación)*

La operación inversa , osea : $Log_b N = x$ recibe el nombre de logaritmación .

EJEMPLOS :

* $2^2 = 4 \Leftrightarrow Log_2 4 = 2$
* $2^3 = 8 \Leftrightarrow Log_2 8 = 3$
* $2^5 = 32 \Leftrightarrow Log_2 32 = 5$
* $2^6 = 64 \Leftrightarrow Log_2 64 = 6$

Diremos que siendo **2** la base en todos los casos , el logaritmo de *4* es **2**, puesto que **2** es el exponente a que se debe elevar la base **2** para obtener el número *4*.

* Analogamente, en base **2** el logaritmo de *8* es *3* , el logaritmo de *32* es *5* y el logaritmo de *64* es *6*.

EJEMPLO 1:

Calcular : "x", en : $Log_{(\frac{1}{3})} 81 = x$

RESOLUCIÓN :

* Por Definición : $(1/3)^x = 81$
* Exponente negativo : $(3^{-1})^x = 3^4$
* Exponente de exponente : $3^{-x} = 3^4$
* Bases iguales exponentes guales : $-x = 4$
* Entonces: $x = -4$

EJEMPLO 2 :

Calcular : $Log_{16} 128$

RESOLUCIÓN :

* Haciendo : $Log_{16} 128 = x$
* Por definición : $16^x = 128$
* Homogenizamos las bases : $(2^4)^x = 2^7$
* Exponente de exponente : $2^{4x} = 2^7$
* Bases iguales exponentes iguales : $4x = 7$
* Entonces : $x = 7/4$
* Por lo tanto : $Log_{16} 128 = \frac{7}{4}$

EJEMPLO 3 :

Calcular : $Log_{\frac{2}{3}} \left(\frac{27}{8}\right)$

RESOLUCIÓN :

* Haciendo : $Log_{\frac{2}{3}} \left(\frac{27}{8}\right) = x$
* Entonces : $\left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{27}{8}$

$$\Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{3}{2}\right)^3$$

$$\Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^{-3} \Rightarrow x = -3$$

OBSERVACIÓN :

Para la resolución de problemas es importante familiarizarnos con estas fórmulas a través de los siguientes ejemplos:

I)PASO DE LA FORMA POTENCIAL A LOGARÍTMICA:

* Si : $2^4 = 16 \Rightarrow Log_2 16 = 4$
* Si : $5^{-3} = \frac{1}{125} \Rightarrow Log_5 \left(\frac{1}{125}\right) = -3$
* Si : $\sqrt{3}^4 = 9 \Rightarrow Log_{\sqrt{3}} 9 = 4$

II) PASO DE LA FORMA LOGARÍTMICA A LA FORMA EXPONENCIAL :

* Si : $Log_5 625 = 4 \Rightarrow 5^4 = 625$
* Si : $Log_7 \frac{1}{343} = -3 \Rightarrow 7^{-3} = \frac{1}{343}$
* Si : $Log_{\sqrt{6}} 216 = 6 \Rightarrow \sqrt{6}^6 = 216$

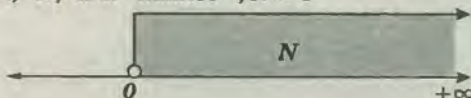
EXISTENCIA DE LOS LOGARITMOS EN ℝ

* por definición sabemos que :

$$\boxed{Log_b N = a \Leftrightarrow b^a = N}$$

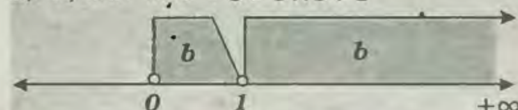
Donde :

I) N, es el "número" ; $N > 0$



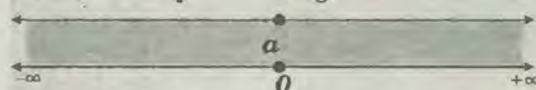
$N \in <0;\infty>$

II) b, es la "base" : $b>0 \wedge b \neq 1$



$b \in <0;\ 1> \cup <1;\infty>$

III) a, es el "exponente" ó logaritmo : $a \in \mathbb{R}$



$a \in \mathbb{R}$ ó $a \in <-\infty;\infty>$

PROPIEDADES GENERALES DE LOS LOGARITMOS

$\text{Log}_b 1 = 0$ $\text{Log}_b\, b = 1$; $b>0,\ b\neq 1$

* El logaritmo de *"1"* en cualquier base vale *"0"* y el logaritmo de la base es igual a *"1"*

EJEMPLOS :

* $\text{Log}_5 1 = 0$; $\text{Log}_3 1 = 0$; $\text{Ln}\, 1 = 0$
* $\text{Log}_3 3 = 1$; $\text{Ln}\, e = 1$; $\text{Ln}_{(e+2)}(e+2) = 1$

IDENTIDAD FUNDAMENTAL DEL LOGARITMO .

si el logaritmo de un número se encuentra como exponente de su propia base , entonces está expresión es equivalente al número , es decir :

$$b^{\text{Log}_b N} = N$$

DEMOSTRACION :

* Por definición sabemos que :

$$\text{Log}_b N = a \Leftrightarrow b^a = N$$

* De donde :

$b^a = N$ ....(I)
$a = \text{Log}_b N$ ....(II)

* Reemplazando *(II)* en *(I)* obtenemos :

$$b^{\text{Log}_b N} = N$$

EJEMPLOS :

* $7^{\text{Log}_7 5} = 5$ * $2^{\text{Log}_2 3} = 3$
* $5^{\text{Log}_5 14} = 14$ * $10^{\text{Log}(a-8)} = a-8$
* $m^{\text{Log}_m \sqrt{x+2}} = \sqrt{x+2}$ * $e^{\text{Ln}\, abc} = abc$
* $64^{\text{Log}_4 5} = \left[\ 4^{\text{Log}_4 5}\ \right]^3 = [5]^3 = 125$
* $\sqrt[3]{9}^{\ \text{Log}_9 216} = \sqrt[3]{9^{\text{Log}_9 216}} = \sqrt[3]{216} = 6$
* $\left[10^{\text{Log}\sqrt{x-7}}\right]^4 = \sqrt[2]{x-7}^{\,4} = (x-7)^2$

TEOREMAS SOBRE LOGARITMOS

I) LOGARITMO DE UN PRODUCTO :

En cualquier base $(0<b\neq 1)$, el logaritmo del producto de dos factores reales positivos es igual a la suma de los logaritmos de los factores ; es decir :

Dados: $A, B \in \mathbb{R}^+, b<0 \wedge b\neq 1$

$$\text{Log}_b AB = \text{Log}_b A + \text{Log}_b B$$

EJEMPLOS :

* $\text{Log}_4 (3\times 7) = \text{Log}_4 3 + \text{Log}_4 7$
* $\text{Log}_3 (x^2 y^4) = \text{Log}_3 x^2 + \text{Log}_3 y^4$
* $\text{Log}\,(x+1) + \text{Log}(x-1) = \text{Log}(x+1)(x-1) = \text{Log}(x^2-1)$

OBSERVACIONES :

A) Si $0<b\neq 1 \wedge MN>0$, entonces :

$$\text{Log}_b (MN) = \text{Log}_b |M| + \text{Log}_b |N|$$

EJEMPLOS :

* $\text{Log}_5 (-3)(-4) = \text{Log}_5 |-3| + \text{Log}_5 |-4| = \text{Log}_5 3 + \text{Log}_5 4$
* $\text{Log}\left[x(x+1)\right] = \text{Log}|x| + \text{Log}|x+1|$
* Si $x>2$ entonces:

$\text{Log}_3\left[x(x-2)\right] = \text{Log}_3 |x| + \text{Log}_3 |x-2| = \text{Log}_3 x + \text{Log}_3 (x-2)$

B) La propiedad puede ser extendida para el caso del logaritmo de un producto de *"n"* factores reales y positivos , es decir

Si: $0<b\neq 1$ y $M_1, M_2, M_3, \ldots\ldots\ldots\ldots, M_n \in \mathbb{R}^+$

* Entonces :

$$\text{Log}_b (M_1 M_2 \ldots M_n) = \text{Log}_b M_1 + \text{Log}_b M_2 + \ldots + \text{Log}_b M_n$$

EJEMPLOS:

* $\text{Log}_6 (2\times 3\times 5) = \text{Log}_6 2 + \text{Log}_6 3 + \text{Log}_6 5$

* $Log_4[3\times(-2)\times(-8)] = Log_4 3 + Log_4|-2| + Log_4|-8|$

$= Log_4 3 + Log_4 2 + Log_4 8$

II) LOGARITMO DE UN COCIENTE

"En cualquier base $b\ (0 < b \neq 1)$, el logaritmo del cociente de dos números reales positivos es igual a la diferencia entre el logaritmo del dividendo y el logaritmo del divisor"

$$Log_b\left(\frac{A}{B}\right) = Log_b A - Log_b B$$

EJEMPLOS :

* $Log_2 \frac{5}{3} = Log_2 5 - Log_2 3$
* $Log_2 5 = Log_2 10 - Log_2 2$
* $Log\left(\frac{2\times 3}{5}\right) = Log(2\times 3) - Log\ 5$

$= Log\ 2 + Log\ 3 - Log\ 5$

OBSERVACIONES :

A) Si $0 < b \neq 1$ y $\frac{M}{N} > 0$, entonces:

$$Log_b\left(\frac{M}{N}\right) = Log_b|M| - Log_b|N|$$

EJEMPLOS :

* $Log_3\left(\frac{-2}{5}\right) = Log_3|-2| - Log_3|-5|$

$= Log_3 2 - Log_3 5$

* $Log_2\left(\frac{x+1}{x-2}\right) = Log_2|x-1| - Log_2|x-2|$

Si: $x > 0$ entonces:

B) Haciendo $M = 1$, escribimos :

$Log_b\left(\frac{1}{N}\right) = Log_b 1 - Log_b N$, por tanto:

$$Log_b\left(\frac{1}{N}\right) = -Log_b N$$

EJEMPLOS :

* $Log_2(1/3) = -Log_2 3$
* $Log\frac{1}{x+1} = -Log\,(x+1)$

III) LOGARITMO DE UNA POTENCIA

" En cualquier base $b\ (0 < b \neq 1)$, el logaritmo de una potencia de base real positiva y exponente real es igual al producto del exponente por el logaritmo de la base de la potencia" , es decir :

$$Log_b A^n = n\ Log_b A$$

EJEMPLOS:

* $Log_3 2^5 = 5\ Log_3 2$
* $Log_4\left(\frac{1}{3^6}\right) = Log_4 3^{-6} = -6\ Log_4 3$
* $Log_3 81 = Log_4 3^4 = 4\ Log_3 3 = 4$
* $Log_2 1024 = Log_2 2^{10} = 10 Log_2 2 = 10$
* $Log_3 \sqrt[3]{5} = Log_5 5^{1/3} = \frac{1}{3} Log_5 5 = \frac{1}{3}$

EJEMPLO:

* $(Log_2 5)^3 = \underbrace{(Log_2 5)(Log_2 5)(Log_2 25)}_{3\ veces}$
* $Log_b 5^3 = 3\ Log_b 5$
* $Log_2^3 16 = (Log_2 16)^3 = (Log_2 2^4)^3 = (4)^3 = 64$

OBSERVACIÓN :

* Sean A real , tal que $n \in \mathbb{N} \wedge A^n > 0$

$$Log_a A^n = n Log_a|A|$$

EJEMPLOS :

* $Log_3(-2)^6 = 6 Log_3|-2| = 6\ Log_3 2$
* $Log_4(x-1)^2 = 2\ Log_4|x-1|$
* Si : $x > 2$ entonces :

$Log_7(x-2)^4 = 4\ Log_7|x-2| = 4\ Log_7(x-2)$

* Pero si : $x < 2$, entonces :

$Log_7(x-2)^4 = 4\ Log_7|x-2| = 4\ Log_7(-x+2)$

IV) LOGARITMO DE UNA RAÍZ :

El logaritmo de una raíz es igual a la inversa del índice del radical por el logaritmo de la cantidad subradical , es decir :

$$Log_b \sqrt[n]{A} = \frac{1}{n} Log_b A \quad ;\ n \geq 2 ; n \in Z^+ ; A > 0$$

$b > 0\ ;\ \ b \neq 1$

EJEMPLOS :

* $Log_3 \sqrt[5]{3} = \frac{1}{5} Log_3 3 = \frac{1}{5}$
* $Log_5 \sqrt[4]{3} = \frac{1}{4}\ Log_5 3$
* $Log_7 \sqrt[3]{2} = \frac{1}{3} Log_7 2$
* $Log\ \sqrt{x+2} = \frac{1}{2} Log(x+2)$

V) Si al número y a la base de un logaritmo se potencian o se extraen radicales de un mismo índice,

el logaritmo no se altera , es decir:

$$\boxed{Log_b a = Log_{b^m} a^m = Log_{\sqrt[n]{b}} \sqrt[n]{a}}$$

EJEMPLOS :

* $Log_{\sqrt[3]{3}} 9 = Log_{(\sqrt[3]{3})^3} (9)^3 = Log_3 3^6 = 6$
* $Log_{\sqrt[4]{2}} \sqrt[4]{8} = Log_{(\sqrt[4]{2})^4} (\sqrt[4]{8})^4 = Log_2 8 = 3$

COROLARIO :

$$\boxed{Log_{b^m} A^n = \frac{n}{m} Log_b A} \; ; \; m, n \in \mathbb{Z}^+$$

EJEMPLOS :

$Log_{2^7} 2^8 = \frac{8}{7} Log_2 2 = \frac{8}{7}$

* $Log_{27} 81 = Log_{3^3} 3^4 = \frac{4}{3} Log_3 3 = \frac{4}{3}$
* $Log_{x^4} (x+3)^2 = \frac{2}{4} Log_{|x|} |x+3| = \frac{1}{2} Log_{|x|} |x+3|$

OBSERVACIÓN :

Si el número y la base de un logaritmo se pueden expresar en una base común , el logaritmo está determinado por el cociente de los exponentes de las bases comunes ; es decir :

$$\boxed{Log_{b^n} b^m = \frac{m}{n}} \; ; \; (b > 0 \wedge b \neq 1)$$

EJEMPLO :

$$Log_{7^2} 7^5 = \frac{5}{2} = 2,5$$

VI) Si el logaritmo de un número «*a*» en base «*b*» se encuentra como exponente de una base **c** ***(c > 0)*** ; el número ***"a"*** y la base "**c**" se pueden permutar , es decir :

$$c^{Log_b a} = a^{Log_b c}$$

EJEMPLOS :

* $3^{Log_2 5} = 5^{Log_2 3}$ * $7^{Log_4 5} = 5^{Log_4 7}$
* $3^{Log_2 (x+3)} = (x+3)^{Log_2 3}$

VII) CAMBIO DE BASE "b" A BASE "x"

En general todo cambio de base implica un cociente de logaritmos , es decir :

$$\boxed{Log_b A = \frac{Log_x A}{Log_x b}} \; ; \; x > 0 \wedge x \neq 1$$

EJEMPLO :

* $Log_3 5 = \frac{Log_2 5}{Log_2 3} = \frac{Log_7 5}{Log_7 3}$

* Al pasar a base 7, el logaritmo de 3 en base 2 , resulta :

$$Log_2 3 = \frac{Log_7 3}{Log_7 2}$$

CONSECUENCIAS :

$$\boxed{Log_b a = \frac{1}{Log_a b}} \Rightarrow \boxed{Log_b a \times Log_a b = 1}$$

EJEMPLOS :

* $Log_5 7 = \frac{1}{Log_7 5}$ * $Log_2 3 = \frac{1}{Log_3 2}$
* $Log_3 4 \times Log_4 3 = 1$

III) REGLA DE LA CADENA :

Si en un producto de logaritmos un número cualquiera y una base cualquiera son iguales entonces estos se cancelan incluso el símbolo logaritmo , es decir :

* Si $a > 0, a \neq 1, b > 0, b \neq 1, c > 0, c \neq 1 \wedge d > 0$
* se cumple :

$$\boxed{Log_a b \times Log_b c \times Log_c d = Log_a d}$$

EJEMPLOS :

* $Log_2 3 \times Log_3 4 \times Log_4 7 \times Log_7 9 = Log_2 9$
* $Log_a b \times Log_b c \times Log_c d \times Log_d e = Log_a e$

SISTEMA DE LOGARITMOS

Se llama "Sistema de logaritmo de base ***b***" al conjunto de todos los logaritmos de los números reales positivos en una base ***b*** ; por ejemplo , el conjunto formado por todos los logaritmo de base 2 de los números reales positivos es el sistema de logaritmo en la base 2.

Entre la infinidad de valores que puede asumir la base y , por tanto , existen la infinidad de sistemas de logaritmos.

Sólo dos de los infinitos sistemas que existen, son los de mayor aplicación matemática en diferentes campos profesionales: los ***logaritmos decimales*** y los ***logaritmos naturales***. Se aplican por ejemplo en Economía, Estadística, Administración, Ingeniería, etc.

I) SISTEMA DECIMAL O DE BRIGGS :

Es aquel sistema de logaritmos en la cual la base es *10*.

Notación : $Log_{10}N = LogN$

Se lee : *Logaritmo de "N"*

El sistema de los logaritmos decimales es el más utilizado, sobre todo en múltiples cálculos aritméticos, y tiene como base a *10*. Para el cálculo de los logaritmos en éste sistema se ha elaborado, desde hace mucho tiempo atrás, diferentes TABLAS LOGARÍTMICAS; las primeras con cuatro cifras decimales de aproximación y las últimas hasta con ocho cifras.

En la actualidad, éstas tablas logarítmicas han sido desplazadas y ampliamente aventajadas por las calculadoras electrónicas y computadoras personales; donde es posible calcular el logaritmo decimal de cualquier número positivo y con una cantidad deseada de cifras decimales de aproximación.

$Log2 = 0,301030.........$

$Log3 = 0,477125.........$

$Log5 = 1 - Log2 = 0,698969.........$

$Log7 = 0,845098.........$

EJEMPLO :

$* \; Log\,100 = Log\,10^2 = 2$

$* \; Log\,6 = Log(3 \times 2) = Log3 + Log2$

EN GENERAL : Parte entera , Parte decimal

↓ (característica) ↓ (mantisa)

TEOREMA :

Sea $N > 1$; el número de cifras en su parte entera viene dado por :

$$\left(\begin{matrix}\#\text{ de} \\ \text{cifras}\end{matrix}\; N\right) = \text{características} + 1$$

EJEMPLO :

Halle el número de cifras de $N = 2^{50} \times 3^{20}$ siendo :

$Log\,2 = 0,30103$; $Log\,3 = 0,47712$

RESOLUCIÓN :

$Log\,N = Log\,2^{50} + Log\,3^{20}$

$\Rightarrow Log\,N = 50(Log\,2) + 20(Log\,3)$

$\Rightarrow Log\,N = 50(0,30103) + 20(0,407712)$

$\Rightarrow Log\,N = 15,0515 + 9,5424 \Rightarrow Log\,N = 24,5939$

$\Rightarrow$ número de cifras de N: $24 + 1 = 25$

II) SISTEMA HIPERBÓLICO O NEPERIANO :

Este sistema es de mucha importancia en el análisis matemático, puesto que su base (el número *e*) se obtiene como resultado del cálculo del límite de una

función: $\lim\limits_{x \to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

donde el desarrollo de la función, aplicando el binomio de Newton en el caso general, es:

$$(1+x)^{\frac{1}{x}} = \binom{\frac{1}{x}}{0} + \binom{\frac{1}{x}}{0}x^1 + \binom{\frac{1}{x}}{0}x^2 + \binom{\frac{1}{x}}{0}x^3 + ...$$

en el límite cuando $x \to 0$, resulta :

$$\lim_{x \to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + ...$$

Luego :

$$\boxed{e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ... = 2,7182818}$$

Para el cálculo de logaritmos naturales también se han elaborado tablas logarítmicas de este sistema; pero con ciertas limitaciones, dado que no es posible emplear criterios similares a aquellos de los logaritmos decimales.

Pero, conociendo el logaritmo decimal de un cierto número *N*, se puede calcular el logaritmo natural del mismo número.

NOTACIÓN:

$$\boxed{Log_e N = LnN}$$

$* \; Ln\,1 = 0$ $\qquad * \; e^{Lnx} = x \; ; x > 0$

$* \; Ln\,e = 1$ $\qquad * \; Ln\,x = \dfrac{Logx}{Loge} \; ; x > 0$

$* \; Lne^n = n$ $\qquad * \; Log\,x = \dfrac{Ln\,x}{Ln10} \; ; \; x > 0$

$* \; Ln42 = Ln(7 \times 6) = Ln7 + Ln6$

Dentro de éste sistema, hay que tener en cuenta dos valores «notables», que son:

$$* \; Loge = \frac{1}{Ln10} = 0,434294 ...$$

* $Ln10=\dfrac{1}{Loge}=2,302585...$

RELACIONES ESPECIALES EN LOGARITMOS

I) COLOGARITMO :

Se define el cologaritmo de un número N positivo en una base b positiva y diferente de la unidad , como el logaritmo de la inversa de dicho número en esa misma base.

$$CoLog_b N = Log_b \frac{1}{N} = -Log_b N$$

EJEMPLOS :

* $CoLog_3 7 = -Log_3 7$
* $CoLog_2 128 = -Log_2 2^7 = -7$
* $CoLog_{27}\left(\dfrac{1}{81}\right) = Log_{27} 81 = Log_{3^3} 3^4 = \dfrac{4}{3}$
* $CoLog100 = -Log100 = -2$

II) ANTILOGARITMO :

Se define como el operador inverso del logaritmo y se denomina también exponencial.

Así: $AntiLog_b x = b^x$ ó $Exp_b x = b^x$

$b>0; b\neq 1; x\in\mathbb{R}$

EJEMPLOS :

* $AntiLog_2 3 = 2^3 = 8$
* $AntiLog_4 -1/2 = 4^{-1/2} = \dfrac{1}{2}$

PROPIEDADES :

$AntiLog_b(Log_b N) = N$ $\quad$ $Log_b(AntiLog_b N) = N$

RESOLUCIÓN DE ECUACIONES LOGARÍTMICAS

Para resolver una ecuación logarítmica, tómese en cuenta la definición y los siguientes criterios:

* Si:

$Log_a(F(x)) = Log_a(G(x)) \Rightarrow F(x)>0 \wedge G(x)>0 \wedge F(x)=G(x)$

, siendo $a>0 \wedge a \neq 1$

* Si: $F(x)=G(x)$ y ambos son positivos $\Rightarrow Log_a(F(x)) = Log_a(G(x))$ Para $a>0 \wedge a\neq 1$

EJEMPLO:

Resuelva la ecuación:

$$Log_2 x + Log_4 x^2 - Log_4 x = 3$$

RESOLUCIÓN:

Expresamos todos los logaritmos en una misma base, en el primer logaritmo, elevando la base y el número al exponente 2, se tiene:

$\Rightarrow Log_{2^2} x^2 + Log_4 x^2 - Log_4 x = 3$

$\Rightarrow Log_4 x^2 + Log_4 x^2 - Log_4 x = 3$

Usando la suma y resta de logaritmos, se reduce a un solo logaritmo en la misma base:

$$\Rightarrow Log_4\left(\frac{x^2x^2}{x}\right) = 3; Log_4 x^3 = 3 \Rightarrow x^3 = 4^3 \Rightarrow x = 4$$

INECUACIONES LOGARÍTMICAS

A) Siendo : $0 < b < 1 \wedge x_1 > 0 \wedge x_2 > 0$

* Si: $Log_b x_1 > Log_b x_2 \Rightarrow x_1 < x_2$
* Si: $Log_b x_1 < Log_b x_2 \Rightarrow x_1 > x_2$
* Si: $Log_b x > a \Rightarrow x < b^a$

B) Siendo : $b > 1 \wedge x_1 > 0 \wedge x_2 > 0$

* Si: $Log_b x_1 > Log_b x_2 \Rightarrow x_1 > x_2$
* Si: $Log_b x_1 < Log_b x_2 \Rightarrow x_1 < x_2$
* Si: $Log_b x > a \Rightarrow x > b^a$

EJEMPLO :

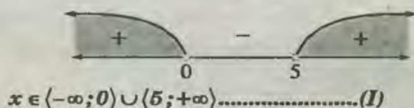
Resolver: $Log_{\sqrt{6}}(x^2 - 5x) > 2$

A) $x\in R$ $\quad$ B) $x\in\langle-\infty;1\rangle\cup\langle5;+\infty\rangle$ $\quad$ C) $x\in\varnothing$

D) $x\in\langle-\infty;1\rangle\cup\langle6;+\infty\rangle$ $\quad$ E) $x\in\langle-\infty;-1\rangle\cap\langle5;+\infty\rangle$

RESOLUCIÓN :

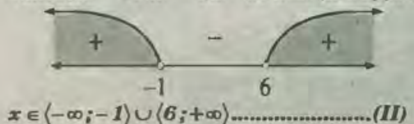
* Por definición: $x^2-5x>0 \Rightarrow x(x-5)>0$



$x\in\langle-\infty;0\rangle\cup\langle5;+\infty\rangle$..........................(I)

* Ahora como $\sqrt{6}>1$ (base > 1)

$\Rightarrow x^2-5x>\sqrt{6}^{\,2} \Rightarrow x^2-5x-6>0 \Rightarrow (x-6)(x+1)>0$



$x\in\langle-\infty;-1\rangle\cup\langle6;+\infty\rangle$..........................(II)

* Intersectando *(I)* y *(II)* se obtiene la solución :

$$(I)\cap(II):\ x\in\langle-\infty;-1\rangle\cup\langle 6;+\infty\rangle$$

RPTA : "D"

LOGARITMO COMPLEJO

Sea : Z un número complejo , tal que : $\theta=Arg(Z)$, entonces su logaritmo se calcula según la siguiente relación :

$$\boxed{LnZ=Ln|Z|+\theta i}$$

$$\theta=argumento\ \ principal$$

EJEMPLO 1 :

Sea : $Z=1-i=\sqrt{2}e^{7\pi i/4+2k\pi i}$

$$\Rightarrow LnZ=Ln|Z|+i(\theta+2k\pi)$$

$$\Rightarrow Ln(1-i)=Ln\sqrt{2}+\frac{7\pi i}{4}+2k\pi i$$

donde $\frac{1}{2}Ln2+\frac{7\pi i}{4}$ es el valor principal que se obtiene haciendo $k=0$.

EJEMPLO 2 :

Determinar : i^i

RESOLUCIÓN :

* Sabemos que :

$$i^i=e^{iLni}=e^{i[i(\pi/2+2k\pi)]}=e^{-(\pi/2+2k\pi)}$$

donde el valor principal está dado por :

$$e^{-\pi/2}$$

LOGARITMOS DE NÚMEROS NEGATIVOS

El logaritmo para números negativos no existe en el campo de los números reales , pero si en el campo de los números complejos .

$$\boxed{Log(-x)=Logx+1,36439i}$$

EJEMPLO :

$$Log(-2)=Log2+1,36439i$$

$$\Rightarrow Log(-2)=0,30103+1,36439i$$

APLICACIONES DE LOS LOGARITMOS

En la Biología se puede mostrar que se aplica en el calculo del PH que es el logaritmo de la inversa de la concentración de iones de hidrógeno, y mide la condición llamada acidez.

Los logaritmos se aplican como el claro ejemplo de los estudios de Mendel, quien se dedicó a estudiar el comportamiento de ciertas plantas. En esta categoría es donde se realizan los mayores avances de la humanidad por que cada año descubren miles de fórmulas científicas.

Los biólogos lo utilizan para estudiar los efectos nutricionales de los organismos.

Aplicaciones en la ingeniería, de hecho el comportamiento del universo desde el punto de vista científico es una función logarítmica (la exponencial e), también sirven para representar comportamientos de crecimientos de comunidades.

Los logaritmos tienen variadas aplicaciones en modelos de fenómenos naturales y sociales: una de ellas es la escala Richter.

ESCALA RICHTER :

Una escala habitualmente utilizada en la medición de la intensidad de los sismos es la escala Richter. Los grados se calculan mediante la expresión

$R=Log\left(\frac{A}{p}\right)$, donde A es la amplitud medida en micrómetros (1 micrómetro = 10^{-4} cm) y p es el período medido en segundos.

EJEMPLO:

¿Cuál es la magnitud de un sismo en la escala Richter si la amplitud es 10^{-2} *cm* y su período es *1* segundo?

RESOLUCIÓN :

Como *1* micrómetro = 10^{-4} *cm*, entonces 10^{-2} cm equivalen a 10^2 micrómetros. Entonces la cantidad de grados Richter R es: $R=Log\left(\frac{A}{p}\right)=Log\left(\frac{10^2}{1}\right)=2$

RESUMEN :

* En el campo de los números reales no existe el logaritmo de números negativos

*Sean a y N dos números reales positivos y $a\neq 1$, se llama logaritmo del número N en base a, al exponente a que hay que elevar la base a para obtener como resultado el número N, es decir:

$$Log_aN=b\Leftrightarrow a^b=N$$

*** El logaritmo de un producto es igual a la suma de los logaritmos de los factores.**

*** De igual manera sucede con los logaritmos de cocientes sino que en lugar de poner el signo + se escribe el signo (–).**

*** Cuando en una ecuación aparece la incógnita como exponente, decimos que la ecuación es exponencial**

*** Cuando en una ecuación el logaritmo incluye expresiones que contienen la incógnita, decimos que la ecuación es logarítmica**

*** Existen dos sistemas de logaritmos más importantes: el sistema decimal y el sistema Neperiano.**

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1 :

Calcular : $Log_{5\sqrt{5}} 3125$

A) 1 B) 5 C) 10 D) $\frac{10}{3}$ E) $\frac{12}{5}$

RESOLUCIÓN:

* Teoremas : $Log_{5\sqrt{5}} 3125 = x$

* Aplicando la definición : $(5\sqrt{5})^x = 3125$

* Ahora el problema se transforma a resolver la ecuación exponencial para lo cual se expresa todo en base "5", es decir :

$$(5^1 \times 5^{\frac{1}{2}})x = 5^5$$

* Como : $\boxed{b^m \times b^n = b^{m+n}}$

* entonces : $\left(5^{1+\frac{1}{2}}\right)^x = 5^5$

$$\Rightarrow 5^{\frac{3x}{2}} = 5^5 \Rightarrow \frac{3x}{2} = 5 \Rightarrow x = \frac{10}{3}$$

RPTA: "D"

PROBLEMA 2 :

Calcular «x» en :

$$x = Log_2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

A) 2 B) −2 C) $\sqrt{2}$ D) −1 E) $-\frac{1}{2}$

RESOLUCIÓN :

* Aplicando la definición :

$$2^x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow 2^x \times 2^1 = 2^{\frac{1}{2}} \Rightarrow 2^{x+1} = 2^{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow x + 1 = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{2} - 1 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

RPTA: "E"

PROBLEMA 3 :

Calcular : $Log_3 27 + Log_2 48 - Log_5 25$

A) $5 + Log_2 3$ B) $3 + Log_3 2$ C) $4 + Log_5 2$
D) $Log_2 5$ E) 2

RESOLUCIÓN :

* Recordando que :

I) $Log_b b^n = n$

II) $Log_b(MN) = Log_b M + Log_b N$

* Luego calculamos lo pedido :

$$Log_3 3^3 + Log_2(16 \times 3) - Log_5 5^2$$
$$= 3 + Log_2 2^4 + Log_2 3 - 2$$
$$= 1 + 4 + Log_2 3 = 5 + Log_2 3$$

RPTA: "A"

PROBLEMA 4:

El logaritmo de qué número en base $2\sqrt{2}$ es 8

A) 1024 B) 2048 C) 4096 D) 2 E) $2\sqrt{2}$

RESOLUCIÓN :

* Sea "N" el número pedido , luego :

$$Log_{2\sqrt{2}} N = 8 \Rightarrow N = (2\sqrt{2})^8$$

$$\Rightarrow N = 2^8 \times \sqrt{2}^8 = 256 \times 2^4$$

$$\Rightarrow N = 256 \times 16 = 4096$$

RPTA: "C"

PROBLEMA 5 :

Calcular :

$$Log_{4\sqrt{2}} 2\sqrt[3]{2} - Log_{25} 5\sqrt[3]{5}$$

A) 1 B) −1 C) $-\frac{1}{2}$ D) $-\frac{2}{15}$

RESOLUCIÓN :

* Expresando en base "2" y base "5" los logaritmo respectivos , tendríamos :

$$Log_{\left(2^2 \times 2^{\frac{1}{2}}\right)}(2^1 \times 2^{\frac{1}{3}}) - Log_{5^2} 5^1 \times 5^{\frac{1}{3}}$$

$$= Log_{2^{\frac{5}{2}}} 2^{\frac{4}{3}} - Log_{5^2} 5^{\frac{4}{3}}$$

* Pero por la siguiente propiedad :

$$\boxed{Log_{b^n} b^m = \frac{m}{n}}$$

* Se obtendrá :

$$\frac{\frac{4}{3}}{\frac{5}{2}} - \frac{\frac{4}{3}}{\frac{2}{1}} = \frac{8}{15} - \frac{2}{3} = -\frac{2}{15}$$

RPTA: "D"

PROBLEMA 6 :

El valor de $10^{Log\,7}$ es :

A) 1 B) log 7 C) 1/7 D) 7 E) No puede calcular

RESOLUCIÓN :

* Debemos aplicar en este caso la siguiente propiedad fundamental : $\boxed{b^{Log_b N} = N}$

* Entonces : $10^{Log\,7} = 10^{Log_{10} 7} = 7$

RPTA:"D"

PROBLEMA 7 :

Simplificar la expresión : $2^{Log_3 8^{Log_4 3}}$

A) $2\sqrt{2}$ B) $\sqrt{3}$ C) 6 D) $\sqrt{2}$ E) 7

RESOLUCIÓN :

*Aplicando adecuadamente las propiedades:

$$2^{Log_3 8^{Log_4 3}} = 2^{Log_3 3^{Log_4 8}} = 2^{Log_4 8}$$

$$= 2^{Log_{2^2} 2^3} = 2^{\frac{3}{2}} = \sqrt{2^3} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

RPTA: "A"

PROBLEMA 8 :

Calcular ***AntiLogP***, siendo :

$$P = Log\frac{75}{16} - 2Log\frac{5}{9} + Log\frac{32}{243}$$

A) 2 B) 0 C) –2 D) 7 E) 0,5

RESOLUCIÓN :

* Cuando se tenga sumas y restas conviene transformar la expresión a logaritmo de un producto o un cociente :

* Entonces :

$$P = Log\frac{75}{16} + Log\frac{32}{243} - Log\left(\frac{5}{9}\right)^2 = Log\frac{75}{16}\times\frac{32}{243} - Log\frac{25}{81}$$

$$= Log\frac{81\times75\times32}{25\times16\times243} = Log2$$

* Tomando ***antilog*** en ambos mienbros :

antilogP= antilog Log2 = 2

RPTA: "A"

PROBLEMA 9 :

Calcular el valor :

$$M = Log_8 16 + Log_{343\sqrt{7}} 49 + Log_3 27\sqrt[3]{3}$$

A) $\frac{1}{17}$ B) $\frac{43}{51}$ C) 2 D) $\frac{110}{21}$ E) $\frac{114}{19}$

RESOLUCIÓN:

* $Log_8 16 = Log_{2^3} 2^4 = \frac{4}{3} Log_2 2 = \frac{4}{3}$

* $Log_{343\sqrt{7}} 49 \Rightarrow Log_{7^3\times7^{1/2}} 7^2 = Log_{7^{7/2}} 7^2 = \frac{2}{\frac{7}{2}} = \frac{4}{7}$

* $Log_3 27\sqrt[3]{3} = Log_3 3^3\times3^{1/3} = Log_3 3^{10/3} = \frac{10}{3}$

* Finalmente se pide :

$$M = \frac{4}{3} + \frac{4}{7} + \frac{10}{3} = \frac{110}{21}$$

RPTA: "D"

PROBLEMA 10 :

Calcular el valor de : $E = \sqrt[4]{\dfrac{7^{Log_5 15} + 3^{2+Log_5 7}}{7^{Log_5 3}}}$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 5 E) $\sqrt{2}$

RESOLUCIÓN :

* Transformando adecuadamente los logaritmos , asi :

$$E = \sqrt[4]{\frac{7^{Log_5(3\times5)} + 3^2\times3^{Log_5 7}}{7^{Log_5 7}}}$$

$$\to E = \sqrt[4]{\frac{7^{Log_5^5 + Log_5^3} + 3^2\times3^{Log_5 7}}{7^{Log_5 3}}}$$

$$\to E = \sqrt[4]{\frac{7^1\times7^{Log_5 3} + 9\times7^{Log_5 3}}{7^{Log_5 3}}}$$

$$\to E = \sqrt[4]{\frac{7^{Log_5^3}(7+9)}{7^{Log_5 3}}} = \sqrt[4]{16} = 2$$

RPTA: "B"

PROBLEMA 11:

Efectuar :

$$E = log_{15\sqrt{512}} 8\sqrt[5]{64} + log_{15\sqrt{216}} 6\sqrt[5]{36}$$

A) 11 B) 12 C) 13 D) 14 E) 15

RESOLUCIÓN :

$$E = Log_{15\sqrt{512}}\sqrt[5]{(8^5)\times(64)} + Log_{15\sqrt{216}}\sqrt[5]{(36)\times(6^5)}$$

$$\Rightarrow E = Log_{15\sqrt{2^9}}\sqrt[5]{(2^{15}).(2^6)} + Log_{15\sqrt{6^3}}\sqrt[5]{(6)^2.(6^5)}$$

$$\Rightarrow E = Log_{15\sqrt{2^9}}\sqrt[15]{\left(2^{21}\right)^3} + Log_{15\sqrt{6^3}}\sqrt[15]{\left(6^7\right)^3}$$

$$\Rightarrow E = Log_{2^9} 2^{63} + Log_{6^3} 2^{21} = \frac{63}{9} + \frac{21}{3}$$

$$\Rightarrow E = 7 + 7 = 14$$

RPTA:"D"

PROBLEMA 12 :

Calcular el valor de la expresión:

$$F = \frac{3}{2}Loga - 5coLogc - 2coLogb + Log\frac{\sqrt{a^3}}{c^5b^2}$$

A) a B) ac C) bc D) Loga E) 3Loga

RESOLUCIÓN :

* Transformado la expresión :

$$F = \frac{3}{2}Loga - 5(-Logc) - 2(-Logb)\,Log\sqrt{a^3} - Logc^5\,b^2$$

$$\Rightarrow F = \frac{3}{2}Loga + 5Logc + 2Logb + \frac{3}{2}Loga - (Logc^5 + Logb^2)$$

$$\Rightarrow F = \frac{3}{2}Loga + 5Logc + 2Logb + \frac{3}{2}Loga - 5Loc - 2Logb$$

$$\Rightarrow F = 3Loga$$

RPTA: "E"

PROBLEMA 13 :

El cologaritmo con base 10 de $\sqrt{10}$ es igual a:

A) -1 B) -0,4771 C) 0,5 D) 0 E) -0,5

RESOLUCIÓN :

* Se pide:

$$coLog\sqrt{10}=-Log\sqrt{10}=-Log10^{1/2}=-\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow coLog\sqrt{10}=-0,5$$

RPTA: "E"

PROBLEMA 14 :

Determinar el valor de :

$$W=Log\{antiLog_4[(Log_2 5+2)-1]\}$$

A) 2 B) 4 C) 6 D) 8 E) 10

RESOLUCIÓN :

* Si efectuamos por partes :

$$Log_2 5+2=Log_2 5+Log_2 4=Log_2 20$$

* Reemplazando en W
* Transformando adecuadamente .

$$W=Log\{antiLog_4[Log_2 20-1]\}$$

* Efectuamos :

$$Log_2 20-1=Log_2 20-Log_2 2=Log_2 10$$

* En W :

$$W=Log\{antiLog_4(Log_2 10)\}$$

* Usando propiedad :

$$W=Log\{\underbrace{antiLog_4(Log_4 100)}_{100}\}$$

$$\Rightarrow W=Log100=2$$

RPTA: "A"

PROBLEMA 15 :

Calcular

$$Log_{\sqrt[3]{3}}\left(antiLog_{\sqrt[3]{3}}\left(Log_{\sqrt{2}}\left(antiLog_{\sqrt[4]{2}}\left(Log_{\sqrt[6]{2}}8\right)\right)\right)\right)$$

A) 5 B) 7 C) 8 D) -9 E) -5

RESOLUCIÓN :

* Nos piden :

$$Log_{\sqrt[3]{3}}\left(antiLog_{\sqrt[3]{3}}\left(Log_{\sqrt{2}}\left(antiLog_{\sqrt[4]{2}}\left(Log_{\sqrt[6]{2}}8\right)\right)\right)\right)=-9$$

-18

$\sqrt{2}^{-9}$

-9

* Pues :

* $coLog_{\sqrt[6]{2}}8=log_{\sqrt[6]{2}}8=Log_2 2^3_{1/6}=\frac{-3}{1/6}Log_2 2=-18$

* $antiLog_{\sqrt[4]{2}}-18=\sqrt[4]{2}^{-18}=\sqrt{2}^{-9}$

* $Log_{\sqrt{2}}\sqrt{2}^{-9}=-9Log_{\sqrt{2}}\sqrt{2}=-9$

RPTA: "D"

PROBLEMA 16 :

La igualdad : $x=a^{Log_a x}$ se cumple si y sólo si :

A) $a>1, x\in R$ B) $a>1, x\in R-\{0\}$

C) $a\neq 1, x>0, a>0$ D) $a\in R-\{1\}, x\in R-\{0\}$

RESOLUCIÓN :

* De la definición de logaritmo se deduce que:
* La base de un sistema de logaritmo siempre es una cantidad positiva diferente de 1 .
* En el campo de los números reales , sólo están definidos los logaritmos de los números positivos .
* Si la base es mayor que 1 , se tiene :

$$Log_b\infty=+\infty\ ,\ Log_b 0=-\infty$$

* Si al base es tal que $0<b<1$, se tiene :

$$Log_b\infty=-\infty\ ,\ Log_b 0=+\infty$$

RPTA: "C"

PROBLEMA 17 :

A que es igual :

$$P=\frac{1}{1+Log_a bc}+\frac{1}{1+Log_b ac}+\frac{1}{1+Log_c ab}$$

A) 5 B) 4 C) 3 D) 2 E) 1

RESOLUCIÓN :

* Sabemos que : $\boxed{Log_b b=1}$
* Luego en lo pedido , se obtendrá :

$$P=\frac{1}{Log_a a+Log_a bc}+\frac{1}{Log_b b+Log_a ac}+\frac{1}{Log_c c+Log_c ab}$$

* Por propiedad :

$$P=\frac{1}{Log_a abc}+\frac{1}{Log_b abc}+\frac{1}{Log_c abc}$$

* Se sabe que : $Log_b m=\frac{1}{Log_m b}$

$$\Rightarrow P=\underbrace{Log_{abc}a+Log_{abc}b+Log_{abc}c}$$

$$\Rightarrow P=Log_{abc}abc\Rightarrow P=1$$

RPTA: "E"

PROBLEMA 18 :

Si $Log_2 b=4$, hallar "a" en :

$$Log_2\left(\sqrt{a}\frac{b^2}{2}\right)=6$$

A) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ B) $\sqrt{2}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

RESOLUCIÓN :

* Si $Log_2 b = 4 \rightarrow b = 2^4$

$\rightarrow b = 16$

* Luego : $Log_2\left(\sqrt{a}\,\dfrac{16^2}{2}\right) = 6$

$$\Rightarrow Log_2\left(128\sqrt{a}\right) = 6 \Rightarrow 128\sqrt{a} = 2^6$$

$$\Rightarrow 128\sqrt{a} = 64 \Rightarrow \sqrt{a} = \frac{1}{2} \Rightarrow a = \frac{1}{4}$$

RPTA: "C"

PROBLEMA 19 :

Sean a , b y c tres números positivos diferentes de 1 , si :

$$x = Log_b C$$
$$y = Log_a C$$

el valor de $log_{ab}C$ será (se supone $ab \neq 1$)

A) $\dfrac{x^2}{x+y}$ B) $\dfrac{x^2y^2}{x+y}$ C) $\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}$ D) $\dfrac{x+y}{xy}$ E) $\dfrac{xy}{x+y}$

RESOLUCIÓN :

$$E = Log_{ab}c$$

$$E = \frac{1}{Log_c ab} = \frac{1}{Log_c a + Log_c b} \text{.......}[I]$$

$$Log_b c = x \Rightarrow Log_c b = \frac{1}{x}$$

$$Log_a c = y \Rightarrow Log_c a = \frac{1}{y}$$

* Reemplazando en $[I]$:

$$E = \frac{1}{\frac{1}{y}+\frac{1}{x}} = \frac{xy}{x+y}$$

RPTA: "E"

PROBLEMA 20 :

Si $Log_{12}3 = b$, hallar $Log_{12}8$.

A) $\dfrac{3}{2}(1-b)$ B) $\dfrac{2}{3}\ b-1$ C) $\dfrac{1-b}{2}$ D) $5b+1$ E) $\dfrac{2}{3}\ b+1$

RESOLUCIÓN :

* Dato : $Log_{12}3 = b \wedge$ calcular : $Log_{12}8 = x$

* Sumando miembro a miembro :

$$b + x = Log_{12}24$$
$$b + x = Log_{12}(12 \times 2)$$
$$b + x = 1 + Log_{12}2 \text{ ....}(I)$$

* De la pregunta :

$$x = Log_{12}8 \Rightarrow x = Log_{12}2^3$$

* De donde :

$$\frac{x}{3} = Log_{12}2$$

* Luego en (I) :

$$b + x = 1 + \frac{x}{3} \Rightarrow x = \frac{3}{2}(1-b)$$

RPTA: "A"

PROBLEMA 21 :

Si : $Log\ (6!) = a$

$Log\ (4!) = b$

Calcular $Log_3 100$ en función de «a» y «b».

A) $\dfrac{2}{a-2}$ B) $\dfrac{2}{b-a-1}$ C) $\dfrac{2}{a-b-1}$ D) $\dfrac{-3}{1+b-a}$ E) $\dfrac{2}{a-1}$

RESOLUCIÓN :

* Nos piden calcular :

$$Log_3 10^2 = 2Log_3 10 = \frac{2}{Log\ 3} \text{ ....}(I)$$

* Pero : $a - b = Log\ 6! - Log\ 4!$

$$\Rightarrow a-b = Log\left(\frac{6!}{4!}\right) = Log\left(\frac{6\times5\times4!}{4!}\right)$$

$$\Rightarrow a-b = Log30$$

$$\Rightarrow a-b = Log3 + Log10 \Rightarrow Log3 = a-b-1$$

* Reemplazando en (I) :

$$Log_3 100 = \frac{2}{a-b-1}$$

RPTA: "C"

PROBLEMA 22 :

Los logaritmos decimales de 2 y 3 son : $Log2 = 0{,}3010$; $Log3 = 0{,}4711$; calcular $Log\sqrt{2880}$ con cuatro cifras decimales.

A) 1,4116 B) 1,7236 C) 2,2236 D) 1,7060 E) 2,0103

RESOLUCIÓN :

* Transformando adecuadamente lo pedido:

$$E = Log\sqrt{2880} = Log(10\times2^5\times3^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow E = \frac{1}{2}\left[Log(10\times2^5\times3^2)\right]$$

$$\Rightarrow E = \frac{1}{2}\left[Log10 + Log2^5 + Log3^2\right]$$

$$\Rightarrow E = \frac{1}{2}[1 + 5Log2 + 2Log3]$$

2880	(2)	
1440	2	
720	2	
360	2	2^5
180	2	
90	2	
45	3	3^2
15	3	
5	(5)	
1		

RPTA: "B"

PROBLEMA 23 :

Indicar el número de cifras del producto de:

$$2^{30}\times 3^{15}\ si\begin{cases}Log2=0,30103\\Log3=0,47712\end{cases}$$

A) 13 B) 14 C) 15 D) 16 E) 17

RESOLUCIÓN :

* Se aplica el logaritmo a dicho producto:

$$Log\,(2^{30}\times 3^{15})=Log\ 2^{20}+Log\ 3^{15}$$

$$\Rightarrow Log\,(2^{30}\times 3^{15})=20Log2+15Log3$$

* Reemplazando :

$$Log\,(2^{20}\times 3^{15})=20(0\,;103)+15(0\,;47712)$$

$$\rightarrow Log\,(2^{20}\times 3^{15})=13\,;17740$$

* Se sabe que :

Característica = # de cifras – 1

* De donde :

de cifras = características + 1

de cifras = 13 + 1 = 14

* Entonces el producto $2^{20}\times 3^{15}$ posee **14** cifras :

RPTA: "B"

PROBLEMA 24 :

La cantidad de sustancia en el instante t es dada $C_{(t)}=C_{(0)}e^{-kt}$, donde t es el tiempo transcurrido, k es constante y $C_{(0)}$ es cantidad de sustancia presente en el instante 0, Hallar el tiempo que debe transcurrir para que la cantidad original se reduzca a la tercera parte .

A) $Ln\left(\frac{k}{3}\right)$ B) $-\frac{k}{Ln\,3}$ C) $-\frac{Ln\,3}{k}$ D) $\left(\frac{k}{Ln\,3}\right)^{-3}$ E) $\frac{(Ln3)}{k}$

RESOLUCIÓN :

* Cantidad inicial : $C_{(0)}$
* Cantidad final : $C_{(t_1)}=\frac{C_{(0)}}{3}$
* Pero : $C_{(t_1)}=C_{(0)}e^{-Kt_1}$

$$\Rightarrow \frac{C_{(0)}}{3}=C_{(0)}e^{-Kt_1}\longrightarrow \frac{1}{3}=e^{-Kt_1}$$

$$Ln\left(\frac{1}{3}\right)=-Kt_1\longrightarrow t_1=\frac{Ln3}{k}$$

RPTA: "E"

ECUACIÓN LOGARÍTMICA

Es aquella ecuación transcendente donde , por lo menos , una incógnita está afectada del operador logarítmico .

EJEMPLOS :

* $Log_2x=-Log_4(x-1)$
* $Log(x-1)=2x-3$
* $7=1-Lnx^2$

PROCEDIMIENTO EN LA RESOLUCIÓN :

* Sea la ecuación :

$$Log_aP=Log_aQ$$

I) Debemos garantizar la existencia de los logaritmos , para ello debemos analizar la base y las expresiones **P** y **Q** que depende de la incógnita, es decir , debemos hallar los valores de la incógnita que satisfagan lo siguiente .

$$P>0\wedge Q>0\wedge a>0\wedge a\neq 1\ldots\ldots\ldots\ (I)$$

II) Hallamos los posibles valores de la incógnita haciendo :

$$P=Q\ldots\ldots\ldots\ldots\ (II)$$

III) Finalmente, las soluciones de la ecuación lo encontrarás intersectando los valores obtenidos en (**I** y **II**) :

$$C.S=(I)\cap(II)$$

PROBLEMA 25 :

Resolver : $Log_x(7-x)=Log_x(x-3)$

A) {0; 4} B) 3 C) 5 D) 4 E) 7

RESOLUCIÓN :

$$I)(x>0)\ y\ (x\neq 1)\ y\ \underbrace{(7-x>0)}_{7>x}\ y\ \underbrace{(x-3>0)}_{x>3}$$

$$\Rightarrow x\in<3\,;7>\ldots\ldots\ldots\ldots\ (I)$$

II) Igualando los argumentos :

$$7-x=x-3$$

$$\Rightarrow 10=2x$$

$$\Rightarrow 5=x\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (II)$$

III) Finalmente $(I)\cap(II)$:

solución Conjunto = {5}

RPTA: "C"

INECUACIÓN LOGARITMICA

Esta inecuación se caracteriza por tener al menos una incógnita efectada del operador logarítmico .

EJEMPLOS :

* $Log_3(5-x)>2$
* $Log_x(7+x)\leq Log_x(1-x)$

PROCEDIMIENTO EN LA RESOLUCIÓN :

* Sea la inecuación : $Log_aA>Log_aB$.

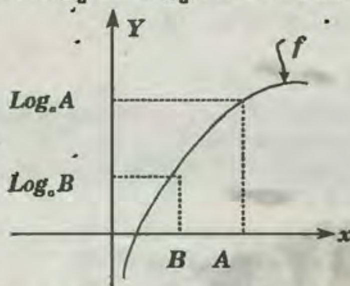
I) Garantizamos la existencia de los logaritmos, por definición se debe cumplir :

$$A>0\wedge B>0\wedge a>0\wedge a\neq 1\ldots\ldots\left(\begin{matrix}Conjunto\ de\\Valores\\admisibles\end{matrix}\right)$$

II) Dependiendo del valor de la base , pueden presentarse dos casos :

* 1° CASO :

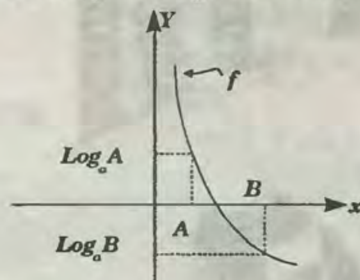
Si : $A>1 \wedge Log_a A > Log_a B \Leftrightarrow A > B$ ....(φ):



Donde : $f(x) = Log_a x$

* 2° CASO :

Si $0<a<1 \wedge Log_a A > Log_a B \Leftrightarrow A < B$.............($\lambda$)



Donde : $f(x) = Log_a x$

III) El conjunto solución se obtiene intersectando los valores obtenidos en ① y ② .

$$C.S = ① \cap (\varphi) \cap (\lambda)$$

CASO PARTICULAR :

Sea A positivo : $Log_a A > 0$

Si : $a > 1 \Rightarrow A > 1$

Si : $0 < a < 1 \Rightarrow A<1$

OBSERVACIÓN:

Resolver : $Log_{\frac{1}{5}}(5x-6) \le Log_{\frac{1}{5}} x^2 \cap \lambda$

A) $<-2;3>$ B) $[2;3]$ C) $[-2;3>$ D) $<-2;3]$ E) $\varnothing$

RESOLUCIÓN :

$I)\ \underbrace{(5x-6>0)} \wedge \underbrace{(x^2>0)}$

$$\underline{x > \frac{6}{5} \wedge x \in R}$$

$x \in <\frac{6}{5};+\infty>$ .... (Conjunto de valores admisibles)

II) Luego como las bases son menores que *1*, entonces:

$5x - 6 \ge x^2$ .... (El sentido se cambio)

$\Rightarrow 0 \ge x^2 - 5x + 6$

$\Rightarrow (x-2)(x-3) \le 0$

$\Rightarrow x \in [2;3]$.......... - -..........(II)

III) De (I) $\cap$ (II):

$$\text{Conjunto solución} = [2;3]$$

RPTA: "B"

PROBLEMA 27 :

Resolver $Log_{\frac{1}{3}}(x^2-1) > Log_{\frac{1}{3}}(2x+7)$

A) $<-2;1>$ B) $<-2;-1> \cup <1;4>$ C) $<1;2>$ D) $\varnothing$ E) R

RESOLUCIÓN :

I) Determinando el conjunto de valores admisibles *(C. V. A)*

$(x^2 - 1 > 0) \wedge (2x + 7 > 0)$

$\rightarrow \left((x+1)(x-1) > 0\right) \wedge \left(x > -\frac{7}{2}\right)$

$\rightarrow$ [+ | - | +] (−1, 1) $\cap$ [+] ($-\frac{7}{2}$)

$\Rightarrow C.V.A. : <-\frac{7}{2};-1> \cup <1;+\infty>$

II) Luego como la base es menor que *1* , entonces :

$x^2 - 1 < 2x + 7$

$\longrightarrow x^2 - 2x - 8 < 0$

$\longrightarrow (x-4)(x+2) < 0$

$\longrightarrow x \in <-2;4>$ .... (II)

III) Intersectando (I) y (II) :

$x \in <-2;-1> \cup <1;4>$

RPTA: "B"

PROBLEMA 28 :

Resolver la ecuación $2^{Log_8(x+1)} = 3$

A) 15 B) 9 C) 26 D) 21 E) 63

RESOLUCIÓN :

* Como :

$Log_8(x+1) = Log_{2^3}(x+1) = Log_{\sqrt[3]{2^3}} \sqrt[3]{x+1}$

$\Rightarrow Log_8(x+1) = Log_2 \sqrt[3]{x+1}$

* Como lo dado se transformará , en :

$2^{Log_2 \sqrt[3]{x+1}} = 3$ .... $\left(\text{Recuerda que : } b^{Log_b N} = N\right)$

* Por la identidad fundamental:

$$\sqrt[3]{x+1} = 3 \Rightarrow x + 1 = 27 \Rightarrow x = 26$$

RPTA: "C"

PROBLEMA 29 :

El cuádrupo del logaritmo de un cierto número excede en 4 al duplo del logaritmo del mismo. ¿Cuál es este número?..

A) 10^4 B) 10^3 C) 10^6 D) 10^2 E) 10

RESOLUCIÓN :

* Sea "x" el número , luego según enunciado, plantearemos :

$$4Logx - 2Logx = 4$$
$$\longrightarrow 2\,Logx = 4$$
$$\longrightarrow Logx = 2 \Rightarrow x = 10^2$$

RPTA: "D"

PROBLEMA 30 :

El valor de «x» en la ecuación:

$$Log\sqrt{x} - Log3 = \frac{1}{2} \text{ es:}$$

A) $9\sqrt{10}$ B) 90 C) $3\sqrt{10}$ D) 60 E) 30

RESOLUCIÓN :

* De la expresión dada :

$$2\,Log\sqrt{x} - 2Log3 = 1$$
$$\longrightarrow Log\left(\sqrt{x}\right)^2 - Log3^2 = 1$$
$$\longrightarrow Logx - Log9 = 1 \Rightarrow Log\left(\frac{x}{9}\right) = 1$$

Luegom : $\frac{x}{9} = 10^1 \Rightarrow x = 90$

RPTA: "B"

PROBLEMA 31:

Hallar "x" en: $Log_{(x-1)}(x+5) = 2$

A) 2 B) 4 C) 6 D) 8 E) 10

RESOLUCIÓN :

I) Conjunto de valores admisibles *(C. V. A.):*

$$x-1 > 0 \Rightarrow x > 1 \Rightarrow x \in <1;+\infty>$$

II) Luego :

$$(x-1)^2 = x+5$$
$$\Rightarrow x^2 - 2x + 1 = x + 5$$
$$\Rightarrow x^2 - 3x - 4 = 0$$
$$\Rightarrow (x-4)(x+1) = 0$$
$$\Rightarrow x = 4 \text{ ó } x = -1$$

* Se descarta $x = -1$, ya que no pertenece al **C. V. A.** entonces : $x = 4$

RPTA: "B"

PROBLEMA 32 :

$$(Log_6 x)(Log_x 2x)(Log_{2x} 3x) = Log_x x^2$$

A) 2 B) 4 C) 10 D) 12 E) 24

RESOLUCIÓN :

* Aplicando la regla de la cadena , en el primer miembro , resultando : $Log_6 3x = Log_x x^2$

$$\Rightarrow Log_6 3x = 2\underbrace{Log_x x}_{1} \Rightarrow Log_6 3x = 2$$
$$\Rightarrow 3x = 6^2 \Rightarrow x = 12$$

RPTA: "D"

PROBLEMA 33 :

Para la ecuación: $1 + 2\,Log\,x - Log\,(x+2) = 0$

La suma de las raíces es :

A) 1/10 B) –1/5 C) 1/2 D) 2 E) –1/2

RESOLUCIÓN :

* Transponiendo convenientemente :

$$Log(x+2) - Log\,x^2 = 1$$
$$\Rightarrow Log\left(\frac{x+2}{x^2}\right) = 1 \Rightarrow \frac{x+2}{x^2} = 10^1$$
$$\Rightarrow x + 2 = 10\,x^2 \Rightarrow 10\,x^2 - x - 2 = 0$$

* De donde :

$$(5x+2)\,(2x-1) = 0$$
$$\Rightarrow x = \frac{1}{2} \text{ ó } \underbrace{x = -\frac{2}{5}}_{\text{No cumple}}$$

RPTA: "C"

PROBLEMA 34 :

El conjunto de soluciones reales de la ecuación :

$$10000^{Log\,x} - 4 \times 100^{Logx} + 4 = 0 \text{ es:}$$

A) ϕ B) $\{\sqrt{2}\}$ C) $\{1;\sqrt{2}\}$

D) $\{-\sqrt{2};\sqrt{2}\}$ E) $\{1;\sqrt{2};-\sqrt{2}\}$

RESOLUCIÓN:

* Transformando , resulta : $10^{4Logx} - (4)10^{2Logx} + 4 = 0$

$$\Rightarrow 10^{Logx^4} - (4)10^{Logx^2} + 4 = 0$$
$$\Rightarrow x^4 - 4x^2 + 4 = 0$$
$$\Rightarrow (x^2 - 2)^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 2$$
$$\Rightarrow x = \pm\sqrt{2} \;\; ; \text{ Pero } x > 0$$
$$\Rightarrow x = \sqrt{2}$$

* Luego el conjunto solución será : $\{\sqrt{2}\}$

RPTA:"B"

PROBLEMA 35 :

Resolver : $$x^{Logx} = \frac{10^2}{|x|}$$

A) {5;10} B) $\left\{\frac{1}{100};10\right\}$ C) {3;100} D) {10} E) $\left\{\frac{1}{100};1\right\}$

RESOLUCIÓN :

* Tomando logaritmo en base x ambos miembros :

$$Log\,x^{(Log\,x)} = Log\left(\frac{100}{x}\right)$$

$\Rightarrow (Logx)^2 = \underbrace{Log100}_{2} - Logx$ de donde tenemos:

$$\Rightarrow Log^2 x + Logx - 2 = 0$$

* Por aspa siempre : $(Logx+2)(Logx-1)=0$

$$Log\,x=-2 \vee Log\,x=1$$

$$\Rightarrow x=\frac{1}{100} \vee x=10$$

* En la ecuación original ambos verifican :

$$CS=\left\{\frac{1}{100};10\right\}$$

RPTA: "B"

PROBLEMA 36 :

Hallar todos los «x» tales que : $Log_{\frac{1}{3}}x > Log_{\frac{1}{4}}x$

RESOLUCIÓN :

* Transformando a base $1/3$, aplicando la fórmula del cambio de base , se tiene :

$$Log_{\frac{1}{4}}x=\frac{Log_{1/3}x}{Log_{1/3}\frac{1}{4}}$$

* Luego , la desigualdad se escribe como :

$$Log_{\frac{1}{3}}x>\frac{Log_{\frac{1}{3}}x}{Log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{4}} \Rightarrow Log_{\frac{1}{3}}x-\frac{Log_{\frac{1}{3}}x}{Log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{4}}>0 \Rightarrow Log_{\frac{1}{3}}x\left(1-\frac{1}{log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{4}}\right)>0$$

$$\Rightarrow Log_{\frac{1}{3}}x\left(1-Log_{\frac{1}{4}}\frac{1}{3}\right)>0 \Rightarrow Log_{\frac{1}{3}}x(1-Log_4 3)>0$$

* Puesto que : $1-Log_4 3>0$,también debe cumplirse:

$$Log_{\frac{1}{3}}x>0$$

* Donde por ser : $b=\frac{1}{3}<1$; se tiene :

$$Log_{\frac{1}{3}}x>0 \Rightarrow 0<x<\left(\frac{1}{3}\right)^0 \Rightarrow 0<x<1$$

$$\Rightarrow x \in <0;1>$$

PROBLEMA 37 :

Resolver : $Log_5|2x-|>4$

A) $<-\infty;-312>\cup<313;+\infty>$ B) $<-312;313]$
C) R D) $\emptyset$ E) $\{312\}$

RESOLUCIÓN :

* La desigualdad tiene sentido si :

$2x-1\neq 0 \Rightarrow x\neq\frac{1}{2}$; de otro lado por ser : $b>1$;

$$Log_5|2x-1|>4 \Rightarrow |2x-1|>5^4 \Rightarrow |2x-1|>625$$

A) Si :

$$2x-1>0 \Rightarrow x>\frac{1}{2}...(I) \wedge 2x-1>625 \Rightarrow x>313...(II)$$

* de (I) y (II): $x>313$ ó $313<x<+\infty$

B) Si : $2x-1<0 \Rightarrow x<\frac{1}{2}$......($\alpha$)

$$\Rightarrow 2x-1<-625 \Rightarrow 2x<-624 \Rightarrow x<-312...(\beta)$$

* De (α) y (β): $x<-312$ ó $-\infty<x<-312$

* La solución se obtiene reuniendo los resultados de las dos condiciones :

$$-\infty<x<-312 \vee 313<x<+\infty$$

RPTA: "A"

PROBLEMA 38 :

Indicar cuantas soluciones enteras positivas posee la inecuación :

$$Log_{\frac{1}{2}}(x^2-8x+15)<Log_{\frac{\sqrt{2}}{2}}\sqrt{x^2-3x+2}$$

A) 2 B) 4 C) 6 D) 0 E) 8

RESOLUCIÓN :

* La inecuación es equivalente a :

$$Log_{\frac{1}{2}}(x^2-8x+15)<Log_{\frac{1}{2}}(x^2-3x+2)$$

* Luego el conjunto de valores admisibles (C. V. A):

$$x^2+8x+15>0 \wedge x^2-3x+2>0$$

$$\Rightarrow CVA=<-\infty;1>\cup<2;3>\cup<5;+\infty>$$

* Luego :

$x^2-8x+15>x^2-3x+2$ pues base $<0;1>$

$$\Rightarrow x<\frac{13}{5}...S_1$$

* Intersectando

$$S_1 \cap CVA$$

* Tenemos $CS=<-\infty;1>\cup<2;\frac{13}{5}>$

→ Ninguna solución entera positiva .

RPTA "D"

PROBLEMA 39:

Sea x un número positivo. Determine el máximo intervalo donde se encuentra comprendido :

$$Ln\left(\frac{x}{x+1}\right):$$

A) $<-\infty,0>$ B) $<0,+\infty>$ C) $<0,1>$ D) $<-1,0>$ E) $[-1,0]$

RESOLUCIÓN :

* Como $x>0$, se tiene $\frac{x}{x+1}=1-\frac{1}{x+1}$

* Además : $x+1>1 \Leftrightarrow 0<\frac{1}{x+1}<1$

$$\Leftrightarrow -1<-\frac{1}{x+1}<0 \Leftrightarrow 0<1-\frac{1}{x+1}<1$$

$$\Leftrightarrow 0<\frac{x}{x+1}<1 ....(*)$$

* Tomando logaritmo Neperiano en (*)

$$Ln\left(\frac{x}{x+1}\right)<0 \Rightarrow \boxed{Ln\left(\frac{x}{x+1}\right)\in<-\infty;0>}$$

RPTA:"A"

PRIMERA PRACTICA DIRIGIDA

01 Indicar correcto (c) o incorrecto (i) según corresponda:

( ) $2^{Log_4 3} = \sqrt{3}$

( ) $\dfrac{Log_2 5}{Log_2 3} = Log_3 5$

( ) $Log20 - Log12 + Log3 = Log5$

A) ccc B) iii C) cic D) ici E) cci

02 Indicar la tabla de verdad:

( ) $1 - Log5 = Log2$

( ) $Log_2 5\, Log_5 3\, Log_3 8 = 3$

( ) $Log_{\sqrt[3]{x}} \sqrt[6]{x} = 0,5$

A)VVV B)VFV C)FVV D)VVF E)FVF

03 Resolver: $2Logx = \dfrac{3Log2 + 2Log3}{Log12 - Log6}$

indicando su C.S.

A){6;-6} B){6} C){-6} D){} E){ $\sqrt{6}$ }

04 Si: $2^{Log_a 5} = 5$, además:

$$Log_3 b^7 = 7$$

calcular: $E = (Log_b a)(Log_4 27)$

A)1 B)1,5 C)2 D)2,5 E)3

05 Si {α} es el conjunto de solución de la ecuación:

$$Log_2(7x+11) = 5$$

calcular: $9^{Log_\alpha 5}$

A)5 B)25 C)$\dfrac{1}{5}$ D)$\sqrt{5}$ E)3

06 Calcular el logaritmo en base 4 del logaritmo de $\sqrt{2}$ en base 16.

A)$\dfrac{1}{2}$ B)$-\dfrac{1}{2}$ C)$\dfrac{3}{2}$ D)$-\dfrac{3}{2}$ E)-2

07 Si: $Log_2 Log_4 Log_2 Log_4 a = 0$

$$Log_4 Log_2 Log_4 Log_2 b = 0$$

hallar la relación entre $a \wedge b$.

A) $a = 2b$ B) $a = b^2$ C) $a = b^4$ D) $a = 4b$ E) $a = b$

08 Calcular:

$$P = 4^{Log_9 5^{Log_5 32^{Log_2 3}}}$$

A) 4 B) 8 C)16 D) 32 E) 64

09 Calcular el valor de: $Log_3\left(\dfrac{x}{z}\right)$

si: $Log_x\left(\dfrac{1}{4}\right) = 2 \wedge Log_{729} 3 = z$

A)5 B)3 C)2 D)1 E)0

10 De los datos:

$Log(5x) = a$

$Log(x-1) = b$

además: $a = b + 1$, calcular «x»

A)10 B)2 C)3 D)20 E)1

11 Resolver en «x» la ecuación:

$$2(7^{Log_a x}) + 5(x^{Log_a 7}) = 343$$

A){$\sqrt[6]{3}$} B){3} C){$\sqrt{3}$} D){$\sqrt[3]{3}$} E){9}

12 Después de efectuar:

$$E = (2^{Log3})(3^{Log0,5}) + (2^{Log25})(5^{Log0,25})$$

se obtiene:

A) E = 1 B) E = 2 C) E = 3 D) E = 0 E) E = 8

13 Si : $a^2 * \sqrt{b} = Log_a \sqrt[4]{b} + Log_b 2a$

Calcular: $E = 8*2$

A)$\dfrac{19}{12}$ B)$\dfrac{23}{24}$ C)1 D)$\dfrac{13}{6}$ E)$\dfrac{25}{18}$

14 Para que la función esté definida:

$$F(x) = Log_{(x-2)}(99 - x)$$

¿cuántos valores enteros puede tomar «x»?

A) 92 B) 93 C) 94 D) 95 E) 96

15 Resolver: $x^{Log_x 6} = x^2 + 5x$

indicando su C.S.

A) {-6; 1} B) {6; -1} C) {1} D) {-6} E) { }

16 Si: $H(n) = Log_5\left(\dfrac{n}{n+1}\right)$, calcular:

$$E = H(1) + H(2) + H(3) + ... + H(24)$$

A) 1 B) 2 C) -1 D) -2 E) 3

17 Si {$Log_2 a$} es el conjunto solución de la ecuación: $Log_3(x+3) - Log_3(x-1) = Log_7 5 . Log_5 7$ indicar el valor de «a».

A) 2 B) 4 C) 8 D) 16 E) $\sqrt{2}$

18 Si $a > b > c > 1$, resolver en «x» la ecuación:

$$(1 + Log_c a) Log_a x Log_b c = Log_b x Log_c x Log_a c$$

A) {ab} B) {ac} C) {bc} D) {abc} E) {a}

19 Si: $Log_2 3=\alpha$, indicar: $Log_{24}64$

A) $\frac{3}{2+\alpha}$ B) $\frac{5}{1+\alpha}$ C) $\frac{6}{3+\alpha}$ D) $\frac{5}{3+\alpha}$ E) $\frac{6}{4+\alpha}$

20 Si: $M=\sqrt{5^{2+Log_5 4}+3^{1+Log_3 7}}$

calcular: $(M-9)^{(M-7)}$

A)8 B)81 C)16 D)64 E)25

SEGUNDA PRACTICA DIRIGIDA

COLOGARITMO-ANTILOGARITMOS

01 Indicar verdadero *(V)* o falso *(F)* según corresponda:

( ) $Colog_2 3.Colog_5 7 = Log_2 3Log_5 7$

( ) $Colog_2\left(\frac{1}{5}\right)Log_2 5$

( ) $Colog_3 7 = Log_{\frac{1}{3}}7$

A)VVV B)FFF C)VFV D)FVF E)VVF

02 Marcar correcto *(c)* o incorrecto *(i)* según corresponda:

( ) $Antilog_2 4 = Antilog_4 2$

( ) $Colog_3 Antilog_3 5 = -5$

( ) $Antilog_{2\sqrt{2}}2 = 4$

A) ccc B) cci C) cic D) icc E) ici

03 Si: $x=\sqrt{Antilog_5 2+Antilog_{12}2}$

$y=\sqrt{Antilog_{15}2+Antilog_8 2}$

calcular: $\sqrt{y-x}$

A)1 B)2 C)3 D)4 E)5

04 El valor reducido de:

$E=Colog_4 Log_2 Antilog_{1\,2}Log_{1\,5}625$ es:

A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 2

05 Luego de reducir:

$E=Log_2 Log_3 Antilog_3 Log_{1,5}2,25$ se obtiene:

A) 1 B) 2 C) 3 D)4 E)5

06 Si: $x=\sqrt{Antilog_{256}Log_{16}Log_{25}\sqrt{5}}$

calcular: $\sqrt{4x+3}$

A) 1 B) 2 C) 3 D)4 E)5

07 Luego de reducir:

$E=\sqrt{Antilog_{625}Log_{16}Log_{49}\sqrt{7}}$

se obtiene:

A) 1/2 B) 3 C) 1/5 D) 4 E) 1/6

08 Al reducir:

$E=Colog_{625}Antilog_5 Log_{\sqrt[4]{3}}Antilog_9 gLog_{0,5}Antilog_2 3$

se obtiene:

A) 12 B) 6 C) 24 D) 8 E) 2

09 Sea:

$P=Log_b[Antilog_{b^2}[Log_{b^3}(Antilog_{b^4}3)]]$

Indicar el valor de $-Colog_2 P$

A) 2 B) 4 C) 8 D)3 E)6

10 Calcular: $R=Antilog_{\frac{1}{2}}Colog_{\sqrt[3]{2}}Log_{\sqrt{2}}4$

indicando la suma de cifras de R.

A) 9 B)7 C)12 D)10 E)8

11 Si: $Antilog_x Antilog_{\sqrt[4]{2}}Antilog_2 3 = 625$

calcular: $E=Colog2x$

A) 5 B) 1 C) 10 D) -1 E) -2

12 Si: $F(Log_{\sqrt[3]{3}}x)=Antilog(x-8)+Colog_3 x$

determinar: $F(10)$

A) 6 B) 8 C) -5 D) -2 E) 5

13 Si: $n=Antilog_3^{-1}[Log_9(Antilog_{\sqrt[3]{4}}3)]$

determinar: $Colog_n 4$

A) 2 B) -2 C) 4 D) -4 E) -1

14 Si: $a=Colog_6 Antilog_3(Log_3 12+1)$

calcular: $Antilog_{\sqrt{2}}a$

A)0,5 B)2 C)4 D)0,25 E)16

15 Resolver: $xLog2-CologLog2=LogLog16$

A) $\{2\}$ B) $\{4\}$ C) $\left\{\frac{1}{2}\right\}$ D) $\{\sqrt{2}\}$ E) $\{-1\}$

16 Dado el sistema:

$Logx+Cology=Log2$

$2^{x+y}=Antilog_2 6$

indicar el valor de «x».

A) 4 B) 8 C) 6 D) 2 E) 1/4

17 Resolver en «x»: $Log_x a^{(1+Log_a b)}=1$

A) $\left\{\frac{a}{b}\right\}$ B) $\{-ab\}$ C) $\{ab\}$ D) $\left\{\frac{b}{a}\right\}$ E) $\{a^2b^2\}$

18) Si se resuelve el sistema:

$3^x.2^y = 576$..................(1)

$Log_{\sqrt{2}}(y-x) = 4$..........(2)

se logra que: $Log(5xy+5x+5y)$

sea:

A)1 B)2 C)3 D)4 E)5

19) Si $x \in R^+ - \{1\}$, calcular «x» de:

$$\sqrt[x]{\sqrt[x]{(1000)^{Logx}}} = x^x$$

A)$\sqrt{2}$ B)2 C)3 D)$\sqrt[3]{3}$ E)$\sqrt[6]{6}$

20) Dado el sistema:

$Ln(xy)=6$.........(1)

$y^{Lnx}=e^9$.............(2)

calcular: $Ln\left(\dfrac{x+y}{2}\right)$

A)1 B)2 C)6 D)4 E)3

TERCERA PRACTICA DIRIGIDA

01) Calcular :

$$Log_7 49 - Log_{49} 7$$

A) 0 B) –4 C) 1,5 D) 4 E) 8

02) Calcular :

$$Log100 - Log_{101} 101$$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 7

03) Calcular :

$$Log_{2\sqrt{2}} 8$$

A1 B) 21 C) 31 D) 41 E) 7

04) Calcular : $2Log_n \sqrt{n} - Log_e e$

A) 0 B) 1 C) –2 D) 2 E) $\sqrt{2}$

05) Calcular : $Log2 + Log5$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) –1

06) Calcular : $Log300 - Log3$

A) 297 B) 100 C) 2 D) 4 E)–2

07) Utilizando la identidad fundamental, hallar :

$$E = 2^{Log_2 8} - 3^{Log_3 7} + 10^{Log6}$$

A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 0

08) Resolver :

$$25^{Log_5(x-1)} = 9$$

A) {–4} B) {4} C) {–2} D) A y B E) B y C

09) Calcular el valor de "x" si :

$$Log_2 x^2 + Log_2 x^3 + Log_2 x^5 = 50$$

A) {8} B) {16} C) {32} D) {64} E) {1 024}

10) Hallar: $E = Log_2 9\, Log_3 25\, Log_5 8$

A) 2 B) 4 C) 8 D) 10 E) 12

11) Calcular: $E = Log_{\sqrt{2}} 3 . Log_{\sqrt[3]{3}} 5 . Log_{\sqrt[5]{5}} 7 . Log_{\sqrt[7]{7}} 2$

A)$\sqrt[30]{210}$ B)$\sqrt[30]{17}$ C) 17 D)$\sqrt[17]{210}$ E) 210

12) Resolver: $Log(x+1) + Log(x-2) = 1$

A) –3 B) 4 C) 6 D) 2 E) –6

13) Hallar "x" si: $Log_2\left(Log_3\left(Log_5 x\right)\right) = 0$

A) 125 B) 8 C) 27 D) 64 E) 1

14) Hallar : $Log_3 \sqrt[2]{4^{Log_3 4}}$

A) 4 B) $\sqrt{2}$ C) $\sqrt[3]{4}$ D)8 E)16

15) Si : $Log2 = a$ y $Log3 = b$

encontrar la alternativa equivalente de $Log72$.

A) $a^3 + b^2$ B)$2a + 3b$ C)$3a + 2b$

D) $a + 2b$ E)$2a + b$

16) Calcular el valor de "x" si :

$$Log_3 (5x - 1) - Log_3 (3x - 5) = 2$$

A)$\dfrac{1}{2}$ B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

17) Si : $P(x) = Log_2(x+1)$

Hallar el valor de : $P(1) + P(3) + P(7)$

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

18) Resolver : $Log(x+3) + Logx = 1$

A) {5 ; –2} B) {–5 ; 2} C) {5 ; 2} D) {–2} E) {5}

19) Resolver : $Log(x+2) + Log(x-1) = Log18$

A) {–5 ; 4} B) {4} C) {–4 ; 5} D) {–5} E) {5}

20) Si : $Log2 = a \wedge Log3 = b$

Calcular : $Log108$

A)$2a + b$ B)$2a + 2b$ C)$2a + 3b$

D)$3a + 2b$ E)$3a + 2b$

21) Hallar el valor de : $5^{Log_3 4^{Log_2 3}}$

A) 625 B) 125 C) 25 D) 5 E) 1

22 Calcular "x" si :

$$Logx = 3log6 - 2Log3 + 3Log2 - 3Log4$$

A) 18 B) 6 C) 4 D) 3 E) 2

23 Utilizando la definición de logaritmos , hallar:

$$Log_{\sqrt[3]{2}}\sqrt[5]{4}$$

A) $\frac{3}{5}$ B) $\frac{2}{5}$ C) $\frac{6}{5}$ D) $\frac{5}{6}$ E) $\frac{5}{3}$

24 Calcular : $E = 2^{Log_2 3} + 3^{Log_3 4} + 4^{Log_4 5}$

A) 9 B) 10 C) 11 D) 12 E) 13

25 Reducir : $E = Log_2 5 . Log_5 6 . Log_6 7 . Log_7 8$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

TAREA DOMICILIARIA

01 Si : $Log_6 x = 3$, señale la suma de las cifras de "x".

A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

02 Efectuar : $Log_2 8 + Log_2 32 + Log_2 128$

A) 11 B) 12 C) 13 D) 14 E) 15

03 Calcular : $-Log(10^{-5}) - Log_3 243$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 0 E) –6

04 Resolver : $Log_x 64 = 12$

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{3}{16}$ C) $\sqrt{2}$ D) $\sqrt[4]{2}$ E) 4

05 Resolver : $Log_2 Log_3 (x+2) = 2$

A) {81} B) {79} C) {83} D) {4} E) {50}

06 Resolver: $5^{2log_5 x} + 3^{2log_3 2} = 7^{log_7 4x}$

A) 2 B) 10 C) 11 D) 15 E) 20

07 Los valores de "x" que satisfacen la ecuación:

$\frac{Log(35 - x^3)}{Log(5 - x)} = 3$: son:

A) Log 2 y Log 3 B) 2 y 3 C) Sólo 2
D) Sólo 3 E) Log 5

08 El valor de "b" que satisface la ecuación:

$(Log_b 9)^2 - 4Log_b 9 + 4 = 0$; es:

A) 3 B) 2 C) 5 D) 4 E) 1

09 Resolver :

$$Log\sqrt{x+14} + Log\sqrt{x+7} - Log\,1,2 = 1$$

A) $x = -23$ B) $x = 23$ C) $x = -2$
D) $x = 2$ E) Más de una

10 Hallar la menor solución:

$$Log_6(x^2 - 5x) = Log_3 9$$

A) 3 B) 2 C) –4 D) 8 E) 12

CUARTA PRACTICA DIRIGIDA

01 Calcular:

$$Log_2 4 + Log_3 9 - Log\,10$$

A) 1 B) 2 C) 3
D) 0 E) –4

02 Calcular: $Log_{\left(\frac{1}{3}\right)} 3 + Log\,100$

A) 1 B) 2 C) –1
D) 0 E) –2

03 Calcular:

$$Log_{\sqrt{2}} 4 + Log_3 \sqrt{3} - Log_5 5$$

A) 1 B) –1 C) 2
D) 3,5 E) 4,5

04 Calcular:

$$Log_x \sqrt{x} + 2Log_x\left(\frac{1}{x}\right)$$

A) 1,5 B) –1,5 C) –1
D) 0 E) 2

05 Calcular el valor de:

$$G = Log_8 64$$

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

06 Indica el valor de:

$$L = Log_{\sqrt[4]{3}} 27$$

A) 8 B) 15 C) 12 D) 9 E) 6

07 Calcular el valor de la expresión:

$$M = 3 \times Log_2 \sqrt[6]{2} + Log_{\sqrt[6]{4}} \sqrt[6]{2}$$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

08 Determina el valor de :

$$v = Log_{\frac{2}{3}}\left(\frac{4}{9}\right) - Log_{0,4}\left(\frac{5}{2}\right)$$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

(09) Efectuar : $Log_{0,\hat{6}}\left(\frac{9}{4}\right)$

A)2 B)-2 C)1/2 D)-1/2 E)1

(10) Simplificar:

$M = Log_3 2 \times Log_7 5 \times Log_5 2 \times Log_2 3$

A)7 B)$Log_7 2$ C)5
D)$Log_2 7$ E)1

(11) Calcular:

$$Log_7 2 \times Log_3 \sqrt[5]{Log_2 \sqrt[3]{10^{Log_7 5}}}$$

A)10 B)20 C)30
D)40 E)50

(12) Si:

$A = 2 \times Log_2 3 \times Log_3 5$

$B = Log_2 20 - Log_2 4$

Hallar: $\frac{A}{B}$

A)1 B) 5 C)2 D)25 E)4

(13) Simplificar:

$$\frac{1}{Log_2 6} + \frac{1}{Log_3 6}$$

A)1 B)2 C)3 D)4 E)5

(14) Si: a♀b $= Log_a b$; a♂b $= Log_b a$

Hallar: $\frac{(2♀12)+(3♂2)}{26}$

A)1 B)1/2 C)-1 D)-1/2 E)2

(15) Indicar verdadero *(V)* o falso *(F)*:

I) $Log(x+y) = Log\,x + Log\,y;\ x, y \in R^+$

II) $Log_{\sqrt[n]{x}} \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{Log_x y};\ x,y \in R^+, n \in N$

III) $\frac{Log_b a}{Log_b c} = Log_C a;\ a,b,c \in R^+, b \neq 1, c \neq 1$

A)FVV B)VFF C)FFV
D)FVF E)VFV

(16) Simplificar:

$$J = \frac{\left[Log_5 15 - Log_7 \sqrt{49}\right]}{Log_5 27} + Log_a a^{\frac{2}{3}}$$

A)$\frac{1}{3}$ B)1 C)$\frac{2}{3}$ D)5 E)4

(17) Reducir:

$$Log\frac{75}{16} + 2\log 2 + Log\left(\frac{4}{3}\right) + Log\,4$$

A)1 B)2 C)3 D) E)5

(18) Simplificar: $7^{Log_7 3} + 10^{Log 5}$

A)2 B)4 C)6 D)8 E)10

(19) Reducir:

$$36^{Log_7 3^{Log_5 7 Log_3 5}}$$

A)$\frac{1}{6}$ B)6 C)36 D)-6 E)$-\frac{1}{6}$

(20) Hallar el valor de:

$$K = 100^{Log_3 10^{Log_2 3^{Log_{100} 2}}}$$

A)10 B)20 C)30 D)40 E)50

TAREA DOMICILIARIA

(01) Calcular:

$$Log_2 2 + Log\,10000$$

A)5 B)3 C)4 D)8 E)102

(02) Calcular: $Log_{\sqrt[4]{3}} \sqrt[3]{3}$

A)1 B)2 C)$\frac{3}{4}$ D)$\frac{4}{3}$ E)3

(03) Si: $A = 36^{\frac{Log_5 2}{Log_5 6}}$

Calcular: $Log_A 16$

A)5 B)4 C)3 D)2 E)1

(04) Indique *V* o *F* según corresponda:

I) $Lnx = Log_e x$; donde: $e = 2,718281...$

II) $Log_{a^n} b^n = Log_a b;\ a,b \in R^+, n \in N;\ a \neq 1$

III) $\frac{1}{Log_a b} = Log_b a;\ a,b \in R^+;\ a,b \neq 1$

A)FVV B)VFV C)FVF
D)VFF E)VVV

(05) Llenar el espacio en blanco:

$$Log_{\square} 25 = \frac{1}{2}$$

Indicar la respuesta:

A)5 B)125 C)625
D)55 E)1

QUINTA PRACTICA DIRIGIDA

(01) Aplicando la definición, hallar la suma de las cifras de "x" en: $Log_3 x = 4$

A)7 B)8 C)9 D)10 E)11

(02) Encontrar "x" si: $Log_{(x+1)}(2x-3) = 1$

A)1 B)2 C)3 D)4 E)5

(03) Si: $x = Log_2 32$

$y = Log_{\sqrt{3}} 81$

Señale el valor de: $x + y$

A)11 B)12 C)13
D)14 E)15

(04) Determinar el valor de "x" en la ecuación: $Log_{(x+3)} 74 = 1$

A)21 B)71 C)35
D)0 E)9

(05) Si se tiene: $Log\,x^2 = 6$

Hallar: $\frac{x}{20}$

A)1000 B)20 C)50
D)500 E)200

(06) Si: $Log(Log\,x) = 1$

Hallar: "x"

A)10 B)1 C)10^{10}
D)10^2 E)10^{-1}

(07) Determinar el valor de "x" en la ecuación:

$$Log_2(Log_{81} x) = Log_2 3$$

A)3^{12} B)3^2 C)3^4
D)3^8 E)3

(08) Hallar "x":

$$x \times Log_5 3 = Log_5 2 \times Log_2 3$$

A)1 B)2 C)3 D)4 E)5

(09) Resolver la ecuación:

$$Log(x+1) = 1$$

A)0 B)5 C)7 D)9 E)1

(10) Determinar "$x + y$", si:

$$\begin{cases} Log\frac{x}{y} = 1 \\ x - y = 9 \end{cases}$$

A)9 B)10 C)11 D)12 E)13

(11) Determine "x":

$$Log(2^x) = Log_5 2$$

A)Log5 B)$Log_2 10$ C)Log2
D)$Log_2 10$ E)1

12 Hallar "w" en la ecuacion:

$$Log_a(7^w)=\frac{Log_5 7}{Log_5 a}$$

A)1 B)2 C)3 D)4 E)5

13 Resolver:

$$\begin{cases} Log\,x^2 - Log\,y = 2 \\ x^2 + 10y = 11 \end{cases}$$

Indique el valor de "y"

A)10 B)10^3 C)10^{-3}
D)10^{-1} E10^{-2}

14 Resolver:

$$Log_a 2 + 1 = Log_4 16$$

A)1 B)2 C)3 D)4 E)5

15 Si:

$$Log_5\sqrt{x}=2;\ Log_y 8=\frac{3}{2}$$

Hallar "$x+y$"

A)27 B)29 C)621
D)629 E)59

16 Hallar "$A+B$", sabiendo que:

$$A=Log_{\frac{16}{9}}\left(\frac{3}{4}\right);\ B=\frac{Log_7 4}{Log_7 16}$$

A)$\frac{3}{4}$ B)$\frac{3}{2}$ C)-1 D)$-\frac{1}{2}$ E)0

17 Simplificar:

$$\sqrt{25^{Log_5 7^{Log_7 3}}+16^{Log_2 5^{Log_5 2}}}$$

A)1 B)2 C)3 D)4 E)5

18 Hallar "x":

$$Log_{(x+1)}3+Log_6 2=1$$

A)1 B)2 C)3 D)4 E)5

19 Si:

$$A=Log_5 7\times Log_2 3\times Log_9 25\times Log_7 4$$

Hallar: "$A+5$"

A)7 B)5 C)3 D)1 E)0

20 Resolver en "x":

$$Log_2(x-1)+Log_2(x-3)=3$$

A)5 y -1 B)2 y 3 C)5 y 1
D)-5 y -1 E)5

TAREA DOMICILIARIA

01 Resolver: $Log\sqrt{x}=1$

A)10 B)1 C)100
D)1000 E)1/10

02 Resolver:

$$Log_{(2x-1)}(x+1)=1$$

A)2 B)3 C)-2 D)4 E)5

03 Resolver: $Log_x 64=4$

A)0,5 B)1 C)$0,\widehat{6}$
D)$0,\widehat{3}$ E)-2

04 Si: $Log_7 5=\frac{1}{Log_{\bigcirc}7}$

Indicar: $\sqrt{\bigcirc+4}$

A)1 B)2 C)3 D)4 E)5

05 Determine la suma de valores de "x" que satisfacen:

$$Log_a 9=\frac{2}{Log_x a}$$

A)0 B)1 C)2 D)3 E)4

SEXTA PRACTICA DIRIGIDA

01 Dar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

( ) Si $Log_3 x=2\rightarrow x=\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$

( ) Si $Log_{4\sqrt{3}}3=x\rightarrow x=4$

( ) El valor de:

$$E=5^{Log_5(2-x)}+7^{Log_7(x+8)}$$

es $10,\forall x\in\mathbb{R}$

A) VVV B) FVV C) FFF
D) FVF E) VVF

02 Si a y b son las raíces de la ecuación:

$x^2-\sqrt{5}x+1=0$, calcular :

$$E=\sqrt[Log_{a+b}(3ab)]{25^{Log_5 a}+49^{Log_7 b}}$$

A)$2\sqrt{5}$ B)$\sqrt{5}$ C)$\frac{\sqrt{5}}{3}$

D)2 E)1

03 Dados:

$$A=\frac{1}{Log_c(a^2b^3)+1}$$

$$B=\frac{2}{Log_a(b^3c)+2}$$

$$C=\frac{3}{Log_b(ca^3)+3}$$

Calcular: $A+B+C$

A) 1 B) 2 C) 3
D) 5 E) 6

04 Sabiendo que:

$$Log_x m^2=a \wedge Log_y m^3=b,$$

hallar el valor de: $E=Log_{xy}m$

A)$\frac{a+b}{ab}$ B)$\frac{ab}{a+b}$ C)$\frac{a+b}{3a+2b}$
D)$\frac{2a+3b}{ab}$ E)$\frac{ab}{3a+2b}$

05 Sabiendo que:

$a^2+b^2=510ab;\ a>0\wedge b>0,$

calcular el valor de:

$$E=Log_2\left(\frac{a+b}{2}\right)+0,5Log_2(ab)^{-1}$$

A) 3 B) 3,5 C) 4
D) 4,5 E) 6

06

Si: $x=Log_{24}36\wedge y=Log_6 12$

calcule el valor de: $E=\frac{xy-1}{x}$

A)-1 B)$-\frac{1}{2}$ C)$\frac{1}{2}$ D)1 E)2

07 Calcule el valor de:

$$3Log_b a+2Log_a b-Log_a(a^3b).Log_b(ab^2)$$

sabiendo que :

$a\geq 2003\wedge b\geq 2004$

A) -7 B) -5 C) -4
D) -3 E) -1

08 Si $Log2=a\wedge Log3=b$, hallar un valor de "x" en:

$2\times 9^x+15\times 4^x=13\times 6^x,\ x\neq 1$

A)$\frac{a-1}{b+a}$ B)$\frac{a-2}{b-2}$ C)$\frac{a-1}{b-2}$
D)$\frac{1-a}{b-a}$ E)$\frac{1-a}{b+a}$

09 Sabiendo que $b, x \in \mathbb{R}^+ \wedge b \neq 1$, además:

$$Antilog_b\, Colog_b\, Log_b x = \frac{1}{b}.$$

calcule el valor de:

$$M = Log_{b^2}(-Colog_b Antilog_x b^{2003})$$

A) 2003 B) 2004 C) 1002 D) 1000 E) 2006

10 Halle el valor de:

$$E = Antilog_{10}\left[a^{\frac{Log(Logb)}{Loga}} + b^{\frac{Log(Logc)}{Logb}} + c^{\frac{Log(Loga)}{Logc}}\right]$$

A) $\sqrt[3]{abc}$ B) $\sqrt{abc}$ C) 1 D) $a+b+c$ E) abc

11 Calcular $2k+1$, si: $k = \frac{LogAntilogColog1}{4 - 2Log2 + Log1000 - 1}$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

12 La siguiente expresión: $F = \sum_{i=1}^{2n}(Log_{a_i} b)^{-1}$, es equivalente a:

A) $Log_b(\sum_{i=1}^{n}\pi a_i)$ B) $Log_b(\sum_{i=1}^{2n}\pi a_i)$ C) $Log_b(\sum_{i=1}^{n} a_i)$

D) $Log_b(\sum_{i=1}^{2n} a_i)$ E) $Colog_b(\sum_{i=1}^{2\pi}\pi a_i)$

13 Sabiendo que: $Log_{ab} a = 3$; además:

$E = Log_{ab}\sqrt[3]{a\sqrt{b}}$, dar como respuesta el valor de E^{-1}

A) 0,5 B) 1 C) 1,5 D) 2 E) 2,5

14 Hallar el valor de:

$$E = Log\left(\frac{2A}{A+B}\right) + Log\left(\frac{3A^2}{A^2+2B^2}\right) + Log\left(\frac{4A^3}{A^3+3B^3}\right) + \ldots \text{"n" términos}$$

si se cumple que; $Log^{LogA}\sqrt{B} + Log^{LogB}\sqrt{A} = 2$

A) 0 B) n C) n^2 D) nA E) nB

15 Si: $Log28 = a$; $Log21 = b$ y $Log25 = c$, entonces el valor de $Log27$, en función de a, b y c, es:

A) $3(b-a+c-2)$ B) $3(b-a-c-2)$ C) $3(b-a+c+2)$
D) $3(b-a-c+2)$ E) $2(a+b-c+d)$

16 Sabiendo que: $a, b, c, x, y \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ hallar el valor de:

$$M = x^{Log_{abc} y}\sqrt{\left[\frac{Log_y\sqrt[x]{x}}{Log_x\sqrt[y]{y}}\right]^{y^{Log_{abc} x}}}$$

A) $\frac{x}{y}$ B) $\frac{y}{x}$ C) 1 D) xy E) $(abc)^{xy}$

17 Simplificar:

$$L = \frac{(Log_4\sqrt{8})(Log_8 4) - Colog_{16} 4}{(Log_{\sqrt{4}} 50)\left(Log_{\sqrt[4]{50}}\sqrt[4]{10}\right) + Log_2\left(\frac{1}{5}\right)}$$

A) $\frac{5}{4}$ B) 1 C) 4 D) 8 E) $\frac{2}{5}$

18 Reducir la expresión:

$$\frac{Log_b c}{Log_a c + Log_b c + 1} + \frac{Log_a b}{Log_c b + Log_a b + 1} + \frac{Log_c a}{Log_b a + Log_c a + 1}$$

se obtiene:

A) 1 B) $Log_a(bc)$ C) $Log_b(ca)$ D) $Log_c(ab)$ E) $Log_{ab}3$

19 Si: $Log_6 15 = a$ y $Log_{12} 18 = b$, hallar en términos de a y b: $Log_{25} 24$

A) $\frac{b-5}{2b-a-ab-1}$ B) $\frac{a-5}{2(2b-a-ab-1)}$

C) $\frac{b-5}{2(2b-a-ab-1)}$ D) $\frac{a-5}{2(2a-b-ab-1)}$ E) $\frac{a-b}{ab}$

20 Calcular «y» en: $(Log_5 y)^{Log_5 z} = z$

Indicar la suma de cifras de «y».

A) 9 B) 10 C) 11 D) 12 E) 13

CLAVES DE LA PRIMERA PRACTICA									
1)A	2)A	3)B	4)B	5)B	6)D	7)B	8)D	9)D	10)B
11)D	12)B	13)A	14)D	15)E	16)D	17)C	18)B	19)C	20)C

CLAVES DE LA SEGUNDA PRACTICA									
1)A	2)B	3)B	4)B	5)C	6)B	7)C	8)B	9)D	10)D
11)D	12)B	13)A	14)A	15)A	16)A	17)C	18)B	19)D	20)E

CLAVES DE LA TERCERA PRACTICA				
01) C	02) A	03) B	04) A	05) A
06) C	07) B	08) C	09) C	10) E
11) E	12) B	13) A	14) E	15) C
16) B	17) E	18) E	19) B	20) C
21) C	22) D	23) C	24) D	25) C
01) C	02) E	03) D	04) E	05) B

CLAVES DE LA CUARTA PRACTICA				
01) C	02) A	03) D	04) B	05) B
06) C	07) A	08) C	09) B	10) B
11) A	12) C	13) A	14) E	15) E
16) B	17) B	18) D	19) E	20) A
01) A	02) D	03) D	04) E	05) C

CLAVES DE LA QUINTA PRACTICA				
01) C	02) D	03) C	04) B	05) C
06) C	07) A	08) A	09) D	10) C
11) B	12) A	13) D	14) B	15) D
16) E	17) E	18) E	19) A	20) E
01) C	02) A	03) D	04) C	05) A

CLAVES DE LA SEXTA PRACTICA									
1)E	2)B	3)A	4)E	5)B	6)C	7)A	8)D	9)C	10)E
11)B	12)B	13)C	14)A	15)D	16)B	17)B	18)A	19)C	20)C

PRIMERA PRACTICA — REPASO PARCIAL

01 Determine el exponente de 2^3 en : $2^{2^{2^3}}$

A)4 B)6 C)8 D)2 E)3

02 Referente a $5^{2^{3^4}}$, determinar el valor de verdad de :

I) 4 es exponente de 5^{2^3}

II) 4 es exponente de 2^3

III) 4 es exponente de 3

IV) 3^4 *es exponente de 2*

A)VFVV B)FFVV C)FVFV D)VFVF E)VVVV

03 Simplificar :

$$\frac{\left(xx^2x^3\ldots\ldots\ldots x^{2004}\right)^2}{x^{4008}x^{4006}\ldots\ldots\ldots x^2x} \quad ; x \neq 0$$

E indique el exponente de x .

A)2 B)3 C)-1 D)1 E)-2

04 En :

$$\frac{2^3 \times 5^{18} \times 2^4 \times 5^{-2^4} \times 2^5 \times 5^{m-2} \times 2^{-12}}{5^n \times 2^{-2}} = 100$$

Determinar el valor de "$m-n$" .

A)2 B)4 C)-1 D) -2 E)0

05 En : $\dfrac{\left[2^{-8} \times 3^{-15} \times 2^{2^3} \times 3^{(-4)^2}\right]^4}{\left(2^3 \times 3^2\right)^2} = P^{-1}$

Determinar el valor de "10^P" .

A)10 B)100 C)64 D)65 E)63

06 Dado :

$$5^{-13} \times 2^{3^4} \times 5^{2^3} \times 2^{-3^4} \times 5^{2^3} = 3^a 5^b$$

Determine el valor de : $a+b+ab$

A)2 B)3 C)0 D)1 E)1/2

07 Si $x^x=3$; determine la cantidad de cifras que tiene : $x^{x^{1+2x}} - x^{3x^{1+x}}$

A)4 B)3 C)2 D)1 E)0

08 Determinar $\dfrac{a^2}{b}$; si: $a^{2a^2}=4 \wedge b^b=25^{-\frac{1}{10}}$

A)110 B)100 C)10 D)5 E)1/10

09 Si : $(n+1)^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{3}}} = 128$

Calcular el valor de : $\left(\dfrac{n}{3}+\dfrac{6}{n}\right)n^{-1}$

A)1 B)1/2 C)2 D)3 E)5

10 Si : $a^{b^a}=3$

Calcular el valor de : $\left(a^4\right)^{b^a}$

A)9 B)3 C)81 D)27 E)129

11 Reducir : $96^x+81^{3x}+27^{4x}$

A)9^{6x+3} B)9^{5x+2} C)9^{6x+1} D)9^{6x} E)3^{12x+1}

12 Determine el exponente de x^x en :

$$x^{x^8} ; x \neq R-\{1\}$$

A) 7 B)8 C)x^7 D) x^6 E)x^8

13 Simplificar :

$$\frac{\overbrace{2\times3\times2\times3\times\ldots\ldots\times2\times3}^{100\,factores}}{\underbrace{2^3 2^3\ldots.2^3}_{30\,factores}\underbrace{3^2 3^2\ldots.3^2}_{30\,factores}}$$

14 Si: $\dfrac{5^{16}+5^x}{5^x+5^2}=5^7$, determine el valor de "x"

A)9 B)8 C)3 D)- 9 E)7

15 Si: $\left[\left(x^a x^b\right)^2 x^c\right]^3 y^d=(xy)^6$, determine el valor de : $\dfrac{2a+c}{6b+d}; a \geq 0 \wedge b \geq 0$

A)1 B)3 C)2 D)$\frac{1}{2}$ E)$\frac{1}{3}$

16 Si: $a^{b+3}=(2a)^b=(4a)^{b-1}$, determine el valor de : $\sqrt[b+1]{8a}$

A)1 B)2 C)3 D) 4 E)8

17 Si: $7^{6\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}\right)}=7^{m+n}$, donde "m" es par y "n" es impar , determine el mínimo valor de : $\left(\dfrac{m^n}{n}\right)^n$

A)64/3 B)32 C)64/9 D)1/3 E)3

18 Si: $x^{x-\sqrt{x}}=\sqrt{x}-1$,determine el mínimo valor de : $x+\dfrac{1}{x}$

A) 3 B) $-\sqrt{2}$ C) $2\sqrt{2}$ D) $-2\sqrt{2}$ E) 2

19 Simplificar :

$$\sqrt[a^a]{a^b a^{-b}}\left(\frac{b}{a}\right)^{\left(\frac{a^a}{b}\right)^{-1}}$$

A) $\frac{1}{b}$ B) $\sqrt[a]{\frac{a}{b}}$ C) $\sqrt[a^a]{b}$ D) $\frac{1}{a}$ E) 1

20 Si: $a^{a^{b-1}-1}=b$; $a\neq b\neq 1$, determine el valor de : $\frac{a^{b-1}}{b}$

A) 1 B) 1/2 C) 1/3 D) 2 E) 3

21 Si: $a^b b^a = 2 \wedge a^b + b^a = 1$, determine el valor de :

$$\left\{\left[\left(a^b\right)^{b^a}\right]^{a^b}\right\}^{b^a}\left[\left(b^a\right)^{a^b}\right]^{b^a}\left\{\left[\left(a^b\right)^{a^b}\right]^{b^a}\right\}^{a^b}$$

A) 2 B) 1 C) 4 D) 3 E) 1/4

22 Calcule : $\sqrt{\left(\sqrt[3]{16^{\sqrt{5}}}\right)^{\sqrt{5}}\sqrt[3]{16^{-2}}}$

A) 4 B) 2 C) 16 D) 1 E) $\sqrt{2}$

23 Si: $(8x)^x = 8^{8^8}$, determine el valor de : x

A) 8^6 B) 8^7 C) 8^8 D) 8^9 E) 8^5

24 Si: $\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x^2}}}} = 2x^{-2}; x\in R^+$,determine el valor de : $x^{x^{x^2+2}}-\sqrt{2}x$

A) 6 B) 4 C) $2\sqrt{2}$ D) $3\sqrt{2}$ E) 2

25 Resolver :

$$\sqrt[3]{x^5}^{\sqrt[3]{x}^{-5x^5}} = 3$$

A) 3 B) $3^{1/5}$ C) $3^{1/3}$ D) $3^{1/4}$ E) $3^{1/2}$

26 Si: $2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} = 56$,determine el valor de $1+\frac{x}{5}+\left(\frac{x}{5}\right)^2+\left(\frac{x}{5}\right)^3+\dots\dots\dots$

A) 2 B) 5 C) 5/2 D) 25/4 E) 2/5

27 Si: $\sqrt[4]{2\sqrt{7}+4\sqrt[4]{3}}\sqrt[4]{2\sqrt{7}-4\sqrt[4]{3}}=\sqrt{m}-\sqrt{n}$, determine el valor de :

A) 2 B) $\sqrt{3}+1$ C) $\sqrt{3}-1$ D) 4 E) 5

28 Determinar la parte entera de :

$$\sqrt[4]{49+20\sqrt{6}}+\sqrt[4]{49-20\sqrt{6}}$$

A) 3 B) 2 C) 4 D) 5 E) 1

29 Si: $\frac{(x+1)^2-(x-1)^2}{(x+1)(x-1)}=1$,determine el valor de : $x^4+\frac{1}{x^4}$

A) 300 B) 320 C) 324 D) 322 E) 326

30 Si: $4x^4+\frac{9}{x^4}=13$; determine el valor de :

$$\sqrt{\frac{2x^4+3}{x}}$$

A) 1 B) 2 C) 3 D) $\sqrt{5}$ E) 5

SEGUNDA PRACTICA REPASO PARCIAL

01 Sabiendo que $x=2+\sqrt{3} \wedge y=2-\sqrt{3}$, determine x^4-y^4

A) $8\sqrt{3}$ B) 16 C) 32 D) 98 E) $112\sqrt{3}$

02 Si. $a+b=2\,005$ y $ab=-2\,004$; calcule el valor de : $\left(a^2+1\right)\left(b^2+1\right)+2ab(a+b+1)-1$

A) 2 005 B) 4 C) 1 D) 0 E) –1

03 Se tiene $x=\sqrt[3]{6}-1$, luego calcule x^3+3x^2+3x

A) 6 B) 8 C) 7 D) 9 E) 5

04 Reduzca :

$(a+b+c)^2+(a-b+c)^2+(a+b-c)^2+(a-b-c)^2$

A) $a^2+b^2+c^2$ B) $(a+b+c)^2$ C) $4\left(a^2+b^2+c^2\right)$ D) $2\left(a^2+b^2+c^2\right)$ E) $4(a+b+c)^2$

05 Determine el valor de :

$$\frac{\left(a^4+b^4\right)+\left(a^2+b^2\right)(a+b)^2}{ab\left(a^2+b^2\right)},$$

si sabemos que se verifica : $a^3+b^3=ab(a+b)$; además $a+b\neq 0$

A) 3 B) 5 C) 13/6 D) 3/2 E) 1/2

06 Dados los números :

$A=\left(\sqrt{3+2\sqrt{2}}+\sqrt{3-2\sqrt{2}}\right)^2+\left(\sqrt{3+2\sqrt{2}}-\sqrt{3-2\sqrt{2}}\right)^2$

$B=\left(\sqrt{3+2\sqrt{2}}+\sqrt{3-2\sqrt{2}}\right)^2-\left(\sqrt{3+2\sqrt{2}}-\sqrt{3-2\sqrt{2}}\right)^2$

Determine : AB

A) 48 B) 16 C) 20 D) 24 E) 32

07 Si tiene que :

$$a + b + c = 3 \ y \ a^2 + b^2 + c^2 = 1$$

Encuentre el valor de :

$$(a + b)^2 + (b+c)^2 + (c + a)^2$$

A) 5 B) 4 C) 10 D) 8 E) 6

08 Si : $(2x - 1)^2 = 5$,

halle : $\left(x^4+x^2+1\right)^2 - 4\left(x^3+1\right)^2$

A) 1 B) 0 C) 10 D) $\sqrt{5}$ E) 8

09 Si : $f(x)=\sqrt{1+\sqrt{x}} - \sqrt{1-\sqrt{x}}$,

calcule : $f(0,75)$

A) 1 B) –1 C) 0,75 D) 1/2 E) 1/4

10 Reduzca :

$$\frac{(3a + 2b)^2 + (2a - 3b)^2}{(a + b)^2 + (a - b)^2},$$

donde : $a+b \neq 0$

A) 11 B) 13/2 C) 4 D) 13/4 E) 1

11 Si : $P(x)=\dfrac{3x + 100}{x-3}$,

además : $P(P(n)) = 2$,

calcule : $\sqrt[n+1]{(n - 4)^{n^3+5}}$

A) 8 B) 7 C) –8 D) 9 E) 10

12 Si $\forall x \in R^+$ y se tiene $f(x)=\dfrac{1}{x}$, halle el menor valor de :

$$f\left(f\left(f\left(x\right)\right)\right)+f\left(f\left(f\left(f\left(x\right)\right)\right)\right)$$

A) 4 B) 5 C) 1/2 D) 2 E) 3

13 Si : $P(x+1) = x^3+ 3x^2+ 3x + 3$,

halle : $P\left(\sqrt[3]{x}\right)$.

A) $x+1$ B) $x+21$ C) $x+31$ D) $x + 41$ E) x

14 Si: $J\left(x+\dfrac{1}{x}\right) = x^2 + \dfrac{1}{x^2} + 5$,

halle : $J\left(x^4+\dfrac{1}{x^4}\right)$.

A) $x^8 + \dfrac{1}{x^8} + 5$ B) $x^8 + \dfrac{1}{x^8} + 7$ C) $x^8 + \dfrac{1}{x^8} + 8$

D) $x^8 + \dfrac{1}{x^8}$ E) $x^8 + 8$

15 Si : $f(x) - \dfrac{1}{f(x)} = f(x+1) \wedge f(x) \neq 0$

determine : $\dfrac{4[f(1) - f(4)]}{f(1)^{-1} + f(2)^{-2} + f(3)^{-1}}$

A) 2 B) 5 C) 3 D) 6 E) 4

16 Si:

$$A\left(x-\frac{1}{x}\right) = x+\frac{1}{x} \quad \wedge \quad B\left(x+\frac{1}{x}\right) = x - \frac{1}{x},$$

halle : $\left[A(2)\right]^2 - \left[B(3)\right]^2$

A) 12 B) 6 C) 8 D) 5 E) 13

17 Si : $P(x) = 3x^2 + 3x + 1$,

calcule : $P(1) + P(2) + ... + P(9)$

A) 11 B) 109 C) 10 D) 999 E) 21

18 Si: $P(x) = x^3 - x$, determine

$$P\left(\sqrt{2}+1\right) + P\left(\sqrt{2}-1\right) + P\left(-2\sqrt{2}\right)$$

A) 2 B) $-6\sqrt{2}$ C) 3 D) $-\sqrt{2}$ E) $\sqrt{3}$

19 Si : $A_{(x-1)} = x^2$ y $B_{(x)} = x(x+2)$,

determine : $\dfrac{A_{(m)} - B_{(m)}}{A_{(m-1)} - B_{(m-1)}}$

A) 4 B) 3 C) 2 D) 1 E) –1

20 $A(x)$ representa la multiplicación de dos números contiguos a x.

Determine $A(1) + A(2) + ... + A(10)$

A) 1 B) 1/2 C) 1/3 D) 2 E) 3

21 Siendo : $2P(x) + Q(x) = 3x - 5$

$P(x) - Q(x) = 6x + 8$

determine : $P(1) + P(8)$

A) 63 B) 42 C) 9 D) 29 E) 10

22 Conociendo la expresión :

$$f\left(\frac{1+2n}{n}\right) = \frac{1+2n}{1+n},$$

calcule $f(4) \times f(5) \times f(6) \times .... \times f(9)$.

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

23 El polinomio :

$$P(x\ ;\ y) = x^{n+9}\, y^{n-5} + x^{n+7}\, y^n + x^{2n+1}\, y^3$$

tiene grado absoluto 27.

halle : G. R. (x) + G. R. (y)

A) 21 B) 10 C) 31 D) 27 E) 24

24 Determine el grado del siguiente polinomio:

$$P(x)=(x^2+y)(x^4+y^2)(x^6+y^3)\ ...\ (x^{20}+y^{10})$$

A) 20 B) 220 C) 30 D) 165 E) 110

25 Si: $f(a^3)=a^4-2$ y $P(a;b)=b^2+a$,

A) 199 B) 196 C) 23 D) 19 E) 202

26 Si:

$$P(x)=(x^2+x^3+1)^3 \ \wedge\ Q(x)=(x^3+3x^4+5),$$

halle el grado de : $R(x)=P(x)Q(x)$

A) 12 B) 43 C) 17 D) 5 E) 7

27 Halle el grado absoluto del siguiente polinomio homogéneo .

$$P(x\,;y)=x^{n^2}\,y^{15-3n}+x^{3-n}y^{4+4n}+x^{20-m}$$

A) 19 B) 13 C) 18 D) 10 E) 13 ó 9

28 Sabiendo que :

$P(x+2)=6x+1$ y $P(x^2-1)=f(x^2)$,

calcule : $f(1)+f(2)+f(3)+\ ...\ +f(10)$

A) 200 B) 226 C) 220 D) 160 E) 230

29 Determine el $a+b$, si los términos :

$$P(x\,;\ y)=(a+3)\,x^{a^2+1}y^5$$

$$Q(x\,;\ y)=bx^{10}\,y^b$$

Son semejantes .

A) 3 B) 5 C) 8 D) −5 E) {3 ; −3}

30 Si $P(x)=x^{n-3}\,6x^{5-n}-8$ es un polinomio , indique el grado de : $f(x^2)=5^n\,x^{2n+15}$.

A) 26 B) 13 C) 10 D) 12 E) 17



TERCERA PRACTICA — REPASO PARCIAL

01 Dado $P(x-1)=(2x-3)^{2n}+4x^4-5;\ n\in Z$

Calcule :

$\sum coef.$ de $P(x-1)+$ término independiente de $P(x-1)$

A) 60 B) 70 C) 65 D) 55 E) 50

02 Halle G.R.(x)+G.R.(y) del dominio.

$$P(x\,;\ y)=6x^{2(n-m)}y^{5-m}+3x^{2+n}y^{2m-7}+$$
$$+(10-n)x^2y^{6+n},\ m\,,n\in\mathbb{Z}^+$$

A) 34 B) 13 C) 27 D) 30 E) 32

03 Halle el menor grado del polinomio :

$$P(x)=x^5+x^{n/2}-3n\left(x^n\right)^{n^{1/2}}-10x+3$$

A) 5 B) 4 C) 8 D) 2 E) 6

04 Si : $P(x;y)=\dfrac{x}{y}\left(\dfrac{x+y}{12+x^2}\right)-\dfrac{9}{2x^2}$,

calcule $P\left(3\sqrt[3]{2}\ ;2\sqrt[3]{4}\right)$.

A) 0 B) 1 C) 2 D) $\sqrt[3]{2}$ E) $\sqrt[3]{6}$

05 Halle $(a+b)\dfrac{n}{m}$, si se sabe que los restos de dividir:

$$\frac{4x^7-6x^5+ax^2+x+b}{x^2+-2}$$

$$\frac{x^4-2n-3x^3+mx}{x^2-2x+4}$$

Son $(x+6)$ y cero respectivamente .

A) 12 B) 64 C) 8 D) 20 E) 76

06 En una división efectuada por el método de Horner se obtuvo el siguiente esquema :

a	6	e	f	g	h	j
b		2	m	4		
c				n	6	
d				1	−1	2
	2	3	1	−4	−2	5

Calcule : $e+f+g$.

A) 7 B) −7 C) 1 D) 10 E) 3

07 Determine el residuo en :

$$\frac{(2x-5)^4+x^2}{4x\ -\ 12}$$

A) 8 B) 11 C) 12 D) 10 E) 9

08 Calcule el producto de los restos de las siguientes divisiones :

$$I)\quad \frac{\left(x^2-1\right)^2+(x-1)^1}{(x-1)^3}$$

$$II)\quad \frac{4x^{33}-5x^{26}-4x^4-1}{x^2+x+1}$$

A) $-5x^2-4x+3$ B) $4(x+8)(x-1)^2$ C) $x-1$

D) 1 E) $-5(5x^2+4x-3)(x-1)^2$

09 Halle la suma de los restos de las siguientes divisiones :

I) $\dfrac{(x+2)^7+3(x+2)^5+x+1}{(x+1)(x+3)}$

II) $\dfrac{x(x-1)(x+3)+(x+1)^6+6x}{x^2+2x+3}$

A) $5x+1$ B) $5x+17$ C) $5x$ D) $x+1$ E) $5x+9$

10 Halle el resto en :

$$\frac{x(x-1)^3+(x-2)^4}{(x-1)(x-2)}$$

A) $x-1$ B) $2x$ C) $x-2$ D) $x+1$ E) x

11 Indique el resto en :

$$\frac{x(x+1)^3(x+3)^4}{(x+3)^5}$$

A) $-8(x+3)^4$ B) $8(x+3)^4$ C) 0 D) $3(x+3)$ E) $8(x+3)$

12 Halle el resto en la división de :

$f(x)=(x-2)(x+2)^5$ con x^2-4

A) $x+2$ B) $x-2$ C) 0 D) 5 E) 3

13 Calcule el resto dividir :

$(x+1)^{35}+7(x^2+2x+1)^{14}+3(x+1)^{17}+(-x-1)^6+3$

entre x^2+2x+2

A) $2x$ B) $2x+11$ C) $2x+1$ D) $-4x+5$ E) $x+11$

14 $P(x)$ es un polinomio que verifica :

$$P(2x+1)-P(x)=x^3-1$$

Si $r_1(x)$ es el resto de divivir $P(x)$ entre $x-3$ y $r_2(x)$ el resto de dividir $P(x)$ entre x, calcule $r_1(x)-r_2(x)$.

A) 1 B) -3 C) -1 D) 3 E) 2

15 Halle ab, si la división :

$$\frac{bx^4+ax^3+7x^2+4x+3}{3x^2+x+3}$$

es exacta .

A) 13 B) 11 C) 10 D) 12 E) 8

16 Calcule n^2 para que la suma de coeficientes del cociente de la división $\dfrac{nx^{51}+mx+m-n}{x-1}$ sea 161. Además el resto es 16.

A) 9 B) 16 C) 25 D) 4 E) 100

17 Si los polinomios :

$P(x)=x^2+cx-2$ y $f(x)=dx^2+5x-4$ son divisibles con $x+1$, $2x-1$ respectivamente , calcule el valor de d/c.

A) 1/2 B) 4 C) $-1/2$ D) -6 E) 6

18 Sea : $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$ divisible por x^2-1 y $x-4$. Si al dividirlo entre $x+3$ da como resto 56 , halle el resto en $\dfrac{f(x)}{x-3}$

A) -48 B) 24 C) -24 D) -8 E) 40

19 Sea : $P(x)$ un polinomio mónico que cumple $P(1)=1; P(2)=2; P(3)=3$, además $°[P(x)]=3$. Halle $P(4)$.

A) 4 B) 3 C) 10 D) 9 E) 11

20 El polinomio $P(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ es divisible con x^2+3 y se anula para $x=-1, x=-2$. Calcule $a+b+c+d+e$, si se sabe que el resto de dividir $\dfrac{P(x)}{x}$ es 72 .

A) 288 B) 308 C) 88 D) 144 E) 72

21 Al dividir un polinomio $f(x)$ entre $2x^2+x+1$, se obtiene como resto 1 y un cociente $q(x)$ tal que $q(1)=8$.

Halle el resto de dividir : $\dfrac{f(x)}{16x-16}$

A) 8 B) 0 C) 33 D) 1 E) 5

22 Si $P(x)=x^3-3b^2x+2c^3$ es divisible por separado con $(x-a)$ y $(x-b)$, calcule :

$\dfrac{a^2+bc}{ab}$, $b\neq a \wedge ac>0$.

A) 2 B) 5/2 C) $-5/2$ D) 1/2 E) 1

23 Si $f(x)$ cuando se divide por $x+4$; $x+7$ y $x-5$ tiene el mismo resto 8 , halle el resto de dividir $f(x)$ con $(x-5)(x^2+11x+28)$

A) $x+1$ B) $x-5$ C) $2x+1$ D) 8 E) $x+7$

24 Al dividir $\dfrac{P(x)}{(x^2+1)(x-3)}$, se obtuvo como resto x^2+4x-1 . ¿Cuál será el resto de dividir $\dfrac{P(x)}{x-3}$?

A) 19 B) 20 C) 21 D) 18 E) 0

25 Si: $P(x)=2x^3+9x^2+ax+b$ es divisible entre $x+3$ y $x+2$ por separado , el valor de $\dfrac{6}{5}a+\dfrac{1}{7}b$ es:

A) 264 B) 264/35 C) 1/35 D) 252/36 E) 12/35

26 Si: $P(x) = x^n - mx + a$ es divisible con $x^2 - 2x + 1$, calcule: $\dfrac{a+1}{m+n}$.

A) 1 B) 1/2 C) 2 D) 3 E) 1/3

27 Halle $m \times n$, si

$$f(x) = (m-3)x^{49} + (m-12)x^{32} - nx^{27} + nx^6 + 3$$

es divisible entre: $x^2 + 1$.

A) – 24 B) – 18 C) – 12 D) 12 E) 30

28 Si $P(x)$ es divisible por $(x^2-4)(x^2-9)$, determine el resto de dividir $\dfrac{P(x)}{x^2+x-6}$

A) x^2-x+6 B) x^2-x C) x D) $x-6$ E) 0

29 Señale un factor primo de:

$$J(x;y) = x^3 + xy^2 + 2y^3$$

A) x^2+xy+y^2 B) $x^2-xy+2y^2$ C) x^2-xy+y^2
D) $x^2+xy+2y^2$ E) $x+2y$

30 Si $A(x)$ es un factor primo de:

$P(x) = (x+1)^3 + 27$, calcule el máximo valor de $A(1)$

A) 5 B) 4 C) 7 D) 9 E) 8



CUARTA PRACTICA — REPASO PARCIAL

01 Señale el número de factores primos de:

$$P(x;a) = x^6 + a^2x^4 + a^4x^2 + a^6$$

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

02 Indique un factor primo de:

$$H(x;y;z) = (xyz - x - y - z)^2 + (xy + yz + zx - 1)^2$$

A) $1+x^2$ B) xyz C) $x+y+z$ D) $x+y$ E) $1+x$

03 Factorice: $P(x) = x^4 + 2x^3 + x^2 - 1$ e indique la suma de coeficientes de uno de los factores primos.

A) 0 B) – 1 C) 2 D) 3 E) – 2

04 Factorice el polinomio de segundo grado $P(x) = a^2bx^2 + (a^3+b^3)x + ab$ e indique uno de los factores primos lineales.

A) $ax+b$ B) ax C) a^2x+b D) $bx+b$ E) $ax-b$

05 Si $f(x)$ es el máximo común divisor de:

$$A(x) = x^3 + 2x^2 + 2x + 1$$
$$B(x) = x^4 - 1$$
$$C(x) = x^2 - 2005x - 2006$$

indique el valor de $f(7)$.

A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

06 Señale el factor primo cuadrático de:

$$P(x) = 3x^3 + 2x^2 + 20x - 7.$$

A) x^2-x+7 B) x^2+x+7 C) x^2-x-7
D) x^2+x+1 E) x^2+x-7

07 Al factorizar el polinomio:

$$P(x) = x^3 - 5x^2 + 12x - 32$$

se obtuvo un factor primo $f(x) = ax^2 + bx + c$
Calcule el valor de abc.

A) 0 B) – 8 C) – 4 D) 4 E) 8

08 Luego de factorizar:

$$P(x) = x^6 + 3x^5 + 2x^4 + x^2 - 1,$$

indique el mayor grado de un factor primo.

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 6

09 Halle el número de factores primos lineales en: $P(x) = x^6 - 2x^4 - 4x^2 + 8$

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

10 Indique uno de los factores primos de:

$$P(x) = (x^5 + 1) + (x+1)^2$$

A) x^2-x+1 B) x^2+x-1 C) x^2+x+1
D) x^2+2x+2 E) x^2-x-1

11 Halle el término independiente de uno de los factores primos de:

$$P(a) = a^4 - 5a^2 - 6a - 5$$

A) 0 B) 8 C) – 8 D) – 5 E) 7

12 Halle al suma de coeficientes de uno de los factores primos lineales de:

$$H(x) = x^4 - 6x^2 - 7x - 6$$

A) 0 B) 1 C) – 2 D) 10 E) – 1

13 Factorice:

$$f(x,y) = 15x^2 - 22xy + 8y^2 + 24x - 16y$$

e indique la suma de sus factores primos lineales

A) $2x$ B) $8x+6y+8$ C) $8x-6y+8$
D) 8 E) $3x-2y$

14 Halle el número de factores primos lineales de: $P(a) = (a^2+2a-3)(a^2+2a+2)+4$.

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

15 Determine $x \in \mathbb{R}$ para que el producto $(2-5i)(3+xi)$ sea:

I) Real

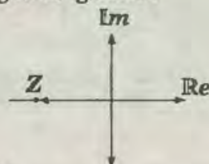
II) Imaginario puro

A) – 5/6; 15/2 B) 15/ 2; – 5/6 C) 5/ 6; – 15/2
D) –15/ 2; 5/6 E) 15/ 2; – 6/5

16 Sabiendo que $|Z| = 1$; $|W| = 2$; $Z, W \in C$, determine $|Z+W|^2 + |Z - W|^2$

A) 5 B) 8 C) 10 D) 16 E) 20

17 Según el gráfico :



$Z=\dfrac{a+bi}{b+ai}$. Determine dicho complejo .

A) – 1/2 B) 1 C) – 1 D) – 2 E) 0

18 Si $Z = 2 + 3i$, encuentre el área de la región que se obtiene al unir los afijos de Z ; $\overline{Z}$, Z^*

A) 6 u² B) 24 u² C) 18 u² D) 12 u² E) 10 u²

19 Si $Z \in \mathbb{C}$ tal que $Z^2 + Z\overline{Z} = 18+12i$, además Z pertenece al primer cuadrante $|Z|$.

A) 13 B) $\sqrt{13}$ C) 169 D) 9 E) 81

20 Sabiendo que $\left\{(1+i)^6 + (1-i)^6\right\}^{2^n} = 4096$, determine n .

A) 3 B) 1 C) 2 D) 4 E) 0

21 Simplifica la suma :

$$1+i^{i^2} + i^{i^4} + i^{i^6} + i^{i^8} + ... + i^{i^{38}} + i^{i^{40}}$$

A) 0 B) 1 C) $1+i$ D) $1-i$ E) –1

22 Reduzca : $(3 + i)^{-2} + (3 - i)^{-2}$

A) 0,32 B) 0,16 C) 0,08 D) 0,24 E) 0,12

23 Sea la función: $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 3$.

Determine $f(1+i)$, donde $i=\sqrt{-1}$.

A) $2 + 2i$ B) $-2 + 2i$ C) $2 - 2i$
D) $-2 - 2i$ E) $2 - i$

24 Sabiendo que $(a + bi)^2 = 8+ 4i$; $a , b \in \mathbb{R}$, calcule : $ab^{-1} - a^{-1}b$.

A) 1/4 B) 4 C) 2 D) 1/2 E) 1

25 Efectúe : $\dfrac{(1\,;\,3)}{(1\,;\,1)} + \dfrac{(7\,;\,-1)}{(2\,;\,-1)}$

A) $5 + 2i$ B) 5 C) –1 D) $2i$ E) $2 + 5i$

26 Halle el número complejo Z que verifica

I) $|Zi| = 8$

II) $arg\left[Z(1+i)\right] = \pi/6$

A) $8cis\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ B) $cis\pi$ C) 8

D) $8cis\pi\left(-\dfrac{\pi}{12}\right)$ E) $cis(8\pi)$

27 Exprese en forma exponencial :

$$Z=(1+\sqrt{3}i)(1+i)\left(cos\frac{\pi}{3} - isen\frac{\pi}{3}\right)$$

A) $2\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{2}i}$ B) $2e^{\frac{\pi}{2}i}$ C) $\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{2}i}$

D) $2\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{3}i}$ E) $2\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}$

28 Si : $Z=\sqrt{8}\ cis\dfrac{\pi}{4}$, calcule arg (e^{zi})

A) $\pi/4$ B) 0 C) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ D) $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ E) 2

29 Calcule la parte real de :

$$w = \frac{e^{i2x} - 1}{e^{i4x} - 1}; x \in R$$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 1/2 E) 1/4



QUINTA PRACTICA — REPASO PARCIAL

01 Si α y β son dos raíces de $\alpha\sqrt[3]{-i}$, calcule el valor de :

$$\frac{(i + a)^{123} + (i + \beta)^{234} + (\alpha + \beta)^{345}}{\alpha + \beta - i}$$

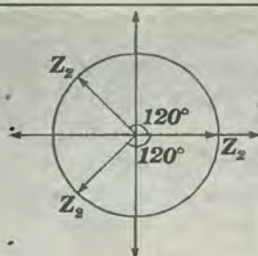
A) –1/2 B) 1/2 C) 0 D) 1 E) – i/2

02 Si $Z = 4 \times e^{\frac{i\pi}{6}}$, halle el valor de $\left|e^V . e^{iW}\right| + 1$

donde : $V=Re(Zi) \wedge W=\mathbb{I}m(iZ)$

A) $(e+1)(e-1)$ B) $e^2 + 1$ C) $e^{-2}+1$
D) $e^2 - 1$ E) $e^e + 1$

03 En el gráfico se muestran tres números complejos Z_1 , Z_2 , Z_3 , tal que $|Z_1|=|Z_2|=|Z_3|=1$.



Determine : $(Z_1+1)^3+(Z_2+1)^3+(Z_3+1)^3$

A) 12 B) 6 C) 24 D) 0 E) 4

04 Dé el valor de verdad acerca de las siguientes proporciones :

I) Si: $arg(Z-\overline{Z})=\frac{3\pi}{2} \wedge arg(Z+\overline{Z})=\pi$

$\rightarrow \overline{Z} \in IIIC$

II) Si : $Z_1 \in IIC \wedge Z_2 \in IIIC$

$\rightarrow (Z_1+\overline{Z}_2) \in IVC$

III) Si : $Z_1=(2;-1)$; $Z_2=(-2;3)$

$\rightarrow \overline{Z_1.Z_2}=(-1;-8)$

A)FVV B) FFF C) VVV D) VFV E) FVV

05 Determine : i^i

A) $e^{\frac{\pi}{2}i}$ B) $e^{-\frac{\pi}{2}i}$ C) $e^{-\frac{\pi}{2}}$ D) $e^{\frac{\pi}{2}}$ E) e^{π}

06 Si el polinomio : $f(x)=x^2+6x+2ix+b-ai$, tiene raíz cuadrada exacta $a;b\in\mathbb{R}$, calcule $(a+b)^3$.

A) 27 B) 1 C) 8
D) 2 E) 64

07 Con respecto a la ecuación en x : $m^2(m-3)x=0$, indique el número de proposiciones correctas .

I) Si $m=3$, tiene infinitas soluciones .

II) Si $m=0$, tiene una solución .

III) Si $m=0 \vee m=3$, tiene una solución .

IV) Si $m>4$, tiene una solución .

A)0 B) 1 C) 2 D) 3 E)4

08 Luego de resolver en x $m^2(x-1)=3(3x-m)$ indique el número de proposiciones correctas.

I) Si $m=3$, tiene infinitas soluciones .

II) Si $m^2\neq 9$, tiene una solución .

III) Si $m=0$, es compatible determinada .

IV) Si $m=-3$, es incompatible .

A)0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

09 La ecuación : $8x^2+x-1=0$ tiene C. S. = {α ; θ}, entonces el valor de $\frac{8(\alpha^3-\theta^3)+(\alpha^2-\theta^2)}{\alpha-\theta}$ será :

A) 1 B) −1 C) 8 D) − 8 E) $\alpha+\theta$

10 Si $x\in\mathbb{R}$, ¿qué podemos decir de las soluciones de la siguiente ecuación?

$$\frac{x^2\left(\sqrt{x}-1\right)}{x-2}=\frac{4\left(\sqrt{x}-1\right)}{x-2}$$

A) tiene 2 soluciones B) 2 es una solución
C) No tiene solución D) Tiene una solución
E Tiene 3 soluciones

11 Resuelva la ecuación en x :

$$\frac{x-ab}{a+b}+\frac{x-ac}{a+c}+\frac{x-bc}{b+c}=a+b+c,$$

si : $abc>0$.

A) $a+b+c$ B) $\{ab+bc+ac\}$ C) $ab+bc+ac$
D) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ E) $\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ac}$

12 Si la ecuación en x :

$$\frac{x-a}{bc}+\frac{x-b}{ac}+\frac{x-c}{ab}=2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

tiene C. S. = {m}, donde $a,b,c\in\mathbb{R}^+$; calcule

$$\left(\frac{m-c}{a+c}\right)\left(\frac{m-b}{c+b}\right)\left(\frac{m-a}{b+a}\right)$$

A)1 B) − 1 C) 2 D) − 2 E) abc

13 Luego de resolver la ecuación en x :

$$\frac{x}{a^2}+\frac{x}{b^2}+\frac{x}{c^2}=x(a+b+c);\ a,\ b,\ c\in\mathbb{R}^+$$

Indique el número de proporciones correctas .

I) Es incompatible

II) Es compatible determinado .

III) No tiene solución .

IV) C. S. = {0}

A) 0 B)1 C) 2 D) 3 E) 4

14 Halle el valor de x en la ecuación :

$$\frac{x-2a+3b}{a}+\frac{x-3a+3b}{2005b}=1;\ a,b\in Z^+$$

A) $3(a-b)$ B) $3(a+b)$ C) $3(b-a)$
D) $\{3a-3b\}$ E) $a+b$

15 Si al suma de los cuadrados de las raíces de: $ax^2 + bx + c = 0$ es 4 y el producto es $1/2$, calcule $\frac{b^2+c^2}{a^2}$.

A) 15/4 B) 17/4 C) 19/4 D) 21/4 E) 23/4

16 Si α es raíz de la ecuación: $x^2 - 8x + 10 = 0$, además $S_n = \alpha^n + 2$, calcule:

$$\frac{S_5}{2} - 4S_4 + 5S_3$$

A) 0 B) 2 C) 3 D) 5 E) 4

17 Halle el valor de p tal que la ecuación cuadrática $2px^2 - 4px + 5p = 3x^2 + x - 8$ tenga el producto de sus raíces a dos veces su suma.

A) 1 B) –1 C) 2 D) – 2 E) 5

18 Si 1 es raíz de la ecuación en x:

$$x^2 + ax + b = 0,$$

calcule $(a - b + 1)(a + b + 1)$

A) 5 B) 205 C) 38 D) 99 E) 0

19 Si una de las raíces de la ecuación:

$x^2 + px + q = 0$ es el cuadrado de la otra, calcule:

$\frac{p^3+q^2+q}{pq}$

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

20 Si x_1 y x_2 son las raíces de: $x^2 - x - 22222 = 0$, indique el valor de: $x_1^2 + x_2^2 - 44444$

A) 1 B) 4444 C) 2222 D) 6666 E) 44

21 La ecuación: $mx^2+(3m+2)x + 8 = 0$ de raíces x_1 y x_2 de modo que:

$$\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}\right)^2 = \frac{1}{2}+\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}\right)^2$$

entonces sobre sus raíces se puede afirmar que

A) no son reales. B) son reales diferentes. C) son naturales. D) su producto es negativo. E) son iguales.

22 Dada la ecuación: $x^2 + 4x + 7 = 0$ de raíces x_1; x_2, calcule el valor de: $\frac{x_1^4 + {}_2^4}{47(x_1 + x_2)}$.

A) 1 B) 4 C) – 4 D) –1/2 E) 10

23 Resuelva la ecuación en x:

$2\left(x_1^3 + x_2^3\right)x^2 - 3x + x_1 + x_2 = 0$, dado que el conjunto solución de:

$2x^2 - 2px + p^2 - 1 = 0$ es $C.S. = \{x_1; x_2\}\ x_2 = 0$.

Indique una solución.

A) $2/p$ B) $\frac{p}{1-p^2}$ C) $\frac{p}{3-p^2}$ D) $\frac{p}{3+p}$ E) $\frac{p}{p^2+1}$

24 Si la ecuación: $x^2 - 3x + 1 = 0$ tiene

$C.S. = \{\alpha; \theta\}$, halle: $\alpha + \frac{1}{\alpha} + \theta + \frac{1}{\theta}$

A) 3 B) 6 C) 1 D) – 6 E – 3

25 Resuelva:

$$\frac{x-3}{2} - \frac{2x+1}{3} - 1 + \frac{2+x}{5} = -\frac{7}{3}$$

A) {3} B) {– 3} C) {0} D) {1} E) {35}

26 Halle el valor de x en:

$$\frac{ax-1}{a} + \frac{bx-1}{b} - (a+b)x = 2x,\ a, b \in N$$

A) 1 B) 2 C) ab D) $1/ab$ E) $a + b$

27 La ecuación cuadrática:

$$(a+1)x^2 + 2ax + b = 0$$

tiene raíces iguales. Halle el menor valor de b, si a es único.

A) 0 B) – 1 C) – 2 D) – 3 E) – 4

28 Las raíces de la ecuación:

$x^2 - ax - 1 = 0$ y las raíces de la ecuación $x^2 - bx - 1 = 0$ en el orden obtenido se encuentran en progresión aritmética.

Calcule el valor de: $a^2 + b^2$

A) 4 B) 8 C) 12 D) 16 E) – 32 / 3

29 Las ecuaciones: $ax^2 + bx + c = 0$

$$cx^2 + bx + a = 0$$

$a, b, c \in \mathbb{R};\ a \neq c;\ b \neq 0$

tienen una raíz común. Halle el valor de $E = \frac{a+c}{b}$ e indique el producto de valores de E.

A) 1 B) – 1 C) 2 D) – 2 E) 3

30 Si la ecuaciones: $x^2 + px + q = 0$

$$x^2 + ax + b = 0$$

admiten una raíz en común , la ecuación de segundo grado cuya raíz doble es la raíz común de las dos ecuaciones anteriores es :

A) $(a-p)^2x^2+2(a-p)(b-q)x+(b-q)^2=0$

B) $(a-p)^2x^2-2(a-p)(b-q)x+(b-q)^2=0$

C) $(a-b)^2x^2-2(a-b)(p-q)x+(p-q)^2=0$

D) $(a-b)^2x^2+2(a-b)(p-q)x+(p-q)^2=0$

E) $(a+p)^2x^2-2(a-b)(p-q)x+(p-q)^2=0$

SEXTA PRACTICA REPASO PARCIAL

01 Se cumple que :

$$5a^2+8a+q=0$$
$$5b^2+10b+5=2b-2,$$

calcule el valor de : $a+b$

A) 10 B) 5 C) 1/5 D) –8/5 E) 8/5

02 Si a y b son las raíces de :

$(m-2)x^2-2mx+2m-3=0$ tal que :

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=2$, calcule el menor valor de : $a-b$

A) –3 B) – 2 C) – 6 D) $-2\sqrt{26}$ E) $2\sqrt{26}$

03 Si α y β son las soluciones de :

$$x^2+bx+c=0$$

tal que : $\alpha-\beta=2;\ \alpha^3-\beta^3=26$,

calcule el mínimo valor de : $\alpha+\beta$

A) 1 B) – 1 C) 7 D) $-\sqrt{26}$ E) – 4

04 Si a y b son las raíces de la ecuación :

$x^2+x+1=0$ halle la ecuación de raíces

$a^2+\frac{1}{b}\wedge b^2+\frac{1}{a}$.

A) $x^2-2x+1=0$ B) $x^2-2x-1=0$
C) $x^2-3x+1=0$ D) $x^2+2x+1=0$
E) $x^2+4x+1=0$

05 La ecuación $\frac{x^2}{5}-ax+b+2=0$ tiene a 5 como raíz múltiple , calcule la suma de raíces de

$x^2-\left(\frac{2}{a}+\frac{3}{b}\right)x+ab=0$

A) 3/5 B) 5/3 C) – 1 D) 1 E) 2

06 Si : b^b+5 y b^b-5 son raíces de :

$x^2-8x+(1-2a)=0$, halle el valor de a.

A) 9/2 B) 7 C) 11/2 D) 5 E) 6

07 Si x_1 ; x_2 son raíces de la ecuación $x^2-\sqrt{3}x+1=0$, calcule la ecuación de raíces x_1^{2005}, x_2^{2005}

A) $x^2-2005x+1=0$ B) $x^2-\sqrt{3}^{2005}x+1=0$

C) $x^2+\sqrt{3}x=-1$ D) $x^2-\sqrt{3}x+\frac{1}{2005}=0$

E) $x^2+1=\sqrt{3}$

08 Dada la ecuación polinomial:

$x^3-x^2-x+1=0$, halle la suma de raíces de la suma de soluciones .

A) 2 B) 0 C) 1 D) 3 E) –1

09 Una raíz de la ecución polinomial :

$x^4+x^3+3x^2+bx+a=0$, es $\sqrt{-1}\,(a,b\in\mathbb{R})$

Determine : $a+b$.

A) 0 B) –3 C) 3 D) 4 E) 1

10 Sea la ecuación polinomial :

$$x^n-3x^3+3x^2-x+m=0$$

Sabiendo que presenta 4 raíces y una raíz es 1, determine el número de soluciones .

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

11 Dada la ecuación polinomial $x^3+x-1=0$ de raíces x_1, x_2, x_3.

determine : $(2-x_1)(2-x_2)\ (2-x_1)(2-x_3)$

A) 10 B) 1 C) – 8 D) 8 E) 9

12 Dada la ecuación polinomial :

$2x^4+7x=1$ de raíces α,β,θ y ϕ , calcule

$$(1-\alpha)(1-\beta)(1-\theta)(1-\phi)$$

A) 6 B) 4 C) 9 D) 9/2 E) 2

13 Dada la ecuación polinomial :

$2x^3-6x^2+63-3=0$, indique una solución .

A) $\sqrt[3]{\frac{1}{3}}+1$ B) $\sqrt[3]{\frac{1}{2}}-1$ C) $\sqrt[3]{\frac{1}{2}}+1$

D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{3}{2}$

14 Dada la ecuación polinomial :

$$2x^3-18x^2+mx+n=0$$

Si sus raíces son tres números consecutivos, determine n.

A) 24 B) – 48 C) 6 D) – 6 E) – 120

15 Sabiendo que 2 es raíz simple, 3 es raíz doble y – 1 es raíz triple del polinomio $P(x)$ de menor grado posible, tal que su término independiente es – 36; determine la suma de sus coeficientes.

A) – 32 B) – 64 C) 64 D) – 16 E) 32

16 Dado el polinomio mónico de menor grado posible, tal que 0 es raíz simple; 1 es raíz de multiplicidad 2 y 2 es raíz de multiplicidad 3, determine la suma de los coeficientes

A) 0 B) 1 C) 2 D) 4 E) 3

17 Resuelva la ecuación:

$18x^4 + 37x^2 - 20 = 0$ e indique la menor solución.

A) – 2/3 B) 2/3 C) – 3/2 D) 3/2 E) – 5/2

18 Si x_1, x_2, x_3, x_4 son raíces de la ecuación $x^4 - x^3 - 1 = 0$, calcule el valor de:

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3$$

A) – 1 B) – 2 C) 0 D) 1 E) 1/2

19 Si la suma de raíces positivas de la ecuación bicuadrada $x^4 + (5 - 3a)x^2 + a^2 = 0$ es 5, determine a.

A) 2 B) 4 C) 6 D) 3 E) 5

20 Las raíces de la ecuación bicuadrada: $x^4 + ax^2 + b = 0$ están en progresión aritmética de razón r. Indique la ecuación bicuadrada, tal que dos de sus raíces sean $\dfrac{9a^2}{100b}$; $9a^2 - 100b - 2$

A) $x^4 - ax^2 + b = 0$ B) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

C) $x^4 - bx^2 + a = 0$ D) $x^4 + 4x^2 + 4 = 0$

E) $x^4 + 5x^2 - 4 = 0$

21 Dada la ecuación: $5x^4 + \sqrt{2+\sqrt{5}}\,x^2 + 5 = 0$ de raíces x_1; x_2; x_3; x_4, calcule el valor de $|x_1| + |x_2| + |x_3| + |x_4|$

A) 1 B) 4 C) 1/4 D) 2 E) 3

22 Si las raíces de la ecuación: $x^4 - 10mx^2 + 24m = 16$ están en progresión aritmética, calcule el valor que toma m.

A) 4/3 B) – 4/3 C) – 3/4 D) 3/4 E) 4

23 Si las raíces de la ecuación: $3x^4 - 10(m + 5)x^2 + 60m = 0$ están en progresión aritmética, calcule el valor de m.

A) – 5 B) 5 C) – 4 D) 4 E) 1

24 Con respecto a la ecuación:

$$(x - 1)^2 (x + 1)^3 (x^2 + 1)^2 (2x - 1) = 0$$

Dé el valor de verdad de:

I) Posee 8 raíces.

II) 1 es raíz de multiplicidad 2.

III) – 1 es raíz de multiplicidad 3.

A) FVF B) VVV C) VFV D) FFF E) FFV

25 Halle la suma de las raíces no reales de la ecuación: $x^3 - 3x^2 + 5x - 3 = 0$

A) 2 B) – 2 C) 4 D) – 3 E) 3

26 Halle el cardinal del conjunto:

$$A = \left\{ x \in \mathbb{Q} / \left(x^2 + 5x + 6\right)^2 + x^2 + 5x = 0 \right\}$$

A) 1 B) 2 C) 0 D) 3 E) 4

27 Dada la ecuación polinomial:

$x^3 + (n - 1)x^2 - n = 0$ de coeficientes enteros, indique para cuántos valores de n las raíces son enteras.

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) más de 3

28 Halle la menor raíz de la ecuación:

$$0,001x^3 + 0,06x^2 + 1,1x + 6 = 0$$

A) – 30 B) – 20 C) – 10 D) – 0,001 E) – 0,002

29 Halle la mayor raíz de la ecuación:

$$x^3 - 60x^2 + 1100x - 6000 = 0$$

A) 5 B) 15 C) 20 D) 30 E) 60

30 Dada la ecuación:

$2x^4 - 8x^3 + cx^2 + dx + e = 0$ de coeficientes racionales. Si dos de sus raíces son $1 + \sqrt{2}$ y $1 + i$, determine: $d + e$.

A) – 12 B) – 8 C) – 10 D) 12 E) 0



SÉPTIMA PRACTICA — REPASO PARCIAL

01 Dada la ecuación polinomial:

$x^3 - x^2 + 1 = 0$ de raíces a, b, y c, determine:

$$\frac{a^3}{a+1} + \frac{b^3}{b+1} + \frac{c^3}{c+1}$$

A) 1 B) – 1 C) 0 D) – 2 E) – 3

02 Sabiendo que las ecuaciones polinomiales:

$$x^3 + (3 + m)x^2 + (4 + n)x + (5 + p) = 0$$

$$x^3 + (2 + m)x^2 + (2 + n)x + (4 + p) = 0$$

tienen una raíz en común, halle dicha raíz.

A) 1 B) – 1 C) 0 D) 2 E) –2

03 Si 1 ; 2 y 3 son soluciones de la ecuación

$$x^4 + ax^2 + bx + c = 0$$

entonces $a + c$ es igual a :

A) – 12 B) 24 C) 35 D) – 61 E) – 63

04 Considere los polinomios :

$$P(x) = x^6 - x^5 - x^3 - x^2 - x$$
$$Q(x) = x^4 - x^3 - x^2 - 1$$

tal que z_1, z_2, z_3, z_4 son raíces de $Q(x)$.

Calcule : $P(Z_1) + P(Z_2) + P(Z_3) + P(Z_4)$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 6

05 Si $x_1 - x_2$ son soluciones reales positivas de la ecuación recíproca

$ax^4 + (b-3)x^3 - 10x^2 - (a-5)x + 6 + b = 0$,

indique : $(x_1 + x_2)^{x_1 x_2}$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

06 Dada la ecuación cúbica :

$Ax^3 + Bx^2 + Cx + 2 = 0$, donde el conjunto solución es : $\left\{\dfrac{n^2+2}{n^2+1}; \dfrac{n^2+2}{n^2+1}; \dfrac{n^2+2}{n^2+4}\right\}$

determine C.

A) 3 B) 6 C) – 6 D) – 3 E) –2

07 La ecuación polinomial en x :

$$((n-1)x^4 - 1)(x^6 + x^4 + 1) = x^4(x^6 + x^4 - 1) + x^6(x^4 - 1) - 2$$

se reduce a una trinomia cuyas raíces son $x_1, x_2, \ldots, x_8$

Calcule : $x_1^{12} + x_2^{12} + \ldots + x_8^{12}$ ¿

A) 8 B) 12 C) – 12 D) 144 E) – 8

08 Resuelva :

$$\frac{3\times 2^x - 1}{3\times 2^x + 5} + \frac{10}{9\times 2^x - 12\times 2^x - 5} = \frac{7}{3\times 2^x + 5}$$

y calcule $x_0(2^{x_0} - 6)$, donde x_0 es solución.

A) 0 B) 1 C) – 1 D) 2 E) 2 / 3

09 La ecuación en x :

$\dfrac{x(x-1) - (m+1)}{(x-1)(m-1)} = \dfrac{x}{m}$ tiene a x_0 como solución única. Indique el valor de :

$$(x_0+m)^2 + (x_0+m)^3 + (x_0+m)^4 + \ldots + (x_0+m)^{2005}$$

A) 2005 B) 2003 C) 1 D) 0 E) 5

10 Al resolver la ecuación en x :

$$\frac{x^{10} + x^8 + x^6 + x^4 + x^2 + 1}{x^2 + x + 1} = -\alpha(x^2 - x + 1)$$

se tiene que -1, α, son dos de sus soluciones. Indique el valor de α^2.

A) 1 B) 4 C) 2 D) $\sqrt{3}$ E) $\sqrt{2}$

11 Resuelva : $\dfrac{x+1}{x-3} + \dfrac{x+2}{x-4} = \dfrac{2x^2 - 5x - 6}{x^2 - 7x + 12}$ e indique la cantidad de soluciones.

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

12 Resuelva : $\dfrac{1}{2x-4} - \dfrac{x+10}{2x^2-8} - \dfrac{1}{x+2} = \dfrac{1}{5}$

Si x_0 es solución, indique la ecuación de raíces $x_0 \wedge 2x_0$.

A) $x^2 - 9x + 18 = 0$ B) $x^2 - 9x - 18 = 0$

C) $x^2 + 9x - 18 = 0$ D) $x^2 + 9x + 18 = 0$

E) $x^2 + 18x + 9 = 0$

13 Resuelva :

$$\frac{x^{3n}}{x^n - 1} - \frac{x^{2n}}{x^n + 1} - \frac{1}{x^n - 1} + \frac{1}{x^n + 1} = \frac{5}{2}; n \in \mathbb{Z}^+$$

Calcule :

(*Suma de soluciones*) × (*Producto de soluciones*)

A) 1 B) 5/2 C) – 5/2 D) – 5 E) 0

14 Resuelva :

$\dfrac{3x^3 + 12x^2 + 15x - 2}{x^3 + 5x^2 + 9x + 5} + \dfrac{1 - 3x}{x + 1} = 1$ e indique el cardinal del conjunto solución.

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 0

15 Si a es solución de la ecuación :

$$\frac{3}{5}\left(\frac{4x^2 - x + 1}{x^2 - x + 1}\right) + \frac{(x-2)^2}{x^2 + x - 1} = 3,$$

Calcule el valor de a^3.

A) 2 B) 4 C) 6 D) 8 E) 16

16 Resuelva la ecuación en $\mathbb{R}$:

$\dfrac{x^3 + x^2 + x + 1}{x^3 - x^2 + x - 1} + x = \dfrac{\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 - \left(x + \frac{1}{x}\right)^2}{4}$ y dé el complemento de su conjunto solución.

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) $\mathbb{R} - \{-1\}$

17 Señale n para que el sistema :
$$\begin{cases} nx + 7y = 2 \\ x+(n-6)y = n-6 \end{cases}$$ tenga solución única.

A) 7 B) -1 $n \in R-\{1\,;\,-7\}$ C) -1
D) $n \in R-\{1\,;\,-7\,;\,0\,;\,6\}$ E) 6

18 Si el sistema :
$$\begin{cases} (a-1)x + by = 9 \\ 3ax+(3b+2) = 36 \end{cases}$$ tiene infinitas soluciones , calcule ab .

A) 5 B) 16 C) 7 D) 6 E) 8

19 Si el sistema :
$$\begin{cases} nx - 6y = 5n - 3 \\ 2x+(n-7)y = 29 - 7n \end{cases}$$ es inconsistente , halle n.

A) 2 B) {2 ; 3} C) {4 ; 2 ; 3} D) {4 ; 3} E) 4

20 Si el sistema :
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ y = -x + a \end{cases}$$ tiene solución única , indique el menor valor que toma a .

A) $-\frac{3}{2}\sqrt{2}$ B) $-4\sqrt{2}$ C) $-5\sqrt{2}$ D) $3\sqrt{2}$ E) $-3\sqrt{2}$

21 Resuelva el sistema :
$$\begin{cases} x^2 + y = 5 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$$
e indique $x_0 + y_0$ mínimo , si $(x_0\,;\,y_0)$ es solución.

A) 5/2 B) $-5/4$ C) 4/5 D) 5/4 E) 3

22 Resuelva el sistema en N .
$$\begin{cases} xyz = 78 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 206 \end{cases}$$
y dé como respuesta $(x+y+z)$.

A) 18 B) 20 C) 30 D) 42 E) 8

23 Señale el número de soluciones del sistema :
$$\begin{cases} x^2 - 3x = y^2 + 3 \\ x + y^2 = -4 \end{cases}$$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

24 Determinar el número de soluciones de :
$$\begin{cases} \sqrt{3x}\left(1+\dfrac{1}{x+y}\right) = 2 \\ \sqrt{7y}\left(1-\dfrac{1}{x+y}\right) = 4\sqrt{2} \end{cases}$$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

25 Luego de resolver el sistema en R
$$\begin{cases} y^2+(x+z)^2 = 64 \\ y^2+(x-z)^2 = 25 \\ x^2+\left(y - z\sqrt{3}\right)^2 = 49 \end{cases}$$
indique un valor de : $x + y + z$.

A) 10/3 B) 9 C) $2+\sqrt{3}$ D) $\frac{1-\sqrt{2}}{2}$ E) 8b

26 Si : $2x - y = 1;\ 2y - z = 2$ y $2z - x = 3$, entonces $x + y + z$ es :

A) 6 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

27 Siendo :

$A=[-4\,;\,0\rangle;\ B=[-2\,;\,5];\ C=\langle 2\,;\,7]$, halle el número de valores enteros que pertenecen al intervalo $(A \cap B') - C$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) más de 4

28 Sea : $-1 < b < a < 0,\ a, b \in R$

De las proposiciones , indique cuáles son verdaderas.

I) $a^2 > b^2$
II) $a^2 > b^3$
III) $a^3 < b^3$
IV) $ab > 0$

A) Todas B) solo II C) II y IV
D) II y III E) II, III y IV

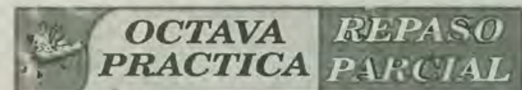
29 Sabiendo que $ab > 0 \wedge a > b$, a , $b \in R$, indique el número de proposiciones correctas :

I) $a^2 > b^2$ II) $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$
III) $a^3 > b^3$ IV) $a + b \geq 2\sqrt{ab}$

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

30 Si $x \in \langle 5\,;\,11]$, indique el número de valores enteros que puede tomar : $\dfrac{2x-1}{x-2}$

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) más de 3



01 Si $x \in \langle 0\,;\,2\rangle$, determine los números a y b tal que : $a < \dfrac{x^2+x}{x+1} < b$

A) 2 y 10/3 B) 0 y 2 C) $-1/3$ y 2

D) 0 y 8/3 E) 0 y 1/3

02 La desigualdad $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}>\frac{2}{x+y}$ se satisface cuando :

A) $x>y$ B) $x>0 \wedge y>0$ C) $x<0 \wedge y<0$
D) $x=y$ E) $x+y>0$

03 Sea : $a+b=4$, tal que $a;b \in \mathbb{R}^+$.
Halle el menor valor de f donde :

$$f=\sqrt{a^2+9}+\sqrt{b^2+9}$$

A) $4\sqrt{3}$ B) $2\sqrt{3}$ C) $\sqrt{2}$ D) $\sqrt{2}+1$ E) $5\sqrt{3}$

04 Si $x \in \langle -3;4\rangle$, halle la variación de :

$$4+2x-x^2$$

A) $[5;11]$ B) $[-11;5\rangle$ C) $\langle -11;5]$
D) $[-11;5]$ E) $[0;5]$

05 Determine el máximo valor de K, tal que

$$\left(a^2+\frac{4}{9a^2}\right)\left(b^2+\frac{25}{16b^2}\right)\geq K,\ a,\ b<0$$

A) 1 B) 0 C) 10/3 D) 40/3 E) 5/3

06 Si $x \in \mathbb{R}^+$, determine el mínimo valor de :

$$\frac{(x+3)(x+2)}{\sqrt{x^2+5x+2}}$$

A) 2 B) $2\sqrt{2}$ C) $4\sqrt{2}$ D) 4 E) 8

07 De las siguientes proposiciones, indique cuáles son verdaderas :

I) La variación de $(x^2+1)^2+2$ es $[2;+\infty\rangle$

II) La variación de : $x+\frac{1}{x}$ es $[2;+\infty\rangle$

III) $x^2+\frac{1}{x^2}\geq x+\frac{1}{x}, \forall x \in \mathbb{R}^+$

A) I y II B) II C) I y III D) Todas E) III

08 Si a, b, c son números reales no nulos, tal que $3(a^2+b^2+c^2)\geq \lambda(a+b+c)^2$, determine el mayor valor de λ.

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

09 Si a, b, c, d son números positivos, tal que

$(a+b+c+d)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)\geq n$, halle la variación de n.

A) $\langle -\infty;12\rangle$ B) $[16;+\infty\rangle$ C) $\langle 0;16]$
D) $\langle -\infty;16]$ E) $\{16\}$

10 Señale el mayor valor de λ, si se cumple $a^4+b^4+c^4+d^4\geq \lambda(abcd)$ para todo valor positivo de : a, b, c, y d.

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

11 Dadas las proposiciones :

I) El C. S. de $x^2>9$ es $\langle 3;+\infty\rangle$

III) $4<x^2<9$ tiene como C. S. $=\langle 2;3\rangle$

III) Al resolver $(x-3)(-x+1)>0$ se tiene C.S.$=\langle -\infty;1\rangle\cup\langle 3;+\infty\rangle$ indique el valor de verdad.

A) VVV B) VFV C) VVF D) FFF E) FVV

12 Luego de resolver :

$\frac{x^2+15}{2}\leq (x+1)^2-(x-1)^2$, se obtiene C.S.$=[a;b]$. halle $(a+b)$.

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

13 Determine el menor valor entero de a de modo que : $x^2-4x+ax>1; \forall x \in \mathbb{R}$

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) No existe

14 Si la ecuación : $3x^2-10x+c=0$, $c \in \mathbb{R}$ tiene raíces positivas, halle el intervalo de valores de

$$x^2-4x+ax>1; \forall x \in \mathbb{R}$$

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) No existe

15 Si $a>5$, indique el número de soluciones enteras que tiene : $ax^2+5\leq(5a+1)x$

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

16 Si se cumple que : $-x^2+nx\leq 2; \forall x \in \mathbb{R}$, entonces:

A) $n \in [-\sqrt{2};\sqrt{2}]$ B) $n \in \langle -2;2\rangle$
C) $n \in \langle -\infty;4]$ D) $n \in [-2;2]$
E) $n \in [-\sqrt{8};\sqrt{8}]$

17 Resuelva : $x^2+2ab<(a+2b)x$, donde $b>a>0$

A) $\langle -\infty;a\rangle\cup\langle 2b;+\infty\rangle$ B) $\langle a;2b\rangle$
C) $\left\langle \frac{b}{2};a\right\rangle$ D) $\langle -\infty;-2b\rangle\cup\langle -a;+\infty\rangle$
E) $\langle -2b;-a\rangle$

18 Si $[a;b]$ es el conjunto solución de :

$2x^2 \le \left(\sqrt{x}+1\right)^2+\left(\sqrt{x}-1\right)^2$, calcule $a+b$.

A) 0 B) 1 C) −1 D) $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ E) 2

19 Si $\langle 3;5\rangle$ es el cunjunto solución de:

$2x^2+\frac{a}{4}x+3b<8$, calcule $2a+3b$.

A) −22 B) −90 C) −16 D) 36 E) −26

20 Determine n, si el polinomio:

$P(x)=x^2-2x+n$ es menor que 1, $\forall x \in \mathbb{R}$

A) $[2;+\infty\rangle$ B) $\langle-\infty;1/2\rangle\cup[1/2;2]$

C) $\langle-2;2]$ D) $[-1;2]$ E) $\langle-\infty;2]$

21 Si $P(x)=(n-1)x^2+(n-1)x+1>0$, $\forall x\in\mathbb{R}$, determine el menor valor entero de n.

A) 1 B) 2 C) 0 D) 4 E) −1

22 Luego de resolver $x^4-3\le x^2$, indique la suma de las soluciones enteras.

A) 1 B) 2 C) 0 D) 4 E) 5

23 Señale cuántas soluciones enteras presenta la inecuación: $x^4+x^2+1<x^3$

A) 3 B) 4 C) 0 D) 6 E) 1

24 Resuelva: $(x^2-2)(x^3-5)x^2<0$

A) $\langle-\infty;-\sqrt{2}]\cup\langle\sqrt{2};\sqrt[3]{5}\rangle$

B) $\langle-\infty;-\sqrt{2}\rangle\cup[\sqrt{2};\sqrt[3]{5}\rangle$

C) $\langle-\infty;-\sqrt{2}\rangle\cup\langle\sqrt{2};\sqrt[3]{5}\rangle$

D) $\langle-\infty;\sqrt{2}\rangle\cup\langle\sqrt{2};\sqrt[3]{5}\rangle$

E) $\langle-\infty;-\sqrt{2}\rangle\cup[-\sqrt{2};\sqrt[3]{5}\rangle$

25 Resuelva: $(x^2-x)(x^3-1)^5>0$

A) $\langle0;1\rangle\cup[1;+\infty]$ B) $\langle0;1\rangle\cup\langle1;+\infty\rangle$

C) $\langle-\infty;0\rangle\cup\langle1;+\infty\rangle$ D) $\langle-\infty;-1\rangle\cup\langle1;+\infty\rangle$

E) $\langle-\infty;-1\rangle\cup\langle-1;0\rangle$

26 Al resolver: $(x-1)(x+a)(x^2+bx+c)>0$, el conjunto solución es:

$\langle-\infty;1\rangle\cup\langle1;2\rangle\cup\langle2;+\infty\rangle$

Calcule el menor valor de $a+b+c$.

A) 3 B) 1 C) −1 D) −2 E) −3

27 Al resolver:

$(\operatorname{sen}x+2)(3^x+5)(25-x^2)(x-1)\le0$,

se tiene el conjunto solución $[a;b]\cup[c;+\infty\rangle$

Calcule: $-a+b+c$

A) 10 B) 1 C) 11 D) 9 E) −1

28 Al resolver $(x-b)(x-c)(ax^2+ax-1)<0$ se obtiene como conjunto solución:

$\langle-\infty;b\rangle\cup\langle c;+\infty\rangle$, $b\ne c$ Indique $inf(A)$

A es el conjnuto formado por los valores de a.

A) −4 B) −3 C) −4/3 D) −3/4 E) 0

29 Al resolver la inecuación polinomial:

$(ax+2)(x-b)^{a+3}(x+c)^{a+5}\ge0$, el conjunto solución es $\langle-\infty;-c]\cup[b;+\infty\rangle$

Calcule el valor de: $a+c^a+b^a$, si $bc\ne0$

A) 2 B) 0 C) −2 D) 3 E) 5



NOVENA PRACTICA REPASO PARCIAL

01 Si $\left\langle a;\frac{1}{b}\right\rangle\cup\left\langle\frac{1}{c};d\right\rangle$ es el conjunto solución de: $x^4-7x^2+1<0$,

calcule: $\frac{1}{c}+\frac{1}{d}$

A) $-1-\sqrt{5}$ B) $-3+\sqrt{5}$ C) 0 D) 5 E) $\sqrt{7}-\sqrt{5}$

02 Resuelva la inecuación: $\frac{ax+1}{bx+1}\ge\frac{x+a}{x+b}$,

donde: $a>b>1$

A) $\langle-b;-1]$ B) $[-1/b;1]$ C) $-[-1;1]$

D) $\langle-\infty;-b\rangle\cup[-1;-1/b\rangle\cup[1;\infty\rangle$ E) $\langle-\infty;-b]$

03 Indique la cantidad de números enteros de conjunto $A\cap B$.

$A=\left\{x\in\mathbb{R}\Big/\frac{1}{x}<1\right\}$

$B=\left\{x\in\mathbb{R}\Big/\frac{20}{x^2+3x+2}>1\right\}$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

04 Resuelva $\frac{(4x+8)(x^2-1)}{x-1}<-1$

A) $\left\langle-\infty;-\frac{3}{2}\right\rangle$ B) $\left\{-\frac{3}{2}\right\}$ C) $\left\langle-\frac{3}{2};+\infty\right\rangle$ D) R E) ϕ

05 La siguiente inecuación:

$2x-\frac{9}{x-3}>x-\frac{5}{x-3}$ se satisface para:

A) $-2<x<2$ ó $x>3$
B) $-1<x<3$ ó $x>4$
C) $-3<x<1$ ó $2<x<3$
D) $-10<x<3$
E) Todos los números reales diferentes de 3.

06 Dados :

$$A=\left\{x\in\mathbb{R}\Big/\frac{1}{x-1}<\frac{1}{x-2}\right\}$$

$$B=\left\{x\in\mathbb{R}\Big/3x^2-x+1>0\right\}$$

Halle: $(A\cap B)^C$

A) $[1;2]$ *B)* $\langle 1;2\rangle$ *C)* $[2;3]$
D) $\langle 2;3\rangle$ *E)* $\langle-\infty;1\rangle\cup\langle 2;+\infty\rangle$

07 Dada la inecuación : $\dfrac{(x-1)(x+a)}{x^2+bx+c}>0$

Si el conjunto solución es : $C.S.=\mathbb{R}-\{1;2\}$, calcule el mayor valor de : $a+b+c$.

A) -1 *B)* -3 *C)* 3 *D)* 0 *E)* -4

08 Al resolver : $\dfrac{1}{\left(\alpha x^2+(3-2\alpha)x-6\right)}\geq 0$ se obtiene como conjunto solución $\langle 1;\beta\rangle$

Indique el valor de $\alpha\beta$.

A) -6 *B)* 13 *C)* 4 *D)* 5 *E)* 3

09 Al resolver : $\dfrac{ax^3-(10+a)x^2+8x+2}{x-1}\geq 0$

se obtiene $\langle-\infty;b]\cup[c;+\infty\rangle-\{k\};k>c$

Calcule el valor de : $b^{-1}+c^{-1}+k+a$

donde $\in Z\wedge a<14$

A) 2 *B)* -2 *C)* 4 *D)* 4 *E)* 9

10 Indique el valor de K de modo que la solución de la inecuación :

$\dfrac{2x-1}{x+2}>K$ sea $\langle-\infty;-2\rangle\cup\langle 3;+\infty\rangle$

A) 40 *B)* 20 *C)* 3 *D)* 4 *E)* 1

11 Al resolver :

$$\frac{x^2+x-1}{x^2+1}+\frac{x^2+x}{x^2+2}+\frac{x^2+x+1}{x^2+3}\leq 3$$

se obtiene el conjunto solución $\langle-\infty;a]\cup[b;c]$

Calcule el valor de : $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}+c$

A) -1 *B)* 0 *C)* 3/2 *D)* 4 *E)* 5

12 Resuelva :

$$\left(1-\frac{x}{1+x}\right)\left(1+\frac{x}{1-x}\right)\left(2-\frac{1+2x^2}{1+x^2}\right)\left(4-\frac{3+4x^2}{1+x^4}\right)\geq 1$$

Indique la cantidad de cifras de la mayor solución .

A) No se puede determinar *B)* 1 *C)* 0
D) 2 *E)* 3

13 Halle el intervalo en el cual debe estar comprendido n para que la inecuación :

$$\frac{3(2n+1)x^2-2(4n+5)x+5n+9}{5x^2-6x+5}<n+2$$

se verifique para todo valor de x.

A) ϕ *B)* $\langle-2;3\rangle$ *C)* $\langle 0;4\rangle$ *D)* $\langle-\infty;7\rangle$ *E)* $\mathbb{R}$

14 Sobre el número de elementos del conjunto

$M=\left\{(x;y)\in\mathbb{R}^2/\sqrt{y-x}+\sqrt{x-y}=x^2-y^2\right\}$, se puede afirmar que :

A) en realidad no tiene elementos .
B) tiene 1 elemento .
C) tiene 2 elementos .
D) tiene 3 elemento .
E) tiene infinitos elementos

15 Encuentre el valor de x en la ecuación :

$$\sqrt{x-1+2\sqrt{x-2}}+\sqrt{x+2+4\sqrt{x-2}}=9$$

A) 3 *B)* 5 *C)* 6 *D)* 11 *E)* 18

16 Sea **A** el conjunto definido por :

$$A=\left\{x\in\mathbb{R}/\sqrt{3x+1}-\sqrt{x-1}=\sqrt{2x-6}\right\}$$

I) $n(A)>1$
II) $\exists x\in A$ tal que $x^2+1>5$
III) $\exists x_1;x_2$ tal que $x_1+x_2=6$
IV) $\exists x_1\in A$ tal que $\sqrt{5x_1}\in\mathbb{N}$
V) $n(A)=1$

¿Cuántas son verdaderas?

A) 5 *B)* 4 *C)* 3 *D)* 2 *E)* 1

17 Según la ecuación :

$\sqrt[3]{x+\sqrt{x^2+1}}+\sqrt[3]{x-\sqrt{x^2+1}}=\sqrt{3}$, encuentre x

A) $\sqrt{3}$ *B)* $2\sqrt{3}$ *C)* $3\sqrt{3}$ *D)* $\dfrac{3\sqrt{3}}{3}$ *E)* $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

18 Si x_0 es la solución de la ecuación :

$$\frac{2}{\sqrt{8+2\sqrt{15}}}+\frac{1}{\sqrt{5+2\sqrt{x}}}=\frac{3}{\sqrt{7+2\sqrt{10}}},$$

A) 5 *B)* 10 *C)* 17 *D)* 26 *E)* 37

19 Si :

$$\frac{\sqrt{x+ab}+\sqrt{x-ab}}{\sqrt{x+ab}-\sqrt{x-ab}}=\frac{3a}{b},\ (a>b>0).$$

determine el conjunto solución .

A) $\left\{\dfrac{9a^2+b^2}{3}\right\}$ B) $\left\{\dfrac{9a^2+b^2}{6ab}\right\}$ C) $\left\{\dfrac{9a^2+b^2}{ab}\right\}$

D) $\left\{\dfrac{9a^2+b^2}{6}\right\}$ E) $\left\{\dfrac{9a^2+b^2}{2ab}\right\}$

20 Sean : $\sqrt[4]{x-1};\sqrt[4]{x+4}$ y $\sqrt[4]{2x+15}$ los lados de un triángulo rectángulo , determine un cateto.

A) $\sqrt{10}$ B) $\sqrt{3}$ C) $\sqrt{5}$ D) $\sqrt{7}$ E) $\sqrt{8}$

21 ¿Qué podemos afirmar de la siguiente ecuación?

$$\sqrt{2x+1}+\sqrt{2x+2}+...+\sqrt{2x+10}=\sqrt{x}+$$
$$+\sqrt{x+1}+...+\sqrt{x+9}$$

A) No tiene solución .
B) Tiene infinitas soluciones .
C) Tiene dos soluciones .
D) Tiene una solución .
E) Tiene 55 soluciones .

22 Dada el conjunto :

$$\psi=\left\{x\in\mathbb{Z}/\sqrt{x+1}+\sqrt{x+4}\in\mathbb{Z}\right\},$$

determine $n(\psi)$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

23 Sean x e y números enteros positivos , tales que $\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{\sqrt{y}}+\dfrac{1}{\sqrt{xy}}=1$, determine $x+y$.

A) 5 B) 13 C) 12 D) 16 E) 6

24 Resuelva la inecuación irracional :

$$\sqrt{x-1}+\frac{1}{\sqrt{x-1}+1}\leq 1$$

A) $\langle 0;2]$ B) $[1;2]$ C) $\langle 1/2;2]$

D) $[1;1]$ E) $[1;+\infty\rangle$

25 Dado el conjunto :

$$F=\left\{x\in\mathbb{Z}/x+2\sqrt{5-4x}>5\right\},$$

determine $n(F\cap\mathbb{Z})$

A) 6 B) 5 C) 3 D) 4 E) 7

26 Resuelva la inecuación irracional :

$$\sqrt{x+2}\geq 4-x$$

A) $[2;+\infty\rangle$ B) $[4;+\infty\rangle$ C) $[-2;+\infty\rangle$

D) $[2;4]$ E) $[-2;4]$

27 Sabiendo que el conjunto solución de

$$\sqrt[4]{x-3}+|x-3|\leq|2-x| \text{ es } [a;b],$$

determine $(a+b)$.

A) 7 B) 5 C) 6 D) 8 E) 4

28 Resuelva : $\left||x|-|2|\right|=sen\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$

A) $[-1;3]$ B) $-\{-3;-1;3;1\}$ C) $\{3;1\}$

D) $\{1;-1\}$ E) $\{-3;-1\}$

29 Si $|x-8|=p\ ;p>0$, donde $x\leq 8$, calcule :

$$|x+p|$$

A) 0 B) 22 C) 1 D) 6 E) 8

DÉCIMA PRACTICA REPASO PARCIAL

01 ¿Cuántas soluciones tiene :

$$|x^2-2x+5|=x^2-\frac{1}{2}?$$

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

02 Halle el número de soluciones de :

$$\left|5-|x|\right|=|3x-2|$$

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

03 Halle la suma de soluciones de la ecuación :

$$\left|2-|x|^2\right|=|8x^2-9|$$

A) 8 B) 16 C) 0 D) 4 E) 64

04 Resuelva :

$$|x+1|+|x+2|+2=\left||2x+3|+2\right|$$

A) $\langle-\infty;-2\rangle\cup\langle 1;+\infty\rangle$ B) $\langle-2;-1\rangle$

C) $\langle-\infty;-2]\cup[-1;+\infty\rangle$ D) $[-2;-1]$

E) $\mathbb{R}$

05 Halle la suma de soluciones de la ecuación :

$$|2x-6|+|x+2|=7$$

A) 11/3 B) 14/3 C) 17/2 D) 0 E -1

06 Resuelva : $x^2+x+3\leq|2x^2-4x+9|$

A) $[2;3]$ B) $\mathbb{R}$ C) $[3;+\infty\rangle$

D) $[2;+\infty\rangle$ E) $\mathbb{R}-\langle 2;3\rangle$

07 Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones :

I) Si $|x| < -8$, entonces $-8 < x < 8$

II) La ecuación $x^2 - 2|x| + 3 = 0$ no tiene solución.

III) Si $|x+y| = |x| + |y|$, entonces $x, y \in \mathbb{R}^+$

IV) Si $|xy| = xy$, entonces $x, y \in \mathbb{R}^+$

A)FFFF *B) VVFF* *C) FVVV* *D) FVVF* *E) FVFF*

08 Si $\langle -\infty ; 2b\rangle \cup [3b ; +\infty\rangle - \{a\}$ es el conjunto

solución de : $\dfrac{4-|x-2|}{3-|x-1|} \geq 0$,

halle : $a + b$.

A) –2 *B) 0* *C) 1* *D) 2* *E)3*

09 Sean :

$A = \{x \in R / |x^2 - 2x - 3| < 3x - 3\}$

$B = \{x \in R / |x - 2| \geq 2x - 3\}$

Calcule : $A \cap B$.

A) $\langle 2;5\rangle$ *B)* $\langle -\infty ; 5/3\rangle$ *C)* ϕ *D)* $\langle 2 ; 5/3]$ *E) 9*

10 Dadas las siguientes proposiciones ¿Cuáles son verdaderas ? .

$I) a;b \in R / a > 0 \wedge |b| < 1 \Rightarrow (ab + a + 1) > 1$

$II) si : a;b \in R^+ \rightarrow \left(\dfrac{5ab}{a^2 + b^2 + 3ab}\right) \leq 1$

$III) si: 3 + a^2 - a^4 < M; \forall a \in R \Rightarrow M \geq 3$

A)FFF *B)VVF* *C) FVF* *D) VVF* *E)VVV*

11 Resolver :

$$\left(\sqrt{3+\sqrt{8}}\right)^x + \left(\sqrt{3-\sqrt{8}}\right)^x \leq 34$$

A) $-3 \leq x \leq 3$ *B)* $\sqrt{8} \leq x \leq 2\sqrt{8}$ *C)* $-4 \leq x \leq 4$

D) $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$ *E)* $-\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3}$

Sean **P** y **Q** conjunto tales que :

Si $p \in P$, entonces $p \in Q$. Luego se puede afirmar que :

A) Si $-3 \in Q$ *, entonces* $-3 \in P$

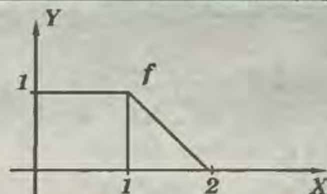
B) Si $13 \notin P$ *, entonces* $13 \notin Q$

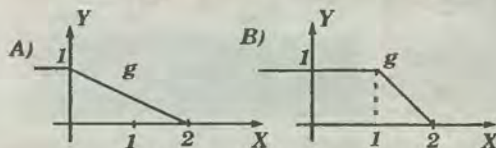
C) Si $10 \notin Q$*, entonces* $10 \notin P$

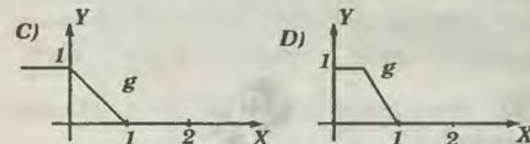
D) Si $0{,}10 \in Q$ *, entonces* $0{,}10 \notin P$

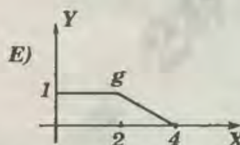
E) Si $1 \notin P$ *, entonces* $1 \in Q$

12 Indique la gráfica de $g(x) = f(x + |x|)$, si la gráfica de *f* es :









13 Dada la siguiente función :

$$f(x) = 4\sqrt{x} - x; x \in [0;1]$$

Determine $f^*(x)$, donde f^* es la inversa de f.

A) $f^*(x) = \left(2 - \sqrt{4-x}\right)^2$ *B)* $f^*(x) = \left(3 - \sqrt{4-x}\right)^2$

C) $f^*(x) = \left(2 + \sqrt{4-x}\right)^2$ *D)* $f^*(x) = \left(3 + \sqrt{4-x}\right)^2$

E) $f^*(x) = \left(4 - \sqrt{4-x}\right)^2$

14 Al resolver la ecuación :

$$x + Log_{1424}\left(1 + 2^x\right) = xLog_{1424}712 + Log_{1424}72$$

entonces podemos decir , que el número de soluciones es :

A) 0 *B) 1* *C) 2* *D) 3* *E)4*

15 Indique la verdad o falsedad de los siguientes enunciados :

I) Sea :

$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d; a \neq 0, d \neq 0$

si *P* tiene tres raíces reales , entonces $P(\frac{1}{x})$ tendrá las mismas raíces.

II) Todo polinomio complejo siempre tiene raíces complejas y sus respectivas conjugadas .

III) Si la suma de las raíces de un polinomio es

racional , entonces cada una de ellas también es racional

A)FFF *B) VVF* *C)FVV* *D) VVF* *E) VVV*

16 Calcule el conjunto solución de la siguiente inecuación :

$$\left(x-2^{-2}\right)^2+4x+2<0$$

A) $\left\langle -\frac{13}{4};-\frac{3}{4}\right\rangle$ B) $\left\langle -\frac{13}{4};-\frac{5}{4}\right\rangle$ C) $\left\langle -\frac{11}{4};-\frac{3}{4}\right\rangle$

D) $\left\langle -\frac{11}{4};-\frac{3}{4}\right\rangle$ E) $\left\langle -\frac{9}{4};-\frac{3}{4}\right\rangle$

17 Sea Y un número real no nulo ;determine :

$(E+L)-(T+U)$, si E , L , T y U

satisfacen el siguiente producto de matrices :

$$\begin{pmatrix} Y & 0 \\ T & U \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & L \\ T & U \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} Y & 0 \\ E & L \end{pmatrix}$$

A)0 *B) 1* *C) 2* *D) 3* *E) 4*

18 Sea $P(x)=x^2+x+1$ y la sucesión :

$S_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\left[P(x)\right]^k$, Entonces el menor valor de $S_n(x)$ cuando n es arbitrariamente grande , es :

A)0 *B) 4* *C) 8*
D) arbitraria muy grande *E)no existe*

19 Sean los conjuntos :

$V=\{A\ ;E\ ;I\ ;O\ ;U\}$

$B=\{1\ ;2\ ;3\ ;4\ ;5\ ;6\}$

se desea elaborar placas (para autos) de la forma $v_1v_2b_1b_2b_3b_4$ donde $v_k\in V, b_j\in B$ de manera que no existan símbolos repetidos entonces el número total de placas diferentes será :

A) 480 *B) 32250* *C) 1321* *D) 32400* *E)7200*

20 Demostrar que la ecuación :

$$x^2+y^2-z^2-x-3y-z-4=0$$

posee infinitas soluciones en números enteros.

21 Sean a,b,c números reales no nulos y $a\neq b$. Probar que si las ecuaciones $x^2+ax+bc=0$ y $x^2+bx+ca=0$ tienen una raíz común, entonces las restantes raíces verifican la ecuación $x^2+cx+ab=0$.

22 Sean x, y, z números reales positivos.

I) Si $x+y+z\geq 3$, ¿se verifica necesariamente que $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\leq 3$?

II) Si $x+y+z\leq 3$, ¿se verifica necesariamente que $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\geq 3$?

23 Se pide encontrar todos los números enteros positivos n tales que 3^n+5^n es múltiplo de $3^{n-1}+5^{n-1}$

24 Sean x_1 , x_2 las raíces del polinomio $P(x)=3x^2+3mx+m^2-1$, siendo m un número real. Probar que $P(x_1^3)=P(x_2^3)$.

25 Encontrar todas las funciones $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ tales que:

$$x^2\times f(x)+f(1-x)=2x-x^4$$

26 Un grupo de chicos y chicas han comido en un restaurante en el que sólo se sirven pizzas cortadas en *12* raciones . Cada chico comió *6* ó *7* raciones y cada chica *2* ó *3* raciones.
*Se sabe que *4* pizzas no fueron suficientes y que con *5* pizzas hubo de sobra.
Calcular el número de chicos y de chicas del grupo.

27 ¿Cuántas ternas ordenadas de números naturales (a, b, c) distintos de la unidad hay tales que $a\times b\times c=7^{39}$?

28 Demostrar que si entre los infinitos términos de una progresión aritmética de números enteros positivos hay un cuadrado perfecto, entonces infinitos términos de la progresión son cuadrados perfectos.

29 Sean a y b enteros. Demostrar que la ecuación: $(x-a)(x-b)(x-3)+1=0$ admite a lo sumo una solución entera.

30 Dado el polinomio:

$p(x)=x^3+Bx^2+Cx+D$, probar que si el cuadrado de una de sus raíces es igual al producto de las otras dos, entonces $B^3D=C^3$

31 Considérese la sucesión definida como

$a_1=3$, y , $a_{n+1}=a_n+a_n^2$.

Determínese las dos últimas cifras de a_{2000}

32 ¿Cuántos números, comprendidos entre *1000* y *9999*, verifican que la suma de sus cuatro dígitos es mayor o igual que el producto de los mismos? ¿Para cuántos de ellos se verifica la igualdad?

33 Sean r, s, u, v números reales cualesquiera. Probar que: $\min\left\{r-s^2, s-u^2, u-v^2, v-r^2\right\} \leq \frac{1}{4}$.

34 Se consideran las funciones reales de variable real $f(x)$ de la forma : $f(x) = ax + b$, siendo a y b números reales.
¿Para qué valores de a y b se verifica $f^{2000}(x) = x$ para todo número real x.

35 Se sabe que el polinomio $P(x) = x^3 - x + k$ tiene tres raíces que son números enteros.
Determínese el número k.

36 En la orilla de un río de *100* metros de ancho está situada una planta eléctrica y en la orilla opuesta, y a *500* metros río arriba, se está construyendo una fábrica . Sabiendo que el río es rectilíneo entre la planta y la fábrica, que el tendido de cables a lo largo de la orilla cuesta a *S/.9* cada metro y que el tendido de cables sobre el agua cuesta a *S/.15* cada metro, ¿cuál es la longitud del tendido más económico posible entre la planta eléctrica y la fábrica?.

37 Halla todos los pares de números naturales x, y $(x < y)$ tales que la suma de todos los números naturales comprendidos estrictamente entre ambos es igual a *1999*.

38 Sean a, b y c números reales no nulos (con suma no nula) tales que: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}$.

Prueba que también se verifica:

$$\frac{1}{a^{1999}}+\frac{1}{b^{1999}}+\frac{1}{c^{1999}}=\frac{1}{a^{1999}+b^{1999}+c^{1999}}$$

39 Se representa por Z el conjunto de todos los enteros. Hallar todas las funciones $f : Z \to Z$, tales que para cualesquiera x, y enteros se verifica :

$$f(x+f(y))=f(x)-y.$$

40 ¿Existe alguna potencia de 2 que al escribirla en el sistema decimal tenga todos sus dígitos distintos de cero y sea posible reordenar los mismos para formar con ellos otra potencia de 2?. Justificar la respuesta

CLAVES

PRIMERA - REPASO PARCIAL				
01) C	02) B	03) C	04) A	05) D
06) B	07) D	08) C	09) A	10) C
11) E	12) C	13) A	14) A	15) E
16) B	17) C	18) A	19) E	20) A
21) C	22) A	23) B	24) E	25) B
26) C	27) D	28) A	29) D	30) D

SEGUNDA - REPASO PARCIAL				
01) E	02) C	03) E	04) C	05) B
06) A	07) C	08) B	09) A	10) B
11) C	12) D	13) B	14) A	15) E
16) D	17) D	18) B	19) D	20) D
21) D	22) C	23) C	24) E	25) A
26) A	27) B	28) D	29) C	30) B

TERCERA - REPASO PARCIAL				
01) A	02) B	03) C	04) A	05) A
06) E	07) D	08) B	09) A	10) E
11) A	12) C	13) B	14) C	15) D
16) A	17) D	18) E	19) C	20) A
21) C	22) C	23) D	24) B	25) B
26) B	27) B	28) E	29) B	30) C

CUARTA - REPASO PARCIAL				
01) A	02) A	03) D	04) C	05) C
06) B	07) B	08) C	09) A	10) C
11) D	12) C	13) C	14) C	15) E
16) C	17) C	18) D	19) B	20) C
21) B	22) B	23) E	24) B	25) A
26) D	27) E	28) E	29) D	30) E

QUINTA - REPASO PARCIAL				
01) B	02) C	03) B	04) C	05) C
06) C	07) C	08) E	09) A	10) D
11) B	12) A	13) A	14) A	15) D
16) C	17) C	18) E	19) B	20) A
21) A	22) D	23) C	24) B	25) D
26) D	27) E	28) E	29) B	30) A

SEXTA - REPASO PARCIAL				
01) D	02) D	03) E	04) D	05) E
06) D	07) E	08) C	09) C	10) B
11) E	12) E	13) C	14) B	15) B
16) A	17) A	18) C	19) C	20) B
21) B	22) A	23) B	24) B	25) A
26) B	27) C	28) A	29) D	30) E

SÉPTIMA - REPASO PARCIAL				
01) D	02) B	03) D	04) E	05) B
06) C	07) E	08) A	09) D	10) B
11) B	12) D	13) E	14) A	15) D
16) E	17) E	18) E	19) E	20) E
21) D	22) B	23) B	24) B	25) E
26) E	27) B	28) C	29) C	30) A

OCTAVA - REPASO PARCIAL				
01) B	02) B	03) D	04) C	05) C
06) D	07) E	08) A	09) D	10) D
11) D	12) *	13) D	14) E	15) B
16) D	17) E	18) B	19) D	20) B
21) A	22) A	23) C	24) C	25) C
26) B	27) E	28) C	29) A	30) A

NOVENA - REPASO PARCIAL				
01) C	02) D	03) D	04) E	05) B
06) A	07) A	08) A	09) E	10) E
11) D	12) *	13) A	14) A	15) E
16) D	17) C	18) C	19) E	20) D
21) B	22) A	23) A	24) B	25) D
26) C	27) A	28) A	29) B	30) E

DÉCIMA - REPASO PARCIAL				
01) B	02) C	03) C	04) C	05) B
06) E	07) A	08) B	09) C	10) D
11) C	12) C	13) C	14) A	15) B
16) A	17) B	18) A	19) B	20) C



OBJETIVOS :

* Conocer los conceptos de sucesión y de término general de una sucesión.

* Reconocer las sucesiones que siguen una ley de formación.

* Reconocer las progresiones distinguiendo las aritméticas de las geométricas.

* Determinar la diferencia de una progresión aritmética y la razón de una progresión geométrica a partir de dos términos consecutivos.

* Calcular términos específicos y generales de progresiones aritméticas y progresiones geométricas.

* Determinar el valor de la suma de términos de progresiones aritméticas y progresiones geométricas y entender la demostración de las fórmulas correspondientes.

* Identificación de una progresión aritmética o una progresión geométrica a partir de una serie de términos consecutivos.

* Conocer la Interpolación de medios aritméticos y geométricos.

INTRODUCCIÓN :

En álgebra la palabra progresión se emplea casi con igual sentido que en el lenguaje común . Por ejemplo, supongamos que pedimos a un grupo de niños formarse en fila india (alineados uno detrás de otro). Empezamos a repartir caramelos: al primero le damos dos ; al segundo, *5* ; al tercero , *8* caramelos ; al cuarto , *11*, y así sucesivamente hasta haber entregado lo que le corresponde al último niño de la fila .

Ya sea que repartamos caramelos de *3* en *3* a un grupo de niños o contemos las estrellas de *2* en *2*. aparece nitidanente la nocion de progresión.

Es claro que debemos disponer de una cantidad suficiente de caramelos para poder llevar a cabo el reparto. Si se asume que dicha cantidad es finita , es posible determinarla, porque el número de alumnos que integran al grupo (sea grande o pequeño) es finito. Cabe señalar que los números , los cuales indican la cantidad de caramelos entregado a cada niño, están ordenados de manera creciente ; es decir forman una ***progresión*** cuyo número de términos va a ser limitado y dependiente del número de niños. Estamos frente a una ***progresión finita.***

Si en una noche clara , mirando el oscuro cielo estrellado , empezamos a contarlas de dos, cuatro , seis , ocho , diez , doce , ...y no llegaramos a contarlas todas , aún teniendo un poderoso telescopio, su número sería infinito y como estamos ***enumerando,*** los términos de dicho infinito será denominado infinito numerable.

Por ello , cuando la ***progresión*** tiene un número finito de terminos, se denomina ***progresión finita*** y cuando la ***progresión*** tiene un número infinito de terminos, se denomina ***progresión infinita***

SUCESIÓN

Una sucesión es un conjunto de números que presenta un cierto orden de acuerdo a una ley de formación .

En términos de conjunto las sucesiones se expresan como :

$$\{a_n\}_{n\in N} : a_1 ; a_2 ; .....; a_n$$

Toda sucesión debe ser determinado a través de su término e-nésimo (a_n), es decir :

• Para $n = 1 \to a_1$

• Para $n = 2 \to a_2$

• Para $n = 3 \to a_3$

⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮

• Para $n = k \to a_k$

En esta notación usaremos en adelante . El número a_1 es el primer término de la sucesión: a_2 es el segundo : ...; a_n el enésimo término (***término general***) de la sucesión y los números *1; 2 ; .... ; n* indican el orden .

Las sucesiones numéricas se presentan en la siguiente forma :

I) DIRECTAMENTE MEDIANTE LA REGLA DE CORRESPONDENCIA :

EJEMPLO :

$a_n = 3n$; de aquí cada término

$\{a_n\}: 3\times 1;\ 3\times 2;\ 3\times 3;\ 3\times 4;......$

II) MEDIANTE UNA FÓRMULA RECURSIVA :

denominado método recurrente que permite calcular el término general de la sucesión por los precedentes que dan unos términos iniciales

EJEMPLOS :

Sea : $a_n = n^2 + a_{n-1}\ ;\ a_1 = 1$

Luego :

Para $n=2 \to a_2 = 2^2 + a_1 \to a_2 = 4+1 = 5$;

Entonces : $a_2 = 5$

Para $n=3 \to a_3 = 3^2 + a_2 \to a_3 = 9+5 = 14$;

Entonces : $a_3 = 14$; ...... y así sucesivamente .

III) MÉTODO DESCRIPTIVO :

En algunos casos se da en forma verbal , es decir describiendo sus términos .

EJEMPLO :

La sucesión $\{a_n\}$ donde a_n es el n-ésimo número elevado al cubo :

$$a_1 = 1^3\ ;\ a_2 = 2^3\ ;\ a_3 = 3^3\ ;.....;\ a_n = n^3$$

CLASIFICACIÓN DE LAS SUCESIONES

Atendiendo al número de términos las sucesiones pueden ser :

I) SUCESIONES FINITAS :

Son aquellas que tienen un número limitado de términos .

EJEMPLO :

$$\{a_n\}: 2;4;6;8;16$$

II) SUCESIONES INFINITAS :

Son aquellas cuya cantidad de términos es ilimitado.

EJEMPLO :

$$\{a_n\}_{n\in N}: \frac{1}{2};\frac{1}{3};\frac{1}{4};\frac{1}{5};...$$

OBSERVACIÓN :

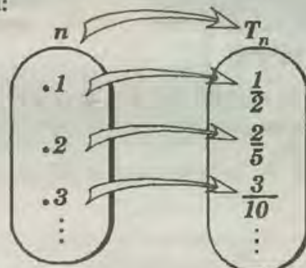
Una sucesión consiste en escribir el término enésimo (a_n ó T_n), de modo que dependa de los valores que tome el índice "n".

EJEMPLO :

Dado : $T_n = \dfrac{n}{n^2+1}$; si le damos valores a $n : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; .....$, obtendremos :

n	1	2	3	...	k	...
T_n	$\frac{1}{1^2+1}=\frac{1}{2}$	$\frac{2}{2^2+1}=\frac{2}{5}$	$\frac{3}{3^2+1}=\frac{3}{10}$		$\frac{k}{k^2+1}$	

O también:



EJEMPLO 1 :

Determinar los 3 primeros términos de la sucesión cuyo término enésimo es : $a_n = 7 - 2n^2$

RESOLUCIÓN :

* Asignando valores a "n", así :

I) Para : $n = 1 \to a_1 = 7 - 2(1^2) = 5$

II) Para : $n = 2 \to a_2 = 7 - 2(2^2) = -1$

III) Para : $n = 3 \to a_3 = 7 - 2(3^2) = -11$

* Luego lo pedido será : $5\ ; -1$ y -11 .

EJEMPLO 2 :

Determinar la Ley de formación de la siguiente sucesión :

$$\{a_n\}_{n\in N}: \frac{1}{5}\ ;\ \frac{4}{6}\ ;\ \frac{9}{7};\ ....$$

RESOLUCIÓN :

* Para determinar la Ley de formación , debemos relacionar adecuadamente cada término con el lugar que ocupa en la sucesión; es decir el "a_1" con 1 ; "a_2" con 2 ; "a_3" con 3 y así sucesivamente .

* Luego analizar la sucesión dada , se obtendrá:

* $a_1 = \dfrac{1}{5}$ ó $a_1 = \dfrac{1^2}{1+4}$

* $a_2 = \dfrac{4}{6}$ ó $a_2 = \dfrac{2^2}{2+4}$

* $a_3 = \dfrac{9}{7}$ ó $a_3 = \dfrac{3^2}{3+4}$

⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮

* Entonces la Ley de Formación o término general , será : ***Rpta :*** $a_n = \dfrac{n^2}{n+4}$

EJEMPLO 3 :

Determinar el término del lugar **2006** , en la siguiente sucesión :

$$\left\{a_n = \frac{n^2-1}{n-1}\right\} n \in N$$

RESOLUCIÓN :

* Se le pide a_{2006}, es decir a "n" se le debe asignar el valor **2006**, luego :

$$a_{2006} = \frac{2006^2-1}{2006-1} \ldots\ldots \left[\begin{array}{l}\text{Pero por diferencia de cuadrados :}\\ 2006^2-1=2006^2-1^2\\ =(2006+1)(2006-1)\end{array}\right]$$

$$\Rightarrow a_{2006} = \frac{(2006+1)(2006-1)}{2006-1} = 2007$$

EJEMPLO 4 :

Sea la sucesión:

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \; ; a_1 = 2 \wedge a_2 = 3$$

calcular: "a_4"

RESOLUCIÓN :

* Como ya tenemos "a_1" y "a_2", entonces hagamos: $n=3$, luego :

$$a_3 = a_2 + a_1 \rightarrow a_3 = 3+2 \rightarrow a_3 = 5$$

* Ahora para $n=4$:

$$a_4 = a_3 + a_2 \rightarrow a_4 = 5+3 = 8 \rightarrow a_4 = 8$$

$$\Rightarrow \textbf{Rpta :}\; a_4 = 8$$

EJEMPLO 5 :

Sea la sucesión : $\{T_n\} : \frac{5}{2}; \frac{10}{3}; \frac{15}{4}; 4; \ldots\ldots$

Calcular "k", si : $T_k = \frac{9}{2}$

RESOLUCIÓN :

* Colocando los términos en función del lugar que ocupan, se obtendrá:

$$\{T_n\} : \frac{5\times1}{1+1}; \frac{5\times2}{2+1}; \frac{5\times3}{3+1}; \frac{5\times4}{4+1}; \ldots; \frac{5n}{n+1}$$

* Luego de el otro : $T_k = \frac{9}{2}$

$$\Rightarrow \frac{5k}{k+1} = \frac{9}{2} \Rightarrow 10k = 9k+9 \Rightarrow k = 9$$

PROGRESIÓN ARITMÉTICA (P. A.)

Son aquellas sucesiones en las que se cumple que cualquier término , después del primero es igual al anterior más una cantidad constante llamada razón (r) o diferencia .

NOTACIÓN :

$$\div a_1 . a_2 . a_3 \ldots\ldots a_{n-1} . a_n$$

$$\div a_1 .(a_1+r).(a_2+r) \ldots\ldots [a_1+(n-1)]$$

Símbolos de una progresión aritmética :

- P.A. : Significa progresión aritmética
- $\div$: Inicio de una P. A.
- a_1: Primer término de la P. A.
- a_n: Último término de la P. A.
- n : Número de términos de la P. A.
- r : Razón o diferencia constante .
- S_n: Suma de los n primeros términos de una P.A.
- m : Medios de una P. A.

EJEMPLO :

$$\underset{a_1}{3} \; ; \underset{a_2}{7} \; ; \underset{a_3}{11} \; ; \underset{a_4}{15} \; ; \underset{a_5}{19} \; ; \underset{a_6}{23}$$

$+4 \quad +4 \quad +4 \quad +4 \quad +4$

Este ejemplo es una progresión aritmética porque los términos van avanzando de **4** en **4**, esta diferencia constante se llama razón .

RAZÓN ARITMÉTICA (r) :

Se obtiene restando un término cualquiera de la progresión con su término anterior.

$$\boxed{r = a_n - a_{n-1}}$$

* Si: $r>0$, ***la progresión es creciente .***
* Si: $r<0$, ***la progresión es decreciente .***
* Si: $r=0$, ***la progresión es trivial .***

EJEMPLO 1 :

* De : $5 ; 8 ; 11 ; 14 ; 17$
* Entonces : $r = 17-14 = 14-11 = 11-8 = 3$

EJEMPLOS :

* De : $20 ; 13 ; 6 ; -1 ; \ldots$
* Entonces : $r=-1-6=6-13=13-20=-7$

TÉRMINO CUALQUIERA (a_n) :

Un término cualquiera es igual al primero más el número de términos disminuido en uno, multiplicado por la razón . Así tendremos :

$$\boxed{a_n = a_1 + (n-1)r}$$

EJEMPLO 1 :

* Hallar el vigésimo segundo término de :

$$22 ; 29 ; 36 ; 43 ; \ldots$$

RESOLUCIÓN:

* Datos : $n=22;\ a_1=22;\ r=7$

* Luego : $\boxed{a_n=a_1+(n-1)r}$

$\rightarrow a_{22}=22+(21)7=22+147=169$

EJEMPLO 2 :

En : $2\ ;\ 8\ ;\ 14\ ;\ ....$ Calcular el sexto y el décimo tercer término .

RESOLUCIÓN :

* Se tiene : $a_1=2;\ r=6$

$\Rightarrow a_6=a_1+(6-1)r\rightarrow a_6=2+5\times6=32$

$\Rightarrow a_{13}=a_1+(13-1)r\rightarrow a_{13}=2+12\times6=74$

NÚMERO DE TÉRMINO (n):

$$\boxed{n=\frac{a_n-a_1}{r}+1}$$

EJEMPLO :

Hallar el número de términos de : *18;21;24;27;...; 981*

RESOLUCIÓN :

* Datos : $a_n=981\ ;\ a_1=18;\ r=3$

* Luego :

$$n=\frac{a_n-a_1}{r}+1=\frac{981-18}{3}+1\rightarrow n=322$$

SUMA DE LOS "n" PRIMEROS TÉRMINOS DE UN P. A. (S_n)

La suma de los términos de una *P. A.* es igual al producto de la semisuma de los extremos por el número de términos .

$$\boxed{S_n=\left(\frac{a_1+a_n}{2}\right)n}$$

También : $\boxed{S_n=\left(\frac{2a_1+(n-1)}{2}\right)n}$

EJEMPLO 1 :

Hallar la suma de los *10* primeros términos de la progresión : $\div 1\ ;\ 6\ ;\ 11\ ;\ ....$

RESOLUCIÓN :

* Hallamos : $r=6-1=5;\ a_1=1$

* Entonces : $a_{10}=1+(10-1)5=46$

* Luego : $S_{10}=\left(\frac{1+46}{2}\right)10=235$

EJEMPLO 2 :

* Calcular : $S=28+32+36+.....+80$

RESOLUCIÓN :

* Datos : $a_1=28;\ a_n=80;\ r=4$

* Calculando "*n*": $n=\frac{80-28}{4}+1=14$

* Calculando "*S*": $S=\left(\frac{28+80}{2}\right)14=756$

EJEMPLO 3 :

Calcular : $S=5+8+11+....(30\ \textit{términos})$

RESOLUCIÓN :

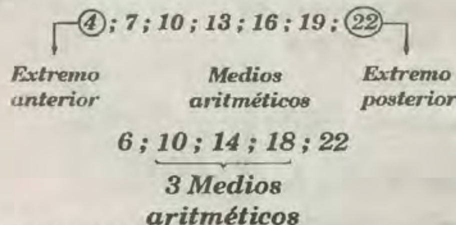
* Se tiene : $a_1=5$

* Aplicamos : $\boxed{S=\left[\frac{2a_1+(n-1)r}{2}\right]n}$

* Luego : $\left.\begin{matrix}r=3\\n=30\end{matrix}\right\}S=\left[\frac{2(5)+(30-1)3}{2}\right]30=1005$

MEDIOS ARITMÉTICOS

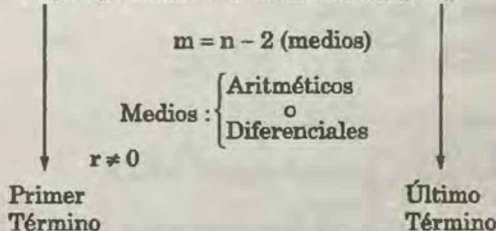
Son los términos comprendidos entre dos extremos de una sucesión aritmética .



$6\ ;\ 10\ ;\ 14\ ;\ 18\ ;\ 22$

3 Medios aritméticos

EN GENERAL :



INTERPOLACIÓN DE MEDIOS ARITMÉTICOS

Interpolar "*m*" medios aritméticos entre los números "*a*" y "*b*", es formar una *P. A.* cuyo primer término será "*a*", el último "*b*" y el número de términos "*m+2*". Para poder interpolar se debe

calcular la razón de interpolación .

Si se desea interpolar *"m" M.A.* entre los números *"a"* y *"b"* se debe formar :

$$+a \underbrace{\dots\dots\dots\dots}_{\text{"m" M.A.}} b$$

Aplicando : $a_n = a_1 + (n-1)r$

Tendremos : $b = a + (m+2-1)r$

$$\boxed{r = \frac{b-a}{m+1}}$$ Razón de Interpolación.

EJEMPLO 1 :

Interpolar *4 M.A.* entre los números *2* y *27*.

RESOLUCIÓN :

* Se tiene que : $a=2; b=27; m=4$

* Luego : $r = \frac{27-2}{4+1} = 5 \rightarrow$

* Interpolando : $2; \underbrace{7; 12; 17; 22}_{\text{Medios interpolados}}; 27$

EJEMPLO 2 :

Interpolar *5* medios aritméticos entre *8* y *26*.

RESOLUCIÓN :

* Del dato : $a=8; b=26; m=5$

* Reemplazando : $r = \frac{26-8}{5+1}$; $r=3$

* La progresión será :

$$+8; \underbrace{11; 14; 17; 20; 23}_{\text{5 medios}}; 26$$

FORMAS DE REPRESENTAR UNA PROGRESIÓN ARITMÉTICA

En la resolución de problemas sobre *P.A.* es necesario expresar los términos de la progresión bajo las siguientes formas:

I) Cuando no se conoce el número de términos:

$$\div a; a+r; a+2r; a+3r; \dots$$

II) Cuando el número de términos es impar.

$$\dots; a-3r; a-2r; a-r; a; a+r; a+2r; a+3r; \dots$$

III) Cuando el número de términos es par .

$$\dots; a-5r; a-3r; \underline{a-r}; \underline{a+r}; a+3r; a+5r; \dots$$

NOTA :

Se comienza por los dos términos marcados , luego se agregan en ambos lados la misma cantidad de términos hasta completar los términos requeridos .

EL TÉRMINO CENTRAL (T_c)

(Cuando *"n"* sea impar)

$$\boxed{T_c = \frac{a_1 + a_n}{2}} \quad \boxed{T_c = S_I - S_P = \frac{S_I + S_P}{n} = \frac{S_n}{n}}$$

* donde :

* $S_I = \underbrace{a_1 + a_3 + a_5 + \dots\dots + a_n}_{\text{suma de terminos de los lugares impares}}$

* $S_P = \underbrace{a_2 + a_4 + a_6 + \dots\dots + a_{n-1}}_{\text{suma de terminos de los lugares pares}}$

* $S_n = \underbrace{S_I + S_P}_{\text{suma total}}$

EJEMPLO 1 :

Hallar el término central de la siguiente progresión aritmética sabiendo que tiene *47* términos.

$$38; 44; 50; \dots\dots; 314$$

RESOLUCIÓN :

$$Tc = \frac{38+314}{2} = 176$$

TÉRMINOS EQUIDISTANTES DE LOS EXTREMOS

Sean a_p y a_q dos términos equidistantes de la siguiente *P.A.* :

$$\div \underbrace{a_1 \dots\dots a_p}_{\text{"p" términos}} \dots\dots \underbrace{a_q \dots\dots a_n}_{\text{"p" términos}}$$

Se cumple : $\boxed{a_p + a_q = a_1 + a_n}$

ALTERACIÓN DE LA PROGRESIÓN ARITMÉTICA

*si se suma o resta a todos los términos de una *P.A.* por una misma cantidad, se tendrá otra *P.A.* cuya razón será igual a la razón de la *P.A.* original (la razón no se altera).

*si se multiplica o divide a todos los términos de una *P.A.* por una misma cantidad diferente de cero , se obtiene otra *P.A.* cuya razón será la original multiplicada o dividida por dicha cantidad.

PROGRESIÓN GEOMÉTRICA

Es una sucesión de números , en la que cada término siguiente es igual al término anterior multiplicado por una constante, llamada razón *(q)* de la progresión.

También se puede decir que es una sucesión de términos de la siguiente forma:

$\div\div t_1 : t_1q : t_1q^2 : t_1q^3 : .... : t_1q^{n-1}$

cuyo término enésimo tiene la forma :

$$t_n = t_1q^{n-1}$$

* Donde :

$t_1 \Rightarrow$ 1er. término de la progesión geométrica.

$q \Rightarrow$ razón de la progresión geométrica.

$n \Rightarrow$ número de términos .

$t_n \Rightarrow$ término de lugar o enésimo término.

NOTACIÓN :

Los elementos de una sucesión geométrica se denota así : $\div\div t_1 : t_2 : .... : t_n$

EJEMPLO :

$\div\div 2 : 6 : 18 : 54 : ....$ (su razón es $q = 3$)

$\times 3 \times 3 \times 3$

OBSERVACIÓN :

A la progresión geométrica también se le llama "*Progresión por Cociente*", donde la razón debe ser diferente de cero $(q \neq 0)$.

RAZÓN GEOMÉTRICA (q) :

Se encuentra dividiendo cualquier término por el inmediato anterior : $q = \dfrac{t_n}{t_{n-1}}$

* Si : $q > 1$, la progresión es creciente.

$0 < q < 1$, la progresión es decreciente.

$q < 0$, la progresión es oscilante.

$q = 1$, la progresión es trivial.

EJEMPLOS :

* Sean las progresiones geoméricas :

$\div\div 1 : 2 : 4 : 8 : .... \rightarrow q = 2 > 1$

$\times 2 \times 2$ P.G. Creciente

$\div\div 81 : 27 : 9 : 3 .... \rightarrow q = \frac{1}{3}$

$\times\frac{1}{3} \times\frac{1}{3}$ P.G. Decreciente

$\div\div 1 : -3 : 9 : -27 .... \rightarrow q = -3 < 0$

$\times(-3) \times(-3)$ P.G. Oscilante

TÉRMINO CUALQUIERA (t_n):

Todo término de una *P. G.* es igual al primer término multiplicado por la razón de la progresión con exponente igual al número de términos precedentes al que se determina .

* Entonces : $t_n = t_1 . q^{n-1}$

Tal que n = número de términos.

$$n = \frac{Log\ t_n - Log\ t_1}{Log q} + 1$$

EJEMPLO :

En $3 ; 12 ; 48 ; ......$ Calcular los términos de lugares *20* y *35*.

RESOLUCIÓN :

* Se tiene : $t_1 = 3 ; q = 4$

* Aplicando : $t_n = t_1 . q^{n-1}$

$$\rightarrow t_{20} = 3 \times 4^{20-1} = 3 \times 4^{19}$$

* Además : $t_{35} = 3 \times 4^{35-1} = 3 \times 4^{34}$

SUMA DE LOS "n" PRIMEROS TÉRMINOS DE UNA P.G. LIMITADA (S_n)

La suma de los términos de una *P. G.* finita es igual al último término por la razón menos el primer término ; todo esto dividido entre la diferencia de la razón y la unidad .

$$S_n = \frac{t_n q - t_1}{q - 1} \quad ; \ q \neq 1$$

* Donde : $S_n = t_1 + t_2 + t_3 + ... + t_n$

* Dado que : $t_n = t_1q^{n-1}$

$$S_n = \frac{t_1(q^n - 1)}{q - 1}$$

EJEMPLO :

Halla la suma de los nueve primeros términos de la progresión : $\div\div 2 : 4 : 8 : ......$

RESOLUCIÓN :

* Hallamos : $q = \frac{4}{2} = 2 ; t_1 = 2$

* Entonces : $S_9 = 2 + 4 + 8 + ...$ (nueve términos)

* Luego : $S_9 = 2\dfrac{(2^9 - 1)}{(2 - 1)} = 2 \times 511 = 1022$

SUMA DE TÉRMINO DE UNA P.G. ILIMITADA DECRECIENE $(SUMA_{LÍMITE})$

El valor límite de la suma de los infinitos términos

de una *P. G.* infinita decreciente es igual al primer término , dividido entre la diferencia de la unidad y la razón ; donde necesariamente el valor absoluto de la razón debe ser menor que la unidad .

$$S_\infty = \frac{t_1}{1-q} \; ; |q|<1$$

* Es decir :

$$S_\infty = t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + \dots\infty$$

suma Límite

* Donde : $-1<q<1; q \neq 0$

EJEMPLO :

Hallar la suma de la siguiente *P.G.*:

$$\because 27: 9: 3: 1: \frac{1}{3}; \dots$$

RESOLUCIÓN :

* Se pide : $27+9+3+1+\frac{1}{3}+\dots$

* Luego : $q=\frac{9}{27}=\frac{1}{3} \to$ ***P.G.*** decreciente

* Como tiene ∞ términos, entonces se trata de una suma límite :

$$S_\infty = \frac{27}{1-\frac{1}{3}} = \frac{27}{\frac{2}{3}} = \frac{27\times 3}{2} = \frac{81}{2} = 40,5$$

MEDIOS GEOMÉTRICOS

Son los términos comprendidos entre dos extremos de una sucesión geométrica .

(3); 6 ; 12 ; 24 ; 48 ; 96 ; (192)

Extremo anterior — *Medios geométricos* — *Extremo posterior*

2 ; 6 ; 18 ; 54 ; 162

3 medios geométricos

INTERPOLACIÓN DE MEDIOS GEOMÉTRICOS

Interpolar ***"m"*** medios geométricos entre los números ***"a"*** y ***"b"*** es formar una progresión geométrica cuyo primer término es ***"a"***, el último ***"b"*** y el número de términos "$m+2$". Para poder interpolar se debe calcular la razón de interpolación.

Para interpolar ***"m"*** medios geométricos entre los números ***"a"*** y ***"b"*** se debe formar:

$$\div\div a : \underbrace{\dots\dots\dots\dots}_{\text{"m" términos}} : b$$

* Aplicando : $t_n = t_1 . q^{n-1}$

$$b = a.q^{m+2-1} \to \boxed{q = \sqrt[m+1]{\frac{b}{a}}}$$

EJEMPLO 1 :

Interpolar tres medios geométricos entre **2** y **32** .

RESOLUCIÓN :

* Se tiene : $a=2; b=32; m=3$

Interpolando: $q = \sqrt[3+1]{\frac{32}{2}} = 2$

$$2 ; \underbrace{4 ; 8 ; 16}_{\text{medios interpolados}} ; 32$$

EJEMPLO 2 :

Interpolar cuatro medios geométricos entre ***160*** y ***5.***

RESOLUCIÓN :

* Del dato : $a=160 ; b=5 ; m=4$

* Reemplazando : $q = \sqrt[4+1]{\frac{5}{160}} = \sqrt[5]{\frac{1}{32}} = \frac{1}{2}$

* La progresión será :

$$\div\div 160 : \underbrace{80 : 40 : 20 : 10}_{\text{4 medios}} : 5$$

PROPIEDADES :

En una sucesión geométrica $\because t_1 : t_2 : t_3 : \dots\dots : t_n$ se cumple :

I) Razón : $\boxed{q = \frac{t_2}{t_1} = \frac{t_3}{t_2} = \dots = \frac{t_n}{t_{n-1}}}$

EJEMPLO :

$3 : 6 : 12 : 24 : 48 : 96 : \dots$

$$q = \frac{6}{3} = \frac{12}{6} = \frac{48}{24} = 2$$

II) Términos generales :

$$\boxed{t_n = t_1 q^{n-1}} \quad \boxed{t_x = t_y q^{x-y}}$$

III) Termino central (t_c) si n es impar :

$$\boxed{t_c^2 = t_1 t_n}$$

$7 : 21 : \overset{tc}{(63)} : 189 : 567$

$\to 63^2 = 7(567)$

$$\boxed{t_c = \frac{P_I}{P_P} = \sqrt[n]{P_I P_P} = \sqrt[n]{P_T}}$$

* donde:

$$P_I = \underbrace{t_1 \times t_3 \times t_5 \times \dots\dots\dots \times t_n}_{\text{producto de los términos de lugares impares}}$$

$$P_I = \underbrace{t_2 \times t_4 \times t_6 \times \dots\dots\dots \times t_{n-1}}_{\text{producto de los términos de lugares pares}}$$

$P_n = P_I P_P \dots\dots$ "Producto total"

IV) Términos equidistantes de los extremos :

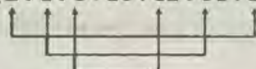
Si :

$$\div\!\div \underbrace{t_1 : \dots : t_x}_{x \text{ términos}} : \dots : \underbrace{t_y : \dots : t_n}_{x \text{ términos}}$$

* Entonces se cumple : $\boxed{t_1 t_n = t_x t_y}$

EJEMPLO :

$$\div\!\div 2 : 4 : 8 : 16 : 32 : 64 : 128$$



$$2 \times 128 = 4 \times 64 = 8 \times 32 = 256$$

V) El producto de multiplicar los *"n"* términos de una progresión geométrica limitada se obtiene al extraer raíz cuadrada al producto de términos extremos elevados a la *"n"*.

$$\boxed{P = \sqrt{(t_1 . t_n)^n}}$$

EJEMPLO :

Hallar : $P = \underbrace{2 \times 4 \times 8 \dots\dots\dots \times 2\,048}_{11 \text{ términos}}$

RESOLUCIÓN :

* Por fórmula : $P = \sqrt{(2 \times 2\,048)^{11}}$

FORMAS DE REPRESENTAR UNA PROGRESIÓN GEOMÉTRICA

A) Cuando no se conoce el número de términos

$$\div\!\div a : aq : aq^2 : aq^3$$

B) Cuando el número de términos es impar .

$$\dots \frac{a}{q^2} : \frac{a}{q} : ⓐ : aq : aq^2 \dots$$

D) Cuando el número de términos es par .

$$\dots \frac{a}{q^5} : \frac{a}{q^3} : \left(\frac{a}{q}\right) : (aq) : aq^3 : aq^5$$

OBSERVACIÓN :

*si se multiplica o divide a todos los términos de una P.G. por una misma cantidad diferente de cero , los elementos resultantes forman otra P.G. pero con la misma razón de la progresión original .

* si a los elementos de una P.G. se potencian o radican, los términos elementos resultantes forman otra P.G. cuya razón estará afectada por la operación correspondiente.

*los recíprocos de los elementos de una P.G. , forman otra P.G. , cuya razón es la recíproca de la anterior.

PROGRESIÓN ARMÓNICA (P.H.)

Es aquella sucesión ordenada que se caracteriza porque sus términos son los recíprocos de los términos de una *P A* .

Sea la P.A. $\div a_1 . a_2 . a_3 . \dots . a_{n-1} . a_n$

luego la progresión armónica está dada por la sucesión : $\frac{1}{a_1} ; \frac{1}{a_2} ; \frac{1}{a_3} ; \dots\dots\dots ; \frac{1}{a_n}$

EJEMPLO :

La sucesión : $\frac{1}{2} ; \frac{1}{8} ; \frac{1}{14} ; \dots\dots\dots ; \frac{1}{6n-4}$

es una progresión armónica , dado que sus recíprocos forman la siguiente progresión aritmética : *2 ; 8 ; 14 ; ...... ; 6n-4* de razón igual a *r=6*

PROGRESIÓN HIPERGEOMÉTRICA

Es aquella sucesión en la que dos términos consecutivos : $a_n \wedge a_{n+1}$ verifican la siguiente relación :

$$\boxed{\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\alpha n + \beta}{\alpha n + \gamma}} ; \alpha \neq 0$$

si $\alpha = 0$, se transforma en una progresión geométrica

SUMA DE LOS "n" TÉRMINOS DE UNA PROGRESIÓN HIPERGEOMÉTRICA

$$\boxed{S_n = \frac{(n\alpha + \beta)a_n - \gamma a_1}{\alpha + \beta - \gamma}}$$

EJEMPLO 1 :

Dado :

$$\frac{3}{1 \times 3} ; \frac{3}{3 \times 5} ; \frac{3}{5 \times 7} ; \dots\dots\dots ; \frac{3}{(2n-1)(2n+1)}$$

es una progresión hipergeométrica , ya que:

$$a_n = \frac{3}{(2n-1)(2n+1)} \wedge a_{n+1} = \frac{3}{(2n+1)(2n+3)}$$

$$\rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2n-1}{2n+3} \rightarrow \alpha = 2 \wedge \beta = -1 \wedge \gamma = 3$$

$$S_n=\frac{(n\alpha+\beta)\left[\frac{3}{(2n-1)(2n+1)}\right]-\gamma\left(\frac{3}{1\times3}\right)}{\alpha+\beta-\gamma}$$

$$\rightarrow S_n=\frac{(2n-1)\left[\frac{3}{(2n-1)(2n+1)}\right]-3\left(\frac{3}{1\times3}\right)}{2-1-3}$$

$$\rightarrow S_n=\frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)$$

EJEMPLO 2 :

Calcular :

$$S=\frac{1}{1\times2\times3\times4}+\frac{1}{1\times2\times3\times4}+\dots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$$

RESOLUCIÓN:

Se trata de una progresion hipergeométrica, dado que :

$$a_n=\frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}\wedge a_{n+1}=\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}$$

$$\Rightarrow\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{n}{n+4}\rightarrow\alpha=1\wedge\beta=0\wedge\gamma=4$$

$$\Rightarrow S=\frac{(n\alpha+\beta)a_n-\gamma a_1}{\alpha+\beta-\gamma}$$

$$\Rightarrow S=\frac{n\left[\frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}\right]-4\left(\frac{1}{1\times2\times3\times4}\right)}{1+0-4}$$

$$\rightarrow S=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{6}-\frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}\right]$$

OBSERVACIONES :

I) Para calcular la suma de los «n» términos de una serie en la que cada término está formado por «r» factores en progresión aritmética , estando los primeros factores de los diversos términos en la misma progresión aritmética se procede así:

escríbase el término de lugar «n» , añádase el siguiente factor en el extremo, divídase por el número de factores asi incrementando y por la diferencia , y súmese una constante (esta constante se puede obtener dando valor a n, como por ejemplo 1).

II) Para calcular la suma de los «n» términos de una serie en la que cada término está formado por el recíproco del producto de «r» factores en progresión aritmética , estando los primeros factores de los diversos términos en la misma progresión aritmética se procede así:

Escríbase el término de lugar «n», suprímase un factor del comienzo , divídase por el número de factores así disminuído y por la diferencia , cámbiese el signo y súmese una constante (esta constante se puede obtener dando valor a n, como por ejemplo 1).

EJEMPLO 1 :

Calcular :

$$S=1\times3\times5+3\times5\times7+\dots+(2n-1)(2n+1)(2n+3)$$

RESOLUCIÓN:

* Aplicando la regla práctica , así :

$$S_n=\frac{(2n-1)(2n+1)(2n+3)(2n+5)}{4\times2}+C$$

* para determinar ***C***, hagamos ***n=1***; entonces la serie se reduce a su primer término, y tenemos

$$1\times3\times5=\frac{1\times3\times5}{2\times4}+C\rightarrow C=\frac{15}{8}$$

$$\rightarrow S_n=\frac{(2n-1)(2n+1)(2n+3)(2n+5)}{4\times2}+\frac{15}{8}$$

$$\rightarrow S_n=n(2n^3+8n^2+7n-2)$$

EJEMPLO 2 :

Calcular :

$$S=\frac{1}{1\times2\times3\times4}+\frac{1}{1\times2\times3\times4}+\dots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$$

RESOLUCIÓN:

$$S_n=C-\frac{1}{3n(n+1)(n+2)(n+3)}$$

* Haciendo ***n=1***, se obtiene:

$$\frac{1}{1\times2\times3\times4}=C-\frac{1}{3\times2\times3\times4}\rightarrow C=\frac{1}{18}$$

$$\rightarrow S_n=\frac{1}{18}-\frac{1}{3n(n+1)(n+2)(n+3)}$$

EJEMPLO 3 :

Calcular :

$$S=\frac{3}{1\times2\times4}+\frac{4}{2\times3\times5}+\dots+\frac{(n+2)}{n(n+1)(n+3)}$$

RESOLUCIÓN:

* En este caso la regla práctica no se puede aplicar directamente , pero podemos hacer el siguiente artificio :

$$\rightarrow a_n=\frac{(n+2)^2}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$$

$$\rightarrow a_n=\frac{n(n+1)+3n+4}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$$

$$\rightarrow a_n=\frac{1}{(n+2)(n+3)}+\frac{3}{(n+1)(n+2)(n+3)}+\frac{4}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$$

*** Cada una de estas expresiones puede tomarse ahora como término enésimo de una serie a la cual la regla es aplicable :**

* Hagamos ***n=1*** ,entonces :

$$\frac{3}{1\times2\times4}=C-\frac{1}{4}-\frac{3}{2\times3\times4}-\frac{4}{3\times2\times3\times4}\Rightarrow C=\frac{29}{36}$$

$$\rightarrow S_n=\frac{29}{36}-\frac{1}{(n+3)}-\frac{3}{2(n+2)(n+3)}-\frac{4}{3(n+1)(n+2)(n+3)}$$

NOTA:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{n(n+1)(n+2)....(n+r-1)}{(r-1)!}=\frac{n(n+1)(n+2)....(n+r-1)}{r!}$$

PROGRESIONES DE ORDEN SUPERIOR

Es aquella sucesión en la que su término n-ésimo es un polinomio en «n» cuyo grado es mayor o igual a 2 .

t_1 ; t_2 ; t_3 ; t_4 ; t_5 ; ....; t_n

a b c d ....

m n p............

r r........

$$t_n=t_1+aC_1^{n-1}+mC_2^{n-1}+rC_3^{n-1}+....$$

$$S_n=t_1C_1^n+aC_2^n+mC_3^n+rC_4^n+......$$

EJEMPLO 1:

Determinar el décimo quinto término de la siguiente sucesión : 4 ; 5 ; 8 ; 43 ; 94 ; 185 ;....

RESOLUCIÓN :

t_1 ; t_2 ; t_3 ; t_4 ; t_5 ; ....; t_n

4 ; 5 ; 8 ; 18 ; 43 ; 94 ; 185..........

1 3 10 25 51 91......

2 7 15 26 40

5 8 11 14

3 3 3

* luego :

$$t_n=4+1C_1^{n-1}+2C_2^{n-1}+5C_3^{n-1}+3C_4^{n-1}$$

$$\rightarrow t_{15}=4+1C_1^{14}+2C_2^{14}+5C_3^{14}+3C_4^{14}$$

$$\rightarrow t_{15}=4+14+2\left(\frac{14\times13}{2}\right)+5\left(\frac{14\times13\times12}{1\times2\times3}\right)+3\left(\frac{14\times13\times12\times11}{1\times2\times3\times4}\right)$$

$$\rightarrow t_{15}=5023$$

EJEMPLO 2:

Determinar la suma de los 20 primeros términos de la siguiente sucesión :

4 ; 5 ; 8 ; 43 ; 94 ; 185 ;....

RESOLUCIÓN :

t_1 ; t_2 ; t_3 ; t_4 ; t_5 ; ....; t_n

4 ; 5 ; 8 ; 18 ; 43 ; 94 ; 185..........

1 3 10 25 51 91......

2 7 15 26 40

5 8 11 14

3 3 3

*luego :

$$S_n=4C_1^n+1C_2^n+2C_3^n+5C_4^n+3C_5^n$$

$$\rightarrow S_{20}=4C_1^{20}+1C_2^{20}+2C_3^{20}+5C_4^{20}+3C_5^{20}$$

$$\Rightarrow S_{20}=4(20)+1\left(\frac{20\times19}{2}\right)+2\left(\frac{20\times19\times18}{1\times2\times3}\right)+$$

$$+5\left(\frac{20\times19\times18\times17}{1\times2\times3\times4}\right)+3\left(\frac{20\times19\times18\times17\times16}{1\times2\times3\times4\times5}\right)$$

$$\Rightarrow S_{20}=73287$$

EJERCICIOS DIVERSOS

EJERCICIO 1 :

Determinar el término enésimo de la siguiente sucesión :

10 ; 23 ; 60 ; 169 ; 494 ; ....

RESOLUCIÓN :

* Las diferencias sucesivas son :

10 ; 23 ; 60 ; 169 ; 494 ; ....

+13 +37 +109 +335

+24 +72 +216

×3 ×3

* Luego las diferencias de segundo orden forman una progresión geométrica cuya razón es 3 ; por tanto , podemos suponer para el término general , la siguiente forma (método de los coeficientes indeterminados):

$$a_n=m3^{n-1}+pn+q$$

* donde para determinar las constantes «m»; «p» y «q» se da valores a «n» (se tabula) , como por ejemplo: 1 ; 2 ; 3 ;....,entonces , resulta el siguiente

sistema:

$m+p+q=10$..............................(I)

$3m+2p+q=23$........................(II)

$9a+4p+q=60$........................(III)

* que al resolver el sistema resulta :

$m=6;\ p=1;\ q=3$

* reemplazando estos valores , se tendrá :

$a_n=6\times 3^{n-1}+n+3$

$\rightarrow a_n=2\times 3^n+n+3$

EJERCICIO 2 :

Calcular:

$$S=\underbrace{\frac{5}{1\times 2}\times\left(\frac{1}{3}\right)+\frac{7}{2\times 3}\times\left(\frac{1}{3}\right)^2+\frac{9}{3\times 4}\times\left(\frac{1}{3}\right)^3+\ldots\ldots}_{\text{"n" sumandos}}$$

RESOLUCIÓN :

*En este caso ,se deduce que : $a_n=\frac{2n+3}{n(n+1)}\times\frac{1}{3^n}$

*suponiendo que :

$$\frac{2n+3}{n(n+1)}=\frac{A}{n}+\frac{B}{n+1}\rightarrow A=3\wedge B=-1$$

* Por lo tanto :

$$a_n=\left(\frac{3}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\frac{1}{3^n}\Rightarrow a_n=\frac{1}{n\times 3^{n-1}}-\frac{1}{(n+1)\times 3^n}$$

* en consecuencia, aplicando la regla práctica adecuada se obtendrá :

$$S_n=1-\frac{1}{(n+1)\times 3^n}$$

SUMA DE LAS POTENCIAS DE EXPONENTE "r" DE LOS "n" PRIMEROS NÚMEROS NATURALES

$$\boxed{S_n=1^r+2^r+3^r+4^r+\ldots..+n^r}$$

$$\rightarrow S_n=\frac{n^{r+1}}{r+1}+\frac{1}{2}n^r+\left(\frac{1}{6}\right)\frac{r}{2!}n^{r-1}-\left(\frac{1}{30}\right)\frac{r(r-1)(r-2)}{4!}n^{r-3}+\ldots..$$

O también :

$$\rightarrow \boxed{\begin{array}{l}S_n=\frac{n^{r+1}}{r+1}+\frac{1}{2}n^r+B_1\frac{r}{2!}n^{r-1}-B_3\frac{r(r-1)(r-2)}{4!}n^{r-3}\\ +B_5\frac{r(r-1)(r-2)(r-3)(r-5)}{6!}n^{r-5}+\ldots\ldots\end{array}}$$

* de donde :

$$B_1=\frac{1}{6};B_3=\frac{1}{30};B_5=\frac{1}{42};B_7=\frac{1}{30};B_9=\frac{5}{66};\ldots\ldots$$

las cantidades $B_1;B_3;B_5;B_7;\ldots\ldots$

se conocen como ***NÚMEROS DE BERNOULLI***

EJEMPLO :

Calcular :

$$S_n=1^5+2^5+3^5+4^5+\ldots\ldots+n^5$$

RESOLUCIÓN :

* en este caso sólo es necesario las constantes B_1 y B_3:

$$S_n=\frac{n^6}{6}+\frac{n^5}{2}+B_1\frac{5}{2!}n^4-B_3\frac{5\times 4\times 3}{4!}n^2$$

$$\rightarrow S_n=\frac{n^6}{6}+\frac{n^5}{2}+\frac{1}{6}\times\frac{5}{2!}n^4-\frac{1}{30}\times\frac{5\times 4\times 3}{4!}n^2$$

$$\rightarrow S_n=\frac{n^6}{6}+\frac{n^5}{2}+\frac{5n^4}{12}-\frac{n^2}{12}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

* Verificar que se cumplen las siguientes relaciones

1. $\underbrace{1\times 2\times 3+2\times 3\times 4+3\times 4\times 5+\ldots..}_{\text{"n" sumandos}}=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$

2. $\underbrace{1\times 2\times 3\times 4+2\times 3\times 4\times 5+3\times 4\times 5\times 6+\ldots}_{\text{"n" sumandos}}=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{5}$

3. $\underbrace{1\times 4\times 7+4\times 7\times 10+7\times 10\times 13+\ldots..}_{\text{"n" sumandos}}=\frac{n(27n^3+90n^2+45n-50)}{4}$

4. $\underbrace{1\times 4\times 7+2\times 5\times 8+3\times 6\times 9+\ldots}_{\text{"n" sumandos}}=\frac{n(n+1)(n+6)(n+7)}{4}$

5. $\underbrace{1\times 5\times 9+2\times 6\times 10+3\times 7\times 11+\ldots}_{\text{"n" sumandos}}=\frac{n(n+1)(n+8)(n+9)}{5}$

6. $\underbrace{\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\ldots}_{\text{"n" sumandos}}=\frac{n}{n+1}$

7. $\underbrace{\frac{1}{1\times 4}+\frac{1}{4\times 7}+\frac{1}{7\times 10}+\ldots}_{\text{"n" sumandos}}=\frac{n}{3n+1}$

8. $\underbrace{\frac{1}{1\times 3\times 5}+\frac{1}{5\times 7\times 9}+\frac{1}{5\times 7\times 9}+\ldots..}_{\text{"n" sumandos}}=\frac{1}{12}-\frac{1}{4(2n+1)(2n+3)}$

9. $\underbrace{\frac{1}{1\times 4\times 7}+\frac{1}{4\times 7\times 10}+\frac{1}{7\times 10\times 13}+\ldots}_{\text{"n" sumandos}}=\frac{1}{24}-\frac{1}{6(3n+1)(3n+4)}$

10. $\underbrace{\frac{4}{1\times 2\times 3}+\frac{5}{2\times 3\times 4}+\frac{6}{3\times 4\times 5}+\ldots..}_{\text{"n" sumandos}}=\frac{5}{4}-\frac{2n+5}{2(n+1)(n+2)}$

11. $\underbrace{\frac{1}{3\times 4\times 5}+\frac{2}{4\times 5\times 6}+\frac{3}{5\times 6\times 7}+\ldots..}_{\text{"n" sumandos}}=\frac{1}{6}-\frac{1}{n+3}+\frac{1}{(n+3)(n+4)}$

12. $\underbrace{\frac{1}{1\times 2\times 3}+\frac{3}{2\times 3\times 4}+\frac{5}{3\times 4\times 5}+\ldots..}_{\text{"n" sumandos}}=\frac{3}{4}-\frac{2}{n+2}+\frac{1}{2(n+1)(n+2)}$

13 $4;14;30;52;80;.... \rightarrow a_n=3n^2+n \wedge S_n=n(n+1)^2$

14 $8;26;54;92;... \rightarrow a_n=5n^2+3n \wedge S_n=\frac{n(n+1)(5n+7)}{3}$

15 $9;16;29;54;... \rightarrow a_n=3\times 2^n+n+2 \wedge S_n=6(2^n-1)+\frac{n(n+5)}{6}$

16 $\frac{1\times 2}{3}+\frac{2\times 3}{3^2}+\frac{3\times 4}{3^3}+\frac{4\times 5}{3^4}+....\infty=\frac{9}{4}$

17 $1^2-\frac{2^2}{5}+\frac{3^2}{5^2}-\frac{4^2}{5^3}-\frac{6^2}{5^4}+....\infty=\frac{25}{54}$

18 $\underbrace{\frac{1^2}{2\times 3}(4)+\frac{2^2}{3\times 4}(4)^2+\frac{3^2}{4\times 5}(4)^3+...}_{\text{"n" sumandos}}=\left(\frac{n-1}{n+2}\right)\frac{4^{n+1}}{3}+\frac{2}{3}$

19 $\underbrace{\frac{1\times 2}{3!}+\frac{2\times 2^2}{4!}+\frac{3\times 2^3}{5!}+\frac{4\times 2^4}{6!}+...}_{\text{"n" sumandos}}=1-\frac{2^{n+1}}{(n+2)!}$

20 $\underbrace{\frac{1}{3!}+\frac{5}{4!}+\frac{11}{5!}+\frac{19}{6!}+...}_{\text{"n" sumandos}}=\frac{1}{2}-\frac{n+1}{(n+2)!}$

21 $1\times 3+3\times 3^2+5\times 3^3+7\times 3^4+....=(n-1)3^{n+1}+3$

22 $\underbrace{\frac{2}{1\times 2}\times 2^0+\frac{5}{2\times 3}\times 2^1+\frac{10}{3\times 4}\times 2^2+...}_{\text{"n" sumandos}}=\left(\frac{n}{n+2}\right)2^n$

23 $\underbrace{\frac{19}{1\times 2\times 3}\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{28}{2\times 3\times 4}\left(\frac{1}{2}\right)^3+\frac{39}{3\times 4\times 5}\left(\frac{1}{2}\right)^4...}_{\text{"n" sumandos}}=1-\frac{n+4}{(n+1)(n+2)2^{n+1}}$

24 $\underbrace{1^6+2^6+3^6+4^6+....}_{\text{"n" sumandos}}=\frac{n^7}{7}+\frac{n^6}{2}+\frac{n^5}{2}-\frac{n^3}{6}+\frac{n}{42}$

25 $\underbrace{1^7+2^7+3^7+4^7+....}_{\text{"n" sumandos}}=\frac{n^8}{8}+\frac{n^7}{2}+\frac{7n^6}{12}-\frac{7n^4}{24}-\frac{n^2}{12}$

26 $\underbrace{\frac{1}{1+1^2+1^4}+\frac{1}{1+2^2+2^4}+\frac{1}{1+3^2+3^4}+...}_{\text{"n" sumandos}}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{1+n^2+n^4}\right)$

MISCELÁNEA

1) calcular el valor de:

$$E=\frac{(4+\sqrt{15})^{3/2}+(4-\sqrt{15})^{3/2}}{(6+\sqrt{35})^{3/2}-(6-\sqrt{35})^{3/2}} \quad Rpta:\frac{7}{13}$$

2) extraer la raíz cuadrada de:

$(a^2+ab+bc+ca)(b^2+ab+bc+ca)(c^2+ab+bc+ca)$

Rpta : $(a+b)(b+c)(c+a)$

3) resolver $\frac{2x-3}{x-1}-\frac{3x-8}{x-2}+\frac{x+3}{x-3}=0$

$$Rpta:\frac{21\pm\sqrt{105}}{14}$$

4) resolver: $1+x^4=7(1+x)^4$ **Rpta :** $\frac{-5\pm\sqrt{-11}}{6} \vee \frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$

5) $\sum_{k=1}^{n}\frac{5k^2+12k+8}{k^2(k+1)^3(k+2)^3}$

$$Rpta:\frac{1}{8}-\frac{1}{(n+1)^2(n+2)^3}$$

6) determinar la suma de las quintas potencias de las raíces de la siguiente ecuación:

$x^4-7x^2+4x-3=0$ Rpta: -140

MÁS A CERCA DEL ÁLGEBRA......

Álgebra, rama de las matemáticas en la que se usan letras para representar relaciones aritméticas . Al igual que en la aritmética, las operaciones fundamentales del álgebra son adición, sustracción, multiplicación, división y cálculo de raíces . La aritmética , sin embargo, no es capaz de generalizar las relaciones matemáticas, como el teorema de Pitágoras , que dice que en un triángulo rectángulo el área del cuadrado que tiene como lado la hipotenusa es igual a la suma de las áreas de los cuadrados cuyos lados son los catetos. La aritmética sólo da casos particulares de esta relación (por ejemplo, *3 ; 4* y *5*, ya que $3^2+4^2=5^2$). El álgebra, por el contrario, puede dar una generalización que cumple las condiciones del teorema: $a^2+b^2=c^2$.

El álgebra clásica, que se ocupa de resolver ecuaciones, utiliza símbolos en vez de números específicos y operaciones aritméticas para determinar cómo usar dichos símbolos. El álgebra moderna ha evolucionado desde el álgebra clásica al poner más atención en las estructuras matemáticas. Los matemáticos consideran al álgebra moderna como un conjunto de objetos con reglas que los conectan o relacionan. Así, en su forma más general, se dice que el álgebra es el idioma de las matemáticas.

La historia del álgebra comenzó en el antiguo Egipto y Babilonia, donde fueron capaces de resolver ecuaciones lineales ($ax=b$) y cuadráticas ($ax^2+bx=c$), así como ecuaciones indeterminadas como : $x^2+y^2=z^2$, con varias incógnitas. Los antiguos babilonios resolvían cualquier ecuación cuadrática empleando esencialmente los mismos métodos que hoy se enseñan.

Los matemáticos alejandrinos Herón y Diofante continuaron con la tradición de Egipto y Babilonia, aunque el libro *Las aritméticas* de Diofante es de bastante más nivel y presenta muchas soluciones sorprendentes para ecuaciones indeterminadas difíciles. Esta antigua sabiduría sobre resolución de ecuaciones encontró, a su vez, acogida en el mundo

islámico, en donde se la llamó "ciencia de reducción y equilibrio". (La palabra árabe *al-ŵabr* que significa 'reducción', es el origen de la palabra *álgebra*). En el siglo ***IX***, el matemático al-Jwarizmi escribió uno de los primeros libros árabes de álgebra, una presentación sistemática de la teoría fundamental de ecuaciones, con ejemplos y demostraciones incluidas. A finales del siglo ***IX***, el matemático egipcio Abu Kamil enunció y demostró las leyes fundamentales e identidades del álgebra, y resolvió problemas tan complicados como encontrar las x, y, z que cumplen $x+y+z=10$; $x^2+y^2=z^2$; y $xz=y^2$.

En las civilizaciones antiguas se escribían las expresiones algebraicas utilizando abreviaturas sólo ocasionalmente; sin embargo, en la edad media, los matemáticos árabes fueron capaces de describir cualquier potencia de la incógnita x, y desarrollaron el álgebra fundamental de los polinomios, aunque sin usar los símbolos modernos. Esta álgebra incluía multiplicar, dividir y extraer raíces cuadradas de polinomios, así como el conocimiento del teorema del binomio. El matemático, poeta y astrónomo persa Omar Khayyam mostró cómo expresar las raíces de ecuaciones cúbicas utilizando los segmentos obtenidos por intersección de secciones cónicas, aunque no fue capaz de encontrar una fórmula para las raíces. La traducción al latín del *Álgebra* de al-Jwarizmi fue publicada en el siglo ***XII***. A principios del siglo ***XIII***, el matemático italiano Leonardo Fibonacci consiguió encontrar una aproximación cercana a la solución de la ecuación cúbica $x^3 + 2x^2 + cx = d$. Fibonacci había viajado a países árabes, por lo que con seguridad utilizó el método arábigo de aproximaciones sucesivas.

A principios del siglo *XVI* los matemáticos italianos Scipione del Ferro, Tartaglia y Gerolamo Cardano resolvieron la ecuación cúbica general en función de las constantes que aparecen en la ecuación. Ludovico Ferrari, alumno de Cardano, pronto encontró la solución exacta para la ecuación de cuarto grado y, como consecuencia, ciertos matemáticos de los siglos posteriores intentaron encontrar la fórmula de las raíces de las ecuaciones de quinto grado y superior. Sin embargo, a principios del siglo ***XIX*** el matemático noruego Niels Abel y el francés Évariste Galois demostraron la inexistencia de dicha fórmula.

Un avance importante en el álgebra fue la introducción, en el siglo ***XVI***, de símbolos para las incógnitas y para las operaciones y potencias algebraicas. Debido a este avance, el Libro ***III*** de la ***Geometría (1637)***, escrito por el matemático y filósofo francés René Descartes se parece bastante a un texto moderno de álgebra. Sin embargo, la contribución más importante de Descartes a las matemáticas fue el descubrimiento de la geometría analítica, que reduce la resolución de problemas geométricos a la resolución de problemas algebraicos. Su libro de geometría contiene también los fundamentos de un curso de teoría de ecuaciones, incluyendo lo que el propio Descartes llamó la *regla de los signos* para contar el número de raíces verdaderas (positivas) y falsas (negativas) de una ecuación. Durante el siglo ***XVIII*** se continuó trabajando en la teoría de ecuaciones y en ***1799*** el matemático alemán Carl Friedrich Gauss publicó la demostración de que toda ecuación polinómica tiene al menos una raíz en el plano complejo (*véase* Número (matemáticas): *Números complejos*).

En los tiempos de Gauss, el álgebra había entrado en su etapa moderna. El foco de atención se trasladó de las ecuaciones polinómicas al estudio de la estructura de sistemas matemáticos abstractos, cuyos axiomas estaban basados en el comportamiento de objetos matemáticos, como los números complejos, que los matemáticos habían encontrado al estudiar las ecuaciones polinómicas. Dos ejemplos de dichos sistemas son los grupos y las cuaternas, que comparten algunas de las propiedades de los sistemas numéricos, aunque también difieren de ellos de manera sustancial. Los grupos comenzaron como sistemas de permutaciones y combinaciones (*véase* Combinatoria) de las raíces de polinomios, pero evolucionaron para llegar a ser uno de los más importantes conceptos unificadores de las matemáticas en el siglo ***XIX***. Los matemáticos franceses Galois y Augustin Cauchy, el británico Arthur Cayley y los noruegos Niels Abel y Sophus Lie hicieron importantes contribuciones a su estudio. Las cuaternas fueron descubiertas por el matemático y astrónomo irlandés William Rowan Hamilton, quien desarrolló la aritmética de los números complejos para las cuaternas; mientras que los números complejos son de la forma $a + bi$, las cuaternas son de la forma $a + bi + cj + dk$.

Después del descubrimiento de Hamilton, el matemático alemán Hermann Grassmann empezó a investigar los vectores. A pesar de su carácter abstracto, el físico estadounidense J.W. Gibbs encontró en el álgebra vectorial un sistema de gran utilidad para los físicos, del mismo modo que Hamilton había hecho con las cuaternas. La amplia influencia de este enfoque abstracto llevó a George Boole a escribir *Investigación sobre las leyes del pensamiento* ***(1854)***, un tratamiento algebraico de la lógica básica. Desde entonces, el álgebra moderna también llamada álgebra abstracta ha seguido evolucionando; se han obtenido resultados importantes y se le han encontrado aplicaciones en todas las ramas de las matemáticas y en muchas otras ciencias.

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1 :

Hallar la razón en la siguiente progresión aritmética:

$$\underbrace{21;\ldots\ldots\ldots;195}_{30\ términos}$$

A) 2 B) 3 C) 7 D) 8 E) 6

RESOLUCIÓN :

* De : $a_n = a_1 + (n-1)r$
* Despejando "r", resulta :

$$\boxed{r = \frac{a_n - a_1}{n-1}} \ldots\ldots\ldots(I)$$

* De los datos : $a_1 = 21;\ a_n = 195;\ n = 30$
* Reemplazando en (I) :

$$r = \frac{195-21}{30-1} = \frac{174}{29} = 6$$

RPTA: "E"

PROBLEMA 2 :

Hallar el número de términos de la siguiente sucesión : $18\ ;\ 24\ ;\ 30\ ;\ 36\ ;\ \ldots\ ;\ 282$

A) 20 B) 25 C) 19 D) 38 E) 45

RESOLUCIÓN :

* Datos : $r = 6;\ a_1 = 18;\ a_n = 282$
* Luego aplicamos :

$$\boxed{n = \frac{a_n - a_1}{r} + 1} \rightarrow n = \frac{282-18}{6} + 1 \rightarrow n = 45$$

RPTA: "E"

PROBLEMA 3 :

Dada la progresión : $40\ ;\ 44\ ;\ 48\ ;\ 52\ ;\ \ldots$

Hallar el vigésimo término .

A) 20 B) 13 C) 207 D) 116 E) 124

RESOLUCIÓN :

* Datos : $r = 4;\ a_1 = 40;\ a_{20} = ?;\ n = 20$
* Luego aplicamos : $\boxed{a_n = a_1 + (n-1)r}$
* Reemplazando datos:

$$a_{20} = 40 + (20-1)4 \rightarrow a_{20} = 116$$

RPTA: "D"

PROBLEMA 4 :

Calcular la suma de los 28 términos de la siguiente progresión aritmética : $36\ ;\ 40\ ;\ 44\ ;\ \ldots$

A) 7080 B) 2600 C) 3200 D) 2520 E) 4000

RESOLUCIÓN:

* Datos :

$$a_1 = 36;\ r = 40 - 26 = 4;\ n = 28;\ S_{28} = ?$$

* Luego aplicaremos :

$$\boxed{S_n = \left[\frac{2a_1 + (n-1)r}{2}\right]n}$$

* Reemplazando datos :

$$S_{28} = \left[\frac{2(36) + (28-1)4}{2}\right]28 \rightarrow S_{28} = 2\,520$$

PROBLEMA 5 :

Calcular : $21 + 27 + 33 + \ldots + 255$

A) 5500 B) 4975 C) 5520 D) 4970 E) 5510

RESOLUCIÓN :

* Identificando términos :

$r = 27 - 21 = 6;\ a_1 = 21;\ a_n = 255;\ n = ?$ y $S_n = ?$

* Primero aplicamos :

$$\boxed{n = \frac{a_n - a_1}{r} + 1} \rightarrow n = \frac{255-21}{6} + 1 = 40$$

* Luego : $\boxed{S_n = \left(\frac{a_1 + a_n}{2}\right)n}$

$$\rightarrow S_{40} = \left(\frac{21+255}{2}\right)40 \rightarrow S_{40} = 276 \times 20 = 5\,520$$

RPTA: "C"

PROBLEMA 6 :

Calcular : $S = 85 + 90 + 95 + 100 + \ldots + 2\,360$

A)66080 B)72040 C)55600 D)557460

RESOLUCIÓN :

* Datos :

$$r = 5;\ a_1 = 85;\ a_n = 2\,360;\ n = ?;\ S = ?$$

* Hallando "n":

$$n = \frac{a_n - a_1}{r} + 1 = \frac{2\,360 - 85}{5} + 1 \rightarrow n = 456$$

* Hallando "S" :

$$S = \left(\frac{a_n + a_1}{2}\right)n = \left(\frac{2\,360 + 85}{2}\right)456$$

$$\rightarrow S = 557\,460$$

RPTA: "D"

PROBLEMA 7 :

Calcular el valor de "a" en la siguiente progresión aritmética : $(5a+2);\ (2a+7);\ (3a-4)$

A) 7 B) 2 C) 6 D) 1 E) 4

RESOLUCIÓN :

* $(5a+2);(2a+7);(3a-4)$

* Por término central : $T_c=\dfrac{a_1+a_n}{2}$

$\rightarrow 2a+7=\dfrac{5a+2+3a-4}{2}\rightarrow 4a+14=8a-2$

$\rightarrow 16=4a\rightarrow 4=a$

RPTA: "E"

PROBLEMA 8 :

La suma de los 4 primeros términos de la progresión aritmética creciente es 5 veces la suma de los 2 primeros términos de la misma progresión . ¿Cuál será la razón de esta progresión si el primer término es $\dfrac{1}{3}$?

A) $\dfrac{1}{2}$ B) 3 C) $\dfrac{1}{3}$ D) 1 E) 2

RESOLUCIÓN :

* Sea la P. A. en la cual el primer término es $\dfrac{1}{3}$ y la razón "r" : $\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{3}+r;\dfrac{1}{3}+2r;\dfrac{1}{3}+3r$

* Del enunciado :

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+r+\frac{1}{3}+2r+\frac{1}{3}+3r=5\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}r\right)$$

$$\rightarrow\frac{4}{3}+6r=5\left(\frac{2}{3}+r\right)\rightarrow\frac{4}{3}+6r=\frac{10}{3}+5r\rightarrow r=\frac{6}{3}=2$$

RPTA: "E"

PROBLEMA 9 :

Las edades de tres hermanos están en P.A. creciente cuya suma es 63 y la suma de sus cuadrados es 1395. Hallar la edad del mayor .

A) 24 B) 25 C) 27 D) 28 E) 31

RESOLUCIÓN :

* Sean las edades : $(a-r);a;(a+r)$

* Pero según enunciado :

$$(a-r)+a+(a+r)=63\rightarrow 3a=63\rightarrow a=21$$

* Además : $(21-r)^2+21^2+(21+r)^2=1395$

$$\rightarrow 2(21^2+r^2)+21^2=1395$$

$$\rightarrow 2r^2=72\rightarrow r=6$$

* Se pide : $a+r=21+6=27$

RPTA: "C"

PROBLEMA 10 :

Si se sabe que a , a^2 y $3a$ son los 3 primeros términos de una progresión aritmética , entonces la suma de los diez primeros términos es :

A) $4a^2-3$ B) 84 C) 110 D) 120 E) 100

RESOLUCIÓN :

* La progresión es : $\div a;a^2;3a;....$

* Luego por término central :

$$a^2=\frac{a+3a}{2}\rightarrow a^2=2a\rightarrow a=2$$

* Entonces la progresión resulta :

$$\div\underbrace{2;4}_{r=2}\underbrace{;6}_{r=2};....\ (10\ términos)$$

* Pero : $S_n=\dfrac{n}{2}[2a_1+(n-1)r]$

$$\rightarrow S_{10}=\frac{10}{2}[2(2)+(10-1)2]\rightarrow S_{10}=110$$

RPTA: "C"

PROBLEMA 11 :

Hallar el número de términos de una P. A. si la suma de términos es 570 y el número de términos entre 3 y 30 es igual al número de términos que hay entre 30 y x.

A) 11 B) 17 C) 21 D) 19 E) 23

RESOLUCIÓN :

* Según enunciado :

$$\underbrace{3+.........+3}_{\frac{n}{2}\ términos}\underbrace{0+....+x}_{\frac{n}{2}\ términos}=570$$

* Observe que : $a_c=30\rightarrow\dfrac{a_1+a_n}{2}=30$

* Como : $\boxed{S=\left(\dfrac{a_n+a_1}{2}\right)n}\rightarrow S=(a_c)n$

$$\rightarrow 570=30\times n\rightarrow 19=n$$

RPTA: "D"

PROBLEMA 12 :

El número de términos de una progresión aritmética comprendidos entre 23 y 59 es el doble del número de términos comprendidos entre 3 y 23 . Entonces la razón es :

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

RESOLUCIÓN :

* Sea la progresión :

$$\div 3;\underbrace{..............}_{"x"\ términos};23;\underbrace{..............}_{"x"\ términos};59$$

* De donde se observa que :

$$a_{x+2}=23;\ pero:\ \boxed{a_n=a_1+(n-1)r}$$

$\rightarrow 3+(x+2-1)r=23$

$\rightarrow (x+1)r=20$ ....(I)

* Además se aprecia que :

$a_{3x+3}=59$

$\rightarrow 3+(3x+3-1)r=59$

$\rightarrow (3x+2)r=56$ ....(II)

* Ahora de (I)÷(II): $\dfrac{x+1}{3x+2}=\dfrac{20}{56}$

* Resolviendo : $x=4$

* Luego en (I) : $(4+1)r=20 \rightarrow r=4$

RPTA: "B"

PROBLEMA 13 :

Timoteo no pudiendo cancelar una deuda de *S/.12950* le propone a su acreedor pagarle del siguiente modo : *S/. 600* al final del primer mes y cada mes siguiente *S/. 50* más que el anterior . ¿Cuál será el importe del último pago?

A) S/. 1400   B) 1200   C) 1500   D) 1250   E) 3000

RESOLUCIÓN :

* Datos : $S=12950\,;\ a_1=600\,;\ r=50$

* Como : $S_n=\left[2a_1+(n-1)r\right]\dfrac{n}{2}$

* Luego : $12950=\left[2(600)+(n-1)50\right]\dfrac{n}{2}$

* Operando : $n=14$

* Ahora : $\boxed{a_n=a_1+(n-1)r}$

$\rightarrow a_{14}=600+(14-1)50 \rightarrow a_{14}=1250$

RPTA: "D"

PROBLEMA 14 :

La suma de los tres primeros términos de una P. A. es *65* , la suma de los tres últimos es *307* y la suma de todos los términos es *3100.* ¿Cuántos términos tiene la P. A.?

A) 30   B) 40   C) 36   D) 42   E) 50

RESOLUCIÓN :

* por dato : $a_1+a_2+a_3=65$; $a_n+a_{n-1}+a_{n-2}=65$ } *sumando miembro a miembro*

$(a_1+a_n)+(a_{n-1}+a_2)+(a_{n-2}+a_3)=372$

$\rightarrow 3(a_n+a_1)=372 \rightarrow a_n+a_1=124$

* Además del último dato :

$\left(\dfrac{a_n+a_1}{2}\right).n=3100 \Rightarrow \left(\dfrac{124}{2}\right).n=3100 \rightarrow n=50$

RPTA: "E"

PROBLEMA 15 :

Un peón debe llevar una carretilla de arena al pie de cada uno de los *30* árboles que están al lado de una calzada ; los árboles están a *8m* de distancia y el montón de arena está a *10m* antes del primer árbol. ¿Cuánto habrá recorrido después de haber terminado su trabajo y vuelto la carretilla al montón de arena?

A)8250m   B)8200   C)7450   D)5680   E)7560

RESOLUCIÓN :

* Para cada uno lleva la arena y regresa al montón (hace doble recorrido)

$$\Rightarrow S=20+36+52+....$$

* Luego :

$r=16$; $n=30$; $a_1=20$

$\boxed{S_n=\left[2a_1+(n-1)r\right]\dfrac{n}{2}}$

$\rightarrow S=[2(20)+(30-1)16]\dfrac{30}{2}$

$\rightarrow S=[40+464].15=7560$

RPTA: "E"

PROBLEMA 16 :

En la progresión geométrica : ∺1:3:9:......

Calcular : $\dfrac{T_{15}}{T_5\times T_8}$

A) 1   B) 3   C) 2   D) 81   E) 27

RESOLUCIÓN :

* Primero calculamos : $q=\dfrac{27}{9}=3\,;\ T_1=1$

* Luego aplicamos : $\boxed{T_n=T_1q^{n-1}}$

* Entonces : $T_5=1\times3^{5-1}=3^4$

$T_8=1\times3^{8-1}=3^7 \wedge T_{15}=1\times3^{15-1}=3^{14}$

* Se pide : $\dfrac{3^{14}}{3^4\times3^7}=\dfrac{3^{14}}{3^{11}}=3^3=27$

RPTA: "E"

PROBLEMA 17 :

Hallar el doceavo término en :

$$\frac{1}{729};\frac{1}{243};\frac{1}{81};.....$$

A) 81 B) 343 C) 243 D) 729 E) 1

RESOLUCIÓN :

* Primero calculamos :

$$q=\frac{\frac{1}{243}}{\frac{1}{729}}=\frac{729}{243}=3\,;\,T_1=\frac{1}{729}\,;\,n=12$$

* Luego aplicamos : $\boxed{T_n=T_1q^{n-1}}$

* Reemplazando datos :

$$T_{12}=\frac{1}{729}(3)^{12-1}=\frac{3^{11}}{3^6}=3^5=243$$

RPTA: "C"

PROBLEMA 18 :

Calcular : $S=3+6+12+...(30\ términos)$

A) $2^{30}+1$ B) $2^{30}-1$ C) $2^{30}-2$ D) $3(2^{30}-1)$

RESOLUCIÓN :

* $\underbrace{3+6+12}_{\times 2\ \times 2}+....(30\ términos)$

* Se tiene : $t_1=3\,;\,q=2\,;\,n=30$

* Luego aplicamos : $\boxed{S_n=\frac{t_1(q^n-1)}{q-1}}$

* Reemplazando datos :

$$S_{30}=\frac{3(2^{30}-1)}{2-1}=3(2^{30}-1)$$

RPTA: "D"

PROBLEMA 19 :

Calcular : $S=5+5^2+5^3+...+5^{17}$

A) $3(5^{18}-4)$ B) $\frac{7}{5}(5^{17}-1)$ C) $\frac{5}{4}(5^{17}-1)$ D) 5^{20}

RESOLUCIÓN :

* Datos : $q=\frac{5^2}{5}=5\,;\,T_1=5\,;\,S_{17}=?$

* Luego aplicamos :

$$\boxed{S_n=T_1\left(\frac{q^n-1}{q-1}\right)}\rightarrow S_{17}=5\left(\frac{5^{17}-1}{5-1}\right)=\frac{5}{4}(5^{17}-1)$$

RPTA: "C"

PROBLEMA 20 :

Calcular : $S=36+18+9+...\infty$

A) 64 B) 32 C) 72 D) 81 E) 40

RESOLUCIÓN :

* $S=\underbrace{36+18+9}_{\times\frac{1}{2}\ \times\frac{1}{2}}+...\infty$

* Se observa que :

$$q=\frac{18}{36}=\frac{1}{2}\,;\,T_1=36\,;\,S_\infty=?$$

* Como se trata de una suma límite , luego aplicamos:

$$\boxed{S_\infty=\frac{T_1}{1-q}}\rightarrow S_\infty=\frac{36}{1-\frac{1}{2}}=\frac{36}{\frac{1}{2}}=72$$

RPTA: "C"

PROBLEMA 21 :

Calcular : $S=\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+...\infty$

A) 1 B) 2 C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{1}{8}$ E) 8

RESOLUCIÓN :

* Datos : $T_1=\frac{1}{8}\,;\,q=\frac{\frac{1}{16}}{\frac{1}{8}}=\frac{1}{2}\,;\,S_\infty=?$

* Entonces : $S_\infty=\frac{\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{2}}=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$

RPTA: "C"

PROBLEMA 22 :

Interpolar 3 medios geométricos entre 5 y 405

RESOLUCIÓN :

* $5:\underbrace{.......................}_{\text{3 medios geométricos}}:405$

* $a=5\,;\,b=405\,;\,m=3$

$$\boxed{q=\sqrt[m+1]{\frac{b}{a}}}\rightarrow q=\sqrt[3+1]{\frac{405}{5}}=\sqrt[4]{81}=3$$

* Entonces la sucesión geométrica será :

5 : 15 : 45 : 135 : 405

PROBLEMA 23 :

Hallar "x" en la P. G.:

$$\sqrt{2}^x\,;\,2^{2x-1}\,;\,4^{3x-2}\,;...$$

A) 1 B) 2 C) $\frac{2}{3}$ D) $\frac{4}{5}$ E) $\frac{7}{9}$

RESOLUCIÓN :

* Por propiedad de la razón : $q=\frac{a_2}{a_1}=\frac{a_3}{a_2}$

* Luego : $\frac{2^{2x-1}}{\sqrt{2}^x}=\frac{4^{3x-2}}{2^{2x-1}}$

* Buscando bases iguales : $2^{2x-1-\frac{x}{2}}=2^{6x-4-(2x-1)}$

* Igualando exponentes :

$$\frac{4x-2-x}{2}=6x-4-2x+1\rightarrow 4=5x\rightarrow x=\frac{4}{5}$$

RPTA: "D"

PROBLEMA 24 :

Hallar el valor de "*a*" en la *P. G.* :

$$(11-a);(2a-1);(9a+3);....$$

A) 1 B) 6 C) 8 D) 12 E) 14

RESOLUCIÓN :

* Por propiedad del término central :

$$\boxed{(T_c)^2=T_1.T_n}$$

* Para el problema : $(T_2)^2=T_1.T_3$

$\rightarrow(2a-1)^2=(11-a)(9a+3)$

$\rightarrow 4a^2-4a+1=99a+33-9a^2-3a$

$\rightarrow 13a^2-100a-32=0$

$\rightarrow(13a+4)(a-8)=0\rightarrow a=8$

RPTA: "C"

PROBLEMA 25 :

Hallar el término *18* de la *P. G.* sabiendo que el quinto término es *32* y el octavo es *4*.

A) $\frac{1}{128}$ B) $\frac{1}{256}$ C) 1 D) $\frac{1}{2}$ E) 16

RESOLUCIÓN :

* Por propiedad : $\boxed{T_x=T_y\,q^{x-y}}$

* Datos : $T_5=32;\ T_8=4$

* Entonces : $T_8=T_5\,q^{8-5}$

$$\rightarrow 4=32q^3\rightarrow\frac{1}{8}=q^3\rightarrow\frac{1}{2}=q$$

* Ahora consideremos a T_{18} y T_8, así :

$T_{18}=T_8\,q^{18-8}$

$$\rightarrow T_{18}=4\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\rightarrow T_{18}=\frac{2^2}{2^{10}}=\frac{1}{2^8}=\frac{1}{256}$$

RPTA: "B"

PROBLEMA 26 :

Si en una *P. G.* $a_2=\frac{1}{20}\wedge a_5=\frac{1}{1280}$, entonces el término a_1 es :

A) $\frac{1}{6}$ B) $\frac{1}{5}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{2}{5}$ E) $\frac{3}{5}$

RESOLUCIÓN :

* Datos : $a_2=\frac{1}{20};\ a_5=\frac{1}{1280}$

* Se sabe que : $\boxed{a_n=a_1.q^{n-1}}$

* También : $\boxed{a_m=a_n.q^{m-n}}$

$$a_5=a_2.q^{5-2}\rightarrow\frac{1}{1280}=\frac{1}{20}.q^3$$

$$\rightarrow q^3=\frac{1}{64}\rightarrow q=\frac{1}{4}$$

* Luego :

$$a_2=a_1.q^{2-1}\rightarrow\frac{1}{20}=a_1.\left(\frac{1}{4}\right)^2\rightarrow a_1=\frac{1}{5}$$

RPTA: "B"

PROBLEMA 27:

La suma de los seis primeros de una *P. G.* es igual a *9* veces la suma de los tres primeros. Hallar la razón.

A) 1 B) 2 C) 3 D) 6 E) $\frac{1}{2}$

RESOLUCIÓN :

* Sea la *P. G.* : $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, ...$

* Calculando S_6 : $S_6=\frac{a_1(q^6-1)}{q-1}$

* Calculando S_3 : $S_3=\frac{a_1(q^3-1)}{q-1}$

* Luego por datos : $S_6=9(S_3)$

$$\rightarrow\frac{a_1.(q^6-1)}{q-1}=9\frac{a_1.(q^3-1)}{q-1}$$

* Efectuando :

$$(q^3+1)(q^3-1)=9(q^3-1)\rightarrow q^3+1=9\rightarrow q=2$$

RPTA: "B"

PROBLEMA 28 :

Si se aumenta una misma cantidad a los números *20 ; 50* y *100* se forma una progresión geométrica cuya razón es :

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{4}{3}$ C) 2 D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{5}{3}$

RESOLUCIÓN :

* La progresión geométrica a formarse , será :

$$\div\div(20+x):(50+x):(100+x)$$

* Luego considerando el término central , se obtendrá : $(50+x)^2=(20+x)(100+x)$

$\rightarrow 2500+100x+x^2=2000+120x+x^2$

$\rightarrow 500=20x\rightarrow x=25$

* Se pide la razón , la cual será :

$$q=\frac{50+x}{20+x}=\frac{50+25}{20+25}=\frac{5}{3}$$

RPTA: "E"

PROBLEMA 29 :

Una familia está constituida por 4 miembros, el padre y sus tres hijos . Si el menor de estos tiene 32 años . Calcular la edad del padre sabiendo que dichas edades están en progresión geométrica y que la suma de las edades de los otros dos hijos es 90.

A) 64 años B) 62 años C) 56 años
D) 58 años E) 62,5 años

RESOLUCIÓN :

* Sean las edades : $32 : 32q : 32q^2 : 32q^3$

* Por dato : $32q^2+32q=90 \rightarrow 16q^2+16q-45=0$
$\rightarrow (4q+9)(4q-5)=0$

* De donde :

$\bullet\ q=-\frac{9}{4}$...(no cumple) $\bullet\ q=\frac{5}{4}$

* La edad del padre será :

$$32q^3=32\left(\frac{5}{4}\right)^3=62,5 \text{ años}$$

RPTA: "E"

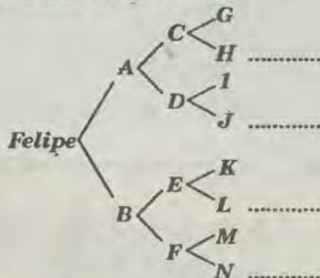
PROBLEMA 30 :

A las 8 a.m. Felipe y Rita escuchan una noticia. Felipe comunica esta noticia a dos de sus amigos. Cada uno de los cuales lo comunica a otros dos caballeros y así sucesivamente . Rita comunica la noticia a tres de sus amigas, cada una de las cuales lo comunica a otras tres damas, y así sucesivamente. Si cada persona demora 10 minutos en comunicar la noticia a sus oyentes, ¿cuántos caballeros y cuántas damas conocerán ésta noticia a las 9 a.m.?

A) 100;1 000 B) 105;1 005 C) 127;1 093

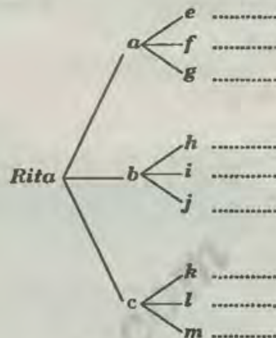
RESOLUCIÓN :

* Utilizando el diagrama del árbol para enfocar mejor el problema observaremos :



* De aquí se concluye que el número de caballeros es :

$$1+2+2^2+2^3+....+2^6=\frac{1(2^7-1)}{2-1}=127$$



* Análogamente el número de damas será :

$$1+3+3^2+....+3^6=\frac{1(3^7-1)}{3-1}=1093$$

RPTA: "C"

PROBLEMA 31 :

Hallar la suma de :

$$S=\frac{1}{7}+\frac{2}{7^2}+\frac{1}{7^3}+\frac{2}{7^4}+...$$

A) 7/16 B) 5/12 C) 1/16 D) 2/6 E) 3/6

RESOLUCIÓN :

* Separando adecuadamente , así :

$$S=\underbrace{\left(\frac{1}{7}+\frac{1}{7^3}+...\right)}_{\text{suma límite}}+\underbrace{\left(\frac{2}{7^2}+\frac{2}{7^4}+...\right)}_{\text{suma límite}}$$

$q=\frac{1}{7^2}$ $q=\frac{1}{7^2}$

* Luego :

$$S=\frac{\frac{1}{7}}{1-\frac{1}{7^2}}+\frac{\frac{2}{7^2}}{1-\frac{1}{7^2}}=\frac{\frac{1}{7}}{\frac{48}{49}}+\frac{\frac{2}{7^2}}{\frac{48}{49}}=\frac{7}{48}+\frac{2}{48}=\frac{3}{16}$$

RPTA: "E"

PROBLEMA 32:

Calcular : $S=1+\frac{1}{3}+\frac{3}{9}+\frac{7}{27}+\frac{15}{81}+....$

A) 1 B) $\frac{5}{2}$ C) 2 D) 3 E) $\frac{7}{[illegible]}$

RESOLUCIÓN :

* Transformando adecuadamente cada sumando :

$$S=1+\left(\frac{2-1}{3}\right)+\left(\frac{2^2-1}{3^2}\right)+\left(\frac{2^3-1}{3^3}\right)+\left(\frac{2^4-1}{3^4}\right)+...$$

$$\rightarrow S=1+\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{4}{9}-\frac{1}{9}\right)+\left(\frac{8}{27}-\frac{1}{27}\right)+\left(\frac{16}{81}-\frac{1}{81}\right)+...$$

$$\to S=\underbrace{\left(1+\frac{2}{3}+\frac{4}{9}+\frac{8}{27}+\frac{16}{81}+...\right)}_{\text{suma límite}}-\underbrace{\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}+...\right)}_{\text{suma límite}}$$

$$\to S=\frac{1}{1-\frac{2}{3}}-\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}\to S=\frac{5}{2}$$

RPTA: "B"

PROBLEMA 33:

Dados $a_1; a_2; a_3;$ .... a_n término de una progresión aritmética :

Si : $\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+....+\frac{1}{a_{K-1}a_K}=\frac{20}{309}$

y $a_1a_K=309$; determine el valor de «K»

A) 19 B) 20 C) 31 D) 21 E) 23

RESOLUCIÓN:

*Sea «d» la razón de la progresión aritmética:

$$a_1; a_2; a_3; .... a_n$$

$$\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+....+\frac{1}{a_{K-1}a_K}=\frac{20}{309}$$

* Multiplicado por «d»:

$$\frac{d}{a_1a_2}+\frac{d}{a_2a_3}+\frac{d}{a_3a_4}+....+\frac{d}{a_{K-1}a_K}=\frac{20d}{309}$$

$$\frac{a_2-a_1}{a_1a_2}+\frac{a_3-a_2}{a_2a_3}+\frac{a_4-a_3}{a_3a_4}+....++\frac{a_K-a_{K-1}}{a_{K-1}a_K}=\frac{20d}{309}$$

$$\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}\right)+\left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}\right)+\left(\frac{1}{a_3}-\frac{1}{a_4}\right)+....++\left(\frac{1}{a_{K-1}}-\frac{1}{a_K}\right)=\frac{20d}{309}$$

$$\to\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_k}=\frac{20d}{309}\to\frac{a_K-a_1}{a_1a_K}=\frac{20d}{309}$$

*Pero : $a_K=a_1+(K-1)d$

$a_1a_K=309$ ....(dato)

* Reemplazando tenemos :

$$\frac{a_1+(K-1)d-a_1}{309}=\frac{20d}{309}$$

$$\to(K-1)d=20d\to K=21$$

RPTA: "D"

PROBLEMA 34:

Determine cuántas progresiones de la siguiente forma $\div m^2 : (m+1)^2 : (m+2)^2$ existen e indique la suma de todas las razones de las progresiones .

A) -2 B) $\sqrt{3}$ C) 3 D) 6 E) 9

RESOLUCIÓN :

* Tenemos la P. G. :

$$\underbrace{m^2}_{a};\underbrace{(m+1)^2}_{b};\underbrace{(m+2)^2}_{c}$$

* Sabemos que : $b^2=a\cdot c$

$\to((m+1)^2)^2=m^2(m+2)^2$

$\to(m^2+2m+1)^2-(m^2+2m)^2=0$

* Factorizando :

$(2m^2+4m+1)(1)=0$

$\to 2m^2+4m+1=0\to m=m_1; m=m_2$

* Luego tendremos dos progresiones geométricas :

• Para $m=m_1$: $m_1^2;(m_1+1)^2;(m_1+1)^2$

$$\to r_1=\frac{(m+1)^2}{m_1^2}=\frac{2m_1^2+4m_1+2}{2m_1^2}$$

• Para $m=m_2$: $m_2^2;(m_2+1)^2;(m^2+2)^2$

$$\to r_2=\frac{(m_2+1)^2}{m_2^2}=\frac{2m_2^2+4m_2+2}{2m_2^2}$$

* Pero :

$$2m_1^2+4m_1+1=0\ \wedge\ 2m_2^2+4m_2+1=0$$

* Luego :

$$r_1=\frac{1}{2m_1^2}\ \wedge\ r_2=\frac{1}{2m_2^2}$$

$$r_1+r_2=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2m_1^2}+\frac{1}{2m_2^2}\right)$$

$$\to r_1+r_2=\frac{1}{2}\left(\frac{(m_1+m_2)^2-2m_1m_2}{(m_1m_2)^2}\right)$$

$$\to r_1+r_2=\frac{1}{2}\left(\frac{(-2)^2-2(1/2)}{(1/2)^2}\right)=6$$

RPTA: "D"

PROBLEMA 35 :

Dadas la progresión aritmética $\{x_n\}$ y la progresión geométrica $\{y_n\}$ tal que :

$\div a : a+m : b : a+9 : .... ; a>0$

$\div\div m : am : 4m : P....$

Calcule el valor de : $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x_n}{y_n}\right)$

A) 10 B) 10/3 C) 5/3 D) 3/10 E) 3/5

RESOLUCIÓN :

* Tenemos P. A.:

$$\{x_n\}:\underbrace{x_1}_{a};\underbrace{x_2}_{a+m};\underbrace{x_3}_{b};\underbrace{x_4}_{a+9};...$$

* Vemos que la razón es m :

$b=a+2m \wedge \underbrace{a+9=a+3m}_{m=3}$

* P. G :

$\{y_n\}:\underbrace{y_1}_{m};\underbrace{y_2}_{am};\underbrace{y_3}_{4m};\underbrace{y_4}_{p};...$

$\rightarrow (am)^2=(m)(4m)$

pero Como $a>0 \rightarrow a=2$

$\{x_n\}:2;5;8;11;...$
$\rightarrow x_n=2+(n-1)3=3n-1$

$\{y_n\}:3;6;12;24....$
$\rightarrow y_n=3(2)^{n-1}$

* Piden :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x_n}{y_n}\right)=\frac{2}{3}+\frac{5}{6}+\frac{8}{12}+\frac{11}{24}+....=S$$

* Multiplico por 2 : $\frac{4}{3}+\frac{5}{3}+\frac{8}{6}+\frac{11}{12}+...=2S$

* Restando término a término en la forma indicada:

$$\frac{4}{3}+\frac{3}{3}+\frac{3}{6}+\frac{3}{12}+\frac{3}{24}+............=S$$

$$\rightarrow S=\frac{4}{3}+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+..............$$

* Nuevamente multiplico por 2 :

$$2S=\frac{8}{3}+2+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+....$$

* Restando en la forma indicada :

$$S=\frac{8}{3}+2-\frac{4}{3}=\frac{10}{3}\rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x_n}{y_n}\right)=\frac{10}{3}$$

RPTA: "B"

PROBLEMA 36 :

Los números x ; y ; z forman una progresión geométrica de razón r con $x\neq y$; $x\neq 0$. Si x ; $2y$; $3z$ forman una progresión aritmética , entonces r es igual a :

A) 1/4 B) 1/2 C) 4 D) 1/3 E) 2

RESOLUCIÓN :

* Tenemos la progresión geométrica de razón r :

$$x;\ y;\ z\rightarrow y=xr \wedge z=xr^2$$

* También tenemos la progresión aritmética :

$$\underbrace{x}_{a};\ \underbrace{2y}_{b};\ \underbrace{3z}_{c}$$

* Sabemos que : $a+c=2b$

$\rightarrow x+3z=4y$

$x+3xr^2=4xr$

$1+3r^2=4r$

$3r^2-4r+1=0$

3r -1
r -1

$(3r-1)(r-1)=0\rightarrow r=\frac{1}{3}$ ó $r=1$

* Como : $x\neq y$

* entonces: $r=\frac{1}{3}$

RPTA: "D"

PROBLEMA 37:

Calcule el valor de :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)^2}\ ;\text{Si}:\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=K_0\pi$$

A) $2K_0\pi$ B) $1-K_0\pi$ C) $2-K_0\pi$

D) $K_0\pi-1$ E) $K_0\pi-2$

RESOLUCIÓN :

*Tenemos : $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=K_0\pi$

$$\rightarrow\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+...=K_0\pi$$

*Nos piden :

$$C\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)-n}{n(n+1)^2}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{n(n+1)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{(n+1)^2}$$

* Para : $n=1:\frac{1}{1}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2^2}$

$n=2:\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{3^2}$

$n=3:\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\frac{1}{4^2}$ +

$n=4:\frac{1}{4}-\frac{1}{5}-\frac{1}{5^2}$

* Sumado :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)^2}=1-\underbrace{\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+...\right)}$$

$=1-(K_0\pi-1)$

$=2-K_0\pi$

RPTA: "C"

PROBLEMA 38:

Dada la progresión : $\div\div m^2:3:p^2$

Halle la razón , si : $m-p=1$ y $m>1$

A) $\frac{2\sqrt{3}}{2}$ B) $\frac{7-\sqrt{13}}{6}$ C) $\sqrt{13}$ D) $\frac{\sqrt{13}-1}{6}$ E) $\frac{1+\sqrt{13}}{6}$

RESOLUCIÓN :

* Tenemos la progresión geométrica : $\underbrace{m^2}_{a}$; $\underbrace{3}_{b}$; $\underbrace{p^2}_{c}$
* como : $b^2=ac$

$\rightarrow q=m^2p^2$

$\rightarrow mp=3$ ó $mp=-3$

* Además : $m-p=1$; $m>1$

$m=p+1$ y vemos que $p>0$

*Luego : $mp=3$

$\rightarrow(p+1)(p)=3$

$\rightarrow p^2+p-3=0$

$\rightarrow p=\frac{-1+\sqrt{13}}{2}$

*Para hallar la razón r de la P. G. :

$$r=\frac{p^2}{3}=\frac{\left(\frac{-1+\sqrt{13}}{2}\right)^2}{3}=\frac{7-\sqrt{13}}{6}$$

RPTA: "B"

PROBLEMA 39:

Dada la progresión : $\because a_1 : a_2 : a_3 : \ldots$

Si la suma de todos los términos es $\sqrt{2}+1$ además $a_1r=\frac{1}{2}$ y r es la razón de la progresión , indique el valor de $\sqrt{a_8^{-1}}$

A) 3 B) 2 C) 4 D) 5 E) 1

RESOLUCIÓN :

* Sabemos que para la P. G. de razón $r\in\langle -1;1\rangle$

$a_1 ; a_2 ; a_3 ; a_4 ;\ldots$

* Se cumple :

$$a_1+a_2+a_3+a_4+\ldots=\frac{a_1}{1-r}$$

$$a_1+a_2+a_3+a_4+\ldots=\sqrt{2}+1\rightarrow\frac{a_1}{(1-r)}=\sqrt{2}+1;$$

* tenemos:

$$a_1r=\frac{1}{2}\rightarrow\frac{a_1r}{(1-r)r}=(\sqrt{2}+1)\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1}$$

$$\rightarrow\frac{\frac{1}{2}}{r(1-r)}=\frac{1}{\sqrt{2}-1}\rightarrow 2r(1-r)=\sqrt{2}-1$$

$$\rightarrow r(1-r)=\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{2}$$

$$\rightarrow r(1-r)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\rightarrow r=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

* Como : $a_1r=\frac{1}{2}\rightarrow a_1=\frac{1}{\sqrt{2}}$

* Luego : $a_8=a_1r^7=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^7=\frac{1}{16}$

*entonces : $\sqrt{a_8^{-1}}=4$

RPTA: "C"

PROBLEMA 40:

Dada la progresión aritmética : $5 ; 9 ; 13 ; 17 ; \ldots$

¿ Cuántos términos como mínimo debe tener la progresión para que entre los elementos existan 10 cuadrados perfectos?

A) 109 B) 110 C) 115 D) 119 E) 121

RESOLUCIÓN :

*Dada la progresión aritmética : $5 ; 9 ; 13 ; 17 ; \ldots$

*Tenemos que : $a_n=5+(n-1)4=4n+1$

*Si queremos a_n sea cuadrado perfecto :

$$\rightarrow 4n+1=p^2\rightarrow 4n=p^2-1$$

* Vemos que p debe ser impar : $p=2K+1$; $K\in\mathbb{Z}^+$

$\rightarrow 4n=(2K+1)^2-1=(2K+2)(2K)$

$n=(K+1)K; K\in Z^+\rightarrow n=2 ; 6 ; 12 ; 20 ;\ldots\ldots$

Los términos cuadrados perfectos n son :

$$a_2 ; a_6 ; a_{12} ; a_{20} ;\ldots\ldots\ldots$$

* para tener 10 términos cuadrados perfectos «n» debe ser mínimo : $11\times 10=110$

RPTA: "B"

PROBLEMA 41 :

Dada la progresión : $\because x_1 : x_2 : x_3 : \ldots . x_n$

tal que : $x_1 . x_2 . x_3 \ldots x_n=1$

si : $x_1+x_2+\ldots\ldots+x_n=5$

Calcule el valor de : $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\ldots .+\frac{1}{x_n}$

A) 1 B) 5/2 C) 1/5 D) 5 E) 25

RESOLUCIÓN :

* Sean :

$x_1=a$; $x_2=ar$; $x_3=ar^2$; ... ; $x_{n-1}=a^{n-2}$;

$x_n=ar^{n-1}$

$$\left.\begin{array}{l} x_1x_n=a^2r^{n-1}\\ x_2x_{n-1}=a^2r^{n-1}\\ x_3x_{n-2}=a^2r^{n-1}\\ \vdots\\ x_nx_1=a^2r^{n-1}\end{array}\right\}(\cdot)$$

* Multiplicando tenemos :

$$\underbrace{(x_1 x_2 \dots x_n)}_{1}^2 = (a^2 r^{n-1})^n \rightarrow a_2 r^{n-1} = 1$$

* Luego :

$$x_n = \frac{1}{x_1}; x_{n-1} = \frac{1}{x_2}; x_{n-2} = \frac{1}{x_3}; \dots; x_r = \frac{1}{x_n}$$

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \dots + \frac{1}{x_n} =$$

$$= x_n + x_{n-1} + x_{n-2} + \dots + x_1 = 5$$

RPTA: "D"

PROBLEMA 42 :

Dada la progresión : $\div\div m : n : \dots : a : a+b : \dots : p$
Indique el producto de los términos de la progresión.

A) 1 B) 0 C) mp D) Faltan datos E) b

RESOLUCIÓN :

* Tenemos la progresión aritmética :

$$m ; n ; \dots ; a ; \underline{b} ; \underline{a+b} ; \dots p$$

* Vemos que la razón es : $(a+b) - b = a$
* Luego , tendremos :

$$m; n; \dots ; 0; a; b; a+b; \dots ; p$$

* Producto de términos = 0

RPTA: "B"

EJERCICIOS SOBRE SUCESIONES

01 Calcular la suma de los tres primeros términos de la siguiente sucesión :

$$\{a_n = 2n - 3\}_{n \in N}$$

A) 1 B) 3 C) 7 D) 9 E) 8

02 Calcular la suma de los tres primeros términos de sucesión , cuyo término general es : $T_n = n^3 - 2$

A) 25 B) 30 C) 32 D) 37 E) 41

03 Determinar "a_{30}" en la siguiente sucesión :

$$\left\{a_n = \frac{n^2 - 1}{n - 1}\right\}_{n \in N}$$

A) 31 B) 30 C) 32 D) 29 E) 900

04 Determinar "a_{2005}" en la siguiente sucesión :

$$\{a_n = 2006 - n\}_{n \in N}$$

A) 1 B) 0 C) 2005 D) 2006 E) -1

05 Calcular "a_{2006}" en la siguiente sucesión:

$$\{a_n = 1\}_{n \in N}$$

A) 0 B) 1 C) 2 D) 2005 E) 2006

06 Calcular la ley de Formación de la siguiente sucesión :

$$\{a_n\}_{n \in N} : 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; \dots\dots$$

A) 2 B) $n+2$ C) n^2+1 D) $n+1$ E) $n-1$

07 Calcular la ley de Formación de la siguiente sucesión :

$$\{T_n\}_{n \in N} : \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{1}{5}; \dots\dots$$

A) $\frac{1}{n}$ B) $\frac{1}{n^2+2}$ C) $\frac{1}{n+2}$ D) $\frac{1}{n+3}$ E) $\frac{1}{4-n}$

08 Determinar el término general de la siguiente sucesión :

$$\{a_n\}_{n \in N} : \frac{2}{3}; 1; \frac{4}{3}; \frac{5}{3}; \dots\dots$$

A) $\frac{n+1}{n+2}$ B) $\frac{3}{n}$ C) $\frac{n}{3}$ D) $\frac{n+3}{3}$ E) $\frac{n+1}{3}$

09 Determinar el término enésimo de la siguiente sucesión :

$$\{a_n\}_{n \in N} : \sqrt{5} ; \sqrt{5} ; \sqrt{5} ; \dots$$

A) n B) $\sqrt{5}n$ C) $\sqrt{5}n$ D) 5 E) $\sqrt{5}$

10 Calcular "a_{20}" en la siguiente sucesión :

$$\{a_n\}_{n \in N} : 3; 4; 5; 6; \dots\dots$$

A) 23 B) 21 C) 22 D) 24 E) 26

11 Sea la sucesión : $\{a_n = (-1)^n (n+1)\}_{n \in N}$

Calcular : $a_3 + a_4 + a_5$

A) 5 B) –5 C) 0 D) 6 E) 7

12 Sea la sucesión : $\{a_n = (-1)^{n+1} \times 5^n\}_{n \in N}$

Calcular : $a_6 + a_7$

A) 5^7 B) 5^6 C) 3×5^6 D) 4×5^6 E) 0

13 Sea la sucesión: $a_n = 1 + 2a_{n-1} ; a_1 = 5$

Calcular : "a_3"

A) 5 B) 71 C) 68 D) 47 E) 23

14 Sea la sucesión : $T_n = T_{n-2} + T_{n-1}; T_1 = 8 \wedge T_2 = 10$

Calcular : $T_4 + T_3$

A) 46 B) 56 C) 32 D) 34 E) 37

15 Sea la sucesión : $\{S_n = n^2 + n\}_{n \in N}$

Calcular la suma de las dos últimas cifras de S_{2006}

A) 4 B) 6 C) 12 D) 14 E) 18

16 Sea la sucesión : $\{a_n = (-1)^{n+1}(n+1)\}_{n\in N}$

Calcular : $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{2006}$

A) -1 B) 2006 C) -2006 D) -1003 E) 1003

PRIMERA PRACTICA DIRIGIDA

PROGRESIONES ARITMÉTICAS

01 Hallar «x» para que $x+1\ ;\ 4x-2\ ;\ 3x+6$ estén en P. A.

A) 1/2 B) 2 C) 3 D) 4 E) -4

02 Si : $+x+y\ ;\ 4x-3y\ ;\ 5y+3x$

Son tres términos en progresión aritmética , luego x/y es :

A) 3 B) 5/2 C) 1/3 D) 3/2 E) 4/3

03 El tercero y sexto término de una P. A. suman 57 y el quinto y décimo 99. Hallar el décimo término

A) 4 B) 18 C) 32 D) 39 E) 67

04 Si : x^2, $3x^2$ y $10x$ forman una P. A., entonces la razón de la progresión es :

A) 2 B) 4 C) 6 D) 8 E) 10

05 ¿Cuál es el número del lugar 121 en la P.A.?

$$\div 17;\ 21;\ 25;\ ......$$

A) 315 B) 373 C) 405 D) 453 E) 497

06 En una P. A. el producto de primer y quinto término es igual al cuadrado del término central disminuido en 4. Hallar la razón .

A) 1 B) 2 C) 2/3 D) 3 E) 3/2

07 Calcular la suma de los 4 primeros términos en la siguiente P. A.

$$\div x, x+\sqrt{2}, 2x, ...(x \neq 0)$$

A) $21\sqrt{2}$ B) $24\sqrt{2}$ C) $28\sqrt{2}$ D) $32\sqrt{2}$ E) $14\sqrt{2}$

08 Si las edades de José , Carlos y Pedro forman una progresión aritmética cuya suma es 63. Calcule la edad de Carlos si se sabe que no es el mayor ni el menor .

A) 22 B) 23 C) 24 D) 20 E) 21

09 La suma del tercer y octavo término de una P. A. es 41 y la relación del quinto al séptimo es 19/25 . El segundo término es :

A) 8 B) 9 C) 10 D) 11 E) 12

10 En una P. A. la razón y el número de términos son iguales y la diferencia de los extremos es 30. Calcular el valor de la razón.

A) 5 B) -5 C) 6 D) -6 E) 4

11 Una P. A. tiene un número impar de términos. El central vale 22 y el producto de los extremos 259. La diferencia del mayor menos el menor es :

A) 10 B) 20 C) 30 D) 40 E) 50

12 La suma de los «n» primeros términos de una P. A. es 117 ; la razón 2 y el primer término 5 . Hallar el valor de n .

A) 13 B) 9 C) 12 D) 10 E) 15

13 Hallar la razón de una P. A. donde la suma de «n» primeros términos es : $S_n = 5n^2 + 7n$

A) 10 B) 11 C) 14 D) 13 E) 12

14 En una P. A. : $a_2 + a_5 = 14$

$$a_3 + a_7 = 8$$

Hallar : a_{50}

A) -86 B) -80 C) -79 D) 84 E) -84

15 El quinto y noveno término de una P.A. son 17 y 33 respectivamente . Halle el décimo término .

A) 31 B) 27 C) 35 D) 43 E) 37

16 Si se sabe que a; a^2 y $3a$ son los tres términos de una P.A. Dar la suma de los 10 primeros términos.

A) 110 B) 111 C) 112 D) 120 E) 111

17 Si la suma de los cuatro términos de una P. A. creciente es 16 y la suma de sus cuadrados es 144 . Hallar el mayor .

A) 8 B) 6 C) 12 D) 10 E) -2

18 Calcular el número de términos de una P.A. cuyo primer término es $(a-2)$, la razón $(2-a)$ y la suma de todos sus términos $(10-5a)$

A) 2 B) 3 C) 5 D) 6 E) 8

19 Interpolar 30 medios aritméticos entre 7 y 100 , señalando el valor del quinto término .

A) 10 B) 19 C) 18 D) 16 E) 15

20 De una progresión aritmética se tiene la siguiente información :

$$\frac{a_9}{a_2} = 5\ ;\ a_{13} - 5 = 2a_6$$

obtener : S_{20}

A) 920 B) 820 C) 760 D) 680 E) 950

TAREA DOMICILIARIA

01 De una progresión aritmética se sabe :

$$a_n = 16 \;;\; n = 10 \;;\; S_n = 70$$

Obtener la razón :

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

02 En la P.A.

$$\div\, 0, 3, 6, 9, 12, ...$$

Hallar la cantidad de términos que se deben tomar a partir del undécimo término para que dé una suma igual a 495 .

A) 9 B) 10 C) 11 D) 12 E) 13

03 Si el número de términos de la P. A.:

$\div\left(\frac{2}{5}\right)^2 ....\left(\frac{1}{2}\right)^2$ es 8. Hallar el cociente entre las suma de todos sus términos y la razón .

A) $\frac{41}{30}$ B) $\frac{1148}{9}$ C) $\frac{252}{41}$ D) $\frac{1}{9}$ E) $\frac{7}{9}$

04 En la P.A.: $(x-6); (x-1); (x+4); (x+9)$ .... Hay 37 términos. Hallar el último término .

A) $x-20$ B) $x+174$ C) $x+1$
D) $x+2$ E) $x-4$

05 La suma de los n primeros términos de una P.A. es $2n^2+3n$. Hallar el término que ocupa el lugar 50 y dar como respuesta la suma de sus cifras .

A) 16 B) 12 C) 9 D) 7 E) 3

SEGUNDA PRACTICA DIRIGIDA

PROGRESIONES GEOMÉTRICAS

01 En la P. G.: $\div\div(x-3): x : 2x$. Hallar x.

A) 3 B) 6 C) 8 D) 10 E) 12

02 En la P. G. : $T_5 = 2$

$$T_{11} = 128$$

Hallar la razón :

A) 2 B) 1/2 C) 1/3 D) $\sqrt{2}$ E) $\sqrt{3}$

03 Hallar 4 números en P. G. tal que la suma de los dos primeros términos sea 28 y de los otros dos 175. Indicar el mayor número.

A) 120 B) 125 C) 110 D) 118 E) 130

04 Calcular : $\frac{t_8}{t_6}$ de la siguiente progresión :

$$\div\div 2 : 4 : 8 : ......$$

A) 2 B) 4 C) 8 D) 16 E) 20

05 En la siguiente P. G.: $\div\div \sqrt{2} : n : 2\sqrt{n}$

Calcular el valor de «n».

A) 1 B) 4 C) 3 D) 2 E) 5

06 De la siguiente P. G.:

$$\div\div 1 : 3 : 9 : ....$$

Calcular S_{20}, e indique en que cifra termina dicha suma .

A) 1 B) 0 C) 5 D) 2 E) 3

07 Sea : $\div\, a \cdot c \cdot d$

$\div\div\, a : b : d$

$a + d = 150$
$c - b = 15$

Hallar $a + b + c + d$

A) 280 B) 285 C) 290 D) 295 E) 300

08 La suma de 3 números en P.G. es 248 y la diferencia de los términos extremos es 192. Indicar el mayor de los números .

A) 120 B) 160 C) 180 D) 200 E) 220

09 Calcular la suma de los «n» términos en la P. G.

$$\div\div\, 1 : 5 : 25 : ......$$

A) $\frac{n+5}{4}$ B) $\frac{5^n+1}{4}$ C) $\frac{5^n-1}{4}$ D) $\frac{5^{n+1}}{4}$ E) $\frac{4^n+1}{5}$

10 Dividir el número 221 en 3 partes que forman una P.G. tal que el 3er término excede al primero en 136. Indicar el menor.

A) 31 B) 16 C) 17 D) 19 E) 34

11 Si le sumamos 3 números consecutivos a 3;7 y 16 respectivamente obtenemos una P.G. Calcular la razón de la progresión .

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

12 La suma de los 5 primeros términos de una progresión geométrica es 155 y la diferencia entre el $5^{to.}$ término y el primero es 75. Halle la razón si es un número entero menor que 9 .

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

13 Calcular el producto de los 10 términos de una

progresión geométrica cuyo sexto y último término son 4 y $0,25$ en ese orden.

A) 2^{25} B) 2^{23} C) 2^{24} D) 2^{12} E) 2^{15}

14 Se deja caer una bola desde una altura de 17 metros; cada rebote la bola se eleva los $2/3$ de altura desde la cual cayó, la última vez. ¿Qué distancia recorre la bola hasta que queda teoricamente en reposo?

A) 35 m B) 65 m C) 85 m D) 68 m E) 100 m

15 En una P.G. se cumple : $\frac{T_4}{T_1}=8$

$$T_4 + T_1 = 45$$

A) 15 y 30 B) 12 y 28 C) 15 y 25
D) 10 y 20 E) 10 y 15

16 ¿Cuál es el término central de una P.G. de tres términos positivos, si el producto de los dos primeros es 24 y el producto de los últimos es 54?

A) 8 B) 9 C) 6 D) 3 E) 12

17 Hallar los cuatro ángulos de un cuadrilátero sabiendo que están en P. G. y que el último es 9 veces el segundo. Indicar el menor ángulo.

A) 9° B) 18° C) 12° D) 17° E) 11°

18 Calcule la siguiente suma límite :

$$S=1+\frac{2}{3}+\frac{3}{3^2}+\frac{4}{3^3}+\frac{5}{3^4}+\frac{6}{3^5}+....$$

sugerencia multiplique a S por $1/3$ y reste con S y luego aplique la suma límite.

A) 1/4 B) 9/4 C) 2/3 D) 1/4 E) 3/2

19 Se tiene la siguiente sucesión que forma una progresión geométrica $\div a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 ...$ reduzca :

$$1-2\left[\frac{a_2}{a_1}\right]^9+\left[\frac{a_2a_3}{a_1^2}\right]^3+\frac{a_3a_4a_5}{a_1^3}$$

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

20 Sea la sucesión geométrica :

$$S: 1;\frac{1}{m};\frac{2}{n^2+4};\frac{1}{8};\frac{1}{16};.......$$

calcule : $m+n$

A) 4 B) 6 C) D) 2 E) 7

TAREA DOMICILIARIA

01 Dados 3 números en progresión geométrica de razón 4 se sabe que el cuádruplo de la suma de los menores, excede en 28 unidades al mayor, ¿cuánto vale éste?

A) 102 B) 112 C) 122 D) 132 E) 142

02 Hallar la suma de los infinitos términos de:

$$\frac{1}{7}+\frac{2}{7^2}+\frac{1}{7^3}+\frac{2}{7^4}+....$$

A) 9/24 B) 3/16 C) 5/16 D) 9/16 E) 5/24

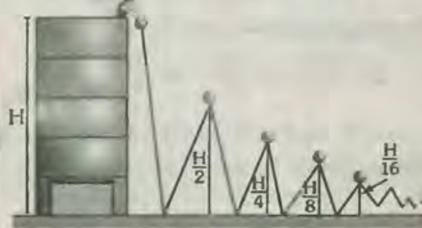
03 Calcular la suma límite :

$$S=\left(\frac{2}{3}\right)^2+2\left(\frac{2}{3}\right)^4+3\left(\frac{2}{3}\right)^6+4\left(\frac{2}{3}\right)^8+....$$

A) $\frac{36}{25}$ B) $\frac{25}{36}$ C) $\frac{1}{4}$ D) 4 E) 20

04 Un niño lanza una pelota desde la ventana de un edificio y esta recorre como indica la figura, es decir las alturas que alcanza la pelota es :

$H;\frac{H}{2};\frac{H}{4};\frac{H}{8};\frac{H}{16};.....$ calcule la suma de estas



A) H B) 2H C) 3H D) 5H E) H/3

05 Sabiendo que $x_0=1; x_1=1/2; x_2=1/4;....x_n$.

Halle : $x_{2001}-x_{2002}-2x_{2003}$

A) 1 B) $(2004)^{-1}$ C) $\frac{1}{2^{2000}}$ D) 0 E) $\frac{1}{2}$

TERCERA PRACTICA DIRIGIDA

01 En una progresión aritmética se conoce que:

$$a_7 = 10 \text{ y } a_{10} = 7$$

Calcular el término a_{15}

A) 3 B) 2 C) -2 D) -3 E) 0

02 Hallar la suma:

$$S = 7 + 13 + 19 + 25 + ... + (6n + 1)$$

A) $n^2 + 2n$ B) $2n^2 + 3n$ C) $3n^2 + 4n$
D) $2n^2 - 3n$ E) $3n^2 - 4n$

03 De una progresión aritmética se sabe que:

$$a_3 + a_5 = 57$$
$$a_3 + a_{10} = 99$$

¿A qué intervalo pertenece la razón?

A) [0; 6> B) <0; 5] C) <5; 7> D) ≤6;7] E) <–1;0>

04 En una P.A. la razón y el número de términos son iguales, la suma de los términos es **156** y la diferencia de los extremos es **30**. Calcular el último término.

A) 29 B) 35 C) 37 D) 39 E) 41

05 Proporcionar la suma de los **20** primeros términos de la siguiente progresión decreciente:

$$\div\, x^2.(2x).3\,.\,...$$

A) –500 B) –420 C) –400 D) –390 E) –280

06 Se interpolan **5** medios aritméticos entre los números **4** y **22**. Calcular la razón de interpolación

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

07 En la progresión: ÷ 3 . ... 30 . ... p

el número de términos comprendidos entre **3** y **30** es igual al número de los comprendidos entre **30** y **p**. Calcular la razón si además la suma de todos los términos es **570**.

A) 6 B) 5 C) 4 D) 3 E) 2

08 De una P.A se tiene: $S_n - a_n = (n-1)(n+3)$

donde:

a_n: Término general

S_n: Suma de los «n» primeros términos . Si «n» es impar, proporcionar el término central.

A) n + 1 B) n + 2 C) n+3 D) n + 4 E) n + 5

09 En la progresión: ÷ a.b.c.d

la suma de sus términos es «n» y la razón es «2n». Hallar: a^2-d^2

A) n^2 B) $-3n^2$ C) $6n^2$ D) $-4n^2$ E) $12n^2$

10 Dada la progresión aritmética:

$$\div\,\frac{1}{a+b}.\frac{1}{b+c}.\frac{1}{c+a}$$

obtener: $\dfrac{a^2}{b^2+c^2}$

A) 2 B) 4 C) 1 D) 1/2 E) 1/4

11 El término en la posición **17** de:

$$\div\div\, 8: 32: 128: ...$$

es igual a 2^k Señalar el valor de «k»

A) 41 B) 39 C) 38 D) 35 E) 32

12 Las edades de un padre y sus dos hijos están en progresión geométrica; el producto de todas las edades es **1 331** Indicar la edad del hijo mayor.

A) 7 B) 9 C) 11 D) 13 E) 14

13 Indicar el menor de **4** números en P.G sabiendo que la suma de sus extremos es **140** y la suma de los términos centrales es **60**.

A) 4 B) 5 C) 10 D) 15 E) 45

14 Si a los números **3; 7** y **13** se les suma una misma cantidad resulta, en ese orden, una progresión geométrica. Determinar la razón de dicha progresión.

A) 0,6 B) 1,2 C) 1,5 D) 2,5 E) 3

15 Mostrar los cuatro medios geométricos interpolados entre **160** y **5**.

A) 5; 10;20;40 B) 10; 30;60; 90 C) 80;40;20; 10
D) 120:90,60;30 E) 10; 30; 90; 120

16 Según: $\div\div\,(x-3) : x : (x+12)$

$\div\div\, y: \sqrt{x} : (y+3)$

$\div\div\, 2y: 2x: z$

calcular «z»

A) 12 B) 16 C) 20 D) 24 E) 32

17 Los términos de lugares **2a** y **2b** de una progresión geométrica son, respectivamente, m^2 y n^2. ¿Cuál es el término de lugar $a + b$?

A) mn B) $(mn)^2$ C) $\dfrac{mn}{2}$

D) $(m+n)^2$ E) m^2+n^2

18 Si: a; b; c; d están en progresión geométrica, además: $a-d=7$

calcular: $(a-c)^2 + (b-c)^2 + (b-d)^2$

A) 91 B) 49 C) 34 D) 19 E) 14

CLAVES DE LA PRIMERA PRACTICA				
01) B	02) A	03) A	04) D	05) E
06) A	07) E	08) E	09) C	10) C
11) C	12) B	13) E	14) A	15) E
16) A	17) D	18) C	19) B	20) B
01) B	02) C	03) B	04) B	05) E

CLAVES DE LA SEGUNDA PRACTICA				
01) B	02) A	03) B	04) C	05) D
06) A	07) B	08) C	09) C	10) C
11) B	12) B	13) E	14) C	15) D
16) C	17) A	18) B	19) B	20) A
01) B	02) B	03) A	04) B	05) D

CLAVES DE LA TERCERA PRACTICA

1)B	2)C	3)C	4)E	5)D	6)B	7)D	8)D	9)B	10)D
11)D	12)C	13)B	14)C	15)C	16)E	17)A	18)B		



OBJETIVOS:

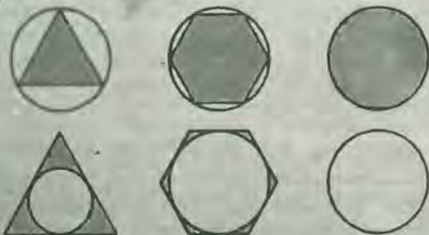
* Entender el concepto de límite de una función.
* Calcular límites finitos, infinitos y al infinito.
* Determinar la existencia o no existencia de límites y calcularlos.
* Evaluar límites de funciones haciendo uso del Teorema del Sandwich.
* Determinar si una función es continua o no en un valor dado o en un intervalo .

INTRODUCCIÓN:

Los antiguos griegos lograron establecer de forma deductiva que la razón entre la longitud de cualquier circunferencia y su diámetro era una constante; el cálculo de esta constante, designada actualmente con la letra griega π, entusiasmó desde la antigüedad por igual a matemáticos , astrónomos, filósofos y curiosos aficionados. Hoy en día los grandes ordenadores han logrado calcular π con más de un millón de cifras decimales.

Arquímedes *(287 – 212 a.C.)* observó que la circunferencia podía tomarse como el límite de polígonos regulares inscritos y circunscritos .

A partir de esa observación diseñó un método para calcular el valor de π ; para lograrlo , calculó los perímetros de varios polígonos regulares inscritos y circunscritos a una circunferencia de diámetro igual a la unidad . Arquímedes fue duplicando en cada paso el número de lados de su polígono llegando a medir el perímetro de un polígono de *96* lados . Aunque en cada caso el perímetro era demasiado grande , fue acercándose a la medida de la circunferencia conforme iba duplicando el número de lados . Finalmente estableció que el valor de π se encontraba entre *3 10/71* y *3 1/7*.



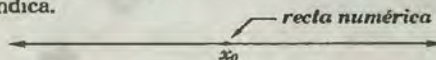
Arquímedes logró demostrar que su método llevaba indefectiblemente a un solo valor ; en otras palabras , la longitud de la circunferancia que utilizó era el límite común de los perímetros de los polígonos regulares inscritos y circunscritos a medida que los lados crecen indefinidamente .

La circunferencia no es la única curva que se puede definir como el límite de ciertos procesos, existen otras que por decir lo menos son «monstruosaa» .

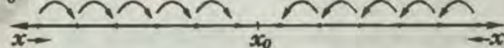
El concepto de límite es un hecho fundamental en la matemática moderna y es la base sobre la que se sustentan otras ideas como la derivada . Durante el siglo *XVII*, los matemáticos dedicados al estudio de las derivadas e integrales se vieron obligados a trabajar con procesos infinitos que no entendían bien. Estos problemas tardarían dos siglos en aer resueltos.

IDEA DE APROXIMACIÓN

Sea x_0 un punto fijo en la recta numérica tal como se indica.



Cuando un número desconocido x se aproxima a x_0, lo puede hacer por valores mayores o menores que x_0.



Por la izquierda de x_0 (menores que x_0)

En este caso se dice que x se aproxima a x_0 por la izquierda , por tanto se simboliza como $x \to x_0^-$, expresión que se lee : "x es menor que x_0 pero cercano a él".

Por la derecha de x_0 (mayores que x_0)

En este otro caso , decimos que x se aproxima a x_0 por la derecha , por tanto se simboliza como $x \to x_0^+$, expresión que se lee : "x es mayor que x_0 pero cercano a él"

En los siguientes ejemplos , analizaremos qué sucede con las imágenes $f(x)$ cuando las preimágenes x varían .

EJEMPLO 1:

Sea la función : $f(x) = 20 + x$, si asignamos valores a "x" cercanos a 2, ¿qué sucede con $f(x)$?

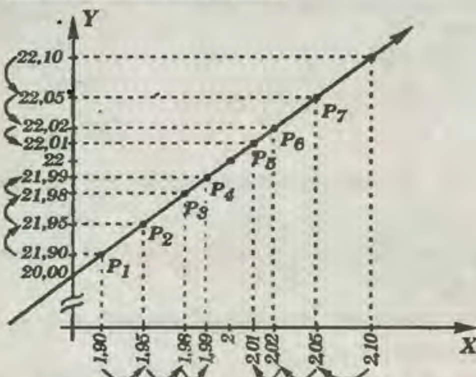
RESOLUCIÓN :

Por la izquierda — *Por la derecha*

x	1,90	1,95	1,98	1,99	2	2,01	2,02	2,05	2,10
$f(x)$	21,90	21,95	21,98	21,99	22	22,01	22,02	22,05	22,10

* Si tabulamos los valores anteriores y efectuamos una gráfica , se tiene :

x	1,9	1,95	1,98	......
y	21,9	21,95	21,98	......



Por la izquierda de 2 *Por la derecha de 2*

* Intuitivamente podemos darnos cuenta que al aproximarse los valores de «*x*» al valor **2** , se tiene que las imágenes ***f(x)*** se se aproximan al valor **22** .

* Esto se simboliza denotando :

«Cuando $x \to 2$, se tiene que $f(x) \to 22$ ». Sabemos que estamos aproximando, por ello no hacemos hincapié que para : $x = 2$, se obtenga $f(x) = 22$.

EJEMPLO 2:

Consideremos una función real de variable real.

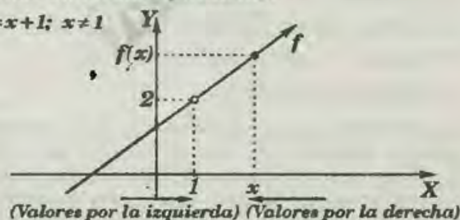
$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}; \quad x \neq 1$$

¿Qué sucede si x toma valores muy cercanos a *1*?

RESOLUCIÓN :

* Para ello simplificamos la expresión inicial obteniendo en forma equivalente.

$f(x) = x + 1; \ x \neq 1$



(Valores por la izquierda) (Valores por la derecha)

* Valores a la izquierda de ***1 :***

x	0	0,5	0,7	0,9	0,95	0,98	0,99	0,995	0,999
f(x)	1	1,5	1,7	1,9	1,95	1,98	1,999	1,995	1,999

* Valores hacia la derecha de ***1 :***

x	1,005	1,008	1,01	1,015	1,1	1,2	1,5
f(x)	2,005	2,008	2,01	2,015	2,1	2,2	2,5

* A medida que se toman valores para x más cercanos a ***1***, se observa que ***f(x)*** se va acercando a 2. Esta es la primera idea que tendremos, sobre el límite de una función en un punto dado . Podemos afirmar que cuando x tiende a ***1***, entonces ***f(x)*** tiende a 2 que simboliza: si $x \to 1$, entonces $f(x) \to 2$ ó $\lim_{x \to 1} f(x) = 2$

* Para obtener el valor límite **2**, se ha reemplazado en la expresión $f(x) = x + 1$ el valor de ***1*** para x así:

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} (x + 1) = f(1) = 1 + 1 = 2$$

EJEMPLO 3 :

En la función $h(x) = \dfrac{1}{x - 1}$ analizar el comportamiento para valores de x muy cercanos a ***1***.

RESOLUCIÓN :

* Se hace la tabla para valores muy cercanos a ***1*** tanto por la izquierda como por la derecha :

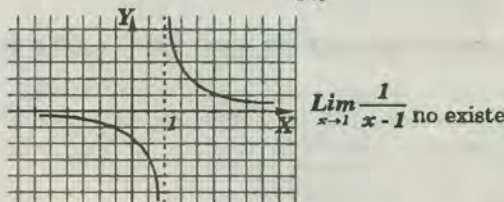
* Valores a la derecha :

x	4	3	2	1,8	1,5	1,4	1,3	1,2	1,1	1,05	1,04	1,03
h(x)	0,33	0,5	1	1,25	2	2,25	3,33	5	10	20	25	33,3

* Valores a la izquierda :

x	-2	-1	0	0,2	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95	0,96	0,97
h(x)	-0,33	-0,5	-1	-1,25	-2	-2,5	-3,33	-5	-10	-20	-25	-33,3

* Observemos en la tabla que a medida que nos acercamos a x por la derecha , ***h(x)*** toma valores cada vez más grandes , tendiendo a ∞. En cambio, cuando nos acercamos a ***1*** por la izquierda , los valores de ***h(x)*** son cada vez menores , tendiendo a $-\infty$. Podemos afirmar que $\lim_{x \to 1} h(x)$ no existe .



$\lim_{x \to 1} \dfrac{1}{x - 1}$ no existe

EJEMPLO 4:

Sea una función real de variable real :

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}; \; x \neq 2$$

¿Qué ocurre si x toma valores muy cercanos a 2?

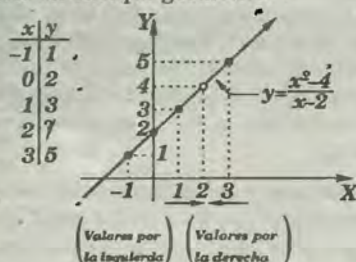
RESOLUCIÓN:

* Para ello , simplifiquemos la expresión inicial obteniendo en forma equivalente :

$$f(x) = \frac{(x+2)\cancel{(x-2)}}{\cancel{x-2}} \; ; \; x \neq 2$$

$$\to f(x) = x + 2 \; ; \; x \neq 2$$

* Dándole un enfoque geométrico :



* En las proximidades de $x = 2$, usamos dos conjuntos de valores de x, uno que se acerque hacia 2 por la izquierda y otro por la derecha tal como se ve en el siguiente cuadro :

x tiende a 2 por izquierda | *x tiende a 2 por derecha*

x	1	1,5	1,75	1,9	1,99	1,999	1.9999	2	2,001	2,01	2,1	2,25	2,5
f(x)	3	3,5	3,75	3,9	3,99	3,999	3,9999	?	4,001	4,01	4,1	4,25	4,5

f(x) tiende a 4 | *f(x) tiende a 4*

*Aunque x no puede hacerse 2, podemos ir tan cerca como queramos de 2 y, como consecuencia *f(x)* se hace tan próximo como queramos a 4. Usando notación de límites, decimos que el límite de *f(x)* cuando tiende a 2 es 4 y se escribe así: $\lim_{x\to 2} f(x)=4$.

* Para obtener el valor límite 2, se ha reemplazado en la expresión $F(x)=x+2$; el valor de x por 2.

Es decir :

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}(x+2)=f(2)=2+2=4$$

DEFINICIÓN INFORMAL DEL LÍMITE

Si existe un número real «L» que *f(x)* esté cerca a «L» para todos los valores de «x» próximos al número «x_0», entonces se dice que :

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} f(x)=L}$$

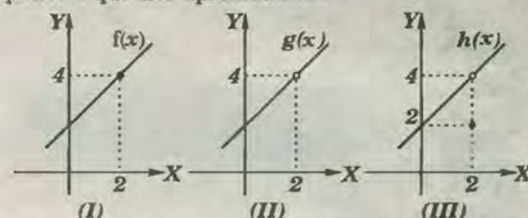
Se lee "el límite de *f(x)* cuando "x" se aproxima a "x_0" es "L" ".

EJEMPLO 1:

* $\lim_{x\to 2} x=2$
* $\lim_{x\to 1}(2x+3)=5$
* $\lim_{x\to 1}\frac{5x-2}{x+3}=\frac{-5-2}{-1+3}=\frac{-7}{2}=-\frac{7}{2}$
* $\lim_{x\to 2} 5=5$

EJEMPLO 2 :

A continuación analizaremos los siguientes límites teniendo presente que la existencia de un límite no depende de que esté o no definida la función en el punto a que nos aproximamos.



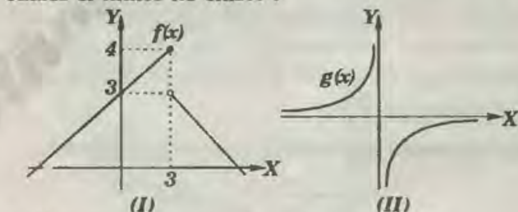
I) La función $f_{(x)}$ está definida en : $x_0 = 2$; se tiene : $\lim_{x\to 2} f_{(x)}=4$.

II) La función $g_{(x)}$ no está definida en : $x_0 = 2$; se tiene : $\lim_{x\to 2} g_{(x)}\to 4$.

III) La función $h_{(x)}$ está definida en : $x_0 = 2; h_{(2)}=2$ pero se tiene : $\lim_{x\to 2} h_{(x)}\to 4$.

EJEMPLO 3:

Seguidamente , ilustramos algunos casos en los cuales el límite no existe :



I) Tenemos que: $\lim_{x\to 3} f_{(x)}$ no existe, ya que:

* Cuando : $x\to 3^-$; se tiene que : $f_{(x)}\to 4$
* Cuando : $x\to 3^+$; se tiene que : $f_{(x)}\to 3$

II) Tenemos que : $\lim_{x\to 0} g_{(x)}$ no existe , ya que :

* Cuando : $x\to 0^-$; se tiene que : $g_{(x)}\to +\infty$
* Cuando : $x\to 0^+$; tenemos que : $g_{(x)}\to -\infty$

OBSERVACIÓN :

La definición dada es "informal", ya que no precisa cuán próximo debe estar "x" de "x_0" (o cuán cerca debe estar $f_{(x)}$ de *L*). La interpretación de "cuán próximo debe estar" no es la misma, por ejemplo, para un carpintero (para quien puede ser cuestión de milímetros) que para un astrónomo (para quien puede ser cuestión de miles de kilómetros).

CÁLCULO DE LÍMITES

I) MÉTODO DE LA CANCELACIÓN DE LOS FACTORES COMUNES :

Si : $\lim_{x\to x_0} f(x)$ es de la forma $\frac{0}{0}$, se recomienda

factorizar el término $(x - x_0)$ tanto en el numerador como en el denominador para su correspondiente cancelación .

EJEMPLO :.

Calcular : $\lim_{x \to 0} \frac{(x+4)^2 - 16}{x}$

RESOLUCIÓN :

* Veamos qué sucede si construimos una tabla que nos muestre la aproximación :

x	$-0{,}5$	$-0{,}4$	$-0{,}1$	$-0{,}01$	0	$0{,}01$	$0{,}1$	$0{,}4$	$0{,}5$
$f(x)$	$7{,}5$	$7{,}6$	$7{,}9$	$7{,}99$	8	$8{,}01$	$8{,}1$	$8{,}4$	$8{,}5$

* Lo que ocurre es que cuando "x" se aproxima a cero, la imagen $f_{(x)}$ se aproxima a 8, es decir:

$$\lim_{x \to 0} \frac{(x+4)^2 - 16}{x} = 8$$

* En este caso la forma indeterminada $\frac{0}{0}$ toma el valor 8. Si aplicamos la recomendación dada para este cálculo , este proceso laborioso se puede obviar factorizando , así :

$$\lim_{x \to 0} \frac{(x+4)^2 - 16}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{(x+4-4)(x+4+4)}{x} =$$

$$\lim_{x \to 0} = \frac{x(x+8)}{x} = \lim_{x \to 0}(x+8) = 8$$

II) MÉTODO DE LA RACIONALIZACIÓN :

Si $\lim_{x \to x_0} f(x)$ es de la forma $\frac{0}{0}$ y están presentes radicales, se procede a multiplicar y dividir por la conjugada de cada una de las formas radicales ; de modo que se cancelen factores comunes de la forma $(x - x_0)$

EJEMPLO 1:

Calcular : $\lim_{x \to 4} \frac{x-4}{\sqrt{x} - 2}$

RESOLUCIÓN :

* Veamos lo que ocurre construyendo una tabla de valores que nos muestre la aproximación , para lo cual te recomendamos usar una calculadora .

x	$3{,}8$	$3{,}9$	$3{,}99$	$3{,}999$	4	$4{,}001$	$4{,}01$	$4{,}1$
$f(x)$	$3{,}9494$	$3{,}9748$	$3{,}9975$	$3{,}9997$	4	$4{,}0002$	$4{,}0025$	$4{,}228$

* Lo que sucede es que cuando "x" se aproxima a 4, la imagen $f_{(x)} = \frac{x-4}{\sqrt{x}-2}$ se aproxima a 4.

* Luego : $\lim_{x \to 4} \frac{x-4}{\sqrt{x}-2} = 4$

* La forma indeterminada $\frac{0}{0}$ toma el valor de 4. Aplicando la recomendación dada para este cálculo, tenemos :

$$\lim_{x \to 4} \frac{x-4}{\sqrt{x}-2} = \lim_{x \to 4} \frac{x-4}{\sqrt{x}-2} \cdot \frac{(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}+2)} = \frac{\cancel{(x-4)}(\sqrt{x}+2)}{\cancel{(x-4)}} =$$

$$= \lim_{x \to 4}(\sqrt{x}+2) = 4$$

EJEMPLO 2 :

Hallar : $\lim_{x \to -8} \frac{2+\sqrt[3]{x}}{x+8}$

RESOLUCIÓN :

* Tenemos :

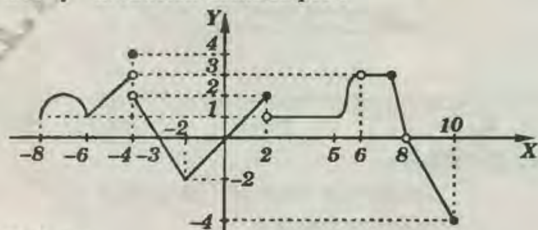
$$\lim_{x \to -8} \frac{2+\sqrt[3]{x}}{x+8} \cdot \frac{4-2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}}{4-2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}} = \lim_{x \to -8} \frac{\cancel{(8+x)}}{\cancel{(x+8)}(4-2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})} =$$

$$= \lim_{x \to -8} \frac{1}{4-2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}} = \frac{1}{4+4+4} = \frac{1}{12}$$

* Después de resolver estos ejemplos, te has preguntado, ¿por qué a la expresión $\frac{0}{0}$ se le llama forma indeterminada?, ¿qué opinas al respecto?

EJEMPLO 3:

Sea "f" la función definida por :



Hallar :

a) $\lim_{x \to -6} f_{(x)}$ *b)* $\lim_{x \to -4} f_{(x)}$

c) $\lim_{x \to 0} f_{(x)} = 0$ *d)* $\lim_{x \to 2} f_{(x)}$

e) $\lim_{x \to 6} f_{(x)} = 3$ *f)* $\lim_{x \to 8} f_{(x)} = 0$

RESOLUCIÓN :

* Del gráfico se tiene :

a) $\lim_{x \to -6} f_{(x)} = 1$ *b)* $\lim_{x \to -4} f_{(x)}$ No existe

c) $\lim_{x \to 0} f_{(x)} = 0$ *d)* $\lim_{x \to 2} f_{(x)}$ No existe

e) $\lim_{x \to 6} f_{(x)} = 3$ *f)* $\lim_{x \to 8} f_{(x)} = 0$

OBSERVACIONES:

* Cuando se afirma: "x se aproxima a x_0 con $x \neq x_0$", nos preguntamos : ¿cuánto nos aproximamos? Para precisar esto , tomemos en cuenta que , cuando x se aproxima a x_0 , existe una diferencia entre ellos (la cual será el error cometido), por tanto se mide a través de un número $\delta > 0$,de modo que ocurra ,

$|x - x_0| < \delta$, y como $x \neq x_0$, nos quedará $0 < |x - x_0| < \delta$. Por ejemplo, si $\delta = 10^{-3}$, entonces $0 < |x - x_0| < 10^{-3}$ equivale a decir que la distancia de x a x_0 es menor que la distancia $10^{-3} = 0{,}001$.

* Cuando afirmamos "$f(x)$ se acerca a L", también nos preguntamos: ¿cuánto se acerca o aproxima? Para respondernos, calculamos la distancia de $f(x)$ a L a través de : $|f(x) - L| < \varepsilon$ y damos valores para ε. Recordemos que podemos saber por anticipado cuánto queremos que se acerque o aproxime. El análisis anterior trae consigo la definición formal de límite que señalamos a continuación, usando medidas dadas para trabajar con las aproximaciones .

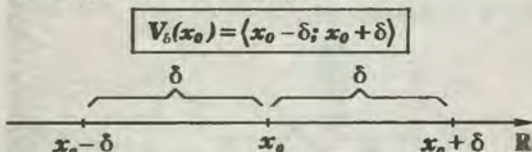
FORMALIZACIÓN DE LÍMITES

CONCEPTOS PREVIOS :

VECINDADES :

Se llama vecindad de centro x_0 y radio $\delta > 0$ al intervalo abierto de centro x_0 y extremos $x_0 - \delta$ y $x_0 + \delta$; y se denota por $V_\delta(x_0)$.

$$V_\delta(x_0) = \langle x_0 - \delta; x_0 + \delta \rangle$$



EJEMPLO:

$V_\delta(2) = \langle 2 - \delta; 2 + \delta \rangle$ si $\delta = 0{,}1$

$\rightarrow V_\delta(2) = \langle 1{,}9; 2{,}1 \rangle$

VECINDAD REDUCIDA :

Sea una vecindad de centro x_0 y radio δ $(V_\delta(x_0))$, llamaremos vecindad reducida de centro x_0 y radio δ al conjunto que resulta de quitarle x_0 a la vecindad $V_\delta'(x_0)$ y se le denota $V_\delta(x_0)$, es decir :

$$V_\delta' \doteq (x_0) = V_\delta(x_0) - \{x_0\}$$

EJEMPLO :

$V_\delta'(5) = \langle 5 - \delta; 5 + \delta \rangle - \{5\}$ si $\delta = 0{,}2$

$\rightarrow V_\delta'(5) = \langle 4{,}8; 5{,}2 \rangle - \{5\}$

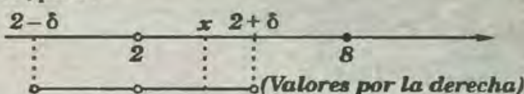
PUNTO DE ACUMULACIÓN :

Un punto x_0, que no necesariamente pertenece al conjunto A , se llama punto ***de acumulación de A***. Si cualquier vecindad $V_\delta(x_0)$ contiene al menos un punto $x \in A$.

x_0 es punto de acumulación de A si y solamente si $\forall \delta > 0;\ V_\delta'(x_0) \cap A \neq \phi$.

EJEMPLO :

Sea $A = \langle 2 ; 8]$ $x_0 = 2$ es punto de acumulación de A , pues :

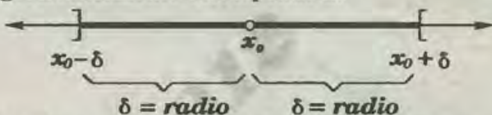


* Para toda vecindad reducida : $V_\delta'(x_0)$

$$V_\delta'(x_0) \cap A \neq 0$$

OBSERVACIONES :

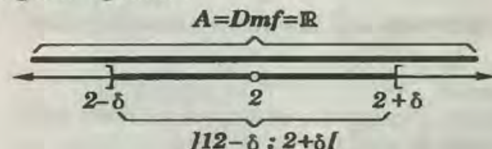
Un intervalo abierto con centro en x_0, tal que $x \neq x_0$ es de la forma: $]x_0 - \delta ; x_0 + \delta[- \{x_0\}$, que geometricamente corresponde a:



Donde $\delta > 0$, siendo δ la letra griega ***delta*** .

EJEMPLO :

Considerando $f(x) = 20 + x$, $Dom\ f = \mathbb{R}$; tenemos que $x_0 = 2$ es un punto de acumulación del conjunto $A = Dom\ f = \mathbb{R}$, ya que según la definición se tiene: $(]2-\delta; 2+\delta[- \{2\}) \cap \mathbb{R} \neq 0$, tal como se observa del siguiente gráfico :



DEFINICIÓN DE LÍMITE :

El número L se llama el límite de la función real de una variable real f, en el punto x_0.

(x_0 no necesariamente pertenece al dominio de f)
Si para cada $\varepsilon > 0$, es posible hallar un valor positivo. δ (delta) que depende de (épsilon); tal que :

$$\forall x \in Dom\,f \wedge 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

* O tambien :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / x \in Dom f \wedge 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Se dice que L es el límite de $f(x)$ cuando x tiende a x_0 y se escribe como :

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

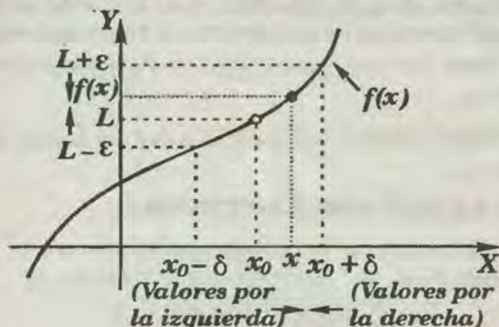
OBSERVACIONES :

* El punto x_0 puede estar o no en el dominio de f.
* La definición indica que " $x \in Dom f \wedge 0$

$<|x-x_0|<\delta$ ". Si este conjunto es diferente del conjunto vacío, se dice que x_0 es punto de acumulación del dominio f (en caso contrario, afirmamos que x_0 no es punto de acumulación).

* El límite de una función es un punto si existe es único.

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA :



* Del gráfico : $L-\varepsilon<f(x)<L+\varepsilon \ \wedge \ x_0-\delta<x<x_0+\delta$

* de donde : $|f(x)-L|<\varepsilon \ \wedge \ |x-x_0|<\delta$

EJEMPLO :

Si : $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}=x+2\ ;\ x\neq 2$

Para demostrar que $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=4$, de acuerdo con la definicíon, para todo número positivo ε debemos encontrar otro número positivo δ, dependiente de ε, tal que sí :

$$0<|x-2|<\delta\text{, entonces }\left|\frac{x^2-4}{x-2}-4\right|<\varepsilon$$

* Si: $\delta=\varepsilon$, entonces :

$$\left|\frac{x^2-4}{x-2}-4\right|=|x+2-4|\Rightarrow|x-2|<\varepsilon$$

* De este modo el límite queda determinado .

TEOREMA DE UNICIDAD DEL LÍMITE

Sea f una función real de una variable real y x_0 un punto de acumulación del *Domf*. El límite de una función si existe , es único , es decir

$$\text{Si } \lim_{x\to x_0} f(x)=L_1 \text{ y } \lim_{x\to x_0} f(x)=L_2 \Rightarrow L_1=L_2$$

TEOREMAS FUNDAMENTALES

Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L_1$ y $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=L_2$, donde $L_1, L_2\in\mathbb{R}$ y c es una constante real , tenemos los siguientes teoremas :

1) $\lim\limits_{x\to x_0} c=c\ ;\ \lim\limits_{x\to x_0}[c\cdot f(x)]=c\cdot\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=cL_1$

2) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\pm\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=L_1\pm L_2$

3) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]=\left(\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right)\left(\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\right)=L_1\cdot L_2$

4) $\lim\limits_{x\to x_0}\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}=\dfrac{L_1}{L_2}$, donde $L_2\neq 0$

5) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)]^n=\left[\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right]^n=L_1^n$, donde $n\in\mathbb{Z}^+$

6) $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}=\sqrt[n]{L_1}$, si existe $\sqrt[n]{L_1}$

7) Dado el polinomio:

$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$ tales que los coeficientes a_i son números reales se tiene :

$\lim\limits_{x\to x_0} P(x)=P(x_0)$.

8) Sean $P(x)$ y $Q(x)$ polinomios dados con $Q(x_0)\neq 0$, luego : $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{P(x)}{Q(x)}=\dfrac{P(x_0)}{Q(x_0)}$

9) $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=\left|\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right|=|L_1|$

* Si n es par debe cumplirse que $L_1\geq 0$.

10) $\lim\limits_{x\to x_0}(Log_r f(x))=Log_r\left(\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right)=Log_r L_1;\ L_1>0$

11) $\lim\limits_{x\to x_0} c^{f(x)}=c^{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}=c^{L_1};\ c\in\mathbb{R}^+-\{1\}$

12) $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)^{g(x)}\right)=\left(\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right)^{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}=L_1^{L_2}$ con $L_1\in\mathbb{R}^+-\{1\}$

EJEMPLO 1:

Calcular : $\lim\limits_{x\to 3}\ 2x^3-5x^2+6x-1$

RESOLUCIÓN :

* Aplicando el criterio de una función polinómica :

$$\lim_{x\to 3} 2x^3-5x^2+6x-1=2(3)^3-5(3)^2+6(3)-1=26$$

EJEMPLO 2:

Calcular : $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{5x^2-7x-3}{2x^2-6x+1}$

RESOLUCIÓN:

$$\lim_{x\to 2}\frac{5x^2-7x-3}{2x^2-6x+1}=\frac{5(2)^2-7(2)-3}{2(2)^2-6(2)+1}=-1$$

EJEMPLO 3:

Calcular: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-4x+3}{2x^2-7x+6}$

RESOLUCIÓN:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-4x+3}{2x^2-7x+6}=\frac{(1)^3-4(1)+3}{2(1)^2-7(1)+6}=0$$

EJEMPLO 4:

Calcular: $\lim_{x\to 5} \dfrac{3x^2-7x+3}{x^2-25}$

RESOLUCIÓN :

$$\lim_{x\to 5} \frac{3x^2-7x+3}{x^2-25} = \frac{3(5)^2-7(5)+3}{(5)^2-25} = \frac{43}{0} = \nexists$$

EJEMPLO 5:

Calcular : $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2-x-6}{2x^3+4x^2-2x-4}$

RESOLUCIÓN:

$$\lim_{x\to -2} \frac{x^2-x-6}{2x^3+4x^2-2x-4} = \lim_{x\to -2} \frac{(x+2)(x-3)}{2(x+2)(x+1)(x-1)} =$$

$$= \lim_{x\to -2} \frac{(x-3)}{2(x+1)(x-1)} = \frac{(-2-3)}{2(-2+1)(-2-1)} = \frac{-5}{6}$$

EJEMPLO 6:

Calcular : $\lim_{x\to 64} \dfrac{\sqrt{x}-8}{\sqrt[3]{x}-4}$

RESOLUCIÓN:

* Sea $x = y^6$ donde ***M.C.M. (2;3) = 6***

$$x = y^6 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = y^3 \ ; \ para\ x = 64 \\ \sqrt[3]{x} = y^2 \ ; \ y^6 = 64 \Rightarrow y = 2 \end{cases}$$

* Ahora reemplazando se tiene :

$$\lim_{x\to 64} \frac{\sqrt{x}-8}{\sqrt[3]{x}-4} = \lim_{y\to 2} \frac{y^3-8}{y^2-4} = \lim_{y\to 2} \frac{(y-2)(y^2+2y+4)}{(y-2)(y+2)} =$$

$$= \lim_{y\to 2} \frac{y^2+2y+4}{y+2} = \frac{4+4+4}{2+2} = 3$$

EJEMPLO 7:

Calcular : $\lim_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{4x+5}-\sqrt{3x+13}}{x-1}$

RESOLUCIÓN:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}+\sqrt{4x+5}-\sqrt{3x+13}}{x-1}$$

$$\to \lim_{x\to 1} \frac{(\sqrt{x}-1)+(\sqrt{4x+5}-3)-(\sqrt{3x+13}-4)}{x-1}$$

$$\to \lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{\sqrt{x}+1} + \frac{4}{\sqrt{4x+5}+3} - \frac{3}{\sqrt{3x+13}+4}\right)$$

$$= \frac{1}{1+1} + \frac{4}{3+3} - \frac{3}{4+4} = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{3}{8} = \frac{19}{24}$$

EXTENSIÓN DEL CONCEPTO LÍMITE

Haremos la extensión a los casos siguientes:

* ***LÍMITES LATERALES*** : cuando x se aproxima a x_0 por un lado : o bien por la derecha o bien por la izquierda

* ***LÍMITES INFINITOS*** : Los que son usados como herramientas necesarias para analizar el comportamiento de las funciones .

* ***LÍMITES AL INFINITO***: igual que el caso anterior.

LÍMITES LATERALES

Los límites laterales de f por la izquierda y por la derecha de x_0 se presentan cuando el análisis se realiza restringiendo el dominio de f a los conjuntos

* ***Domf*** $\cap \langle -\infty; x_0 \rangle$, para el límite de f por la izquierda de x_0.

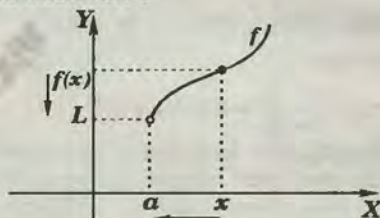
* ***Domf*** $\cap \langle x_0; \infty \rangle$, para el límite de f por la derecha de x_0.

I) LÍMITE POR LA DERECHA :

Se dice que L es el límite lateral de $f(x)$ cuando x tiende hacia "a" por la derecha y se denota por :

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{\substack{x\to a \\ (x>a)}} f(x) = L$$

* Geometricamente :

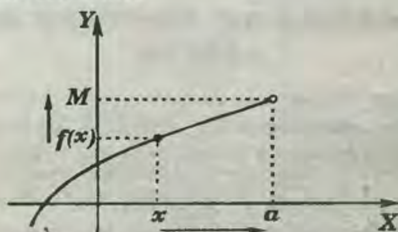


II) LÍMITE POR LA IZQUIERDA :

Se dice que M es el límite lateral de $f(x)$ cuando x tiende hacia "a" por la izquierda y se denota por:

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{\substack{x\to a \\ (x<a)}} f(x) = M$$

* Geometricamente:



TEOREMA:

El límite de f existe y es único , cuando x tiende al valor de "a", si y sólo si existen los límites laterales y además son iguales :

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \to a^-} f(x) = L = \lim_{x \to a^+} f(x)$$

EJEMPLO 1:

* Sea $f(x)=\sqrt{x-2}$ con dominio en $[2\,;\infty[$, luego x se puede aproximar a 2 únicamente por la derecha $(x \to 2^+)$ en cuyo caso $f(x)$ se acerca a cero .

* Es decir , se tiene $\lim_{x \to 2^+} \sqrt{x-2} = 0$

EJEMPLO 2 :

En forma similar , si $f(x) = x^2 - 3$, con $Dom f = [-2\,;5]$, tenemos que :

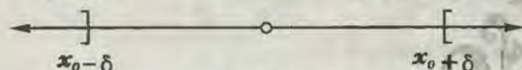
*Cuando $(x \to -2^+)$, ocurre que $f(x) = x^2 - 3$ se acerca a 1, es decir : $\lim_{x \to -2^+} (x^2-3) = 1$

*Cuando $x \to 5^-$; se tiene que $f(x) = x^2 - 3$ se acerca a 22; es decir: $\lim_{x \to 5^-} (x^2-3) = 22$

EN GENERAL :

Sabemos que cuando x se aproxima a x_0 se tiene que $0 < |x - x_0| < \delta$. A partir de esto , tenemos :

$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$ (con $x \neq x_0$).



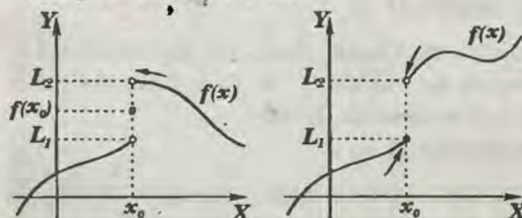
izquierda de x_0 derecha de x_0

$\Rightarrow x \in]x_0 - \delta; x_0 + \delta[- \{x_0\}$

$\Rightarrow x \in]x_0 - \delta; x_0[\cup]x_0; x_0 + \delta[$

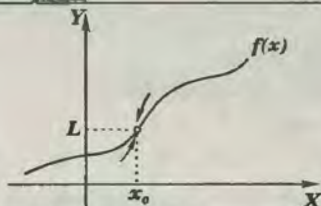
* En la definición , el término $0 < |x - x_0| < \delta$ será reemplazado por $]x_0 - \delta; x_0[$, para el caso de límite por la izquierda , y por $]x_0; x_0 + \delta[$, para el caso de límite por la derecha .

* Interpretación geométrica :



• $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L_1$ • $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L_1$

• $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L_2$ • $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L_2$



• $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L$

• $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L$

EJEMPLO 1:

Si :
$$H(x) = \begin{cases} -x + 2;\ x < 1 \ldots\ldots H_1 \\ x^2 + 2;\ x > 1 \ldots\ldots H_2 \end{cases}$$

¿existe $\lim_{x \to 1} H(x)$?

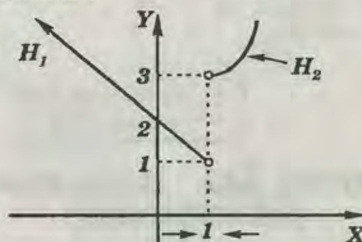
RESOLUCIÓN:

$$\lim_{x \to 1^-} H(x) = \lim_{\substack{x \to 1^- \\ (x<1)}} (-x+2) = -1 + 2 = 1$$

$$\lim_{x \to 1^+} H(x) = \lim_{\substack{x \to 1^+ \\ (x>1)}} (x^2+2) = 1^2 + 2 = 3$$

* Luego como los límites laterales son diferentes , entonces no existe $\lim_{x \to 1} H(x)$.

* Gráficamente :



EJEMPLO 2:

Calcule el límite de $f(x)$ cuando x tiende a 1 , si es que existe para :

$$f(x) = \frac{[\![x]\!]^2 - 1}{[\![x]\!] - 1}$$

RESOLUCIÓN:

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{[\![x]\!]^2 - 1}{[\![x]\!] - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{([\![x]\!]+1)([\![x]\!]-1)}{([\![x]\!]-1)}$$

$$= \lim_{x \to 1} [\![x]\!] + 1 = \lim_{x \to 1} [\![x]\!] + \lim_{x \to 1} 1$$

$$= \lim_{x \to 1} m[\![x]\!] + 1$$

* por límites laterales:

$$\lim_{x \to 1^+} [\![x]\!] = \lim_{x \to 1^+} 1 = 1 \quad ; \quad (1 < x < 2)$$

* También :

$$\lim_{x \to 1^-} [\![x]\!] = \lim_{x \to 1^-} 0 = 0 \quad ; \quad (0 < x < 1)$$

* Como los límites laterales son diferentes entonces no existe el límite .

EJEMPLO 3:

Sea el límite : $\lim\limits_{x\to 3}(2x-5)=1$

Halle un δ tal que $|(2x-5)-1| < 0{,}01$ siempre que $0 < |x-3| < \delta$

RESOLUCIÓN:

* En este problema nos viene dando un valor de $\varepsilon = 0{,}01$. Para hallar un δ apropiado intentemos establecer una relación entre los dos valores absolutos . $|(2x-5)-1|$ y $|x-3|$

$$\Rightarrow |(2x-5)-1| = |2x-6| = 2|x-3|$$

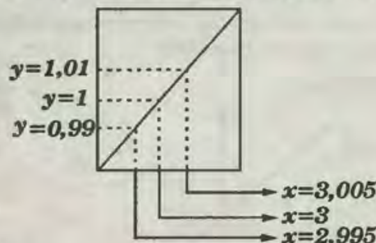
* en otras palabras la desigualdad :

$$|(2x-5)-1| < 0{,}01$$

* es equivalente a :

$$2|x-3| < 0{,}01 \Rightarrow |x-3| < \frac{0{,}01}{2} = 0{,}005$$

→ Un δ adecuado para el $\varepsilon = 0{,}01$ es $0{,}005$.

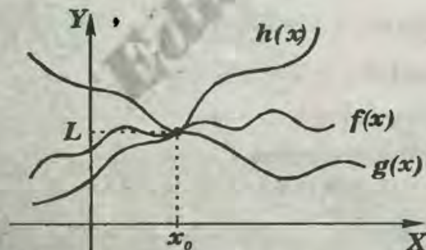


TEOREMA DEL EMPAREDADO (SANDQWICH) .

Supóngase que $g(x) \le f(x) \le h(x)$ para todo x en algún intervalo abierto que contenga a x_0, excepto posiblemente en x_0 . Supongamos también que :

$$\lim_{x\to x_0} g(x) = \lim_{x\to x_0} h(x) = L.$$

Entonces se tiene que $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$



Es decir :

Si $\{[f(x) \le g(x) \le h(x)] \wedge [\lim\limits_{x\to a} f(x) = L = \lim\limits_{x\to a} h(x)]\}$

$$\Rightarrow [\lim_{x\to a} g(x) = L]$$

TEOREMA DE LÍMITE DE LAS FUNCION COMPUESTA

El siguiente teorema justifica el cálculo de los límites de las funciones compuestas. Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$,y $\lim\limits_{z\to z_0} g(z) = x_0$, donde z_0 es un punto de acumulación del *Dom fog* .

Entonces: $\lim\limits_{z\to z_0}[f \circ g](z) = \lim\limits_{z\to z_0} f(g(z)) = L$

TEOREMA DE TRANSLACIÓN

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$ si y sólo si $\lim\limits_{h\to 0} f(h+x_0) = L$. Este teorema permitirá reducir límites dados en cero , lo cual es de mucha utilidad en el cálculo de límites trigonométricos .

EJEMPLO 1:

Sabiendo que $1-\frac{x^2}{4} \le f(x) \le 1--\frac{x^2}{2}$, para todo $x \ne 0$, hallar $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

RESOLUCIÓN:

Por el teorema del emparedado , tenemos :

$$\lim_{x\to 0}\left(1-\frac{x^2}{4}\right) = 1 = \lim\left(1+\frac{x^2}{2}\right).$$

Luego : $\lim f(x) = 1$.

EJEMPLO 2:

Si $\sqrt{3-2x^2+4x} \le f(x) \le \sqrt{4-x^2+2x}$,para $0 \le x \le 2$.

Hallar : $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

RESOLUCIÓN:

Tenemos:

$$\lim_{x\to 1}\sqrt{3-2x^2+4x} = \sqrt{5} = \lim_{x\to 1}\sqrt{4-x^2+2x}$$

Luego : $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \sqrt{5}$

EJEMPLO 3:

$\lim\limits_{x\to 1}|x+2| = \lim\limits_{h\to 0}|h+3| = 3$, ya que se efectuó el cambio de variable : $x-1=h \Rightarrow x=h+1$. (Si $x \to 1$, se tiene que $h \to 0$)

EJEMPLO 4:

Supóngase que se desea calcular $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{2x-3}$, mediante el cambio de variable $x-2=h$ (esto significa que la variable antigua x es reemplazada por la variable nueva h).

* Entonces tenemos : $x = h+2$, cuando $x \to 2$, se deduce que $h \to 0$, luego reemplazando en la

expresión dada :

$$\lim_{x\to 3}\sqrt{2x-3}=\lim_{h\to 0}\sqrt{2(h+2)-3}=\lim_{h\to 0}\sqrt{2h+1}=1$$

OBSERVACIÓN :

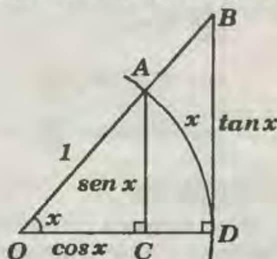
$$\boxed{\lim_{x\to x_0} f(x)=0 \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0}|f(x)|=0}$$

EJEMPLO 5:

Demostrar geometricamente que: $\lim_{x\to 0}\dfrac{sen\,x}{x}=1$

RESOLUCIÓN :

* Construimos una circunferencia de centro *(0 ; 0)* y radio *1* como se observa en la figura .



* Por áreas :

Área del triángulo OAC < *Área del sector OAD* < *Área del triángulo OBD*

$$\frac{1}{2}\cos x\ sen x<\frac{1}{2}x\times 1<\frac{1}{2}\times 1\times tg\,x$$

*Dividiendo por $\frac{1}{2}sen\,x$ se tiene :

$$\cos x<\frac{x}{sen\,x}<\frac{1}{\cos x}\ \Rightarrow\ \cos x<\frac{sen\,x}{x}<\frac{1}{\cos x}$$

* Luego , tomando límite cuando $x\to 0$.

$$\lim_{x\to 0}\cos x=1 \quad y \quad \lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=1$$

$$\to \lim_{x\to 0}\frac{sen\,x}{x}=1$$

INTRODUCCIÓN A LOS LÍMITES INFINITOS $(+\infty$ ó $-\infty)$

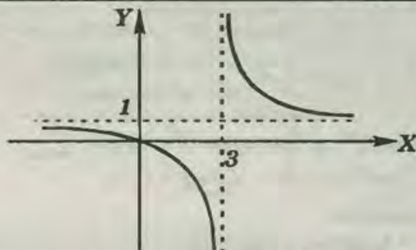
El símbolo $+\infty$ no representa número alguno, se utiliza para representar cantidades ilimitadamente grandes $(+\infty)$ o ilimitadamente pequeñas $(-\infty)$.

EJEMPLO 1:

A continuación analizaremos lo que ocurre con las imágenes $f(x)=\dfrac{x}{x-3}$, cuando x se aproxima a *3*.

RESOLUCIÓN:

* Graficando :



* Cuando $x\to 3^+$, los valores de $f(x)$ se hacen ilimitadamente grandes (es decir : $f(x)>M$, $\forall M>0$). Luego *f* no tiene límite cuando $x\to 3^+$; sin embargo escribimos $\lim_{x\to 3^+} f(x)=+\infty$.

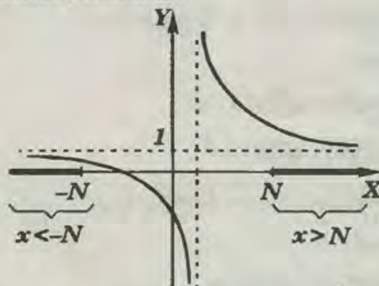
* En forma similar, al escribir $\lim_{x\to 3^-} f(x)=-\infty$, estamos diciendo que el límite no existe, ya que $f(x)$ se hace ilimitadamente pequeña cuando $x\to 3^-$ (es decir: $f(x)<-M;\ \forall M>0$) .

EJEMPLO 2:

Analicemos qué ocurre con $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$, cuando x se hace cada vez más grande ($x\to+\infty$) o cuando x se hace cada vez más pequeña ($x\to-\infty$) .

RESOLUCIÓN:

* Graficando , tenemos :



* Cuando x se hace ilimitadamente grande (es decir $x>N$, para cualquier $N>0$) , tenemos que $f(x)\to 1$, luego : $\lim_{x\to+\infty} f(x)=1$.

* Cuando x se hace ilimitadamente pequeña (es decir, $x<-N$ para cualquier $N>0$), tenemos que $f(x)\to 1$, luego: $\lim_{x\to-\infty} f(x)=1$.

TEOREMAS SOBRE LÍMITES INFINITOS

Si $n\in N$ se cumple :

1	$\lim_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x}=+\infty$	2	$\lim_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x}=-\infty$
3	*Si "n" es un entero positivo, entonces :* $\lim_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x^n}=+\infty$		

4	Si "n" es un entero positivo, entonces : $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^n} = \begin{cases} -\infty \text{ ; si n es impar} \\ +\infty \text{ ; si n es par} \end{cases}$

5) Sean f y g funciones tales que:

A) $\lim_{x\to a} f(x) = b \wedge \lim_{x\to a} g(x) = +\infty$

Se cumple:

* $\lim_{x\to a}(f(x)+g(x)) = \infty$
* $\lim_{x\to a}(f(x)\cdot g(x)) = +\infty;$ si $b>0$
* $\lim_{x\to a}(f(x)\cdot g(x)) = -\infty;$ si $b<0$
* $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = 0$

B) $\lim_{x\to a} f(x) = b \wedge \lim_{x\to a} g(x) = -\infty$

Se cumple:

* $\lim_{x\to a}(f(x)+g(x)) = -\infty$
* $\lim_{x\to a}(f(x)\cdot g(x)) = -\infty;$ si $b>0$
* $\lim_{x\to a}(f(x)\cdot g(x)) = +\infty;$ si $b<0$
* $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = 0$

6) Sean f y g funciones tales que:

A) Si $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty \wedge \lim_{x\to a} g(x) = \infty$

Se cumple:

* $\lim_{x\to a}(f(x)+g(x)) = +\infty$
* $\lim_{x\to a}(f(x)\cdot g(x)) = +\infty$

B) Si $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty \wedge \lim_{x\to a} g(x) = -\infty$

Se cumple:

* $\lim_{x\to a}(f(x)+g(x)) = -\infty$
* $\lim_{x\to a}(f(x)\cdot g(x)) = +\infty$

C) Si $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty \wedge \lim_{x\to a} g(x) = -\infty$

Se cumple :

* $\lim_{x\to a}(f(x)\cdot g(x)) = -\infty$

OBSERVACIÓN:

Usando los siguientes símbolos , podríamos resumir así :

A) $(+\infty)+(+\infty) = +\infty$ B) $(-\infty)+(-\infty) = -\infty$

C) $(+\infty)\cdot(+\infty) = +\infty$ D) $(-\infty)\cdot(-\infty) = +\infty$

E) $(+\infty)\cdot(-\infty) = -\infty$

F) $(-\infty)^n = \begin{cases} +\infty \text{ ; } n>0 \text{ (par)} \\ -\infty \text{ ; } n>0 \text{ (impar)} \end{cases}$

G) $k(+\infty) = \begin{cases} +\infty \text{ ; } k>0 \\ -\infty \text{ ; } k<0 \end{cases}$

H) $k(-\infty) = \begin{cases} -\infty \text{ ; } k>0 \\ +\infty \text{ ; } k<0 \end{cases}$

7) Si: $L = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_0x^m + a_1x^{m-1} + \ldots + a_m}{b_0x^n + b_1x^{n-1} + \ldots + b_n}$

Entonces de acuerdo al valor de los grados "n" y "m" de los polinomios, se tiene:

$$L = \begin{cases} 0 & \text{si } m<n \\ \frac{a_0}{b_0} & \text{si } m=n \\ +\infty & \text{si } m>n \wedge \frac{a_0}{b_0}>0 \\ -\infty & \text{si } m>n \wedge \frac{a_0}{b_0}<0 \end{cases}$$

OBSERVACIONES:

Cuando su cálculo puede ser posible directa (reemplazo directo) o indirectamente (mediante transformaciones) entre ellas tenemos : Siendo a una constante no nula $(a>0)$

* $\lim_{x\to 0}\frac{a}{x} = \infty$ * $\frac{a}{0} = \nexists$ (no esta definida o no existe)
* $\lim_{x\to\infty}\frac{a}{x} = 0$ * $\frac{0}{a} = 0$
* $\lim_{x\to\infty}\frac{a}{x} = 0$ * $\frac{a}{\infty} = 0$
* $\lim_{x\to\infty}\frac{x}{a} = \infty$ * $\frac{\infty}{a} = \infty$
* $\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to\infty}}\frac{x}{y} = 0$ * $\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to\infty}}\frac{y}{x} = \infty$

TEOREMA SOBRE LÍMITES AL INFINITO

A) Sea $n\in\mathbb{Z}^+ \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^n} = 0$

B) Sean $n\in\mathbb{Z}^+ \Rightarrow \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^n} = 0$

C) Sea $f: R\to R$, definida por :

$$f(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e = 2{,}71818\ldots$$

FORMAS INDETERMINADAS

Se dice que aquellas expresiones que para un valor de su(s) variable(s) adoptan cualquier valor, o en todo

caso no es posible su cálculo.

* Entre ellas tenemos:

* $\frac{0}{0}$ * $\infty-\infty$ * $\frac{\infty}{\infty}$

* $1^{\infty};1^{-\infty}$ * $0\times\infty$ * $0^{\infty};\infty^{0}$

NOTAS :

En algunos casos no se puede predecir el límite de la operación conociendo simplemente el de cada operando .

POR EJEMPLO:

* Si , $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$

entonces no se puede decir nada respecto al $\lim\limits_{x\to a}[f(x)\,g(x)]$

* Si , $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$

entonces no se puede decir nada respecto al $\lim\limits_{x\to a}[f(x)-g(x)]$

Las dos situaciones corresponden a las llamadas "formas indeterminadas" $0.\infty$ y $\infty-\infty$. Otras formas indeterminadas son :

$$\frac{0}{0};\ \frac{\infty}{\infty};\ 1^{\infty};\ \infty^{0}\ \text{ y }\ 0^{0}$$

EJEMPLO 1:

Halle : $\lim\limits_{x\to\infty}=\dfrac{5x^2-3x+2}{3x^2+2x-3}$

RESOLUCIÓN :

* La forma más práctica de calcular los límites cuando $x\to\infty$ o $x\to-\infty$ es dividiendo tanto el numerador como el denominador , entre la mayor potencia de x que aparece en la expresión dada . Luego se aplica :

I) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^n}=0$ II) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x^n}=0$

* En nuestro ejemplo , dividimos entre x^2 tanto el numerador como denominador es decir :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{5x^2-3x+2}{3x^2+2x-3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{5-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}{3+\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}}=\frac{5-0+0}{3+0-0}=\frac{5}{3}$$

EJEMPLO 2:

Hallar : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2-3}{x^2+1}$

RESOLUCIÓN:

* Observarás que este límite es de la forma : $\frac{\infty}{\infty}$

* Dividiremos numerador y denominador entre x^2 :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2-3}{x^2+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2x^2-3}{x^2}}{\frac{x^2+1}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2-\frac{3}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}}=\frac{2-0}{1+0}=2$$

EJEMPLO 3 :

Calcular : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-3x^2+2x-1}{\sqrt{x^4-3x+1}}$

RESOLUCIÓN:

* Cuando x toma valores positivos bastante grandes se toma : $x^2=\sqrt{x^4}$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{-3x^2+2x-1}{\sqrt{x^4-3x+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{-3+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}{\sqrt{1-\frac{3}{x^3}+\frac{1}{x^4}}}=\frac{-3+0-0}{\sqrt{1-0+0}}=-3$$

EJEMPLO 4:

Hallar : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^2+5}{x+2}$

RESOLUCIÓN:

* Este límite también es de la forma : $\frac{\infty}{\infty}$

*Dividiremos numerador y denominador entre x:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2+5}{x+2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x+\frac{5}{x}}{1+\frac{2}{x}}=\frac{\infty+0}{1+0}=+\infty$$

EJEMPLO 5:

Calcular : $\lim\limits_{x\to-\infty}=\dfrac{\sqrt{x^2+4}}{x+7}$

RESOLUCIÓN :

* Cuando x toma valores negativos bastante grandes , se debe tomar $x=-\sqrt{x^2}$ con el cual dividimos el numerador y denominador , es decir

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+4}}{x+7}=\frac{\frac{\sqrt{x^2+4}}{-\sqrt{x^2}}}{\frac{x+7}{x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}}{1+\frac{7}{x}}=\frac{-\sqrt{1+0}}{1+0}=-1$$

EJEMPLO 6:

Hallar : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2+3x-2}{3x^3+x-1}$

RESOLUCIÓN:

* También el límite es de la forma : $\frac{\infty}{\infty}$

* Dividiremos aquí numerador y denominador entre x^2 :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2+3x-2}{3x^3+x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2+\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}}{3x+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}=\frac{2}{+\infty}=0$$

OBSERVACIÓN:

Sean P y Q polinomios de grados m y n

respectivamente, para calcular $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ dividirás numerador y denominador entre $x^{min(m,n)}$, donde min (m , n) significa elegir el menor de m y n .

EJEMPLO 7:

Hallar : $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$

RESOLUCIÓN :

* Para evitar problemas con los signos haremos el cambio de variable de $x=-y$, luego $y\to+\infty$.

* Entonces :

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}=\lim_{y\to+\infty}\frac{\sqrt{(-y)^2+1}}{-y}=\lim_{y\to+\infty}-\frac{\sqrt{y^2+1}}{y}$$

* Ahora podemos dividir numerador y denominador entre y:

$$\lim_{y\to+\infty}-\frac{\sqrt{y^2+1}}{y}=-\lim_{y\to+\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{y^2}}}{1}=-\sqrt{1+0}=-1$$

EJEMPLO 8:

Calcular : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{2x^2-5x+3}+\sqrt{2}x\right)$

RESOLUCIÓN :

* En este tipo de ejercicios para poder aplicar el método de los ejemplos anteriores es necesario expresar la función, como un cociente y para esto se racionaliza .

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{2x^2-5x+3}-\sqrt{2}x\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{2x^2-5x+3}-\sqrt{2}x\right)\left(\sqrt{2x^2-5x+3}+\sqrt{2}x\right)}{\left(\sqrt{2x^2-5x+3}+\sqrt{2}x\right)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-5x+3}{\left(\sqrt{2x^2-5x+3}+\sqrt{2}x\right)}$$

* Como $x\to+\infty \;\Rightarrow\; x=\sqrt{x^2}$

$$\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{2x^2-5x+3}-\sqrt{2}x\right)$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\frac{-5+\frac{3}{x}}{\sqrt{2-\frac{5}{x}+\frac{3}{x^2}}+\sqrt{2}}=\frac{-5}{\sqrt{2}+\sqrt{2}}=\frac{-5}{2\sqrt{2}}=\frac{-5\sqrt{2}}{4}$$

EJEMPLO 9:

Hallar : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x}\right)$

RESOLUCIÓN:

* El límite de la forma $\infty-\infty$, multipliquemos y dividamos por la expresión conjugada de $\left(\sqrt{x+2}-x\right)$

$$\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x}\right)\cdot\frac{\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\frac{(x+2)-x}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}=0$$

EJEMPLO 10:

Calcular : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+3}}}}{\sqrt{x+3}}$

RESOLUCIÓN:

* Como $x\to+\infty\Rightarrow$ dividimos entre $\sqrt{x}$ numerador y denominador .

$$\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+3}}}}{\sqrt{x+3}}$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^3}+\frac{3}{x^4}}}}}{\sqrt{1+\frac{3}{x}}}=\frac{\sqrt{1+\sqrt{0+\sqrt{0+0}}}}{\sqrt{1+0}}=1$$

EL NÚMERO "e" COMO LÍMITE

La expresión $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ tiene límite comprendido en 2 y 3 cuando $n\to+\infty$.

$$2<\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<3$$

Cálculo aproximado de e :

n	$(1+1/n)^n$	Valor
1	$(1+1)^1$	2
2	$(1+1/2)^2$	2,25
5	$(1+1/5)^5$	2,48832...
20	$(1+1/20)^{20}$	2,65329...
100	$(1+1/100)^{100}$	2,70481...
1000	$(1+1/1000)^{1000}$	2,71688...
10000	$(1+1/10000)^{10000}$	2,71816...
$n\to\infty$	$(1+1/n)^n$	2,71828182...

DEFINICIÓN :

Al número e definiremos como el límite de la expresión $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ cuando $n\to+\infty$ es decir

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=e$ donde $e\cong 2,718281828459045$ ....

OBSERVACIÓN:

1) La función $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ tiende al número e , cuando $x\to+\infty$, es decir :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$$

2) Sea $z=\dfrac{1}{x}\Rightarrow x=\dfrac{1}{z}$ cuando $x\to+\infty,\ z\to0$;

entonces

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{z\to 0}(1+z)^{\frac{1}{z}}=e$$

CÁCULO DE LIMITES DE LA FORMA

$$\lim_{x\to a}(f(x))^{g(x)}$$

Para el cálculo de los límites de la forma : $\lim_{x\to a}(f(x))^{g(x)}$ se consideran los siguientes casos :

1°) Si existen los límites $\lim_{x\to a}f(x)=A$ y $\lim_{x\to a}g(x)=B$ son finitos , entonces :

$$\lim_{x\to a}(f(x))^{g(x)}=\left(\lim_{x\to a}f(x)\right)^{\lim_{x\to a}g(x)}=A^B$$

2°) Si : $\lim_{x\to a}f(x)=A\neq 1$ y $\lim_{x\to a}g(x)=\pm\infty$

entonces es inmediato .

3°) Si: $\lim_{x\to a}f(x)=A=1$ y

$\lim_{x\to a}g(x)=\pm\infty$

CASO 1 : INDETERMINADO

En estos casos los límites , se calculan de la siguiente forma :

* A la función $f(x)$ expresamos así :

$f(x)=1+\phi(x)$ donde $\lim_{x\to a}\phi(x)=0$

* Luego se hace la sustitución y se aplica la definición del número e .

$$\lim_{x\to a}(f(x))^{g(x)}=\lim_{x\to a}\left[(1+\phi(x))^{\frac{1}{\phi(x)}}\right]^{\phi(x)g(x)}=e^{\lim_{x\to a}\phi(x)g(x)}$$

OBSERVACIÓN :

En el cálculo de los límites de funciones logarítmicas se aplica la propiedad siguiente :

$$\lim_{x\to a}Ln(f(x))=Ln\left[\lim_{x\to a}f(x)\right]$$

PROPIEDAD :

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{k}{n}\right)^n=\lim_{h\to 0}(1+kh)^{1/h}=e^k\ ;\ \forall k\in\mathbb{R}$$

EJEMPLO 1:

Calcular : $L=\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x$

RESOLUCIÓN :

$$L=\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}\cdot 2}=\left[\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}}\right]^2=[e]^2=e^2$$

EJEMPLO 2:

Calcular : $\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x+3}{x+1}\right]^{x-1}$

RESOLUCIÓN :

$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x+3}{x+1}\right]^{x-1}=\lim_{x\to\infty}\left[1+\frac{2}{x+1}\right]^{x-1}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{2}{x+1}\right)^{\frac{x+1}{2}}\right]^{\frac{2}{x+1}(x-1)}=e^{\lim_{x\to\infty}\frac{2(x-1)}{x+1}}=e^2$$

EJEMPLO 3:

Calcular :

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x}+1-\sqrt{x+1}\right)^{\sqrt{x}}$$

RESOLUCIÓN:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x}+1-\sqrt{x+1}\right)^{\sqrt{x}}=\lim_{x\to\infty}\left[1+\left(\sqrt{x}-\sqrt{x+1}\right)\right]^{\sqrt{x}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[1+\frac{-}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}\right]^{\sqrt{x}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{-1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}\right)^{-(\sqrt{x}+\sqrt{x+1})}\right]^{\frac{-\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}}$$

$$=e^{\lim_{x\to\infty}\frac{-\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}}=e^{\frac{-1}{2}}$$

EJEMPLO 4 :

Calcular : $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}Ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$

RESOLUCIÓN:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}Ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}Ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{x}}$$

$$=\frac{1}{2}Ln\left[\lim_{x\to 0}\left(\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{\left[(1+(-x))^{-1/x}\right]^{(-1)}}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}Ln\left(\frac{e}{e^{-1}}\right)=\frac{1}{2}Lne^2=Lne=1$$

EJEMPLO 5:

Calcular : $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}$

RESOLUCIÓN:

* Sea $\alpha=e^x-1\Rightarrow e^x=1+\alpha$, tomando logaritmo:

$\Rightarrow Lne^x=Ln(1+\alpha)$

$\Rightarrow xLne=Ln(1+\alpha)\Rightarrow x=Ln(1+\alpha)$

* Cuando $x\to 0\Rightarrow\alpha\to 0$ entonces :

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{\alpha}{Ln(1+\alpha)}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{1}{Ln(1+\alpha)^{1/\alpha}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{Lne}=\frac{1}{1}=1$$

EJEMPLO 6:

Calcular : $\lim_{x\to 0}\frac{3^x-1}{x}$

RESOLUCIÓN:

* Sea : $3x-1=\alpha \Rightarrow 3^x=1+\alpha$

$$\Rightarrow Ln3^x=Ln(1+\alpha)\Rightarrow x=\frac{Ln(1+\alpha)}{Ln3}$$

* cuando $x\to 0;\ \alpha\to 0$ entonces :

$$\lim_{x\to 0}\frac{3^x-1}{x}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{\alpha}{\frac{Ln(1+\alpha)}{Ln3}}$$

$$\Rightarrow Ln3=\lim_{\alpha\to 0}\frac{1}{Ln(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}}=Ln3\,\frac{1}{Lne}=Ln3$$

EJEMPLO 7:

Calcular : $\lim_{x\to 0}\frac{5^x-2^x}{x}$

RESOLUCIÓN:

$$\lim_{x\to 0}\frac{5^x-2^x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(5^x-1)-(2^x-1)}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{5^x-1}{x}-\lim_{x\to 0}\frac{2^x-1}{x}$$

$$=Ln5-Ln2=Ln\frac{5}{2}$$

EJEMPLO 8:

Calcular : $\lim_{x\to 0}\frac{9^x-5^x}{4^x-6^x}$

RESOLUCIÓN:

* Ahora debemos expresar en la forma del ejemplo anterior , dividiendo entre x :

$$\lim_{x\to 0}\frac{9^x-5^x}{4^x-6^x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{9^x-5^x}{x}}{\frac{4^x-6^x}{x}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{9^x-1}{x}-\frac{5^x-1}{x}}{\frac{4^x-1}{x}-\frac{6^x-1}{x}}=\frac{Ln\,9-Ln\,5}{Ln\,4-Ln\,6}$$

OBSERVACIÓN:

La función $f(x)=\frac{sen\,x}{x}$, cuyo dominio son todos los reales, excepto cero ; nótese que cuando x se aproxima a cero por la derecha o izquierda , $f(x)$ tiende al valor de 1 , sin importar que $f(0)$ no esté definido .

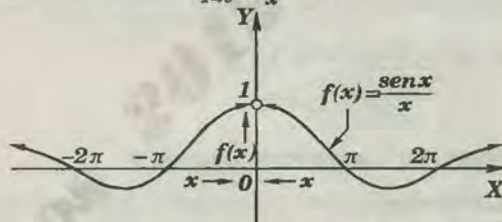
* Los siguientes valores de $\frac{sen\,x}{x}$ se obtienen al considerar el valor de x en radianes .

x	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}\cdots$	$\frac{1}{100}$	0
$\frac{sen\,x}{x}$	0,8414	0,9588	0,9816	0,9896	0,9933...	0,9999	1

x	-1	$\frac{-1}{2}$	$\frac{-1}{3}$	$\frac{-1}{4}$	$\frac{-1}{5}\cdots$	$\frac{-1}{100}$	0
$\frac{sen\,x}{x}$	0,8414	0,9588	0,9816	0,9896	0,9933...	0,9999	1

* Observa que el límite de la función es uno .

* Simbolicamente: $\lim_{x\to 0}\frac{sen\,x}{x}=1$



LÍMITES TRIGONOMÉTRICOS

Después de haber calculado los límites de funciones algebraicas , pasamos a definir y a estudiar el cálculo de límites de funciones trigonométricas .

* Tenemos los siguientes límites notables :

$\lim_{x\to 0} sen\,x=0$	$\lim_{x\to 0}\cos x=1$	$\lim_{x\to 0}\frac{sen\,x}{x}=1$

A parte de estos límites se pueden deducir otros , para lo cual en algunos de ellos habrá que usar cambios de variable , como por ejemplo :

a) $\lim_{x\to 0} tg\,x=0$

(ya que $\lim_{x\to 0}\tan x=\lim_{x\to 0}\frac{sen\,x}{\cos x}=\frac{0}{1}=0$)

b) $\lim_{x\to 0}\frac{tg\,x}{x}=1$

(ya que $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{sen\,x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}=$

$\lim_{x\to 0}\frac{sen\,x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=1\times 1=1$)

c) $\lim_{x\to 0}\sec x=1$

(ya que $\lim_{x\to 0}\sec x=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=\frac{1}{1}=1$)

d) $\lim_{x\to 0} x\cdot\csc x=1$

(ya que $\lim_{x\to 0}\csc x=\lim_{x\to 0}\frac{x}{sen\,x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{sen\,x}{x}}=\frac{1}{1}=1$)

EJEMPLO:

* Calcular los siguientes límites :

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{sen(\pi x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\pi\, sen(\pi x)}{\pi x}=\pi\lim\limits_{\pi x}\dfrac{sen(\pi x)}{\pi x}=\pi\times 1=\pi$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{sen\,6x}{sen\,4x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{sen\,6x}{6x}\cdot\dfrac{6x}{4x}\cdot\dfrac{1}{\dfrac{sen\,4x}{4x}}=$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{sen\,6x}{6x}\cdot\dfrac{6}{4}\cdot\dfrac{1}{\dfrac{sen\,4x}{x}}=1\times\dfrac{6}{4}\times\dfrac{1}{1}=\dfrac{6}{4}=\dfrac{3}{2}$

3) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{sen\,2x}{2x}=\dfrac{sen(\pi/2)}{\dfrac{\pi}{2}}=\dfrac{1}{\dfrac{\pi}{2}}=\dfrac{2}{\pi}$

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\,sen^2\dfrac{x}{2}}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{sen\dfrac{x}{2}}{\dfrac{x}{2}}\right)^2=\dfrac{1}{2}(1)^2=\dfrac{1}{2}$

Si $\lim\limits_{x\to a}g(x)=0\ \Rightarrow\ \lim\limits_{x\to a}\dfrac{sen(g(x))}{g(x)}=1$

PROPIEDADES :

I) Para todo p y q pertenecientes a los reales, tal que $q\neq 0$, se verifica .

$$\lim_{x\to 0}\frac{sen(px)}{sen(qx)}=\frac{p}{q}\qquad \lim_{x\to 0}\frac{sen(px)}{tan(qx)}=\frac{p}{q}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{tan(px)}{tan(qx)}=\frac{p}{q}\qquad \lim_{x\to 0}\frac{tan(px)}{sen(qx)}=\frac{p}{q}$$

II)

$$\lim_{x\to 0}\frac{arc\,sen\,x}{x}=1\qquad \lim_{x\to 0}\frac{arc\tan x}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{sen\,px}{x}=p\qquad \lim_{x\to 0}\frac{tan\,px}{x}=p$$

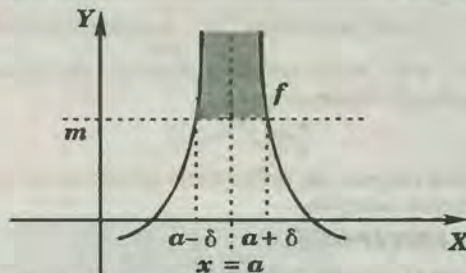
LÍMITES INFINITOS

Sea f una función definida en un intervalo abierto que contiene a "a", excepto quizá en "a". La expresión :

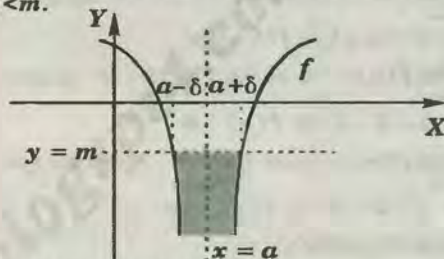
I) $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty$ significa que para cada $m>0$,

existe $\delta>0$ tal que si $0<|x-a|<\delta$, entonces $f(x)>m$.

Geometricamente, no importa cuan grande sea m siempre existe una franja δ, lo suficientemente pequeña alrededor de a, como para que la gráfica que se halla dentro de la franja esté arriba de la recta $y=m$.



II) $\lim\limits_{x\to a^-}f(x)=-\infty$ significa que para cada $m<0$, existe $\delta>0$ tal que si $0<|x-a|<\delta$, entonces $f(x)<m$.



OBSERVACIONES :

Sea $f(x)$ una función , se cumple :

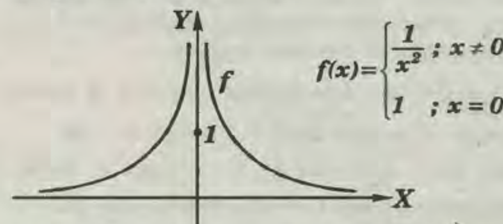
I) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{y\to 0^+}f(1/y)$

II) $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{y\to 0^-}f(1/y)$

III) $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{y\to 0}f(1/y)$

EJEMPLO:

La gráfica de la función :



$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^2} & ; x\neq 0\\ 1 & ; x=0\end{cases}$$

* Desde ahí se puede afirmar que $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\infty$

* Utilicemos la definición para demostrar que en efecto es así.

* Sea m un número positivo cualquiera.

* Luego: $f(x)>m\Leftrightarrow\dfrac{1}{x^2}>m\Leftrightarrow\dfrac{1}{m}>x^2$

$$\Leftrightarrow\ |x|<\frac{1}{\sqrt{m}}\Leftrightarrow|x-0|<\frac{1}{\sqrt{m}}$$

* Por lo tanto, basta tomar $\delta = \frac{1}{\sqrt{m}}$ para garantizar que si $0<|x-0|<\delta$, entonces $f(x)>m$. Así, hemos demostrado totalmente que :

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

Es fácil adoptar las definiciones anteriores al caso de límites laterales.

DEFINICIONES :

1) $\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall m \in \mathbb{R}\ \exists \delta > 0$ tal que :

$a < x < a + \delta \Rightarrow f(x) > m$

2) $\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}\ \exists \delta > 0$ tal que :

$a < x < a + \delta \Rightarrow f(x) < m$

3) $\lim_{x \to a^-} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}\ \exists \delta > 0$ tal que :

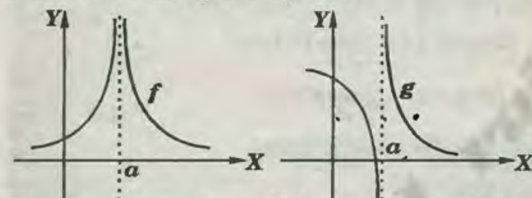
$a - \delta < 0 < a \Rightarrow f(x) > m$

4) $\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}\ \exists \delta > 0$ tal que :

$a - \delta < x < a \Rightarrow f(x) < m$

OBSERVACIÓN :

Consideremos las funciones f y g, cuyas gráficas se muestran en las figuras adjuntas .



En ambos casos podemos decir que no existe el límite de la función , cuando x tiende a "a". Pero esto no permite diferenciar situaciones como las de f y g. Así tomaremos el convenio siguiente :

I) Si $\lim_{x \to a^+} f(x) = L$ y $\lim_{x \to a^-} f(x) = M$, con L y M finitos entonces : $\lim_{x \to a} f(x)$ existe si y sólo si $L = M$.

II) En casos como el de la función f, donde $\lim_{x \to a^-} f(x) = \infty$ y $\lim_{x \to a^+} f(x) = \infty$ diremos que $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$

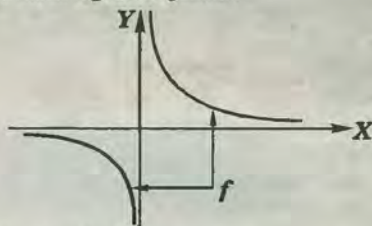
III) Si $\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$ y $\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$ diremos que $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$.

IV) En casos como el de la función g, donde $\lim_{x \to a^-} g(x) = -\infty$ y $\lim_{x \to a^+} g(x) = \infty$ diremos que no existe $\lim_{x \to a} g(x)$.

* Lo mismo diremos si $\lim_{x \to a^-} f(x) = \infty$ y $\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$

EJEMPLO:

Consideremos la función $f(x) = \frac{1}{x}$, cuya gráfica se muestra en la figura adjunta :

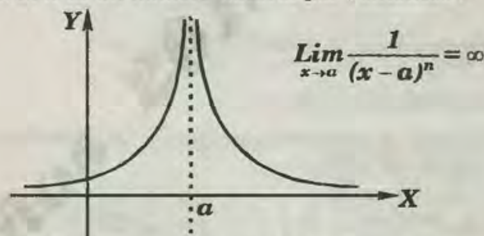


* De ahí se puede ver que :

I) $\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ II) $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$

TEOREMA :

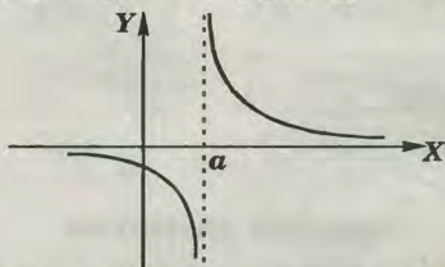
A) Si n es un número natural par , entonces :



$$\lim_{x \to a} \frac{1}{(x-a)^n} = \infty$$

B) Si n es un número natural impar, entonces:

$$\lim_{x \to a^-} \frac{1}{(x-a)^n} = -\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \to a^+} \frac{1}{(x-a)^n} = \infty$$



EJEMPLOS:

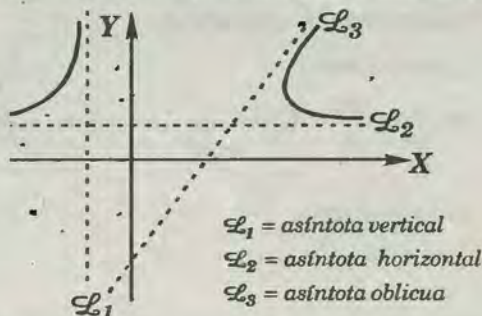
* $\lim_{x \to 3} \frac{1}{(x-3)^2} = \infty$ * $\lim_{x \to 3^-} \frac{1}{(x-3)^3} = -\infty$

* $\lim_{x \to 3^+} \frac{1}{(x-3)^3} = \infty$

ASÍNTOTAS

Las asíntotas son líneas rectas, que prolongadas indefinidamente , se acercan a una curva sin alcanzarla .

Veamos el gráfico.



DEFINICIÓN :

La recta $x=a$ es un asíntota de la gráfica de la función f si :

* $\lim_{x\to a^-} f(x)=\infty$, asíntota superior izquierda.
* $\lim_{x\to a^+} f(x)=\infty$, asíntota superior derecha.
* $\lim_{x\to a^-} f(x)=-\infty$, asíntota inferior izquierda.
* $\lim_{x\to a^+} f(x)=-\infty$, asíntota inferior derecha.

I) ASINTONTA VERTICAL

Se dice que la recta vertical $x = a$ es una "asíntota vertical" del gráfico de $y = f(x)$ si :

$$\lim_{x\to a^+} f(x)=\begin{cases}+\infty \dots \text{ A. Vertical Superior Derecha}\\ -\infty \dots \text{ A Vertical Inferior Derecha}\end{cases}$$

$$\lim_{x\to a^-} f(x)=\begin{cases}+\infty \dots \text{ A Vertical Superior Izquierda}\\ -\infty \dots \text{ A Vertical Inferior Izquierda}\end{cases}$$

II) ASÍNTOTA HORIZONTAL

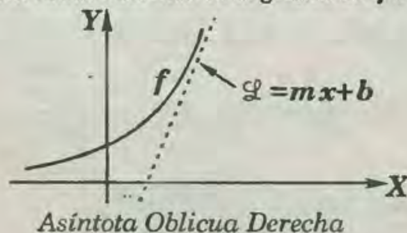
Se dice que la recta horizontal $y=b$ es una "asíntota horizontal" del gráfico de $y=f(x)$ si:

$$b=\lim_{x\to+\infty} f(x) \quad ; \quad b=\lim_{x\to-\infty} f(x)$$

III) ASÍNTOTA OBLÍCUA

A) Si $\lim_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=m$, y $\lim_{x\to\infty}[f(x)-mx]=b$

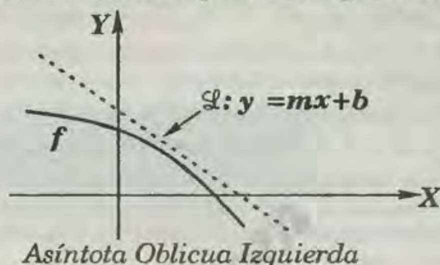
Entonces diremos que la recta $L: y=mx+b$ es una asíntota oblícua derecha de la gráfica de f.



Asíntota Oblicua Derecha

B) Si $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=m$, y $\lim_{x\to-\infty}[f(x)-mx]=b$,

entonces diremos que la recta : $L: y = mx + b$ es una asíntota oblícua izquierda de la gráfica de f.



Asíntota Oblicua Izquierda

OBSERVACIÓN :

* Cuando se analice la asíntota oblícua izquierda se debe sustituir en la definición , $+\infty$ por $-\infty$.
* La asíntota horizontal se identifica cuando $m=0$

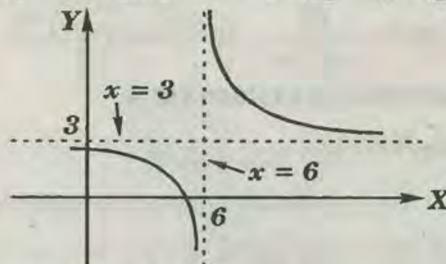
EJEMPLO 1 :

Sea $f(x)=3+\dfrac{1}{x-6}$

* Entonces verifica $\lim_{x\to6^+} f(x)=+\infty \wedge \lim_{x\to6^-} f(x)=-\infty$
* Lo cual permite identificar a la recta $x=6$ como asíntota vertical superior derecha, así como asíntota vertical inferior izquierda .

* **ASÍNTOTA HORIZONTAL :**

$$\lim_{x\to+\infty} A(x)=\lim_{x\to-\infty} A(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\left[3+\frac{1}{x-6}\right]=3$$



EJEMPLO 2 :

Hallar las asíntotas verticales de la gráfica de la función : $f(x)=\dfrac{4x}{x^2-4x+3}$

RESOLUCIÓN:

* Como : $f(x)=\dfrac{4x}{(x-1)(x-3)}$
* Luego :

$$\lim_{x\to1^-}\frac{4x}{x^2-4x+3}=\infty \text{ y } \lim_{x\to1^+}\frac{4x}{x^2-4x+3}=-\infty$$

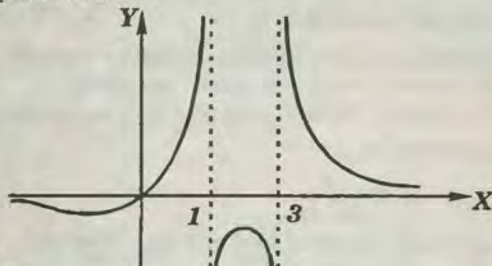
* Así la recta $x = 1$ es una asíntota vertical superior izquierda e inferior derecha a la gráfica de f. También:

$$\lim_{x\to 3^-} \frac{4x}{x^2-4x+3} = -\infty \text{ y } \lim_{x\to 3^+} \frac{4x}{x^2-4x+3} = \infty$$

* así, la recta $x = 3$ es una asíntota vertical inferior izquierda y superior derecha de la gráfica de f.

* En el ejemplo se puede verificar que:

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0 = \lim_{x\to 0^-} f(x)$ Así la recta $y = 0$, es una asíntota horizontal a la izquierda y a la derecha de la gráfica de f, con esta información adicional podemos trazar la gráfica de f de una manera aproximada.



EJEMPLO 3 :

Sea f la función definida por $f(x)=\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}$.

Determinar las asíntotas verticales, horizontales y oblicuas de la gráfica de f y trácela.

RESOLUCIÓN:

$$f(x)=\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}};\quad D_f=\langle-\infty,-1\rangle\cup\langle 1;\infty\rangle$$

• ASÍNTOTAS VERTICALES :

$$\lim_{x\to -1^-} f(x)=\lim_{x\to -1^-}\frac{x^2}{\sqrt{(x+1)(x-1)}}=\infty$$

$\Rightarrow x=-1$ es una asíntota vertical de la gráfica de f.

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2}{\sqrt{(x+1)(x-1)}}=\infty$$

$\Rightarrow x=1$ es una asíntota vertical de la gráfica de f.

• ASÍNTOTAS HORIZONTALES :

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}=\lim_{x\to\pm\infty}\sqrt{\frac{x^4}{x^2-1}}$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\sqrt{\frac{1}{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^4}}}=\infty$$

* Por lo tanto, no existe asíntola horizontal para la gráfica de f.

• ASÍNTOTAS OBLICUAS :

Cuando $x\to\infty$:

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x\sqrt{x^2-1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2-1}};$$

$$x=\sqrt{x^2}=\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{x^2}{x^2-1}}=\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{1}{1-\frac{1}{x^2}}}=1\Rightarrow m=1$$

$$b=\lim_{x\to\infty}[f(x)-x]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}-x\right]$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^2-x\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}}\right]$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(x^2-x\sqrt{x^2-1}\right)\left(x^2+x\sqrt{x^2-1}\right)}{\sqrt{x^2-1}\left(x^2+x\sqrt{x^2+1}\right)}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^4-x^2(x^2-1)}{\sqrt{x^2-1}\left(x^2+x\sqrt{x^2+1}\right)}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}\left(x^2+x\sqrt{x^2+1}\right)};\ x=\sqrt{x^2}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}\cdot\frac{1}{\ }=0\times\frac{1}{2}=0$$

$\Rightarrow b=0$

$\rightarrow$ La recta $y = x$ es un asíntota oblicua derecha de la gráfica de f.

* Cuando $x\to-\infty$.

$$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x\sqrt{x^2-1}}=-\lim_{x\to-\infty}\frac{-x}{\sqrt{x^2-1}};\ -x=\sqrt{x^2}$$

$$=-\lim_{x\to-\infty}\sqrt{\frac{x^2}{x^2-1}}=-\lim_{x\to-\infty}\sqrt{\frac{1}{1-\frac{1}{x^2}}}=-1$$

$\Rightarrow m=-1$

$$b=\lim_{x\to-\infty}[f(x)-(-1)x]=\lim_{x\to-\infty}[f(x)+x]$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}+x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2+x\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}}\right)$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(x^2+x\sqrt{x^2-1}\right)\left(x^2-x\sqrt{x^2-1}\right)}{\sqrt{x^2-1}\left(x^2-x\sqrt{x^2-1}\right)}$$

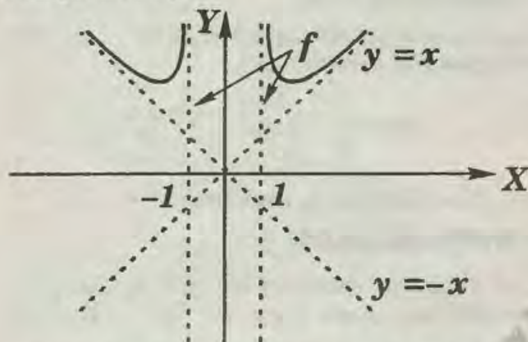
$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^4 - x^2(x^2-1)}{\sqrt{x^2-1}\left(x^2 - x\sqrt{x^2-1}\right)}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}\left(x^2 - x\sqrt{x^2-1}\right)};\ -x = \sqrt{x^2}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \cdot \frac{1}{\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)} = 0 \times \frac{1}{2} = 0$$

$\Rightarrow b = 0$

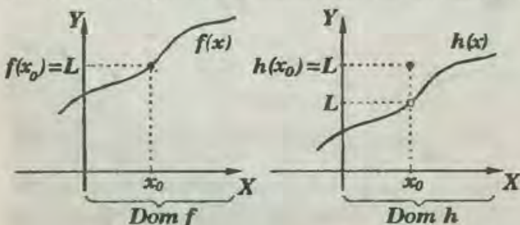
* La recta $y = -x$ es un asíntota oblicua izquierda de la gráfica de f.



CONTINUIDAD DE FUNCIONES

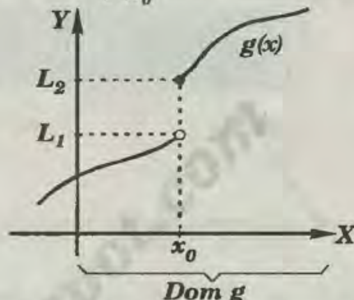
La noción de función continua tiene naturaleza global, al menos intuitivamente ; al decirse que una función definida sobre un intervalo es continua si y sólo si la gráfica de una función se puede dibujar de un solo trazo sin levantar el lápiz del papel . Sin embargo , la noción de función continua tiene naturaleza local, es decir , es relativa al comportamiento de la función en un entorno abierto de un punto. Así pues , se dice que una función f es continua en un punto $x_0 \in Dom\ f$, si y sólo si existe el límite de la función f en ese punto x_0 y su valor es $f(x_0)$.

En las conversaciones de la vida diaria , la palabra *continuidad* es entendida con el significado de ininterrumpido. Así decimos que un trazo continuo es aquel que se realiza sin interrupciones Veamos cómo esto es aplicado al estudio de las funciones :



* Como el gráfico de f no está interrumpido en x_0 decimos que $f(x)$ es continua de x_0 . Nota que en este caso se cumple que : $\lim_{x\to x_0} f(x) = L = f(x_0)$

* El gráfico de h está interrumpido en x_0 , luego $h(x)$ no es continua en x_0. Nota que existe $\lim_{x\to x_0} h(x)$, pero se tiene que $\lim_{x\to x_0} h(x) \neq h(x_0)$.



El gráfico de g está interrumpido en x_0 , luego $g(x)$ no es continua en x_0 . Nota que no existe $\lim_{x\to x_0} g(x)$ y por lo tanto $\lim_{x\to x_0} g(x) \neq g(x_0)$.

Los gráficos anteriores nos dan la idea de continuidad en un punto , la cual pasamos a definir

CONTINUIDAD EN UN PUNTO (CONTINUIDAD PUNTUAL)

Una función es continua en el punto $x = x_0$ de su dominio, si y sólo si $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. Esta definición nos indica que una función f será continua en el punto $x{=}x_0$ de su dominio , si se satisfacen simultáneamente las tres condiciones siguientes :

I) $f(x_0)$ debe estar definida (es decir $f(x_0)$ existe)

II) $\lim_{x\to x_0} f(x)$ debe existir (es decir. $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x)$)

III) $\lim_{x\to x_0} f(x)$ y $f(x_0)$ deben tener el mismo valor (es decir, $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$).

OBSERVACIÓN:

f no es continua en un punto x_0 si no se cumple al menos una de las condiciones anteriores, y en tal caso decimos que f es discontinua en el punto x_0 .

CONTINUIDAD DE UN INTERVALO

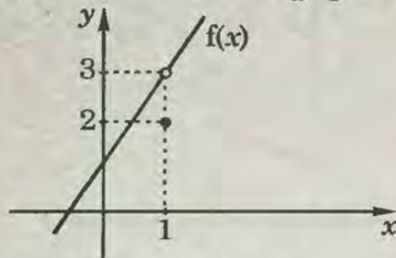
Se dice que una función $f(x)$ es continua en un intervalo abierto I, si f es continua en cada punto x_0 del intervalo I.

EJEMPLO 1:

Se $f(x)=\dfrac{x^2+x-2}{x-1}$, $Dom\,f \cdot R-\{1\}$ y $f(x)=2$ cuando $x=1$. Analicemos la continuidad de f en el punto $x_0=1$.

RESOLUCIÓN :

Graficando la función $f(x)=\dfrac{(x-1)(x+2)}{x-1}=x+2$



* Con $Dom\,f:\ R-\{1\}$ y $f(x)=2$, cuando $x=1$
* Aplicando los criterios de continuidad en $x_0=1$.

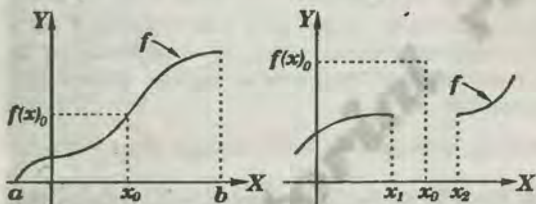
I) $f(1)=2$ *II)* $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}(x+2)=3$

III) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)\neq f(1)$

* Luego $f(x)$ no es continua en $x_0=1$.

EJEMPLO 2 :

A) $x_0\in Dom\,f=[a;b]$, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$ B) $x_0\in Dom\,f$, $f(x_0)$, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$



* En ambos casos f es continua en el punto x_0.

EJEMPLO 3:

Sea :

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x^2-7x+3}{x-3}; & si\ x\neq 3\\ 5; & si\ x=3\end{cases}$$

Analizar la continuidad de f en el punto $x_0=3$

RESOLUCIÓN :

* La función puede escribirse como :

$$f(x)=\begin{cases}2x-1; & si\ x\neq 3\\ 5; & si\ x=3\end{cases}$$

* Aplicando los criterios de continuidad en $x_0=3$.

* $f(3)=5$

* $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=\lim\limits_{x\to 3}(2x-1)=5$ * $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=f(3)=5$

* Luego $f(x)$ es continua en $x_0=3$.

EJEMPLO 4:

¿Es $f(x)=\dfrac{x^2-2x+1}{x-1}$, continua en $x_0=1$?

RESOLUCIÓN :

$x_0=1\notin Dom\,f$; $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=0$; $f(1)$, luego f es discontinua en $x_0=1$.

OBSERVACIÓN:

Esta discontinuidad puede evitarse , para ello redefinimos la función f así :

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-2x+1}{x-1} & ;\ x\neq 1\\ 0 & ;\ x=1\end{cases}$$

Esta discontinuidad se llama removible .

PROPIEDADES :

I) Si f y g son continuas en $x=x_0$, entonces también lo son $f\pm g$; $f\times g$; cf ; f/g (con $g(x_0)\neq 0$, $c\in\mathbb{R}$)

II) Todas las funciones polinómicas , racionales, raíz , n – ésima , trigonométricas , exponenciales y logarítmicas son continuas en su dominio .

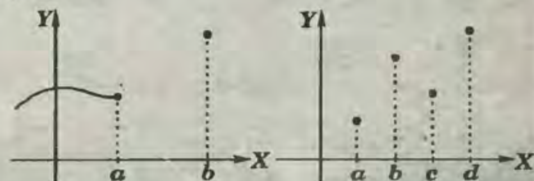
III) Si g es continua en x_0 y f es continua en $g(x_0)$, entonces $(f\circ g)(x)$ es continua en x_0; es decir :

Si $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=b$ y si f es continua en b , entonces:

$$\lim_{x\to x_0} f(g(x))=f(b)=f\left(\lim_{x\to x_0} g(x)\right)$$

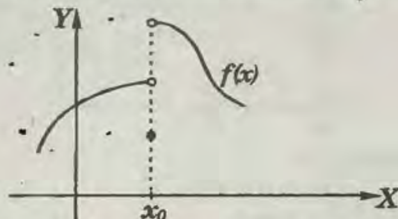
OBSERVACIÓN :

En la definición dada de continuidad puntual se ha asumido que x_0 es un punto de acumulación del dominio , ya que si no lo fuese , entonces diríamos que f es continua en x_0 y no habría nada que analizar , tal como se muestra en los siguientes gráficos .



* Tenemos que $x_0=b$ no es punto de acumulación del dominio de f, luego f es continua en $x_0=b$.

* La función f tiene dominio $\{a ; b ; c ; d\}$. Ninguno de estos puntos es un punto de acumulación del dominio. Luego f es continua en cada uno de ellos .



* En cambio si x_0 es un punto de acumulación del dominio de f, para saber si es continua o no en dicho punto , sería necesario un análisis del caso .

* Reafirmamos que en todo lo que reste de este libro, trabajaremos únicamente con puntos de acumulación .

DEFINICIÓN :

• Se dice que f es continua en $]a ; b[\subset Dom\ f$, si y sólo si es continua para cada $x_0 \in]a ; b[$.

• Se dice que f es continua en $[a; b] \subset Dom\ f$, si y sólo si:

* f es continua para cada $x_0 \in]a ; b[$

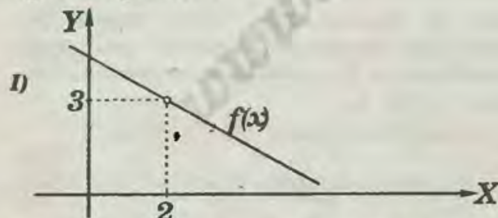
* $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$

* $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = f(b)$

PUNTOS DE DISCONTINUIDAD

A continuación estudiaremos los puntos de discontinuidad que se presentan , a partir de los siguientes gráficos :

I)



* Tenemos que f es continua en todos los puntos.

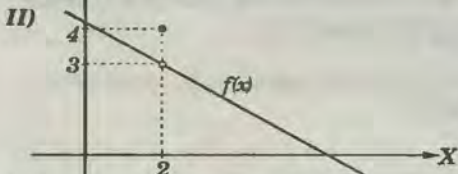
* $x_0=2$ lo llamaremos **PUNTO DE DISCONTINUIDAD REMOVIBLE**.

* La función f sería continua si definimos f en $x_0=2$

* ¿Cómo definimos f en $x_0 = 2$?

Observa que basta hacer $f(2)=3$, donde $3= \lim\limits_{x \to 2} f(x)$

II)



* f es discontinua en $x_0 = 2$.

* La función f sería continua si redefinimos f en $x_0=2$.

* ¿Cómo redefinimos f en $x_0 = 2$?

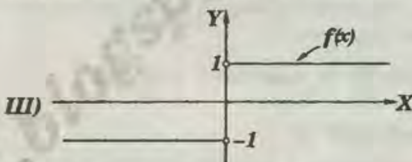
Basta con $f(2) = 3$, donde $3= \lim\limits_{x \to 2} f(x)$

* La "nueva" función f, tiene la forma :

$$f(x) = \begin{cases} f(x) ; x \neq 2 \\ 3 \quad ; x = 2 \end{cases}$$

* También decimos que $x_0 = 2$ es un punto de discontinuidad removible o evitable.

III)



* f es discontinua en $x_0 = 0$

* No se puede redefinir f en $x_0 = 0$, de modo que sea continua .

* ¿Por qué no se puede redefinir f en $x_0 = 0$?

No se puede , ya que no existe $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$

* En este caso se dice que $x_0 = 0$ es un punto de discontinuidad escencial.

TIPOS DE DISCONTINUIDAD

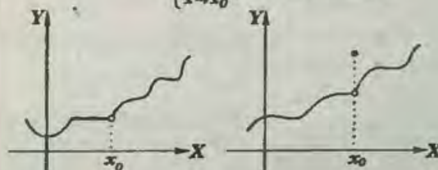
I) DISCONTINUIDAD EVITABLE :

Diremos que la función real de variable real f: $R \to R$ tiene una discontinuidad evitable o removible en el punto $x = x_0$ si

I) Existe el número $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$

II) $x_0 \notin Dom f$ o bien $x_0 \in Dom f$ se tiene que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$ en este caso definimos la función:

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & ; si\ x \neq x_0 \\ \lim\limits_{x \to x_0} f(x) & ; si\ x = x_0 \end{cases}$$



II) DISCONTINUIDAD NO EVITABLE O IRREMOVIBLE :

1) DISCONTINUIDAD DE PRIMERA ESPECIE :

Diremos que *f(x)* tiene una discontinuidad de primera especie si existe los límites laterales $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ y $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ finitos y diferentes .

2) DISCONTINUIDAD DE SEGUNDA ESPECIE :

Diremos que la función *f(x)* tiene una discontinuidad de segunda especie en el punto x_0, si no existe $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ si uno de los límites laterales es $\pm\infty$.

DEFINICIÓN :

Un punto x_0, se llama *PUNTO DE DISCONTINUIDAD ESENCIAL* si se cumple que :

$$x_0 \in Dom\, f \ \text{ y } \ \lim_{x \to x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \to x_0^+} f(x).$$

OBSERVACION :

Si la discontinuidad es escencial , el gráfico inicial no se puede corregir de modo que la función sea continua .

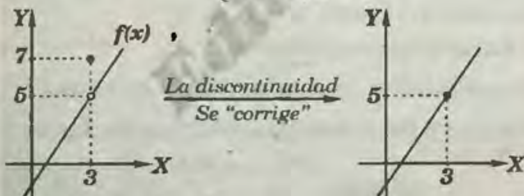
EJEMPLO 1 :

Tenemos que $x_0 = 3$ es un punto de discontinuidad removible de la función :

$$f(x)=\begin{cases} 2x-1 & ; x \neq 3 \\ 7 & ; x = 3 \end{cases}$$

ya que al graficar tenemos que la discontinuidad "se corrige" definiendo $f(3) = 5$.

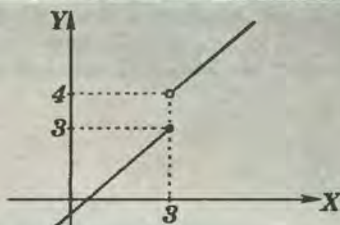
$$f(x)=\begin{cases} 2x-1 & ; x \neq 3 \\ 5 & ; x = 3 \end{cases}$$



EJEMPLO 2 :

* Tenemos que $x_0 = 3$ es un punto de discontinuidad esencial de la función .

$f(x)=\begin{cases} 2x-3, x \leq 3 \\ x+1, x > 3 \end{cases}$, ya que como se observa ésta no puede ser corregida .



EJEMPLO 3 :

Sea : $f(x)=\begin{cases} x-3, x \neq 2 \\ -1, x = 2 \end{cases}$

RESOLUCIÓN :

* Analizaremos la discontinuidad en el punto $x=2$:

I) $f(2) = -1$ Existe

II) $\exists \lim\limits_{x \to 2} f(x) \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$

$\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to 2^+} (x-3) = 2-3 = -1$

$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to 2^-} (x-3) = 2-3 = -1$

$\rightarrow \exists \lim\limits_{x \to 2} f(x) = -1$

III) $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = f(2) = -1$

EJEMPLO 4 :

$$f(x)=\frac{x^3-2x^2-11+12}{x^2-5x+4}$$

RESOLUCIÓN :

Primeramente simplificamos :

$$f(x)=\frac{x^3-2x^2-11+12}{x^2-5x+4}=\frac{(x-4)(x-1)(x+3)}{(x-4)(x-1)}$$

$\rightarrow f(x) = x+3;\ x \neq 1;\ 4$

*Luego la función *f(x)* tiene puntos de discontinuidad evitable en los puntos $x=1$, $x=4$ ahora definiremos la función de tal manera que sea continua en todo x .

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} (x+3) = 1+3 = 4$$

$$\lim_{x \to 4} f(x) = \lim_{x \to 4} (x+3) = 4+3 = 7$$

* Entonces :

$$f(x)=\begin{cases} x+3; & para\ x \neq 1;4 \\ 4 & :\ para\ x = 1 \\ 7 & ;\ para\ x = 4 \end{cases}$$

* Por lo tanto *f(x)* es continua $\forall x$

EJEMPLO 5:

$$H(x) = sen\left(\frac{3x^3-2}{x^2+4}\right)$$

RESOLUCIÓN :

* Sea $f(x) = senx;\ g(x) = \frac{3x^3 - 2}{x^2 + 4}$; en donde $g(x)$ es continua $\forall x \in R$ y f es continua en todo $g(x)$: para $x \in R$. Luego :

$H(x) \doteq f(g(x)) = sen\left(\frac{3x^3 - 2}{x^2 + 4}\right)$ es la función compuesta y es continua $\forall x \in \mathbb{R}$.

CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN EN UN INTERVALO CERRADO

Se dice que la función $f(x)$ es continua en un intervalo cerrado $[a\ ;\ b]$, si se cumple :

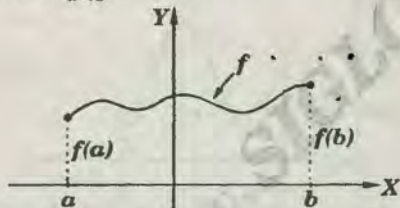
I) $f(x)$ está definida en todo punto $x \in [a;b]$

II) $f(x)$ es continua en todo punto x del intervalo abierto $\langle a;b\rangle$ es decir :

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \quad \forall x \in \langle a;b\rangle$$

III) $f(x)$ es continua por la derecha en el extremo a, es decir : $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$

IV) $f(x)$ es continua por la izquierda en el extremo b, es decir : $\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$



OBSERVACIONES:

* $f(x)$ es continua en el intervalo $[a\ ;\ b]$ si es continua $\forall x \in [a\ ;\ b]$ y, además, es continua por la derecha en el punto "a" y por la izquierda en el punto "b"

* Del mismo modo se define la continuidad de la función en el intervalo semiabierto $\langle a\ ;\ b]$ y/o también en $[a;b\rangle$. También en los intervalos de la forma:

$$\langle a;+\infty\rangle ; \langle -\infty;b\rangle ; [a;\infty\rangle ; \langle -\infty;b] ;\ R = \langle -\infty;\infty\rangle$$

EJEMPLO 1 :

¿Es $f(x) = \sqrt{x-1}$ continua en $x_0 = 1$?

$$x_0 = 1 \in Domf = [1;+\infty\rangle$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1} \sqrt{x-1} = 0$$

* Además $f(1) = 0$

* Luego , f es continua en $x_0 = 1$ por la derecha . Por tanto , f es continua $\forall x_0 > 1$

EJEMPLO 2 :

Dada : $f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{|x-1|} ; 0 \le x < 1 \\ 4 \quad ;\ x = 1 \end{cases}$

¿ f es continua en $\langle 0\ ;\ 1\rangle$?

RESOLUCIÓN :

$$f(x) = \begin{cases} -1 ;\ 0 \le x < 1 \\ 4 ; \quad x = 1 \end{cases}$$

* Si $x_0 \in \langle 0\ ;\ 1\rangle$, entonces :

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} (-1) = -1 = f(x_0)$$

* Luego , f es continua en $\langle 0\ ;\ 1\rangle$

* Además :

A) $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (-1) = -1 = f(0)$

→ f es continua por la derecha de $x_0 = 1$

B) $\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (-1) = -1 \neq 4 = f(1)$

→ f es continua por la izquierda de $x_0 = 1$

Luego , f es continua en $[0\ ;\ 1\rangle$

* Si redefinimos :

$$f(x) = \begin{cases} -1 ;\ x \in [0 , 1\rangle \\ -1 ;\ x = 1 \end{cases}$$

* Es decir $f(x) = -1$, $\forall x \in [0\ ;1]$. Luego, f es continua en $[0\ ;\ 1]$

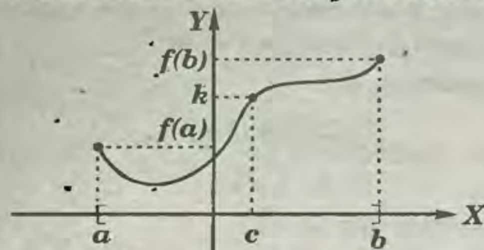
APLICACIONES DE LAS FUNCIONES CONTINUAS

Las funciones que son continuas en intervalos tienen propiedades interesantes que las hacen particularmente útiles en matemática . Entre estas tenemos el teorema del cero que es de enorme utilidad en el cálculo de las soluciones de ecuaciones polinómicas . Veamos esto :

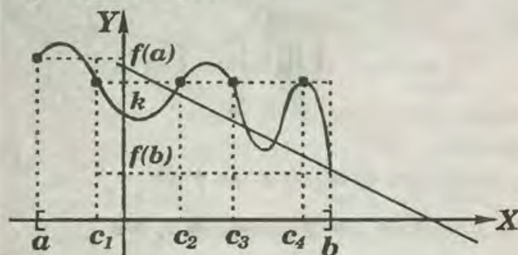
I)TEOREMA DE VALOR INTERMEDIO :

Sea f continua en el intervalo cerrado $[a\ ;\ b]$ tal que $f(a) \neq f(b)$. Si k es un número comprendido entre $f(a)$ y $f(b)$, entonces existe al menos un número $c \in]a\ ;\ b[$ tal que $f(c)=k$.

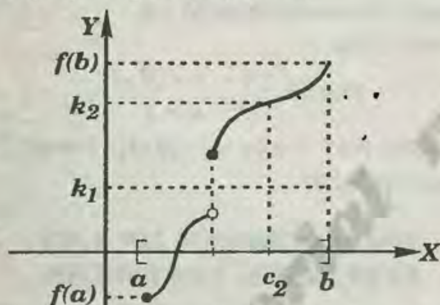
INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA:



* Para $k \in \mathbb{R}$ tal que $f(a) < k < f(b)$, existe un $c \in]a ; b[$, donde $f(c) = k$



* Tenemos $f(b) < k < f(a)$ entonces existen c_1, c_2, c_3 y $c_4 \in]a ; b[$ tal que $f(c) = k$



* Si en este teorema deja de cumplirse la hipótesis de que f es continua en $[a ; b]$, entonces la conclusión, «existe al menos un $c \in]a;b[$ tal que :

$f(c) = k$» no necesariamente se cumple .

En el gráfico , para k_2 existe c_2 tal que :

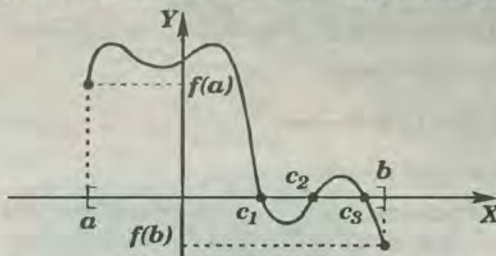
$f(c_2) = k_2$; pero para k_1 no existe c alguna.

El siguiente teorema es fundamental para encontrar las raíces de una ecuación .

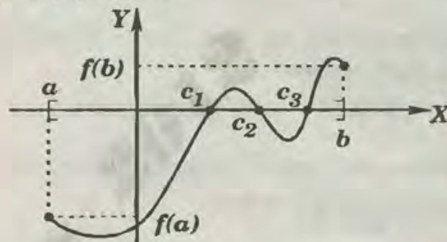
II) TEOREMA DE BOLZANO - WEIERSTRASS (TEOREMA DEL CERO)

Si f es continua en $[a ; b]$ y si $f(a) \times f(b) < 0$, entonces existe al menos un número $c \in]a;b[$ tal que $f(c)=0$

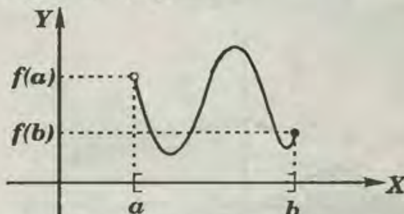
INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA :



* Tenemos que $f(b) < 0 < f(a)$, entonces existen c_1 y c_2 pertenecientes al intervalo $]a ; b[$ tal que $f(c_1)=0$ y $f(c_2) = 0$



* En este caso $f(a) < 0 < f(b)$, entonces existen c_1 en $]a ; b[$ tal que $f(c_1) = 0$



* Si en este teorema deja de cumplirse la hipótesis $f(a) \times f(b) < 0$, entonces la conclusión, «existe al menos un número $c \in]a;b[$ tal que $f(c)=0$» no se cumple necesariamente . En este gráfico no se cumple.

EJEMPLO 1:

Resolver la ecuación : $x^4 + x^3 - 13x^2 - x + 12 = 0$

RESOLUCIÓN :

* Sea $f(x) = x^4 + x^3 - 13x^2 - x + 12 = 0$ una función polinomial , la cual es continua en todo $\mathbb{R}$.

* Para aplicar el teorema del cero necesitamos construir intervalos de la forma $[a;b]$ tal que $f(a) \times f(b) < 0$.

* Como $f(0) = 12 > 0$ y $f(2) = -18 < 0$, tenemos que $f(0)f(2) < 0$. Luego decimos que existe un número $r \in]0 ; 2[$ tal que $f(r) = 0$

* Aplicando lo anterior, tenemos que las posibles raíces racionales son los divisores de *12*; esto es ± 1 ; ± 2 ; ± 3 ; ± 4 ; ± 6 ; ± 12 .

* Teniendo presente que $r \in]0;2[$, elegimos $r=1$ para hacer la prueba

* Aplicando el método de Ruffini se tiene :

	1	1	−13	−1	12
$x=1$	↓	1	2	−11	−12
	1	2	−11	−12	0

$\Rightarrow x=1$ *es un cero.*
Luego un factor es $(x-1)$

* El polinomio queda expresado como :

$$f(x)=x^4+x^3-13x^2-x+12=(x-1)(x^3+2x^2-11x-12)$$

* Ahora trabajemos con $f_1(x)=x^3+2x^2-11x-12$:

* Como $f_1(0)=-12$ y $f_1(-2)=10$, entonces $f_1(0)\times f_1(-2)<0$.

Luego existe un número $r\in]-2;0[/ f_1(r)=0$

* Aplicando Ruffini a $f_1(x)$:

	1	2	−11	−12
$x=-1$	↓	−1	−1	12
	1	1	−12	0

$\Rightarrow x=-1$ *es un cero.*
Luego un factor es $(x+1)$

El polinomio original queda expresado como :

$$f(x)=x^4+x^3-13x^2-x+12=(x-1)(x^3+2x^2-11x-12)$$
$$=(x-1)(x+1)(x^2+x-12)$$
$$=(x-1)(x+1)(x+4)(x-3)$$

* Entonces $f(x)=0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1)(x+4)(x-3)=0$

$$\Leftrightarrow x=1, x=-1, x=-4, x=3$$

* El conjunto solución es $[1;-1;-4;3]$

OBSERVACIÓN :

Hay un teorema que nos indica que dada la ecuación polinomial :

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+.....+a_1x+a_0=0$$

Sus posibles raíces racionales son de la forma $r=p/q$, donde p es un divisor de a_0 y q un divisor de a_n .

EJEMPLO 2:

Resolver la ecuación $18x^3+9x^2-2x-1=0$

RESOLUCIÓN :

* Sea $f(x)=18x^3+9x^2-2x-1$ una función polinomial, la cual es continua en $\mathbb{R}$.

*Las posibles raíces racionales son: ± 1, $\pm 1/2$, $\pm 1/3$, $\pm 1/6$, $\pm 1/9$, $\pm 1/18$ como $f(0)=-1<0$ y $f(1)=24>0$ entonces $f(0)\times f(1)<0$. Luego existe un número $r\in]0;1[$, estas son : $r=1/2$; $1/3$; $1/6$; $1/9$; $1/18$.

* Haciendo la prueba con $r=1/2$ aplicando Ruffini :

	18	9	−2	−1
$x=1/2$	↓	9	9	7/2
	18	18	7	5/2

$\Rightarrow x=\frac{1}{2}$ *no es un cero.*

* Haciendo ahora la prueba con $r=1/3$

	18	9	−2	−1
$x=1/3$	↓	6	5	1
	18	15	3	0

$\Rightarrow x=\frac{1}{3}$ *es un cero.*

Luego $\left(x-\frac{1}{3}\right)$ *es un factor*

* El polinomio queda expresado :

$$f(x)=18x^3+9x^2-2x-1=\left(x-\frac{1}{3}\right)(18x^2+15x+3)$$

* Luego : $f(x)=(3x-1)(6x^2+5x+1)=(3x-1)(2x+1)(3x+1)$

* Entonces = $f(x)=(3x-1)(2x+1)(3x+1)=0$

$$\Leftrightarrow x=\frac{1}{3},\ x=-\frac{1}{2},\ x=-\frac{1}{3}$$

* El conjunto solución es : $\left\{\frac{1}{3};-\frac{1}{2};-\frac{1}{3}\right\}$

EJEMPLO 3:

* Demostrar que la ecuación $x^3-15x+1=0$ tiene tres soluciones en el intervalo $[-4;4]$

* Por otro lado $f(0)=1>0$ y $f(1)=-13<0$, entonces $f(0)\times f(1)<0$.

* Luego existe un número $x_1\in]0;1[$ tal que $f(x_1)=0$. Entonces x_1 es una solución en : $]0;1[\subset[-4;4]$.

* También $f(3)=-17<0$ y $f(4)=5>0$. Luego existe un número $x_2\in]3;4[$ tal que $f(r_2)=0$. Entonces x_2 es una solución en $]3;4[\subset[-4;4]$

* Por último, $f(-3)=19>0$ y $f(-4)=-3<0$.

Luego existe un número $x_3\in]-4;-3[$ tal que $f(r_3)=0$. Entonces x_3 es una solución en $]-4;-3[\subset]-4;4]$

* Lo anterior prueba que $x^3-15x+1=0$ tiene tres soluciones en $[-4;4]$. Notése que estas soluciones son números irracionales.

EJERCICIOS

01 Calcula los siguientes límites :

A) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x-4}{x-4}$ B) $\lim\limits_{x\to 4}\sqrt{x}$ C) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{18x+2}{x-3}$

D) $\lim\limits_{x\to 0}(3x+2)$ E) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1-x}{2+x^2}$ F) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$

02 Calcular los siguientes límites :

A) $\lim\limits_{x\to 2}(x^2-7)(2x-1)$ B) $\lim\limits_{x\to -1}(3x^2-2)(2x-1)$

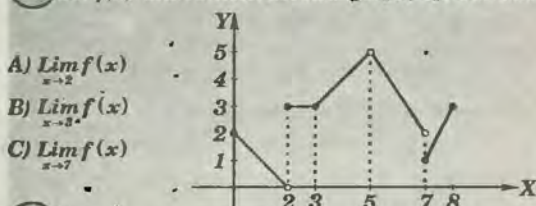
C) $\lim\limits_{x\to -5}(3x^2-4x)(9x+1)$ D) $\lim\limits_{x\to 7}(-2x^2-2x+1)(2x+1)$

03 Sea $f(x)$ una función definida en $[0;8]$. Calcular

A) $\lim_{x\to 2} f(x)$

B) $\lim_{x\to 3^+} f(x)$

C) $\lim_{x\to 7} f(x)$



04 Sean:

A) $g(x)=\begin{cases} x-1, & x\neq 2 \\ 3, & x=2 \end{cases}$, Halla $\lim_{x\to 2} g(x)$, si existe

B) $h(x)=\begin{cases} x^2+1, & x<2 \\ 5, & x=2 \\ 3x-1, & x>2 \end{cases}$, Halla $\lim_{x\to 2} h(x)$, si existe

C) $f(x)=\begin{cases} a-x+1, & x<2 \\ \frac{x}{2}+a-1, & x>2 \end{cases}$, Hallar (a) para que exista $\lim_{x\to 2} f(x)$

05 Calcula los siguientes límites:

A) $\lim_{x\to 3}\frac{1}{x-3}$ B) $\lim_{x\to -2}\frac{3}{(x+2)^2}$ C) $\lim_{x\to 3}\frac{3-x}{(x-3)^2}$

D) $\lim_{x\to 4}\frac{x+3}{x^2-16}$ E) $\lim_{x\to -2^+}\frac{5x}{3x+6}$ F) $\lim_{t\to 0}\left(\frac{1}{t\frac{3}{5}}-7\right)$

06 Indica la verdad o falsedad de:

A) Si $Dom\ f=\mathbb{R}-\{x0\}$ }, entonces existe $\lim_{x\to x0} f(x)$ necesariamente .

B) Si $Dom\ f=\mathbb{R}$, entonces siempre existe $\lim_{x\to x0} f(x)$

Justifica la respuesta en cada caso .

07 Indica la verdad o falsedad de:

A) Si $f(x_0)=L$, entonces $\lim_{x\to x0} f(x)=L$

B) Si $f(x_0)=L$, entonces existe $\lim_{x\to x0} f(x)$

Justifica tu respuesta en cada caso.

08 Indica la verdad o falsedad de las siguientes proposiciones :

A) $\lim_{x\to 2}(x^2+2x-1)=7$ B) $\lim_{x\to 3}(x^3+3x^2-x)=3$

C) $\lim_{x\to 0}(\sqrt[3]{x}-\sqrt[5]{x}+2)=1$ D) $\lim_{x\to +\infty}(x^4-x^2+2)=+\infty$

09 Sea $f(x)=\frac{x+4}{x-3}$. Indica la verdad o falsedad de:

A) Cuando $x\to +\infty$, las imágenes $f(x)$ se aproximan a 1

B) Cuando $x\to -\infty$, las imagenes $f(x)$ se aproximan a 1

C) Cuando $x\to 3^+$, $f(x)\to +\infty$

D) Cuando $x\to 3^-$, $f(x)\to -\infty$

10 Confecciona una tabla de valores y calcula el límite, en el punto $x_0=3$, de la función :

$f(x)=\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$. A continuación calcular el mismo límite , pero analíticamente .

11 Confecciona una tabla de valores y calcula el límite , cuando $x_0=0$, de la función : $f(x)=\frac{1}{x}$

12 Confecciona una tabla de valores y calcula el límite , cuando $x\to +\infty$, de la función : $f(x)=\frac{1}{x}$

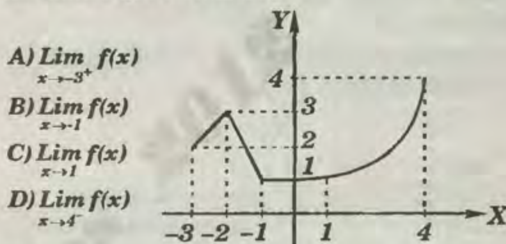
13 Con el gráfico siguiente calcula cada uno de los límites que se indican.

A) $\lim_{x\to -3^+} f(x)$

B) $\lim_{x\to -1} f(x)$

C) $\lim_{x\to 1} f(x)$

D) $\lim_{x\to 4^-} f(x)$



14 En el siguiente gráfico , calcula cada uno de los límites que se indican :

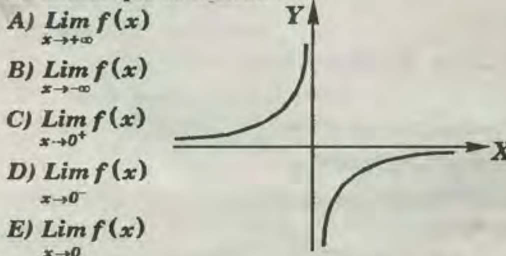
A) $\lim_{x\to +\infty} f(x)$

B) $\lim_{x\to -\infty} f(x)$

C) $\lim_{x\to 0^+} f(x)$

D) $\lim_{x\to 0^-} f(x)$

E) $\lim_{x\to 0} f(x)$



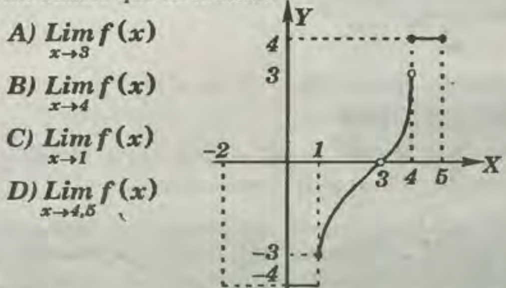
15 En el siguiente gráfico , calcula cada uno de los límites que se indican:

A) $\lim_{x\to 3} f(x)$

B) $\lim_{x\to 4} f(x)$

C) $\lim_{x\to 1} f(x)$

D) $\lim_{x\to 4,5} f(x)$



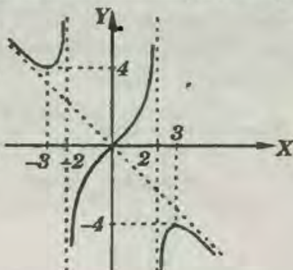
16 En el siguiente gráfico , calcula cada uno de los límites que se indican.

A) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ B) $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)$

C) $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$ D) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

E) $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$ F) $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$

G) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ H) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$



17 Calcula los siguientes límites :

A) $\lim\limits_{x\to 2}(x^2+2x-1)$ B) $\lim\limits_{x\to -3}(x^3+3x^2-x)$

C) $\lim\limits_{x\to 0}(\sqrt[3]{x}-\sqrt[5]{x}+2)$ D) $\lim\limits_{x\to +\infty}(x^4-x^2+2)$

18 Calcula los siguientes límites laterales :

A) $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x^2+2}{x-6}$ B) $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x^2+2}{x-2}$ C) $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^2-1}{x-1}$

D) $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^2-1}{x-1}$ E) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2+x-6}{x+3}$ F) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{(x-1)^2-1}{x}$

19 Calcula los siguientes límites :

A) $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{x^2-36}{x-6}$ C) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2-x}-\sqrt{2}}{x}$

B) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x+2)^2-3}{x}$ D) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^2+1}{x^3+2x-1}$

20 Indica la verdad o falsedad de la afirmación: Una función f puede ser continua en $x = x_0$ y no estar definida en dicho punto .

21 Indica la verdad o falsedad de la proposición: Existe una función f tal que $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ para todo x_0 de su dominio . Justifica tu respuesta .

22 Indica la verdad o falsedad de :

A) $f(x)=\begin{cases}3\,;\, x\le 4\\ x\,;\, x>4\end{cases}$, no es continua en $x_0=4$

B) $g(x)=\begin{cases}x\,;\, x\le 4\\ 3\,;\, x>4\end{cases}$, no es continua en $x_0=4$

C) $(f+g)(x)=\begin{cases}3+x\,;\, x\le 4\\ x+3\,;\, x>4\end{cases}$, es continua en $x_0=4$

23 Indica la verdad o falsedad de :

La función definida por $f(x)=\dfrac{1}{x-3}$ se puede redefinir en $x=3$, de modo que sea continua en $x=3$ Justifica tu respuesta .

24 Dada la función f, analiza la continuidad en $x_0 = 1$.

$$f(x)=\begin{cases}x+1 & ;si\ x\le 1\\ 3-x^2 & ;si\ x>1\end{cases}$$

25 Analiza la continuidad de la siguiente función en $x_0=3$:

$$f(x)=\begin{cases}-x^2+4x-2 & ;si\ x<3\\ 4-x & ;si\ x\ge 3\end{cases}$$

26 Sea :

$$f(x)=\begin{cases}3-ax^2 & ;\ x<1\\ 1+x & ;\ x\ge 1\end{cases}$$

Demuestra cómo debes elegir el valor de "a" para que la función f sea continua de $x_0 = 1$.

27 Dada la función :

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x|}{x} & ;\ x\ne 0\\ 0 & ;\ x=0\end{cases}$$

¿Es continua o discontinua en $x_0 = 0$ *?* Justifica tu respuesta efectuando el gráfico de la función .

28 Dada la función $f(x) = x - |x|$, analiza si es continua o discontinua en su dominio . Justifica tu respuesta efectuando el gráfico de la función .

29 La función : $f(x)=\dfrac{1}{x-3}$, no está definida en $x_0= 3$. Trata de definirla de modo que sea continua en $x_0 = 3$. ¿Qué clase de discontinuidad hay en este punto?

30 Analiza la continuidad de la función f en $x_0= 2$.

$$f(x)=\begin{cases}3-x^2 & ;\ x<2\\ 3 & ;\ x=2\\ -1 & ;\ x>2\end{cases}$$

Trata de redefinirla para que sea continua en $x_0=2$ De ser así , ¿cómo lo harías?.

31 Halla las raíces de las siguientes ecuaciones

a) $x^3+4x^2-11x-30=0$

b) $x^3+x^2-26x+24=0$

c) $6x^4+5x^3-14x^2+x+2=0$

d) $36x^5+72x^4-13x^3-26x^2+x+2=0$

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1 :

Calcular : $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2+ax-2a^2}{x^2-a^2}$; $(x\neq a);(a>0)$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 2,5 E) $\frac{3}{2}$

RESOLUCIÓN :

* Evaluando : $\dfrac{a^2+a^2-2a^2}{a^2-a^2}=\dfrac{0}{0}$

* Factorizando el numerador y el denominador para simplificar el binomio $(x-a)$; entonces :

$$\lim_{x\to a}\frac{x^2+ax-2a^2}{x^2-a^2}=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)(x+2a)}{(x-a)(x+a)}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{x+2a}{x+a}=\frac{a+2a}{a+a}=\frac{3}{2}$$

RPTA: "E"

PROBLEMA 2 :

Determinar : $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+8x+7}{x^2-x-2}$

A) 1 B) –2 C) 0 D) 12 E) $\sqrt{2}$

RESOLUCIÓN :

* Se reemplaza a x por -1:

$$\lim_{x\to -1}\frac{(-1)^2+8(-1)+7}{(-1)^2-(-1)-2}=\frac{0}{0}$$

* Como $\frac{0}{0}$ es una expresión indeterminada , se factoriza numerador y denominador buscando cancelar los factores que hacen cero la función .

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^2+8x+7}{x^2-x-2}=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x+7)}{(x+1)(x-2)}$$

* Se cancela $x+1$ en el numerador y en el denominador: $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(x+7)}{(x-2)}$

* En la nueva función equivalente se reemplaza a x por -1.

$$\lim_{x\to -1}\frac{[(-1)+7]}{[(-1)-2]}=\frac{6}{-3}=-2$$

RPTA: "B"

PROBLEMA 3 :

Calcular : $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+1}{x^2-1}$

A) –1 B) –1,5 C) 0 D) 2 E) $\frac{2}{3}$

RESOLUCIÓN :

* Evaluamos : $\dfrac{(-1)^3+1}{(-1)^2-1}=\dfrac{0}{0}$

* El binomio : $x-(-1)=x+1$, debe ser simplificado para levantar la indeterminación .

* Veamos :

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^3+1}{x^2-1}=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x^2-x+1)}{(x+1)(x-1)}$$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{x^2-x+1}{x-1}=\frac{(-1)^2-(-1)+1}{(-1-1)}=-\frac{3}{2}=-1,5$$

RPTA: "B"

PROBLEMA 4 :

Calcular : $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}$

A) 1 B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{4}{3}$ D) $\frac{1}{2}$ E) 7

RESOLUCIÓN :

* Veamos que al sustituir $x=1$, el límite toma la forma $\frac{0}{0}$. Para levantar esta indeterminación introducimos una nueva variable :

Común índice : M.C.M. $(3;4)=12$

* Supongamos que : $\sqrt[12]{x}=y\rightarrow\begin{cases}\sqrt[3]{x}=\left(\sqrt[12]{x}\right)^4=y^4\\ \sqrt[4]{x}=\left(\sqrt[12]{x}\right)^3=y^3\end{cases}$

* Intercambiando límites : si $x\to 1$, entonces :

$$y\to\sqrt[12]{1}=1$$

* Luego :

$$L=\lim_{y\to 1}\frac{y^4-1}{y^3-1}=\lim_{y\to 1}\frac{(y-1)(y^3+y^2+y+1)}{(y-1)(y^2+y+1)}=$$

$$=\lim_{y\to 1}\frac{y^3+y^2+y+1}{y^2+y+1}=\frac{4}{3}$$

RPTA: "C"

PROBLEMA 5 :

Calcular : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}$; $x\neq 0$

A) $\frac{1}{2}$ B) 1 C) 2 D) $\sqrt{2}$ E) $\sqrt{2}-1$

RESOLUCIÓN :

* Evaluamos : $\dfrac{\sqrt{1+0+0^2}-1}{0}$; $x\neq 0$

* Racionalizando el denominador :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}\times\frac{\left(\sqrt{1+x+x^2}+1\right)}{\left(\sqrt{1+x+x^2}+1\right)}$$

* Efectuando el numerador se tiene :

$$\lim_{x\to 0}\frac{1+x+x^2-1}{x\left(\sqrt{1+x+x^2}+1\right)}\quad\lim_{x\to 0}\frac{x(x+1)}{x\left(\sqrt{1+x+x^2}+1\right)}$$

{simplificando la "x" que hace la indeterminación}

$$\lim_{x\to 0}\frac{x+1}{\sqrt{1+x+x^2}+1}=\frac{1+0}{\sqrt{1+0+0}+1}=\frac{1}{2}$$

RPTA: "A"

PROBLEMA 6 :

Hallar : $\lim_{x\to 1}\left[\frac{x+2}{x^2-5x+4}+\frac{x-4}{3(x-3x+2)}\right]$

A) 1 B) 1 C) 0 D) 4 E) -2

RESOLUCIÓN :

* Al sustituir $x=1$, el límite toma la forma $\infty-\infty$.

$$L=\lim_{x\to 1}\left[\frac{x+2}{(x-1)(x-2)(x-4)}+\frac{x-4}{3(x-1)(x-2)}\right]$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{3(x+2)(x-2)+(x-4)(x-4)}{3(x-1)(x-2)(x-4)}$$

$$\to L=\lim_{x\to 1}\frac{4(x-1)^2}{3(x-1)(x-2)(x-4)}=\lim_{x\to 1}\frac{4(x-1)}{3(x-2)(x-4)}=0$$

RPTA: "C"

PROBLEMA 7 :

Calcular : $\lim_{x\to +\infty}\frac{2x^2-3x+4}{\sqrt{x^4+1}}$

A) 2 B) 4 C) 0 D) -1 E) 8

RESOLUCIÓN :

* Evaluando se tiene : $\frac{\infty}{\infty}$

* Dividimos el numerador y denominador por el término cuyo exponente sea el mayor de todos los términos .

* Dividir entonces por "x^2"

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2x^2-3x+4}{x^2}}{\frac{\sqrt{x^4+1}}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2-\frac{3}{x}+\frac{4}{x^2}}{\sqrt{\frac{x^4+1}{x^4}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2-\frac{3}{x}+\frac{4}{x^2}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}}=\frac{2-0+0}{\sqrt{1+0}}=2$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2x^2-3x+4}{x^2}}{\frac{\sqrt{x^4+1}}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2-\frac{3}{x}+\frac{4}{x^2}}{\sqrt{\frac{x^4+1}{x^4}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2-\frac{3}{x}+\frac{4}{x^2}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}}=\frac{2-0+0}{\sqrt{1+0}}=2$$

RPTA: "A"

PROBLEMA 8 :

Calcular : $\lim_{x\to\infty}\frac{(2x+3)^3(3x-2)^2}{x^5+5}$

A) 8 B) 32 C) 36 D) 72 E) 0

RESOLUCIÓN :

* Evaluando se tiene : $\frac{\infty}{\infty}$

* Dividiendo el numerador y el denominador por "x^5".

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{(2x+3)^3(3x-2)^2}{x^5}}{\frac{x^5+5}{x^5}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{(2x+3)^3}{x^3}\times\frac{(3x-2)^2}{x^2}}{1+\frac{5}{x^5}}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\frac{2x+3}{x}\right)^3\left(\frac{3x-2}{x}\right)^2}{1+\frac{1}{x^5}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(2+\frac{3}{x}\right)^2\left(3-\frac{2}{x}\right)^2}{1+\frac{1}{x^5}}=\frac{(2)^3(3)^2}{1}$$

$$\to\lim_{x\to\infty}\frac{(2x+3)^3(3x-2)^2}{x^5+5}=72$$

RPTA: "D"

PROBLEMA 9 :

Calcular : $\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}$

A) $\frac{1}{\sqrt{a}}$ B) $\sqrt{a}$ C) a D) $\frac{1}{a}$ E) $\frac{1}{3a}$

RESOLUCIÓN :

* Evaluando : $\frac{\sqrt{a}-\sqrt{a}+\sqrt{a-a}}{\sqrt{a^2-a^2}}=\frac{0}{0}$

* Desdoblando convenientemente :

$$\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{\sqrt{x^2-a^2}}+\frac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}$$

* Calculando cada límite independientemente .

$$\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{\sqrt{x^2-a^2}}+\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{a})(\sqrt{x}+\sqrt{a})}{\sqrt{(x+a)(x-a)}(\sqrt{x}+\sqrt{a})}+\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{x+a}\sqrt{x-a}}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{x-a}{\sqrt{x-a}\sqrt{x+a}(\sqrt{x}+\sqrt{a})}+\lim_{x\to a}\frac{1}{\sqrt{x+a}}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{x+a}(\sqrt{x}+\sqrt{a})}+\lim_{x\to a}\frac{1}{\sqrt{x+a}}$$

$$=\frac{\sqrt{a-a}}{\sqrt{a+a}(\sqrt{x}+\sqrt{a})}+\frac{1}{\sqrt{a+a}}=\frac{1}{\sqrt{a}}$$

RPTA: "A"

PROBLEMA 10 :

Calcular cada uno de los límites siguientes :

I) $\lim_{x\to 5}\frac{4}{x-5}$ II) $\lim_{x\to 5^+}\frac{4}{x-5}$ III) $\lim_{x\to 3}\frac{4}{x(x-3)^2}$

IV) $\lim_{x\to 2^+}\frac{3x+2}{x^2+x^2-6x}$ V) $\lim_{x\to\frac{-3}{7}}\frac{4}{7x+3}$

VI) $\lim_{x\to\frac{5}{2}}\frac{8}{(2x-5)^2}$ VII) $\lim_{x\to 1^-}\frac{4x}{x^2-4x+3}$

IV) $\lim_{x\to 2^+}\frac{3x+2}{x^3+x^2-6x}$ VIII) $\lim_{x\to 1^+}\frac{4x}{x^2-4x+3}$

RESOLUCIÓN :

I) $\lim\limits_{x\to5^-}\dfrac{4}{x-5}=\lim\limits_{x\to5^-}4.\lim\limits_{x\to5^-}\dfrac{1}{x-5}=4(-\infty)=-\infty$

II) $\lim\limits_{x\to5^+}\dfrac{4}{x-5}=\lim\limits_{x\to5^+}4.\lim\limits_{x\to5^+}\dfrac{1}{x-5}=4(\infty)=\infty$

III) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{4}{x(x-3)^2}=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{4}{x}.\lim\limits_{x\to3}\dfrac{1}{(x-3)^2}=\dfrac{4}{3}.\infty=\infty$

IV) $\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{3x+2}{x^3+x^2-6x}=\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{3x+2}{x(x+3)(x-2)}$

$=\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{3x+2}{x(x+3)}\cdot\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{1}{(x-2)}=\dfrac{4}{5}\times\infty=\infty$

V) $\lim\limits_{x\to-\frac{3}{7}^-}\dfrac{4}{7x+3}=\lim\limits_{x\to-\frac{3}{7}^-}\dfrac{4}{7}\cdot\lim\limits_{x\to-\frac{3}{7}^-}\dfrac{1}{x+\frac{3}{7}}=\dfrac{4}{7}\times(-\infty)=-\infty$

VI) $\lim\limits_{x\to-\frac{5}{2}}\dfrac{8}{(2x+5)^2}=\lim\limits_{x\to-\frac{5}{2}}2\cdot\lim\limits_{x\to-\frac{5}{2}}\dfrac{1}{\left(x+\frac{5}{2}\right)^2}=2(\infty)=\infty$

VII) $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{4x}{x^2-4x+3}=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{4x}{(x-1)(x-3)}$

$=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{4x}{(x-3)}\cdot\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{1}{(x-1)}=(-2)(-\infty)=+\infty$

VIII) $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{4x}{x^2-4x+3}=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{4x}{(x-3)(x-1)}$

$=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{4x}{(x-3)}\cdot\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{1}{(x-1)}=(-2)(\infty)=-\infty$

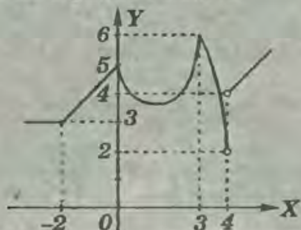
PROBLEMA 11 :

Sea $h(x)$ la función de la figura adjunta, qué puedes afirmar acerca de los siguientes límites:

A) $\lim\limits_{x\to2^-}h(x)$

B) $\lim\limits_{x\to0}h(x)$

C) $\lim\limits_{x\to4}h(x)$



RESOLUCIÓN :

A) Tenemos : $\lim\limits_{x\to-2^-}h(x)=3,\ \lim\limits_{x\to-2^+}h(x)=3$.

Como son iguales , decimos que existe $\lim\limits_{x\to-2}h(x)=3$

B) $\lim\limits_{x\to0^-}h(x)=5=\lim\limits_{x\to0^+}h(x)$; luego existe $\lim\limits_{x\to0}h(x)$ y

$\lim\limits_{x\to0}h(x)=5$

C) Tenemos : $\lim\limits_{x\to4^-}h(x)=2$ y $\lim\limits_{x\to4^+}h(x)=4$.

Luego no existe $\lim\limits_{x\to4}h(x)$

PROBLEMA 12 :

I) Sea $f(x)=\begin{cases}-1\ ;\ x\geq2\\ 1\ \ ;\ x<2\end{cases}$. Hallar $\lim\limits_{x\to2}f(x)$.

II) Sea $f(x)=\begin{cases}x^2+3\ ;\ x\neq3\\ 12\qquad ;\ x=3\end{cases}$. Hallar $\lim\limits_{x\to3}f(x)$.

III) Si $f(x)=\begin{cases}a-2x\ ;\ x<1\\ 6x-a\ ;\ x\geq1\end{cases}$, hallar el valor de "$a$" para que exista $\lim\limits_{x\to1}f(x)$

RESOLUCIÓN:

I) * $\lim\limits_{\substack{x\to2^-\\(x<2)}}f(x)=\lim\limits_{x\to2^-}(1)=1$

* $\lim\limits_{\substack{x\to2^+\\(x>2)}}f(x)=\lim\limits_{x\to2^+}(-1)=1$

como son diferentes, no existe $\lim\limits_{x\to2}f(x)$

II) En este caso no es necesario usar límites laterales , tenemos : $\lim\limits_{x\to3}f(x)=\lim\limits_{x\to3}(x^2+3)=12$.

III) * $\lim\limits_{\substack{x\to1^-\\(x<1)}}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}(a-2x)=a-2$

* $\lim\limits_{\substack{x\to1^+\\(x>1)}}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}(6x-a)=6-a$

* Para que exista $\lim\limits_{x\to1}f(x)$, se debe cumplir que : $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}f(x)$, de donde : $a-2=6-a\Rightarrow a=4$

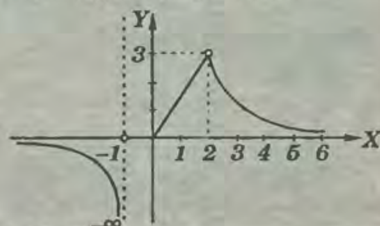
PROBLEMA 13 :

Sea la función : $y=f_{(x)}$; cuya gráfica es :

Calcular :

A) $\lim\limits_{x\to-1}f(x)$

B) $\lim\limits_{x\to2}f(x)$



RESOLUCIÓN :

A) Analizando en el punto de acumulación : $x=-1$

I) $\lim\limits_{x\to-1^-}f(x)=-\infty$

II) $\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)=0$

III) Como $\lim\limits_{x\to-1^-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)$

* Entonces no existe : $\lim\limits_{x\to-1}f(x)$

B) Analizando en el punto de acumulación: $x=2$

I) $\lim\limits_{x\to2^-}f(x)=3$ II) $\lim\limits_{x\to2^+}f(x)=3$

III) Como : $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 3$

* Entonces : $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 3$

PROBLEMA 14 :

Calcular si existe : $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$; donde :

$$f(x)=\begin{cases} x^2+3 \ ; si\ x\le 1 \\ x+1 \ ; si\ x>1 \end{cases}$$

RESOLUCIÓN :

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}\left(x^2+3\right) = 1+3 = 4$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}\left(x+1\right) = 1+1 = 2$$

* Como : $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$

* Entonces : $\nexists \lim\limits_{x\to 1} f(x)$

PROBLEMA 15:

Calcular si existe: $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$; donde :

$$f(x)=\begin{cases} x^2 \ ; si\ x\le 2 \\ 8-2x \ ; si\ x>2 \end{cases}$$

RESOLUCIÓN :

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} x^2 = 2^2 = 4$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} 8-2x = 8-4 = 4$$

* Como : $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$

* Entonces : $\exists \lim\limits_{x\to 2} f(x) = 4$

PROBLEMA 16 :

Sea la función :

$$f(x)=\begin{cases} x^2-6 \ ; x>1 \\ 6 \ ; x=1 \\ -x-4 \ ; x<1 \end{cases}$$

Calcular si existe $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ y trazar la gráfica de la función.

RESOLUCIÓN:

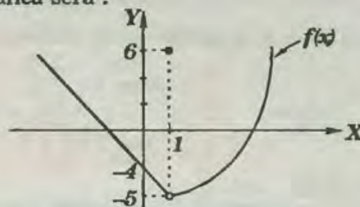
* Se observa que antes de *"1"* y después de *"1"* se observa diferentes reglas de correspondencia por lo que es necesario calcular los límites laterales .

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}\left(x^2-6\right) = 5$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}\left(-x-4\right) = -5$$

* Puesto que los límites laterales existen y son iguales entonces : $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = -5$

* La gráfica será :



PROBLEMA 17:

Calcular los límites laterales en , $x = 1$ de:

$$f(x)=\begin{cases} \left(x^2+2\right)^{[x]} \ ; si : x\ge 1 \\ \sqrt[3]{x} \ ; si : x<1 \end{cases}$$

RESOLUCIÓN :

I) Límite lateral por la derecha : $x > 1$

$$x>1 \Leftrightarrow 1<x<2 \Leftrightarrow [\![x]\!]=1$$

* Luego :

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}(x^2+2)^{[x]} = \lim_{x\to 1^+}(x^2+2) = 3$$

II) Límite lateral por la izquierda : $x < 1$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{1} = 1$$

PROBLEMA 18:

Calcular : $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{[x^2]-4}{x^2-4}$

RESOLUCIÓN :

* Si: $x\in[1;2\rangle \Rightarrow [\![x^2]\!] = \begin{cases} 1;\ Si\ x^2\in[1;2\rangle \\ 2;\ Si\ x^2\in[2;3\rangle \\ 3;\ Si\ x^2\in[3;4\rangle \end{cases}$

$$\Rightarrow [x^2] = \begin{cases} 1;\ Si\ x\in\left[1;\sqrt{2}\right\rangle \\ 2;\ Si\ x\in\left[\sqrt{2};\sqrt{3}\right\rangle \\ 3;\ Si\ x\in\left[\sqrt{3};2\right\rangle \end{cases}$$

* Luego: $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{[\![x^2]\!]-4}{x^2-4} = \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{3-4}{x^2-4} = +\infty$

PROBLEMA 19 :

Calcular : $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+1}\right)^{2x}$

RESOLUCIÓN :

* Vemos que este límite toma la forma 1^{∞}:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x-1}{2x+1} = \frac{2}{2} = 1$$

* Estos límites se calculan usando la definición de e.

* Haciendo $2x = h$ $x \to \infty$, $h \to \infty$ se obtiene:

$$\lim_{h\to\infty}\left(\frac{h-1}{h+1}\right)=\lim_{h\to\infty}\left(\frac{1+\frac{-1}{h}}{1+\frac{1}{h}}\right)=\frac{\lim_{h\to\infty}\left(1+\frac{-1}{h}\right)^h}{\lim_{h\to\infty}\left(1+\frac{1}{h}\right)^h}=\frac{e^{-1}}{e}=e^{-2}$$

PROBLEMA 20 :

Hallar el límite : $\lim_{x\to 0}\frac{sen\left(\sqrt{x^2+4}-2\right)}{x^2}$

RESOLUCIÓN :

* Sea : $\sqrt{x^2+4}-2=u \to x^2=u(u+4)+4$. Si $x \to 0$, entonces : $u=\sqrt{0^2+4}-2=0$

* Luego :

$$L=\lim_{u\to 0}\frac{sen\,u}{u(u+4)}=\lim_{u\to 0}\left(\frac{sen\,u}{u}\right)\left(\frac{1}{u+4}\right)$$

$$=(1)\left(\frac{1}{0+4}\right)=\frac{1}{4}$$

PROBLEMA 21:

Calcular : $\lim_{x\to -1}\frac{x^3+1}{sen(1-x^2)}$

RESOLUCIÓN :

* Se tiene que:

$$L=\lim_{x\to -1}\frac{(1+x)(16x+x^2)}{sen(1-x^2)}=\lim_{x\to -1}\frac{(1+x)(1-x)(1-x+x^2)}{(1-x)sen(1-x^2)}$$

$$L=\lim_{x\to -1}\left[\frac{(1-x^2)}{sen(1-x^2)}\right]\left(\frac{1-x+x^2}{1-x}\right)=[1]\left(\frac{1+1+1}{1+1}\right)=\frac{3}{2}$$

PROBLEMA 22:

Evaluar : $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+xsenx}-\sqrt{cos2x}}{tan^2\frac{x}{2}}$

RESOLUCIÓN :

* Evaluando en $x=0$; $\frac{\sqrt{1+0}-\sqrt{1}}{0}=\frac{0}{0}$ (indeterminado)

* Racionalizando el numerador :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+xsenx}-\sqrt{cos\,2x}}{tan^2\frac{x}{2}}\cdot\frac{\sqrt{1+xsenx}+\sqrt{cos\,2x}}{\sqrt{1+xsenx}+\sqrt{cos\,2x}}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1+xsenx-cos\,2x}{tan^2\frac{x}{2}\left(\sqrt{1+senx}+\sqrt{cos\,2x}\right)}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{2sen^2x+xsenx}{tan^2\frac{x}{2}\left(\sqrt{1+senx}+\sqrt{cos\,2x}\right)}$$

* Dividiendo numerador y denominador por x^2.

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\left(\frac{sen\,x}{x}\right)^2\frac{sen\,x}{x}}{\frac{1}{4}\left(\frac{tan\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2\left(\sqrt{1+xsenx}+\sqrt{cos2x}\right)}=\frac{2(1)^2+1}{\frac{1}{4}(1)^2(1+1)}=6$$

PROBLEMA 23 :

Calcular : $\lim_{x\to\infty}(1+senx)^{1/x}$

RESOLUCIÓN :

* Toma la forma 1^∞:

* Recordando que : $\lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}}=e$

* Transformando se tiene :

$$\lim_{x\to 0}\left[(1+sen\,x)^{\frac{1}{sen\,x}}\right]^{\frac{sen\,x}{x}}$$

* Haciendo $senx=h$ como $x\to 0 \Rightarrow h\to 0$.

* Tendremos :

$$\left[\lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}}\right]^{\lim_{x\to 0}\frac{sen\,x}{x}}=e^1=e$$

PROBLEMA 24 :

Halle las asíntotas de $y=\sqrt{\frac{x^3-1}{x-2}}$ y luego esboce su gráfico .

RESOLUCIÓN :

* Dominio $=\langle-\infty;1]\cup\langle 2;+\infty\rangle$

* **ASÍNTOTA VERTICAL :**

$$\lim_{x\to 2^+}\sqrt{\frac{x^3-1}{x-2}}=+\infty$$

$\to x=2$ es una asíntota vertical derecha .

* **ASÍNTOTA HORIZONTAL :**

$$\lim_{x\to\pm\infty}\sqrt{\frac{x^3-1}{x-2}}\neq\beta\in\mathbb{R}$$

* Es decir no se obtiene un número real , luego no existe asíntota horizontal.

* **ASÍNTOTA OBLICUA :**

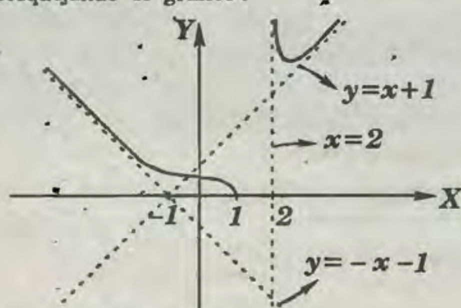
$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{\frac{x^3-1}{x-2}}}{x}\Rightarrow m=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x^3-1}{x^3-2x^2}}=1$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{\frac{x^3-1}{x-2}}-(1)x\right]\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^3-1}-x\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-2}}=1=b$$

$\to$ Asíntota oblicua derecha sería : $y=x+1$

* Analogamente por la izquierda se encuentra como asíntota oblicua izquierda a la recta : $y=-x-1$

* Bosquejando el gráfico :



PROBLEMA 25:

Sea f la función definida por :

$$f(x)=\frac{2x^2+5x-8}{x+3}$$

Determinar las asíntotas verticales , horizontales y oblicuas de la gráfica de f y trácela .

RESOLUCIÓN :

$$f(x)=\frac{2x^2+5x-8}{x+3};\ Df=\mathbb{R}-(-3)$$

* *ASÍNTOTAS VERTICALES :*

$$\lim_{x\to -3^-} f(x)=\lim_{x\to -3^-}\frac{2x^2+5x-8}{x+3}$$

$$=\lim_{x\to -3^-}\left\{(2x^2+5x-8)\cdot\frac{1}{x+3}\right\}=(-5)(-\infty)=\infty$$

$$\lim_{x\to -3^+} f(x)=\lim_{x\to -3^+}\frac{2x^2+5x-8}{x+3}$$

$$=\lim_{x\to -3^+}\left\{(2x^2+5x-8)\cdot\frac{1}{x+3}\right\}=(-5)(\infty)=-\infty$$

→ $x=-3$ es una asíntota vertical de la gráfica de f

* *ASÍNTOTAS HORIZONTALES :*

$$\lim_{x\to\pm\infty}(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^2+5x-8}{x+3}=\lim_{x\to\pm\infty}(x)\frac{2+\frac{5}{x}-\frac{8}{x^2}}{\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}=\infty$$

→ la gráfica de f no tiene asíntotas horizontales.

* *ASÍNTOTAS OBLICUAS :*

* Cuando $x\to\infty$

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+5x-8}{x(x+3)}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{5}{x}-\frac{8}{x^2}}{1+\frac{3}{x}}=2\Rightarrow m=2$$

$$b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-2x)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2+5x-8}{(x+3)}-2x\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{-x-8}{x+3}\right)=-1\Rightarrow b=-1$$

→ La recta $y=2x-1$ es una asíntota oblicua derecha para la gráfica de f.

*Cuando $x\to-\infty$

$$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=2$$

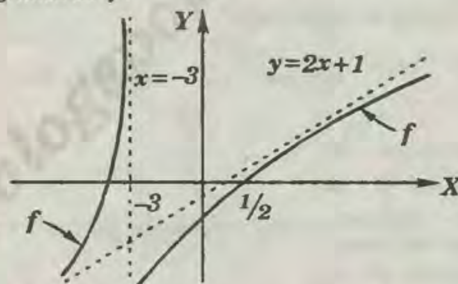
$$b=\lim_{x\to-\infty}(f(x)-2x)=-1$$

→ la recta $y=2x-1$ es una asíntota oblicua izquierda para la gráfica de f .

* Como f es una función racional, entonces f se puede escribir así :

$$f(x)=2x-1-\frac{5}{x+3},\ \text{cuando } x\to\pm\infty;\ \frac{5}{x+3}\to 0$$

* Por lo tanto $f(x)$ se acerca a la recta $y=2x-1$, la cual viene a ser una asíntota derecha e izquierda de la gráfica de f .



PROBLEMA 26 :

Sea f la función definida por : $f(x)=\frac{1-x^4}{2x^3-8x}$

Determine las asíntotas horizontales, verticales y oblicuas de la gráfica de f y trácela.

RESOLUCIÓN :

$$f(x)=\frac{1-x^4}{2x^3-8x};\ Df=\mathbb{R}-\{-2;0;2\}$$

* *ASÍNTOTAS HORIZONTALES :*

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{1-x^4}{2x^3-8x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x^3}-x}{2-\frac{8}{x^2}}=-\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{1-x^4}{2x^3-8x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{1}{x^3}-x}{2-\frac{8}{x^2}}=\infty$$

→ la gráfica de f no tiene asíntotas horizontales.

* *ASÍNTOTAS VERTICALES :*

$$\lim_{x\to-2^+} f(x)=\lim_{x\to-2^+}\frac{1-x^4}{2x(x-2)}\cdot\lim_{x\to-2^+}\frac{1}{x+2}=-\frac{15}{16}(+\infty)=-\infty$$

$$\lim_{x\to-2^-} f(x)=\lim_{x\to-2^-}\frac{1-x^4}{2x(x-2)}\cdot\lim_{x\to-2^-}\frac{1}{x+2}=-\frac{15}{16}(-\infty)=\infty$$

$\rightarrow x=-2$ es una asíntota vertical de la gráfica de f.

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}\frac{1-x^4}{2(x+2)(x-2)}\cdot\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x} = -\frac{1}{8}(-\infty) = \infty$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\frac{1-x^4}{2(x+2)(x-2)}\cdot\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x} = -\frac{1}{8}(\infty) = -\infty$$

$\rightarrow x = 0$ es una asíntota vertical de la gráfica de f.

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{1-x^4}{2x(x+2)(x-2)}$$

$$= \lim_{x\to 2^-}\frac{1-x^4}{2x(x+2)}\cdot\lim_{x\to 2^-}\frac{1}{x-2} = -\frac{15}{16}(-\infty) = \infty$$

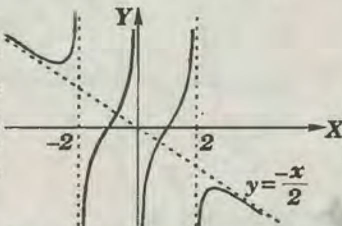
$$\lim_{x\to 2^+}\frac{1-x^4}{2x(x+2)}\cdot\lim_{x\to 2^+}\frac{1}{x-2} = -\frac{15}{16}(\infty) = -\infty$$

$\rightarrow x = 2$ es una asíntota vertical de la gráfica de f.

* ***ASÍNTOTAS OBLICUAS:***

Como: $f(x) = -\frac{x}{2}+\frac{1-4x^2}{2x^3-8x} \wedge \lim_{x\to\pm\infty}\frac{1-4x^2}{2x^3-8x} = 0$

* entonces la recta $y=-\frac{x}{2}$ es una asíntota oblicua derecha e izquierda de la gráfica de f.



PROBLEMA 27 :

¿La función $f(x)=\begin{cases}1;\ si\ x\geq 1\\ -1;\ si\ x<1\end{cases}$ es contińua en $x=1$?

RESOLUCIÓN :

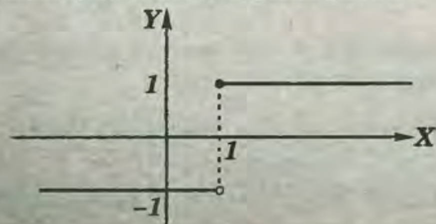
* $1\in Dom\ f$
* $\lim_{x\to 1} f(x)$ no existe
* $f(1)=1\neq\lim_{x\to 1} f(x)$

$\Rightarrow f(x)$ no es continua en $x = 1$

* Sin embargo :

* $1\in Dom\ f$ * $\lim_{x\to 1^+} f(x)=1$ * $f(1)=\lim_{x\to 1^+} f(x)$

* Entonces $f(x)$ es continua por la derecha .



PROBLEMA 28 :

La función f definida por $f(x)=\begin{cases}-1 & ;\ si\ x=2\\ \frac{x^2+x-6}{x^2+ax+b} & ;\ si\ x\neq 2\end{cases}$

es continua en $x\neq 2$, calcular : ab

RESOLUCIÓN :

* Por definición : $f(2)=1$, luego, si f es continua en $x = 2$, entonces :

$$\lim_{x\to 2} f(x) = f(2) \rightarrow \lim_{x\to 2}\frac{x^2+x-6}{x^2+ax+b} = 1$$

$$\rightarrow x^2+x-6 = x^2+ax+b$$

$$\rightarrow x-6 = ax+b$$

* Igualdad se verifica si : $a = 1$ y $b = -6$
* Se pide : $(1)(-6) = -6$

PROBLEMA 29 :

Dada la función : $f(x)=\frac{2x-3}{6x^2-23x+21}$, se afirman

I) La función es discontinua en $x = 3/2$ y $x = 7/3$.

II) En el punto $x_0=3/2$ la discontinuidad es salvable.

III) Si $f(3/2)=1/5$, la función es continua en $x=3/2$

Son verdaderas :

RESOLUCIÓN :

Factorizando el denominador de la función se tiene :

I) $f(x)=\frac{2x-3}{(2x-3)(3x-7)}$. La función f es discontinua para aquellos valores que anulan al denominador, esto es : $2x-3=0$ y $3x-7=0 \Leftrightarrow x_1=3/2$ y $x_2=7/3$

.... *(VERDADERA).*

II) Vemos que : $f(x)=\frac{2x-3}{(2x-3)(3x-7)}=\frac{1}{3x-7},\ x\neq 3/2$

La función tiene discontinuidad salvable en $x_0=3/2$

Luego, la afirmación es ***VERDADERA*** .

III) $\lim_{x\to 3/2} f(x)=\lim_{x\to 3/2}\left(\frac{1}{3x-7}\right)=\frac{1}{3(3/2)-7}=-\frac{2}{5}\neq f(3/2)=\frac{1}{5}$

.... *(ES FALSA).*

PROBLEMA 30 :

Explicar por qué la ecuación $\cos x = x$ tiene al menos una solución .

RESOLUCIÓN :

* La ecuación se puede escribir como : $\cos x - x = 0$, de donde $f(x) = \cos x - x$.

* Como $g(x) = \cos x$ y $h(x) = x$ son continuas en $\mathbb{R}$, tendremos que $f(x)=\cos x - x$ es continua en $\mathbb{R}$.

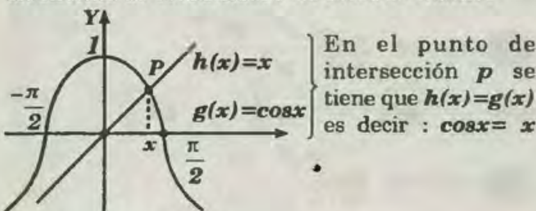
* Por otro lado , como $f(0) = 1 > 0$ y

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)-\frac{\pi}{2}=-\frac{\pi}{2}<0$, entonces: $f(0)\cdot f\left(\frac{\pi}{2}\right)<0$

* Luego existe al menos un número $x\in\,]0;\pi/2[$ tal que $f(x)=0$.

* Lo anterior prueba que la ecuación $\cos x = x$ tiene al menos una solución.

* Los anterior se puede visualizar efectuando las gráficas de las funciones $g(x)=\cos x$; $h(x)=x$ en un sistema de coordenadas tal como se indica .



En el punto de intersección p se tiene que $h(x)=g(x)$ es decir : $\cos x = x$

PROBLEMA 31:

Calcular : $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arccos(1-x)}{\sqrt{2x-x^2}}$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 0

RESOLUCIÓN :

* Hacemos : $\arccos(1-x)=\theta \to 1-x=\cos\theta$
* Entonces elevemos al cuadrado :

$$(1-x)^2=\cos^2\theta$$
$$\to 1-2x+x^2=1-\operatorname{sen}^2\theta$$
$$\to 2x-x^2=\operatorname{sen}^2\theta \quad ....(I)$$

* Además: si $x\to 0 \Rightarrow \cos\theta\to 1 \wedge \theta\to 0$

* Ahora reemplazando (I) , en lo pedido resulta :

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\theta}{\operatorname{sen}\theta}=1$$

RPTA: "A"

PROBLEMA 32 :

Calcular : $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\cos\frac{\pi x}{2}}{1-\sqrt{x}}$

A) 0 B) π C) 1 D) 2 E) 2π

RESOLUCIÓN :

* Hacemos :

$1-\sqrt{x}=y\to x=(1-y)^2$. Si $x\to 1\to y\to 0$

* Reemplazando :

$$\lim_{y\to 0}\frac{\cos\frac{\pi}{2}(1-y)^2}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{\cos\frac{\pi}{2}(1-2y+y^2)}{y}$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{\cos\left[\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}(y^2-2y)\right]}{y}$$

* Ahora aplicando :

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$$

* Se obtiene :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos\frac{\pi}{2}\cos\left[\frac{\pi}{2}(y^2-2y)\right]-\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\operatorname{sen}\left[\frac{\pi}{2}(y^2-2y)\right]}{y}$$

* Como : $\cos\frac{\pi}{2}=0$ y $\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}=1$, resulta :

$$\lim_{y\to 0}\frac{-\operatorname{sen}\left[\frac{\pi}{2}y(y-2)\right]}{y}=-\left[\lim_{y\to 0}\frac{\operatorname{sen}\left[\frac{\pi}{2}y(y-2)\right]}{\frac{\pi}{2}y(y-2)}\right]\frac{\pi}{2}(y-2)$$

$$=-\lim_{y\to 0}\frac{\pi}{2}(y-2)=-\frac{\pi}{2}(0-2)=\pi$$

PROBLEMA 33 :

Calcular : $\lim\limits_{x\to\pi/2}\left(3+2e^{\tan x}\right)^{\pi-2x}$

RESOLUCIÓN :

* Sea $y=\lim\limits_{x\to\pi/2}\left(3+2e^{\tan x}\right)^{\pi-2x}$, entonces :

$$\operatorname{Ln} y=\lim_{x\to\pi/2}\left\{(\pi-2x)\cdot\operatorname{Ln}\left[\frac{3e^{-\tan x}+2}{e^{-\tan x}}\right]\right\}$$

$$=\lim_{x\to\pi/2}\left\{(\pi-2x)\cdot\left[\operatorname{Ln}(3e^{-\tan x}+2)-\operatorname{Ln}(e^{-\tan x})\right]\right\}$$

$$=\lim_{x\to\pi/2}\left\{(\pi-2x)\cdot\operatorname{Ln}\left[\frac{3}{e^{\tan x}}+2\right]+(\pi-2x)\cdot\tan x\right\}$$

$$=\lim_{x\to\pi/2}\left\{(\pi-2x)\cdot\operatorname{Ln}(0+2)+2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cdot\frac{\operatorname{sen}x}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}\right\}$$

$$=\lim_{x\to\pi/2}\{(0+2\operatorname{sen}x)\}=2$$

* Entonces : $\operatorname{Ln} y=2 \Rightarrow y=e^2$

PROBLEMA 34 :

Calcular : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2-x-3}{\operatorname{sen}^2x+\cos x}$

RESOLUCIÓN :

* Sea : $f(x)=x^2-x-3$ y $g(x)=\operatorname{sen}^2x+\cos x$

* Luego : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ y $-1\le g(x)\le 2;\ \forall x\in R$

* Entonces : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2-x-3}{\operatorname{sen}^2x+\cos x}=+\infty$

PROBLEMA 35 :

Calcular : $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{[1/x]}$

RESOLUCIÓN :

* Si : $x\to 0 \Rightarrow \frac{1}{x}\to 0^+ \Rightarrow 0<\frac{1}{x}<1;\ \forall x>1 \Rightarrow \left[\frac{1}{x}\right]=0$

* Entonces : $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{[1/x]}=\lim\limits_{x\to+\infty}x^0=1$

PROBLEMA 36 :

Graficar :

$$h(x)=\begin{cases}\dfrac{2x^4-15x^3+39x^2-41x+15}{x^3-6x^2+5x+12} & ;\text{ si } x\ge 0\\[2mm] \dfrac{x}{x^2+1}+\dfrac{5}{4} & ;\text{ si } x<0\end{cases}$$

RESOLUCIÓN :

* Si $x\ge 0:\Rightarrow h(x)=\dfrac{(x-1)^2(2x-5)(x-3)}{(x-4)(x+1)(x-3)}$

  $Dom\,h=\mathbb{R}-\{3;4\}$

* Interceptos:

  Eje Y: $x=0\Rightarrow y=5/4$

  Eje X: $y=0\Rightarrow\begin{cases}x=1\\x=5/2\end{cases}$ .... *(secante)*

* Asíntotas :

$$\lim_{x\to 4^+}\frac{(x-1)^2(2x-5)}{(x-4)(x+1)}=+\infty$$

$$\lim_{x\to 4^-}\frac{(x-1)^2(2x-5)}{(x-4)(x+1)}=-\infty$$

* Entonces una asíntota vertical, será : $x=4$

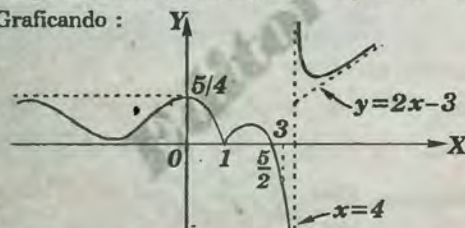
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x^2+1}+\frac{5}{4}=5/4$$

* Entonces una asíntota horizontal, será : $y=\dfrac{5}{4}$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{(x-1)^2(2x-5)}{(x-4)(x+1)}}{x}=2=m$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(x-1)^2(2x-5)}{(x-4)(x+1)}-2x=-3=b$$

* Luego una asíntota oblicua será : $y=2x-3$
* Graficando :



PRIMERA PRACTICA DIRIGIDA

01 Calcular : $\lim_{x\to 1}(x^2+2x+4)$

A) 1 B) 6 C) 7 D) 8 E) 10

02 Calcular : $\lim_{x\to 4}\left(\dfrac{\sqrt{x}+2}{x-3}\right)$

A) 1 B) 4 C) $\frac{1}{3}$ D) $\frac{1}{8}$ E) 16

03 Hallar : $\lim_{x\to 3}\left(\dfrac{x^3+3}{x+3}\right)$

A) 2 B) 5 C) -2 D) -5 E) $\frac{1}{3}$

04 Hallar : $\lim_{x\to 1}\dfrac{1}{x}$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) ∄

05 Calcular : $\lim_{x\to 3}\left(\dfrac{x^3-27}{x^2-9}\right)$

A) 1 B) 2 C) $\frac{1}{3}$ D) $\frac{2}{9}$ E) $\frac{9}{2}$

06 Calcular : $\lim_{x\to 1}\left(\dfrac{x^2-1}{x-1}\right)$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

07 Calcular : $\lim_{x\to 3}\left(\dfrac{\sqrt{x+6}-3}{\sqrt{x+1}-2}\right)$

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{2}{9}$ C) $\frac{4}{6}$ D) $\frac{4}{3}$ E) $\frac{9}{4}$

08 Calcular : $\lim_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[7]{x}-1}{\sqrt[5]{x}-1}$

A) $\frac{7}{5}$ B) $\frac{5}{7}$ C) $-\frac{7}{5}$ D) $-\frac{5}{7}$ E) 0

09 Calcular : $\lim_{x\to\infty}\dfrac{4x^3+2x^2+7}{5x^3+2x^2+10}$

A) 4 B) $\frac{4}{5}$ C) $\frac{5}{4}$ D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{1}{8}$

10 Calcular : $\lim_{x\to\infty}\dfrac{x^3+x^2+1}{2x^4+x+1}$

A) 1 B) 2 C) 0 D) -2 E) -1

11 Calcular: $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^4-4x^3+6x^2-4x+1}{x^2+1}$

A) 1 B) 2 C) 0 D) 8 E) 16

12 Calcular : $\lim_{x\to 1}\dfrac{6x^2-3x+1}{x^2-2x+5}$

A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 2

13 Calcular : $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{(3x+2)^2(2x-8)^3}{7x^5-4x^3+2}$

A) $\frac{37}{5}$ B) $\frac{68}{8}$ C) $\frac{72}{7}$ D) $\frac{87}{11}$ E) $\frac{79}{13}$

14 Calcular : $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{2x-5}{\sqrt{x^2+3x-1}}$

A) -5 B) -2 C) 0 D) 1 E) 3

15 Calcular : $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+1}{x-x^3+1}$

A) 1 B) 0 C) -1 D) 2 E) -2

16 Calcular : $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{x^3+x^2+1}{2x+3}$

A) 0 B) 1 C) 2 D) $-\infty$ E) $+\infty$

17 Calcular : $\lim_{x\to\infty}\dfrac{5x^3+2x+1}{2x^3+x+1}$

A) 5 B) $\dfrac{2}{5}$ C) $\dfrac{5}{2}$ D) $\dfrac{11}{2}$ E) $\dfrac{1}{3}$

18 Calcular : $\lim_{x\to8}\dfrac{\sqrt[3]{x}-2}{\sqrt{x}-2\sqrt{2}}$

A) $\dfrac{1}{3}$ B) $\dfrac{1}{2}$ C) $\dfrac{2}{3}$ D) $\dfrac{3}{2}$ E) 1

19 Calcular : $\lim_{x\to2}\left(\dfrac{x^2-x-6}{x^2-4}\right)$

A) 1 B) $\dfrac{2}{3}$ C) $\dfrac{4}{5}$ D) $\dfrac{5}{4}$ E) $\dfrac{1}{2}$

20 Calcular: $\lim_{x\to1}\dfrac{x^{100}-1}{x^{50}-1}$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 8

21 Calcular : $\lim_{x\to1^+}\dfrac{x}{1-x^2}$

A) $+\infty$ B) $-\infty$ C) 1 D) 0 E) 2

22 Calcular : $\lim_{x\to2^+}\dfrac{4-x}{x^2-5x+6}$

A) $+\infty$ B) $-\infty$ C) 0 D) 1 E) 2

23 Calcular : $\lim_{x\to5}\dfrac{x-5}{\sqrt{x-4}-\sqrt{3x-14}}$

A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 2

24 Calcular : $\lim_{x\to1}\dfrac{\sqrt{2x-1}-\sqrt[3]{x}}{1-\sqrt{x}}$

A) $\dfrac{1}{2}$ B) $-\dfrac{1}{3}$ C) $-\dfrac{4}{3}$

25 Calcular : $\lim_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3-3}{x^2+1}-\dfrac{x^4+1}{x^3-1}\right)$

A) -2 B) 0 C) 2 D) 4 E) 6

26 Hallar : $\lim_{x\to1}\left[(2x-1)^{50}+2x^2-5\right]$

A) 3 B) -3 C) 2 D) -2 E) 0

27 Hallar : $\lim_{x\to1}\left[\dfrac{(3x+2)^{2003}+2(6x+7)^{2004}}{(x+1)^{2001}+2}\right]$

A) 0,5 B) 0,3 C) 0,1 D) 0,05 E) 0,01

28 Hallar : $\lim_{x\to-2}\left[\sqrt[31]{3x+5}+\sqrt[52]{-5-3x}\right]$

A) -1 B) 31 C) 0 D) 52 E) 1

29 Evaluar : $\lim_{x\to1}\left[\dfrac{2}{x^2-1}-\dfrac{1}{x-1}\right]$

A) $\dfrac{1}{2}$ B) – C) $\dfrac{2}{3}$ D) $\dfrac{2}{3}$ E) N.A.

30 Evaluar : $\lim_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}$

A) $\dfrac{3}{2}$ B) $\dfrac{2}{3}$ C) 1 D) -1 E) N.A.

TAREA DOMICILIARIA

01 Calcular : $\lim_{x\to1}\dfrac{2x^4-6x^3+x^2+3}{x-1}$

A) -8 B) -5 C) 0 D) 8 E) 5

02 Calcular : $\lim_{x\to2}(x^3-1)(3x^2+1)$

A) 57 B) 80 C) 91 D) 104 E) 202

03 Hallar : $\lim_{x\to-3}\left(\dfrac{9-x^2}{3+x}\right)$

A) 4 B) 8 C) 10 D) 12 E) 6

04 Calcular : $\lim_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x}-1-\dfrac{x}{3}}{x^2}$

A) $\dfrac{1}{3}$ B) $\dfrac{1}{9}$ C) 0 D) $-\dfrac{1}{3}$ E) $-\dfrac{1}{9}$

05 Hallar : $\lim_{x\to1}\dfrac{3(x^4-1)}{6x^2+18x+12}$

A) -1 B) -2 C) 0 D) 1 E) 2

SEGUNDA PRACTICA DIRIGIDA

01 Sea la función: $F(x)=\dfrac{|x-2008|}{2008-x}$

Entonces el $\lim_{x\to2008}F(x)$ es:

A) 2 008 B) 2 007 C) 1 D) -1 E) No existe

02 Sea F la función definida por la regla de correspondencia:

$$F(x)\begin{cases} \dfrac{3x+a}{x+3}; -3<x<-2 \\ a+b-10; x=-2 \\ \sqrt{x+3}-6; x>-2 \end{cases}$$

Sabiendo que $\lim\limits_{x\to -2} F(x)=F(-2)$, calcular el valor de: ab

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

03 Sea la función: $F(x)=\dfrac{5^{x-2}+3^{x+1}}{5^x+3^{x-1}}$

El valor de $\lim\limits_{x\to\infty} F(x)$ es:

A) 0,01 B) 0,02 C) 0,03 D) 0,04 E) 0,05

04 Sean $F(x)$ y $G(x)$ dos funciones polinomiales, tal que:

$$\lim_{x\to a}[F(x)+G(x)]=2 \wedge \lim_{x\to a}[F(x)-G(x)]=1$$

Calcule el valor de: $\lim\limits_{x\to a}[F(x).G(x)]$

A) $\dfrac{1}{4}$ B) $\dfrac{3}{8}$ C) $\dfrac{3}{2}$ D) $\dfrac{1}{2}$ E) $\dfrac{3}{4}$

05 Calcular:

$$L=\lim_{x\to 2}\left(\frac{x^3-x^2-8x+12}{x^3-12x+16}\right)^{\frac{3x-6}{x^2-x-2}}$$

A) $\dfrac{6}{5}$ B) $\dfrac{5}{6}$ C) $\dfrac{1}{5}$ D) $\dfrac{1}{6}$ E) $\dfrac{1}{30}$

06 Sea la función: $H(x)=\dfrac{x^3+3x^2-7x-6}{x^3-3x^2+7x-10}$

Calcular: $\lim\limits_{x\to 2} H(x)$

A) $\dfrac{17}{7}$ B) $\dfrac{12}{7}$ C) 2,5 D) $\dfrac{7}{12}$ E) $\dfrac{7}{17}$

07 Calcular: $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{x-\sqrt{x+2}}{\sqrt{4x+1}-3}\right)$

A) $\dfrac{9}{8}$ B) $\dfrac{7}{2}$ C) $-\dfrac{3}{8}$ D) $\dfrac{2}{3}$ E) 1

08 Calcular: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x-x}{\sqrt[3]{26+x}-3}$

A) 3 B) 12 C) 27 D) 54 E) 18

09 Calcular: $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1-\sqrt[4]{1-x}}{2x}\right)$

A) $\dfrac{1}{2}$ B) $-\dfrac{1}{2}$ C) $\dfrac{1}{8}$ D) -2 E) -1

10 Se sabe que:

$$L=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{(a-4)x^3+(b-2)x^2+abx+1}{(a-b)x+2003}\right]$$

Si L es un número real finito y diferente de cero, calcular: $\sqrt{2L+1}$

A) $\sqrt{3}$ B) 2 C) 3 D) $\sqrt{5}$ E) 5

11 Sea:

$$L=\lim_{x\to\infty}\left(2x^2+ab+\frac{(a-5)x^3+bx^2-a}{x+1}\right)$$

Además: $-7<L<-5$

Calcular: $E=\sqrt[4]{L^2+L+2}$

A) 2 B) $\sqrt[4]{2}$ C) $2\sqrt[4]{2}$ D) 1 E) $\sqrt{2}+1$

12 Sea "n" un número entero positivo, tal que:

$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^2-3x+1}{x^{7-n}+x+2}\right]=0$$

Entonces la suma de los valores de "n" es:

A) 21 B) 15 C) 10 D) 6 E) 5

13 Calcular:

$$L=\lim_{x\to\infty}\left\{\frac{\sqrt{7x^2+\sqrt{4x^4+1}}+5x}{\sqrt{3x^2+\sqrt{x^4+1}}+7x}\right\}$$

A) $\dfrac{4}{3}$ B) $\dfrac{3}{4}$ C) $\dfrac{8}{9}$ D) 2 E) $\dfrac{1}{2}$

14 Calcular el valor de:

$$E=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{9x+\sqrt{25x+1}}-\sqrt{9x+\sqrt{36x+1}}\right)$$

A) $-\dfrac{1}{6}$ B) -6 C) -1 D) 6 E) $\dfrac{1}{6}$

15 Calcule: $\lim\limits_{x\to\infty}(x+\sqrt[3]{1-x^3})$

A) 1 B) 2 C) -1 D) 0 E) -2

16 Sabiendo que: $Z=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x-1}\right)^{\frac{x}{10}-1}$

dar como respuesta el valor de: $M=\dfrac{1+LnZ}{1-LnZ}$

A) $\dfrac{3}{2}$ B) $\dfrac{2}{3}$ C) $\dfrac{1}{2}$ D) $\dfrac{1}{3}$ E) 4

17 Sabiendo que:

$$A=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x+2}\right)^{x}\ ;\ B=\lim_{x\to 0}(x^2+x+1)^{\frac{2}{x}}$$

son las raíces de una ecuación cuadrática, dicha ecuación es:

A) $x^2-e(e+1)x+e^3=0$ B) $x^2+e(e-1)x-e^3=0$
C) $x^2-e^2(e+1)x+e^3=0$ D) $x^2-e(e^2-1)x+e^4=0$
E) $x^2-(e+1)x+e=0$

18 Hallar: $L=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3+2x+1}{x^3-x^2+1}\right)^{\frac{2x^2-1}{3x+1}}$

A) e B) $e^{\frac{3}{2}}$ C) e^2 D) $e^{\frac{2}{3}}$ E) e^3

19 Sabiendo que:

$$P=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt[2003]{x-1}+1}{\sqrt[2004]{x+1}-1}\right)$$

$$Q=\lim_{x\to\infty}\left\{Ln\left(\frac{2003x+1002}{2003x-1002}\right)^{x+1}\right\}$$

calcular el valor de: $M=\frac{P+1}{1-Q}$

A) 2 003 B) 2 002 C) 1 002 D) 4 007 E) 1

20 Sabiendo que: $F(x)=\frac{5^x+2^x+4^x-3}{x}$

el valor de $\lim_{x\to 0}F(x)$ es:

A) Ln10 B) Ln6 C) Ln15 D) Ln40 E) Ln120

TERCERA PRACTICA DIRIGIDA

LÍMITES LATERALES

01 Calcular si existe : $\lim_{x\to 0}f_{(x)}$, donde :

$$f_{(x)}=\begin{cases}x^2;\,si:x>0\\ x\ ;\,si:x<0\end{cases}$$

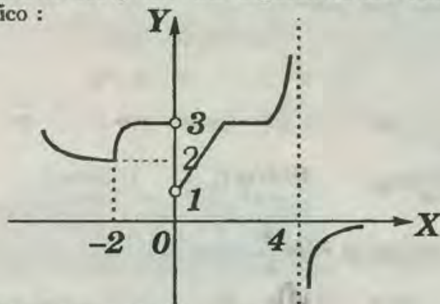
A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

02 Calcular si existe $\lim_{x\to 2}f_{(x)}$, donde :

$$f_{(x)}=\begin{cases}3x-1;\,si:x<2\\ 4x+1;\,si:x>2\end{cases}$$

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) $\nexists$

*Resuelva los problemas siguientes mediante el gráfico :



03 Calcular : $\lim_{x\to -2}f_{(x)}$

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) $\nexists$

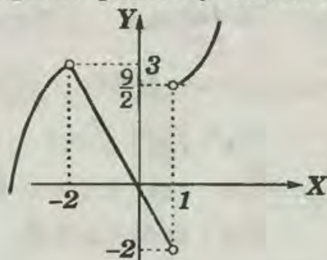
04 Calcular : $\lim_{x\to 0}f_{(x)}$

A) 0 B) 1 C) 2 D) -1 E) $\nexists$

05 Calcular : $\lim_{x\to 4}f_{(x)}$

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) $\nexists$

06 Del siguiente gráfico cuya función es $f_{(x)}$.



Estudiar si existe en : $x=-2\ \wedge\ x=1$

07 Sea : $f_{(x)}=\begin{cases}x+3;\,si:x\le -2\\ 3-x;\,si:x>-2\end{cases}$

Calcular :

A) $\lim_{x\to 2^+}f_{(x)}$ B) $\lim_{x\to 2^-}f_{(x)}$ C) $\lim_{x\to 2}f_{(x)}$

08 Sea : $g_{(x)}=\begin{cases}2x-3\ ;\,si:x\le 1\\ -\frac{1}{2}(x+1);\,si:x>1\end{cases}$

Hallar:

A) $\lim_{x\to 1^+}g_{(x)}$ B) $\lim_{x\to 1^-}g_{(x)}$ C) $\lim_{x\to 1}g_{(x)}$

09 Sea: $f_{(x)}=\begin{cases}2x+1;\,si:x<3\\ 10-x;\,si:3\ge x\end{cases}$

Hallar

A) $\lim_{x\to 3^+}f_{(x)}$ B) $\lim_{x\to 3^-}f_{(x)}$ C) $\lim_{x\to 3}f_{(x)}$

10 Dada la función :

$$f_{(x)}=\begin{cases}2x+3; si: x<1\\ 2 \quad ; si: x=1\\ 7-2x; si: x>1\end{cases}$$

Hallar :

A) $\lim\limits_{x\to 1^+} f_{(x)}$ B) $\lim\limits_{x\to 1^-} f_{(x)}$ C) $\lim\limits_{x\to 1} f_{(x)}$

11 Hallar el $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|}{x}$ si existe.

A) 0 B) 1 C) –1 D) x E) No existe límite

12 Hallar : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{|x|}\sqrt{4x^2+9}$

A) 0 B) 1 C) –1 D) x E) No existe límite

13 Dada la función :

$$g_{(x)}=\begin{cases}3+x^2; si: x<-2\\ 0 \quad ; si: x=-2\\ 11-x^2; si: x>-2\end{cases}$$

Hallar :

A) $\lim\limits_{x\to -2^+} g_{(x)}$ B) $\lim\limits_{x\to -2^-} g_{(x)}$ C) $\lim\limits_{x\to -2} g_{(x)}$

14 Calcular si existen : $\lim\limits_{x\to 1} f_{(x)}$ y $\lim\limits_{x\to 4} f_{(x)}$

Donde :

$$f_{(x)}=\begin{cases}x^2 \; ; si: x<1\\ x \quad ; si: 1<x<4\\ 4-x; si: x>4\end{cases}$$

A) 1 y ∄ B) 1 y 2 C) 2 y ∄ D) 1 y 0 E) ∄ y ∄

15 Dada la función :

$$f_{(x)}=\begin{cases}\dfrac{x-5}{1-\sqrt{x-4}}; si: x\geq 5\\ \dfrac{x^2-12x+35}{x-5}; si: x<5\end{cases}$$

Hallar :

A) $\lim\limits_{x\to 5^+} f_{(x)}$ B) $\lim\limits_{x\to 5^-} f_{(x)}$ C) $\lim\limits_{x\to 5} f_{(x)}$

16 Calcular si existen : $\lim\limits_{x\to 1} f_{(x)}$ y $\lim\limits_{x\to 2} f_{(x)}$

Donde :

$$f_{(x)}=\begin{cases}1-x^2; si: x\leq 1\\ 1 \quad ; si: 1<x\leq 2\\ |x-3|; si: x>2\end{cases}$$

A) ∄ y 1 B) ∄ y 2 C) ∄ y ∄ D) 3; 4 E) 2; 3

TAREA DOMICILIARIA

01 Dada la función : $h_{(x)}=\dfrac{|x-2|}{2x-4}$

Hallar :

A) $\lim\limits_{x\to 2^+} h_{(x)}$ B) $\lim\limits_{x\to 2^-} h_{(x)}$ C) $\lim\limits_{x\to 2} h_{(x)}$

02 Sea «f» la función definida por :

$$f_{(x)}=\begin{cases}2x+7 \; ; si: x<-1\\ 3-2x \; ; si: -1\leq x\leq 2\\ x^2-3x+1; si: x>2\end{cases}$$

Estudiar : $\lim\limits_{x\to -1} f_{(x)}$ y $\lim\limits_{x\to 2} f_{(x)}$

Justifique su respuesta

03 Sea «g» la función definida por :

$$g_{(x)}=\begin{cases}6-2x \; ; si: x<-2\\ x^2-3x; si: -2<x\leq 3\\ 2x-4 \; ; si: x>3\end{cases}$$

Estudiar : $\lim\limits_{x\to -2} g_{(x)}$ y $\lim\limits_{x\to 3} g_{(x)}$

Justifique su respuesta

04 Calcular si existe : $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-2x^2-4x+8}{|x-2|}$

A) 4 B) 3 C) 2 D) 1 E) 0

05 Calcular si existe : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x+|x|}{7x-5|x|}$

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) ∄

CLAVES DE LA PRIMERA PRÁCTICA				
01) C	02) B	03) B	04) A	05) E
06) B	07) C	08) B	09) B	10) C
11) C	12) D	13) C	14) B	15) B
16) E	17) B	18) C	19) D	20) B
21) B	22) B	23) B	24) C	25) B
26) D	27) A	28) C	29) B	30) A

CLAVES DE LA SEGUNDA PRACTICA									
1)E	2)D	3)D	4)E	5)B	6)A	7)A	8)D	9)C	10)C
11)C	12)C	13)C	14)A	15)D	16)A	17)A	18)D	19)E	20)D

CLAVES DE LA TERCERA PRÁCTICA				
01) C	2) B	03) E	04) B	05) C
06) B	07) B	08) B	09) B	10) B
11) C	12) D	13) B	14) B	15) C
16) E	01) B	02) D	03) E	04) D
05) B				



OBJETIVOS :

* Adquirir con claridad el concepto de derivada de una función en un punto.

* Distinguir entre derivada en un punto $x=x_0$ de una función $f(x)$ y función derivada de $f(x)$.

* Calcular rectas tangentes a una curva $f(x)$.

* Aprender la técnica de derivación de funciones $f(x)$.

* Interpretar aspectos de crecimiento/ decrecimiento, concavidad/convexidad de funciones a partir de la función derivada y derivada segunda de una función $f(x)$.

* Identificar el problema del trazado de la tangente a una curva en un punto .

* Identificar la tangente como límite de las secantes.

* Determinar la pendiente de la tangente como límite de las pendientes de las secantes.

* Obtener geometricamnente la derivada de una función en un punto.

* Determinar la ecuación de la recta tangente a una curva en un punto por medio de la derivada.

* Determinación de valores máximos y mínimos de funciones $f(x)$ y resolver problemas de optimización

INTRODUCCIÓN :

El concepto se derivada se aplica en los casos donde es necesario medir la rapidez con que se produce el cambio de una situación. Por ello es una herramienta de cálculo fundamental en los estudios de Física, Química y Biología. También en las ciencias sociales como la Economía y la Sociología se utiliza el análisis matemático para explicar la rapidez de cambio en las magnitudes que les son propias.

Conocer la variación de una función en un intervalo grande no informa suficientemente bien en el sentido de entender como se produce dicha variación. Se necesita estudiar variaciones de la función en intervalos cada vez más pequeños para llegar a entender el concepto de variación instantánea o referida a un punto, es decir el de derivada en un punto

Un hallazgo importante en el estudio de la derivada de una función es que la pendiente o inclinación de la recta tangente a la curva en un punto representa la rapidez de cambio instantáneo. Así pues cuanto mayor es la inclinación de la recta tangente en un punto mayor es la rapidez de cambio del valor de la función en las proximidades del punto.

El concepto de derivada segunda de una función derivada de la derivada de una función también se aplica para saber si la rapidez de cambio se mantiene, aumenta o disminuye. Así el concepto de convexidad y concavidad aspectos geométricos o de forma de una función están relacionados con el valor de la derivada segunda.

La derivabilidad de una función en un punto (propiedad relativa a la existencia de tangente en un punto) está asociado al de continuidad. Este aspecto también será tratado en esta unidad.

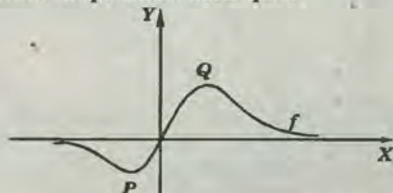
Finalmente veremos la relación que tiene la derivada con los problemas de optimización de funciones. Estos problemas decimos que son de máximo o de mínimo (máximo rendimiento, mínimo coste, máximo beneficio, mínima aceleración, mínima distancia, etc).

Conocer la gráfica de una función permite tener un conocimiento muy preciso de su comportamiento .

En muchos casos sencillos que hemos visto en temas anteriores, basta el análisis de unos pocos elementos para poder construir su gráfica . En otros casos se requiere de herramientas un poco más poderosas para graficar la función con mayor precisión . Vamos a estudiar algunas de esas herramientas , todas las cuales están basadas de una u otra manera en el concepto de derivada .

Comencemos analizando la función $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$.

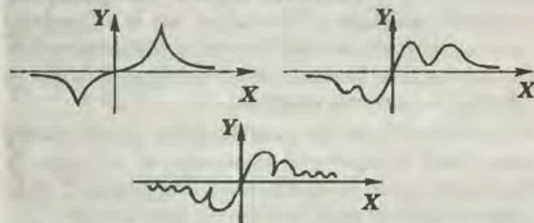
De esta función podemos decir que :



* $D_f = R$
* Es continua en R
* Es impar (la gráfica de f es simétrica con respecto al origen)
* Intercepta al eje X una sola vez en $(0\ ;\ 0)$
* La recta $y = 0$ es una asíntota horizontal a la derecha y a la izquierda, pues $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$
* f es positivo si $x > 0$ y negativa si $x < 0$.

Con esta información ¿ podemos realmente precisar cómo es la gráfica de f?

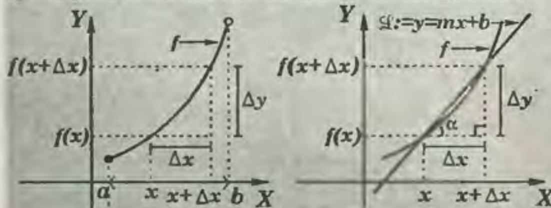
A continuación mostramos las gráficas que corresponden a funciones que satisfacen las características mencionadas anteriormente y que , sin embargo , son muy diferentes .



Nos quedamos sin conocer aspectos importantes de la gráfica , como la ubicación exacta de los puntos P y Q . Con las herramientas que vamos a estudiar en este tema resolveremos estos problemas .

PENDIENTE DE LA RECTA TANGENTE

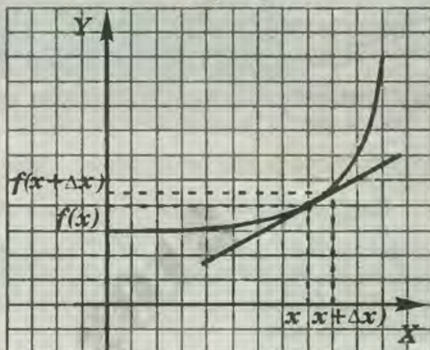
De la geometría analítica , el cálculo tomó la representación gráfica de las funciones en un plano de coordenadas cartesianas . El problema de calcular la pendiente de la recta tangente a una curva no se pudo resolver con las herramientas que hasta ese entonces tenían las matemáticas . Hoy en día , cualquiera de las ramas del conocimiento , necesita de la investigación científica como fuente fundamental para el análisis de los fenómenos, objeto de su estudio . El método gráfico es de gran ayuda para el buen éxito de dichas investigaciones .



*En el gráfico se observa la curva que representa una función y que depende de x .

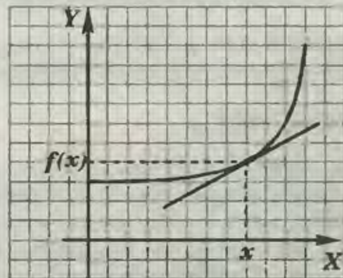
* Para trazar la tangente a la curva en el punto $x = x_o$, inicialmente se dibuja una recta que corte a la curva en el punto $x = x_1$. La pendiente de dicha recta es :

* $D_f = m_1 = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, $m_1 = \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$



* Si hacemos más pequeño el valor de Δx , la recta secante corta a la curva en el punto correspondiente a $x = x_2$ y la pendiente de dicha recta es $m_2 = \dfrac{y_2 - y_0}{x_2 - x_0}$

* Podemos proceder haciendo más pequeño el incremento Δx y de esta forma ir acercando la secante a la tangente . Si hacemos que $\Delta x \to 0$ entonces la pendiente de la recta secante es igual a la pendiente de la recta tangente .



* Como la imagen de x es $f(x)$ la imagen de $x + \Delta x$ será $f(x + \Delta x)$, por lo tanto la pendiente está dada por la expresión :

$$m = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$, siempre que exista .

*Luego : $tg\,\alpha = m$

a $m = tg\,\alpha$ se le llama ***"pendiente"*** de la recta L.

* Se observa además que la pendiente de la recta $L:\ y = mx + b$ es el coeficiente principal .

EJEMPLO 1 :

Calcular la pendiente de la recta tangente a la curva de ecuación $y = 3x^2 - 1$ en el punto $x = 3$.

RESOLUCIÓN :

* Se escribe la expresión que permite calcular la pendiente de la tangente :

$$m = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

* Como $f(x) = 3x^2 - 1$ entonces :

$$f(x+\Delta x) = 3(x + \Delta x^2) - 1$$

* Por lo tanto :

$$m = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[3(x+\Delta x)^2 - 1] - (3x^2 - 1)}{\Delta x}$$

* Se desarrolla el cuadrado del binomio y se reducen términos semejantes :

$$m = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3x^2 + 6x\Delta x + 3(\Delta x)^2 - 1 - 3x^2 + 1}{\Delta x}$$

$$\to m = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{6x\Delta x}{\Delta x} + \frac{3(\Delta x)^2}{\Delta x} \right]$$

*Se reemplaza a Δx por cero y se calcula la expresión: $m = 6x + 0$

* La pendiente en $x = 3$, es $m = 6(3) = 18$.

EJEMPLO 2 :

Calcular la pendiente de la recta tangente a la curva $y = 3x^3$, en $x = 2$.

RESOLUCIÓN :

* Se aplica la definición de pendiente de la recta tangente a una curva .

$$m = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$\to m = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3(x+\Delta x)^3 - 3x^3}{\Delta x}$$

* Se desarrolla el cubo del binomio :

$$m = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3(x^3 + 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3) - 3x^3}{\Delta x}$$

$$\to m = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3x^3 + 9x^2 + \Delta x + 9x(\Delta x)^2 + 3(\Delta x)^3 - 3x^3}{\Delta x}$$

$$\to m = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{9x^2\Delta x + 9x(\Delta x)^2 + 3(\Delta x)^3}{\Delta x}$$

$$\to m = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{9x^2\Delta x}{\Delta x} + \frac{9x(\Delta x)^2}{\Delta x} + \frac{3(\Delta x)^3}{\Delta x} \right]$$

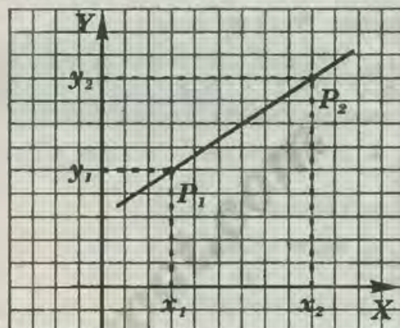
$$\to m = \lim_{\Delta x \to 0} [9x^2 + 9x(\Delta x) + 3(\Delta x)]$$

* Luego se cancela Δx , resultando : $m = 9x^2$

* Reemplazando para $x = 2$; $m = 9(2)^2 = 36$

ECUACIÓN DE LA RECTA TANGENTE

Una recta se caracteriza porque el valor de la pendiente es siempre el mismo, no importa cuales puntos de la recta se utilicen para su cálculo ya que el ángulo de inclinación se mantiene constante .



* La recta de la figura pasa por los puntos :

$$P_1 = (x_1 ; y_1), \ \ P_2 = (x_2 ; y_2)$$

* Por lo tanto su pendiente es : $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

* Si tomamos cualquier otro punto $P = (x ; y)$ por donde pase la recta , se debe cumplir que :

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1} \ \text{ó} \ m = \frac{y - y_2}{x - x_2}$$

* Por lo tanto la ecuación de una recta de la cual conocemos la pendiente y un punto por donde pasa es :

$$\boxed{\frac{y - y_1}{x - x_1} = m, \text{ es decir : } y - y_1 = m(x - x_1)}$$

EJEMPLO 1 :

Calcular la ecuación de la recta de pendiente $m = \dfrac{3}{4}$ que pasa por el punto $P = (-3 ; 5)$

RESOLUCIÓN :

* Se escribe la fórmula de la ecuación :

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

* Se reemplaza la pendiente y el punto conocido :

$$y - 5 = \frac{3}{4}(x - (-3))$$

* Al reducir, resulta la ecuación de la recta :

$$3x - 4y + 29 = 0$$

EJEMPLO 2 :

Calcular la ecuación de la recta tangente a :

$$y = x^2 - x \text{ , en } x = 8 .$$

RESOLUCIÓN :

*Cuando $x = 2$ y toma el valor : $y=(2)^2-2=2$.

Por lo tanto la recta tangente pasa por el punto $P=(2;2)$

*La pendiente de la recta se calcula con la expresión:

$$m_t = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

* Se reemplazan $f(x)$ y $f(x+\Delta x)$:

$$m_t = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^2-(x+\Delta x)-x^2+x}{\Delta x}$$

* Se desarrolla el cuadrado del binomio :

$$m_t = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{x^2+2x\,\Delta x+(\Delta x)^2-x-\Delta x-x^2+x}{\Delta x}$$

* Se reducen términos semejantes :

$$m_t = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{2x\,\Delta x+(\Delta x)^2-\Delta x}{\Delta x}$$

* Se distribuye el denominador :

$$m_t = \lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{2x\Delta x}{\Delta x}+\frac{(\Delta x)^2}{\Delta x}-\frac{\Delta x}{\Delta x}\right]$$

* Se cancelan factores :

$$m_t = \lim_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x-1)$$

* Se pasa al límite : $m_t = 2x-1$

* Cuando $x = 2$, la pendiente vale $m = 2(2)-1=3$

* Por último se halla la ecuación de la recta :

$y-y_1=m(x-x_1)\Rightarrow y-2=3(x-2)\Rightarrow y-2=3x-6$

$\Rightarrow 3x-y-4=0$

EJEMPLO 3 :

I) Hallar la pendiente de la tangente a la curva $xy = 2$, en el punto de abscisa $x = a$.

II) ¿En dónde la pendiente de la tangente es igual a $-\frac{1}{8}$?

III) ¿Qué le ocurre a la recta tangente a la curva en el punto $\left(a;\frac{2}{a}\right)$ cuando a se aproxima a cero?

RESOLUCIÓN :

I) Tenemos que : $f(x)=\frac{2}{x}$; $x_0=a$

* Luego :

$$m_T = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{2}{a+h}-\frac{2}{a}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{-2h}{h\cdot a(a+h)}=\lim_{h\to 0}\frac{-2}{a(a+h)}=-\frac{2}{a^2}$$

II) Esta pendiente será $-\frac{1}{8}$ cuando:

$$-\frac{2}{a^2}=-\frac{1}{8}\Rightarrow a^2=16$$

* Es decir , cuando : $a = 4, a = -4$

* Luego la recta tangente a la curva $xy = 2$ tiene pendiente $-\frac{1}{8}$ en los puntos $\left(4;\frac{1}{2}\right)$ y $\left(-4;-\frac{1}{2}\right)$

III) Nótese que la pendiente $-\frac{2}{a^2}$ siempre es negativa . Cuando a se aproxima a cero (ya sea por la izquierda o por la derecha) , la pendiente decrece ilimitadamente (esto es , $m\to-\infty$) y la recta tangente se hace cada vez más vertical .

EJEMPLO 4 :

Analicemos el movimiento de una partícula a lo largo de una trayectoria en línea recta que en los primeros t segundos recorre una distancia de $5t^2$ metros .

¿A qué velocidad se moverá la partícula cuando hayan transcurrido exactamente 4 segundos?

RESOLUCIÓN :

* Considerando que $x(t) = 5t^2$ es la posición de la partícula en el instante t y P_0 , el punto fijo que tiene abscisa $t = 4$.

* Eligiendo Q , como un punto variable , con abcisa $t = 4 + h$

* La velocidad media (pendiente de la recta secante) está definida como :

$$V_m=\frac{x_{(t+h)}-x_{(t)}}{h}$$

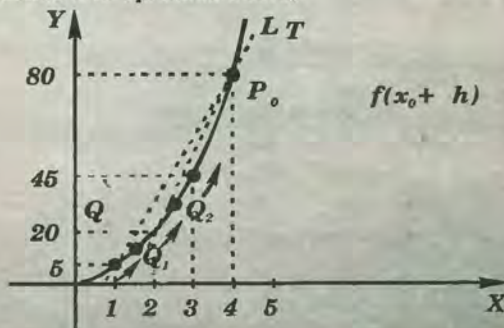
* En el lapso que transcurre desde $t = 4$ hasta $t= 4 + h$, la velocidad media está dada por:

$$V_m=\frac{x_{(4+h)}-x_{(4)}}{h}$$

* Reemplazando :

$$V_m=\frac{5(4+h)^2-5(4)^2}{h}=\frac{5\left(8h+h^2\right)}{h}=5(8+h)$$

* Esta velocidad media v_m se aproxima a un valor preciso , cuando Q se aproxima a P_0 . (es decir, cuando h se aproxima a cero)



* Esto indica que la velocidad media se aproxima al valor límite de la velocidad instantánea **V**, en cuyo caso :

$$V = \lim_{h \to 0} V_m = \lim_{h \to 0} 5(8+h) = 40m/s$$

* Es decir, la velocidad en el instante $t = 4$, es $V = 40m/s$.

*Generalizando , tenemos que siendo $V(t) = \lim_{h \to 0} V_m$, nos queda :

$$V_{(t)} = \lim_{h \to 0} \frac{x_{(t+h)} - x_{(t)}}{h}, \text{ si existe .}$$

OBSERVACIÓN :

* El cambio en el valor de x , que es $x_2 - x_1$, se denomina ***variación de x*** y se denota por :

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

* De manera similar , el cambio en el valor de **y** , que es $y_2 - y_1$, se denomina ***variación de y***, esto es:

$$\Delta y = y_2 - y_1 = f(x_2) - f(x_1)$$

* Se denomina ***tasa de variación promedio (TVM)*** de una función $y = f(x)$ sobre un intervalo de la variable independiente que va de x a $x + \Delta x$ a la razón $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Es decir : $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

mide la tasa de variación promedio de la función $y = f(x)$ con respecto a x .

Geometricamente, la TVM es la pendiente de la secante por **P** y **Q** y por tanto la variación instantánea en **P** será como caso límite la pendiente de la recta tangente en **P**.

* De lo expuesto hasta el momento, podemos concluir que las soluciones de los problemas de la recta tangente y de la tasa de variación instantánea están basados en el cálculo de un límite de la forma:

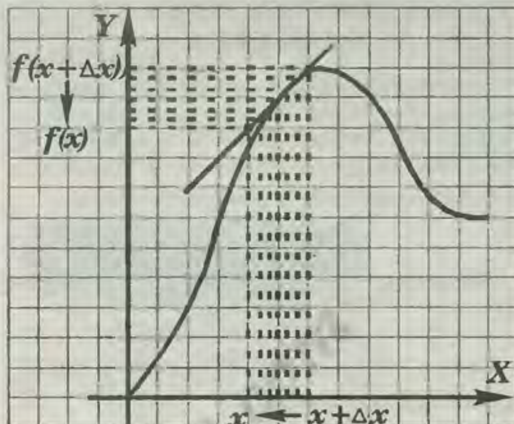
$$\lim_{h \to 0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

* En muchos otros problemas , estos límites se siguen presentando , por lo que es conveniente darles un nombre . Así diremos que a un límite de la forma anterior se le llama ***derivada de f(x)*** en el punto de abscisa x_0 .

DERIVADAS

Se llama derivada de la función $y = f(x)$ en el punto x ; al límite del cociente incremental :

$$\lim_{\Delta x \to 0} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$



* También se puede representar así:

$$y' = f'(x) = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

DEFINICIÓN :

La derivada de una función **f** es otra **f'** (se lee «**f** prima») cuyo valor en cada punto $x_0 \in Domf$ es

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$ siempre y cuando exista tal límite .

Al proceso empleado para encontrar la derivada se le llama ***derivación*** (diferenciación) .

OTRAS DEFINICIONES EQUIVALENTE DE LA DERIVADA

$$A)\ f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$B)\ f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0) - (x_0 - h)}{h}$$

C) Sea **f** una función definida en un intervalo abierto **I** que contiene a , $x = a$. Se dice que **f** es derivable (diferenciable) en el punto $x = a$, si existe el siguiente límite :

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

* En este caso al valor límite se le denomina derivada de **f** en el punto $(a\ ;\ f(a))$ y se le denota por : $f'_{(a)}$

Así tenemos :

$$f'_{(a)} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

NOTACIONES PARA LA DERIVADA

A lo largo de la historia se han utilizado diferentes notaciones para la derivada , las cuales en mayor o menor grado y en dependencia de la aplicación de que se trate , se sigue utilizando en la actualidad .

Si $y = f(x)$,la derivada se puede denotar como :

$$\left.\begin{matrix} y' \\ f'_{(x)} \end{matrix}\right\} Lagrange \quad \left.\begin{matrix} \dfrac{df(x)}{dx} \\ \dfrac{dy}{dx} \end{matrix}\right\} Leibnitz \quad \left.\begin{matrix} D_x f(x) \\ D_x y \end{matrix}\right\} Cauchy$$

y' : Newton (fundamentalmente cuando la variable independiente es el tiempo)

Se leen : " Derivada de f con respecto a x "

EJEMPLO 1 :

Sea $f(x) = 4 - 9x$, calcula $f'(4)$

RESOLUCIÓN :

* Aplicando la definición :

$$f'(4) = \lim_{h\to 0}\frac{f(4+h)-f(4)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{[4-9(4+h)]-[4-9(4)]}{h}$$

$$f'(4) = \lim_{h\to 0}\frac{-9(4+h)+9(4)}{h} = \lim_{h\to 0}(-9) = -9$$

EJEMPLO 2 :

Calcular la derivada de la función $y = 5x^2 + 1$ en el punto $x = 3$

RESOLUCIÓN :

* Aplicando la definición :

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

$$\rightarrow y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{5(x+\Delta x)^2+1-(5x^2+1)}{\Delta x}$$

$$\rightarrow y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{5\left(x^2+2x\,\Delta x+(\Delta x)^2\right)+1-5x^2-1}{\Delta x}$$

$$\rightarrow y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{5x^2+10x\,\Delta x+5(\Delta x^2)+1-5x^2-1}{\Delta x}$$

$$\rightarrow y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{10x\Delta x+5(\Delta x)^2}{\Delta x}$$

$$\rightarrow y' = \lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{10x\Delta x}{\Delta x}+\frac{5(\Delta x)^2}{\Delta x}\right]$$

* Se aplica límite a la suma de funciones :

$$y' = 10x + 0 = 10x$$

* Se calcula la derivada en $x = 3$:

$$y'_{(3)} = 10(3) = 30$$

EJEMPLO 3 :

Si $f(x) = 3x^2 + 5x + 4$, hallar $f'(x)$

RESOLUCIÓN :

$$f'_{(x)} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$\rightarrow f'_{(x)} = \lim_{h\to 0}\frac{3(x+h)^2+5(x+h)+4-(3x^2+5x+4)}{h}$$

$$\rightarrow f'_{(x)} = \lim_{h\to 0}\frac{3x^2+6xh+3h^2+5x+5h+4-3x^2-5x-4}{h}$$

$$\rightarrow f'_{(x)} = \lim_{h\to 0}\frac{3h^2+6xh+5h}{h}$$

$$\rightarrow f'_{(x)} = \lim_{h\to 0}(3h+6x+5) = 6x+5$$

$$\rightarrow f'_{(x)} = 6x+5$$

* Si $x = 2$, obtenemos $f'_{(2)} = 17$, lo cual confirma la respuesta en el ejemplo anterior .

Obsérvese la ventaja de calcular $f'_{(x)}$ como función de un x arbitrario, pues así se tiene una expresión que permite calcular la derivada en cualquier número en que ella exista . A tal función se le llama función derivada .

EJEMPLO 4 :

calcular la derivada de la función :

$y = cosx$, aplicando la definición de derivada .

RESOLUCIÓN :

* Si $y = cosx$, entonces :

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cos(x+\Delta x)-\cos(x)}{\Delta x}$$

*Se tiene al aplicar :

$$\cos(x+y) = \cos x\cos y - \operatorname{sen}x\operatorname{sen}y$$

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cos x\cos\Delta x-\operatorname{sen}x\operatorname{sen}\Delta x-\cos(x)}{\Delta x}$$

$$\rightarrow y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cos x(\cos\Delta x-1)-\operatorname{sen}x\operatorname{sen}\Delta x}{\Delta x}$$

$$\rightarrow y' = \lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{\cos x(\cos\Delta x-1)}{\Delta x}-\frac{\operatorname{sen}x\operatorname{sen}\Delta x}{\Delta x}\right]$$

* Se aplican las propiedades de los límites :

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cos x(\cos\Delta x-1)}{\Delta x}-\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\operatorname{sen}x\operatorname{sen}\Delta x}{\Delta x}$$

$$\rightarrow y' = \lim_{\Delta x\to 0}\cos x\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\cos\Delta x-1)}{\Delta x}-\lim_{\Delta x\to 0}\operatorname{sen}x\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\operatorname{sen}\Delta x}{\Delta x}$$

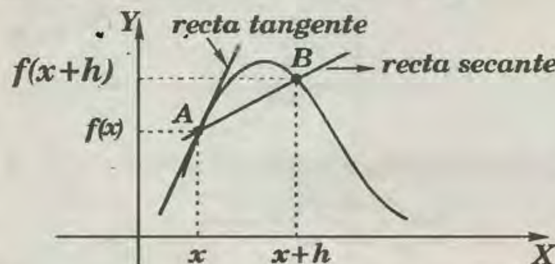
* Calculando el límite se tiene :

$$y' = \cos x(0)-\operatorname{sen}x(1) \rightarrow y' = -\operatorname{sen}x$$

* Entonces , Si : $y = \cos x \Rightarrow y' = -\operatorname{sen}x$

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LA DERIVADA

Consideremos el gráfico de la función f representada por la curva $y = f(x)$, tomemos los puntos A y B, el punto B muy próximo al punto A cuyas coordenadas son $(x\ ;\ f(x))$ como se muestran en la figura :



En este caso hemos supuesto un $h > 0$. Observemos que B es un punto de la gráfica de f que se desliza a través de ella a medida que variamos h . Si hacemos que h se aproxime a cero , la recta AB inicialmente secante se convierte en tangente .

* Observemos que antes de hacer esta aproximación de h a cero , la pendiente de la recta AB era :

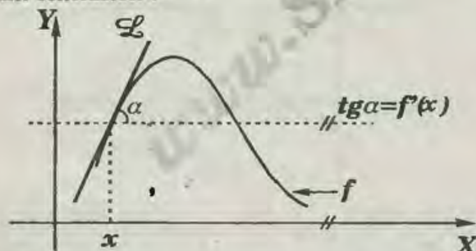
$$m_S = \frac{f(x+h)-f(h)}{h}$$

*Y ahora haciendo que $h \to 0$, la pendiente de la recta (que ahora es tangente) es :

$$m_T = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

* Y es lo que hemos definido como la derivada de f.

* En conclusión :

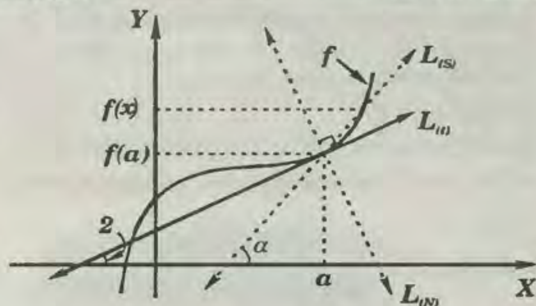


$f\,'(x)$ representa geométricamente (en caso de existir) a la pendiente de la recta tangente (de la gráfica de f) en el punto $(x\ ;\ f(x))$, con

$x \in Dom f$ y donde $Dom f\,' \subset Dom f \left(m = f\,'(x)\right)$

* Si $S = S_{(t)}$ es una magnitud física que depende del tiempo t , entonces $S'(t) = \dfrac{dS}{dt}$ es la rapidez con que cambia S en el instante "t" .

* En particular , sea :



PENDIENTE DE LA RECTA SECANTEL $\mathscr{L}_S$:

$$m_S = tg\alpha = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

PENDIENTE DE LA RECTA TANGENTE $\mathscr{L}_T$:

$$m_T = tg\theta = \lim_{x \to a} m_S = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

$$\Rightarrow \boxed{m_T = f'_{(a)}}$$

La pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función f , en el punto $(a\ ;\ f(a))$ es la derivada de f, evaluando en "a" .

ECUACIÓN DE LA RECTA TANGENTE

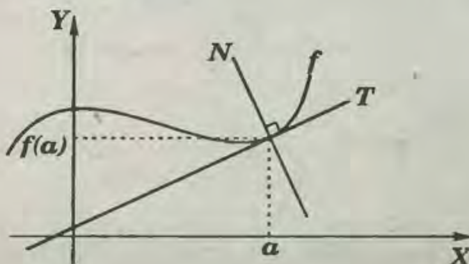
$$\mathscr{L}_T = y - f(a) = f'_{(a)}.(x-a)$$

En el punto $(a\ ;\ f(a))$

ECUACIÓN DE LA RECTA NORMAL

$$\mathscr{L}_N = y - f(a) = \frac{-1}{f'_{(a)}}(x-a)$$

En el punto $(a\ ;\ f(a))$

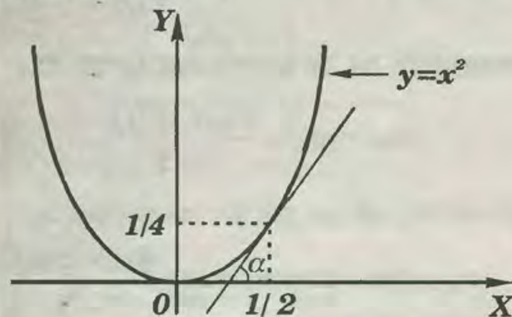


* La recta normal a la gráfica de una función f, en el punto $(a\,;\,f(a))$ es aquella recta perpendicular a la recta tangente en dicho punto .

EJEMPLO 1 :

Determinar las pendientes de las tangentes de la parábola $y = x^2$ en el vértice y en el punto de abscisa $x = \frac{1}{2}$.

RESOLUCIÓN :



$$f\,'(x) = m_T = (x^2)' = 2x$$

* Luego :

$f\,'(0) = 2(0) = 0 \Rightarrow m_T = 0$ ...... *(en el vértice)*

$f\,'\left(\frac{1}{2}\right) = 2\left(\frac{1}{2}\right) = 1 \Rightarrow m_T = 1$ .... *(en $x = \frac{1}{2}$)*

EJEMPLO 2 :

Determine la ecuación de la recta normal y tangente a la gráfica de la función $f(x) = x^3$, para $x = 2$

RESOLUCIÓN :

* Calculemos las coordenadas del punto :
$(2\,;f(2)) = (2\,;8)$. También calculemos la pendiente de la recta tangente en $(2\,;8)$ en base a la derivada:

$$m_T = f\,'(2) = \lim_{x\to 2} = \frac{x^3 - 2^3}{x-2}$$

$$\Rightarrow m_T = \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x-2} =$$

$$= \lim_{x\to 2} x^2 + 2x + 4 = 12 \Rightarrow m_T = 12$$

* Luego :

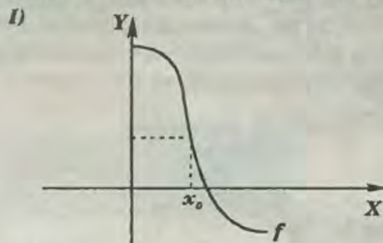
$\mathscr{L}_T : y - f(2) = f'_{(2)}\cdot(x-2) \Rightarrow \mathscr{L}_T : y - 8 = 12(x-2)$

y

$\mathscr{L}_N : y - f(2) = \frac{-1}{f'_{(2)}}\cdot(x-2) \Rightarrow \mathscr{L}_N : y - 8 = \frac{-1}{12}(x-2)$

CASOS DONDE EXISTE LA RECTA TANGENTE Y NO EXISTE LA DERIVADA EN ESE PUNTO

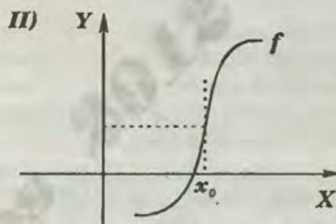
I)



$x = x_0$ es tangente al gráfico de f en x_0

$$\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = -\infty$$

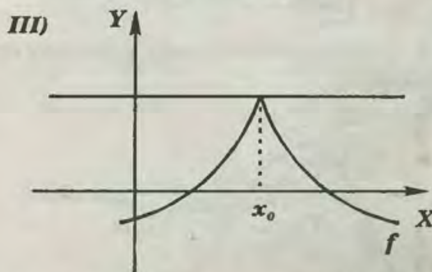
II)



$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty$$

$x = x_0$ es tangente al gráfico de f en x_0

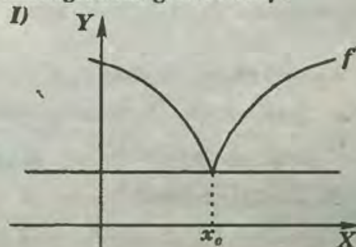
III)



$$\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty \qquad \lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = -\infty$$

$x = x_0$ es tangente al gráfico de f .

I)



$$\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=-\infty \qquad \lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=+\infty$$

$x=x_0$ es tangente al gráfico de f.

DERIVADAS LATERALES

Por definición, sabemos que la derivada es un límite, y como un límite existe si y sólo si los límites laterales existen y son iguales, tendremos las siguientes definiciones de derivadas laterales :

A) DERIVADA POR LA DERECHA DE f EN EL PUNTO x_0:

$$f_+'(x_0)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

si tal límite existe .

B) DERIVADA POR LA IZQUIERDA DE f EN EL PUNTO x_0:

$$f_-'(x_0)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

si tal límite existe .

* Es consecuencia inmediata de la definición de límite que $f'(x_0)$ existe si y sólo si las derivadas laterales existen y son iguales .

$$f'(x_0)=f_+'(x_0)=f_-'(x_0)$$

* Por tanto f es diferenciable en x_0.

CONDICIONES DE EXISTENCIA DE LA DERIVADA

En consecuencia inmediata de la definición de límite, $f'(x_0)$ existe si y sólo si las derivadas laterales existan y son iguales, es decir :

$$f'(x_0)=f_-'(x_0)=f_+'(x_0)$$

TEOREMA :

(*Derivabilidad – Continuidad*)

f es derivable en $(a\,;f(a))\Rightarrow f$ es continua en $(a\,;f(a))$

EJEMPLO 1 :

Sea $f(x)=\begin{cases}x+3\,; & x\le 2\\ 3x-1\,; & x>2\end{cases}$; hallar $f'(2)$, si existe :

RESOLUCIÓN :

* Como la ruptura del dominio está dada en 2 , debemos aplicar derivadas laterales .

$$\cdot f_-'(2)=\lim_{\substack{h\to 0^-\\(h<0)}}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{((2+h)+3)-(2+3)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0^-}\frac{h}{h}=1$$

$$\cdot f_+'(2)=\lim_{\substack{h\to 0^+\\(h>0)}}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{(3(2+h)-1)-(2+3)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0^+}\frac{3h}{h}=3$$

$\rightarrow$ Como $f_-'(2)\neq f_+'(2)$, entonces $f'(2)$ no existe .

EJEMPLO 2:

Sea f la función definida por:

$$f(x)=\begin{cases}2x+3\ ; & x\le 2\\ x^2+3\ ; & x>2\end{cases}$$

Determinar :

I) $f_-'(2)$, $f_+'(2)$

II) ¿Es f derivable en $x=2$?

RESOLUCIÓN :

I) $f_-'(2)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{[2(2+h)+3]-7}{h}$

$$=\lim_{h\to 0^-}\frac{2h}{h}=2$$

$$f_+'(2)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{[(2+h)^2+3-7]}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0^+}\frac{h^2+4h}{h}=\lim_{h\to 0^+}(h+4)=4$$

II) Como $f_-'(2)\neq f_+'(2)$, entonces no existe $f'(2)$.

EJEMPLO 3 :

¿Es derivable en $x_0=1$, la función $f(x)=|x-1|$?

RESOLUCIÓN :

$$* f_+'(1)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{|1+h-1|-0}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0^+}\frac{|h|}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{h}{h}=1$$

* Luego : $f_+'(1)=1$

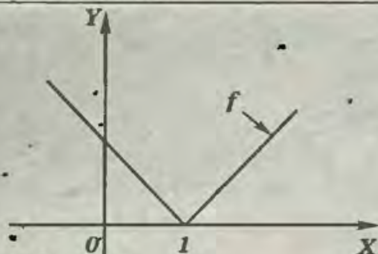
$$* f_-'(1)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0^-}\frac{|1+h-1|-0}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0^-}\frac{|h|}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{-h}{h}=-1$$

*Luego : $f_-'(1)=-1$

*Como $f_+'(1)\neq f_-'(1)\Rightarrow f$ no es derivable en $x_0=1$

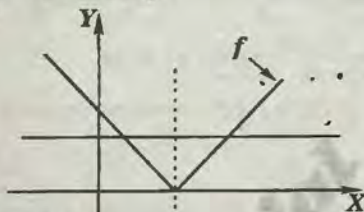


OBSERVACIÓN :

* Desde un punto de vista geométrico , las derivadas laterales representan pendientes de rectas tangentes por cada lado del número analizado . En muchos casos estas tangentes laterales no coinciden y la curva presenta puntos angulosos . Por el contrario , en aquellos puntos de la gráfica donde las derivadas laterales coinciden se dice que la curva es «suave». Cuando una función se define por tramos es muy probable que la gráfica que resulte no sea suave en los puntos de unión de los tramos e incluso la función ahí puede ser discontinua .

* Si f no es continua en x_0, entonces f no es diferenciable en x_0.

* Si f es continua en x_0, no se puede afirmar que f sea diferenciable en x_0.



EJEMPLO :

La función $f(x)=|x-1|$ es continua en $x_0=1$, pero no es diferenciable en $x_0=1$, como ya se vio .

* Luego $f'(x)$ existe $\forall x \in \mathbb{R}-\{1\}$

DIFERENCIABILIDAD EN UN INTERVALO

En muchos problemas se requiere que una función sea derivable , no es uno , sino en todos los puntos de un intervalo . Definamos este concepto con precisión :

DEFINICIÓN :

Sea f una función se dice que :

I) f es derivable en $\langle a\,;b\rangle$ si para cada x en $\langle a\,;b\rangle$ existe $f'(x)$

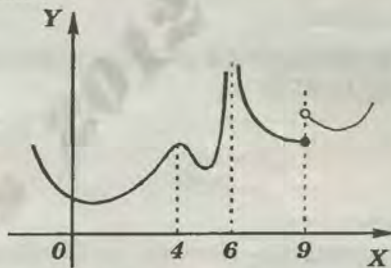
II) f es derivable en $[a\,;b\rangle$ si f es derivable en $\langle a\,;b\rangle$ y existe $f_+'(a)$

III) f es derivable en $\langle a\,;b]$ si f es derivable en $\langle a\,;b\rangle$ y existe $f_-'(b)$

IV) f es derivable en $[a\,;b]$ si f es derivable en $\langle a\,;b\rangle$ y existen $f_+'(a)$ y $f_-'(b)$

EJEMPLO 1 :

Sea f una función cuya gráfica se muestra en la figura adjunta , indicar los intervalos en los que f es derivable .



RESOLUCIÓN :

f es derivable (o diferenciable) en $\langle-\infty\,;4]$, $[4\,;6\rangle$, $\langle 6\,;9]$ y $\langle 9\,;\infty\rangle$

EJEMPLO 2 :

Sea f la función definida por :

$$f(x)=\begin{cases}3x+1; & -2\le x<0\\ x^2-1; & 0\le x\le 1\end{cases}$$

¿Es diferenciable en $[-2\,;1]$?

RESOLUCIÓN :

* Veamos esto :
* Es fácil determinar que :

$$f(x)=\begin{cases}3\;; & -2<x<0\\ 2x\;; & 0<x<1\end{cases}$$

para : $x=0$

$$\rightarrow f_-'(0)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{3h}{h}=3$$

$$f_+'(0)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{h^2}{h}=0$$

*Como $f_-'(0)\neq f_+'(0)$ entonces f no es

diferenciable en $x = 0$ por lo tanto f no es diferenciable en $[-2;1]$. Obsérvese que no ha sido necesario calcular $f_+'(2)$ y $f_-'(1)$

EJEMPLO 3 :

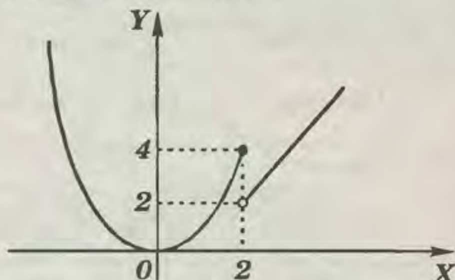
Dada la función :

$$f(x)=\begin{cases}|x|;\ x>2\\ x^2;\ x\leq 2\end{cases}$$

Analizar si es diferenciable en todo "$\mathbb{R}$"

RESOLUCIÓN :

* Graficando la función tenemos :



*Vemos que no es diferenciable en $x = 2$; entonces no es diferenciable con todo $\mathbb{R}$.

DIFERENCIABILIDAD Y CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN

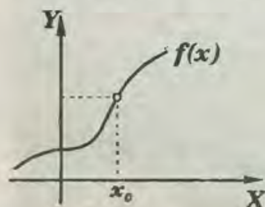
Los conceptos de continuidad y diferenciabilidad están relacionados entre sí . Veremos que si una función es continua en x_0, entonces puede ser diferenciable o no en dicho punto .

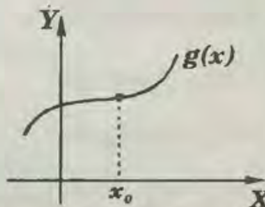
TEOREMAS :

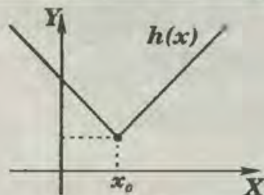
I) Si f es diferenciable en x_0, entonces f es continua en x_0.

II) Si f no es continua en x_0, entonces f no es diferenciable en x_0.

III) Si f es continua en x_0, entonces no necesariamente es diferenciable en x_0 (es decir, si f es continua en x_0, entonces puede ser diferenciable o no en dicho punto x_0)







* Como f no es continua en x_0, no existe f' en x_0, ya que f no está definida en x_0.
* g y h son continuas en x_0
* Existe la derivada de g en x_0
* No existe la derivada de h en x_0

EJEMPLO 1 :

La función f definida por $f(x)=\begin{cases}x^2+1;\ x\leq 0\\ 2x\ ;\ x>0\end{cases}$ ¿Será diferenciable en $x = 0$?

RESOLUCIÓN :

*Como $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)\neq \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$, se tiene que no existe $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ y en consecuencia f no es continua en $x=0$.

Por el teorema ***(II)*** anterior , decimos que f no es diferenciable en $x = 0$.

EJEMPLO 2 :

Encontrar los valores de a y b para que $f'(1)$ exista, si:

$$f(x)=\begin{cases}x^2\ \ \ ;\ x<1\\ ax+b\ ;\ x\geq 1\end{cases}$$

RESOLUCIÓN :

*Si $f'(1)$ existe , entonces f es continua en $x=1$.
*Luego $f(1^-) = f(1^+)$ de donde $1 = a + b$.
* Como $f(1^-) = 2$ y $f(1^+) = a$
* Se obtiene $a = 2$
*Resolviendo las ecuaciones $a = 2 \wedge a + b = 1$, se obtiene $a = 2 ; b = -1$

EJEMPLO 3 :

¿La función f definida por $f(x)=|x|$ es diferenciable en $x = 0$?

RESOLUCIÓN :

* Tenemos que : $f(x)=\begin{cases}x\ \ \ ;\ x\geq 0\\ -x\ \ ;\ x<0\end{cases}$

*Ahora: $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=f(0)=0$, luego f es continua en $x = 0$.

* Analizamos la diferenciabilidad en $x = 0$:

$$f_-'(0)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{(-h)-0}{h}=\lim_{h\to 0^-}(-1)=-1$$

$$f_+'(0)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{h-0}{h}=\lim_{h\to 0^+}(1)=1$$

* Como $f_-'(0)\neq f_+'(0)$ entonces no exite $f'(0)$, es decir f no es diferenciable en $x = 0$.

REGLAS DE DERIVACIÓN

A continuación estudiaremos las reglas necesarias para operar con funciones diferenciales en un cierto intervalo. Para el efecto emplearemos una lista de derivadas de algunas funciones especiales, que permiten deducir otras más complejas. Asimismo aprenderemos a evaluar las derivadas de funciones en puntos x_0 de su dominio.

TEOREMAS FUNDAMENTALES

Conozcamos los principales teoremas que se utilizan en el marco de la diferenciación de ciertas expresiones. Para esto, sean f, g funciones diferenciables en un intervalo, una constante, entonces :

1	$[f(x)+g(x)]'=f'(x)+g'(x)$ «Derivada de la suma»
2	$[f(x)\cdot g(x)]'=f'(x)\times g(x)+g'(x)\times f(x)$
3	$[cf(x)]'=cf'(x),\ c\in\mathbb{R}$
4	$[f(x)-g(x)]'=f'(x)-g'(x)$
5	$\left[\frac{1}{f(x)}\right]=\frac{f'(x)}{[f(x)]^2}$
6	$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$

Todas estas reglas pueden demostrarse a partir de la definición de derivada.

DERIVADAS DE ALGUNAS FUNCIONES ESPECIALES

Hasta el momento, el proceso seguido para encontrar la derivada de una función se ha basado en aplicar la definición $f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, lo cual en algunos casos ha resultado demasiado tedioso.

A continuación exponemos una serie de reglas, las cuales, junto a las anteriores, nos permitirán calcular con prontitud las derivadas :

Función	Derivada
$f(x)=c; c\in\mathbb{R}$	$f'(x)=0$
$f(x)=x$	$f'(x)=1$
$f(x)=cx; c\in\mathbb{R}$	$f'(x)=c$
$f(x)=\sqrt{x}$	$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}; x\neq 0$
$f(x)=x^n; n\in\mathbb{R}$	$f'(x)=nx^{n-1}$
$f(x)=\lvert x\rvert$	$f'(x)=\frac{x}{\lvert x\rvert}; x\neq 0$
$f(x)=e^x$	$f'(x)=e^x$
$f(x)=Lnx$	$f'(x)=\frac{1}{x}; x\neq 0$
$f(x)=a^x$	$f'(x)=a^x Lna$ $(a>1\wedge a\neq 1)$
$f(x)=senx$	$f'(x)=\cos x$
$f(x)=\cos x$	$f'(x)=-senx$
$f(x)=\csc x$	$f'(x)=-\csc x\ ctgx$
$f(x)=tg$	$f'(x)=\sec^2 x$
$f(x)=\cot x$	$f'(x)=-\csc^2 x$
$f(x)=\sec x$	$f'(x)=\sec x\ tgx$
$f[g(x)]$	$f'[g(x)]=f'_{[g(x)]}g'(x)$

DERIVADAS DE FUNCIONES TRIGONÓMETRICAS INVERSAS

1) $f(x) = arcsenx \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};\ -1<x<1$

2) $f(x) = arcosx \Rightarrow f'(x)=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};\ -1<x<1$

3) $f(x) = arc\ tangx \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{1+x^2};\ x\in\mathbb{R}$

4) $f(x) = arc\ ctanx \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{1+x^2};\ x\in\mathbb{R}$

5) $f(x)=arcsecx \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}};\ x<-1\vee x>1$

6) $f(x) = arc\ cscx$

$$\Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}};\ x<-1 \vee x>1$$

EJEMPO 1 ;

Hallar la derivada de cada una de las funciones siguientes:

A) $f(x) = 4x^3$ B) $f(x) = 4x^3 + 3x^2$

C) $f(x) = 3x^4 - 2x^3 + 5x$ D) $f(x) = (x^2+2x-3)\cdot(x^3-x)$

E) $f(x) = \dfrac{x^2-3x+2}{x+2}$ F) $f(x) = 3x^4$

G) $f(x) = 3x^4 + 2x$ H) $f(x) = 4x^3 - 3x^2 + x + 2$

I) $f(x) = (x^2+3x+1)(x^2-9x)$ J) $f(x) = \dfrac{x^2+3x+1}{x^2-9x}$

RESOLUCIÓN :

A) $f'(x) = 3\cdot 4x^2 = 12x^2$

B) $f'(x) = (4x^3)' + (3x^2)' = 12x^2 + 6x$

C) $f'(x) = (3x^4)' - (2x^3)' + (5x)' = 12x^3 - 6x^2 + 5$

D) $f'(x) = (x^2+2x-3)'(x^3-x) + (x^2+2x-3)(x^3-x)'$

$$= (2x+2)(x^3-x) + (x^2+2x+3)(3x^2-1)$$

E) $f'(x) = \dfrac{(x^2-3x+2)'(x+2) - (x^2-3x+2)(x+2)'}{(x+2)^2}$

$$= \frac{(2x-3)(x+2) - (x^2-3x+2)(1)}{(x+2)^2} = \frac{x^2+4x-8}{(x+2)^2}$$

F) $f'(x) = 3\cdot 4x^3 = 12x^3$

G) $f'(x) = (3x^4)' + (2x)' = 12x^3 + 2$

H) $f'(x) = (4x^3)' - (3x^2)' + (x)' + (2)' = 12x^2 - 6x + 1$

I) $f'(x) = (x^2+3x+1)'(x^2-9x) + (x^2+3x+1)(x^2-9x)'$

$$= (2x+3)(x^2-9x) + (x^2-3x+1)(2x-9)$$

J) $f'(x) = \dfrac{(x^2+3x+1)'(x^2-9x)(x^2+3x+1)(x^2-9x)'}{(x^2-9x)^2}$

$$= \frac{(2x+3)(x^2-9x) - (x^2+3x+1)(2x-9)}{(x^2-9x)^2}$$

EJEMPLO 2 :

Hallar la derivada de la función :

$$f(x) = 1/x^n;\ n\in N$$

RESOLUCIÓN :

$$f(x) = 1/x^n = f(x) = x^{-n}$$

$$\Rightarrow f'(x) = -nx^{-n-1} \Rightarrow f'(x) = \frac{-n}{x^{n+1}} \Rightarrow \left(\frac{1}{x^n}\right)' = \frac{-n}{x^{n+1}}$$

EJEMPLO 3 :

Si $y = \dfrac{2x+3}{x^2+2}$, hallar y'.

RESOLUCIÓN :

*Aplicando la regla de la derivada de un cociente :

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

$$y' = \frac{(2x+3)'(x^2+2) - (2x+3)(x^2+2)'}{(x^2+2)^2}$$

$$= \frac{2(x^2+2) - (2x+3)(2x)}{(x^2+2)^2} = \frac{-2x^2-6x+4}{(x^2+2)^2}$$

EJEMPLO 4 :

Sea $f(x) = \dfrac{3}{x^2-5x+1}$, hallar $f'(x)$

RESOLUCIÓN :

* Aplicando la regla de la derivada de un cociente :

$$\left[\frac{1}{g'(x)}\right] = -\frac{g'(x)}{[g(x)]^2}$$

* Tenemos $f(x) = 3(x^2-5x+1)^{-1}$

$$f'(x) = 3\left[(x^2-5x+1)^{-1}\right]' = 3\left[-\frac{(x^2-5x+1)'}{(x^2-5x+1)^2}\right]$$

$$= -3\times\frac{2x-5}{(x^2-5x+1)^2}$$

FUNCIÓN DERIVADA EVALUADA EN UN PUNTO

Con $f'(x)$ designamos al valor que f' le hace corresponder a x. Si $x_0 \in$ Dom f', entonces $f'(x_0)$ es un valor numérico que se obtiene al reemplazar x por x_0 en la regla de correspondencia de f' ; esto quiere decir que la función derivada está evaluada en x_0.

Se simboliza por : $f'(x_0) = f'(x)\big|_{x=x_0}$

La última expresión nos indica que para hallar $f'(x_0)$, primero debemos calcular $f'(x)$ y a continuación reemplazar x por x_0 (donde $x_0 \in$ *Dom* f').

EJEMPLO 1 :

Dada la función $f(x) = x^3 + 4\sqrt{x}$, hallar :

I) $f'(1)$ II) $f'(4)$ III) $f'(x_0)$

RESOLUCIÓN :

* La derivada de $f(x) = x^3 + 4\sqrt{x}$ es :

$$f'(x) = 3x^2 + \frac{4}{2\sqrt{x}} = 3x^2 + \frac{2}{\sqrt{x}}$$

I) Para $x = 1$, nos queda $f'(1) = 3 + \frac{2}{\sqrt{1}} = 5$

II) Para $x = 4$; $f'(4) = f'(x)|_{x=4} = \left(3x^2 + \frac{2}{\sqrt{x}}\right)\Big|_{x=4}$

$= 3(4)^2 + \frac{2}{\sqrt{4}} = 49$

III) Para

$x = x_0$; $f'(x) = f'(x_0)|_{x=x_0} = 3{x_0}^2 + \frac{2}{\sqrt{x_0}}$

EJEMPLO 2 :

Calcular la derivada de $y = \frac{2x}{3x+1}$ en el punto $x=3$.

RESOLUCIÓN :

* La función **y** es el cociente de las funciones $f = 2x$ y $g = 3x + 1$; por lo tanto para calcular y' se aplica la fórmula para hallar la derivada del cociente de dos funciones .

$$y' = \frac{2(3x+1) - 2x(3)}{(3x+1)^2}$$

$$\rightarrow y' = \frac{6x+2-6x}{(3x+1)^2} = \frac{2}{(3x+1)^2}$$

$$\rightarrow y'(3) = \frac{2}{(3(3)+1)^2} = \frac{2}{100} = \frac{1}{50}$$

EJEMPLO 3 :

Hallar la pendiente de la recta tangente a la curva $f(x) = senx\cos x$, en el punto de abscisa $x_0 = \frac{\pi}{4}$.

RESOLUCIÓN :

* De **:** $f(x) = senx \cdot \cos x$, ***tenemos:***

$$f'(x) = (senx)'\cos x + (senx)(\cos x)'$$

*Luego :

$$\frac{df}{dx}(x) = \cos x \cdot \cos x + senx \cdot (-senx) = \cos^2 x - sen^2 x$$

* Entonces :

$$m_T = \frac{df}{dx}(x)\Big|_{x=\frac{\pi}{4}} = (\cos^2 x - sen^2 x)|_{x=\frac{\pi}{4}}$$

$$= \cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right) - sen^2\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\rightarrow m_T = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

REGLA DE LA CADENA

Cuando una variable y depende de una variable independiente x en una forma muy complicada, es conveniente considerarla como una función compuesta de dos o más funciones .

EJEMPLO :

$$y = (3x^2 + x - 5)^4$$

*entonces podemos considerar :

$$y = \mu^4 \text{ donde } \mu = 3x^2 + x - 5$$

Esto a veces se representa esquemáticamente como una ***"cadena"*** de variables , lo cual da nombre a la regla que veremos más adelante : $y \rightarrow \mu \rightarrow x$

y podemos leer , **y** depende de μ ; μ depende de x . Estudiaremos la derivada de una composición de funciones , la cual es de gran importancia en la resolución de problemas físicos , químicos , etc .

DERIVACIÓN DE UNA FUNCIÓN COMPUESTA

La derivada de una función compuesta está basada en el siguiente teorema :

TEOREMA :

Si u es diferenciable en x , y g es diferenciable en $u(x)$, entonces $g \circ u$, es diferenciable en x , luego se tiene :

$$[g(u(x))]' = \underbrace{g'(u(x))}_{\text{Parte Externa}} \cdot \underbrace{u'(x)}_{\text{Parte Interna}}$$

EJEMPLO 1 :

Supongamos que deseamos encontrar la derivada de la función f definida por $f(x) = (5x^4 + 7)^{15}$. ¿Será necesario elevar el binomio a la potencia ***15*** , para posteriormente derivar ? Lo anterior no es necesario , para esto existe la ***REGLA DE LA CADENA*** .

* Por el teorema:

$g(u(x)) = (5x^4 + 7)^{15} \Rightarrow u(x) = 5x^4 + 7$

luego **:** $g(u) = u^{15}$

* Ahora : $g'(u) = 15u^{14}$ y $u'(x) = 20x^3$

$$\rightarrow \frac{d}{dx}[5x^4+7]^{15} = g'(u(x)).u'(x) = 15u^{14}.20x^3$$

$$= 15(5x^4+7)^{14}.20x^3 = 300x^3(5x^4+7)^{14}$$

* Observa que para obtener el resultado primero se deriva la función externa (la función potencial) y el resultado se multiplica por la derivada de la función interna (que es $5x^4 + 7$).

EJEMPLO 2 :

Calcular la derivada de la función: $y = (3x-2)^3$

RESOLUCIÓN :

* La función cúbica es externa y $3x-2$ es la función interna . $y' = \underbrace{3(3x-2)^2}_{\text{Externa}} \; \underbrace{3}_{\text{Interna}} = 9(3x-2)^2$

EJEMPLO 3:

Calcular la derivada de la función $h(x)=(5x-2)^3$

RESOLUCIÓN :

*La función $h(x)$ es una función compuesta por :

$$f(x) = 5x-2 \text{ y } g(x) = x^3$$

*Por lo tanto :

$$h(x)=(g\circ f)(x)=g(f(x)) \rightarrow h(x)=(5x-2)^3$$

$$h'(x)=g'(f(x)).f'(x) \qquad \rightarrow h'(x)=\underbrace{3(5x-2)^2}_{\text{Derivada de la función externa}}\ \underbrace{5}_{\text{Derivada de la función interna}}$$

COROLARIO :

Suponga que g es una función diferenciable y que $n\in Z$.

I) Si $f(x) = x^n$, entonces $f'(x) = nx^{n-1}$

II) Si $f(x) = [g(x)]^n$, entonces :

$$f'(x) = n[g(x)]^{n-1}.g'(x)$$

EJEMPLO 4 :

Hallar la derivada de cada una de las funciones siguientes :

I) $f(x) = (4x^2-3x+6)^5$

II) $f(x)=\left(\dfrac{3x+1}{x-2}\right)^3$

III) $f(x) = [(x^2+1)^6+4]^4$

IV) $f(x)=\dfrac{1}{(2x+3)^2}$

RESOLUCIÓN :

I) $f'(x) = 5(4x^2-3x+6)^4(8x-3)$

II) $f'(x)=3\left(\dfrac{3x+1}{x-2}\right)^2.\left(\dfrac{3x+1}{x-2}\right)'$

$$=3\left(\frac{3x+1}{x-2}\right)^2.\left\{\left(\frac{3(x-1)-(3x+1)}{(x-2)^2}\right)\right\}$$

$$\rightarrow f'(x)=\frac{3(3x+1)^2(-7)}{(x-2)^2}=\frac{-21(3x+1)^2}{(x-2)^2}$$

III) $f'(x) = 4[(x^2+1)^6+4]^3.\,6(x^2+1)^5.\,2x$

$$= 48x(x^2+1)^5[(x^2+1)^6+4]^3$$

IV) $f'(x)= (2x+3)^{-2} \rightarrow f'(x) = -2(2x+3)^{-3}(2)$

$$\rightarrow f'(x)=-\frac{4}{(2x-3)^3}$$

NOTACIÓN DE LEIBNIZ PARA LA RECLA DE LA CADENA

Sea $y = g(u(x))$. Queremos expresar , ahora , el teorema anterior de manera más simple .

* Para esto hacemos $v = u(x)$ [v depende de x, entonces $\dfrac{dv}{dx}=\mu'(x)$]

* Nos queda : $y = g(v)$ [y depende de v , entonces :

$$\frac{dy}{dv}=g(v)]$$

* Reemplazando en el teorema anterior :

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\big[g(u(x))\big]=g(u(x)).\mu'(x)$$

* Nos queda : $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{dv}.\dfrac{dv}{dx}$

EJEMPLO 1 :

Halle la derivada de la función :

$$f(x) = (3x^2+x-5)^4$$

RESOLUCIÓN :

* Sea $y = f(x)$, luego podemos escribir :

$$y = \mu^4 \text{ donde } \mu = 3x^2+x-5$$

$\dfrac{dy}{d\mu}=4\mu^3$ y $\dfrac{d\mu}{dx}=6x+1$, como $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{d\mu}.\dfrac{d\mu}{dx}$

* Entonces : $\dfrac{dy}{dx}=4\mu^3.(6x+1)$

$$= 4(3x^2+x-5)^3.(6x+1)$$

EJEMPLO 2 :

Calcular : $\dfrac{d}{d_x}\sqrt[3]{x^4-3x^3+2}$

RESOLUCIÓN :

*Sea $y=\sqrt[3]{x^4-3x^3+2}=(x^4-3x^3+2)^{1/3}$, debemos calcular $\dfrac{dy}{dx}$

* Efectuando el cambio de variable :

$u = x^4-3x^3+2$ .... (u depende de x)

* Nos queda $y=\sqrt[3]{u}=u^{1/3}$ (y depende de u)

* Utilizando la notación de Leibnitz :

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}.\frac{du}{dx}\text{..........................}(I)$$

* Pero : $\dfrac{dy}{du}=\dfrac{d}{du}u^{1/3}=\dfrac{1}{3}u^{-2/3}$

$$\frac{du}{dx}=\frac{d}{dx}(x^4-3x^3+2)=4x^3-9x^2$$

SIGLO21X

* Reemplazando en *(I)* :

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{3}u^{-2/3}.(4x^3-9x^2)$$

$$=\frac{1}{3}(x^4-3x^3+2)^{-2/3}.(4x^3-9x^2)$$

* Es decir : $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{(x^4-3x^3+2)^2}}.(4x^3-9x^2)$

$$=\frac{4x^3-9x^2}{3\sqrt{(x^4-3x^3+2)^2}}$$

EJEMPLO 3 :

Hallar : $\dfrac{d}{dx}(3x^2+2x-1)^{20}$

RESOLUCIÓN :

* Sea $y=(3x^2+2x-1)^{20}$, debemos calcular $\dfrac{dy}{dx}$
* Haciendo el cambio de variable : $u=3x^2+2x-1$ (u depende de x)
* Nos queda : $y=u^{20}$ (y depende de u)
* Utilizando la notación de Leibnitz :

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}.\frac{du}{dx}=(20u^{19})(6x+2)$$

$$=20(3x^2+2x-1)^{19}(6x+2)$$

TEOREMA :

Si f es una función continua e inyectiva , definida en un intervalo , entonces su función inversa f^* también es continua .

TEOREMA :

Si f es una función inyectiva diferenciable, entonces su función inversa f^* es diferenciable :

$$(f^*)'(y)=\frac{1}{f'(f^*(y))}$$

OBSERVACIÓN :

Si asumimos que f^* es diferenciable , la fórmula obtenida en el teorema anterior se puede deducir a partir del hecho que :

$$f(f^*(y))=(f\,o\,f^*(y))=y:\ \forall y\in R_f$$

En efecto , si derivamos ambos lados , obtenemos que:

$f'(f^*(y)).(f^*)'(y)=1$ y entonces

$$(f^*)'(y)=\frac{1}{f'(f^*(y))},\ \forall\ y\in R_f \text{ con } f'(f^*(y))\neq 0$$

EJEMPLOS :

1) Si $y=\sqrt[3]{x}=x^{1/3}$, entonces $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{3}x^{\frac{-2}{3}}$

2) Si $y=\sqrt[n]{g(x)}$ y g es diferenciable entonces de $y=\mu^{1/n}$ donde $\mu=g(x)$ se sigue que :

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dx}{d\mu}.\frac{d\mu}{dx}=\frac{1}{n}\mu^{1/n-1}.g'(x)=\frac{1}{n}[g(x)]^{\frac{1}{n}-1}.g'(x)$$

* Es decir :

$$\{\sqrt[n]{g(x)}\}=\frac{d}{dx}[g(x)]^{1/n}=\frac{1}{n}[g(x)]^{\frac{1}{n}-1}.g'(x)$$

3) $\dfrac{d}{dx}\{\sqrt[3]{x^2+1}\}=\dfrac{d}{dx}(x^2+1)^{1/3}=\dfrac{1}{3}(x^2+1)^{-2/3}.2x$

4) $\dfrac{d}{dx}\left\{\dfrac{1}{\sqrt[4]{x^2+1}}\right\}=\dfrac{d}{dx}\{(x^2+1)^{-1/4}\}=-\dfrac{1}{4}(x^2+1)^{-5/4}.2x$

EJERCICIO :

Halle la derivada de la función $y=[g(x)]^{m/n}$ asumiendo que g es diferenciable .

RESOLUCIÓN :

* Es claro que $y=\mu^{m/n}$ donde $\mu=g(x)$, luego :

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{d\mu}.\frac{d\mu}{dx}=\frac{m}{n}\mu^{\frac{m}{n}-1}.g'(x)=\frac{m}{n}[g(x)]^{\frac{m}{n}-1}.g'(x)$$

* Es decir : $\dfrac{d}{dx}\{[g(x)^{m/n}]\}=\dfrac{m}{n}[g(x)]^{\frac{m}{n}-1}.g'(x)$

DERIVADAS DE FUNCIONES TRASCENDENTES

De acuerdo a lo estudiado anteriormente tenemos que las funciones logarítmicas y exponenciales son continuas en todo su dominio de definición . Se demuestra que dichas funciones son también diferenciables . Tenemos las siguientes reglas de derivación .

I) Si: $f(x)=e^x$, entonces : $f'(x)=e^x$

II) Si: $f(x)=e^{g(x)}$, entonces : $f'(x)=g'(x)e^{g(x)}$

III) Si : $f(x)=Lnx$, entonces : $f'(x)=\dfrac{1}{x}$

IV) Si : $f(x)=Ln[g(x)]$, entonces: $f'(x)=\dfrac{g'(x)}{g(x)}$

V) Si : $f(x)=Log_bx$, entonces : $f'(x)=\dfrac{1}{x}Log_be$

VI) Si : $f(x)=b^x$, entonces : $f'(x)=(Ln\,b).b^x$

EJEMPLO 1 :

Derivar : $f(x)=e^{x^3+2x}$

RESOLUCIÓN :

$$f(x)=e^{x^3+2x}.\frac{d}{dx}\left[x^3+2x\right]=\left(3x^2+2\right)e^{x^3+2x}$$

EJEMPLO 2 :

Calcular la derivada de : $y = Ln\, x^3$.

RESOLUCIÓN :

$y=Lnx^3$, luego $y'=\frac{1}{x^3}3x^2=\frac{3}{x}$

EJEMPLO 3 :

Calcular la derivada de $y=\sqrt{e^x+1}$

RESOLUCIÓN :

* Hacemos $y=\left[e^x+1\right]^{1/2}$
* Se aplica la fórmula de la derivara de una raíz .

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}(e^x+1)^{1/2-1}\frac{d}{dx}(e^x+1)=\frac{1}{2}(e^x+1)^{-1/2}e^x=\frac{e^x}{2\sqrt{e^x+1}}$$

EJEMPLO 4 :

Calcular la derivada de $y = cos(Ln\, x^2)$

RESOLUCIÓN :

* La función $y= cos(Lnx^2)$; es de la forma $y=cos\, u$ donde u es una función de la forma $u = Ln\, v$ donde v es una función de x .
* Si $y = cos(Lnx^2) \Rightarrow y' = \frac{-2x}{x^2}sen(Lnx^2)$

$$\Rightarrow y' = \frac{-2}{x}sen(Lnx^2)$$

EJEMPLO 5 :

Calcular $f'(x)$, si : $f(x) = Ln(senx)$

RESOLUCIÓN :

$$\frac{d}{dx}[Ln(senx)]=\frac{1}{senx}.\frac{d}{dx}(senx)=\frac{1}{senx}.cosx=ctg\, x$$

DERIVADAS DE ORDEN SUPERIOR

Si la derivada de la función f definida por $f(x)=x^5$ es una nueva función f', definida a su vez por $f'(x)=5x^4$; es fácil concluir que si podemos derivar la función f', obtenemos una nueva función f'', definida por $f''(x) = 5(x^4)' = 5\times 4x^3 = 20x^3$, a la que llamamos segunda derivada de f , mientras que a la anterior, primera derivada de f . Sabemos que la derivada f' es diferenciable, obtenemos otra función $(f')'$. Continuamos con este proceso, construimos lo que llamaremos derivadas de orden superior :

Si continuamos derivando, obtenemos las funciones $f'''(x) = f^{(3)}(x)$; $f^{IV}(x) = f^{(4)}(x)$, etc . Cualquiera de las siguientes notaciones se usan para las derivadas de $y = f(x)$.

PRIMERA DERIVADA :

$$\frac{dy}{dx};\ y';\ \frac{df}{dx},\ f';\ Df$$

SEGUNDA DERIVADA :

$$\frac{d^2y}{dx^2};\ y'';\ \frac{d^2f}{dx^2};\ f'';\ D^2f$$

DERIVADA DE ORDEN n :

$$\boxed{\frac{d^ny}{dx^n};\ y^{(n)};\ \frac{d^nf}{dx^n};\ f^{(n)};\ D^nf}$$

Ten presente (por definición) ¿qué representa $\frac{d^2y}{dx^2}$?

Sabemos que representa la segunda derivada, es decir, es la ***"derivada de la primera derivada"***; así : $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$, donde el símbolo $\frac{d}{dx}$ indica la operación *derivar* .

EJEMPLO 1 :

Función (y)	Primera derivada (y')	Segunda derivada (y'')	Tercera derivada (y''')	Cuarta derivada (y'''')
$2x^3 - 4x^2 - \frac{x}{3}+\sqrt{2}$	$6x^2 - 8x - \frac{1}{3}$	$12x - 8$	12	0

Función	Primera derivada	Segunda derivada	Tercera derivada	Cuarta derivada	Quinta derivada
cosx	–senx	–cosx	senx	cosx	–senx

EJEMPLO 2 :

Sea $y = x^5$, hallar : y'''

RESOLUCIÓN :

* Tenemos :

$$y = x^5 \Rightarrow y' = 5x^4 \Rightarrow y'' = (5x^4)'= 5(x^4)'$$
$$= 5(4x^3) = 20x^3$$

* Ahora : $y''' =(20x^3)' = 20\, (x^3)' = 20\, (3x^2) = 60x^2$

EJEMPLO 3 :

Sea $y = senx$, hallar : $y^{(5)}$

RESOLUCIÓN :

* Tenemos :

$$y= senx \Rightarrow y' = cosx \Rightarrow y'' = (cosx)'= - senx$$
$$\Rightarrow y''' = (-senx)' = -(senx)' = - cosx$$
$$\rightarrow y^4 = (- cosx)' = (-cosx)'= - (- senx)= senx$$

$\Rightarrow y^{(5)} = (senx)' = cosx$

DERIVACIÓN IMPLÍCITA

En las funciones que hemos estudiado hasta ahora , la variable dependiente se expresa en términos de la independiente , $y = f(x)$.

Los problemas prácticos conducen a ecuaciones en las cuales "y" no está explícitamente despejada , no se expresa a "y" en función de "x".

Por ejemplo , la ecuación de la circunferencia con centro en $P = (0 ; 0)$ y radio **6** , está dada por : $y^2 + x^2 = 36$.

Como en esta ecuación , no se ha expresado a "y" en función de "x" ; $y = f(x)$, se dice que la variable dependiente "y" está implícita como función de "x".

EJEMPLO :

Dada la ecuación de la circunferencia :

$y^2 + x^2 = 4$, encontrar la expresión para calcular la tangente en cualquier punto .

RESOLUCIÓN :

* Un procedimiento que se puede aplicar consiste en despejar a la variable "y" para expresarla en función de "x" . En este caso se obtendría la ecuación :

$$y = \pm\sqrt{4 - x^2}$$

* De los dos valores de la raíz se escogería uno de ellos para trabajar con la semicircunferencia. Luego se procede a derivar respecto a x .

* Otro procedimiento , más práctico , consiste en calcular la derivada implícitamente . Para la ecuación $y^2 + x^2 = 4$, se derivan ambos miembros de la igualdad respecto a la variable independiente

$x : \dfrac{d}{dx}\left(y^2 + x^2\right) = \dfrac{d}{dx}(4)$

*Se aplica , derivada de una suma de funciones :

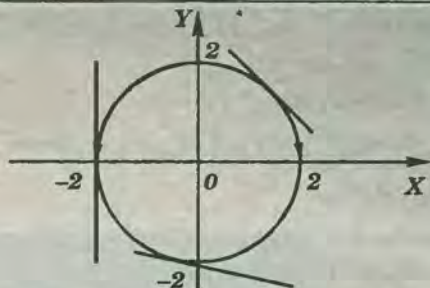
$$\frac{d}{dx}\left(y^2\right) + \frac{d}{dx}(x^2) = \frac{d}{dx}(4)$$

* Para derivar el primer término del lado izquierdo de la igualdad se aplica la regla de la cadena ; y en el segundo término , la derivada de la función cuadrática .

* La derivada respecto a x del miembro de la derecha es cero , porque 4 es una constante . $2yy' + 2x = 0$

* En la ecuación se cancela el **2** y se despeja y'.

* Geométricamente , la ecuación $y^2 + x^2 = 4$ corresponde a una circunferencia de centro en el punto $(0 ; 0)$ y de radio igual a 2 , ilustrada en la figura .



* En algunos puntos de la circunferencia , se han dibujado las rectas tangentes . Estas rectas tangentes tiene diferentes pendientes de acuerdo a la ecuación :

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

* La pendiente de la recta tangente varía de acuerdo con la expresión : $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x}{y}$

DEFINICIÓN :

Una ecuación $Q(x,y) = 0$, define implícitamente una función $y = f(x)$ si , sólo si al sustituir «y» por $f(x)$ en la ecuación , se llega a una identidad . Por suerte, no es necesario despejar "y" de una ecuación en función de x para hallar su derivada ; en su lugar se puede emplear el método de derivación implícita.

Dicho método consiste en derivar ambos lados de la ecuación con respecto a x para después despejar y' de la ecuación resultante. En los ejemplos de esta sección y de los ejercicios correspondientes, se supone que la ecuación dada determina a "y" en forma implícita como función diferenciable de "x", de modo que se pueda aplicar el método .

EJEMPLO 1 :

Si $x^2y + 2y^3 = 3x + 2y$, hallar $\dfrac{dy}{dx}$

RESOLUCIÓN :

* Pensamos en "y" como una función de "x" , y derivamos ambos miembros de la ecuación respecto x :

* Obtenemos : $\dfrac{dy}{dx}\left(x^2 + 6y^2 - 2\right) = 3 - 2xy$

* Se factoriza $\dfrac{dy}{dx}$ y luego se despeja $\dfrac{dy}{dx}$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3 - 2xy}{x^2 + 6y^2 - 2}$$

EJEMPLO 2 :

I) Si : $x^2 + y^2 = 25$, hallar y' y $\dfrac{dy}{dx}$

II) Determinar la ecuación de la tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$ en el punto $(3 ; 4)$

RESOLUCIÓN :

I) En la ecuación $x^2 + y^2 = 25$ derivamos con respecto a x, así :

$$2x + 2y\ y' = 0 \ \rightarrow \ y' = -\frac{x}{y}$$

II) Para el punto $P(3\ ;\ 4)$; la pendiente m de la recta tangente es : y' en $(3\ ;\ 4)$ igual a $-\frac{3}{4}$.

Luego , la ecuación de la recta tangente es :

$$y - 4 = -\frac{3}{4}(x - 3)$$

EJEMPLO 3 :

Calcular la derivada implícita $\frac{dy}{dx}$ en la ecuación :

$$\frac{x^2}{4} + y^2 - 2y = 0$$

RESOLUCIÓN :

* Dado que "y" depende del valor de "x", entonces se derivan ambos miembros de la igualdad , respecto de la variable x :

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{4} + y^2 - 2y\right) = \frac{d}{dx}(0)$$

* Se aplica la regla para derivar la suma de funciones :

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{4}\right) + \frac{d}{dx}\left(y^2\right) - (2y) = \frac{d}{dx}(0)$$

* Para derivar el primer término del lado izquierdo de la igualdad , se aplica la derivada de una potencia y para el segundo y tercer término , la regla de la cadena :

$$\frac{2x}{4} + 2y\frac{dy}{dx} - 2\frac{dy}{dx} = 0$$

* Se factoriza la derivada de "y" respecto a "x".

$$\frac{x}{2} + 2\frac{dy}{dx} - (y - 1) = 0$$

* Se despeja $\frac{dy}{dx}$: $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{4(1-y)}$

DERIVADAS PARAMÉTRICAS

Sean f y g , 2 funciones derivables en I. La derivada de C definida por :

$$C : \begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases} ; t \in I$$

* en el punto $P = \left(x_{(t_0)}\ ;\ y_{(t_0)}\right)$

* se define como : $\boxed{D_x y = \frac{D_t y}{D_t x}}$

EJEMPLO :

Sea :

$$C : \begin{cases} x = sent \\ y = senkt \end{cases} ;\ k : es\ cte$$

Calcule $D_x y$

RESOLUCIÓN :

$$D_t y = (coskt) \cdot k \ \wedge \ D_t x = cost$$

$$\Rightarrow D_x y = k.\frac{coskt}{cos\,t}$$

DERIVADAS PARCIALES

Sea f una función en dos o más variables . Tenemos una función de tres variables :

$$w = f(x\ ;y\ ;z)$$

Se tiene :

$\frac{\partial f}{\partial x}$ derivada parcial de f respecto a x .

$\frac{\partial f}{\partial y}$ derivada parcial de f respecto a y .

$\frac{\partial f}{\partial z}$ derivada parcial de f respecto a z .

Para obtener las derivadas parciales de una función respecto a una variable en referencia ; las demás variables se asumen como si fueran constantes . Las derivadas parciales tiene aplicación en matemáticas superiores como , por ejemplo , en la resolución de ecuaciones diferenciales .

EJEMPLO :

Obtener las derivadas parciales de la función :

$$f(x; y; z) = 3x^2yz^7 - \frac{1}{7}y^3z$$

RESOLUCIÓN :

$\frac{\partial f}{\partial x} = 6xyz^7 - \frac{1}{7}y^3z$ .... (*Las variables "y" y "z" se comportan como constantes*)

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2z^7 - \frac{3}{7}xy^2z$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 21x^2yz^6 - \frac{1}{7}xy^3$$

APLICACIÓN DE LA DERIVADA

I)REGLA DEL HOSPITAL - BERNOULLI

Sea $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ en donde la expresión $\frac{f(x)}{g(x)}$ toma la

forma $\frac{0}{0}$ ó $\frac{\infty}{\infty}$ para $x = a$ y además $f(x)$ y $g(x)$ son expresiones derivables en "a".

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f''(x)}{g''(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'''(x)}{g'''(x)} = \ldots$$

Se deriva separadamente las funciones $f(x)$ y $g(x)$; hasta que el límite de la fracción sea determinada .

EJEMPLO :

Calcule : $\lim_{x\to 0}\frac{sen\,5x}{2x}$

RESOLUCIÓN :

* Al evaluar para $x = 0$, resulta tenemos la indeterminación $\frac{0}{0}$.

* Aplicando la regla de L ' Hospital :

$$\lim_{x\to 0}\frac{sen\,5x}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{(sen\,5x)'}{(2x)'}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{5\cos 5x}{2} = \frac{5\cos 0}{2} = \frac{5}{2} \Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{sen\,5x}{2x} = \frac{5}{2}$$

OBSERVACIÓN :

Además las formas :

$$0\cdot\infty \,;\, \infty-\infty \,;\, 0^0 \,;\, \infty^0 \text{ ó } 1^\infty$$

pueden ser transformadas a las formas $\frac{0}{0};\frac{\infty}{\infty}$

EJEMPLO :

Calcular : $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(sen\,x)^{\tan x}$

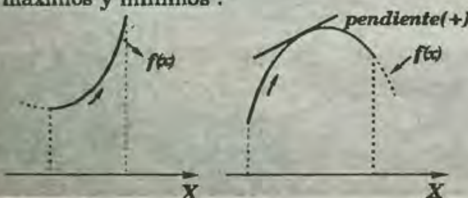
RESOLUCIÓN :

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(sen\,x)^{\tan x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} e^{Ln(sen\,x)^{\tan x}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} e^{\frac{[Ln(sen\,x)]'}{[\cot x]'}}$$

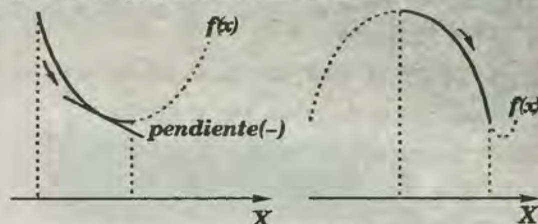
$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} e^{\frac{\frac{1}{sen\,x}\cos x}{-\csc^2 x}} = e^{\frac{(1)(0)}{(1)}} = e^0 = 1$$

ANÁLISIS, DE CRECIMIENTOS Y DECRECIMIENTOS

Este acápite está dirigido a reconocer cuándo y dónde una función es creciente o decreciente , siendo esto de vital importancia para efectuar el desarrollo de máximos y mínimos .



* Al trazar la gráfica , de izquierda a derecha , observar que la función f crece en un cierto intervalo (la flecha apunta hacia arriba) .



FUNCIONES MONÓTONAS

* Al trazar la gráfica , de izquierda a derecha , notamos que la función f decrece en un cierto intervalo (la flecha apunta hacia abajo) .

Observa que la recta tangente a la curva, en cualquier punto donde f crece , tiene *pendiente positiva*; mientras que en donde decrece tiene *pendiente negativa* . Luego decimos :

FUNCIONES MONÓTONAS :

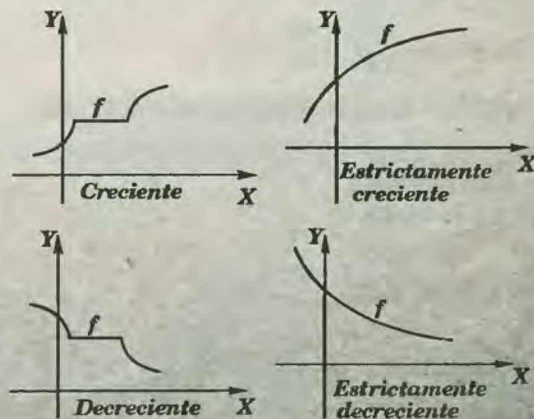
Sea $f: D_f \to \mathbb{R}$ una función . Se dice que f es :

I) CRECIENTE : si $a, b \in D_f$ y $a < b$, entonces : $f(a) \leq f(b)$

II) ESTRICTAMENTE CRECIENTE :
Si $a, b \in D_f$ y $a < b$, entonces: $f(a) < f(b)$

III) DECRECIENTE :
Si $a, b \in D_f$ y $a < b$, entonces : $f(a) \geq f(b)$

IV) ESTRICTAMENTE DECRECIENTE :
Si $a, b \in D_f$ y $a < b$, entonces : $f(a) > f(b)$

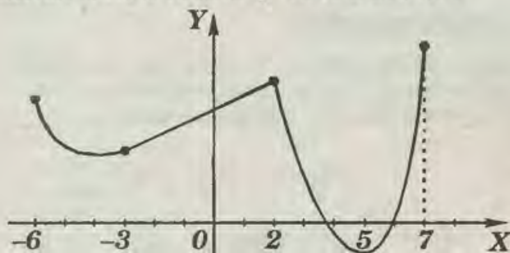


Cuando se dice que una función es monótona se entiende que se trata de una función que es creciente o bien decreciente . Las funciones estrictamente crecientes y las funciones estrictamente decrecientes reciben el nombre genérico de ***"estrictamente monótonas".***

* Más adelante veremos un teorema que permite determinar los intervalos en los que una función es estrictamente creciente y decreciente .

EJEMPLO :

Dado el siguiente gráfico , determinar en qué intervalo crece la función y en cuál decrece :



RESOLUCIÓN:

* En el gráfico observamos que :

$y = f(x)$ *decrece si :* $-6 < x < -3$

$y = f(x)$ *crece si :* $-3 < x < 2$

$y = f(x)$ *decrece si :* $2 < x < 5$

$y = f(x)$ *decrece si :* $5 < x < 7$

DEFINICIÓN :

Sea f una función diferenciable en $]a\ ;b[$

I) Si $f'(x) > 0\ ;\ \forall x \in]a\ ;b[$, entonces f es creciente en $]a\ ;b[$

II) Si $f'(x)<0\ ;\ \forall x \in]a\ ;\ b[$, entonces f es decreciente en $]a\ ;b[$

EJEMPLO 1 :

Sea f la función definida por $f(x) = x^2$. Hallar los intervalos en donde f es creciente o decreciente.

RESOLUCIÓN :

Para responder la pregunta , basta con encontrar la derivada : $f'(x) = 2x$.

Aplicando la definición anterior , tenemos :

* $f'(x) > 0$ si $2x > 0$, de donde $x > 0$. Entonces f es creciente en $]0\ ;\infty[$.

* $f'(x) < 0$ si $2x < 0$, de donde $x < 0$. Entonces f es creciente en $]-\infty\ ;\ 0[$.

EJEMPLO 2 :

Sea f la función definida por :

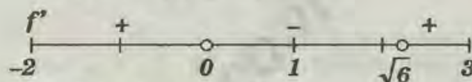
$$f(x) = x^4 - 12x^2 + 36\ ;\ x \in [-2;3]$$

Determinar los intervalos en los cuales f es creciente y en los cuales f es decreciente .

RESOLUCIÓN :

$$f'(x) = 4x^3 - 24x = 4x(x^2 - 6)$$

$$= 4x\left(x + \sqrt{6}\right)\left(x - \sqrt{6}\right)$$



$f'(x) > 0$ en $\langle -2\ ;0\rangle$

* entonces f es estrictamente creciente en $[-2\ ;\ 0]$

$f'(x) < 0$ en $\langle 0\ ;\sqrt{6}\rangle$

* entonces f es estrictamente decreciente en $\left[0;\sqrt{6}\right]$

$f'(x) > 0$ en $\left\langle \sqrt{6}\ ;3\right\rangle$

* entonces f es estrictamente creciente en $\left[\sqrt{6}\ ;3\right]$

EJEMPLO 3 :

Sea f la función definida por : $f(x) = 4x + \dfrac{1}{x}$. Hallar los intervalos en donde f es creciente o decreciente .

RESOLUCIÓN :

* Tenemos que $f'(x) = 4 - \dfrac{1}{x^2}$. Ahora :

* $f'(x)>0$, si $4 - \dfrac{1}{x^2} > 0$, de donde $\dfrac{1}{x^2} < 4$.

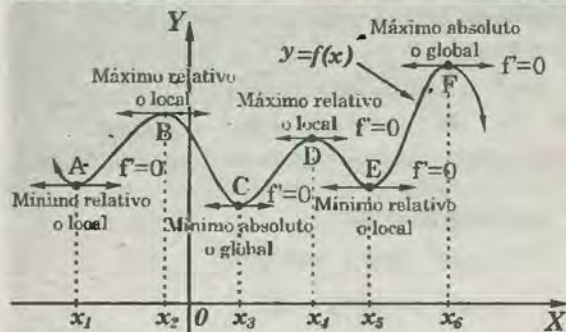
* Resolviendo : $x \in \left]-\infty;-\dfrac{1}{2}\right[\cup \left]\dfrac{1}{2};\infty\right[$

* Luego f es creciente en : $\left]-\infty;-\dfrac{1}{2}\right[\cup \left]\dfrac{1}{2};\infty\right[$

* Por lo tanto decreciente en : $\left]-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right[- \{0\}$

MÁXIMOS Y MÍNIMOS RELATIVOS DE UNA FUNCIÓN

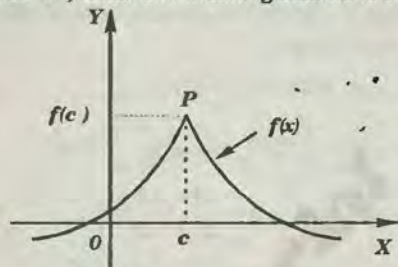
Gran parte de las aplicaciones de las derivadas a los fenómenos naturales y tecnológicos radica en el cálculo de los puntos donde una función tiene un mínimo o un máximo relativo , lo cual es de gran utilidad , como por ejemplo para saber cuándo el costo de una mercancía es mínimo y cuál es dicho mínimo .



* Las pendientes de las rectas tangentes a la gráfica de f en los puntos A, B, C, D, E y F es cero, es decir, las derivadas en dichos puntos es cero.

* Obsérvese también que la función f puede tener varios máximos o mínimos relativos (o locales), pero un solo máximo o mínimo absoluto (o global). Pero, sea máximo relativo o absoluto o mínimo relativo o absoluto, las derivadas en dichos puntos son iguales a cero.

* Sin embargo (aunque no es muy usual), si tenemos una función f cuya gráfica como la siguiente, se observa que, en el punto P, f' no está definida, pero en P, se da un máximo global de la función f.

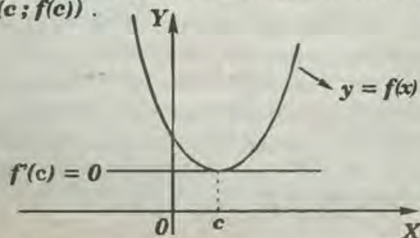


PUNTO CRÍTICO

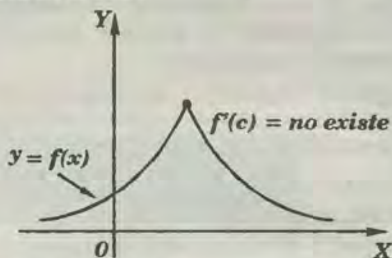
El valor $x = c \in D_f$, es un punto crítico de la función $y = f(x)$ si:

$f'(c) = 0$ ó $f'(c)$ no existe

* En el primer caso, en el que $f'(c) = 0$, la recta tangente al gráfico $y = f(x)$ es horizontal en el punto $P_0 = (c\,;f(c))$.

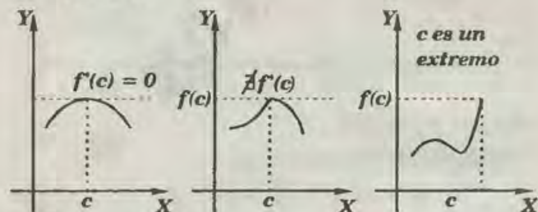


*En el segundo caso, en el que $f'(c)$ no existe, el gráfico de $y = f(x)$ presenta un pico o un punto anguloso en $x = c$.



OBSERVACIÓN :

Los puntos de extremo local de una función sólo pueden ocurrir donde la tangente es horizontal o no hay recta tangente o en los extremos del dominio de la función.



EJEMPLO 1 :

Determinar los puntos críticos de la función :

$$f(x) = x^2 - 6x + 7$$

RESOLUCIÓN :

* Derivando la función resulta :

$$f'(x) = 2x - 6$$

Como $f'(x)$ existe para todo x, entonces los únicos puntos críticos de $f(x)$ son aquellos en que $f'(x)$ se hace cero.

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 2x - 6 = 0 \Rightarrow x = 3$$

EJEMPLO 2 :

Determinar los puntos críticos de la función :

$$f(x) = 2x^3 - 6x^2 - 18x + 1$$

RESOLUCIÓN :

* Hallamos la derivada de la función :

$$f'(x) = 6x^2 - 12x - 18$$

* Igualamos a cero dicha derivada :

$$f'(x) = 6x^2 - 12x - 18 = 0$$

$\rightarrow 6(x^2 - 2x - 3) = 0$

$\rightarrow 6(x - 3)(x + 1) = 0$

$\rightarrow x = 3\,;\, x = 1$ .... *(puntos críticos)*

OBSERVACIONES :

I) Una función puede carecer de puntos críticos.

EJEMPLO :

Sea : $f(x) = 3x + 5$

$\rightarrow f'(x) = 3 \rightarrow f'(x) = 3 = 0 \rightarrow x_0 \in \phi$

"En ningún lugar del dominio la pendiente de la función se hace cero"

II) Una función puede tener infinitos puntos críticos .

EJEMPLO :

Sea: $f(x) = sen\, x$

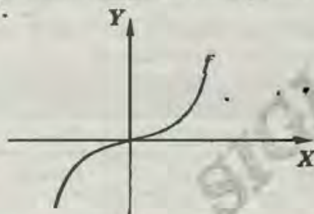
$\rightarrow f'(x) = cos\, x \rightarrow f'(x) = cos\, x = 0$

$\rightarrow x_0 = \frac{\pi}{2};\ x_0 = \frac{3\pi}{2};\ x_0 = \frac{5\pi}{2}...$

"En todos los puntos de absisa : $\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right), (k \in Z)$ la pendiente se hace cero"

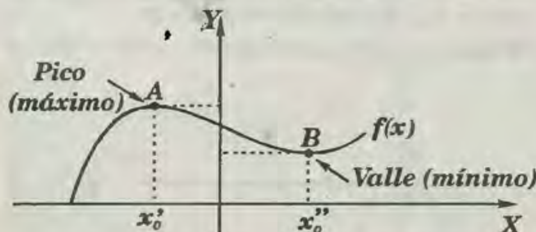
EJEMPLO 3 :

Consideremos la función $f(x) = x^3;\ x \in R$. La gráfica de f se muestra en la figura adjunta . Es claro que $f'(0) = 0$, de lo cual se sigue que 0 es un punto crítico de f . Sin embargo , 0 no es punto de extremo local de f .



COMENTARIO :

"El punto crítico puede ocurrir para un extremo relativo máximo o un extremo relativo mínimo"



* En A: ocurre un valor crítico x_0 que determina un extremo máximo relativo .

* En B : ocurre un valor crítico x_0 que determina un extremo mínimo relativo .

MÍNIMO Y MÁXIMO RELATIVO

El número $f(c)$ es un mínimo relativo de la función f , si existe un intervalo $]a ; b[$ que contiene a c, tal que $f(c) \leq f(x)$ para todo $x \in]a\ ;\ b[$.

Si $f(x) \leq f(c)$. $\forall x \in]a\ ;\ b[$, entonces $f(c)$ es un máximo relativo de la función en f .

Al menor de todos los mínimos relativos en $[a ; b]$ se le llama *MÍNIMO ABSOLUTO* y al mayor , *MÁXIMO ABSOLUTO* .

* Si f está difinida en un intervalo I , y si c es un número del dominio , tal que $f'(c) = 0$ ó $f'(c)$ no existe o c es uno de los extremos del intervalo I (si es que fuese cerrado) ; entonces decimos que c es un punto crítico de la función f .

* Del gráfico anterior, podemos deducir que para la existencia de un máximo o mínimo de una función , esta debe ser continua en un intervalo cerrado . Así tenemos el siguiente teorema :

TEOREMA DE LA EXISTENCIA

Sea f una función continua en un intervalo cerrado $[a ; b]$, entonces f tiene un máximo y un mínimo en dicho intervalo .

Ahora nos preguntamos : ¿cómo podemos calcular los mínimos y máximos relativos y/o absolutos de una función en un intervalo dado?

Para entender esto , basta con dar una chequeada a la gráfica anterior y podemos concluir : ***"Para encontrar máximos y/o mínimos relativos de una función continua f , es un punto crítico x = c , basta con que la función sea creciente por un lado de "c" y decreciente por el otro (o viceversa)".*** Esto trae consigo el siguiente teorema.

CRITERIO DE LA PRIMERA DERIVADA

Siendo f continua en $[a ; b]$, calcular los puntos críticos $c \in]a ; b[$, donde $f'(c) = 0$ ó $f'(c)$ no existe.

A continuación :

I) Representa en la recta numérica estos puntos , junto con los extremos "a" y "b" del intervalo cerrado construyendo de esta manera un cierto número de intervalos .

II) Determina el signo de $f'(x)$ en cada uno de los intervalos construidos .

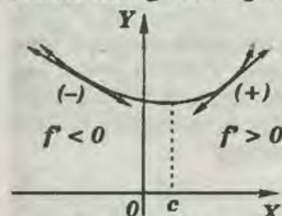
III) Si al ir de izquierda a derecha de $x = c$.

i) $f'(x)$ pasa de $+$ a $-$, entonces $f(x)$ tiene un máximo en $x = c$, el cual es $f(c)$.

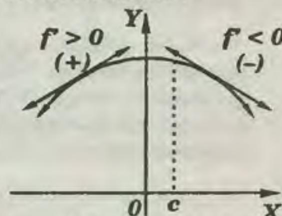
ii) $f'(x)$ pasa de $-$ a $+$, entones $f(x)$ tiene un mínimo en $x = c$, el cual es $f(c)$.

iii) $f'(x)$ no cambia de signo , entonces $f(x)$ no tiene máximo ni mínimo en $x = c$.

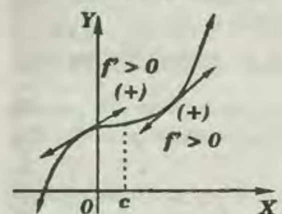
* Para un mejor entendimiento del teorema anterior, veamos los siguientes gráficos de funciones .



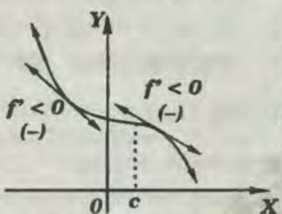
Mínimo relativo



Máximo relativo



Máximo ni mínimo relativo



Ni máximo ni mínimo relativo

EJEMPLO 1 :

Determinar todos los extremos locales y puntos de extremos local de la función :

$$f(x) = x^4 - 12x^2 + 36 \; ; \; x \in [-2;3]$$

RESOLUCIÓN :

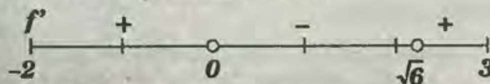
$$f'(x) = 4x^3 - 24x = 4x\left(x^2 - 6\right)$$
$$= 4x\left(x + \sqrt{6}\right)\left(x - \sqrt{6}\right)$$

* Puntos críticos :

$f'(x) = 0$; $x = 0$; $x = \sqrt{6}$

(como $f'(x)$ es un polinomio, entonces $f'(x)$ siempre existe)

* Extremos de D_f: $x = -2$, $x = 3$.



* Por el criterio de la primera derivada tenemos que :

-2 es un punto de mínimo local

$\Rightarrow f(-2) = 4$ es máximo local .

O es un punto de máximo local

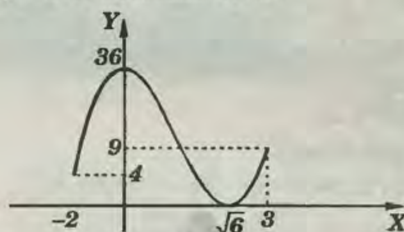
$\Rightarrow f(0) = 36$ es máximo local .

$\sqrt{6}$ es un punto de mínimo local

$\Rightarrow f(\sqrt{6}) = 0$ es un mínimo local .

3 es un punto de máximo local

$\Rightarrow f(3) = 9$ es un máximo local .



EJEMPLO 2 :

Hallar los extremos relativos de la función :
$y = f(x) = x^3 - 6x^2 + 2$ y esboza su gráfico .

RESOLUCIÓN :

* Hallamos los puntos críticos :

$f'(x) = 3x^2 - 12x$, $f'(x) = 0$ si $x = 0$ y $x = 4$

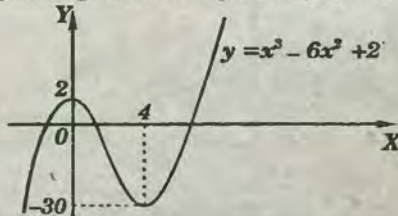
* Los puntos críticos de f son $x = 0$; $x = 4$

* Construimos la siguiente tabla para establecer el comportamiento de la función :

Función	x_0	*Signo de $f'(x)$ en x_0*	*Función $f(x)$*	Extremos
$x < 0$	-1	$f'(-1) = 15 > 0$	*Crece*	*Máximo relativo en $x = 0$*
$0 < x < 4$	2	$f'(2) = -12 < 0$	*Decrece*	
$x > 4$	5	$f'(5) = 15 > 0$	*Crece*	*Mínimo relativo en $x = 4$*

* La función tiene un valor mínimo local de $x = 4$ y ese valor es $f(4) = -30$, y tiene un valor máximo local de $x = 0$ y ese valor es $f(0) = 2$.

*El siguiente gráfico corresponde a $f(x) = x^3 - 6x^2 + 2$



EJEMPLO 3 :

Determinar los extremos relativos de la función
$f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 6$ y esboza su gráfico .

RESOLUCIÓN :

$f'(x) = 3x^2 - 12x + 12 = 3(x-2)^2$

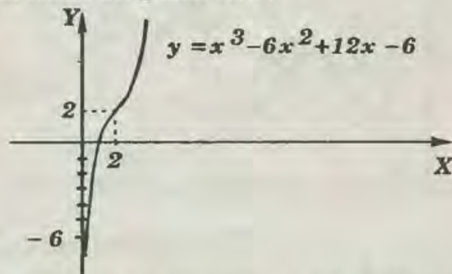
$\rightarrow f'(x) = 0$ sólo si $x = 2$

$x = 2$ es punto crítico de f.

* Nota que para cualquier valor de $x \neq 2$ se tiene: $f'(x) = 3(x-2)^2 > 0$

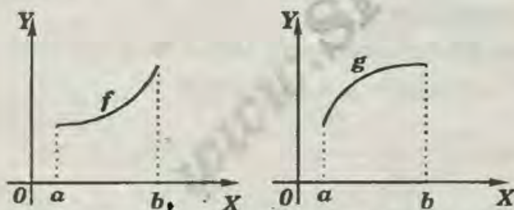
* Por consiguiente , $x = 2$ no corresponde a un extremo relativo de f.

* El esbozo del gráfico será :

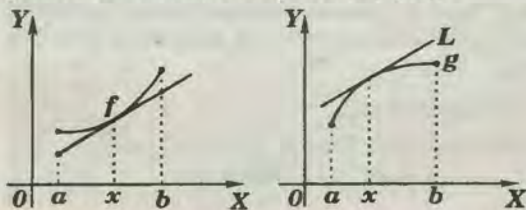


CONCAVIDAD DE UNA FUNCIÓN

Hemos visto que es útil conocer la primera derivada de una función para determinar los intervalos en los que ella es creciente o decreciente . Sin embargo, esta información no es suficiente para conocer bien el comportamiento de una función . Por ejemplo , suponga que $f : [a ; b] \rightarrow \mathbb{R}$ es una función creciente en $[a ; b]$. Las figuras adjuntas muestran las gráficas de funciones que satisfacen la condición anterior .

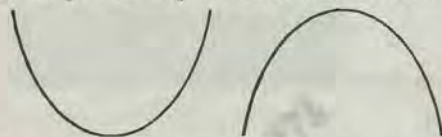


Es claro que ambas gráficas son distintas pues se doblan en diferentes sentidos. ¿Cómo distinguir entre estos dos tipos de comportamiento? Tomemos x en $\langle a;b\rangle$ cualquiera , y sea L la recta tangente a la gráfica de la función en el punto $(x ; f(x))$.



En el primer caso , L está debajo de la gráfica de la función , mientras que en el segundo L está arriba de la gráfica . Esta diferencia es la que genera el concepto de concavidad que definimos a continuación .

Una curva será "cóncava hacia arriba" en cualquier intervalo de crecimiento de la pendiente y "cóncava hacia abajo"en cualquier intervalo de decrecimiento.



Cóncava hacia arriba *Cóncava hacia abajo*

* Sea I un intervalo abierto. Se dice que f es cóncava hacia arriba en I, si y sólo si f es cóncava hacia arriba en cada x de I .

* Se dice que f es cóncava hacia abajo en I si y sólo si f es cóncava hacia abajo en cada x de I.

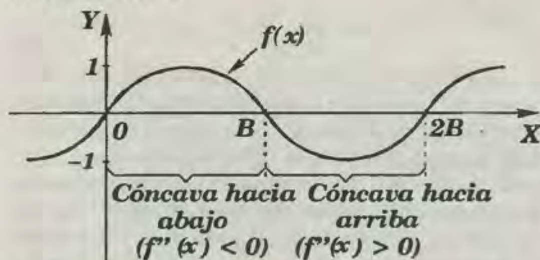
TEOREMA :

Sea f una función diferenciable en un intervalo $\langle a ; b\rangle$ que contiene a x_0 tal que $f''(x_0)$ existe :

I) Si $f''(x_0) > 0$, entonces f es cóncava hacia arriba en x_0.

II) Si $f''(x_0) < 0$, entonces f es cóncava hacia abajo en x_0.

EJEMPLO :



COROLARIO :

Sea f una función diferencial en un intervalo abierto I .

a) Si $f''(x) > 0, \forall x \in I$, entonces f es cóncava hacia arriba en I .

b) Si $f''(x) < 0$, $\forall x \in I$, entonces f es cóncava hacia abajo en I.

EJEMPLO :

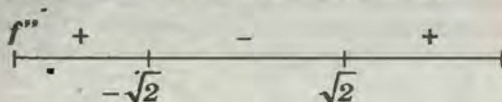
Determinar los intervalos donde la función $f(x) = x^4 - 12x^2 + 36$ es cóncava hacia arriba o abajo.

RESOLUCIÓN :

$f(x) = x^4 - 12x^2 + 36$

$\rightarrow \quad f'(x) = 4x^3 - 24x$

$\rightarrow f''(x) = 12x^2 - 24 = 12\left(x+\sqrt{2}\right)\left(x-\sqrt{2}\right)$



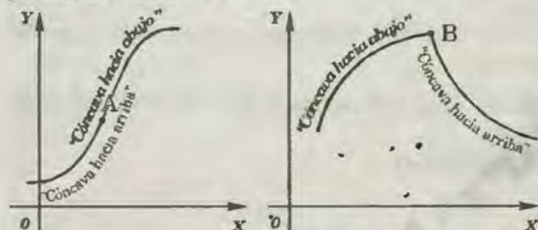
* f es cóncava hacia arriba en $\left(\infty; -\sqrt{2}\right)$ o en $\left(\sqrt{2}\,;\infty\right)$

* f es cóncava hacia abajo en $\left\langle -\sqrt{2}\,;\sqrt{2}\right\rangle$

* Véase que la concavidad cambia en los puntos $P\left(\sqrt{2}\,; f\left(\sqrt{2}\right)\right)$ y $Q\left(-\sqrt{2}\,; f\left(-\sqrt{2}\right)\right)$. Estos puntos son muy especiales en la gráfica de una función .

PUNTOS DE INFLEXIÓN

Aquellos puntos de la gráfica de una función , en los que la concavidad se invierte , son llamados puntos de inflexión .



A estos tipos de puntos *(A y B)* se les denomina puntos de inflexión . Como los puntos de inflexión ocurren donde la concavidad cambia de sentido , debe suceder que en ellos f'' cambia de signo . Así, para localizar posibles puntos de inflexión necesitamos sólo determinar los x en que $f''(x) = 0$ o en el que f'' no está definida . Esto es análogo al procedimiento de localización de extremos relativos de f .

OBSERVACIÓN

Si $(c\,; f(c))$ es un punto de inflexión de la gráfica de f, entonces es $f''(c) = 0$ o $f''(x)$ no está definida para $x = c$.

DEFINICIÓN :

Sea f una función y sea $c \in D_f$ si :

* f es continua en c .

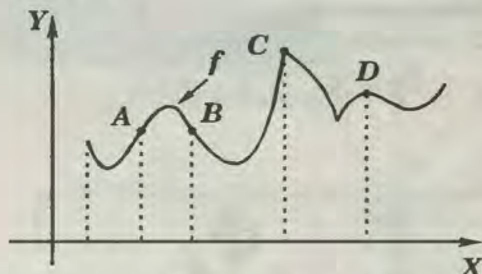
* La concavidad tiene diferente sentido a cada lado de c .

OBSERVACIÓN :

Si $f''(x)$ es una función continua , entonces ella cambia de signo al pasar por c si $f''(c) = 0$.

Si embargo , si $f''(x)$ es discontinua en c , entonces en dicho punto también podría haber un punto de inflexión .

EJEMPLO :



Los puntos *A , B , C* y *D* son puntos de inflexión de la gráfica de f .

PROCEDIMIENTO PARA HALLAR PUNTOS DE INFLEXIÓN :

I) Determinar los puntos donde $f''(x)$ es cero o no existe.

II) Para cada uno de estos puntos críticos c :

Si f es continua en c .

Si $f''(x)$ cambia de signo en c entonces $(c\;;\;f(c))$ es un punto de inflexión de la gráfica de f .

EJEMPLO 1 :

Para la función $f(x) = x^4 - 12x^2 + 36$, se tiene que :

$f''(x) = 0$ para $x = -\sqrt{2}\,;\; x = \sqrt{2}$.



* Es claro que en $-\sqrt{2}$ y en $\sqrt{2}$ cambia la concavidad de f . Por lo tanto , los puntos de inflexión de la gráfica de f son $P_1\left(-\sqrt{2}\,;16\right)$ y $P_2\left(\sqrt{2}\,;16\right)$.

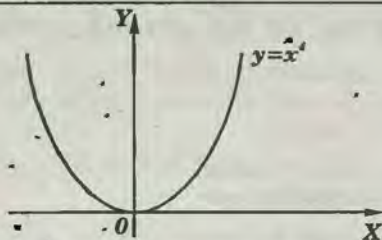
OBSERVACIÓN :

Si $f''(c) = 0$ entonces no necesariamente se cumple que $(c\,; f(c))$ sea un punto de inflexión de la gráfica de f.

EJEMPLO 1 :

Consideremos la función $f(x) = x^4$

$$f'(x) = 4x^3 \text{ y } f''(x) = 12x^2$$



*Es claro que $f''(0)=0$ y sin embargo la concavidad no cambia de un lado al otro en 0.

CRITERIO DE LA SEGUNDA DERIVADA

Otra aplicación de la segunda derivada es para determinar los valores máximos y mínimos locales de una función.

TEOREMA (CRITERIO DE LA SEGUNDA DERIVADA) :

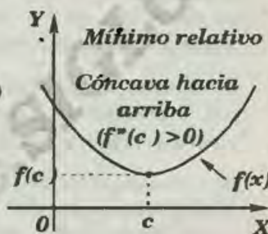
Sea c un punto crítico de f en el cual $f'(c)=0$

I) Si $f''(c)>0$, entonces c es un punto de mínimo local.

II) Si $f''(c)<0$, entonces c es un punto de máximo local.

III) Si: $f''(c)=0$, el criterio no brinda información.





OBSERVACIÓN :

El criterio de la segunda derivada sólo es aplicable para puntos críticos con tangente horizontal.

* Si $f'(c)$ no existe siendo f continua en c, entonces $f''(c)$ tampoco existe.

* Si $f(c)=0$ y $f''(c)=0$ no puede afirmarse nada acerca de c.

EJEMPLO 1 :

Encontrar los puntos críticos de la función $f(x)=\frac{x^2}{3}-\frac{x^2}{2}-6x+100$ y determinar máximos y mínimos.

RESOLUCIÓN :

* Se calcula la primera derivada :

$$f'(x)=x^2-x-6$$

* Se hace $f'(x)=0$

$$x^2-x-6=0$$

$$\rightarrow (x+2)(x-3)=0$$

*Los puntos críticos de esta función son: $x=-2$ y $x=3$

* Ahora determinamos los máximos y mínimos, calculando $f''(x)$ en los puntos críticos :

$$f''(x)=2x-1;\quad f''(-2)=2(-2)-1=-5<0$$

O sea que f es cóncava hacia abajo en $x=-2$, y éste es un máximo de la función.

$f''(3)=2(3)-1=5>0$, f es cóncava hacia arriba en $x=3$, por lo tanto es un máximo de la función.

EJEMPLO 2 :

Sea f la función dada por

$$f(x)=x^4-12x^2+36,\ x\in\mathbb{R}$$

$$f'(x)=4x^3-24x=4x(x^2-6)$$

$$=(x+\sqrt{6})(x-\sqrt{6})$$

$$\rightarrow f''(x)=12x^2-24$$

* Los puntos críticos f son $-\sqrt{6}$; $\sqrt{6}$ y 0, todos con recta tangente horizontal.

* Luego : $f''(-\sqrt{6})=48>0$

* entonces $f(-\sqrt{6})$ es un punto de mínimo local.

$$f''(0)=-24<0$$

* entonces $f(0)$ es un punto de máximo local.

$$f''(\sqrt{6})=48>0$$

* entonces $f(\sqrt{6})$ es un punto de mínimo local.

GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN

A partir de los conceptos y procedimientos que hoy hemos estudiado, tenemos a nuestra disposición, sólidas herramientas para hacer un análisis más completo de la gráfica de una función.

EJEMPLO :

Sea : $f(x)=\frac{x^3}{1-x^2}$

Determinar las asíntotas, puntos de inflexión, extremos relativos, intervalos de concavidad e intervalos donde la función es estrictamente creciente y decreciente, y su gráfica.

RESOLUCIÓN :

* $Domf=\mathbb{R}-\{1;-1\}$

*ASÍNTOTA VERTICAL: $x=\pm 1$ cuando $f(x)\rightarrow\pm\infty$

* *ASÍNTOTA HORIZONTAL*: No existe.
* *ASÍNTOTA OBLICUA:* $y=-x$, cuando $x\to\pm\infty$
* Cálculo de $f'(x)$ y $f''(x)$:

$$f'(x)=\frac{x^2(3-x^2)}{(1-x^2)^2}\ ;\ f''(x)=\frac{x(1-x^2)(6+2x^2)}{(1-x^2)^4}$$

* *EXTREMOS RELATIVOS :*

$f'(x)=0 \to x=0 \vee x=\pm\sqrt{3}$

$f'(-\sqrt{3})>0 \to$ *en* $x=-\sqrt{3}$, hay mínimo :

$f(-\sqrt{3})=\frac{3\sqrt{3}}{2}$

$f'(\sqrt{3})>0 \to$ *en* $x=\sqrt{3}$, hay mínimo :

$f(\sqrt{3})=\frac{3\sqrt{3}}{2}$

* *POSIBLES PUNTOS DE INFLEXIÓN :*

$f''(x)=0 \Rightarrow x=0,\ \pm1$

* *Crecimiento y Decrecimiento :* con $f'(x)$

Para $x<-\sqrt{3} \Rightarrow f'(x)<0$ ....*(DECRECE)*

Si $-\sqrt{3}<x<\sqrt{3} \Rightarrow f'(x)>0$ ....*(CRECE)*

Para $x>\sqrt{3} \Rightarrow f'(x)<0$ .... *(DECRECE)*

* *Concavidad* : con $f''(x)$

Si $x<-1 \Rightarrow f''(x)>0$ (Cóncava hacia arriba)

En $x=-1$ la función no está definida .

$-1<x<0 \Rightarrow f''(x)<0$ (Cóncava hacia abajo)

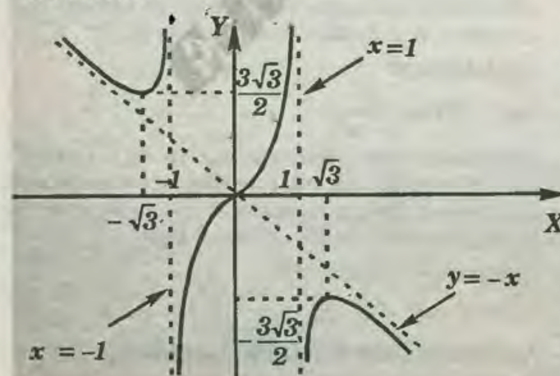
En $x=0$ hay *P.I.* $\wedge\ f(0)=0$.

$0<x<1 \Rightarrow f''(x)>0$ (Cóncava hacia arriba)

En $x=1$ la función no está definida.

Si $x>1 \Rightarrow f''(x)<0$ (Cóncava hacia abajo)

* *GRÁFICO :*



TÉCNICAS DE GRAFICACIÓN

Para un trazado de la gráfica de unja función, lo más preciso posible, se recomienda seguir los siguientes pasos:

1) Determinar el dominio de la función y posibles puntos de discontinuidad.

2) Determinar los puntos críticos de primera especie. Esto es, los puntos en que la primera derivada es cero o no existe.

3) Determinar el signo que tiene la primera derivada en cada uno de los intervalos en que los puntos críticos de primera especie dividen al dominio.

4) De acuerdo a lo hallado en el paso 3, determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.

5) A cada punto crítico de primera especie aplicar el criterio de la primera derivada o el criterio de la segunda derivada, para determinar si en tales puntos críticos existe o no existe un extremo relativo.

6) Hallar los puntos críticos de segunda especie. Esto es, los puntos en que la segunda derivada es cero o no existe.

7) Determinar el signo que tiene la segunda derivada en cada uno de los intervalos en que los puntos críticos de segunda especie dividen al dominio.

8) De acuerdo a lo hallado en el paso 7, determinar los intervalos en que la gráfica es cóncava hacia arriba y cóncava hacia abajo.

9) En cada punto crítico de segunda especie verificar si cambia o no cambia la dirección de la concavidad y así, determinar si existe o no existe un punto de inflexión en tales puntos.

10) Para mayor precisión hallar, en cada punto de inflexión, la pendiente de la recta tangente con la finalidad de dibujar la dirección de la curva en dicho punto. Puede omitirse este paso.

11) Hallar las asíntotas verticales, horizontales y oblicuas, si existen.

12) Hallar los puntos en que la gráfica intersecta al eje *Y* y, si es posible, al eje *X*.

13) Dibujar una curva que verifique los resultados obtenidos en los pasos anteriores.

Es recomendable expresar en tablas los resultados que se van obteniendo, tal como veremos en los

siguientes ejemplos.

EJEMPLO 1 :

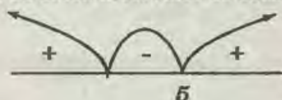
Sea la función $f(x)=\frac{1}{4}(x^3-9x^2+15x+5)$. Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento; los extremos relativos, si existe; los intervalos de concavidad; los puntos de inflexión, si existe. Luego, trace la gráfica de *f*.

RESOLUCIÓN:

El dominio de *f* es $\mathbb{R}$. Derivada se tiene:

$$f'(x)=\frac{1}{4}(3x^2-18x+15)=\frac{3}{4}(x-1)(x-5)$$

Puntos críticos son solo donde $f'(x)=0$. Osea, $x=1$ y $x=5$. Estos puntos dividen al dominio en los intervalos $\langle-\infty;1\rangle$, $\langle1;5\rangle$ y $\langle5;+\infty\rangle$. El signo de $f'(x)$ en cada uno de estos intervalos es como muestra la



Signos de $f'(x)$

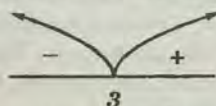
De esta figura se deduce que *f* es creciente en los intervalos $\langle-\infty;1\rangle$ y $\langle5;+\infty\rangle$; es decreciente en el intervalo $\langle1;5\rangle$. Por el criterio de la primera derivada encontramos que *f* tiene un valor máximo relativo en $x=1$ y un mínimo relativo en $x=5$. La Siguiente Tabla muestra los resultados obtenidos.

x	$f(x)$	$f'(x)$	Conclusión
$x<1$		+	*f es creciente*
$x=1$	3	0	*es máximo relativo*
$1<x<5$		–	*f es decreciente*
$x=5$	–5	0	*es mínimo relativo*
$x>5$		+	*f es creciente*

Derivando nuevamente, se tiene:

$$f''(x)=\frac{1}{4}(6x-18)=\frac{3}{2}(x-3)$$

de donde vemos que existe punto crítico de segunda especie solo si $f''(x)=0$. Es decir, cuando $x=3$. Este punto divide al dominio en los intervalos $\langle-\infty;3\rangle$ y $\langle3;+\infty\rangle$. El signo de $f''(x)$ en estos intervalos se muestran en la siguiente figura .

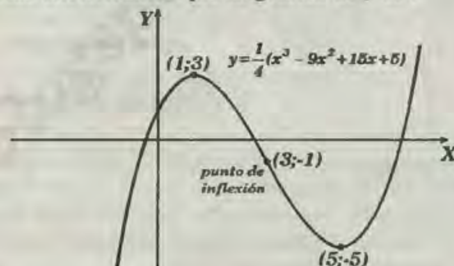


Signos de $f''(x)$

De esta figura y por el criterio de concavidad se deduce que la gráfica de *f* es cóncava hacia abajo en el intervalo $\langle-\infty;3\rangle$ y cóncava hacia arriba en el intervalo $\langle3;+\infty\rangle$. Así, existe punto de inflexión en $x=3$. La siguiente tabla muestra estos resultados.

x	$f(x)$	$f''(x)$	Conclusión
$x<3$		–	*gráfica cóncava hacia abajo*
$x=3$	–1	0	*es punto de inflexión*
$x>3$		+	*gráfica cóncava hacia arriba*

Otro dato adicional es que como *f* es una función polinomial, su gráfica no tiene asíntotas. Además, la gráfica cruza al eje *Y* en el $(0;5)$. Omitimos la intersección con el eje *X* pues encontraríamos que la ecuación $f(x)=0$ no son racionales. Con estos datos adicionales y la información que muestran las Tablas encontramos que la gráfica de *f* es :



EJEMPLO 2 :

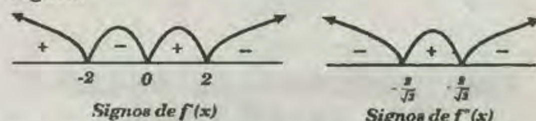
Trazar la gráfica de la función $f(x)=-x^4+8x^2-10$.

RESOLUCIÓN:

El dominio de *f* es $\mathbb{R}$. Derivando se obtiene:

$$f'(x)=-4x(x+2)(x-2)$$

de donde encontramos que los puntos críticos de primera especie son: -2 ; 0 y 2. Los signos de $f'(x)$, en cada una de las regiones en que estos puntos críticos dividen al dominio, son mostrados en la Figura.



De la Figura y por el criterio de la primera derivada se obtienen los datos que muestran la Tabla.

x	$f(x)$	$f'(x)$	Conclusión
$x<-2$		+	*creciente*
$x=-2$	6	0	*máximo relativo*
$-2<x<0$		–	*decreciente*
$x=0$	–10	0	*mínimo relativo*
$0<x<2$		+	*creciente*
$x=0$	6	0	*máximo relativo*
$x>2$		–	*decreciente*

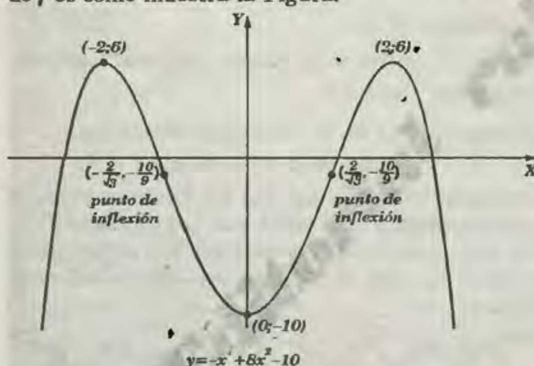
Derivando nuevamente, se tiene:

$$f''(x)=-12\left(x+\frac{2}{\sqrt{3}}\right)\left(x-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$$

de donde encontramos que los puntos críticos de segunda especie son: $-\frac{2}{\sqrt{3}}$ y $\frac{2}{\sqrt{3}}$ y los signos de $f''(x)$ son como muestran la Figura. De esta figura y por el criterio de concavidad se obtienen los datos que muestran la Tabla.

x	$f(x)$	$f''(x)$	Conclusión
$x<-\frac{2}{\sqrt{3}}$		$-$	*cóncava hacia abajo*
$x=-\frac{2}{\sqrt{3}}$	$-\frac{10}{9}$	0	*punto de inflexión*
$-\frac{2}{\sqrt{3}}<x<\frac{2}{\sqrt{3}}$		$+$	*cóncava hacia arriba*
$x=\frac{2}{\sqrt{3}}$	$-\frac{10}{9}$	0	*punto de inflexión*
$x>\frac{2}{\sqrt{3}}$		$-$	*cóncava hacia abajo*

Adicionalmente encontramos que la gráfica no tiene asíntotas. Dicha gráfica intersecta al eje *Y* en el punto *(0;–10)*. Omitimos las intersecciones con el eje X. De todo lo hallado encontramos que la gráfica de *f* es como muestra la Figura.



LOS TEOREMAS DE ROLLE Y DEL VALOR MEDIO

En muchas ocasiones , es importante determinar la ubicación precisa de los puntos de máximo y de mínimo local . Ya sabemos que estos puntos están entre los puntos críticos de la función , pero nos falta saber los siguientes :

* Dado un punto crítico ¿Es o no punto de extremo local?

* Si un punto crítico es un punto de extremo local ¿es de máximo o de mínimo local?

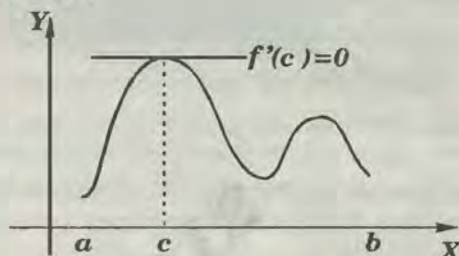
TEOREMA DE ROLLE

Si $f:[a;b]\to\mathbb{R}$ es una función tal que:

* ***Es continua en*** $[a;b]$

* ***Es diferenciable en*** $\langle a;b\rangle$

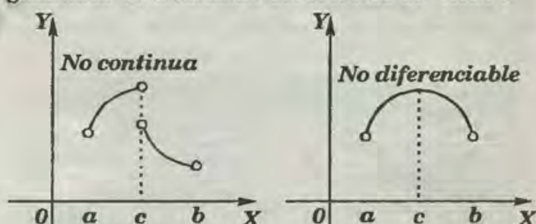
* $f(a)=f(b)$



entonces existe al menos un número c en $\langle a;b\rangle$ tal que $f'(c)=0$

NOTA :

Las condiciones de la continuidad de *f* en y de *[a; b]* su diferenciabilidad en $\langle a;b\rangle$ son indispensables, pues si no se cumpliera alguna de ellas no se podría garantizar la conclusión del teorema de Rolle .



* El teorema de Rolle se puede interpretar geometricamente de la manera siguiente :

Bajo las condiciones del teorema de Rolle , existe un punto *(c ; f(c))* de la gráfica de $f(a<c<b)$ tal que la recta tangente en ese punto es horizontal.

* El teorema de Rolle garantiza la existencia de por lo menos un c en $\langle a;b\rangle$ tal que $f'(c)=0$; pero no dice cuántos "*c*" con esa característica existen.

El teorema siguiente , conocido como el teorema del valor medio , se puede considerar como una generalización del teorema de Rolle ; pues éste puede verse como un caso particular en el que *f(a)* y *f(b)* son iguales .

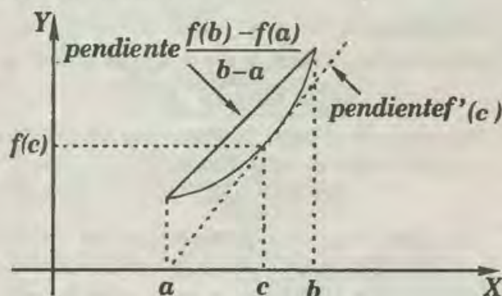
TEOREMA DEL VALOR MEDIO

Si $f: [a ; b] \to \mathbb{R}$ es una función tal que :

* Es continua en $[a ; b]$
* Es diferenciable en $\langle a ; b\rangle$ entonces existe al menos un "c" en $\langle a ; b\rangle$ tal que :

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

* Geometricamente :



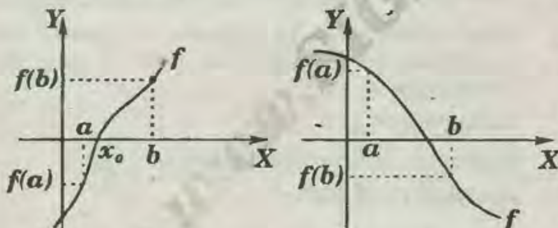
TEOREMA DEL CERO

Sea la función f continua en el intervalo $\langle a;b\rangle$ se cumple que si :

$f(a)\,f(b) < 0 \Rightarrow \exists x_0 \in \langle a ; b\rangle$

tal que $f(x_0) = 0$

* Graficamente :



EJEMPLO 1 :

Calcule el valor c que satisfaga el teorema del valor medio para los valores de a y b indicados .

$$f(x) = sen\,x \;\; ; \;\; a = 0 \;\; ; \;\; b = \frac{\pi}{2}$$

RESOLUCIÓN :

* El c buscado debe satisfacer : $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$
* Pero : $f'(x) = cosx, \;\; f(b) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

$f(a) = f(0) = 0$

* entonces: $cosc = \frac{1-0}{\frac{\pi}{2}-0} \Rightarrow csc = \frac{2}{\pi}$

$\to c = arcos\left(\frac{2}{\pi}\right)$

EJEMPLO 2 :

Estimar una raíz de la función:

$f(x) = x^7 + x - 1$, en forma aproximada .

RESOLUCIÓN :

* Se deduce que : $f(0) = -1$; $f(1) = 1$
* Luego por el teorema del cero ; como :

$f(0).\,f(1) < 0$, entonces existe una raíz en $\langle 0 ; 1\rangle$.

TEOREMA DE LA RAÍZ MÚLTIPLE

Si α es una raíz de multiplicidad k de la función $f(x)$ se cumple :

$$f(\alpha)=0 \;\wedge\; f'(\alpha)=0 \;\wedge\; f''(\alpha)=0 \;\wedge\; f'''(\alpha)=0 \;\wedge\; \ldots\ldots \;\wedge f^{k-1}(\alpha)=0$$

* Donde : $f^{k-1}_{(x)} = 0$ es la derivada de orden $(k-1)$ de $f(x)$.

EJEMPLO :

Sea $P(x) = x^4 + ax^3 + bx + c$

Calcule : $a - b + 3c$, si "1" es una raíz $P(x)$ de multiplicidad tres .

RESOLUCIÓN :

* $P(x) = x^4 + ax^3 + bx + c$

$x = 1 \Rightarrow P(1) = 1 + a + b + c = 0$ .... (I)

* $P'(x) = 4x^3 + 3ax^2 + b$

$x = 1 \Rightarrow P'(1) = 4 + 3a + b = 0$ .... (II)

* $P''(x) = 12x^2 + 6ax$

$x = 1 \Rightarrow P''(1) = 12 + 6a = 0$ .... (III)

* De (III) : $a = -2$
* Reemplazando en (II): $b = 2$
* Reemplazando en (III): $c = -1$
* Se pide : $-2 - 2 + 3(-1) = -7$

SUMA DE LAS POTENCIAS DE LAS RAÍCES

Se tiene la función polinomial $f(x)$ y $f'(x)$ su derivada al efectuar la división $\frac{f(x)}{f(x)}$, por Horner se tiene :

$f'(x)$

$f(x)$

$a_0\ a_1\ a_2\ a_3\ \ldots\ a_n\ \ldots$

donde :

$$a_0 = x_1^0 + x_2^0 + x_3^0 + \ldots + x_n^0$$
$$a_1 = x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n$$
$$a_2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \ldots + x_n^2$$
$$a_3 = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + \ldots + x_n^3$$
$$\vdots$$
$$a_n = x_1^n + x_2^n + x_3^n + \ldots + x_n^n$$
$$\vdots$$

donde $x_1 ; x_2 ; x_3 ; \ldots , x_n$; son raíces de $f(x)$ que es de grado n .

EJEMPLO :

Sean : $a ; b ; c$ y d raíces de :

$$x^4 + x^2 + 1 = 0$$

Calcular : $a^3 + b^3 + c^3 + d^3$

RESOLUCIÓN :

* Sea : $f(x) = x^4 + x^2 + 1 \Rightarrow f'(x) = 4x^3 + 2x$

* Dividiendo $\dfrac{f'(x)}{f(x)}$, por Horner :

	4	0	0	2	0				
0		0	−4	0	−4				
−1			0	0	0	0			
0				0	4	0	4	0	
−1					0	−2	0	−2	
						0	0	0	0
	4	0	−4	2	0	....			
	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4				

* Entonces : $a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = 2$

DIFERENCIALES

En la figura está representada la gráfica de una función f y , debajo de ella , la gráfica de la recta tangente en el punto $(x ; f(x))$. Como se observa en la figura , para h pequeño , se puede aproximar $f(x + h) - f(x) \approx h\tan\alpha$, pero $\tan\alpha = f'(x)$, entonces $f(x + h) - f(x) \approx hf'(x)$

Y, f, $(x+h ; f(x+h))$ Q, $f(x+h)-f(x)$, $(x;f(x))$P, $h\tan\alpha$, h, 0, x, x+h, X

* La diferencia $f(x + h) - f(x)$ recibe el nombre de incremento de f desde x a $x + h$, y se denota Δf .

$$\boxed{\Delta f = f(x+h) - f(x)}$$

* El producto $f'(x)h$ se denomina diferencial en x con incremento h , y se denota df .

$$\boxed{df = f'(x)h}$$

*Usualmente , a h se le denota por Δx , entonces :

$$\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x); df = f'(x)\Delta x$$

* La figura nos dice que para h pequeño, Δf y df son aproximadamente iguales $\Delta f \approx df$.

* Del gráfico anterior , cuanto más cercano esté el punto Q del punto P , la diferencia entre Δy y dy será menor o tiende a cero , es decir :

$$\Delta y - dy = 0$$

Entonces : $f(x + \Delta x) - f(x) - f'(x)\Delta x = 0$

*Por lo tanto : $\boxed{(x + \Delta x) = f(x) + f'(x)\Delta x}$

Esta relación es la llamada propiedad de aproximación del valor de una función por diferenciales .

EJEMPLO 1 :

Determinar el valor aproximado de $\sqrt{145}$

RESOLUCIÓN :

* Sea : $f(x) = \sqrt{x}$, entonces : $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

* Como : $f(x + \Delta x) = f(x) + f'(x)\Delta x$

* Luego : $\sqrt{x + \Delta x} = \sqrt{x} + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\Delta x$

* Haciendo : $x = 144$ y $\Delta x = 1$, tenemos :

$$\sqrt{144+1} = \sqrt{144} + \frac{1}{2\sqrt{144}} \times 1$$

$$\rightarrow \sqrt{145} = 12 + \frac{1}{12} = \frac{145}{12}$$

EJEMPLO 2 :

Determinar el valor aproximado de $sen32°$

RESOLUCIÓN :

* Si : $f(x) = sen\,x \rightarrow f'(x) = cos\,x$

* Además :

$$f(x+\Delta x) = f(x) + f'(x)\Delta x$$

$$\rightarrow sen(x+\Delta x) = sen\,x + cos\,x\ \Delta x$$

* Haciendo:

$$x = 30° = \frac{\pi}{6} \ \wedge \ \Delta x = 2° = \frac{\pi}{90}$$

* Entonces :

$$sen32° = sen30° + cos\,30° \times \frac{\pi}{90}$$

$$\rightarrow sen32° = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times (0,0348) \rightarrow sen32° = 0,015$$

RAZÓN DE CAMBIO

Recuerda que anteriormente definimos la derivada como una razón de cambio . En este sentido , las derivadas pueden representar cantidades , como la razón a la cual crece o decrece una determinada población , el costo de producir un objeto , la tasa de inflación , la velocidad de un objeto en movimiento, etcétera.

El objetivo de este tema es mostrar la relación entre derivadas y razón de cambio a partir de situaciones prácticas . Dada la función $y = f(x)$, recuerda que para $x = x_0$.

* razón de cambio promedio $= \dfrac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$

* razón de cambio instantánea $= f'(x_0)$

EJEMPLO 1 :

Supón que estamos interesados en determinar la velocidad de desplazamiento del ferrocarril central que une a las ciudades de Lima , Huancayo y Huancavelica .

¿Cómo calculamos la velocidad promedio del ferrocarril?

¿A qué velocidad se desplaza el ferrocarril a las cuatro horas de viaje?

Especialistas de la empresa administradora de este servicio de transporte han estimado que la distancia recorrida después de t horas de viaje es :

$$\boxed{d(t) = 4t^2 + 10t \ \ kilómetros}$$

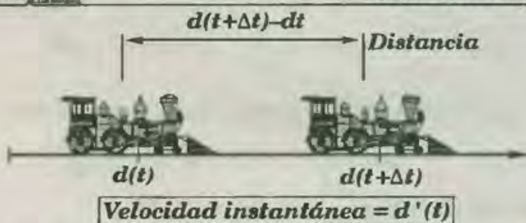
donde $0 \le t \le 10$.

RESOLUCIÓN :

* Para cualquier móvil , se sabe que :

velocidad promedio $= \dfrac{\text{cambio de distancia}}{\text{cambio de tiempo}}$

$$\rightarrow V_P = \frac{d(t+\Delta t) - d(t)}{\Delta t}$$



$$\boxed{Velocidad\ instantánea = d'(t)}$$

Razón de cambio instantánea de la distancia recorrida por un móvil .

Luego, la velocidad del ferrocarril en el instante $t = 4$ será igual a $d'(4)$. Así , primero calculamos $d'(t) = 8t + 10$ y enseguida :

$d'(4) = 8(4) + 10 = 42\ km/h$

NOTA :

* Si $y = f(t)$ es una función de posición de un objeto que se mueve en línea recta, entonces la función de velocidad en el tiempo t es :

$$V(t) = f'(t).$$

* Además , se puede hallar la razón de cambio de la velocidad , que es la función de aceleración en el tiempo t .

Es decir : $a(t) = D_t\,[V(t)] = D_t\,[f'(t)] = f''(t)$

Función de aceleración , medida en (m/s^2), (km/h^2), etc.

$f''(t)$ es la segunda derivada .

EJEMPLO 2:

Una ciudad tiene la forma de un rectángulo de lados $x \wedge (x+3)$ kilómetros . A causa de la expansión urbana , x está creciendo a razón de $\frac{1}{3}$ *km/año.* Hallar la razón de cambio (instantáneo) del área urbana cuando está ocupada $108\ km^2$.

RESOLUCIÓN :

* Las variables que intervienen son el área , los lados que dependen de "x" y el tiempo "t".

A continuación relacionamos las variables , así: El área urbana A es función de x .

$A(x) = x(x+3) = x^2 + 3x$ .... (I)

* Por dato, nos dicen que x está creciendo a razón de $\frac{1}{3}$ *km/año* , lo cual simbolizamos por $\frac{dx}{dt}$, nos queda $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{3}$ .... (II)

* Nos piden la razón de cambio (instantáneo) del área urbana A . Esta es $\frac{dA}{dt}$ cuando $A = 108$.

* Relacionando A con t , de (I) tenemos :

$$\frac{dA}{dt} = \frac{d}{dt}(x^2+3x) = \frac{d}{dt}(x^2) + 3.\frac{dx}{dt} = 2x.\frac{dx}{dt} + 3\frac{dx}{dt}$$

* Luego : $\frac{dA}{dt}=(2x+3)\frac{dx}{dt}$ .... *(III)*

* Para encontrar $\frac{dA}{dt}$, a partir de *(III)* necesitamos conocer el valor de x (ya que se conoce $\frac{dx}{dt}$).

* Pero nos piden $\frac{dA}{dt}$ cuando $A = 108$.

Luego: $A = x(x + 3) = 108$, de donde $x = 9$.

* Luego en *(III)* :

$$\frac{dA}{dt}=(2x+3)\frac{dx}{dt}=(2\times 9+3)\times\frac{1}{3}=7\ km^2/año.$$

EJEMPLO 3 :

Una masa m cae verticalmente por acción de la gravedad, partiendo del reposo. Asuma que la resistencia del aire es depreciable. Hallar la tasa de cambio de la velocidad en el instante t.

RESOLUCIÓN :

*En el instante inicial $(t=0)$ parte del reposo $(v=0)$

* En el instante t, después de iniciado el movimiento, la única fuerza que actúa sobre el cuerpo es el peso mg.

Al inicio - - - - • - - - $t=0, v=0$

Instante t - - - - • - - - $t=t, v=v$

mg

*Por la segunda ley de Newton, asumiendo como positiva la dirección del movimiento hacia abajo; nos queda :

$ma = mg$, de donde $m\frac{dv}{dt}=mg$ luego $\frac{dv}{dt}=g$

* Entonces, la tasa de cambio de velocidad respecto al tiempo (aceleración) es la gravedad.

A partir de aquí, nota que la velocidad es :

$v = gt+c$, donde c es una constante; como la masa cae a partir del reposo, tenemos para $t=0$, $v=0$. Luego, reemplazando en la ecuación encontrada tenemos que $c = 0$.

* Finalmente, encontramos que la velocidad está dada por $v = gt$.

GRAFICACIÓN DE CURVAS PARAMETRIZADAS

Para curvas de ecuaciones de la forma $y = f(x)$ puede considerarse que x es el parámetro. Al analizar los signos tanto de $f'(x)$ como de $f''(x)$, siempre se considera que x aumenta. Así, cuando se afirma que f es creciente en el intervalo $[a; b]$, significa que los valores de $f(x)$ aumentan (crecen) a medida que los valores de x van aumentando a partir de a hasta b. Por lo contrario, los valores de $f(x)$ irán disminuyendo si x disminuye desde b hasta a.

Cuando la curva está definida por medio de ecuaciones paramétricas, puede ocurrir que cuando t aumente, x aumente o disminuya. Esta doble posibilidad hace que la aplicación del criterio de la primera derivada, a partir del signo de dy/dx, se haga confusa en algunos casos. En lugar de hacer el análisis a partir del signo de dy/dx es más conveniente hacerlo a partir de los signos de dx/dt y dy/dt. La concavidad de la curva se determina de la misma forma que para las curvas definidas por ecuaciones de la forma $y=f(x)$; es decir, a partir del signo de d^2y/dx^2.

Sabemos que para curvas parametrizadas en que $x(t)$ e $y(t)$ son funciones diferenciables, se verifica :

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}$$

Expresión que nos permite calcular dy/dx en términos del parámetro t. Si ahora hacemos:

$$y'=\frac{dy}{dx}\Rightarrow\frac{dy'}{dx}=\frac{d^2y}{dx^2}$$

Por la regla de la cadena, se tiene:

$$\frac{dy'}{dt}=\frac{dy'}{dx}\times\frac{dx}{dt}=\frac{d^2y}{dx^2}\times\frac{dx}{dt}$$

Si $dx/dt\neq 0$, entonces dividiendo entre dx/dt, se obtiene:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dy'/dt}{dx/dt}$$

Expresión que permite hallar d^2y/dx^2 en términos del parámetro t y para los t en que y' sea diferenciable.

EJEMPLO :

Trace la gráfica de la curva cuyas ecuaciones paramétricas son:

$$x=2t^2+2t+2\ ;\ y=t^3-3t+3\ ;\quad t\in\mathbb{R}$$

RESOLUCIÓN:

Derivando cada una de las ecuaciones paramétricas se obtienen:

$$\frac{dx}{dt}=4t+2\quad,\quad\frac{dy}{dt}=3t^2-3=3(t+1)(t-1)$$

y luego reemplazando estas derivadas en la ecuación, se obtiene:

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{3(t+1)(t-1)}{4t+2}\ ....(I)$$

Vemos que $dy/dx=0$ si $t=-1$ ó $t=1$. Vemos también que dy/dx no existe (es infinito) en $t=-1/2$. Así, los

puntos críticos son: $-1, -1/2$ y 1. Estos puntos dividen al dominio en **4** intervalos. Por el método de los puntos críticos se determinan los signos que tienen dx/dt y dy/dt en cada uno de estos intervalos, tal como se muestra en la Tabla.

t	$(x;y)$	dx/dt	dy/dt	dy/dx	Conclusión
$-\infty < t < -1$		$-$	$+$	$-$	x decrece, y crece
$t = -1$	$(2;5)$		0		y tiene un máximo relativo
$-1 < t < -1/2$		$-$	$-$	$+$	x decreciente, y decrece
$t = -1/2$	$(3/2;35/8)$	0		∞	y no tiene extremo relativo
$-1/2 < t < 1$		$+$	$-$	$-$	x crece, y decrece
$t = 1$	$(6;1)$		0	0	y tiene un mínimo relativo
$t > 1$		$+$	$+$	$+$	x crece, y crece

En la tabla se concluye que en el punto $(2;5)$ y tiene un máximo debido a que al aumentar t desde $-\infty$ hasta -1, x decrece e y crece. Esto significa que los puntos de la gráfica se van generando hacia la izquierda y hacia arriba, hasta el punto $(2;5)$. Luego, si cuando t aumenta de -1 a $-1/2$, x sigue decreciendo pero y decrece, significa que del punto $(2;5)$, los puntos se van generando hacia la izquierda pero hacia abajo. Así, en el punto $(2;5)$, y tiene un máximo relativo. Análices semejantes se hacen alrededor de los otros puntos críticos, determinando las conclusiones de la Tabla.

Derivando la ecuación **(I)**, se obtiene:

$$\frac{dy'}{dt} = \frac{3(t^2+t+1)}{(2t+1)^2}$$

y luego reemplazando valores en la ecuación, se obtiene:

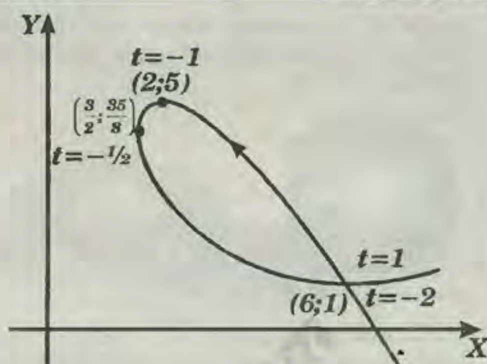
$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{3(t^2+t+1)}{2(2t+1)^3}$$

Como $t^2+t+1 > 0$ para todo t, entonces el único punto crítico es $t = -1/2$. Además, $d^2y/dx^2 < 0$ para $t < -1/2$, y $d^2y/dx^2 > 0$ para $t > -1/2$. Por lo tanto, la gráfica es cóncava hacia abajo para $t < -1/2$ y cóncava hacia arriba para $t > -1/2$.

La Figura muestra la gráfica de la curva. Nótese que para $t = -1$ y $t = 1$, la recta tangente es horizontal, y para $t = -1/2$, la tangente es vertical. Nótese también que la curva pasa por un mismo punto dos veces. A tál punto se le denomina *punto doble*. Para hallar dicho punto doble se resuelve el sistema:

$$2t_1^2 + 2t_1 + 2 = 2t_2^2 + 2t_2 + 2, \quad t_1^3 - 3t_1 + 3 = t_2^3 - 3t_2 + 3$$

cuya solución es $t_1 = -2$ y $t_2 = 1$ que determinan, casualmente, el punto $(6;1)$ en donde y tiene su valor mínimo.



PROBLEMAS DE MODELACIÓN Y OPTIMIZACIÓN

En esta sección aplicaremos, los procedimientos descritos para hallar los valores extremos de las funciones, a la solución de problemas ya sean geométricos o físicos o de aplicación a las ciéncias, ingeniería o la administración.

Las empresas están interesadas en maximizar sus ganancias y a su vez, minimizar sus costos. Así, es frecuente observar en el mercado que las latas que contienen, por ejemplo $100cm^3$ de un determinado producto, todas, independiente de la marca, tienen iguales dimensiones. Esto no és una casualidad, sino que obedece a que existen dimensiones que determinando un volumen de $100cm^3$, minimizan la cantidad de metal a usar en la manufactura de la lata. Generalmente en el proceso de solución de un problema de aplicación, no se tiene inicialmente ecuaciones matemáticas que debamos resolver. Más bien, previamente debemos realizar una formulación matemática del problema que nos permita hallar dichas ecuaciones. En los siguientes problemas de aplicación de máximos y mínimos, describiremos los procedimientos más usuales en la formulación matemática y posterior solución de las aplicaciones más frecuentes.

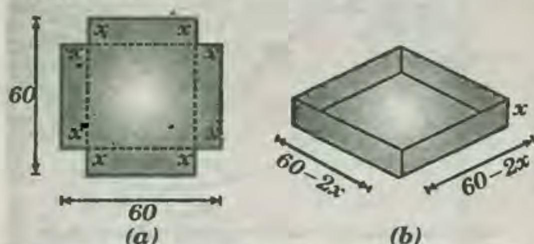
EJEMPLO:

Se dispone de una lámina cuadrada de cartón de **60cm** de lado y con ella se quiere construir una caja abierta por arriba, cortando un cuadrado de cada esquina y doblando los bordes. Encòntrar las dimensiones que debe tener la caja de modo que tenga un volumen máximo. ¿Cuál es este volumen máximo?

RESOLUCIÓN:

Sea x **cm** la longitud del lado del cuadrado a recortar. La Figura muestra la lámina con los cuadrados

recortados de cada esquina. Luego de doblar como se indica se obtiene la caja rectangular que muestra la Figura.



(a) *(b)*

La figura muestra también las dimensiones de la caja. El volumen de la caja será:

$$V = x(60-2x)^2 = 4x^3 - 240x^2 + 3600x$$

Obtenemos una caja solo si x es un valor del intervalo $(0;30)$. Sin embargo, puede considerarse que si $x=0$, la altura de la caja es 0, y que cuando $x=30$, el lado del cuadrado de la base es 0. Podemos considerar que el volumen de la caja es función de x tal que: $V(x) = 4x^3 - 240x^2 + 3600x, \;\; x \in [0;30]$

siendo $V(x)$ una función continua en el intervalo cerrado $[0;30]$. Por lo tanto, la solución del problema se reduce a calcular el valor máximo absoluto de una función en un intervalo cerrado en donde es continua. Bastará determinar los puntos críticos de V en el intervalo $[0;30]$ y luego, evaluar V en dichos puntos críticos y en los extremos 0 y 30. El mayor valor que se obtenga nos dará la solución que buscamos. Así, derivando:

$$V'(x) = 12x^2 - 480x + 3600 = 12(x-10)(x-30)$$

Si $V'(x) = 0$, entonces $x=100$ ó $x=30$. Así, los puntos críticos son 10 y 30. Ambos números están en el intervalo $[0;30]$. Evaluando V en los puntos críticos y en los extremos del intervalo, se tiene:

$$V(10) = 16000\,, \quad V(0) = 0\,, \quad V(30) = 0.$$

De los tres valores el mayor es $V(10)=16000$. Por lo tanto, la longitud del cuadrado a recortar para obtener el volumen máximo es $x=10$. Con este valor encontramos que el lado de la base medirá **40cm** y su altura será de **10cm**.

Así, el volumen máximo que puede tener la caja será de $16000\ cm^3$.

OBSERVACIÓN :

Muchos problemas de aplicación de máximos y mínimos presentan una formulación matemática parecida al del *Ejemplo* anterior , por lo que para sus soluciones puede seguirse un procedimiento semejante. Se recomienda seguir los siguientes pasos:

1) Si es posible y necesario, hacer un dibujo ilustrativo.

2) Identificar cuáles son las variables y encontrar relaciones entre ellas.

3) Reducir el número de variables hasta encontrar una función de una sola variable que debe ser maximizada o minimizada.

4) Hallar el dominio de la función; es decir, el conjunto de valores de la variable para los cuales se obtiene un valor posible.

5) Encontrar los valores máximos y mínimos de la función en el dominio hallado.

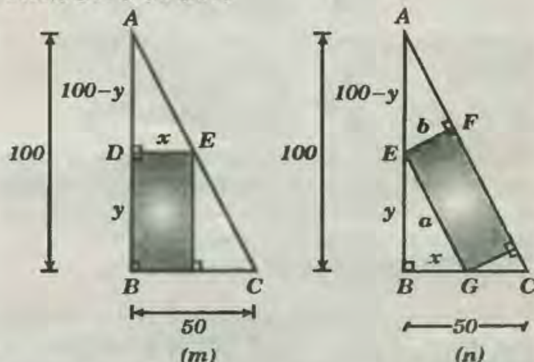
EJEMPLO :

Determinar las dimensiones del rectángulo de área máxima que se puede inscribir en un triángulo rectángulo cuyos catetos miden **50** y **100cm** respectivamente, en los siguientes casos:

I) Si dos de sus lados están sobre los catetos y un vértice en la hipotenusa.

II) Si dos vértices están sobre la hipotenusa y los otros dós vértices uno en cada cateto.

RESOLUCIÓN:



(m) *(n)*

I) La Figura *(m)* ilustra este caso. Sean x *cm* e y *cm* las longitudes de los lados del rectángulo. Por semejanza entre los triángulos ADE y ABC, se obtiene la siguiente relación:

$$\frac{x}{100-y} = \frac{50}{100} \Rightarrow y = 100 - 2x$$

El área del triángulo es: $A = xy = 100x - 2x^2$. Se obtienen áreas diferentes variando la posición del vértice E sobre la hipotenusa. Si E coincide con A, $x=0$. Si coincide con C, $x=50$. Así, el área es función

de x; es decir:

$$A(x)=100x-2x^2; \quad x\in[0;50]$$

Notamos que $A(x)$ es continua en el intervalo $[0;50]$. Para hallar los puntos críticos hallamos la derivada e igualamos a cero:

$$A'(x)=100-4x=0 \Rightarrow x=25\in[0;50]$$

Así, los puntos críticos son: **25** y **50**. Evaluando $A(x)$ en estos puntos se obtienen:

$$A(25)=1\,250; \quad A(0)=0; \quad A(50)=0$$

El mayor de los tres valores es **1 250**. Por lo tanto, concluimos: el área máxima que puede obtenerse es de $1250cm^2$, y los lados del rectángulo medirán 25 y **50 cm**, respectivamente.

II) La Figura *(n)* ilustra este caso. Denotemos por a y b las longitudes *(en cm)* de los lados del rectángulo inscrito. Por semejanza entre los triángulos **EBG** y **ABC** y entre los triángulos **AFE** y **EBG**, se obtienen las siguientes relaciones, respectivamente:

$$\frac{x}{y}=\frac{50}{100}; \quad \frac{x}{y}=\frac{b}{100-y}; \frac{b}{100-y}=\frac{x}{a}$$

o bién :

$$y=2x \;\; ; \;\; ab=x(100-y)=x(100-2x)$$

El área del rectángulo es $A=ab=100x-2x^2$. Se obtienen áreas diferentes variando la posición del punto **G** sobre el cateto **BC**. Vemos que x puede variar de **0** a **50**. Así, el área es función de x tal que:

$$A(x)=100x-2x^2; \quad x\in[0;50)$$

Encontramos que es la misma función de la parte *(I)*. Por lo tanto, el área máxima que puede tener dicho rectángulo es de $1250cm^2$ y se obtiene para $x=25cm$. Para este valor $y=50\ cm$. Con estos valores las dimensiones del rectángulo son: $a=25\sqrt{5}cm \;\wedge\; b=10\sqrt{5}cm$.

EJERCICIOS

01 Completar la siguiente tabla :

Función	Regla de correspondencia f(x)	Derivada
Constante	c	
Identidad	x	
Potencia	x^n	
Raíz cuadrada	$\sqrt{x}, x>0$	
Exponencial	a^x	
	e^x	
Logaritmo	$Log_a(x)$	
Logaritmo Natural	$Ln\,x$	
Seno	$sen\,x$	
Coseno	$cos x$	
Tangente	$tg\,x$	
Cotangente	$cotg\,x$	
Secante	$sec\,x$	
Cosecante	$cosec\,x$	

02 Verificar si es verdadero o falso :

Función	Derivada
$f(x)=g(x)+h(x)$	$f'(x)=g'(x)+h'(x)$
$f(x)=g(x)\cdot h(x)$ $f(x)=kg(x), k\in\mathbb{R}$	$f'(x)=g'(x)h(x)+g(x)h'(x)$ $f'(x)=kg'(x)$
$f(x)=\dfrac{g(x)}{h(x)}, h(x)\neq 0$	$f'(x)=\dfrac{g'(x)h(x)-g(x)h'x}{[h(x)]^2}$
$f(x)=(g(x))^n$	$f'(x)=n[g(x)]^{n-1}g'(x)$
$f(x)=g(h(x))$	$f'(x)=g'(h(x))\cdot h'(x)$

03 Relacionar cada función con su respectiva derivada:

A) $f(x)=10$ — I) $\dfrac{-3}{2\sqrt{x^{15}}}$ — B) $f(x)=x^{14}$

II) $14x1$ — C $f(x)=x-9$ — III) $\dfrac{4}{3}\sqrt[3]{x}$

D) $f(x)=\sqrt[5]{x}$ — IV) $\dfrac{-9}{x^{10}}$ — E) $f(x)=\sqrt[4]{x^4}$

V) 0 — F) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^3}}$ — VI) $\dfrac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}$

04 Si $f(x)=\dfrac{4}{\sqrt{x-1}}$; halla $f'(5)$.

05 *a)* Halla la derivada de la función definida por $f(x)=1+\sqrt{4-x}$,en el punto $(3;2)$.

b) Encuentra la pendiente de la recta tangente de dicho punto .

c) Halla la derivada de $f(x)$ con respecto a x .

d) Efectúa la gráfica de $f(x)$ y de $f'(x)$. ¿A qué conclusiones puedes llegar acerca de la función pendiente?

06 Dada $f(x)=\dfrac{x^3}{3}$; halla $f'(2)$.

07 Igual que el caso anterior, pero $f(x)=1-\dfrac{1}{x}$ y el punto es $\left(3;\dfrac{2}{3}\right)$

08 Halla la derivada de cada una de las siguientes expresiones :

a) $y=(3x^4-5x^3+2)(x^2-\operatorname{sen}x+x)=$

b) $f(x)=\dfrac{4}{x^3-5x+6}=$

c) $f(x)=5(x^2-\tan x+2)=$

d) $y=3\operatorname{sen}x-4\cos x =$

e) $f(x)=\sqrt[7]{x^4}-3\sqrt[5]{x^4}+2\sqrt[3]{x^4}=$

f) $f(x)=\dfrac{x^2-3}{x^3+2x-1}=$

09 a) Si $y=Log(x+2)(x-1)$, halla y'.

b) Si $y=Log\dfrac{(x+2)(x-1)}{(x+3)}$, halla y'.

c) Si $f(x)=Ln\sqrt{5x^2-3}$, halla $f'(x)$.

d) Si $f(x)=x^2.e^{\operatorname{sen}x}$, halla $f'(x)$

e) Si $y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$, halla y'.

10 Usando la notación de Leibinz , calcula :

a) $\dfrac{d}{dx}\sqrt{x^2-3x+5}=$ d) $\dfrac{d}{dx}\sqrt[3]{x^2+\sqrt{x^4+1}}=$

b) $\dfrac{d}{dx}(3x^2-6x-\operatorname{sen}x)^4=$ e) $\dfrac{d}{dx}\operatorname{sen}(x^2-5x)=$

c) $\dfrac{d}{dx}\left[x^3\sqrt{x^2+2}\right]=$ f) $\dfrac{d}{dx}\operatorname{sen}(\cos x)=$

11 Aplica la regla de la cadena y calcula la derivada de las siguientes funciones :

a) $y=(2x-1)^2=$ d) $y=(4x^2-3x)^2=$

b) $y=\dfrac{(7x-3)^2}{x-1}=$ e) $y=\dfrac{(4x+3)^2}{(2x-3)^2}=$

c) $y=7(x+1)^2=$ f) $y=12x(4x-3)^2=$

12 Halla la derivada de cada una de las siguientes expresiones :

a) $y=(3x^2-4x+6)^5=$ d) $y=\dfrac{(x^2+2x)^6}{(x^3-2x)^4}=$

b) $y=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-5x}}=$ e) $y=\dfrac{\sqrt{x^2-5x}}{\sqrt[3]{2x+3}}=$

c) $y=\sqrt[3]{2x^3+3x^2-2x}=$ f) $y=\dfrac{x}{(x^2+3)^{1/2}}-\dfrac{x}{(1-x^2)^{3/2}}=$

13 Deriva implícitamente y despeja la derivada en cada una de las siguientes ecuaciones :

a) $x^2+y^2=25$ b) $y=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-5x}}$

c) $(x-1)^2+(y-2)^2=9$ d) $x^2+y^2-6y=0$

e) $\dfrac{(x+1)^2}{9}-(y-3)^2=1$ f) $(x-3)^2+\dfrac{(y-2)^2}{4}=1$

g) $\dfrac{x^2}{9}+y^2=1$ h) $x^2-2x+\dfrac{y^2}{4}-\dfrac{y}{2}-\dfrac{1}{4}=0$

14 Para cada una de las siguientes ecuaciones , calcula $\dfrac{dy}{dx}$ en el punto dado :

a) $x^3-2xy+3xy^2=0$, en $x=1$.

b) $5-2x^2y+2xy=3x$, en $x=0$.

c) $x^2+2y^2-3xy-16x=9$, en $x=-2$.

d) $9x^3-y^3=1$, en $x=1$.

e) $16x^4+y^4=3$, en $x=1$.

f) $x^2-2x+y^2+4xy=-2xy$, en $x=3$.

15 a) Sea $y=3x^4-5x^2$, halla y'''.

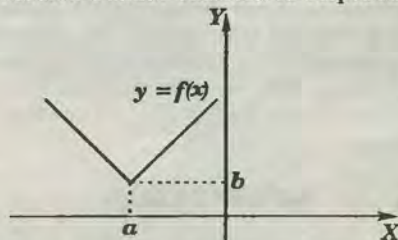
b) Sea $y=\cos x$, calcula $y^{(5)}$.

c) Sea $y=e^x$, encuentra $y^{(n)}$.

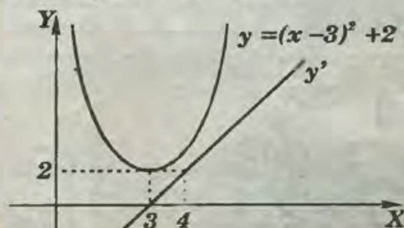
d) Demuestra que si $y=e^x+\operatorname{sen}x$, entonces $y^{(4)}=y$.

e) Halla los valores de x que hacen $\dfrac{dy}{dx}<0$, cuando $y=3x^2-6$.

16 Dada la gráfica adjunta, entonces existe $f'(a)$. ¿Es verdadero o falso? Justifica tu respuesta .



17 Indica la verdad o falsedad de la afirmación: la gráfica de y' corresponde a la de la función derivada de $y=(x-3)^2+2$.



(18) Indica la verdad o falsedad de la siguiente regla:

$[f(x)\times g(x)\times h(x)]'=f'(x)\times g(x)\times h(x)+f'(x)\times g'(x)\times h(x)+f(x)\times g(x)\times h'(x)$

Si es falsa, ¿cuál sería la regla verdadera?

(19) Indica la verdad o falsedad de las siguientes afirmaciones :

a) $f(x)=-x^2+4x$, entonces $f'(x)=-2x+4$

b) Si $f(x)=\sqrt{25-x^2}$, entonce $f'(x)=-\dfrac{x}{\sqrt{25-x^2}}$

c) Si $f(x)=x^3-2x$, entonces $f'(1)=1$

d) $f(x)=senx+5x$, entonces $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=5$

(20) Calcular las derivadas de :

a) $f(t)=12-3t^4+4t^6$

b) $k(x)=(2x^2-4x+1)(6x-5)$

c) $f(x)=(4x-5)/(3x+2)$

d) $f(x)=1/(1+x+x^2+x^3)$

(21) Indicar la verdad o falsedad de las siguientes afirmaciones :

a) La recta tangente a una curva $y=f(x)$ en el punto (x_0, y_0), corta a la gráfica de la función necesariamente en otro punto .

Justifica tu respuesta graficamente .

b) La recta tangente a una curva $y=f(x)$ en punto (x_0, y_0) no corta a la gráfica de la función en otro punto .

c) La recta secante a una curva $y=f(x)$, corta a la gráfica de f en dos o más puntos.

(22) La siguiente proposición es verdadera o falsa: Existen funciones que tienen la misma derivada . Justifica algebraicamente tu respuesta . Por ejemplo considera $f(x)=x+1$ y $g(x)=x-3$. Da un par de ejemplos más .

(23) Indica la verdad o falsedad de la siguiente afirmación : Si f es una función diferenciable, entonces $f(x)$ y $f(x)+c$ tienen la misma derivada .

(24) Indica la verdad o falsedad de la siguiente proposición : Si una función f es continua en x_0, entonces será diferenciable en x_0 . Justifica tu respuesta.

(25) Demuestre que $f(x)=\sqrt{x}$ es diferenciable en todo su dominio .

(26) Demuestra que $f(x)=cosx$ es diferenciable sobre $\mathbb{R}$.

(27) Dada la función $f(x)=\begin{cases} x^2-1, & x<3 \\ 2ax, & x\leq 3\end{cases}$

a) ¿Para qué valor de "*a*", f es continua en todo su dominio?

b) ¿Existe $f'_-(3)$ y $f'_+(3)$?

c) ¿Es f diferenciable en $\mathbb{R}$?

(28) Dada la función $f(x)=x^4-3\sqrt[3]{x}+2$, halla:

a) $f'(1)$ *b)* $f'(8)$ *c)* $f'(x_0)$

(29) Halla la pendiente de la recta tangente a la curva definida por $f(x)=2x+senx$ en el punto abscisa $x_0=\dfrac{\pi}{2}$

(30) Halla la pendiente de la recta tangente a la curva definida por $f(x)=x^3+3$ en el punto de ordenada $y_0=4$.

(31) Dada la función definida por :

$$f(x)=\begin{cases} 2-3x & , x\leq 1 \\ -\dfrac{3}{2}-\dfrac{3x^2}{2} & , x>1\end{cases}$$

a) Determina si f es continua en $x=1$.

b) Determina si f es diferenciable en $x=1$.

(32) Dada la función $f(x)=x|x|$

a) ¿Es continua en $x=0$?

b) ¿Es derivable en $x=0$?

(33) Dada la función definida por :

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x+1} & ; x\neq -1 \\ 3 & ; x=-1\end{cases}$$

a) ¿Es f diferenciable en $x=-1$?

b) ¿Es f continua en $x=-1$?

(34) Sea $f(x)=15x^2+(65-10x)^2$, halla los máximos y mínimos relativos de f, si existen.

(35) Dada la función $f(x)=x+\dfrac{3600}{x}$, halla los valores extremos relativos de f, si existen.

(36) Efectúa la gráfica de $f(x)=\dfrac{1}{x}$

37 Efectúa la gráfica de

$$f(x) = 3x^4 - 8x^3 - 6x^2 + 24x$$

38 ¿Qué número positivo sumado a su inverso aditivo, hace que la suma sea mínima? Justifícalo.

39 ***PROBLEMA DE FABRICACIÓN:*** De una hoja de cartón de $18\ cm \times 18\ cm$, deben ser recortados cuadrados iguales, de modo que doblando la hoja, siguiendo las líneas punteadas, resulte una caja (de calzado) que tenga la mayor capacidad posible. ¿Cuánto debe medir cada lado del cuadrado?

40 La relación entre las ventas v y el costo de publicidad p para un producto está dada por la fórmula:

$$v = 25(20p^2 - p)$$

Encuentra la rápidez de cambio en las ventas, para p = S/. 1000.

41 Una particula es lanzada hacia arriba (a lo largo del eje coordenado «y» positivo, desde el origen), con una velocidad inicial de 49 m/s, de modo que la ecuación de su movimiento está dada por:

$$S(t) = -\frac{7}{2}t^2 + 49t$$

(S en metros y t en segundos). Responde.

a) ¿Cuánto tiempo tarda la partícula en alcanzar el punto más alto de su trayectoria? ¿Cuál será la altura máxima alcanzada?

b) Al término del 4° segundo, ¿la partícula está subiendo o bajando?

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1:

Utilizando las fórmulas y reglas de derivación, determinar la derivada de las siguiente funciones:

A) $f(x) = 8x^3 - 7x^2 + 27$ *B)* $f(x) = (3x^2 + 5)(2x + 3)$

C) $f(x) = \dfrac{2x^2+1}{3x+2}$ *D)* $f(x) = (x^2 + 9)^7$

E) $f(x) = \sqrt{(3x+4)^5}$

RESOLUCIÓN:

A) Aplicando la regla de la suma se tiene:

$$f'(x) = D_x(8x^3) - D_x(7x^2) + D_x(27) = 24x^2 - 14x + 0$$

$\rightarrow f'(x) = 24x^2 - 14x$

B) Aplicando la regla del producto se tiene:

$$f'(x) = D_x(3x^2+5)(2x+3) + (3x^2+5)D_x(2x+3)$$
$$= (6x)(2x+3) + (3x^2+5)(2) = 12x^2 + 18x + 6x^2 + 10$$

$\rightarrow f'(x) = 18x^2 + 18x + 10$

C) Aplicando la regla del cociente:

$$f'(x) = \frac{D_x(2x^2+1)(3x+2) - (2x^2+1)D_x(3x+2)}{(3x+2)^2}$$
$$= \frac{(4x)(3x+2) - (2x^2+1)(3)}{(3x+2)^2}$$

$\rightarrow f'(x) = \dfrac{6x^2+8x-3}{(3x+2)^2}$

D) Aplicando la regla de la potencia:

$$f'(x) = 7(x^2+9)^6 D_x(x^2+9) = 7(x^2+9)^6(2x)$$

$\rightarrow f'(x) = 14x(x^2+9)^6$

E) Aplicando la regla de la cadena:

$$f'(x) = \frac{5}{2}\left(\sqrt{(3x+4)^3}\right)D_x(3x+4) = \frac{5}{2}\sqrt{(3x+4)^3}(3)$$

$\rightarrow f'(x) = \dfrac{15}{2}\sqrt{(3x+4)^3}$

PROBLEMA 2:

Calcular $f'(0)$, sabiendo que $f(x) = \sqrt{(3x+4)^5}$.

RESOLUCIÓN:

* Hallamos la función derivada $f'(x)$:

* Sea $y = u^{\frac{5}{2}}$ y $u = 3x+4$. Así

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} = \left(\frac{5}{2}u^{\frac{3}{2}}\right)\cdot 3 = \frac{15}{2}u^{\frac{3}{2}}$$

* Por tanto: $f'(x) = \dfrac{15}{2}(3x+4)^{\frac{3}{2}}$

* Calculamos $f'(0)$:

* Así: $f'(0) = \dfrac{15}{2}(3(0)+4)^{\frac{3}{2}} = \dfrac{15}{2}\sqrt{4^3} = \dfrac{15}{2}(8) = 60$

NOTA:

En algunas situaciones es necesario usar la regla de la cadena conjuntamente con la regla del producto o la regla del cociente para encontrar la derivada de una función.

PROBLEMA 3:

Determinar la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función definida por $f(x) = 3x^2$ en el punto $(1; 3)$ (aplicando límites).

RESOLUCIÓN:

* Tenemos que el punto de tangencia es $P_0(1;3)$, de donde $x_0 = 1$.

* Luego:

$$m_t=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{3(1+h)^2-3(1)^2}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{3(2h+h^2)}{h}=\lim_{h\to 0}3(2+h)=6$$

PROBLEMA 4:

Sea $x(t)=(2t+3)^2$ la distancia en metros recorrida por un móvil transcurridos t segundos, hallar la velocidad en el instante $t=5s$ (aplicando límites).

RESOLUCIÓN:

* Tenemos :

$$v(5)=\lim_{h\to 0}\frac{x(5+h)-x(5)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{[2(5+h)+3]^2-169}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{52h+4h^2}{h}=\lim_{h\to 0}(52+4h)=52m/s$$

PROBLEMA 5:

A) Hallar la derivada de $y=\frac{1}{x+3}$, *en el punto de abscisa* $x=5$ *(aplicando su definición).*

B) Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $y=\frac{1}{x+3}$ *en el punto de abscisa* $x=5$.

C) Hallar la derivada de $y=\frac{1}{x+3}$ *con respecto a* x.

D) Graficar la función $y=\frac{1}{x+3}$ *y la función derivada* $y'=f'(x)$.

RESOLUCIÓN:

$$A)\ f'(5)=\lim_{h\to 0}\frac{f(5+h)-f(5)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{5+h+3}-\frac{1}{5+3}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{-h}{h(h+8)(8)}=\lim_{h\to 0}\frac{-1}{(h+8)8}=-\frac{1}{64}$$

* Luego $f'(5)=-\frac{1}{64}$

B) Para $x=5$ tenemos $y=\frac{1}{8}$; luego el punto de paso es $\left(5;\frac{1}{8}\right)$

* Como $m_T=f'(5)=-\frac{1}{64}$, luego la ecuación de la recta tangente es:

$L_T: y-y_0=m_T(x-x_0)$, entonces $y-\frac{1}{8}=-\frac{1}{64}(x-5)$

$\rightarrow L_T: x+64y-13=0$

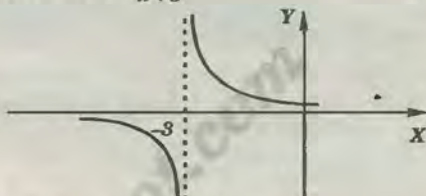
C) Tenemos:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{x+h+3}-\frac{1}{x+3}}{h}$$

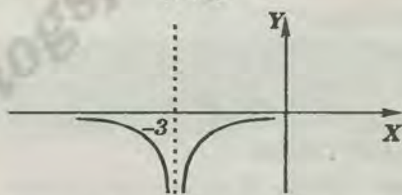
$$=\lim_{h\to 0}\frac{-h}{h(x+h+3)(x+3)}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h(x+h+3)(x+3)}$$

$$=\lim_{h\to 0}-\frac{1}{(x+3)^2}$$

D) Gráfica de $y=\frac{1}{x+3}$:



Gráfica de $y'=f'(x)=\frac{1}{(x+3)^2}$



Se deduce que la función derivada tiene las siguientes características:

* Para $x\in\left]-\infty;+3\right[$, la pendiente de la recta tangente decrece: cuando x se aproxima a -3, por la izquierda, su imagen decrece ilimitadamente , y cuando $x\rightarrow-\infty$, la pendiente de la recta tangente se aproxima a cero .

* Para $x\in\left]3;\infty\right[$, la pendiente de la recta tangente crece: cuando $x\rightarrow-3^+$, la pendiente decrece ilimitadamente; y cuando $x\rightarrow+\infty$, la pendiente de la recta tangente se aproxima a cero (la recta tangente se aproxima a ser horizontal)

PROBLEMA 6:

Derivar las siguientes funciones:

I) $f(x)=x^x$ *II)* $y=x^{x^x}$

III) $f(x)=2^{e^x+\sqrt{x}}$ *IV)* $f(x)=Ln\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}+arcsenx\right)$

RESOLUCIÓN:

I) Tomando logaritmos: $Lny=xLnx$

* Derivando, resulta:

$$\frac{y'}{y}=x\left(\frac{1}{x}\right)+Lnx$$

$$\rightarrow y'=y(1+Lnx)\rightarrow y'=x^x(1+Lnx)$$

II) Tomando logaritmos: $Lny=x^xLnx$

* Derivando ambos miembros:

$$\frac{y'}{y}=x^x\left(\frac{1}{x}\right)+\underbrace{(x^x)'}_{\text{según (I)}}Lnx$$

$$\rightarrow y'=y\left[x^{x-1}+x^x(1+Lnx)Lnx\right]$$

$$\rightarrow y'=x^{x^x}\left[x^{x-1}+x^xLnx(1+Lnx)\right]$$

$$III)\ f'(x)=\left[2^{e^x+\sqrt{x}}Ln2\right](e^x+\sqrt{x})'$$

$$\rightarrow f'(x)=\left[2^{e^x+\sqrt{x}}Ln2\right]\left(e^x+\frac{1}{2}x^{-1/2}\right)$$

$$IV)\ f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x+\sqrt{x}+arcsenx}}\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}+arcsenx\right)'$$

$$\rightarrow f'(x)=\frac{\frac{1}{2}\left(x+\sqrt{x}\right)^{-1/2}\left(1+\frac{1}{2}x^{-1/2}\right)+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{x+\sqrt{x}+arcsenx}}$$

PROBLEMA 7 :

Calcular:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 2x+senx}{\pi-2x}$$

RESOLUCIÓN:

Al tomar el límite al numerador y denominador encontramos que el límite tienen indeterminación de la forma *0/0*. Es posible por manipuleo algebraico levantar la indeterminación y calcular el límite. Sin embargo, la aplicación de la Regla de *L*'Hopital es más inmediato, como veremos a continuación.

Derivando el numerador y denominador del cociente

$$\frac{\cos 2x+senx}{\pi-2x}$$

se tiene :

$$\frac{\frac{d}{dx}(\cos 2x+sen\,x)}{\frac{d}{dx}(\pi-2x)}=\frac{-2sen2x+\cos x}{-2}=sen2x-\frac{1}{2}\cos x$$

y como :

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{d}{dx}(\cos 2x+sen\,x)}{\frac{d}{dx}(\pi-2x)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(sen2x-\frac{1}{2}\cos x\right)=0$$

entonces, por la Regla de *L*'Hopital, concluimos:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 2x+sen\,x}{\pi-2x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{d}{dx}(\cos 2x+sen\,x)}{\frac{d}{dx}(\pi-2x)}=0$$

En ocasiones ocurre que el límite del cociente entre las derivadas también tiene indeterminación de la forma *0/0*. En tal caso se aplica nuevamente la regla, tantas veces como sea necesario, hasta levantar la indeterminación.

PROBLEMA 8:

Calcula: $\frac{d}{dx}sen\left(\cos\left(x^2-2x\right)\right)$

RESOLUCIÓN:

* Sea: $y=sen(\cos(x^2-2x))$ debemos calcular $\frac{dy}{dx}$.

* Empezando de "adentro hacia afuera", efectuamos los cambios de variable:

* Cambio: $u=x^2-2x$, nos queda: $y=sen(\cos u)$.

* Cambio: $v=\cos u$, nos queda $y=sen\ v$..

* Luego: $\frac{dy}{dx}$ se expresa como:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dv}\cdot\frac{dv}{du}\cdot\frac{du}{dx}\ldots\ldots\ldots\ldots(I)$$

* Pero: $\frac{dy}{dv}=\frac{d}{dv}(sen\,v)=\cos v$;

$$\frac{dv}{du}=\frac{d}{du}(\cos u)=-sen\,u;\ \frac{du}{dx}=2x-2$$

* Reemplazando en *(I)*:

$\frac{dy}{dx}=\cos v\cdot(-sen\,u)\cdot(2x-2)$ luego :

$$\frac{dy}{dx}=\cos(\cos u)\cdot\left[-sen\left(x^2-2x\right)\right]\cdot(2x-2)=$$

$$=\cos\left(\cos\left(x^2-2x\right)\right)\cdot\left(-sen\left(x^3-2x\right)\right)(2x-2)$$

Nota que el mismo resultado se obtiene si derivamos primero la función externa y el resultado se multiplica por la derivada de la función interna. Veamos esto:

La derivada de (x^2-2x) es $(2x-2)$

$$\frac{d}{dx}sen(\cos(x^2-2x))=\cos(\cos(x^2-2x))\,(-sen(x^2-2x))\,(2x-2)$$

La derivada del coseno es –seno

PROBLEMA 9 :

Determinar las cuatro primeras derivadas de:

$$f(x)=x^3-\frac{1}{x^2}+16x^{3/4}$$

RESOLUCIÓN :

$$A)\ f^{i}(x)=3x^2+\frac{2}{x^3}+12x^{-1/4}$$

$$B)\ f^{ii}(x)=6x-\frac{6}{x^4}-3x^{-5/4}$$

$$C)\ f^{iii}(x)=6+\frac{24}{x^5}+\frac{15}{4}x^{-9/4}$$

$$D)\ f^{iv}(x)=-\frac{120}{x^6}-\frac{135}{16}x^{-13/4}$$

PROBLEMA 10 :

Calcular: $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{sec^2x-2tan\,x}{1+cos4x}$

RESOLUCIÓN:

El límite tiene indeterminación de la forma **0/0**. En este caso parece ser que el manipuleo algebraico no levanta la Indeterminación. Derivando, se tiene:

$$\frac{\frac{d}{dx}(sec^2x-2tan\,x)}{\frac{d}{dx}(1+cos4x)}=\frac{sec^2x\,tan\,x-2sec^2x}{-4sen4x}$$

$$=\left(-\frac{1}{2}sec^2x\right)\left(\frac{tan\,x-1}{sen4x}\right)$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}=\frac{(sec^2x-2tan\,x)}{1+cos4x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\frac{d}{dx}(sec^2x-2tan\,x)}{\frac{d}{dx}(1+cos4x)}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{tan\,x-1}{sen4x}..............(I)$$

Aplicando nuevamente la Regla de *L'*Hopital :

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{tan\,x-1}{sen4x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\frac{d}{dx}(tanx-1)}{\frac{d}{dx}(sen4x)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{sec^2x}{4cos4x}=-\frac{1}{2}....(II)$$

* Finalmente, reeplazando **(II)** en **(I)**, se obtiene:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{sec^2x-2tan\,x}{1+cos4x}=-\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$$

PROBLEMA 11 :

Determinar **y''** de la función, $y = f(x)$ definida implícitamente por :

$$x^2-xy+y^2=9$$

RESOLUCIÓN :

$$2x-(y+xy')+2yy'=0$$

$$\rightarrow 2x-y-xy'+2y\times y''=0\Rightarrow(2y-x)y'=y-2x$$

$$\Rightarrow y'=\frac{y-2x}{2y-x}........................(I)$$

* Observemos **y''** derivando de manera implícita, de nuevo con respecto a x, usando la regla del cociente y sustituiremos **y** por lo hallado en **(I)** :

$$y''=\frac{(y'-2)(2y-x)-(y-2x)(2y'-1)}{(2y-x)^2}=\frac{3xy'-3y}{(2y-x)^2}$$

$$=\frac{3x\left(\frac{y-2x}{2y-x}\right)-3y}{(2y-x)^2}$$

* Por lo tanto : $y''=-\dfrac{6(x^2-xy+y^2)}{(2y-x)^2}$

PROBLEMA 12 :

Calcular :

I) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x^7+3x^2-4x-1}{x^2+2x-3}$ II) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x^4-x^3+4x-5}{x^2+x-2}$

III) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-arctnx}{x^3}$ IV) $\lim\limits_{x\to6}\dfrac{x-\sqrt{3x-2}-\sqrt[3]{x+2}}{x-\sqrt{x+3}-\sqrt[3]{4x+3}}$

RESOLUCIÓN :

I) Se observa que la expresión $\dfrac{2x^7+3x^2-4x-1}{x^2+2x-3}$

*Toma la forma $\dfrac{0}{0}$ para $x=1$, luego aplicando la regla de *L'* hospital :

$$\lim_{x\to1}\frac{2x^7+3x^2-4x-1}{x^2+2x-3}=\lim_{x\to1}\frac{14x^6+6x-4}{2x+2}$$

$$=\frac{14+6-4}{2+2}=4$$

II) Se observa que la expresión $\dfrac{2x^4-x^3+4x-5}{x^2+x-2}$ toma la forma $\dfrac{0}{0}$ para $x=1$, luego aplicando la regla de *L'* Hospita *l*.

$$\lim_{x\to1}\frac{2x^4-x^3+4x-5}{x^2+x-2}=\lim_{x\to1}\frac{8x^3-3x^2+4}{2x+1}$$

$$=\frac{8-3+4}{2+1}=3$$

III) Forma de indeterminación $\dfrac{0}{0}$; por *L'*Hospital :

$$\lim_{x\to0}\frac{x-arctan\,x}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{1-\frac{1}{1+x^2}}{3x^2}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to0}\frac{x-arctan\,x}{x^3}=\frac{1}{3}\lim_{x\to0}\frac{x^2}{x^2(1+x^2)}=\frac{1}{3}$$

IV) Evaluando toma la forma $\dfrac{0}{0}$ lo que implica que habría que levantar la indeterminación . La expresión puede escribirse :

$$\lim_{x\to6}\frac{x-(3x-2)^{1/2}-(x-2)^{1/3}}{x-(x+3)^{1/2}-(4x+3)^{1/3}}$$

* Aplicando la regla de *L'*Hospital – Bernoulli :

$$\lim_{x\to6}\frac{1-\frac{1}{2}(3x-2)^{-1/2}(3)-\frac{1}{3}(x+2)^{-2/3}(1)}{1-\frac{1}{2}(x+3)^{-1/2}(1)-\frac{1}{3}(4x+3)^{-2/3}(4)}$$

* Evaluando se tendrá : $\dfrac{117}{148}$

PROBLEMA 13 :

Calcular: $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{sen^2x}-\frac{1}{x^2}\right)$

RESOLUCIÓN:

El límite tiene indeterminación de la forma $\infty-\infty$. En estos casos tratamos de cambiar al tipo de indeterminación de la forma *0/0*. En efecto, reescribiendo:

$$\left(\frac{1}{sen^2x}-\frac{1}{x^2}\right)=\frac{x^2-sen^2x}{x^2sen^2x}=\left(\frac{x+senx}{x}\right)\left(\frac{x-senx}{x\,sen^2x}\right)...(I)$$

El límite del primer paréntesis de *(I)*, es:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x+senx}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{senx}{x}\right)=2$$

y por lo tanto :

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{sen^2x}-\frac{1}{x^2}\right)=2\lim_{x\to 0}\frac{x-senx}{xsen^2x}...(II)$$

Teniendo en cuenta que $D_x sen^2x = sen2x$, entonces aplicando sucesivamente la Regla de L'Hopital, hasta levantar la indeterminación, se tiene:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-senx}{xsenx}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{sen^2x+xsen2x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{senx}{2sen2x+2x\cos 2x}$$

Puesto que el límite sigue indeterminado, derivamos una vez más. Así :

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-senx}{xsenx}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{6\cos 2x-4xsen2x}=\frac{1}{6-0}=\frac{1}{6}$$

y reemplazando en *(II)*, se obtiene:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{sen^2x}-\frac{1}{x^2}\right)=2\left(\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{3}$$

PROBLEMA 14 :

Determinar la n-ésima derivada de :

I) $f(x)\ (ax+b)^n$ *II)* $f(x)=\cos ax$

III) $f(x)=sen^2x$ *IV)* $f(x)=(1-3x)^{-1}$

RESOLUCIÓN :

I) De : $y=(ax+b)^n \rightarrow y'=na(ax+b)^{n-1}$

$\rightarrow y''=n(n-1)a^2(ax+b)^{n-2}$

$\rightarrow y'''=n(n-1)(n-2)a^3(ax+b)^{n-3}$

* De donde se puede inducir que :

$y^n=n!\,a^n(ax+b)^{n-n} \rightarrow y^n=n!a^n$

II) De : $y=\cos ax$

$\rightarrow y'=-a\ sen\ ax=a\cos\left(ax+\frac{\pi}{2}\right)$

$\rightarrow y''=-a^2\cos ax=a^2\cos\left(ax+2\frac{\pi}{2}\right)$

$\rightarrow y'''=a^3\ sen\ ax=a^3\cos\left(ax+3\frac{\pi}{2}\right)$

* Entonces : $y^{(n)}=a^n\cos\left(ax+\frac{n\pi}{2}\right)$

III) Como : $sen^2x=\frac{1-\cos 2x}{2}$

$\rightarrow f(x)=\frac{1}{2}-\frac{\cos 2x}{2}$

* Luego su enésima derivada , será :

$$f^n(x)=\underbrace{\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{1}{2}\right)}_{vale\ cero}-\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{\cos 2x}{2}\right)$$

$\rightarrow f^n(x)=-\frac{1}{2}\frac{d^n}{dx^n}(\cos 2x)$

$\rightarrow f^n(x)=-\frac{1}{2}.2^n\cos\left(2x+\frac{n\pi}{2}\right)$........*(ver II)*

IV) De : $y=(1-3x)^{-1}$

$\rightarrow y'=(-1)(1-3x)^{-2}(-3)$

$\rightarrow y''=(-1)(-2)(1-3x)^{-2}(-3)^2$

$\rightarrow y'''=(-1)(-2)(-3)(1-3x)^{-3}(-3)^3$

* De donde se puede inducir y deducir que :

$f^n_{(x)}=3^n n!(1-3x)^{-n-1}$

PROBLEMA 15 :

Calcualar « y' », en:

I) $\sqrt{xy}+2x=\sqrt{y}$ *II)* $\cos^2(x+y)=1$ *III)* $x^y=y^x$

RESOLUCIÓN :

I) $\frac{1}{2}(xy)^{-1/2}(xy'+y)+2=\frac{y'}{2\sqrt{y}}$

* Despejando y' resulta : $y'=\frac{4\sqrt{xy}+y}{\sqrt{x}-x}$

II) Derivando, resulta :

$-2\cos(x+y)\ sen(x+y)(1+y')=0$

$\rightarrow y'=-1$

III) Tomando logaritmos : $yLnx=xLny$

* Derivando , resulta : $\frac{y}{x}+y'Lnx=\frac{xy'}{y}Lny$

* Despejando : $y'=\frac{y}{x}\left(\frac{xLny-y}{yLnx-x}\right)$

PROBLEMA 16 :

Determinar y' e y'' de :

$$\sqrt{\frac{y-\sqrt{x}}{y+\sqrt{x}}}+\sqrt{\frac{y+\sqrt{x}}{y-\sqrt{x}}}=5/2$$

RESOLUCIÓN :

* Elevando al cuadrado tenemos:

$$\frac{y-\sqrt{x}}{y+\sqrt{x}}+\frac{y+\sqrt{x}}{y-\sqrt{x}}=25/4-2=17/4$$

$$0=\frac{\left(y+\sqrt{x}\right)\left(y'-1/2\sqrt{x}\right)-\left(y-\sqrt{x}\right)\left(y'+1/2\sqrt{x}\right)}{\left(y+\sqrt{x}\right)^2}$$

$$+\frac{\left(y-\sqrt{x}\right)\left(y'+1/2\sqrt{x}\right)-\left(y+\sqrt{x}\right)\left(y'-1/2\sqrt{x}\right)}{\left(y-\sqrt{x}\right)^2}$$

* Simplificando obtengo :

$$0=y'\ (-8yx)+4y^2\ \rightarrow\ y'=\frac{y}{2x}$$

* Entonces : $y''=\dfrac{y'2x-2y}{4x^2}$

$$\rightarrow y''=\frac{\frac{y}{2x}.2x-2y}{4x^2}=-\frac{y}{4x^2}$$

PROBLEMA 17 :

Sea: $x=Ln(3-t)$; $y=\dfrac{2t}{1+t}$

Calcular : $\dfrac{dy}{dx}$

RESOLUCIÓN :

* Primero derivamos respecto a «t» .

$$\frac{dx}{dt}=\frac{-1}{3-t}$$

$$\frac{dy}{dt}=\frac{2(1+t)-2t(1)}{(1+t)^2}=\frac{2}{(1+t)^2}$$

* Luego :

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}=\frac{\frac{2}{(1+t)^2}}{\frac{-1}{3-t}}=\frac{2t-6}{(1+t)^2}$$

PROBLEMA 18 :

Calcular : $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{1}{x}-\cos x\right)$

RESOLUCIÓN :

* Lo pedido, será :

$$\lim_{x\to0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{\cos x}{\operatorname{sen}x}\right)=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{\operatorname{sen}x-x\cos x}{x\operatorname{sen}x}\right)=\frac{0}{0}$$

* Entonces debemos aplicar L' Hospital

$$\lim_{x\to0^+}\left(\frac{x\operatorname{sen}x}{x\cos x+x\operatorname{sen}x}\right)=\frac{0}{0}$$

Seguimos Aplicando L' Hospital

$$\lim_{x\to0^+}\left(\frac{x\cos x+\operatorname{sen}x}{2\cos x-x\operatorname{sen}x}\right)=\frac{0}{2}=0$$

* Por lo tanto :

$$\lim_{x\to0^+}\left(\frac{1}{x}-\cot x\right)=0$$

PROBLEMA 16 :

Determinar los siguientes límites (por L'Hospital si es posible) .

I) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{x^5}$ IV) $\lim\limits_{x\to0}\operatorname{arcsen}x\operatorname{ctg}x$

II) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{Lnx}{\sqrt[3]{x}}$ V) $\lim\limits_{x\to0}x^x$

III) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{Ln(\operatorname{sen}mx)}{Ln(\operatorname{sen}x)}$ VI) $\lim\limits_{x\to0}x^{\operatorname{sen}x}$

RESOLUCIÓN :

$$I)\ \lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^5}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{5x^4}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{20x^3}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{60x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{120x}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{120}=\infty$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^5}=\infty$$

$$II)\ \lim_{x\to\infty}\frac{Lnx}{\sqrt[3]{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1/x}{1/3x^{-2/3}}=\lim_{x\to\infty}3x^{-1/3}=0$$

$$\rightarrow\lim_{x\to\infty}\frac{Lnx}{\sqrt[3]{x}}=0$$

$$III)\ \lim_{x\to0}\frac{Ln(\operatorname{sen}mx)}{Ln(\operatorname{sen}x)}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{m\cos mx}{\operatorname{sen}x}}{\frac{\cos x}{\operatorname{sen}x}}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{m\operatorname{sen}x\cos mx}{\operatorname{sen}mx\cos x}$$

$$=m\lim_{x\to0}\frac{-m^2\operatorname{sen}x\operatorname{sen}mx+m\cos x\cos mx}{-\operatorname{sen}x\operatorname{sen}mx+m\cos x\cos mx}$$

$$=m\left(\frac{-0+1}{-0+m}\right)=1\rightarrow\lim_{x\to0}\frac{Ln(\operatorname{sen}mx)}{Ln(\operatorname{sen}x)}=1$$

$$IV)\ \lim_{x\to0}\frac{\operatorname{arcsen}x}{\tan x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{\sec^2x}=\lim_{x\to0}\frac{\cos^2x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\rightarrow\lim_{x\to0}\operatorname{arcsen}x\operatorname{ctg}x=\frac{(1)^2}{\sqrt{1-0}}=1$$

V) $\lim_{x\to 0} x^x = \lim_{x\to 0} e^{Lnx^x} = \lim_{x\to 0} e^{xLnx}$

$= e^{\lim_{x\to 0} xLnx} = e^{\lim_{x\to 0}\frac{Lnx}{1/x}} = e^{\lim_{x\to 0}\frac{1/x}{-1/x^2}}$

$= e^{\lim_{x\to 0}(-x)} = e^0 = 1$

VI) $\lim_{x\to 0} x^{senx} = \lim_{x\to 0} e^{senxLnx} = e^{\lim_{x\to 0}\frac{Lnx}{1/senx}}$

$= e^{\lim_{x\to 0}\frac{1/x}{-cosx/sen^2x}} = e^{\lim_{x\to 0}-\frac{sen^2x}{xcosx}}$

$= e^{\lim_{x\to 0}-\frac{senx}{x}.tangx} = e^{(-1)(0)} = 1$

$\Rightarrow \lim_{x\to 0} x^{senx} = 1$

PROBLEMA 20 :

I) Hallar y': si $x^2 + y^2 = 6xy$

II) Halle la ecuación de la recta tangente a la curva dada por $x^2 + y^2 = 6xy$ en el punto , $(3 ;3)$.

RESOLUCIÓN :

* En la ecuación $x^2 + y^2 = 6xy$ derivamos con respecto a x :

$$3x^2 + 3y^2y' = 6y + 6xy'$$

$$\rightarrow x^2 + y^2y' = 2y + 2xy' \rightarrow y' = \frac{2y - x^2}{y^2 - 2x}$$

* Para el punto $(3 ;3)$ la pendiente m de la recta tangente está dada por y' evaluada en $(3 ; 3)$

$$m = \frac{6-9}{9-6} = -1$$

* Luego , la ecuación pedida es: $y - 3 = -(x - 3)$

PROBLEMA 21 :

Si : $f(x) = \begin{cases} x^2 & ; x < 2 \\ 4x + b ; & x \geq 2 \end{cases}$

es derivable en $x = 2$. Calcule «b»

RESOLUCIÓN :

f es derivable en $x = 2$

$\Rightarrow$ f es continua en $x = 2$

* Luego : $\lim_{x\to 2} f(x) = f(2)$

$\Rightarrow$ Por límites laterales :

$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} 4x + b = 8 + b$ ....*(I)*

$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} x^2 = 2^2$ ....*(II)*

* De *(I)* y *(II)*: $8 + b = 4 \Rightarrow b = -4$

* En efecto si calculamos las derivadas laterales :

$$f_+'(2) = \lim_{x\to 2^+}\frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \frac{4x - 4 - (8 - 4)}{x - 2} = 4$$

$$f_-'(2) = \lim_{x\to 2^-}\frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \frac{x^2 - 2^2}{x - 2} = 4$$

* Podremos verificar que son iguales a 4 y por ende es derivable en $x = 2$

PROBLEMA 22 :

Determinar los valores de a y b, tales que $f'(1)$ exista , si :

$$f(x) = \begin{cases} x^2, \text{ si } x < 1 \\ ax + b, \text{ si } 1 \leq x \end{cases}$$

¿Es f diferenciable en todo dominio?

RESOLUCIÓN :

$$f_-'(1) = \lim_{h\to 0^-}\frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0^-}\frac{(1+h)^2 - (a+b)}{h} = \lim_{h\to 0^-}\frac{h^2 + 2h + (1 - a - b)}{h}$$

* Para que exista el límite y por tanto la derivada, debe ocurrir que :

$1 - a - b = 0$ ....*(I)*

* En cuyo caso , además :

$f_-'(1) = \lim_{h\to 0^-}\frac{h^2 + 2h}{h} = \lim_{h\to 0^-}(h + 2) = 2$ ....*(II)*

$$f_+'(1) = \lim_{h\to 0^+}\frac{f(1+h) - f(1)}{h} =$$

$\lim_{h\to 0^+}\frac{a(1+h) + b - (a+b)}{h} = \lim_{h\to 0^+}\frac{ah}{h} = a$ ......*(III)*

* Como $f'(1)$ existe, se tendrá que $f_-'(1) = f_+'(1)$, es decir de *(II)* y *(III)*: $a = 2$

Luego reemplazando a=2 en(I)*,obtenemos $b = -1$

* Entonces tenemos que f es derivable en $x = 1$

* Finalmente , $f_1(x) = x^2$ es derivable en todo su dominio $(x < 1)$ y $f_2(x) = 2x - 1$ es también derivable en todo su dominio $(x \geq 1)$; con la cual decimos que f es derivable en todo su dominio $\mathbb{R}$.

PROBLEMA 23 :

Verificar la función :

$$f(x)\begin{cases} |x + 2|; \ x < 0 \\ 2 - x^2; \ 0 \leq x < 2 \\ x^2 - 4x + 2; \ x \geq 2 \end{cases}$$

es derivable en $x=0$ y $x=2$

RESOLUCIÓN :

* Observe que $f(0) = 2$; $f(2) = -2$

$f(x)$ es continua para $x < 0$

$f(x)$ es continua para $0 \le x < 2$ y como

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} |x+2| = 2$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} 2 - x^2 = 2$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = 2 = f(0)$$

$\Rightarrow$ f es continua en $x = 0$ analizaremos la diferencialidad en $x = 0$.

$$f'_-(0) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{|h+2|-2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0^-} 1 = f'_-(0) = 1$$

$$f'_+(0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h}$$

Como $f'_-(0) \neq f'_+(0)$ entonces f no es derivable en 0.

* Ahora para $x = 2$

$$f'_-(2) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(2+h)-f(2)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0^-} \frac{2-(2+n)^2-(-2)}{h} = \lim_{h\to 0^-} -\frac{h^2-4h}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0^-} -h-4 \Rightarrow f'_-(2) = -4$$

$$f'_+(2) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(2+h)-f(2)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{(2+h)^2-4(2+h)+2-(-2)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0^+} h \Rightarrow f'_+(2)$$

* Como $f'_-(2) \neq f'_+(2)$ entonces f no es derivable en 2.

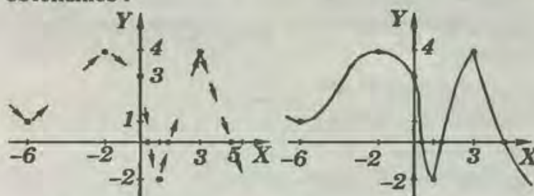
PROBLEMA 24 :

Esbozar la gráfica de una función continua en $\mathbb{R}$, que cumpla las condiciones :

* $f(\frac{1}{2}) = f(\frac{3}{2}) = f(5) = 0$
* $f(-6) = 1, f(-2) = 4, f(0) = 3, f(1) = -2, f(3) = 4$
* $f'(-6) = f''(-2) = 0; f'(1) \wedge f'(3)$ no existen.
* $f'(x) < 0, \forall x \in]-\infty;-6[\cup]-2;1[\cup]3;\infty[$
* $f'(x) > 0, \forall x \in]-6;-2[\cup]1;3[$

RESOLUCIÓN :

* Ordenando los datos en el plano y graficando obtenemos :



PROBLEMA 25 :

Determinar los puntos críticos de la función :

$$f(x) = x^{\frac{4}{3}} - 12x^{\frac{1}{3}}$$

RESOLUCIÓN :

* Derivando la función resulta :

$$f'(x) = \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}} - 4x^{\frac{-2}{3}} = \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}} - \frac{4}{x^{\frac{2}{3}}}$$

$$f'(x) = \frac{4x-12}{3x^{\frac{2}{3}}}$$

* $f'(x)$ existe para todo x diferente de $x = 0$, es decir $f'(0)$ no existe .

* Pero como $x = 0$, es un elemento del dominio de la función, $x = 0$ es punto crítico de f.

* Además $f'(x) = 0$, sólo si: $4x - 12 = 0$, luego $x=3$ es punto crítico de f.

PROBLEMA 26 :

Determinar los puntos críticos de la función :

$$f(x) = x^2e^{-x}$$

RESOLUCIÓN :

* Derivando la función resulta :

$f'(x) = 2xe^{-x} + x^2e^{-x}(-1)$

$f'(x) = xe^{-x}(2-x)$

* El factor e^{-x} nunca es cero, luego $f'(x) = 0$, si $x(2-x) = 0$, es decir , $x = 0$ ó $x = 2$

* La funcion tiene dos puntos críticos : $x=0$ y $x=2$.

PROBLEMA 27 :

Si $f(x) = x^2 - 8x + 4$, hallar los intervalos en los que $f(x)$ crece y aquellos en los que decrece.

RESOLUCIÓN :

* Los puntos críticos nos sirven para construir los intervalos en los que se analiza el signo de $f'(x)$.

$f'(x) = 2x - 8, f'(x) = 0 \Rightarrow x = 4$

Intervalo	x_0	signo de $f'(x)$ en x_0
$x < 4$	0	$f'(0) = -8 < 0(-)$
$x > 4$	6	$f'(6) = 4 > 0(+)$

* Veamos que si $x < 4$, la función $y = f(x)$ es decreciente , y que si $x > 4$ la función , $y = f(x)$ es creciente .

PROBLEMA 28 :

Determinar los valores máximos y mínimos absolutos de :

$f(x) = x^3 + 3x^2 - 24x - 10$ en $[0 ; 4]$

RESOLUCIÓN :

*f es continua en el intervalo $[0 ; 4]$; por lo tanto se puede garantizar la existencia de los extremos absolutos de f en $[0 ; 4]$

$$f'(x) = 3(x-2)(x+4)$$

* Puntos críticos:

$x = 0 ; x = 2 ; x = 4$

$\rightarrow f(0) = -10 ; f(2) = -32 ; f(4) = 6$

* El máximo absoluto es : $f(4) = 6$

* El mínimo absoluto es : $f(2) = -32$

PROBLEMA 29 :

Si $f(x) = \dfrac{4|x|}{1+x^2} ; x \in [-4 ; 2]$, determine sus valores máximos y mínimos absolutos .

RESOLUCIÓN :

* Es claro que f es continua en el intervalo $[4 ; 2]$; por lo tanto , podemos garantizar la existencia de los extremos absolutos de f en $[4 ; 2]$.

$$f'_{(x)} = \frac{4x(x^2-1)}{|x|(1+x^2)^2}$$

* Se puede determinar que los puntos críticos de f' son $x = -4 ; x = 2 ; x = 0 ; x = 1 ; x = -1$

$f(-4) = \dfrac{-16}{17}$; $f(-1) = -2$

$f(0) = 0$; $f(1) = -2$; $f(2) = \dfrac{-8}{5}$

* El valor máximo absoluto es: $0 = f(0)$

* El valor mínimo absoluto es: $-2 = f(1) = f(-1)$

PROBLEMA 30 :

Encontrar los intervalos donde la función $f(x) = \dfrac{x^4}{12} - \dfrac{x^3}{2} + x^2 + 10$, es cóncava hacia abajo y donde es cóncava hacia arriba . Encontrar los puntos de inflexión .

RESOLUCIÓN :

* Se calcula la primera y segunda derivada :

$$f'(x) = \frac{x^2}{3} - \frac{3x^2}{2} + 2x \;;\; f''(x) = x^2 - 3x + 2$$

* Para averiguar los posibles puntos de inflexión debemos hacer $f''(x) = 0$: $x^2 - 3x + 2 = 0$, factorizando la expresión obtenemos:

$$(x-1)(x-2) = 0 .$$

*Los posibles puntos de inflexión son : $x = 1$ ó $x = 2$

*Evaluamos $f''(x)$ a la izquierda y a la derecha de 1; tomemos $x = 0$ y $x = 1,5$:

$f''(0) = 0^2 - 3(0) + 2 = 2$ y $2 > 0$

$f''(1,5) = 1,5^2 - 3(1,5) + 2 = -0,25$ y $-0,25 < 0$

* Como de un lado al otro de $x = 1$ la segunda derivada cambia de signo , o sea varía la concavidad de la gráfica , $x = 1$ es un punto de inflexión .

* Evaluamos $f''(x)$ a la izquierda y a la derecha de $x = 2$. Tomemos $x = 1,5$ y $x = 3$.

$f''(1,5) = -0,25$ y $-0,25 < 0$

$f''(3) = 3^2 - 3(2) + 2 = 5$ y $5 > 0$

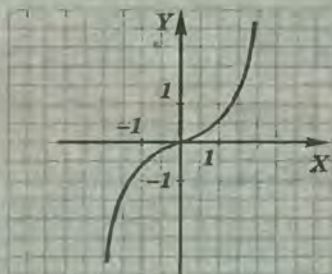
* Como de un lado a otro de $x = 2$, la segunda derivada cambia de signo , $x = 2$ es un punto de inflexión .

* En resumen :

$f(x)$ es cóncava hacia arriba en el intervalo $]-\infty ; 1[$ $f(x)$ cambia su concavidad en $x = 1$, $f(x)$ es cóncava hacia abajo en el intervalo $]1;2[$, $f(x)$ cambia de concavidad en $x = 2$, $f(x)$ en cóncava hacia arriba para $x > 2$, en el intervalo $]2; \infty[$

PROBLEMA 31 :

Determinar los intervalos en que la curva correspondiente a $f(x) = x^3$, es cóncava hacia arriba y dónde es cóncava hacia abajo .



RESOLUCIÓN :

* Se calcula la segunda derivada de la función:

$$f'(x) = 3x \;;\; f''(x) = 6x$$

* $f(x)$ es cóncava hacia arriba si $f''(x) > 0$, es decir, cuando : $6x > 0 \rightarrow x > 0$

* $f(x)$ es cóncava hacia abajo cuando $f''(x) < 0$, es decir , cuando : $6x < 0 \rightarrow x < 0$

* Por lo tanto $f(x) = x^3$ es cóncava hacia arriba en

el intervalo $]0;\infty[$ y es cóncava hacia abajo en el intervalo $]-\infty;0[$

PROBLEMA 32 :

Determinar los intervalos en donde es cóncava hacia arriba y donde es cóncava hacia abajo la curva de la función $f(x) = 5x^2 - 20x + 3$

RESOLUCIÓN :

* Se halla la segunda derivada de la función :

$$f'(x) = 10x - 20$$
$$f''(x) = 10$$

* Como $f''(x) = 10$ y $10 > 0$ para toda x, podemos decir que la curva de la función $f(x) = 5x^2 - 20x + 3$ es cóncava hacia arriba en todo su dominio .

PROBLEMA 33 :

Hallar los máximos y los mínimos , relativos y absolutos , de la función $f(x) = x^3 - 3x + 2$ en donde $-5 \le x \le 3$.

RESOLUCIÓN :

*Encontramos los puntos críticos de la función :

* Como esta función es de dominio restringido puesto que sólo se define para el intervalo $[-5;3]$, ya se tienen dos puntos críticos : $x_0 = -5$; $x_0 = 3$

* Ahora averigüemos otros puntos críticos con la primera derivada :

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x+1)(x-1)$$

* Otros puntos críticos son : $x_0 = -1$, $x_0 = 1$

* Veamos cuál de los dos anteriores puntos críticos es máximo y cuál es el mínimo :

* Reemplazamos $x = -1$ en

$f''(x) = 6x \rightarrow f''(-1) = 6(-1) = -6 < 0$ luego $f''(-1) > 0$

*La función es cóncava hacia abajo alrededor de $x_0 = -1$.

* Entonces $x_0 = -1$ es un máximo en el intervalo $]-5;1[$

* Reemplazamos $x = 1$ en $f''(x) = 6x$

$\rightarrow f''(1) = 6(1) > 0$, luego $f''(1) > 0$

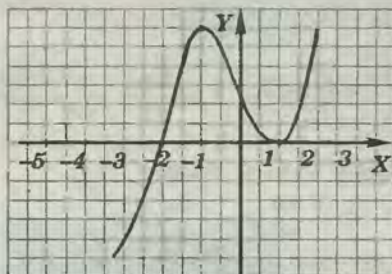
* La función es cóncava hacia arriba alrededor de : $x_0 = 1$.

* Luego $x_0 = 1$ es un mínimo en el intervalo $]-1;3[$.

* Para decidir cuáles de los puntos críticos son máximos y mínimos , relativos o absolutos, calcularemos $f(x)$ es esos puntos:

$f(-5) = -108$; $f(1) = 0$; $f(-1) = 4$ y $f(3) = 20$

* Según lo anterior :



$x_0 = -1$ es un máximo relativo .

$x_0 = 1$ es un mínimo relativo .

$x_0 = 3$ es un máximo absoluto .

$x_0 = -5$ es un mínimo absoluto .

PROBLEMA 34 :

Una pelota se proyecta verticalmente hacia arriba "S" metros del punto de partida . En el instante t (segundos) donde :

$$S = 64t - 16t^2$$

¿Cuál es la máxima altura alcanzada?

A) 64 B) 0 C) 16 D) 32 E) Infinita

RESOLUCIÓN :

* Como se quiere calcular una altura máxima en un instante determinado , calcularemos la primera derivada de S con respecto a t .

$$\frac{ds}{dt} = 64 - 32t$$

* Para que la altura sea máxima :

$$64 - 32t = 0 \rightarrow t = 2$$

* Reemplazando en la igualdad inicial .

$$S = 64(2) - 16(2)^2 = 64$$

RPTA: "A"

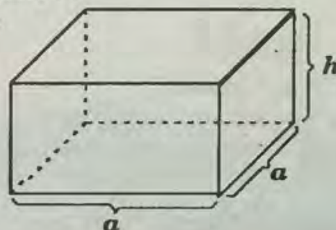
PROBLEMA 35 :

Una caja tiene una altura h y una base cuadrada cuyo lado es un número entero , donde $p + h = 60$, siendo p el perímetro de la base . Calcular el volumen de la caja de mayor volumen .

A) 10^3 B) $1,2 \times 10^3$ C) $1,5 \times 10^3$
D) 2×10^3 E) 3×10^3

RESOLUCIÓN :

* Graficando :



* $a = \dfrac{p}{4}$

* $h = 60 - p$

* Volumen :

$$V=\left(\frac{p}{4}\right)^2(60-p)\rightarrow V=\frac{60p^2}{16}-\frac{p^3}{16}\text{..........}(I)$$

* Para determinar volumen máximo , derivamos y encontramos el punto crítico :

$$\bullet\ V'=\frac{60}{16}(2p)-\frac{3p^2}{16}=0$$

$\Rightarrow p = 40$, para que el volumen sea máximo .

* Reemplazando en *(I)* :

$$V=\frac{60}{16}(40)^2-\frac{(40)^3}{16}=2000$$

RPTA: "D"

PROBLEMA 36 :

Traza la gráfica de $f(x) = 4x^3 - 33x^2 + 84x - 60,$ $x\in[1;11]$

RESOLUCIÓN :

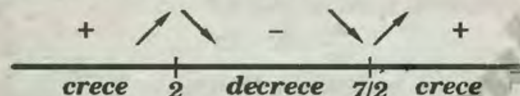
* Aplicamos el críterio de la primera derivada :

$f'(x) = 12x^2 - 66x + 84 \Rightarrow f'(c) = 0$

$\Leftrightarrow 12c^2 - 66c ++84 = 0 \Leftrightarrow c = 2$ ó $c = 7/2$

*Analizando los signos de $f'(x)$:

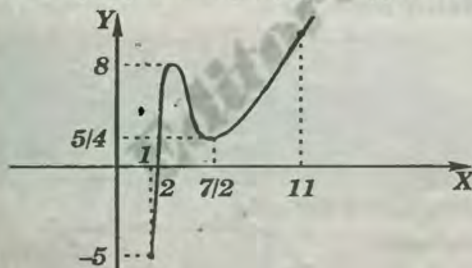
Elegimos $f'(x) > 0$ y nos queda :



* En $x = 2$, hay máximo : $f(2) = 8$.

* En $x = 7/2$ hay mínimo : $f(7/2) = 5/4$.

* Como $x\in[1;11]$, tenemos que : $f(1) = -5$ y $f(11) = 2195$



PROBLEMA 37 :

Calcular la máxima cantidad de material (área) que debe emplearse para fabricar un depósito en forma de cilindro recto sin tapa , que tenga una capacidad de "V".

RESOLUCIÓN :



* De: $V = \pi r^2 h$ .... *(I)*

*La cantidad de material *(M)* que debe emplearse está dada por el área lateral del depósito más el área de la base de dicho depósito .

* Así : $M = A_l + A_b \Rightarrow M = 2\pi rh + \pi r^2$ .... *(II)*

* De *(I)* y *(II)* , se obtiene :

$$M=2\pi\left(\frac{V}{\pi r^2}\right)+\pi r^2=\frac{2V}{r}+\pi r^2$$

* Analizamos en qué valores de r , la cantidad de material es mínima :

$$*\ \frac{dM}{dr}=-\frac{2V}{r^2}+2\pi r.$$

Haciendo $\frac{dM}{dr}=0$, obtendremos: $r=\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$

$$*\ \frac{d^2M}{dr^2}=\frac{4V}{r^3}+2\pi\text{. Como }\left.\frac{d^2M}{dr^2}\right|_{r=\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}}>0$$

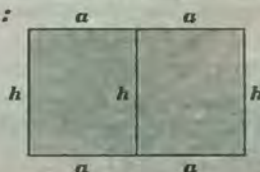
*Entonces existe un mínimo en $r=\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$ cuyo valor es $M=3\sqrt[3]{\pi V^2}$. Siendo las longitudes de r y h , las siguientes :

Radio de la base: $r=\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$; altura del depósito : $h=\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$.

PROBLEMA 38 :

Un señor tiene *240* metros de cerca con los que quiere limitar un corral . Planea cercar todo el corral y después subdividirlo teniendo un cerco a lo ancho del terreno . ¿Qué dimensiones deberá tener el corral rectangular para que quede demarcada la máxima área posible con la cantidad de cerca de que dispone?

RESOLUCIÓN :



* Del perímetro:

$4a + 3h = 240$ .... (I)

* Del área limitada :

$A = 2ah$ .... (II)

* De (I) y (II) :

$A = \left(120 - \frac{3}{2}h\right)h = 120h - \frac{3}{2}h^2$, ahora :

$A' = 120 - 3h$ y $A' = 0 \Leftrightarrow h = 40$

* Pero $A'' = -3$, entonces $A''|_{h=40} = -3 < 0$, luego existe un máximo en $h = 40$, cuyo valor es:

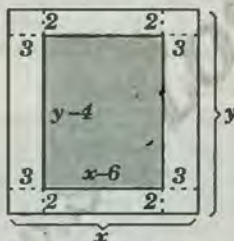
$$A = \left(120 - \frac{3}{2} \times 40\right) \times 40 = 60 \times 40 = 2400\ m^2$$

* Las dimensiones del corral son :
* Largo del corral : $2a = 60\ m$.
* Ancho del corral : $h = 40\ m$.

PROBLEMA 39 :

En la página de una revista, el texto impreso debe ocupar $600\ cm^2$. Los márgenes superior e inferior deben ser iguales a $2\ cm$, los de izquierda y derecha, iguales a $3\ cm$. Tomando en cuenta sólo la economía de papel , ¿qué dimensiones de página serían las más ventajosas?

RESOLUCIÓN :



* Sean "x" e "y" las dimensiones de la página.
* Dato : $(x - 6)(y - 4) = 600$ .... (I)
* Piden que el área de la página sea mínima, para esto hacemos $A = xy$ .... (II)
* De (I) y (II) :

$$A = \frac{600x}{x - 6} + 4x$$

$$\Rightarrow A' = 600.\frac{(x)'(x - 6) - (x - 6)'x}{(x - 6)^2} + (4x)'$$

$$A' = 600.\frac{-6}{(x - 6)^2} + 4$$

* Ahora : $A' = 0 \Leftrightarrow -\frac{600 \times 6}{(x-6)^2} + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 36$

* Pero $A'' = \frac{6 \times 600 \times 2}{(x - 6)^3}$ y $A''|_{x=36} = \frac{8}{30} > 0$.

* Entonces en $x = 36$ ocurre un mínimo , cuyo valor es : $A = \frac{600 \times 36}{30} + 4(36) = 864\ cm^2$.

* Las dimensiones de la página son:

Ancho : $x = 36\ cm$.

Largo : $y = 24\ cm$.

PROBLEMA 40 :

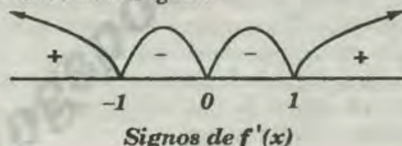
Hallar la gráfica de la función : $f(x) = 3x^5 - 5x^3$

RESOLUCIÓN:

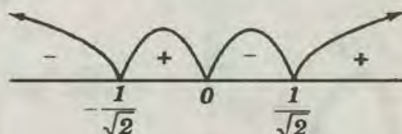
El dominio es $\mathbb{R}$. Derivando, se obtiene:

$$f'(x) = 15x^2(x+1)(x-1)$$

de donde encontramos que los puntos críticos de primera especie son: -1, 0 y 1. Los signos de $f'(x)$ se muestran en la Figura:



Signos de $f'(x)$



Signos de $f''(x)$

De la Figura y por aplicación del criterio de la primera derivada, se obtienen los datos que muestra la siguiente Tabla :

x	$f(x)$	$f'(x)$	Conclusión
$x<-1$		+	creciente
$x=-1$	2	0	máximo relativo
$-1<x<0$		−	decreciente
$x=0$	0	0	no es extremo relativo
$0<x<1$		−	decreciente
$x=1$	−2	0	mínimo relativo
$x>1$		+	creciente

Derivando nuevamente, se tiene:

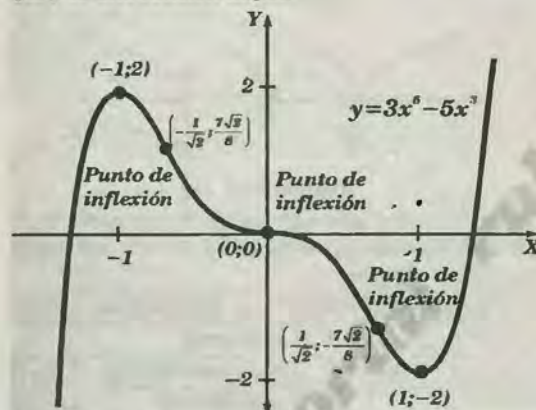
$$f''(x) = 60x\left(x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

de donde encontramos que los puntos críticos de segunda especie son: $-\frac{1}{\sqrt{2}}$, 0 y $\frac{1}{2}$. Los signos de $f''(x)$ se muestran en la siguiente Figura .

De esta figura y aplicando el criterio de concavidad se obtienen los datos que muestra la siguiente tabla

x	$f(x)$	$f''(x)$	Conclusión
$x<-\frac{1}{\sqrt{2}}$		$-$	cóncava hacia abajo
$x=-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{7\sqrt{2}}{8}$	0	punto de inflexión
$-\frac{1}{\sqrt{2}}<x<0$		$+$	cóncava hacia arriba
$x=0$	0	0	punto de inflexión
$0<x<\frac{1}{\sqrt{2}}$		$-$	cóncava hacia abajo
$x=\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{7\sqrt{2}}{8}$	0	punto de inflexión
$x>\frac{1}{\sqrt{2}}$		$+$	cóncava hacia arriba

Adicionalmente, encontramos que la gráfica no tiene asíntotas. Dicha gráfica intersecta al eje Y en el origen de coordenadas. La siguiente Figura muestra la gráfica de f. Nótese que existe simetría respecto del origen, lo cual era de esperar, puesto que f es una función impar.



PROBLEMA 41 :

En la hacienda Pucayacu , ubicada a quince kilómetros de la ciudad de Tarapoto, se estima que el precio de producción de un cajón de papaya es de *S/.3*. Al fijar en x nuevos soles el precio del cajón, el dueño de la hacienda espera vender $50 - 5x$ cajones de papaya .

¿A qué precio debe ser vendido el cajón de papaya para que el agricultor obtenga la máxima utilidad?

RESOLUCIÓN :

* El costo de producción de $50 - 5x$ cajones de papaya es : $C(x) = 3(50 - 5x) = 150 - 15x$

*El ingreso que obtendría el agricultor por la venta de $50 - 5x$ cajones de papaya al precio de S/. x el cajón sería :

$$I(x) = x(50 - 5x) = 50x - 5x^2$$

* Así , la utilidad que obtiene el agricultor es :

$$U(x) = I(x) - C(x)$$

$$\rightarrow \quad U(x) = (50x - 5x^2) - (150 - 15x)$$

$$\rightarrow U(x) = -5x^2 + 65x - 150$$

* Para determinar el máximo valor que puede tomar la utilidad $U(x)$, aplicaremos las técnicas ustudiadas en el tema anterior . Así , primero debemos buscar los puntos críticos en la forma usual y luego analizamos su naturaleza .

* Derivando , obtenemos la razón de cambio :

$$U'(x) = -10x + 65$$

* Y haciendo $U'(x) = -10x + 65 = 0$, hallamos el punto crítico $x = 6,5$. Luego construimos la siguiente tabla :

Intervalo	x_0	Signo de $C'(x)$ en x_0	Función $C(x)$
$0<x<6,5$	6	$U'(6)=5>0$	Crece
			Valor máximo en $x=6,5$
$x>6,5$	7	$U'(7)=-5<0$	Decrece

* De esta forma hallamos que la función de utilidad $U(x)$ obtiene su máximo valor para $x = 6,5$. Por lo tanto, el cajón de papaya debe ser vendido a *S/.6,5* para maximizar la utilidad.

PROBLEMA 42 :

Un centro de estudios subsidia un viaje de promoción, el cuál costará *S/.150* a cada alumno si no lo hacen más de *150* alumnos. Sin embargo, el costo por alumno se reducirá en *50* céntimos por cada uno que sobrepase los *150*. ¿Cuántos alumnos deben realizar el viaje á fin de que el centro reciba los mayores ingresos brutos?

RESOLUCIÓN :

* Sea x el número de alumnos y $I(x)$ los ingresos brutos .

* El valor de ingreso se obtiene al multiplicar el número de alumnos "x" por el precio del pasaje.

* Cuando $x \le 150$, el ingreso es $I(x) = 150x$.

* Cuando $x > 150$, el ingreso es :

$$I(x) = [150 - 0,5(x - 150)]x = 225x - \frac{1}{2}x^2$$

* La función que resulta es :

$$I(x) = \begin{cases} 150x \ ; \ si \ x \le 150 \\ 225x - \frac{1}{2}x^2 \ ; \ si \ x > 150 \end{cases}$$

* Como por definición x es un número entero, para

tener una función continua supondremos que x toma valores reales .

*Por otro lado , se prueba fácilmente que $I(x)$ es continua en $x_0 = 150$.

*Ahora aplicando el criterio de la segunda derivada:

$$I'(x)=\begin{cases}150 ; x<150\\ 225x-x ; x>150\end{cases}$$

* Haciendo $I'(x)=0$, entonces : $225-x=0$,luego $x=225$.

* Además :

$$I''(x)=\begin{cases}0 \quad ; x<150\\ -1 ; x>150\end{cases}$$

* Como $x = 225$, entonces $I''\Big|_{x=225} < 0$, luego ocurre un máximo cuando $x = 225$.

* Finalmente, decimos que deben viajar **225** alumnos.

PROBLEMA 43:

Un fabricante de radios cobra **90** dólares por cada unidad cuando el costo medio de producción por unidad es de **60** dólares. Para conseguir mayores pedidos de los distribuidores, el fabricante está dispuesto a reducir el precio de un radio en **0,10** dólares por cada unidad adicional pedida a partir de las **100** primeras. Hallar el mayor pedido que podría admitir el fabricante para obtener un beneficio máximo.

REOLUCIÓN:

Consideremos que el número de unidades pedidas supera a **100**. Si el pedido fuera de **101** unidades el adicional sería de **1** unidad y el precio en dólares de cada radio sería de será $90 - 1(0,1)$; si el pedido fuera de **102** unidades el adicional será **2** unidades y el precio será $90-2(0,10)$; si el pedido es de **103** unidades el precio será $90 - 3(0,1)$, etc. Así, si el pedido es de $(100 + x)$ unidades, entonces el precio de cada radio será de $90-0,10x$. El beneficio b por unidad en dólares será:

$$b(x)=90-0,10x-60=30-0,10x$$

y el beneficio total B en dólares será:

$$B(x)=(100+x)(30-0,10x)=3\,000+20x-0,10x^2.$$

El beneficio por unidad y el beneficio total son funciones del número de unidades adicionales x. Para hallar el dominio de estas funciones consideramos que el fabricante no puede disminuir el precio indefinidamente. El beneficio por unidad $b(x)$ no puede ser negativo (perdería). Así, debe verificarse:

$$b(x)=30-0,10x\geq 0 \Rightarrow 300\geq x \Rightarrow 0\leq x\leq 300.$$

Nótese que x solo puede tomar valores enteros positivos. Sin embargo, puede considerarse que el dominio es todo el intervalo $[0;300]$. Así, tomamos:

$$B(x)=3\,000+20x-0,10x^2 \;;\; x\in[0;300]$$

siendo $B(x)$ continua en el intervalo $[0;300]$. Hallando la derivada e igualando a cero, se tiene:

$$B'(x)=20-0,20x=0 \Rightarrow x=100.$$

Así, los puntos críticos son **100,0** y **300**. Evaluando $B(x)$ en estos puntos, se obtienen:

$$B(100)=4\,000 \;;\; B(0)=3\,000 \;;\; B(300)=0.$$

De los tres valores el mayor es **4 000**. Por lo tanto, el beneficio máximo es de **4 000** dólares y se obtiene para $x=100$ unidades adicionales; es decir, cuando el pedido sea de **200** unidades. Por ensima de este valor el beneficio empieza a disminuir por lo que no tiene sentido aceptar mayores pedidos, lo que implica aumentar la producción, si el beneficio no aumenta. Así, concluimos: el mayor pedido que puede aceptar, a fin de obtener un beneficio máximo, es de **200** unidades.

PROBLEMA 44 :

Un agricultor del valle de Chanchamayo dedicado a la producción de naranjas deduce que por la venta de x cajas de esta fruta sus ingresos semanales son:

$f(x) = 14x + 0,05x^2,\ 0\leq x\leq 200$

A) ¿A cuánto asciende su ingreso semanal si vende ochenta cajas de naranja?

B) Si en una semana el ingreso es de S/.1900, ¿cuántas cajas de naranja se vendieron?

C) ¿Cuál es la función que mide la razón de cambio en el ingreso?

D) Determinar I'(140) e interpretar el resultado .

RESOLUCIÓN :

A) El ingreso normal por la venta de ochenta cajas es $I(80) = 14(80) + 0,05(80)^2 = 1440$

B) Si el ingreso es $I(x) = 1900$ soles, reemplazando se obtiene la ecuación :

$1900 = 14x + 0,05x^2$.

De donde resolviendo , $x = 100$.

Es decir , por la venta de cien cajas de naranjas el ingreso es **S/.1900** .

C) La función que mide la razón de cambio en el ingreso es la derivada de la función ingreso $I'(x)$

$$I'(x) = 14 + 0,1x$$

llamada también ***función ingreso marginal.***

D) Conocido $I'(x)$, sólo resta evaluar esta función para $x = 140$; así :

$I'(140) = 14 + (0,1)(140) = 28$ nuevos soles.

Significa que por la venta de la caja número *141* el ingreso que recibirá el agricultor es de *S/.28.*

PROBLEMA 45 :

Una inmobiliaria tiene un edificio de *120* apartamentos . Cuando la renta de cada uno es de *$.330* al mes , todos los apartamentos están ocupados . La experiencia ha demostrado que por cada incremento mensual de *$.30* en la renta, se desocupan *5* de ellos. El costo de mantenimiento de cada apartamento rentado es de *$.30* mensuales. ¿Qué renta debe cobrarse para maximizar la utilidad?

RESOLUCIÓN :

* La utilidad está dada por el ingreso menos el gasto.

Es decir : $V = I - G$ .... *(I)*

Sea x el número de incrementos (de *$30*) que se han efectuado, luego Ingresos = (alquiler) (número de apartamentos)

$I = (330 + 30x)(120 - 5x)$ .... *(II)*

$costo = 30(120 - 5x)$ .... *(III)*

* Reemplazando *(II)* y *(III)* en *(I)*:

$U = (330 + 30x)(120 - 5x) - 30(120 - 5x)$

$\Rightarrow U = (120 - 5x)(300 + 30x)$

* Simplificando : $U = 3600 + 2100x - 150x^2$

* Ahora : $\dfrac{dU}{dx} = 2100 - 300x$ y $U' = 0 \Leftrightarrow x = 7$

*Pero : $\Rightarrow \dfrac{d^2U}{dx^2} = -300 \Rightarrow \left.\dfrac{d^2U}{dx^2}\right|_{x=7} = -300 < 0$,

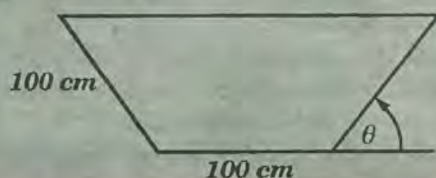
*entonces existe un máximo en $x = 7$, cuyo valor es:

$U = (120 - 5 \times 7)(300 + 30 \times 7) = \$43\ 350$

*La renta que debe cobrarse para maximizar la utilidad es : $330 + 30x = 540$.

PROBLEMA 46 :

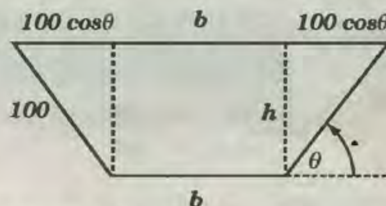
Se va a construir un canal de regadío cuya sección transversal debe ser un trapecio isósceles con las dimensiones indicadas en la siguiente figura . Determinar el valor de θ de manera que el volumen de agua que transporte sea máximo.



RESOLUCIÓN:

El canal transportará el máximo volumen de agua cuando el área de la sección sea máxima. Si h es la altura, B la base mayor, y b la base menor del trapecio isósceles, medidos en *cm*, entonces su área será:

$$A = \frac{1}{2}h(B+b) \text{ .... } (I)$$



De la Figura, se tiene:

$$h = 100\,sen\theta \ ; \ b = 100$$
$$B = 100 + 200\cos\theta$$

Reemplazando en *(I)* : $A = 10\ 000 sen\theta(1 + \cos\theta)$

Variando el ángulo θ se varía el área del trapecio.

Observamos que θ puede variar desde θ hasta $\dfrac{\pi}{2}$.

Así : $A(\theta) = 10\ 000\,sen\theta(1 + \cos\theta)$; $\theta \in [0, \pi/2]$.

* Vemos que $A(\theta)$ es continua en el intervalo cerrado $[0; \pi/2]$. Derivando:

$$A'(\theta) = 10\ 000[\cos\theta(1 + \cos\theta) - sen\theta(sen\theta)]$$
$$= 10\ 000(2\cos\theta - 1)(\cos\theta + 1)$$

Si $A'(\theta) = 0 \Rightarrow \cos\theta = \dfrac{1}{2} \ \vee \ \cos\theta = -1$

$$\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3} \ \vee \ \theta = \pi$$

De los dos valores de θ solo $\dfrac{\pi}{3}$ pertenece al intervalo $[0; \pi/2]$. Así, los puntos críticos son:

$\dfrac{\pi}{3}$; 0 y $\dfrac{\pi}{2}$. Evaluando A en estos puntos, se obtienen:

$$A(\pi/3) = 7\,500\sqrt{3} \ ; \ A(0) = 0 \ ; \ A(\pi/2) = 10000$$

El mayor de los tres valores es $7\,500\sqrt{3}$. Así, concluimos: el valor de θ para que el canal transporte el máximo volumen de agua es de $\dfrac{\pi}{3}$ radianes.

PROBLEMA 47 :

El costo de producción de x pantalones es : $c = 2 + 3x$ soles y el precio de venta por pantalón es $p = 55 - 2x$. ¿Cuál debe ser el número de pantalones producidos por día para lograr la utilidad máxima?

RESOLUCIÓN :

* El costo de x pantalones es : $c = 2 + 3x$.
* El precio de venta por pantalón es : $p = 55 - 2x$.

Luego el ingreso por la venta de x pantalones es:

$$p\,x = (55 - 2x)x = 55x - 2x^2$$

* La utilidad es:

$$U = I - c = (55x - 2x^2) - (2 + 3x) = 52x - 2x^2 - 2$$

* Ahora : $\dfrac{dU}{dx} = 52 - 4x, \wedge\ U' = 0 \Leftrightarrow x = 13$
* Pero : $\dfrac{d^2U}{dx^2} = -4 \Rightarrow \left.\dfrac{d^2U}{dx^2}\right|_{x=13} = -4 < 0$
* Luego en $x = 13$ ocurre un máximo, cuyo valor es $U = 52(13) - 2(13)^2 - 2 = 336$ soles .

*Entonces el número de pantalones producidos por día debe ser 13 , con lo cual se consigue una utilidad diaria de S/.336 .

PROBLEMA 48 :

Un contratista debe conectar agua potable a una tienda A de un centro comercial (ver siguiente figura). Para ello, debe llegar hasta cierto punto C de la cañería principal de agua situada debajo de la zona de parqueo. Le costará 120 soles por metro si es que cava, coloca la tubería, cubre y retoca la zona de parqueo; pero solamente 72 soles por metro si coloca la tubería por el borde de la zona de parqueo. Hallar la distancia x del punto A al punto Q, donde el contratista debería cambiar la dirección de la tubería hacia C para reducir el costo al mínimo.



RESOLUCIÓN:

Consideremos que en la figura , todas las dimensiones están en metros. Las distancias de Q a B y de Q a C son:

$$d(Q;B) = 24 - x\ ;\ d(Q;C) = \sqrt{(24-x)^2 + (16)^2}.$$

El costo del tramo AQ será de $72x$ soles y el costo del tramo. QC será de $120\sqrt{(24-x)^2 + 256}$. Si se varía la posición del punto Q se varía los costos. El punto Q puede ser cualquiera del tramo AB. Si $Q=A$, $x=0$ y significa que se decide ir directamente por la zona de parqueo. Si $Q=B$, $x=24$ y significa ir por el borde de la zona de parqueo hasta el punto B, y luego a traves de la zona de parqueo de B a C. Así, x puede variar de 0 a 24. Por lo tanto, el costo total C es función de x y tal que:

$$C(x) = 72x + 120\sqrt{(24-x)^2 + (16)^2}\ ;\ x \in [0;\ 24]$$

Observamos que $C(x)$ es continua en el intervalo cerrado $[0;24]$. Derivando, se tiene:

$$C'(x) = 72 - \frac{120(24-x)}{\sqrt{(24-x)^2 + (16)^2}}$$

$C'(x)$ existe para todo x en $[0;24]$ por lo que existirá punto crítico solo si vale cero. Haciendo $C'(x)=0$ se tiene:

$$\frac{120(24-x)}{(24-x)^2 + (16)^2} = 72 \Rightarrow 5(24-x) = 3\sqrt{(24-x)^2 + (16)^2}$$

Elevando al cuadrado y resolviendo se obtiene $x = 12$. Así, los puntos críticos son: 12 ; 0 y 24. Evaluando $C(x)$ en estos puntos se obtienen:

$$C(12) = 3\,264\ ;\ C(0) = 960\sqrt{13} \approx 3\,461\ ;\ C(24) = 3648$$

De los tres valores el menor es $C(12)$. Así, concluimos: el punto Q, donde se debe cambiar la dirección de la tubería para que el costo sea mínimo, está situado a una distancia de 12 metros del punto A.

PROBLEMA 49 :

Una caja rectangular con la base cuadrada debe tener una capacidad de $125\ cm^3$. El material de la base tiene un costo de S/.20 por centímetro cuadrado y el material para los lados , de S/.10. Determinar las dimensiones de la caja abierta que se quiere fabricar para que el costo del material sea mínimo.

RESOLUCIÓN:



* Volumen = $125 \Rightarrow x^2 y = 125$ .... (I)
* Costo : $C = 20x^2 + 10(4xy)$ .... (II)
* De (I) y (II), se obtiene :

$$C = 20x^2 + 40x\left(\frac{125}{x^2}\right) = 20x^2 + \frac{5000}{x}$$

* Ahora : $C' = 40x - \dfrac{5000}{x^2}$

* Entonces: $C' = 0 \Leftrightarrow 40x - \frac{5000}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = 5$

*Pero : $C'' = 40 + \frac{10000}{x^3}$ entonces $C''\Big|_{x=5} > 0$, es decir hay mínimo en $x = 5$

* Las dimensiones de la caja son $x = 5$ cm e $y = 5cm$.

PROBLEMA 50 :

Hallar las dimensiones del rectángulo de mayor área, de lados paralelos a los ejes coordenados, que puede inscribirse en la región encerrada por las parábolas: $3y=12-x^2$ y $6y=x^2-12$.

RESOLUCIÓN:

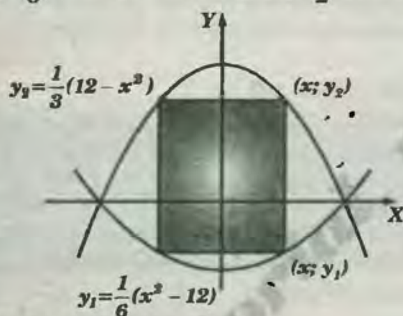
La siguiente figura muestra la gráfica de las dos parábolas y un rectángulo inscrito en la región encerrada por las parábolas. Ambas parábolas se intersectan en los puntos $(-2\sqrt{3};\ 0)$ y $(2\sqrt{3};\ 0)$.

Sean b y h la base y la altura del rectángulo, respectivamente.

De la figura:

$b=2x$ $\qquad y_2=\frac{1}{3}(12-x^2)$

$y_1=\frac{1}{6}(x^2-12)$ $\qquad h=y_2-y_1=\frac{1}{2}(12-x^2)$



El área del rectángulo será:

$$A=bh=2x\times\frac{1}{2}(12-x^2)=12x-x^3$$

Se obtienen diferentes rectángulos si x se hace variar de 0 a 3. Así, el área de los rectángulos es función de x, siendo:

$$A(x)=12x-x^3\ ,\ x\in[0;2\sqrt{3}]$$

Como $A(x)$ es continua en el intervalo cerrado $[0;2\sqrt{3}]$, bastará determinar los puntos críticos.

Derivando e igualando a cero:

$$A'(x)=12-3x^2=0 \Rightarrow x=2 \vee x=-2$$

Solo 2 pertenece al dominio. Evaluando $A(x)$ en 2 y en los extremos del intervalo, se tiene:

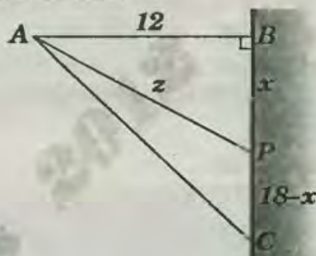
$$A(2)=16\ ,\ A(0)=0\ ,\ A(2\sqrt{3})=0$$

De los tres valores el mayor es $A(2)$. Por lo tanto, concluimos: el área máxima es $16\ u^2$ y se obtiene cuando las dimensiones son $b=4$ y $h=4$.

PROBLEMA 51:

Una isla se encuentra en el punto A, a $12\ km$ del punto más cercano B de la costa. Un señor de la isla desea ir al punto C a $18\ km$ de B sobre la costa. El señor puede alquilar un bote por $S/2,50$ por kilómetro y desplazarse por el agua hacia el punto P que se halla entre B y C, luego puede tomar un taxi que le cuesta $S/.2$ por km y viajar en línea recta desde P a C. Determinar la ruta menos costosa para ir del punto A al punto C.

RESOLUCIÓN:



* Costo por agua : $2,50z = 2,50\sqrt{144+x^2}$

* Costo por tierra : $2(18-x)$

* Costo total $= C(x) = 2,50\sqrt{144+x^2} + 2(18-x)$

$$C'(x) = 2,50\cdot\frac{x}{\sqrt{144+x^2}} + 2(-1).$$

Luego $C'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 16$

Como $C''(x) = -2,50\times\frac{144}{(144+x^2)^{\frac{3}{2}}}$, entonces :

$C''(x)\Big|_{x=16} < 0$.

* Esto nos indica que en $x = 16$ hay un mínimo.

* Luego debe desplazarse en el agua hasta un punto P de la costa que se encuentra a $16\ km$ de B.

PROBLEMA 52 :

Un espejo plano de dimensiones $80\times90\ cm^2$, se rompe por una esquina según una recta. De los dos trozos que quedan, el menor tiene la forma de un triángulo rectángulo de catetos 10 y $12\ cm$, correspondientes a las dimensiones menor y mayor, respectivamente. Hallar el área máxima del espejo rectangular que se puede construir con el trozo mayor.

RESOLUCIÓN:

La siguiente figura muestra el trozo más grande que queda del espejo, siendo el segmento *AB* la línea de rotura.



En dicha figura se ha incluido un sistema de ejes rectangulares con origen en el punto *O*. Según este sistema los puntos *A* y *B* tienen coordenadas $A=(0;70)$ y $B=(12;80)$ y el segmento *AB* tiene pendiente $m=5/6$. Entonces la ecuación del segmento *AB* es:

$$y-70=\frac{5}{6}(x-0) \text{ o bién } y=\frac{5}{6}(x+84)\text{..................}(I)$$

Sea $(x;y)$ el punto sobre el segmento *AB* desde donde se deben hacer los cortes, paralelos a los lados, para obtener un espejo rectangular. El ancho de dicho espejo será $90-x$ *cm* y la altura será y *cm*. El área del espejo será: $A=(90-x)y$. Se obtienen espejos diferentes si el punto $(x;y)$ se hace variar desde el punto A hasta el punto *B*; es decir si x varía desde *0* hasta *12*. Reemplazando el valor de y de la ecuación *(I)*, encontramos que el área de los espejos es función de x, siendo:

$$A(x)=-\frac{5}{6}(x^2-6x-7\,560);\ x\in[0;12]$$

Vemos que $A(x)$ es continua en el intervalo cerrado $[0;12]$. Hallando la derivada e igualando a cero, se tiene:

$$A'(x)=-\frac{5}{6}(2x-6)=0 \Rightarrow x=3$$

Así, el único punto crítico es *3*. Evaluando $A(x)$ en el punto crítico y en los extremos del intervalo, se tiene:

$$A(3)=6307{,}5\ ;\ A(0)=6300\ ;\ A(12)=6240$$

De los tres valores el mayor es $A(3)$. Por lo tanto, concluimos: el área máxima del espejo que puede obtenerse es de $6\,307.5\ cm^2$, siendo sus dimensiones $87\times72{,}5\ cm^2$.

PROBLEMA 53 :

En una ciudad la rapidez con que un rumor se difunde es proporcional al producto del número de personas que han escuchado la "habladuría" por el número de personas que no la han escuchado . ¿Cuándo el rumor se difunde con la máxima rapidez?

RESOLUCIÓN :

* Idenficamos las variables .

* Siendo *P* la población , tenemos :

x = número de personas que escucharon el rumor.

$P-x$ = número de personas que no escucharon .

* Del enunciado, el rumor se difunde como: $f(x)=kx(P-x)$, donde k es la constante de proporcionalidad positiva .

* Para encontrar la máxima rapidez , derivamos: $f'(x)=kP-2kx$. Ahora $f'(x)=0$

$$\Leftrightarrow kP-2kx=0 \ \Leftrightarrow x=\frac{P}{2}$$

* Pero : $f''(x)=-2k<0$, luego en $x=\frac{P}{2}$ ocurre un máximo .

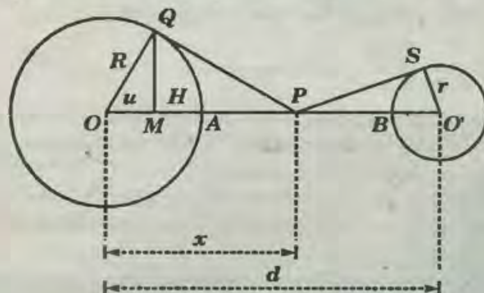
* Decimos que el rumor se difunde con máxima rapidez cuando la mitad de la población se ha enterado .

PROBLEMA 54 :

Se tienen dos esferas con centros en O y O', de radios R y r $(R>r)$, respectivamente y tal que la distancia entre los centros es $d>R+r$. Hallar un punto *P* en la línea que une los centros tal que la suma de las áreas de los casquetes que se ven en cada esfera desde el punto *P* sea máxima. Aplicar los resultados al caso en que $R=36$ *cm*, $r=25$ *cm* y $d=93$ *cm*. El área de un casquete es $A=2\pi rh$, siendo r el radio de la esfera y h la altura del casquete.

RESOLUCIÓN:

Si de un punto *P* cualquiera se mira la superficie de una esfera se observará un casquete de la esfera. Los límites de dicho casquete están determinados por las líneas tangentes a la esfera trazadas de dicho punto *P*. La siguiente figura muestra la sección plana que produciría sobre ambas esferas un plano que pase por la línea que une los centros. En dicha figura, *PQ* y *PS* son tangentes a las circunferencias de radio *R* y *r*, respectivamete. El segmento *QM* es perpendicular a la línea que une los centros.



Sean x la distancia del centro de la esfera de radio R al punto P, u la longitud del segmento OM y H la longitud del segmento MA. Nótese que el casquete de la esfera de radio R, vista desde el punto P, se obtendría rotando el arco AQ alrededor de la línea que une los centros. La altura de dicho casquete será H. De la figura, se tiene:

$$u+H=R \quad \text{.......... (I)}$$

Por semejanza de triángulos, se tiene:

$$\frac{u}{R}=\frac{R}{x} \quad \Rightarrow \quad u=\frac{R^2}{x}$$

Reemplazando en *(I)* :

$$\frac{R^2}{x}+H=R \quad \Rightarrow \quad H=\frac{R(x-R)}{x}$$

y el área del casquete sobre la esfera de radio R es:

$$A_R=2\pi RH=2\pi R^2\left(\frac{x-R}{x}\right) \text{.......... (II)}$$

Si en la ecuación *(II)* cambiamos x por $d-x$ y R por r, encontramos que el área del casquete, vista desde el punto P sobre la esfera de radio r, es:

$$A_r=2\pi r^2\left(\frac{d-x-r}{d-x}\right)$$

Notese que x varía desde R hasta $d-r$. Así, si A es la suma de las áreas, entonces:

$$A(x)=2\pi\left[R^2\left(\frac{x-R}{x}\right)+r^2\left(\frac{d-x-r}{d-x}\right)\right] \;;x\in[R;\, d-r]$$

Vemos que $A(x)$ es continua en el intervalo $[R;\, d-r]$. Derivando, se tiene:

$$A'(x)=2\pi\left[R^2.\frac{x-(x-R)}{x^2}+r^2.\frac{(d-x)(-1)-(d-x-r)(-1)}{(d-x)^2}\right]$$

de donde operando y simplificando:

$$A'(x)=2\pi\left[\frac{R^3}{x^2}-\frac{r^3}{(d-x)^2}\right]$$

Haciendo $A'(x)=0$, se obtiene:

$$\frac{R^3}{x^2}=\frac{r^3}{(d-x)^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{R\sqrt{R}}{x}=\frac{r\sqrt{r}}{d-x}$$

de donde despejando, encontramos que

$$x=\left(\frac{R\sqrt{R}}{R\sqrt{R}+r\sqrt{r}}\right)d \text{.......... (III)}$$

es el único punto crítico. Es bastante razonable pensar que dicho punto crítico pertenesca al intervalo $[R; d-r]$. Sin embargo, con R, r y $d-r$ como parámetros, puede no ser posible probar claramente que tal punto crítico es un número intermedio entre R y $d-r$.

Si dicho punto crítico no perteneciera al intervalo $[R\,;\, d-r]$, entonces solo serían puntos críticos los extremos del intervalo. Evaluando $A(x)$ en ambos extremos, se tiene:

$$A(R)=2\pi r^2\left(\frac{d-r-R}{d-r}\right),\quad A(r)=2\pi R^2\left(\frac{d-r-R}{d-r}\right)$$

de donde vemos que $A(r)$ es el mayor y sería el área máxima.

Si el punto crítico pertenece al intervalo $[R\,;\, d-r]$, entonces se tendría que evaluar $A(x)$ en el punto crítico y compararlo con los valores en los extremos del intervalo. El valor de $A(x)$ en el punto crítico resulta ser una expresión compleja y difícil de determinar si es mayor o menor que los valores en los extremos del intervalo. Sin embargo, si hallamos la segunda derivada de $A(x)$, se obtiene:

$$A''(x)=-4\pi\left[\frac{R^3}{x^3}+\frac{r^3}{(d-x)^3}\right]$$

Puesto que x y $d-x$ son positivos, deducimos que $A''(x)<0$ para todo x. Por lo tanto, la segunda derivada en el punto crítico será también negativo. Así, por el criterio de la segunda derivada, el valor de $A(x)$ en el punto crítico será un máximo relativo. Al haber un solo punto crítico, ese máximo relativo será el máximo absoluto de $A(x)$ en el intervalo $[R\,;\, d-r]$. Por lo tanto, el valor de x que indica la ecuación *(III)*, dá la posición del punto P desde donde la suma de las áreas de los casquetes vistos será máxima.

Para el caso particular en que los valores de R, r y d sean *36 cm*, *25 cm* y *93 cm*, respectivamente, entonces el intervalo $[R\,;\, d-r]$ es igual a $[36\,;\, 68]$. Reemplazando valores en la ecuación *(III)* encontramos que el punto crítico es:

$$\frac{216(93)}{341}\approx 58{,}91$$

Vemos que dicho punto crítico está en el intervalo $[36\,;\, 68]$ y dá la posición del punto P para este caso particular.

PROBLEMA 55:

En un pequeño poblado con *5000* habitantes, la tasa de propagación de una epidemia (índice de variación del número de personas infectadas) es proporcional al producto del número de personas infectadas por el número de personas que no están contagiadas. Si la epidemia se difunde con una tasa de *9* personas por día cuando hay *100* personas infectadas, expresar :

A) La tasa de propagación de la epidemia como función del número de personas enfermas.

B) ¿Con qué tasa se difunde la epidemia cuando *200* personas ya se han contagiado?

C) ¿Cuál es el máximo número de personas contagiadas?

RESOLUCIÓN :

* Sea x = número de personas contagiadas.

$\rightarrow 5000 - x$ = número de personas no contagiadas.

* Del enunciado: $f(x)$ = número de personas contagiadas por día, luego:

A) $f(x) = kx(5000 - x)$, donde k es la constante de proporcionalidad positiva. Por dato, cuando hay 100 personas infectadas ($x = 100$), hay 9 personas contagiadas por día [$f(100)=9$], luego reemplazamos y calculamos k.

*Así: $9 = k(100)(5000 - 100)$; de donde :

$$k=\frac{9}{490000}$$

* Reemplazando, nos queda :

$$f(x)=\frac{9}{490000}\times x\times(5000-x)\text{.....................}(I)$$

b) Cuando $x = 200$, en (I):

$$f(200)=\frac{9}{490000}\times 200\times(5000-200)=17{,}6$$

personas / día.

c) Derivando (I) : $f'(x)=\dfrac{9}{490000}(5000-2x)$

* Ahora : $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2500$.

Como : $f''(x)=\dfrac{9}{490000}(-2)$,

* entonces $f''(x)|_{x=2500} < 0$

* Luego ocurre un máximo en $x = 2500$.

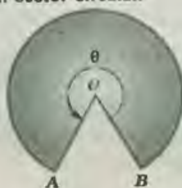
* Finalmente el máximo número de personas contagiadas es 2500.

PROBLEMA 56 :

Se va a construir un vaso de papel en forma de cono circular recto, quitando un sector circular a una hoja de papel con forma de círculo y de radio R, y uniendo después las dos orillas rectas del papel restante. Calcule el volumen del vaso más grande que se puede construir.

RESOLUCIÓN:

La siguiente figura muestra la porción del círculo de radio R que queda al quitarsele un sector circular. Dicha porción es también un sector circular.





Sea θ el ángulo en el centro del sector circular que queda. Entonces, la longitud del arco que subtiende y el área del sector son, repectivamente: $R\theta$ y $\frac{1}{2}R^2\theta$.

Uniendo los bordes OA y OB se formará un cono. Sean r y h la altura del cono. Debe verificarse que la longitud de la circunferencia de su base debe ser igual a la longitud del arco del sector circular. Así,

$$2\pi r = R\theta \Rightarrow r\,\frac{R\theta}{2\pi}\text{.....................}(I)$$

También debe verificarse que la generatríz g del cono debe ser igual al radio R del sector circular. Así,

$$g=\sqrt{h^2+r^2}=R \Rightarrow h=\sqrt{R^2-r^2}\text{..............}(II)$$

Reemplazando (I) en (II), se obtiene:

$$h=\frac{r}{2\pi}\sqrt{4\pi-\theta^2}\text{.......................................}(III)$$

Usando las ecuaciones (I) y (III), encontramos que el volumen del cono será:

$$V=\frac{1}{3}\pi r^2 h=\frac{1}{3}\pi\left(\frac{R\theta}{2\pi}\right)^2\left(\frac{R}{2\pi}\sqrt{4\pi^2-\theta^2}\right)$$

en donde debe verificarse: $4\pi^2-\theta^2 \geq 0$.

Resolviendo, $\theta \in [0;2\pi]$. Así, simplificando, se tiene:

$$V(\theta)=\left(\frac{R^3}{24\pi^2}\right)\theta^2\sqrt{4\pi^2-\theta^2};\ \theta\in[0;2\pi].$$

Vemos que $V(\theta)$ es continua en el intervalo $[0;2\pi]$. Derivando:

$$V'(\theta)=\left(\frac{R^3}{24\pi^2}\right)\left[2\theta\sqrt{4\pi^2-\theta^2}+\theta^2\times\frac{-2\theta}{2\sqrt{4\pi^2-\theta^2}}\right]$$

$$=\left(\frac{R^3}{24\pi^2}\right)\left[\frac{\theta\left(8\pi^2-3\theta^2\right)}{\sqrt{4\pi^2-\theta^2}}\right]$$

Haciendo $V'(\theta)=0$, se obtiene $\theta=0$ y $\theta=\sqrt{8/3}\pi$. Vemos también que $V'(\theta)$ no existe si $\theta=2\pi$. Así, los puntos críticos son: $0;\sqrt{8/3}\pi$ y 2π. Evaluando $V(\theta)$ en cada punto crítico, se tiene:

$$V(0)=0;V\left(\sqrt{8/3}\pi\right)=\frac{2\pi R^3}{9\sqrt{3}};V(2\pi)=0$$

De lo anterior, concluimos: El volumen del cono más grande que puede construirse, a partir de un sector circular, es $2\pi R^3/9\sqrt{3}$ y se obtiene cuando el ángulo en el centro de dicho sector es $\sqrt{8/3}\pi$ radianes.

PROBLEMA 57 :

En un restaurante se observa que el número promedio $N(x)$ de clientes para el almuerzo depende del precio x del menú , de acuerdo a la función :

$$N(x)=\frac{1000}{x^2}\left[1+Ln\left(\frac{x}{4}\right)\right], \text{ para } x \geq S/.1{,}50$$

Determinar el precio que maximiza $N(x)$ y el número máximo correspondiente de clientes.

RESOLUCIÓN :

* Aplicando el criterio de la segunda derivada:

$$N'=-2\frac{1000}{x^3}\left[1+Ln\left(\frac{x}{4}\right)\right]+\frac{1000}{x^2}\left[\frac{1}{x}\right]$$

$$=\frac{1000}{x^3}-\left[-1-2\,Ln\left(\frac{x}{4}\right)\right]$$

*Ahora:

$$N'(x)=0 \Leftrightarrow -1-2Ln\left(\frac{x}{4}\right)=0 \Leftrightarrow Ln\left(\frac{x}{4}\right)=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=4e^{-\frac{1}{2}}$$

* Como $N''(x)=\dfrac{1000}{x^4}\left[1+6Ln\left(\dfrac{x}{4}\right)\right]$, entonces

$$N''(x)\Big|_{x=4e^{-1/2}}<0$$

* Luego en $x=4e^{-1/2}$ existe un máximo, que es:

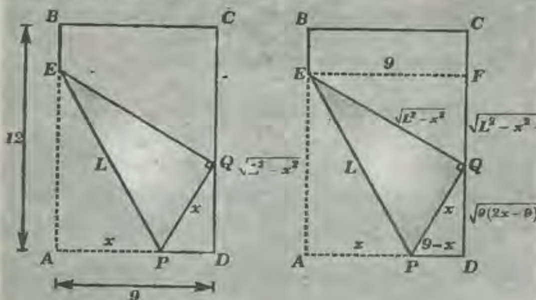
$$N\left(e^{-1/2}\right)=\frac{1000}{\left(4e^{-1/2}\right)^2}\left[1+Ln\left(\frac{4e^{-1/2}}{4}\right)\right]=\frac{1000e}{16}-\frac{1}{2}=$$

$$=\frac{1000}{32}e=85$$

* Finalmente el precio es $4e^{-1/2}=S/.2{,}47$ y el número promedio de clientes es 85 .

PROBLEMA 58 :

Una hoja rectangular de 9 por 12 cm se coloca sobre una superficie plana. Una de las esquinas se coloca sobre la arista larga opuesta (ver Figura), y se mantiene en dicha posición mientras se dobla el papel. Hallar el valor de x de modo que la longitud L del doblez, sea mínima.



RESOLUCIÓN:

En la figura, los triángulos rectángulos EAP y EQP son congruentes. Tracemos el segmento EF, paralela al lado BC, tal como se muestra. El rectángulo $AEFD$ está formado por 4 triángulos rectángulos cuyas dimensiones son las que indican dicha figura. Debe verificarse:

$$\sqrt{L^2-x^2}=\sqrt{9(2x-9)}+\sqrt{L^2-x^2-81}.$$

Elevando al cuadrado y simplificando, se obtiene:

$$9(9-x)=\sqrt{9(2x-9)}\sqrt{L^2-x^2-81}.$$

Elevando nuevamente al cuadrado, se obtiene:

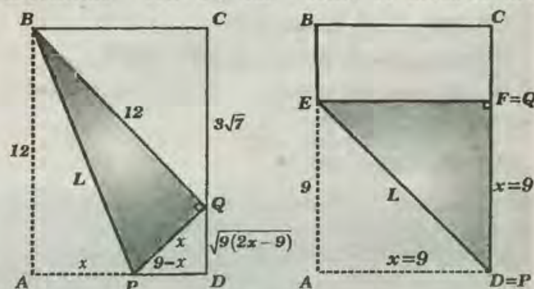
$$81\left(9-x^2\right)^2=9(2x-9)\left(L^2-x^2-81\right)$$

de donde despejando L^2:

$$L^2=\frac{9\left(9-x^2\right)^2}{2x-9}+x^2+81 \Rightarrow L^2=\frac{2x^3}{(2x-9)} \text{............}(I)$$

El valor de x que hace mínimo a L^2 también hará mínimo a L. Por lo tanto, hallaremos el mínimo de L^2. Para determinar los valores de x en (I), invitamos al lector a tomar una hoja de papel y doblarlo como indica el enunciado del problema. Se observará que los valores de x disminuyen a medida que la posición del punto Q va descendiendo, y aumentan a medida que Q va ascendiendo.

La posición más baja de Q es cuando el punto E coincide con B, tal como se muestra en :



De dicha figura, se deduce que:

$$\sqrt{9(2x-9)}+3\sqrt{7}=12 \Rightarrow \sqrt{9(2x-9)}=12-3\sqrt{7}.$$

Elevando al cuadrado y resolviendo la ecuación se obtiene $x=16-4\sqrt{7}\approx 5{,}42$ y es el menor valor que puede tomar x.

La posición más alta del punto Q se obtiene cuando el punto P coincide con D, tal como se muestra la . En este caso, $x=9$ y será el máximo valor de x. Así, diremos que L^2 es función de x. Si denominamos por f a dicha función, entonces:

$$L^2 = f(x) = \frac{2x^3}{2x-9} \; ; 5{,}42 \le x \le 9.$$

Derivando se obtiene:

$$f'(x) = \frac{2x^2(4x-27)}{(2x-9)^2}$$

de donde vemos que el único punto crítico, dentro del dominio de *f*, es $x = 27/4$, en donde la derivada vale cero. Evaluando $f(x)$ en el punto crítico y en los extremos, se obtienen:

$f(27/4) = 136{,}69$; $f(5,42) = 173{,}07$; $f(9) = 162$

El menor valor de los tres es ***136,69***. Este valor es el mínimo de *f* y será el menor valor de L^2. Su raíz cuadrada, ***11,69*** será el mínimo valor de ***L***. Por lo tanto, concluimos: el valor de x que hace que la longitud ***L*** sea mínima es ***27/4 cm***.

PROBLEMA 59 :

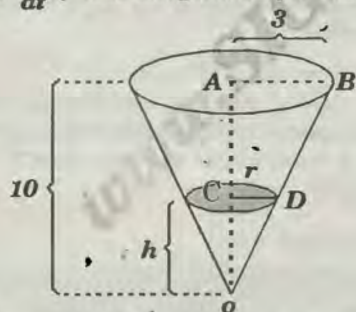
Un depósito en forma de cono invertido tiene una altura de *10* m y un diámetro de *6* m . Si el depósito está llenándose a razón de $2\ m^3/s$, ¿a qué velocidad se eleva el nivel de agua cuando dicho nivel se encuentra a *7 m* de la parte superior del depósito?

RESOLUCIÓN :

*Como el depósito se está llenando, efectuamos un gráfico en un instante t después que ha comenzado el proceso , siendo las variables :

*$h = h(t)$ = nivel del agua con respecto al punto ***0***.

* La velocidad con que se eleva el nivel de agua está dada por $\dfrac{dh}{dt}$ y es la incógnita del problema.



* $r = r(t)$ = radio de la "superficie libre" de agua.

* $V = V(t)$ = volumen de agua en el depósito.

*Como el depósito está llenándose a razón de $2m^3/s$ tenemos $\dfrac{dV}{dt} = 2 > 0$

* El volumen de agua contenido en el depósito es

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h \text{.............................} (I)$$

* Como hay dos variables, aplicamos semejanza de triángulos para eliminar una de ellas .

*Así ΔOAB es semejante a :

$$\Delta OCD = \frac{r}{3} = \frac{h}{10} \Rightarrow r = \frac{3}{10}h$$

* En *(I)* : $V = \dfrac{1}{3}\pi\left(\dfrac{3}{10}h\right)^2 .h = \dfrac{3\pi}{100}h^3$

* Derivando respecto a t : $\dfrac{dV}{dt} = \dfrac{3\pi}{100}.3h^2\dfrac{dh}{dt}$, de donde $\dfrac{dV}{dt} = \dfrac{9\pi}{100}h^2\dfrac{dh}{dt}$

* Reemplazando: $2 = \dfrac{9\pi}{100}(3)^2 . \dfrac{dh}{dt}$, de donde $\dfrac{dh}{dt} = \dfrac{200}{81\pi}$.

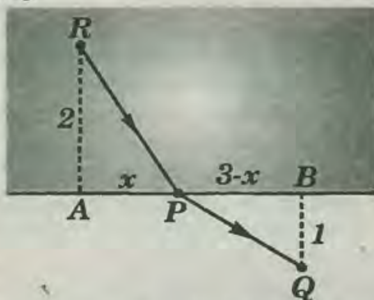
*Por lo tanto el nivel de agua se elevará a una velocidad de $\dfrac{200}{81\pi}$ *m/s*.

PROBLEMA 60 :

Un hombre está en un bote a 2 millas del punto más cercano de una costa recta. Ha de ir a un punto ***Q*** situado a *3* millas sobre la costa y *1* milla hacia el interior. Si puede remar a *2* millas/hora y caminar a *4* millas/hora . ¿Hacia que punto de la costa habría de remar para alcanzar el punto ***Q*** en un tiempo mínimo?

SOLUCIÓN:

En la siguiente figura , ***R*** es la posición inicial del bote, ***A*** es el punto más cercano de la costa al punto ***R*** , ***B*** es el punto de la costa más cercano al punto ***Q*** y ***P*** es el punto de la costa hacia donde el hombre remará para luego caminar en en línea recta hasta el punto ***Q***.



Sea x la distancia del punto ***A*** al punto ***P***. Entonces las distancias de ***R*** a ***P*** y de ***P*** a ***Q***,

son: $d(R;P) = \sqrt{x^2+4}$, $d(R;Q) = \sqrt{(3-x)^2+1}$

respectivamente. Se sabe que el tiempo es igual a la distancia entre la velocidad. Por lo tanto, si la velocidad con que rema es de **2** millas/hora y la velocidad con que camina es de **4** millas/hora, entonces el tiempo t_1 que emplea en remar de **R** a **P**, y el tiempo t_2 que emplea en caminar de **P** a **Q**, son:

$$t_1=\frac{\sqrt{x^2+4}}{2}\ ;\ \frac{\sqrt{(3-x)^2+1}}{4}$$

Diversas posibilidades se obtiene al considerar que **P** puede ser cualquier punto del tramo **AB**. Así, los valores de x varían de **0** a **3**. De este modo, el tiempo total empleado es función de x, siendo dicha función:

$$t(x)=\frac{\sqrt{x^2+4}}{2}+\frac{\sqrt{(3x)^2+1}}{4};0\le x\le 3$$

Vemos que $t(x)$ es continua en el intervalo $[0;3]$. Derivando, se obtiene:

$$t'(x)=\frac{x}{2\sqrt{x^2+4}}+\frac{(3-x)(-1)}{4\sqrt{(3-x)^2+1}}$$

Si hacemos $t'(x)=0$ se obtiene la ecuación:

$$\frac{x}{2\sqrt{x^2+4}}=\frac{(3-x)}{2\sqrt{(3-x)^2+1}}$$

$$\Rightarrow 2x\sqrt{(3-x)^2+1}=(3-x)\sqrt{x^2+4}$$

Elevando al cuadrado y realizando operaciones, se obtiene la ecuación polinomial:

$$x^4-6x^3+9x^2+8x-12=0\ .....(I)$$

A simple vista se observa que $x=1$ es solución de *(I)* y pertenece al intervalo *[0;3]*. Puede verificarse que *(I)* no tiene más raíces racionales en dicho intervalo. Sin embargo, podría tener raíces irracionales. Aún cuándo parece improbable que $t(x)$ pueda tener más puntos críticos en el intervalo *[0;3]*, no podríamos afirmarlo con convicción. Por el método de la división sintética encontramos que la ecuación *(I)* es equivalente a la ecuación:

$$(x-1)(x^3-5x^2+4x+12)=0\ ....(II)$$

Ahora si consideremos la función:

$$g(x)=x^3-5x^2+4x+12$$

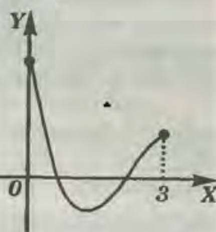
es claro que g es una función continua y diferenciable. Si evaluamos esta función en los extremos del intervalo, se obtienen:

$g(0)=12$ y $g(3)=6$, ambos valores positivos. De estos resultados deducimos que si $g(x)$ solo tomará valores positivos en el intervalo *[0;3]*, implicaría que $x=1$ es la única solución de la ecuación *(I)*. Por lo contrario, si $g(x)$ tomara valores negativos significará que la gráfica de g, correspondiente al intervalo *[0,3]*, cruzaría al eje **X** al menos en dos puntos, tal como se muestra . Es más, significaría que g tiene al menos un mínimo en dicho intervalo y tal mínimo tendría que ser necesariamente un número negativo.

Derivando e igualando a cero, se tiene:

$$g'(x)=3x^2-10x+4=0$$

Resolviendo, se obtiene $x=\frac{5}{3}\pm\frac{\sqrt{13}}{3}$.



Valores aproximados para ambas raíces son: **0,4648** y **2,8685**. Ambos valores están en el intervalo *[0;3]* y son los puntos críticos de g en dicho intervalo. Evaluando g en ambos puntos críticos, se obtienen:

$$g(0,4648)=12,8794\ ;\ g(2,8685)=5,9353$$

Ambos valores son positivos. Por lo tanto, la función g no puede decrecer hasta tomar valores negativos; es decir, la gráfica de g no puede ser como la de la penúltima . Dicha función tomará valores mínimos y máximos en los puntos críticos, pero su gráfica, correspondiente al intervalo *[0;3]*, siempre estará arriba del eje **X**. Por lo tanto, concluimos: g solo toma valores positivos en el intervalo *[0;3]* y **1** es la única solución de la ecuación *(I)* en el intervalo *[0;3]*. Así, **1** es el único punto crítico de $t(x)$. Evaluando dicha función en **1** y en los extremos **0** y **3**, se obtienen:

$$t(1)=\frac{3\sqrt{5}}{4}\approx 1,6770,\ t(0)=1+\frac{\sqrt{10}}{4}\approx 1,7906,\ t(3)=\frac{\sqrt{13}}{2}+\frac{1}{4}\approx 2,0528$$

El menor valor es $t(1)$. Así, concluimos: el hombre debe remar hasta el punto **P**, situado a una milla del punto **A**, a fin de llegar al punto **Q** en el menor tiempo posible.

PROBLEMA 61 :

Calcular en forma aproximada :

I) $\sqrt{640}$ III) $\tan 45° 3' 20''$

II) $\sqrt[3]{200}$ IV) arc sen (0,54)

RESOLUCIÓN :

I) De: $f(x+\Delta)=f(x)+f'(x)\Delta x$.

$$\to\sqrt{x+\Delta x}=\sqrt{x}+\frac{1}{2\sqrt{x}}\Delta x$$

$$\to\sqrt{625+15}=\sqrt{625}+\frac{1}{2\sqrt{625}}(15)$$

$$\to\sqrt{640}=25+0,3=25,3$$

II) De: $\sqrt[3]{x+\Delta x}=\sqrt[3]{x}+\left(\frac{1}{3\sqrt{x^2}}\right)\Delta x$

$\rightarrow \sqrt[3]{216-16}=\sqrt[3]{216}+\left(\frac{1}{3\sqrt{216^2}}\right)(-16)$

$\rightarrow \sqrt[3]{200}=6-0,148=5,852$

III) De : $tan(x+\Delta x)=tanx+(sec^2x)\Delta x$

$\rightarrow tan(45°+3'20'')=tan45°+(sec^2 45°)(3'20'')$

$\rightarrow tan\,45°3'20''=1+(\sqrt{2})^2\left(3+\frac{20}{60}\right)'\times\frac{\pi}{180°}\times\frac{1°}{60'}$

$\rightarrow tan45°\,3'20''=1+0,0185=1,0185$

IV) De : $arc\,sen(x+\Delta x)=arc\,sen\,x+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\Delta x$

$\rightarrow arc\,sen(0+0,54)=arc\,sen\,0+\frac{1}{\sqrt{1-0^2}}(0,54)$

$\rightarrow arc\,sen(0,54)=0,54$

PROBLEMA 62 :

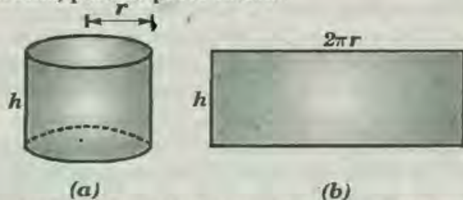
Se desea construir una lata metálica cilíndrica para embazar $V_0\ cm^3$ de un determinado producto. Determinar el radio y la altura de dicho cilindro de modo que el material a emplear en la manufactura sea mínimo.

SOLUCIÓN:

Sean r y h (en cm) el radio y la altura del cilindro, tal como se muestra . Se obtienen cilindros diferentes variando los valores de r y h, pero de modo que se verifique en todos los casos la relación:

$$\pi r^2 h=V_0 \text{..} (I)$$

Para construir la lata se deberá cortar de una placa metálica (de espesor pequeño), dos círculos de radio r para las tapas y un rectángulo, con las dimensiones que muestra la siguiente figura derecha, para la parte lateral.



(a) (b)

La cantidad de material a usar será mínima cuando el área de la superficie total del cilindro sea a su vez, mínimo. El área total es:

$$A=2\pi r^2+2\pi rh \text{..................................} (II)$$

Despejando h de la ecuación *(I)*, reemplazandolo en la ecuación *(II)* y observando que $r\neq 0$, se obtiene:

$$A(r)=2\pi r^2+\frac{2V_0}{r}\ ;\ r\in\langle 0;+\infty\rangle \text{............} (III)$$

A(r) es continua en el intervalo $\langle 0;+\infty\rangle$. Como este intervalo no es cerrado no se puede seguir con todo el procedimiento descrito cuando el intervalo es cerrado. En este caso se modifica el procedimiento. Hallamos también los puntos críticos dentro del intervalo. Así, derivando:

$$A'(r)=4\pi r-\frac{2V_0}{r^2}=\frac{4\pi r^3-2V_0}{r^2}$$

en donde observamos que $A'(r)$ existe para todo $r\in\langle 0;+\infty\rangle$. Así, habrá punto crítico solo si $V'(r)=0$. Es decir si: $4\pi r^3-2V_0=0\Rightarrow r=\sqrt[3]{\frac{V_0}{2\pi}}$.

Existe un solo punto crítico. Podemos aplicar uno de los criterios: el de la primera derivada o el de la segunda derivada, para determinar si en el punto crítico se tiene un máximo relativo o mínimo relativo. Optaremos por aplicar el criterio de la primera derivada. Así, al analizar para que valores de r , $A'(r)$ es positivo y para que valores es negativo, encontramos lo siguiente:

$$A'(r)<0 \text{ si } 0<r<\sqrt[3]{\frac{V_0}{2\pi}}\ ;A'(r)>0$$

$$\text{si}: \sqrt[3]{\frac{V_0}{2\pi}}<r<+\infty$$

Lo anterior significa que *A(r)* es decreciente a la izquierda del punto crítico y creciente a la derecha. Por el criterio de la primera derivada, concluimos: **A** tiene un valor mínimo relativo en dicho punto crítico. Al no haber más puntos críticos es claro que dicho mínimo relativo es también el mínimo absoluto de *A(r)* en el intervalo $\langle 0;+\infty\rangle$. Como $h=V_0/\pi r^2$, entonces los valores:

$$r=\sqrt[3]{\frac{V_0}{2\pi}}\quad ,\ h=\sqrt[3]{\frac{4V_0}{\pi}}$$

son las dimensiones del cilindro para que el material empleado en su manufactura sea mínimo.

PROBLEMA 63 :

Un cono se circunscribe sobre una esfera de radio *a*. Determinar el volumen mínimo que puede tener dicho cono.

SOLUCIÓN:

Si el cono está circunscrito a la esfera, entonces será tangente a la esfera. Así, un plano que pase por el vértice del cono y por el centro de la esfera producirá una sección plana tal como muestra la siguiente

figura en dicha figura, el triángulo es tangente a la circunferencia.

En la figura:

$$AQ=h;\ AC=\sqrt{r^2+h^2};\ AO=h-a$$

El volumen del cono será:

$$V=\frac{1}{3}\pi r^2 h \qquad ...(I)$$

La condición de tangencia de los lados del triángulo ABC y la circunferencia determina la semejanza entre los triángulos rectángulos ADO y AQC. De dicha semejanza se obtiene la relación:

$$\frac{a}{r}=\frac{h-a}{\sqrt{r^2+h^2}} \qquad ...(II)$$

Elevando al cuadrado esta ecuación, se obtiene:

$$\frac{a^2}{r^2}=\frac{(h-a)^2}{r^2+h^2}$$

Realizando operaciones y despejando:

$$r^2=\frac{a^2h}{h-20} \qquad ...(III)$$

De *(II)* y *(III)*, deben verificarse simultaneamente:

$$h>a \text{ y } h>2a$$

Ambas relaciones se verifican si $h>2a$ y tal que h puede crecer ilimitadamente. Reemplazando *(III)* en *(I)*, encontramos que el volumen es función de la altura, siendo:

$$V(h)=\frac{1}{3}\pi a^2\left(\frac{h^2}{h-2a}\right);\langle 2a;+\infty\rangle$$

Nótese que el dominio no es un intervalo cerrado. Derivando,

$$V'(r)=\frac{1}{3}a^2\left[\frac{h(h-4a)}{(h-2a)^2}\right] \qquad ...(IV)$$

Vemos que $V'(h)$ existe para todo $h\in\langle 2a;+\infty\rangle$ Así, los puntos críticos se producen solo si $V'(h)=0$. Es decir, si $h=0$ o $h=4a$. Solo $4a\in\langle 2a;+\infty\rangle$ y es el único punto crítico. Puesto que $h>0$, entonces de la ecuación *(IV)*, se deduce que:

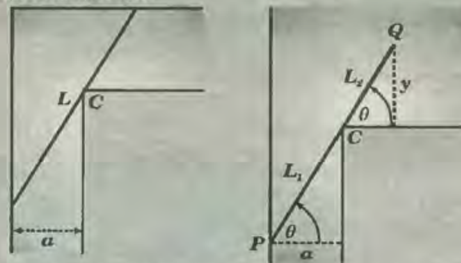
$$V'(h)<0 \text{ si } h<4a,\ V'(h)>0 \text{ si } h>4a$$

y por lo tanto, $V(h)$ es decreciente en el intervalo $\langle 2a;4a\rangle$ y es creciente en el intervalo $\langle 4a;+\infty\rangle$. Por el criterio de la primera derivada concluimos que V tiene un mínimo relativo en $h=4a$. Como solo hay un punto crítico entonces este mínimo relativo es también el mínimo absoluto de V en todo el intervalo $\langle 2a;+\infty\rangle$. Reemplazando $h=4a$ en *(III)* se obtiene que el valor de es : $r=\sqrt{a}$. Reemplazando a su vez ambos valores en *(I)*, encontramos que el volumen mínimo que puede tener el cono es:

$$V_{min}=\frac{8}{3}\pi a^3$$

PROBLEMA 64 :

Un tubo de longitud L se transporta por un pasillo A de ancho a, y luego alrededor del punto C hacia otro pasillo B que forma ángulo recto con el primero. Determinar el ancho mínimo que debe tener el pasillo B de modo que el tubo pueda pasar horizontalmente.



RESOLUCIÓN:

Si el ancho del pasillo B fuera grande para la longitud del tubo, no sería necesario que los extremos del tubo hagan contacto con las paredes de los pasillos, ni que el tubo toque la esquina C. Si no es tan grande ocurrirá, en el peor de los casos, que toquen las paredes en la forma que muestra la Figura . Denotemos por P y Q los extremos del tubo. Supongamos que el ancho del pasillo B fuera bastante grande (equivalente a que el pasillo solo tiene la pared inferior) y que se transporta el tubo en la forma que muestra la figura.

El extremo Q del tubo no tocará la pared superior del pasillo B y pasará sin dificultad. En la Figura, y es la distancia del extremo Q a la pared inferior del pasillo B. A medida que el tubo gira alrededor de C, y aumentará desde cero hasta un valor máximo y luego, disminuirá nuevamente hasta cero. El tubo pasará sin dificultad si el ancho del pasillo B es mayor que el valor máximo de y. En cambio, si el ancho es menor que el máximo de y, no pasará el tubo. Deducimos que el mínimo ancho del pasillo B debe ser igual al máximo de y.

De la Figura se obtienen las siguientes relaciones:

$$L_1=a\sec\theta\ ;\ y=L_2 sen\theta\ ;\ L_2=L-L_1$$

Combinando estas relaciones, encontramos que y

es función de θ, siendo:

$$y = Lsen\theta - a\ tan\theta$$

Para hallar los valores de θ consideramos que al inicio el extremo Q está sobre la esquina C. En esta posición el θ (valor inicial) es $\theta_1 = arc\ cos\frac{L}{a}$.
A partir de este valor θ irá disminuyendo hasta cero. Así

$$y = L\ sen\ \theta - a\ tan\ \theta,\ 0 \le \theta \le \theta_1 \qquad ...(I)$$

Derivando se obtiene:

$$\frac{dy}{d\theta} = L\ cos\theta - a\ sec^2\theta \qquad ...(II)$$

Haciendo $dy/d\theta = 0$, se obtiene:

$$L\ cos\theta = a\ sec^2\theta \Rightarrow cos\theta = \sqrt[3]{a/L}$$

De la ecuación *(I)* vemos que $dy/d\theta$ no existe si $sec\theta$ no existe; es decir, si $\theta = \pi/2$. Este valor no pertenece al dominio. por lo tanto, $\theta = arc\ cos\ \sqrt[3]{a/L}$ es el único punto crítico en el dominio. Para este valor de θ,

$$sen\ \theta = \sqrt{1-(a/L)^{2/3}}\ ,\ tan\theta = \sqrt[3]{L/a}\sqrt{1-(a/L)^{2/3}}$$

Reemplazando estos valores en la ecuación *(I)*, se obtiene:

$$y = \sqrt{1-(a/L)^{2/3}}\,(L - a\sqrt[3]{L/a})$$

que es el valor máximo de y (puesto que en los extremos del dominio $y=0$) y será el ancho mínimo, que debe tener el pasillo B, para que un tubo de longitud L pueda pasar del pasillo A al pasillo B.

OBSERVACIÓN :

Con frecuencia, en la formulación de un problema de valores extremos, encontramos que la variable que vamos a maximizar o minimizar parece ser, aparentemente, función de 2 o más variables independientes. Sin embargo, dichas variables independientes están relacionadas entre ellas por algunas ecuaciones, llamadas restricciones, lo que indica que en realidad, no todas las variables son independientes. El proceso de eliminar variables hasta reducir el problema a una función de una sola variable puede ser complicado y en algunos casos, imposible. La aplicación de la derivación implícita puede facilitar las operaciones, tal como veremos en los siguientes problemas.

PROBLEMA 65 :

Se sabe que el costo de construir un canal de regadío es proporcional al cuadrado de su longitud. Cierta región plana tiene un lago que ocupa la porción del plano $x^2 + y^2 \le 1$. Se deben construir canales rectos desde los puntos $P=(4;5)$ y $Q=(2;3)$ hasta un punto común, R, de la orilla del lago. Determinar las coordenadas de R, para que el costo sea mínimo.

RESOLUCIÓN:

La Figura muestra el lago, los puntos P, Q y una posible posición del punto $R = (x;\ y)$. De la figura:

$$d_1^2 = (x-2)^2 + (y-3)^3\ ,\ d_2^2 = (x-4)^2 + (y-5)^2$$

El costo total de los dos canales será:

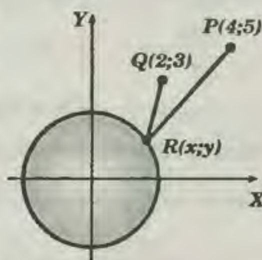
$$C = k(d_1^2 + d_2^2)$$

donde k es una constante de proporcionalidad. Vemos que si queremos minimizar el costo, deberemos minimizar la suma de los cuadrados de las longitudes de las diagonales. Para ello, denominemos por D a la suma de los cuadrados. Es decir :

$$D = d_1^2 + d_2^2$$

$$\Rightarrow D = (x-2)^2 + (y-3)^2 + (x-4)^2 + (y-5)^2 ...(I)$$

Aparentemente D parece ser una función de las dos variables x e y. Sin embargo, estas dos variables están relacionadas por la ecuación



$$x^2 + y^2 = 1$$

que, como antes vimos, define implícitamente a y como dos funciones de x:

$$y = \sqrt{1-x^2}\ \vee\ y = -\sqrt{1-x^2} \qquad ....(II)$$

siendo el dominio el intervalo $[-1;\ 1]$.

Si reemplazaramos cada una de estas relaciones en la ecuación *(I)*, encontraríamos que D es función de la única variable x. Pero vemos que D como función de x no es única, por lo que el procedimiento de eliminar una variable alarga la solución, al tener que considerar dos casos. El uso de la derivación implícita evita tener que descomponer el problema en los dos casos mencionados, como veremos a continuación.

Considerar simultaneamente las ecuaciones *(I)* y *(II)* equivale a considerar simultaneamente las dos ecuaciones:

$$D(x;\ y) = (x-2)^2 + (y-3)^2 + (x-4)^2 + (y-5)^2 \ ...(III)$$

$$x^2 + y^2 = 1\ ;\ -1 \le x \le 1 \qquad ...(IV)$$

Hacemos la siguiente reflexión: D es función de x e y, pero y es función de x (aunque no única), entonces D es también función de x (pero tampoco única). El dominio para D será, en los dos casos, el intervalo $[-1;1]$. Por las expresiones *(II)* y *(IV)* es evidente que D es continua en el intervalo cerrado $[-1;1]$. Por lo tanto, para hallar los extremos absolutos de D en el intervalo cerrado $[-1;1]$, bastará seguir el procedimiento antes descrito para funciones continuas en intervalos cerrados. Así, derivando la ecuación *(III)* implícitamente respecto de x, se tiene:

$$\frac{dD}{dx}=2(x-2)+2(y-3)\frac{dy}{dx}+2(x-4)+2(y-5)\frac{dy}{dx}$$

de donde simplificando:

$$\frac{dD}{dx}=4(x-3)+4(y-4)\frac{dy}{dx} \quad ....(V)$$

Derivando la ecuación *(IV)* implícitamente respecto de x, se tiene:

$$2x+2y\frac{dy}{dx}=0 \Rightarrow \frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y} \quad ...(VI)$$

Reemplazando *(VI)* en *(V)*, se obtiene:

$$\frac{dD}{dx}=4(x-3)+4(y-4)\left(-\frac{x}{y}\right) \quad ...(VII)$$

Si hacemos $dD/dx=0$, se obtiene $y=\frac{4}{3}x$. Reemplazando en la ecuación *(IV)* y resolviendo, se obtiene: $x=\pm\frac{3}{5}$. Para $x=-\frac{3}{5}$ corresponde $y=-\frac{4}{5}$, y para $x=\frac{3}{5}$ corresponde $y=\frac{4}{5}$. También, de la ecuación *(VII)* vemos que dD/dx no existe si $y=0$, o bien para $x=-1$ y $x=1$. Así, los puntos críticos son: $-1;-\frac{3}{5};\frac{3}{5}$ y 1. Todos están en el intervalo $[-1;1]$.

A continuación debemos evaluar D en cada punto crítico. Nótese, que esto equivale a evaluar la ecuación *(III)* en los puntos $(-1;0)$, $\left(-\frac{3}{5};-\frac{4}{5}\right)$; $\left(\frac{3}{5};\frac{4}{5}\right)$ y $(1;0)$ de la circunferencia. Así, podemos considerar que estos puntos son los puntos críticos de $D(x;y)$. Evaluando, se obtienen:

$D(-1;0)=68$, $D(-3/5;-4/5)=76$

$D(3/5;4/5)=36$, $D(1;0)=44$.

De los 4 valores el menor es $D(3/5,4/5)$. Por lo tanto, concluimos: las coordenadas del punto R, para que costo de los canales sea mínimo, son $x=3/5$ e $y=4/5$.

PROBLEMA 66 :

Hallar el área mínima que puede tener una elipse circunscrita en torno de un rectángulo dado.

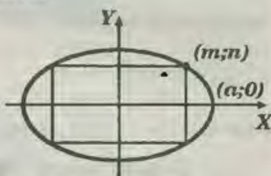
RESOLUCIÓN:

Supongamos que las dimensiones del rectángulo son $2m$ y $2n$, respectivamente.

Una ilustración gráfica del problema se muestra en la Figura.

La ecuación de la elipse será:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad ...(I)$$



y el área de la elipse será:

$$A=\pi ab \quad ...(II)$$

Como (m, n) pertenece a la elipse, entonces:

$$\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}=1 \quad ...(III)$$

Variando la posición del vértice $(a;0)$ se obtienen diferentes elipses. Notamos que a debe ser siempre mayor que m pero puede crecer ilimitadamente. Es decir, a puede tomar todos los valores del intervalo $\langle m;+\infty\rangle$. Si en la ecuación *(III)* consideramos que b es función de a, entonces el área A es función solamente de a, con dominio $\langle m;+\infty\rangle$ y continua en dicho dominio.

Derivando la ecuación *(II)* implicitamente respecto de a, se obtiene:

$$\frac{dA}{da}=\pi\left(b+a\frac{db}{da}\right) \quad ...(IV)$$

Derivando la ecuación *(III)* implícitamente respecto de a, se obtiene:

$$-\frac{2m^2}{a^3}-\frac{2n^2}{b^3}\frac{db}{da} \Rightarrow \frac{db}{da}=-\frac{b^3m^2}{a^3n^2} \quad ...(V)$$

Reemplazando *(V)* en *(IV)*:

$$\frac{dA}{da}=\pi\left(b-\frac{b^3m^2}{a^2n^2}\right)$$

Observamos que dA/da existe para todo $a\in\langle m;+\infty\rangle$ Así, punto crítico ocurre solo si $dA/da=0$ Es decir, si

$$b-\frac{b^3m^2}{a^2n^2} \Rightarrow b=\frac{an}{m} \quad ...(VI)$$

Reemplazando *(VI)* en *(III)* y resolviendo, encontramos que $a=\sqrt{2}m$. Entonces, $b=\sqrt{2}n$. Encontramos que hay un solo punto crítico

$(a=\sqrt{2}m)$ y el dominio es el intervalo abierto $\langle m;+\infty\rangle$. Para determinar si en dicho punto crítico hay un máximo ó un mínimo, tendríamos que aplicar el criterio de la primera derivada, o el de la segunda derivada: Este procedimiento puede resultar complicado y largo. En vez de eso y como el problema es geométrico, analizaremos qué condiciones y limitaciones geométricas existen.

En la Figura se obtienen diferentes elipses inscritas variando la posición del vértice $(a;0)$ a lo largo del eje X positivo. Si el valor de a fuera ligeramente mayor que m, el valor de b sería bien grande (si a tiende a m en la ecuación *(III)*, b tiende a infinito). Esto implica que el área de la elipse crecería ilimitadamente. Por lo contrario, si a aumenta, b disminuye y el área de la elipse irá disminuyendo. Cuando a se hace muy grande entonces b decrece y se aproxima a n (si a tiende a infinito en *(III)*, b tiende a n) y el área crece nuevamente ilimitadamente. De todo lo anterior, deducimos que el área no está acotado superiormente. Así, de haber un valor extremo, este será un mínimo. En efecto, si de un valor muy grande (infinito) empieza a decrecer para luego volver a crecer ilimitadamente, significa que decrecerá hasta un valor mínimo a partir del cual empezará a crecer. Así, concluimos que en el único punto crítico, el área tiene un valor mínimo (mínimo relativo y mínimo absoluto a la vez). El mínimo valor del área será:

$$A_{min}=\pi(\sqrt{2}m)(\sqrt{2}n)=2\pi mn$$

y la ecuación de la elipse será:

$$\frac{x^2}{2m^2}+\frac{y^2}{2n^2}=1$$

PROBLEMA 67 :

Suponiendo conocida la suma de las superficies de una esfera y un cubo, demostrar que la suma de los volúmenes será mínima cuando el diámetro de la esfera iguale a la arista del cubo. ¿Cuándo será máxima la suma de los volúmenes?

RESOLUCIÓN:

Sean r y a el radio de la esfera y la arista del cubo, respectivamente. La suma de los volúmenes de la esfera y del cubo será:

$$V=\frac{4}{3}\pi r^3+a^3 \qquad ...(I)$$

Por la condición del problema, si la suma de las superficies es S_0, entonces:

$$4\pi r^2+6a^2=S_0 \qquad ...(II)$$

De *(I)*, aparentemente V es función de las variables r y a, pero de *(II)*, r es función implícita de a. Por lo tanto, diremos que V es función de la única variable a.

De *(II)*, $47\pi r^2=S-6a^2$. En esta ecuación debe verificarse, lo siguiente:

$$S_0-6a^2\geq 0\Rightarrow a^2\leq S_0/6\Rightarrow 0\leq a\leq\sqrt{S_0/6}$$

Así, V es función de a y su dominio es el intervalo cerrado $[0;\sqrt{S_0/6}]$ Nótese que V es continua en dicho intervalo.

Derivando *(I)* implicitamente respecto de a, se tiene:

$$\frac{dV}{da}=4\pi r^2\frac{dr}{da}+3a^2 \qquad ...(III)$$

Derivando *(II)* implicitamente respecto de a, se tiene:

$$8\pi r\frac{dr}{da}+12a=0\Rightarrow\frac{dr}{da}=-\frac{3a}{2\pi r} \qquad ...(IV)$$

Reemplazando *(IV)* en *(III)*:

$$\frac{dV}{da}=4\pi r^2\left(-\frac{3a}{2\pi r}\right)3a^2 \qquad ...(V)$$

Observamos que dV/da no existe si $r=0$. Pero $r=0$ implica $a=\sqrt{S_0/6}$ (punto crítico). Si hacemos $dV/da=0$, entonces:

$$-6ar+3a^2=0\Rightarrow a=0 \ \vee \ a=2r$$

Si $a=0$ en *(II)* se obtiene: $r=\sqrt{S_0/4\pi}$. Si $a=2r$ en *(II)* se obtiene: $a=\sqrt{S_0/(6+\pi)}$. Así, los puntos críticos (valores de a) son: $\sqrt{S_0/(6+\pi)}, 0$ y $\sqrt{S_0/6}$. Los correspondientes valores de r, son: $\frac{1}{2}\sqrt{S_0/(6+\pi)}$, $\sqrt{S_0/4\pi}$ y 0, respectivamente.

Evaluando el volumen en los puntos críticos, se obtienen:

$$V(\sqrt{S_0/(6+\pi)})=\frac{1}{6}\sqrt{\frac{(S_0)^3}{6+\pi}}\approx 0{,}055\sqrt{(S_0)^3},$$

$$V(0)=\frac{1}{3}\sqrt{\frac{(S_0)^3}{4\pi}}\approx 0{,}094\sqrt{(S_0)^3}$$

$$V(\sqrt{S_0/6})=\sqrt{(S_0/6)^3}\approx 0{,}068\sqrt{(S_0)^3}$$

Comparando los tres valores encontramos que el menor valor del volumen se obtiene para $a=\sqrt{S_0/(6+\pi)}; r=\frac{1}{2}\sqrt{S_0/(6+\pi)}$.

Osea, cuando $2r=a$, o bién, cuando el diámetro de la esfera $(2r)$ se iguala con la arista del cubo.

También encontramos que el mayor valor del

volumen se obtiene para $a=0; r=\sqrt{S_0/4\pi}$. Nótese que $a=0$ implica que solo habría esfera y no cubo.

PRIMERA PRACTICA DIRIGIDA

01 Si: $f_{(x)} = 4x^5 + 2x$. Hallar: $f'_{(1)}$

A) 22 B) 23 C) 24 D) 25 E) 26

02 Siendo: $f_{(x)} = 3x^2 + 4x - 2$. Hallar: $f'_{(3)}$

A) 21 B) 22 C) 23 D) 24 E) 25

03 Siendo: $G_{(x)} = 4x^9 + 1$. Calcular: $G'_{(1)}$

A) 27 B) 35 C) 36 D) 45 E) 54

04 Siendo: $G_{(x)} = x^3 - 2x^2$

Hallar: $G'_{(4)} - G'_{(3)}$

A) 17 B) 21 C) 18 D) 19 E) 20

05 Siendo: $f_{(x)} = x^3 + x^2$

Hallar: $f''_{(2)} + f'''_{(3)}$

A) 18 B) 22 C) 19 D) 21 E) 20

06 Dada: $f_{(x)} = \sqrt{x} + 3$

Hallar: $f'_{(x)}$

A) 1 B) $\sqrt{x}$ C) $\frac{1}{\sqrt{x}}$ D) $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ E) $2\sqrt{x}$

07 Siendo : $h_{(x)} = (x^2+3)^4$

Hallar: $h'_{(x)}$

A) $8x(x^2+3)^3$ B) $8x(x^2+3)^2$ C) $8(x^2+3)^3$

D) $4(x^2+3)^3$ E) 4

08 Si: $P_{(x)} = 8\sqrt[4]{x}$. Hallar: $P'_{(y)}$

A) $2\sqrt[4]{y^3}$ B) $2\sqrt[4]{y^{-3}}$ C) $\sqrt[4]{y^{-3}}$ D) $\sqrt[4]{y}$ E) y3

09 Siendo: $m_{(x)} = 8\sqrt[8]{x}$

Hallar: $m'_{(x)}$

A) $x^{-\frac{6}{8}}$ B) $x^{-\frac{5}{8}}$ C) $x^{-\frac{7}{8}}$ D) $x^{\frac{7}{8}}$ E) $8x^{-\frac{5}{8}}$

10 Si: $f_{(x)} = \sqrt{4x+9}$

Hallar : $f'_{(0)}$

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{2}{3}$ C) 1 D) $\frac{4}{3}$ E) $\frac{5}{3}$

11 Si: $R_{(x)} = (3x^3 - 2)^5$

Hallar : $R'_{(x)}$

A) $5(3x^2-2)^4$ B) 9x2 C) 95x10

D) $x^2(3x^3-2)^4$ E) $45x^2(3x^2-2)$

12 Si: $f'_{(x)} = 3x^2 \wedge f_{(0)} = 0$

Hallar: $f_{(3)} + f_{(2)}$

A) 51 B) 46 C) 80 D) 35 E) 90

13 Si : $f'_{(x)} = 6x \wedge f_{(0)} = 3$

Hallar : $f_{(5)}$

A) 60 B) 65 C) 80 D) 75 E) 78

14 Hallar: $f''_{(x)} + f'''_{(x)}$

Si: $f_{(x)} = 3x^3 + 2x^2$

A) $18x+20$ B) $18x+22$ C) $18x+10$

D) $9x+20$ E) $9x+10$

15 Dada: $f_{(x)} = x^m + nx$

y además: $f'_{(1)} = 12$; $f''_{(2)} = 2$

Hallar: $\frac{m}{n}$

A) 5 B) 2 C) 4 D) 7 E) 1

16 Calcular : $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}{x^2 - 5x + 4}$

A) 1 B) $-\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{3}$ D) $-\frac{2}{3}$ E) $\frac{2}{3}$

17 Hallar : $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x+8} - 2}{\sqrt{x+4} - 2}$

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $-\frac{1}{3}$ D) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{1}{5}$

18 Hallar : $\lim\limits_{x\to 2} \frac{\sqrt[3]{x+6} - x}{\sqrt{x+2} - x}$

A) $\frac{11}{9}$ B) $\frac{1}{9}$ C) $\frac{8}{9}$ D) $\frac{7}{9}$ E) $\frac{5}{9}$

19 Hallar : $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{\sqrt[a]{1+bx} \times \sqrt[c]{1+dx} - 1}{x} \right)$

A) $\frac{b}{a} + \frac{d}{c}$ B) $\frac{b}{c} + \frac{a}{c}$ C) $cd + ab$ D) 0 E) $\frac{b+d}{ac}$

20 Siendo: $f_{(x)} = (x^2+1)^6$

Hallar: $f'_{(x)}$

A) $6(x^2+1)^6$ B) $(x^2+1)^6$ C) $12x(x^2+1)^6$
D) $12x$ E) $(9x)^6$

21 Si: $G_{(x)}=(3x+1)^5(2x-1)^3$

Hallar : $G'_{(0)}$

A) -1 B) -9 C) 10 D) 9 E) -7

22 Hallar : $f'_{(x)}$

Siendo: $f_{(x)}=\sqrt[3]{3x-2}+3$

A) $\sqrt[3]{(3x-2)^{-2}}$ B) $\sqrt[3]{(3x-2)}$ C) $\sqrt{(3x-2)}$
D) 3 E) $x-2$

23 Siendo: $h_{(x)}=\dfrac{3x^2+1}{4x-1}$

Hallar: $h'_{(1)}$

A) $\dfrac{3}{2}$ B) $\dfrac{9}{2}$ C) 9 D) $\dfrac{2}{9}$ E) $\dfrac{1}{9}$

24 Si: $m_{(x)}=\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x}}$

Hallar: $m'_{(1)}$

A) $\dfrac{3}{2}$ B) $\dfrac{1}{3}$ C) 3 D) $\dfrac{2}{3}$ E) $\dfrac{4}{3}$

25 Si: $f_{(x)}=mx^2+nx$

Además: $f'_{(1)}=8;\ f_{(2)}=14$

Calcular: $f_{(3)}$

A) 24 B) 27 C) 30 D) 33 E) 36

26 Siendo:

$f'_{(x)}=30(3x+2)^9 \wedge f_{(x)}=(mx+n)^p$

Hallar: $f_{(-1)}$

A) 1 B) 2 C) -1 D) 0 E) -2

27 Determinar el mínimo número que toma :

$f_{(x)}=x^2+6x+10$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

28 Calcular : $\lim\limits_{x\to a+b}\dfrac{(x-a)^3-b^3}{(x-b)^2-a^2}$

A) $\dfrac{b}{a}$ B) $\dfrac{b^2}{a^2}$ C) $\dfrac{2a^2}{b^2}$ D) $\dfrac{3b^2}{2a}$

29 Calcular el verdadero valor de :

$$F=\frac{x^5+ax^4+x^3+ax^2+x+a}{x^3+(a+1)x^2+(a+1)x+a}$$

para: $x=a$

A) a^2+a+1 B) $a+1$ C) a^2-a+1 D) $a-1$

30 Hallar : $\lim\limits_{x\to\sqrt{2}}\left(\dfrac{x^4-4}{x-\sqrt{2}}\right)$

A) $\sqrt{2}$ B) $8\sqrt{2}$ C) $-\sqrt{2}$ D) 1 E) $-8\sqrt{2}$

SEGUNDA PRACTICA DIRIGIDA

01 Si: $f(x)=\sqrt[3]{x}$, calcule $f'(8)$

A) 1/2 B) 1/4 C) 1/8 D) 1/16 E) 1/12

02 Sea la función :

$F(x)=mx^3+3n$; si $F'(1)=F(1)$.

Calcular : m/n

A) 3/4 B) 4/3 C) 2/3 D) 3/2 E) 5/4

03 Calcular : $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^4-3x^2+5x-4}{x^3-2x^2+2x-1}$

A) 1 B) 3 C) 5 D) 7 E) 9

04 Calcular : $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-3x^2+4}{x^3-7x^2+16x-12}$

A) 2 B) -3 C) 3 D) 4

05 Calcular : $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{100}-2x+1}{x^{50}-2x+1}$

A) 24/25 B) 49/24 C) 98/25 D) 1/2 E) 2

06 Calcular : $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-\sqrt[4]{x}}{1-\sqrt[8]{x}}$

A) 0 B) 1 C) 2 D) 1/2 E) 1/8

07 Halle : $f''_{(2)}$, si : $f(x)\ \ (x-1)^4$

A) 6 B) 8 C) 10 D) 12 E) 24

08 Se tiene la derivada de una función :

$F(x)=8x+5$

Calcular : $F(1)$, si $F(0)=3$

A) 12 B) 7 C) 8 D) 6 E) 5

09 Sea la función :

$F(x)=\sqrt{x^2+16}$; calcular $F'(3)$

A) 5 B) 1/5 C) 2/5 D) 3/5 E) 4/5

10 Sea la derivada de una función :

$F'_{(x)}=6x-5$, sabiendo que : $F(0)=2$;

Calcular : $F(-1)$

A) 6 B) 8 C) 10 D) 12 E) 14

11 Calcular : $\lim_{x\to 1}\left(\dfrac{x^n-nx+n-1}{x^{n+1}-(n+1)x+n}\right); n\in Z^+$

A) $\dfrac{n-1}{n+1}$ B) $\dfrac{n}{n-1}$ C) $\dfrac{n+1}{n}$ D) $\dfrac{n-1}{n}$ E) $\dfrac{n+1}{n-1}$

12 Halle $f'_{(3)}$, si $f(x) = (x-2)^3$

A) 2 B) 3 C) 6 D) 12 E) 24

13 Calcular : $\lim_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}$

A) 0 B) 1 C) –1 D) 2 E) e

14 Calcular : $\lim_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}$

A) 1 B) a C) 0 D) Ln a E) Log a

15 Calcular : $\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt[3]{1+x}}{\sqrt[4]{1+x}-\sqrt[5]{1+x}}\right)$

A) 3/4 B) 2/5 C) 10/3 D) 5/2 E) 1

16 Calcular : $\lim_{x\to 2}\left(\dfrac{x-\sqrt{x+2}}{\sqrt{4x+1}-3}\right)$

A) $\dfrac{9}{8}$ B) $\dfrac{7}{2}$ C) $-\dfrac{3}{8}$ D) $\dfrac{2}{3}$ E) 1

17 Hallar el valor de la derivada de la función:

$F(x)=\dfrac{1}{x}$ en el punto $x = 2$

A) $-\dfrac{1}{2}$ B) $-\dfrac{1}{3}$ C) $-\dfrac{1}{4}$ D) 1 E) $\dfrac{1}{2}$

18 Obtener : $\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{3\sqrt[5]{x+1}-2\sqrt{x+1}-1}{x}\right)$

A) $-\dfrac{2}{5}$ B) 1 C) 10 D) 4 E) $\dfrac{4}{5}$

19 Calcule: $\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{\sqrt[3]{x^3+8}-\sqrt{x^2+4}}{x^2}\right)$

A) $\dfrac{1}{12}$ B) $-\dfrac{1}{4}$ C) $\dfrac{1}{2}$ D) $-\dfrac{1}{2}$ E) $\dfrac{1}{4}$

20 Determinar un polinomio $P(x)$ de cuarto grado, si verifica las siguientes igualdades:

* $P(2) = P'(2)=0$; $P''(2) \neq 0$
* $P(-1) = 0$; $P'(-1) \neq 0$
* $P(-1) = 16$; $P(0) = 12$

Hallar : $P(3)$

A) 24 B) 27 C) 36 D) 72 E) 80

TAREA DOMICILIARIA

01 Si : $f(x)=\sqrt[4]{x}$, calcular $f'(16)$

A) 1/4 B) 1/8 C) 1/16 D) 1/32 E) 1/64

02 Dada la función : $F(x) = 3ax^2+b$

Si: $F'(1) = F(1)$, calcular : a/b

A) 1/6 B) 1/3 C) 2/3 D) 3 E) 6

03 Calcular : $\lim_{x\to 2}\dfrac{x^3+4x^2+2x-28}{x^3+2x^2-10x+4}$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

04 Calcular : $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}$

A) 1 B) 1/2 C) 1/3 D) 2 E) 3

05 Calcule : $\lim_{x\to 1}\dfrac{1-\sqrt[9]{x}}{1-\sqrt[7]{x}}$

A) 7/3 B) 7/2 C) 7/4 D) 9/7 E) 7/9

TERCERA PRACTICA DERIVADAS

01 Sean los números reales $a = x+4$; $b = x-10$. ¿Para qué valor de «x» el producto «ab» será el mínimo?

A) 5 B) –5 C) 3 D) 2 E) –1

02 Indicar el área máxima de un rectángulo de lados $(4 - x)$ y $(5+x)$.

A) $\dfrac{21}{4}$ B) $\dfrac{43}{2}$ C) $\dfrac{81}{4}$ D) $\dfrac{15}{2}$ E) $\dfrac{56}{3}$

03 Indicar el mínimo valor que toma la función:

$F(x) = 2x^2 - 4x + 11$

A) 1 B) 3 C) 5 D) 7 E) 9

04 Hallar el máximo valor que puede tomar la función : $F(x) = -x^2 + 6x - 4$

A) 1 B) 2 C) 4 D) 5 E) 8

05 Un agente en bienes estima que el beneficio mensual P es soles que obtiene al alquilar un edificio de "n" pisos está dado por :

$P = 92n - 2n^2$. ¿Qué número de pisos hará más rentable el edificio?

A) 22 B) 23 C) 24 D) 25 E) 32

(06) Si un número y el cuadrado de otro suman 192, hallarlos para que su producto sea máximo. Indicar el mayor de dichos números.

A) 8 B) 64 C) 120 D) 128 E) 160

(07) Si "M" y "m" son el máximo y mínimo relativo de la función : $F(x) = x^3 - 3x^2 + 1$

Calcular : $M - m$

A) 4 B) –4 C) 6 D) –6 E) 8

(08) Se quiere construir un jardín que tenga la forma de un sector circular con un perímetro de 30 m. Determinar la mayor área posible de obtener:

A) 56,25 m^2 B) 54,50 m^2 C) 52,35 m^2
D) 36,25 m^2 E) 36,20 m^2

(09) Una persona dispone de 40 m de alambrado para cercar un jardín rectangular. Sabiendo que sólo debe colocarla sobre 3 lados, porque el cuarto limita con su casa. Determinar el área máxima que puede cercar.

A) 40 m^2 B) 100 m^2 C) 200 m^2 D) 300 m^2 E) 400 m^2

(10) Una empresa de computadoras ha encontrado que su utilidad está dada por :

$U(x) = 400x - x^2$, en millones de nuevos soles, donde x representa, el número de unidades vendidas. Hallar la máxima utilidad.

A) S/. 200 B) S/. 400 C) S/. 16000
D) S/. 40000 E) S/. 60000

(11) Hallar el volumen del mayor cilindro recto que se puede inscribir en una esfera de radio $r = \sqrt{3}$.

A) πm^3 B) $\pi 2m^3$ C) $\pi\ 3m^3$ D) $\pi\ 4m^3$ E) $\pi 6m^3$

(12) Hallar las coordenadas del máximo relativo de la función : $f(x) = x^3 - 9x^2 + 15x - 3$

A) (0;5) B) (0;4) C) (1;4) D) (1;6) E) (2;5)

(13) Encuentre el punto sobre la gráfica de $y = x^2 + 1$ más cercano al punto (3;1)

A) (1;2) B) (2;1) C) (3;1) D) (1;3) E) (0;1)

(14) Un fabricante de pernos puede vender "x" de ellos por semana al precio $P = 200 - \frac{x}{100}$ soles; siendo $C=50x + 2000$ soles el costo total de la producción. Hallar la cantidad de tornillos que deberán de fabricar de modo que la utilidad que se obtenga sea máxima.

A) 1000 B) 2000 C) 4500 D) 6000 E) 7500

(15) Calcular el área del mayor rectángulo que tiene su base sobre el eje X y sus otros dos vértices en la curva $f(x) = 12 - x^2$.

A) 10m^2 B) 15m^2 C) 20m^2 D) 32m^2 E) 36m^2

(16) Si un número y el cubo de otro suman 108, hallarlos para que su producto sea máximo. Indicar el mayor de ellos.

A) 3 B) 24 C) 60 D) 81 E) 90

(17) Una pelota se dispara vertical hacia arriba, "s" metros del punto de partida. en el instante "t" (segundos) donde : $S = 24t - 2t^2$

¿Cuál es la altura máxima alcanzada?

A) 60m B) 64m C) 70m D) 72m E) 78m

(18) Se tiene una hoja rectangular de papel, de lados 8 y 15 pulgadas, se desea hacer con ella una caja sin tapa, cortando en sus esquinas cuadrados iguales y doblando convenientemente las partes restantes.

Determinar el lado de los cuadrados que deben ser cortados de tal manera que se obtenga el mayor volumen posible.

A) 5/3 B) 5/2 C) 2/3 D) 3 E) 2/5

(19) Encontrar la mayor área posible de un triángulo isósceles cuyo perímetro es 18 pulgadas.

A) $9\sqrt{3}$ B) $6\sqrt{2}$ C) 12 D) $2\sqrt{6}$ E) 4,5

(20) Encuentre el punto en la parábola ; $y^2=2x$ que esté más próximo al punto (1 ; 4)

A) (3;3) B) (1;5) C) (2;2) D) (–1;3) E) (4;2)

TAREA DOMICILIARIA

(01) Indicar el área máxima de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden $(6-x)$ y $(x+2)$ metros.

A) 9m^2 B) 12m^2 C) 16m^2 D) 24m^2 E) 25m^2

(02) Hallar el menor valor que puede tomar la función : $F(x) = x^2 - 8x + 21$

A) 1 B) 3 C) 5 D) 7 E) 9

(03) Hallar el máximo valor que puede tomar la función : $F(x) = 2x^3 + 8x-1$

A) 1 B) 3 C) 5 D) 7 E) 9

(04) Siendo P y Q el máximo y mínimo relativos de la función :

$$F(x) = x^3 - 12x + 1$$

Calcular : $P-Q$

A) 32 B) -32 C) 30 D) 28 E) 25

05 Se tienen los números reales $a = 15 - x^2$ y $b = x - 6$. ¿Para qué valor de x el producto "ab" será máximo?

A) 1 B) -1 C) 2 D) 5 E) 6

CUARTA PRACTICA DIRIGIDA

01 Formar una ecuación cuadrática con las soluciones de la ecuación $F'(x) = 0$, sabiendo que:

$$F(x) = 3x^4 - 4x^3 - 126x^2 + 540x + 1$$

A) $x^2 - 2x - 15 = 0$ B) $x^2 + 2x - 15 = 0$
C) $x^2 - 8x + 15 = 0$ D) $x^2 + 8x + 15 = 0$
E) $x^2 - 14x - 15 = 0$

02 Sea $P(x)$ un polinomio cuadrático de coeficiente principal positivo, tal que:

$$P(x).P'(x) = 8x^3 - 12x^2 + mx - 6;\ m \in R$$

Calcular el valor de: $E = \sqrt{P(3)+1}$

A) 8 B) 4 C) 2 D) $\sqrt{2}$ E) $\sqrt[4]{2}$

03 Sea el Polinomio:

$$P(x) = x^{200} - x^{199} + x^{198} - x^{197} + ... + x^2 - x + 2\,005$$

Calcular el valor de: $M = P(0) + P'(1)$

A) 2 005 B) 100 C) 2105 D) 105 E) 3 105

04 Dado el siguiente polinomio:

$$P(x) = a_0x^{301} + a_1x^{300} + a_2x^{299} + ... + a_{300}x + a_{301}$$
$$a_0 \neq 0$$

Luego de calcular $P(x)$, dar como respuesta el valor de:

$$E = Coef.(x^{200}) + Coef.(x^{100})$$

A) $200a_{101} + 100a_{201}$ B) $201a_{100} + 101a_{200}$
C) $201a_{201} + 100a_{200}$ D) $200a_{100} + 100a_{200}$
E) $200a_{200} + 100a_{100}$

05 Sean los polinomios:

$$F(x) = x^7 + 2x^6 + 3x^5 + 4x^4 + 5x^3 + 6x^2 + 7x + 8$$
$$G(x) = 6x^5 + 5x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1$$

Además: $H(x) = (F.G)(x)$.

Calcular el coeficiente de x^5 en $H'(x)$

A) 685 B) 672 C) 667 D) 663 E) 659

06 Sea la función: $F(x) = \dfrac{2x+1}{x^2+2}$, además se define al conjunto: $A = \{x \in Z \,/\, F'(x) \geq 0\}$. Entonces el cardinal de dicho conjunto es:

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

07 Sea la función: $H(x) = (2x^3 - x + 4)^5$

Calcular el valor de: $T = \sqrt[12]{H'(1)}$

A) $\sqrt[4]{5}$ B) $\sqrt{5}$ C) 5 D) 25 E) 125

08 Dada la función: $G(x) = \sqrt{4x+1} + \sqrt[3]{5x^2+7}$

Si: $G'(2) = \dfrac{a}{b}$ (fracción irreductible), entonces el valor de $3b - 2a$ es:

A) 5 B) 4 C) 3 D) 2 E) 1

09 El mayor valor de "x" que verifica a la inecuación $H'(x) \leq 0$, tal que:

$$H(x) = \pi^{2x^5 - x + \pi}$$

es:

A) $\sqrt[5]{0,1}$ B) $\sqrt[4]{0,1}$ C) $\sqrt[3]{0,1}$ D) $\sqrt[5]{10}$ E) $-\sqrt[4]{10}$

10 Sea la función:

$$F(x) = Ln(3x^2 - x + 1)$$

Luego de resolver la inecuación: $F'(x) \geq 0$, dar como respuesta la suma de los valores enteros de "x" no mayores que 199.

A) 19 900 B) 19 999 C) 20 000 D) 20 900 E) 21 990

11 Calcular el valor de:

$$L = \lim_{x \to -2}\left(\frac{x^4 + 2x^3 - x^2 - x + 2}{x^3 + 3x^2 + 5x + 6}\right)$$

A) -3 B) -1 C) 0 D) 2 E) 5

12 Calcular el valor de: $L = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt[7]{x} - 1}{\sqrt[9]{x} - 1}$

A) 9 B) 7 C) 63 D) $\dfrac{9}{7}$ E) $\dfrac{7}{9}$

13 Sea la función:

$$F(x) = \frac{\sqrt[3]{(1+ax)(1+bx)(1+cx)} - 1}{2x}$$

Halle el valor de: $\lim\limits_{x \to 0} F(x)$

A) $a+b+c$ B) abc C) $ab+bc+ca$
D) $\dfrac{a+b+c}{3}$ E) $\dfrac{a+b+c}{6}$

14 Un arrendador ha adquirido un nuevo edificio con 100 departamentos para rentar y encuentra que entre más unidades "x" que quiera rentar, menos deberá ser su precio $P(x)$ de acuerdo a la fórmula.

$$P(x)=180-1{,}2x;\ 0\leq x\leq 100$$

¿Cuántas unidades debía rentar y a qué precio para maximizar sus ingresos?

A) 75; 90 B) 70; 95 C) 40; 25 D) 80; 60 E) 10; 20

15 Una ventana tiene la forma de un rectángulo rematado por su parte superior con un semicírculo y se quiere contornear con $(\pi+4)$ metros de borde metálico. Calcular el radio de la parte semicircular, sabiendo que el área total de la ventana es máxima.

A) 1m B) 1,5m C) 1,2m D) 1,8 m E) 0,8 m

16 Dada una hoja cuadrada de lado "a", se desea construir con ella una caja sin tapa, cortando en sus esquinas cuadrados iguales y doblando convenientemente la parte restante. Determine el lado de los cuadrados que deben ser cortados de modo que el volumen de la caja sea el mayor posible.

A) $\frac{a}{2}$ B) $\frac{a}{4}$ C) $\frac{a}{8}$ D) $\frac{a}{6}$ E) $\frac{a}{11}$

17 Sea la función:

$$F: R\to R / F(x)=x^3-5x^2+3x+9$$

Dar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

( ) Es monótona en $\left]\frac{1}{3};3\right]$

( ) El máximo relativo de F es $4\left(\frac{4}{3}\right)^3$.

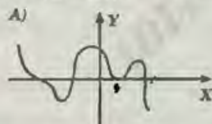
( ) Es monótona $\forall x\in\left]-\infty;-1\right]\cup\left[3;+\infty\right[$

A) VVF B) FFV C) VVV D) FFF E) FVF

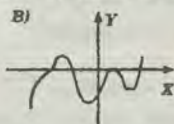
18 Esbozar la gráfica de la función:

$$F(x)=(2-x)(x^2+x-6)(x+5)^2(x^2+x-20)$$

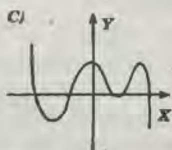
A)



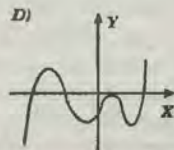
B)



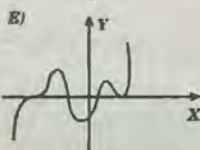
C)



D)



E)



19 Si el rango de la función:

$$F(x)=x^3+3x^2-x+1;\ -2\leq x<0$$

es $[a; b]$, calcular: $\sqrt{b-3a}$

A) 2 B) $\sqrt{2}$ C) 3 D) $\sqrt{3}$ E) 4

20 Si el polinomio:

$$P(x)=x^5-5\theta x+4\alpha;\ \theta\wedge\alpha\in R\wedge\alpha\neq 0$$

admite a "r" como raíz doble, hallar:

$$E=\frac{\alpha^4}{\theta^5}+\alpha^4-\theta^5+1$$

A) α B) 0 C) 0 D) 2 E) $\alpha+\theta+1$

CLAVES

PRIMERA PRACTICA (DERIVADAS)				
01) A	02) B	03) C	04) D	05) E
06) D	07) A	08) B	09) C	10) B
11) E	12) D	13) E	14) B	15) A
16) D	17) B	18) A	19) A	20) C
21) B	22) A	23) D	24) E	25) D
26) A	27) A	28) D	29) C	30) B

SEGUNDA PRACTICA (DERIVADAS)				
01) E	02) D	03) D	04) B	05) B
06) C	07) D	08) *	09) D	10) C
11) A	12) C	13) *	14) D	15) C
16) A	17) C	18) A	19) B	20) D
01) D	02) B	03) C	04) B	05) E

TERCERA PRACTICA (DERIVADAS)				
01) C	02) C	03) E	04) D	05) B
06) D	07) A	08) A	09) C	10) D
11) D	12) C	13) B	14) E	15) D
16) D	17) D	18) A	19) A	20) C
01) C	02) C	03) D	04)	05) D

CLAVES DE LA CUARTA PRACTICA									
1)B	2)B	3)C	4)A	5)B	6)D	7)B	8)A	9)B	10)A
11)B	12)D	13)E	14)A	15)A	16)D	17)C	18)A	19)A	20)D

GENERALIZACIONES

El concepto simple de derivada de una función real de una sola variable ha sido generalizado de varias maneras:

*Cálculo de varias variables

*Derivada direccional, extiende el concepto de derivada parcial.

*Derivada parcial, que se aplica a funciones reales de varias variables.

*Análisis complejo:

*Función holomorfa, que extiende el concepto de derivade a cierto tipo de funciones de variables complejas

*Análisis funcional:

*Derivada fraccional, que extiende el concepto de derivada dè orden superior a orden r, r no necesita ser necesariamente un número entero como sucede en las derivadas convencionales.

*Derivada funcional, que se aplica a funcionales cuyos argumentos son funciones de un espacio vectorial de dimensión no finita.





FUNCION EXPONENCIAL Y LOGARITMICA

31

OBJETIVOS :

* La competencia que busca desarrollar este grupo de objetos de aprendizaje es que el alumno aprenda a determinar el dominio y rango de una función exponencial o logarítmica, además de representarla gráficamente y simplificar expresiones logarítmicas aplicando las propiedades de los logaritmos.

* En particular, este objeto de aprendizaje introduce al alumno en el tema exponiendo las diferentes aplicaciones que tienen las funciones exponenciales y logarítmicas.

INTRODUCCIÓN :

Las funciones exponenciales así como la función logarítmica son dos de las funciones más importantes, razón por la cual se les hace un estudio especial . Estas funciones aparecen en una amplia variedad de aplicaciones como por ejemplo :

"Respuesta a la publicidad en televisión"

El porcentaje R de audiencia que responde a un comercial de televisión para un nuevo producto después de "t" días se determina mediante la fórmula: $R = 70 - 100e^{-0,2t}$

I) ¿Qué porcentaje se espera que responda después de *10* días?

II) ¿Cuál es el máximo porcentaje de personas que se espera respondan?

III) ¿Cuántos días deben transcurrir para que R exceda el *40* por ciento?

Este tipo de problemas es uno de los muchos que pueden ser modelados utilizando las funciones exponenciales.

Otro ejemplo es la aproximación decimal para $2^{\sqrt{3}}$ que se puede obtener teniendo en cuenta que $\sqrt{3} \approx 1{,}7321$ y haciendo:

* Como $1 < 1{,}7 < 2$, entonces: $2^{1} < 2^{1,7} < 2^{1,8}$

* Como $1{,}7 < 1{,}73 < 1{,}8$, entonces: $2^{1,7} < 2^{1,73} < 2^{1,8}$

*Como $1{,}73 < 1{,}732 < 1{,}74$, entonces:

$$2^{1,73} < 2^{1,732} < 2^{1,74}$$

* Como $1{,}732 < 1{,}7321 < 1{,}733$, entonces: $2^{1,732} < 2^{1,7321} < 2^{1,733}$ y así sucesivamente.

En cada desigualdad se tiene una potencia de 2 , en donde el exponente es, cada vez más, una mejor aproximación del valor de $\sqrt{3}$, y por consiguiente se tiene una mejor aproximación del valor de $2^{\sqrt{3}}$.

Una discusión similar se puede dar para toda potencia irracional de un número positivo.

* Otra fuente de la que provienen las funciones exponenciales es del estudio de varios fenómenos naturales . Por ejemplo , un biólogo que cultiva cierta clase de bacterias en su laboratorio , como parte de su investigación, desea estudiar cómo varía el número de bacterias con el tiempo . En circunstancias favorables se encuentra que mientras dure el alimento, el tiempo necesario para que el número de bacterias se duplique no depende del tiempo en que se comienza el experimento. Además si suponemos que cierto día hay A_0 bacterias presentes y que el número de bacterias se duplica cada día , entonces tenemos:

Día en que empieza la observación: A_0 (bacterias)

Un día después de comenzar la experiencia : $2A_0$ (bacterias)

Segundo día después : $2(2A_0) = 2^2 A_0$ (bacterias)

Tercer día después : $2(2^2 A_0) = 2^3 A_0$ (bacterias)

$\vdots$

n días después : $2(2^{n-1} A_0) = 2^n A_0$ (bacterias)

* Luego , n días después el número A de bacterias presentes está dado por la ecuación :

$A = A_0 2^n$ donde «n» es un entero positivo. Si suponemos que el número de bacterias no se multiplica bruscamente cada *24* horas , sino que aumenta constantemente a lo largo de todo el día , entonces podíamos preguntarnos , por ejemplo:

¿Cuántas bacterias hay en $\frac{1}{2}$ día o $1\frac{1}{4}$ días?

¿Cuántas había 2 días antes de comenzar el experimento , es decir , antes de efectuar el primer recuento?

Estas preguntas se pueden contestar mediante la ecuación $A = A_0\ 2^n$ si se permite generalizar el exponente «n» a cualquier valor racional.

Las ecuaciones de la forma $A = A_0\ 2^n$ son modelos matemáticos satisfactorios para describir fenómenos de crecimiento, al menos en períodos limitados de tiempo. Se llega de esta forma por dos caminos diferentes a la idea de una función que asocia a cada número real x un número a^x. Lo anterior sugiere la siguiente definición:

FUNCIÓN EXPONENCIAL Y LOGARÍTMICA

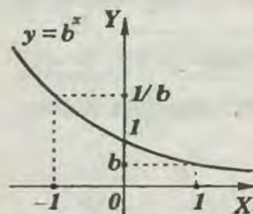
Estas funciones se denominan trascendentes además se caracterizan por ser una inversa de la otra

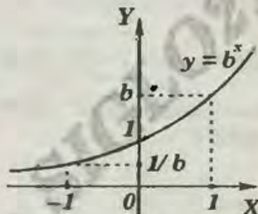
I) FUNCIÓN EXPONENCIAL DE BASE "b"

Sea "b" un número real positivo y diferente de 1. La función f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$\boxed{f_{(x)} = b^x} \quad ó \quad \boxed{Exp_b(x) = b^x}$$

Se denomina función exponencial de base "b". El dominio de esta función es $D_f = \mathbb{R}$ y su rango es $R_f = \langle 0; +\infty\rangle$.





$\boxed{0<b<1}$ $\boxed{b>1}$

A) PRIMER CASO :

Cuando la base está comprendida entre "0" y "1" $(0 < b < 1)$.

EJEMPLO:

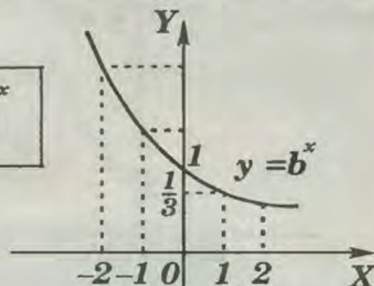
* Caso particular : $y = \left(\dfrac{1}{3}\right)^x$

* Tabulando , obtenemos los siguientes pares de valores :

D_f	x	$-\infty$	...	-2	-1	0	1	2	...	$+\infty$
R_f	y	$+\infty$	...	9	3	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	...	0

*Gráfica :

$$\boxed{y = \left(\frac{1}{3}\right)^x}$$



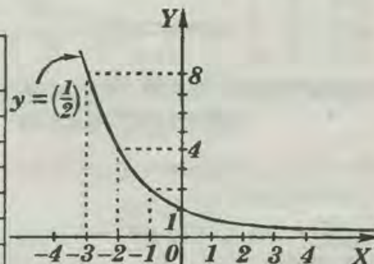
$$\boxed{\text{Propiedades de : } y = b^x\ ;\ 0 < b < 1}$$

* $D_f \in \mathbb{R}$
* $R_f \in < 0\ ;\ \infty >$
* $y = b^x > 0\ ,\ \forall x \in \mathbb{R}$
* Si: $x = 0 \to y = b^x = 1$
* Si: $x < 0 \to y = b^x > 1$
* Si: $x \to -\infty \Rightarrow y = b^x \to \infty$
* Si: $x > 0 \Rightarrow y = b^x < 1$
* Si: $x \to \infty \to y = b^x \to 0$

OTRO EJEMPLO :

* Graficaremos : $y = f(x) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x = 2^{-x}$

x	$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$
-3	8
-2	4
-1	2
0	1
1	$1/2$
2	$1/4$
3	$1/8$



B) SEGUNDO CASO :

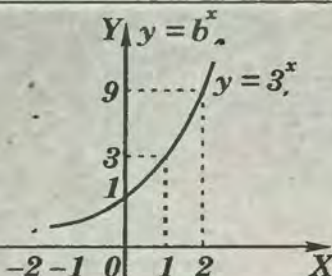
Cuando la base es mayor a la unidad $(b > 1)$

EJEMPLO :

* Caso particular : $y = 3^x$
* Tabulando , obtenemos los valores :

D_f	x	$-\infty$	...	-2	-1	0	1	2	...	$+\infty$
R_f	y	$+\infty$	...	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9	...	$+\infty$

Gráfica :

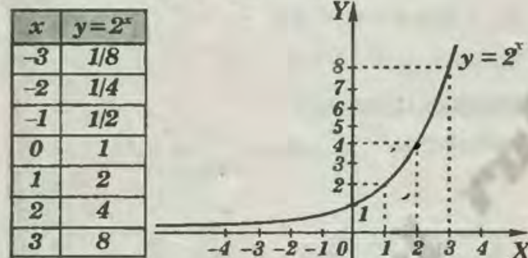


Propiedades de : $y=b^x$; $(b>1)$

* $D_f \in <-\infty;\infty>$ * $R_f \in <0;\infty>$
* $y=b^x>0\ \forall x\in\mathbb{R}$ *Si: $x=0 \rightarrow y=b^x=1$
* Si: $x<0 \rightarrow y=b^x<1$
* Si: $x\rightarrow-\infty \Rightarrow y=b^x\rightarrow 0$
* Si: $x>0 \Rightarrow y=b^x>1$
* Si: $x\rightarrow\infty \rightarrow y=b^x\rightarrow\infty$

OTRO EJEMPLO:

* Graficaremos : $y=f(x)=2^x$



x	$y=2^x$
–3	1/8
–2	1/4
–1	1/2
0	1
1	2
2	4
3	8

PROPIEDADES DE LA FUNCIÓN EXPONENCIAL

* Si $0<b<1$, la función $f(x)=b^x$ es decreciente en todo su dominio.

* Si $b>1$, la función $f(x)=b^x$ es creciente en todo su dominio.

* La gráfica de la función exponencial de base "b" pasa por el punto $(0;1)$

*Si $0<b<1$, entonces:

$$\lim_{n\to-\infty} b^x=+\infty \quad ; \quad \lim_{n\to+\infty} b^x=0$$

LA FUNCIÓN EXPONENCIAL DE BASE «e»

*La función $y=e^x$ donde "e" es número irracional trascendente juega un rol muy importante en las matemáticas.

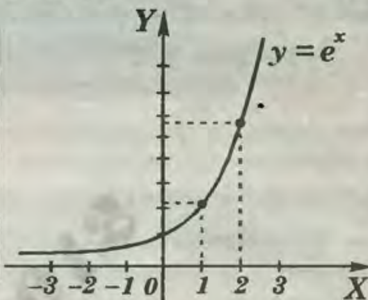
* Las aproximaciones del número "e" se pueden determinar con la expresión :

$$e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+...+\frac{1}{n!}+...$$

*El valor de "e" son siete decimales de aproximación es : $e=2,7182818$

* La gráfica de $y=e^x$ es :

x	$y=e^x$
-3	0,05
-2	0,14
-1	0,37
0	1
1	2,72
2	7,39
3	20,09

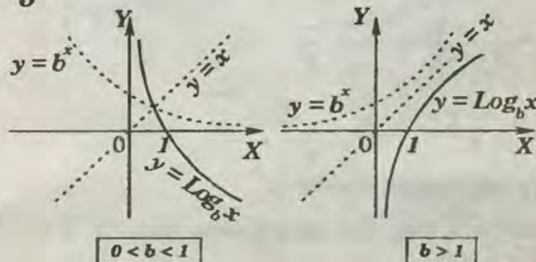


II)FUNCIÓN INVERSA DE EXPONENCIAL O FUNCIÓN LOGARÍTMICA:

Si "b" es un número real positivo diferente de la unidad entonces una función "f" será logarítmica

si y sólo si: $f=\{(x;y)/y=Log_b x;(b<0\wedge b\neq 1)\}$

al cual llamaremos " función logaritmo de base "b" "



Función Exponencial	Función Logarítmica
$y=f(x)=b^x$	$y=f(x)=Log_b x$
$D_f \in <-\infty;\infty>$	$D_f \in <0;\infty>$
$R_f \in <0;\infty>$	$R_f \in <-\infty;\infty>$

* Nótese que : $\forall\, b\in\mathbb{R}^+-\{1\}$

$$y=b^x \quad \rightarrow \quad Log_b y = x$$



Permutando "x" por "y"

↓

$y = Log_b x$

Función Inversa



* Representación gráfica de : $y = Log_b x$

A) PRIMER CASO :

Cuando la base está comprendida entre "0" y "1" $(0 < b < 1)$

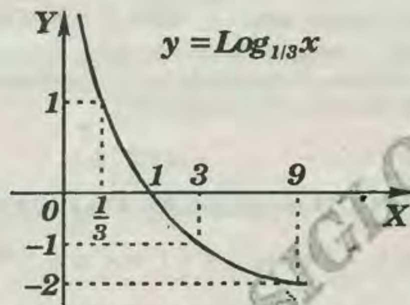
EJEMPLO :

* Caso particular : $y = Log_{\frac{1}{3}} x$

* Tabulando ; obtenemos los valores :

D_f	x	0	$\cdots$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9	$\cdots$	$+\infty$
R_f	y	$+\infty$	$\cdots$	2	1	0	-1	-2	$\cdots$	$-\infty$

* Gráfica : $y = Log_b x$



Propiedades de : $y = Log_b x ; (0 < b < 1)$

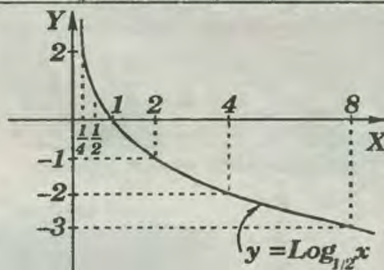
* $D_f \in < -0; \infty >$
* $R_f \in < -\infty; \infty >$
* Si: $x < 0 \to L og_b x \nexists$ en $\mathbb{R}$
* $L og_b b = 1$
* $L og_b 1 = 0$
* Si: $x > 1 \Rightarrow L og_b x < 0$
* Si: $x \to \infty \Rightarrow L og_b x \to -\infty$
* Si: $x < 1 \to L og_b x > 1$
* Si: $x \to 0 \to L og_b x \to \infty$

OTRO EJEMPLO:

* Graficando : $f(x) = Log_{\frac{1}{2}} x$

* Tabulando :

x	y
$\vdots$	$\vdots$
$1/4$	2
$1/2$	1
1	0
2	-1
4	-2
8	-3
16	-4
$\vdots$	$\vdots$



* Del gráfico : $Si: \ Log_b x_1 > Log_b x_2 \Leftrightarrow x_1 < x_2$

B) SEGUNDO CASO :

Cuando la base es mayor que la unidad $(b > 1)$

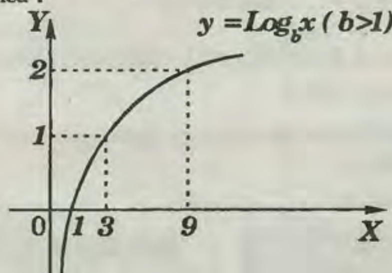
EJEMPLO:

* Caso particular : $y = L og_3 x$

* Tabulando, obtenemos los valores:

D_f	x	0	$\cdots$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9	$\cdots$	$+\infty$
R_f	y	$-\infty$	$\cdots$	-2	-1	0	1	2	$\cdots$	$+\infty$

* Gráfica :



Propiedades de : $y = Log_b x; (b > 1)$

* $D_f \in < 0; \infty >$
* $R_f \in < -\infty; \infty >$
* Si: $x < 0 \to Log_b x \nexists$ en $\mathbb{R}$
* $Log_b b = 1$
* $Log_b 1 = 0$
* Si: $x > 1 \Rightarrow Log_b x < 0$
* Si: $x \to \infty \Rightarrow Log_b x \to \infty$
* Si: $x < 1 \to Log_b x < 0$
* Si: $x \to 0 \Rightarrow Log_b x \to -\infty$

OTRO EJEMPLO:

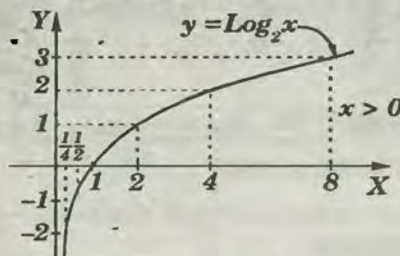
* Graficando : $f(x) = Log_2 x$

www.SIGLO21X.com

* Tabulando para algunos valores :

x	...	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16	...
y	...	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	...

* Uniendo estos puntos tenemos:



* Del gráfico: $\boxed{Si: Log_b x_2 > Log_b x_1 \Leftrightarrow x_2 > x_1}$

PROPIEDADES DE LA FUNCIÓN LOGARÍTMICA DE BASE "b"

* Si: $0 < b < 1$, la función $g(x) = Log_b\, x$ es decreciente en su dominio ($\mathbb{R}^+$).

* Si: $b > 1$, la función $g(x) = Log_b\, x$ es creciente en su dominio ($\mathbb{R}^+$).

* La gráfica de toda función logarítmica pasa por el punto $(1; 0)$.

* Si : $0 < b < 1$, entonces :

$\lim\limits_{x\to 0^+} Log\, b^x = +\infty$ y $\lim\limits_{x\to +\infty} Log\, b^x = -\infty$

* Si : $b > 1$, entonces :

$\lim\limits_{x\to 0^+} Log\, b^x = -\infty$ y $\lim\limits_{x\to +\infty} Log\, b^x = +\infty$

LOGARÍTMOS NATURALES Y DE DECIMALES

Como e es un número positivo y diferente de 1 , las funciones definidas por $f(x) = e^x$.... (función exponencial de base e).

$g(x) = Log_e x$ ....(función de base e)

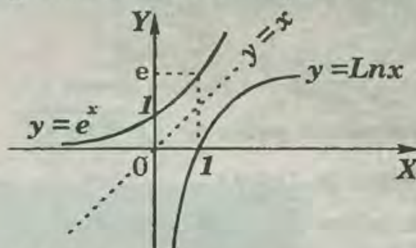
Son tales que :

* $D_f = \mathbb{R}$, $R_f = \langle 0, +\infty \rangle$

* $D_g = \langle 0, +\infty \rangle$; $R_g = \mathbb{R}$

* Una es inversa de la otra

* Sus gráficas muestran en la figura: $2 < e < 3$



OBSERVACIONES

* a $Log_e x$ se denomina logaritmo natural o neperiano de x y se denota como $Ln\, x$.

* a $Log_{10} x$ se denomina logaritmo decimal o vulgar de x y se denota con $Log\, x$.

* Por la fórmula de cambio de base , la relación entre $Ln\, x$ y $Log\, x$, está dada por :

De donde : $Logx = \frac{Lnx}{Ln 10}$ ó $Lnx = \frac{Logx}{Loge}$

$Log\, x \cong 0{,}4343\, Ln\, x$ ó $Ln\, x \cong 2{,}3026\, Log\, x$

* Aunque estas funciones son casos particulares de las funciones exponenciales y logarítmicas es necesario recordar lo siguiente:

1) $Ln(e^x) = x$ 2) $e^{Lnx} = x$

DESIGUALDADES LOGARÍTMICAS

Si: $Log_b\, x_1 > Log_b\, x_2 \wedge b > 1 \Rightarrow x_1 > x_2 > 0$

Si: $Log_b\, x_1 > Log_b\, x_2 \wedge 0 < b < 1 \Rightarrow 0 < x_1 < x_2$

EJEMPLOS:

* Si: $Log_3 x > Log_3 5 \Rightarrow x > 5$

* Si: $Log_{\frac{1}{3}} x > Log_{\frac{1}{3}} 2 \Rightarrow 0 < x < 2$

* Además:

• Si: $b > 1$, entonces se cumple:

$\boxed{Log_b x > \alpha \Rightarrow x > b^\alpha}$

$\boxed{Log_b x < \beta \Rightarrow 0 < x < b^\beta}$ $Log_2\, x > 2 \Rightarrow x > 4$

• Si: $0 < b < 1$, entonces se cumple :

$\boxed{Log_b x > \alpha \Rightarrow 0 < x < b^\alpha}$

$\boxed{Log_b x < \beta \Rightarrow x > b^\beta}$

OBSERVACIONES :

I) Dadas dos expresiones positivas $F(x)$ y $G(x)$ de valores reales , tales que :

$$Log_b F(x) = Log_b G(x) \; ; \; b > 0, \; b \neq 1$$

La ecuación expuesta es equivalente al sistema algebraico mixto:

$$\left.\begin{cases} F_{(x)} > 0 \text{ .... } S_1 \\ G_{(x)} > 0 \text{ .... } S_2 \\ F_{(x)} = G(x) \text{ .... } S_3 \end{cases}\right\} C.V.A.$$

* Por lo tanto, el conjunto solución de la ecuación vendrá dado por : $CS = S_1 \cap S_2 \cap S_3$

II) La ecuación $Log_{a(x)} f(x) = Log_{a(x)} g(x)$ es equivalente al sistema mixto.

$$\begin{cases} f(x) > 0 \text{ .... } sp_1 \\ g(x) > 0 \text{ .... } sp_2 \\ a(x) > 0 \wedge a(x) \neq 1 \text{ .... } sp_3 \\ f(x) = g(x) \text{ .... } sp_4 \end{cases}$$

$$\rightarrow C.S. = sp_1 \cap sp_2 \cap sp_3 \cap sp_4$$

III) La inecuación $Log_{a(x)} f(x) > Log_{a(x)} g(x)$ es equivalente al conjunto de sistemas siguiente:

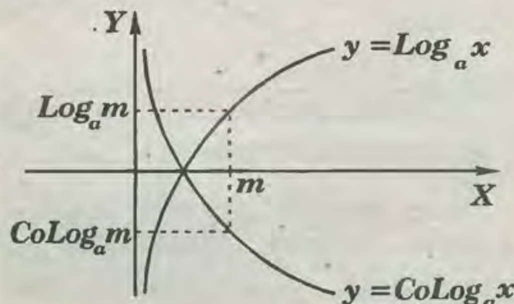
$$(\alpha) \begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ a(x) > 1 \\ f(x) > g(x) \end{cases} \quad \vee \quad (\beta) \begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ 0 < a(x) < 1 \\ f(x) < g(x) \end{cases}$$

$$\rightarrow C.S. = S(\alpha) \cup S(\beta)$$

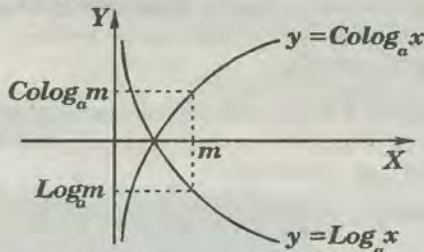
FUNCIÓN COLOGARITMO

$\forall x > 0 \; ; \; a > 0 \; ; \; a \neq 1; \quad colog_a x = -Log_a x$

* Si: $a > 1$



* Si: $0 < a < 1$



EL NÚMERO «e» COMO LÍMITE

Sean las funciones f y g cuyas reglas de correspondencia se dan a continuación :

$$f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}} \; ; \; g(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

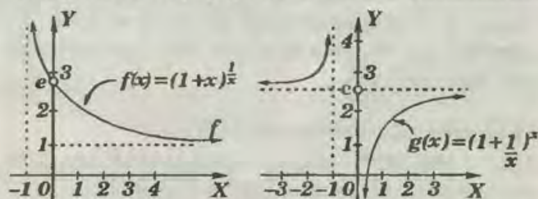
* Para que f y g estén definidas en el campo real , sus respectivas bases deben ser positivas y diferentes de la unidad , es decir :

$$1 + x > 0 \wedge x \neq 0 \; ; \; 1 + \frac{1}{x} > 0 \; ; \; x \neq 0$$

* Por lo tanto , los dominios de f y g se dan a continuación :

$$Domf = \langle -1;0 \rangle \cup \langle 0;+\infty \rangle \; ; \; Domg = \langle -\infty;-1 \rangle \cup \langle 0;+\infty \rangle$$

*Los gráficos de f y g se muestran a continuación



* El número e por definición es un límite de f cuando x tiende hacia cero (por la derecha o izquierda) ; o también puede ser igual al límite de g cuando x tiende hacia $+\infty$ ó $-\infty$, es decir :

$$\lim_{\substack{x \to +\infty \\ \vee -\infty}} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \qquad \lim_{\substack{x \to +\infty \\ \vee -\infty}} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

* Además, el número «e» es un número irracional , cuya aproximación decimal es: $e \approx 2,7182$

CRECIMIENTO y DECRECIMIENTO EXPONENCIALES

Un tema clásico del estudio de la función exponencial es el del crecimiento y decrecimiento exponencial . A continuación , presentamos una breve introducción al tema. Cuando se manifiesta

que "una población crece exponencialmente", esto significa que la situación puede ser descrita por medio de una función exponencial creciente de la forma: $y = A\,b^{kt}$

Donde $b > 1$; A es la cantidad existente en el instante $t = 0$, k es igual a una cantidad positiva que define el ritmo del crecimiento .

EJEMPLOS:

1) El crecimiento de una población de bacterias está dado por $y = 2^t$. Aquí , $A = 1$, ya que una bacteria estaba al comienzo, es decir, en $t = 0$. Asimismo $k = 1$, lo cual significa que el número de bacterias se duplica cada hora.

2) La población del mundo (en billones de habitantes), está dada por : $P(t)=4\times 2^{\frac{t}{35}}$, donde t es el número de años después de *1985*.

Aquí salta a la vista que $A = 4$, que es la población existente en *1985* . También se observa que $k = 1/35$; lo cual indica que la población se duplica cada *35* años y t es igual al número de años.

3) Si la tasa de inflación aumenta *12%* cada año, entonces un artículo que actualmente cuesta *100*, costará $C(t)$ en t años , tal que : $C(t) = 100\,(1{,}12)^t$
Donde $A = 100$ es el costo actual; $k = 1$, lo cual significa que el costo aumenta *12%* (se multiplica por *1,12*) cada año.

4) El valor de un reloj está dado por :
$V(t) = 200\times 2^{-0{,}2t}$ dólares , donde t es el tiempo en años contado desde que el reloj era nuevo.

a) ¿Cuánto costó el reloj cuando era nuevo?

b) ¿Cuánto costará *20* años después?

RESOLUCIÓN

a) Cuando el reloj estaba nuevo, no había transcurrido ningún tiempo , es decir $t = 0$ y su valor era:
$V(0) = 200\times 2^{-0{,}2(0)} = 200\times 2^0 = 200$ dólares

b) *20* años después, es decir, cuando $t = 20$, el valor será:
$V(20)=200\times 2^{-2(20)}=200\times 2^{-4}=200\times \frac{1}{16}=12{,}5$ *dólares*

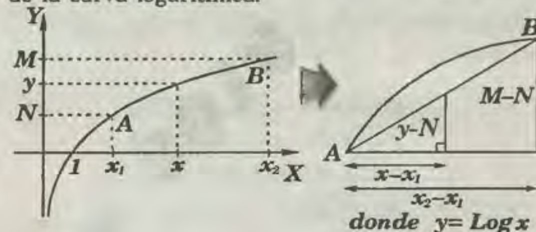
APLICACIONES DE LA FUNCIÓN EXPONENCIAL

La función exponencial aparece cada vez que se analiza un proceso que evoluciona de modo que el aumento o disminución en un pequeño intervalo de tiempo sea proporcional a lo que había al comienzo del intervalo . Esto sucede en los siguientes casos reales :

* ***Crecimiento de bacterias.***
* ***Crecimiento de otras poblaciones animales y vegetales.***
* ***Interés del dinero acumulado.***
* ***Desintegración radiactiva.***

INTERPOLACIÓN LINEAL

Dados el $Log\,x_1 = N$; $Log\,x_2 = M$, se pide calcular el $Log\,x$, siendo $x_1 < x < x_2$. Si $x_1 \approx x \approx x_2$, entonces podemos calcular el valor aproximado del $Log x$, utilizando para esto una recta como aproximación de la curva logarítmica.



donde $y= Log\,x$

Por semejanza de triángulo : $\dfrac{y-N}{x-x_1}=\dfrac{M-N}{x_2-x_1}$

$$\rightarrow\ y=\frac{M-N}{x_2-x_1}\times(x-x_1)+N$$

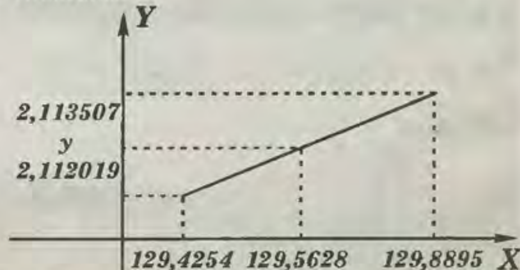
EJEMPLO:

Si $Log\ 129{,}8695 = 2{,}113507$
$Log\ 129{,}4254 = 2{,}112019$

Determinar el valor de $Log 129{,}5628$.

RESOLUCIÓN :

* Graficando :



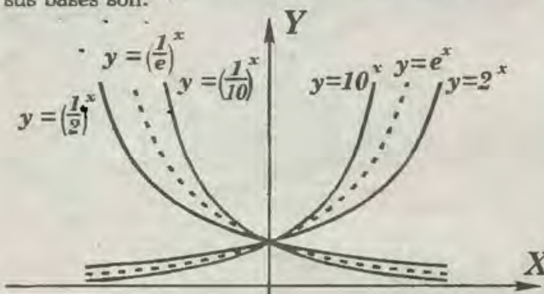
* Por semejanza de triángulos :

$$\frac{y-2{,}112019}{2{,}113507-2{,}112019}=\frac{0{,}5628-0{,}4254}{0{,}8695-0{,}4254}$$

$\rightarrow y = 2{,}112480 \rightarrow$ $Log\ 129{,}5628 = 2{,}112480$

OBSERVACIONES

I) El comportamiento gráfico de la función logarítmica y fúnción exponencial con respecto a sus bases son:



* De aquí obtenemos que:

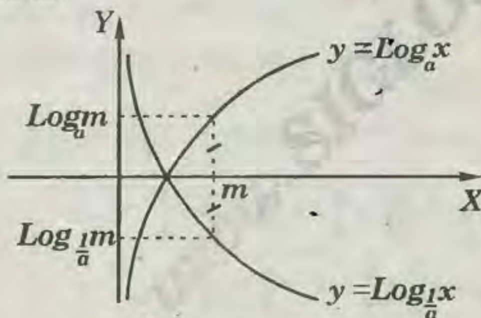
A) Si : $a > 1 \wedge m > n \Rightarrow a^m > a^n$

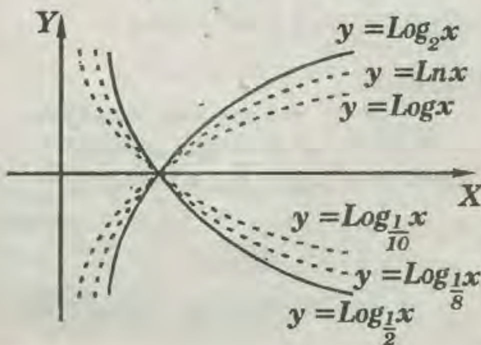
B) Si : $0 < a < 1 \wedge m > n \Rightarrow a^m < a^n$

II) Si: $a > 1$, entonces , $0<\frac{1}{a}<1$ por ello :

$$Log_a x = Log_{\left(\frac{1}{a}\right)}\left(\frac{1}{x}\right) = -Log_{\frac{1}{a}} x$$

* Así obtenemos el siguiente comportamiento de las gráficas:





* De aquí obtenemos que:

A) Si: $a > b > 1 \Rightarrow Log_a x > Log_b x$

B) Si: $0 < a < b < 1 \Rightarrow Log_a x > Log_b x$

HISTORIA DE LOS LOGARITMOS

No se debe ver la historia de las matemáticas como una marcha triunfal a lo largo de una avenida sin obstáculos. Al contrario, esta historia presenta numerosas interrupciones, y el camino seguido raramente se parece a una línea recta, encontrándose incluso a veces en un callejón sin salida....Hubo avances bruscos debidos a nuevos conceptos, que respondieron a problemas a veces muy alejados de las cuestiones iniciales que los habían generado.

Los logaritmos son un ejemplo de este desarrollo caótico y fecundo a la vez. Partiendo de una idea simple, pero cuya puesta en práctica necesitaba un gran trabajo (la construcción de las tablas), han sido en primer lugar el motor de un desarrollo de las matemáticas aplicadas, antes de revelarse como la solución de un problema geométrico. Objeto de estudios teóricos seguidos de profundizaciones, han sido también una herramienta indispensable para la modelización de múltiples fenómenos físicos.

La presentación pedagógica tradicional de los logaritmos privilegia el logaritmo llamado «neperiano». Se lo introduce como la función primitiva de la función inversa que se anula para el valor 1 de la variable. Aunque esta introducción sea matemáticamente satisfactoria se halla muy lejos de ser evidente para los estudiantes y su propiedad fundamental quede oculta. Por supuesto, el problema histórico que llevó a concebir los logaritmos también está ausente, mientras que su uso para presentar esta nueva noción tiene la ventaja de la simplicidad: se trata sencillamente de construir una tabla que permita realizar rápidamente multiplicaciones, divisiones y potencias.

Hoy la utilización de los logaritmos para el cálculo está en desuso, pero el concepto sigue siendo fundamental en la cultura matemática básica y están presentes tanto en física como en química. Su historia es sin duda un capítulo modesto, pero su ejemplaridad, incluso su riqueza dan testimonio del desarrollo de las Matemáticas.

El origen del concepto de logaritmo se encuentra en un problema matemático, sin duda, pero en un problema de matemáticas aplicadas: se trata de simplificar la pesada tarea de los calculadores, excesivamente complicada en cuanto implica multiplicaciones, divisiones, incluso potencias o extracción de raíces.

En los siglos XIV, XV y XVI (y seguramente antes) los campos implicados no son tanto las cuestiones económicas como los problemas de agrimensura, y sobre todo, la astronomía, en particular en sus aplicaciones a la navegación. Estas operaciones exigen ahora cierta precisión . Si los progresos de la numeración han podido hacer avanzar las cosas, como la utilización de las cifras llamadas árabes, los algoritmos de multiplicación y de división son desconocidos; los números racionales, sistemáticamente escritos en forma de parte entera más una fracción de la unidad, convierten incluso a la suma en una operación muy complicada.

Se debe al matemático árabe IBN JOUNIS el haber propuesto, en el siglo XI, un método, llamado prostaféresis , para reemplazar la multiplicación de dos senos por una suma de las mismas funciones, y este método permanecerá mucho tiempo en vigor. La multiplicación de senos (y su división) es una operación esencial, ya que todo cálculo en geometría, en particular la resolución de triángulos, es una operación sobre longitudes no medibles, obtenidas a partir de la medida de ángulos.

NAPIER Y BRIGGS

John NAPIER (escrito también NEPER) nació en 1550. Procedente de la baja nobleza escocesa, mostró toda su vida un espíritu curioso y dinámico, a pesar de una vida alejada de los centros culturales de la época. La introducción de los logaritmos no es su único título de gloria, puesto que escribió también un texto sobre las ecuaciones e imaginó además un sistema de cálculo por medio de regletas graduadas (*Rabdología*)

En 1614 publicó el «Mirifici logarithmorun canonis descriptio...» donde, utilizando una aproximación cinemática, pone en relación una progresión geométrica con una progresión aritmética. La primera es la de las distancias recorridas con velocidades proporcionales a ellas mismas, la segunda, la de las distancias recorridas con velocidad constante; éstas son entonces los «logaritmos» de las primeras (el neologismo es de NAPIER). La unidad elegida es 10^7, y la obra comprende una tabla de logaritmos de senos, cuya importancia hemos mencionado anteriormente, con los ángulos variando de minuto en minuto. En 1619 apareció una segunda obra, «Mirifici logarithmorum canonis constructio. ...» donde el autor explica cómo calcular los logaritmos. Esta obra es póstuma, puesto que NAPIER murió en 1617.

Mientras tanto, un eminente matemático de Londres, Henry BRIGGS, había descubierto la importancia de estos trabajos y viajó a Escocia para encontrarse con el autor. Retomando la idea fundamental, pero considerando una progresión geométrica simple, la de las potencias de 10, publica en 1617 una primera tabla, con 8 decimales. El logaritmo de un número x es por lo tanto definido como el exponente *n* de 10, tal que x sea igual a 10 elevado a *n*.

Siguieron otras tablas que permitieron la difusión del método, en particular en el continente. En realidad, la idea estaba en el aire; un colaborador de KEPLER, el suizo BÜRGI, proponía en la misma época, para simplificar los cálculos que debía realizar, hacer corresponder una progresión aritmética (números rojos) y una progresión geométrica (números negros); sin embargo sus trabajos no fueron publicados hasta 1620.

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1:

El número de bacterias en un cultivo dado después de t horas por el modelo exponencial de crecimiento:

$$q(t) = 50\,e^{0,7t}$$

I) Hallar el número de bacterias, q_0 en el cultivo.

II) ¿Cuántas bacterias hay en el cultivo después de 10 horas?

RESOLUCIÓN:

I) Para encontrar q_0, tenemos que encontrar el valor de $q(t)$ cuando $t = 0$:

$$q(0) = 50\,e^{0,7(0)} = 50\,e^0 = 50 = q_0$$

* Luego, inicialmente hay **50** bacterias en el cultivo.

II) El número de bacterias en el cultivo después de 10 horas está dado por $q(10)$:

$$q(10) = 50\,e^{0,7(10)} = 50\,e^7$$

* Luego, hay $50\,e^7$ bacterias después de **10** horas.

PROBLEMA 2 :

Dar el valor de verdad de las siguientes proposiciones :

I) Si: $0 < a < b < 1$, entonces $a^x > b^x,\ \forall x > 0$

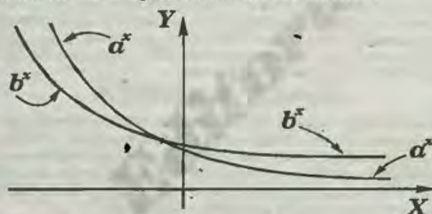
II) Si: $1 < a < b$, entonces $a^x > b^x,\ \forall x < 0$

III) Si: $0 < a < 1$, entonces $a^x < \left(\dfrac{1}{a}\right)^x,\ \forall x \in \mathbb{R}$

A)VVV B)FFV C)FFF D)FVF E)VFF

RESOLUCIÓN:

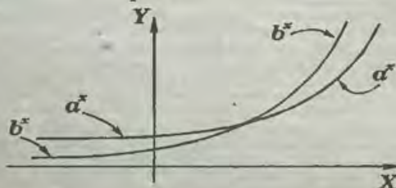
I) Mediante la exponencial decreciente :



$\Rightarrow a^x < b^x,\ \forall x > 0$

* Entonces *(I)* es **FALSA**

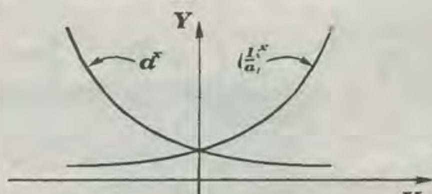
II) Mediante la exponencial creciente :



$\Rightarrow a^x > b^x,\ \forall x > 0$

* Entonces *(II)* es **VERDADERA**

III) Graficando $a^x, \left(\dfrac{1}{a}\right)^x, 0 < a < 1$



$\Rightarrow\ a^x < \left(\dfrac{1}{a}\right)^x,\ \forall x \in \mathbb{R}^+$

* Entonces *(III)* es falsa

RPTA: "D"

PROBLEMA 3:

Determinar el rango o dominio, según sea el caso :

I) $f(x) = \left|3^{|x|-x}\right|$ .... ¿rango?

II) $f(x) = Log_{0,5}\left(e^{2x} + e^x - 2\right)$ ....¿dominio?

III) $f(x) = e^{-|x|-1}$ ....¿rango?

RESOLUCIÓN :

$$I)\ f(x) = \left|\underbrace{3^{|x|-x}}_{positivo}\right| = 3^{|x|-x} = \begin{cases} 3^{x-x} = 1 & ; x \geq 0 \Rightarrow Rf_I = 1 \\ 3^{-x-x} = 3^{-2x} & ; x < 0 \Rightarrow Rf_{II} = \langle 1;\infty\rangle \end{cases}$$

$$Rf = Rf_I \vee Rf_{II} = \{1\} \cup \langle 1;\infty\rangle = [1;\infty\rangle$$

$$II)\ De:\ e^{2x} + e^x - 2 > 0 \Rightarrow \left(e^x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} > 0$$

$$\Rightarrow \left(e^x + \frac{1}{2}\right)^2 > \frac{9}{4} \Rightarrow \left|e^x + \frac{1}{2}\right| > \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow e^x + \frac{1}{2} > \frac{3}{2} \vee e^x + \frac{1}{2} < -\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \underbrace{e^x > 1}_{x>0} \vee \underbrace{e^x < -2}_{x \in \phi} \Rightarrow Df = \langle 1;\infty\rangle$$

III) Definiendo :

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x-1} & si\ x \geq 0;\ (Exp.\ decreciente) \\ e^{x-1} & si\ x < 0;\ (Exp.\ creciente) \end{cases}$$

* Calculando el rango : D_f: $x < 0 \vee x \geq 0$

$$\Rightarrow e^x < e^0 \vee e^x \geq e^0 \Rightarrow e^{x-1} < e^{-1} \vee e^{-x} \leq 1$$

$$\Rightarrow e^{x-1} < e^{-1} \vee e^{-x-1} \leq e^{-1}$$

$$\Rightarrow \underbrace{0 < e^{x-1} < e^{-1}}_{Rango\ I} \vee \underbrace{0 < e^{-x-1} \leq e^{-1}}_{Rango\ II}$$

* Luego : $0 < \underbrace{e^{-|x|-1}}_{f(x)} \leq e^{-1} \rightarrow R_f = \langle 0; e^{-1}]$

PROBLEMA 4 :

Resolver las siguientes inecuaciones :

I) $Log_{\pi}(2x-1) < 0$ II) $Log_{\frac{1}{2}}(x-1) > 0$

III) $Log_2(2x-1) > Log_2(x-5)$

IV) $Log_{\frac{1}{3}}(x^2+x+1) < 0$

RESOLUCIÓN:

I) De : $2x-1 > 0 \wedge 2x-1 < 1$

$$\rightarrow x > \frac{1}{2} \wedge x < 1 \rightarrow x \in \left\langle \frac{1}{2}; 1 \right\rangle$$

II) DE : $x-1 > 0 \wedge x-1 < 1$

$$\rightarrow x > 1 \wedge x < 2 \rightarrow x \in \langle 1; 2 \rangle$$

III) Primero : $2x-1 > 0 \wedge x-5 > 0$

$$\rightarrow x > \frac{1}{2} \wedge x > 5 \Rightarrow x > 5$$

* Como la base es mayor que uno entonces :

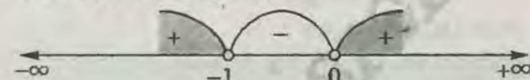
$2x-1 > x-5 \rightarrow x > -4 \rightarrow C.S. = \langle 5; +\infty \rangle$

IV) De : $x^2+x+1 > 0$

Por teorema de trinomio positivo $\Rightarrow x \in \mathbb{R}$

* Luego : $x^2+x+1 > 1$

$\rightarrow x^2+x > 0 \rightarrow x(x+1) > 0$



$\rightarrow x \in \langle -\infty; -1 \rangle \cup \langle 0; +\infty \rangle$

$\rightarrow C.S. = \langle -\infty; -1 \rangle \cup \langle 0; +\infty \rangle$

PROBLEMA 5 :

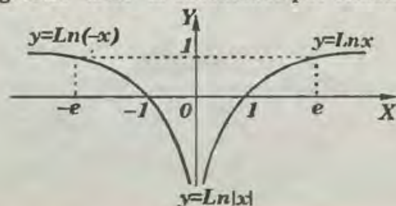
Bosquejar la gráfica de : $f(x) = Ln|x|$

RESOLUCIÓN :

* Esta es una función PAR con dominio $\mathbb{R} - \{0\}$

$$f(x) = ln|x| = \begin{cases} ln\,x & ; x > 0 \\ ln(-x) & ; x < 0 \end{cases}$$

* Su gráfica total la obtenemos por simetría :



PROBLEMA 6 :

Hallar el dominio de la función f definida por :

$$f(x) = \sqrt{Logx - 1} + x + 1$$

RESOLUCIÓN :

* De la regla de correspondencia :

$log\,x - 1 \geq 0 \wedge x > 0$

$\Rightarrow Logx \geq 1 \wedge x > 0 \Rightarrow x \geq 10 \wedge x > 0$

$\Rightarrow x \in [10, \infty\rangle \rightarrow Df = [10; \infty\rangle$

PROBLEMA 7:

La siguiente función: $f:[a; 8] \rightarrow [b; b+2]$, definida por $f(x) = Log_2\,x$ es sobreyectiva , hallar $a+b$.

RESOLUCIÓN:

* A partir del dominio : $a \leq x \leq 8 \wedge a > 0$

* Conformando la regla de correspondencia :

$$\Rightarrow Log_2 a \leq Log_2 x \leq Log_2 2^3, \; a > 0$$

$$\Rightarrow Log_a a \leq \overbrace{\underbrace{Log_2 x}_{\substack{logarítmica \\ creciente}}} \leq 3, \; a > 0$$

* Además por ser suryectiva :

$Rf = [log_2 a; 3] = [b; b+2]$

$\Rightarrow Log_2 a = b \wedge 3 = b+2$

$\Rightarrow Log_2 a = 1 \wedge b = 1 \Rightarrow a = 2 \wedge b = 1$

* Entonces : $a + b = 3$

PROBLEMA 8 :

Determinar la gráfica de la función f cuya regla de correspondencia está definida por :

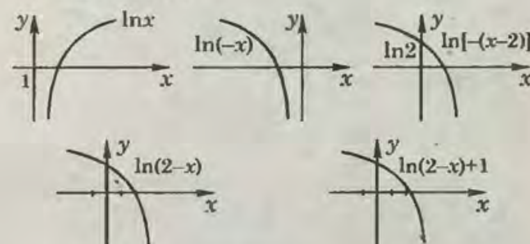
$$f(x) = Ln(2-x) + 1$$

RESOLUCIÓN :

*Aplicando traslaciones ; mediante la secuencia :

$Lnx \rightarrow Ln(-x) \rightarrow Ln[-(x-2)] \rightarrow Ln[2-x]+1$

* Obtendremos :

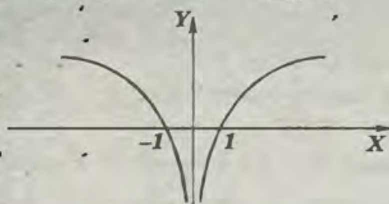


PROBLEMA 9 :

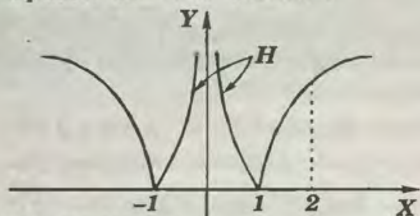
Graficar : $f(x) = |Log_2|x||$

RESOLUCIÓN :

* Primero grafiquemos : $y = Log_2|x|$



* Grafiquemos su valor absoluto :



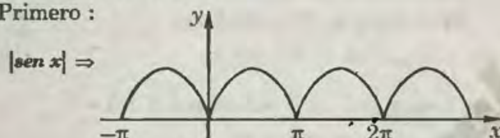
PROBLEMA 10 :

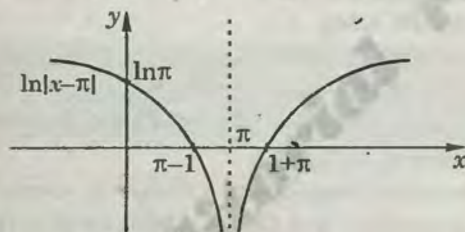
Determinar el número de raíces o soluciones de la ecuación : $|sen\ x| = |Ln|x-\pi||$

RESOLUCIÓN :

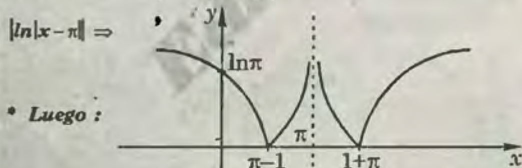
* Primero :

$|sen\ x| \Rightarrow$

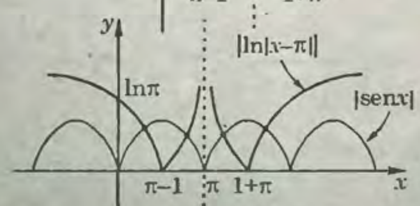




$|ln|x-\pi|| \Rightarrow$



* *Luego :*



* Como se aprecia *4* intersecciones , luego habrá *4* soluciones .

PROBLEMA 11 :

Si : $h(x) = 3 - 3|x-1|^2 - 2^{|x-1|}$. $x \in \left\langle \frac{1}{2}; \frac{3}{2} \right\rangle$

Determine el máximo valor de $h(x)$.

RESOLUCIÓN:

* Haciendo : $h(x) = f(x) + g(x)$

* donde : $f(x) = 3 - 3|x-1|^2$

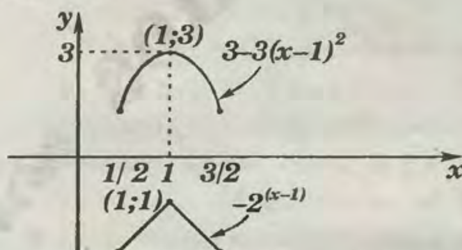
parábola invertida de vértice

$(1;3) f(x) = 3 - 3(x-1)^2$

* Además : $g(x) = -2^{|x-1|}$

exponencial de imágenes negativas y vértice en $(1;-1)$

* Graficando :



* El máximo valor ocurre en la suma de los vértices:

$$h(x)_{max} = 3 + (-1) = 2$$

PROBLEMA 12 :

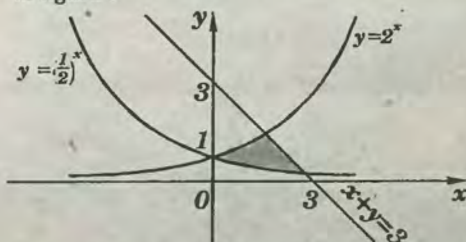
Grafique las siguientes relaciones :

I) $R_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y \le 2^x, y \ge \left(\frac{1}{2}\right)^x, \ x+y \le 3\right\}$

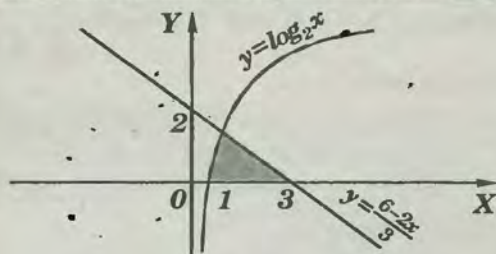
II) $R_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y < Log_2 x, y \ge 0, 2x+3y-6 \le 0\}$

RESOLUCIÓN :

I) La gráfica de la relación R_1, es la parte sombreada de la figura :



II) La gráfica de la relación R_2 , es la parte sombreada de la figura :



PROBLEMA 13 :

Graficar la intersección de R_1 y R_2, en :

$$R_1=\left\{(x;y)\in \mathbb{R}^2 / y\geq (x+1)Log_{(x+1)}x\right\}$$

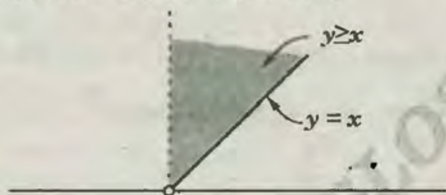
$$R_2=\left\{(x;y)\in \mathbb{R}^2 / y\leq 1+Log(x+2)\right\}$$

RESOLUCIÓN :

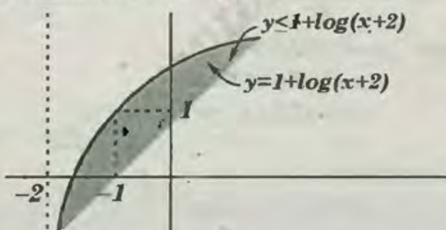
* Grafiquemos R_1 :

$$y\geq (x+1)^{log(x+1)x}=x \longrightarrow y\geq x$$

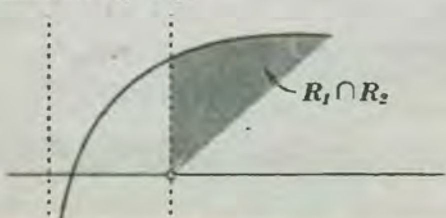
* Pero $: x+1>0 \wedge x>0 \rightarrow x>0$



* Luego grafiquemos R_2 : $y\leq 1+log(x+2)$
* Por traslación de la gráfica :

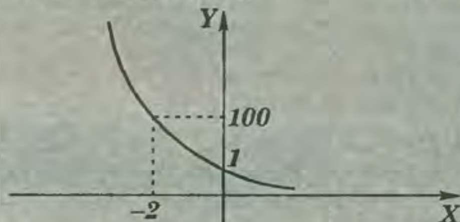


* Finalmente $R_1\cap R_2$:



PROBLEMA 14:

Si $f(x)$ es una función exponencial, cuya gráfica se muestra, determinar $f(-4)$:



RESOLUCIÓN:

* Como la función es exponencial , debe ser de la forma $y = b^x$, donde la base b puede determinarse reemplazando los valores de x e y , que corresponden al punto $(-2\ ;\ 100)$, el cual se ha obtenido de la gráfica dada :

$y=b^x$; donde $x=-2\ ;\ y=100$

$10^2=(b^{-1})^2 \Rightarrow b^{-1}=10 \Rightarrow b=\frac{1}{10}$

* Por lo tanto la función es : $y=f(x)=\left(\frac{1}{10}\right)^x$

$$f(-4)=\left(\frac{1}{10}\right)^{-4}=(10^{-1})^{-4}=10^{-4}=10\,000$$

PROBLEMA 15:

¿Cuál de los siguientes enunciados no es una característica de la función $f(x)=Ln|x|$ donde $x\neq 0$?

A) f es una función par .

B) Conforme x se acerca a 0 , $f(x)$ disminuye .

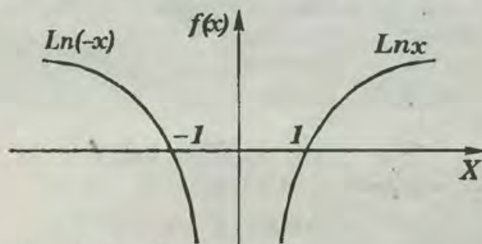
C) Si x aumenta , siendo positivo , entonces $f(x)$ también aumenta .

D) Si x disminuye , siendo negativo , entonces $f(x)$ también disminuye .

E) Si x disminuye, siendo negativo, entonces $f(x)$ aumenta .

RESOLUCIÓN :

* La gráfica de la función $f(x)=Ln|x|$:



Analizando las alternativas:

A) En una función par se cumple que:

$f(x)=f(-x) \Rightarrow Ln|x| = Ln|-x| Ln|x| = Ln|x|$
$\rightarrow$ A es correcto.

B) Del gráfico se observa que cuando $x \rightarrow 0$ $f(x) \rightarrow -\infty \rightarrow$ B es correcto .

C) Del gráfico se observa que $f(x)$ para $x > 0$ es una función creciente. $\rightarrow$ *C* es correcto .

D) Del gráfico se observa que $f(x)$ para $x < 0$ es una función decreciente, conforme x disminuye $f(x)$ aumenta . $\rightarrow D$ es incorrecta.

E) Del gráfico se observa que $f(x)$ aumenta cuando x disminuye. $\rightarrow E$ es correcto.

RPTA: "D"

PROBLEMA 16 :

Si *f* es una función definida por :
$f(x) = |5 - logx| + |1 + logx|$, entonces el rango de *f* es :

A) $[6;\infty\rangle$ B) $[8;\infty\rangle$ C) $\langle 0;\infty\rangle$
D) $[0;\infty\rangle$ E) $\langle 0;6\rangle \cup \langle 6;\infty\rangle$

RESOLUCIÓN :

* Nótese que: $Domf = \langle 0;+\infty\rangle$
* Para : $Logx < -1$:
$f(x) = 5 - Logx - 1 - Logx = 4 - 2Logx$
$Logx < -1 \rightarrow 2Logx > 2$
$\rightarrow 4 - 2Logx > 6 \rightarrow f(x) > 6$
* Para : $-1 \leq Logx \leq 5$:
$f(x) = 5 - Logx + 1 + Logx = 6 \rightarrow f(x) = 6$
* Dada : $Logx > 5$:
$f(x) = Logx - 5 + 1 + Logx = 2Logx - 4$
$\rightarrow Logx > 5 \rightarrow 2Logx > 10$
$\rightarrow 2Logx - 4 > 6 \rightarrow f(x) > 6$
* De los tres casos analizados : $f(x) \geq 6$

RPTA: "A"

PROBLEMA 17:

Si $\langle a;b\rangle$ es el dominio (máximo) de la función $f(x) = Log_2(4 - Log_2 x)$, entonces la afirmación correcta es:

A) $5a + b > 2$ B) $b - 16a < 16$ C) $\sqrt{b} = A + 4$
D) $a^2 + b^2 = 25$ E) $ab = 8$

RESOLUCIÓN:

$$f(x) = Log_2(4 - Log_2 x)$$

* f está definida si : $4 - Log_2 x > 0$

$$\rightarrow Log_2 x < 4 \rightarrow 0 < x < 2^4$$

* Luego , el dominio máximo es :

$$Domf = \langle 0;16\rangle = \langle a;b\rangle$$

*De donde: $a = 0 \wedge b = 16 \rightarrow \sqrt{b} = a + 4$

RPTA: "C"

PROBLEMA 18 :

Si $a < b < 0 < c$ y f es una función definida por $f(x) = c \times \left(\frac{b}{a}\right)^{-ax}$, entonces hallar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

p : f es creciente, $\forall x \in dom(f)$

q : f es decreciente, $\forall x \in dom(f)$

r : f es acotada, $\forall x \in dom(f)$

A)VFV B)FVV C)FFF D) VFV E)FVF

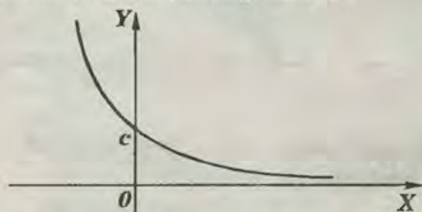
RESOLUCIÓN :

* De: $f(x) = c \times \left(\frac{b}{a}\right)^{-ax}$; $a < b < 0 < c$

$\rightarrow a < b < 0 \wedge a < 0$

$\rightarrow 1 > \frac{b}{a} > 0 \rightarrow 1 > \left(\frac{b}{a}\right)^{-a} > 0$,pues $-a > 0$

* Entonces : $f(x) = c \times \left[\left(\frac{b}{a}\right)^{-a}\right]^x$ es una función decreciente , $\forall x \in \mathbb{R}$, cuya gráfica es :



* Luego : p es *FALSA*
q es *VERDADERA*
r es *FALSA* (f no es acotada)

RPTA: "E"

PROBLEMA 19 :

Sea M un conjunto definido por :
$M = \{ \alpha \in \mathbb{R} / g(x) = 8^{(\alpha-2)x}$ es creciente y $f(x) = 5^{(\alpha-10)x}$ es decreciente$\}$, entonces determinar el valor de verdad de cada una de las afirmaciones siguientes:

I) $M \subset [2;20\rangle$

II) La función $4^{(\alpha^2 - 12\alpha + 22)x}$ es decreciente, $(\alpha \in M)$

III) La función $h(x) = 2^{\alpha x}$ es creciente, $(\alpha \in M)$

A)VFV B)VVF C) VFF D) FVV E)FFV

RESOLUCIÓN :

Recuerde que para : $f(x)=a^x ; a>0$.

* f es creciente $\longleftrightarrow a>1$
* f es decreciente $\longleftrightarrow 0<a<1$

g es de creciente $\rightarrow 3^{\alpha-2}>1 \rightarrow \alpha>2$

f es decreciente $\rightarrow 0<5^{\alpha-10}<1 \rightarrow \alpha<10$

* Luego : $2<\alpha<10 \rightarrow M=\langle 2;10\rangle$

I) $M \subset [2;10\rangle$ .... (VERDADERA)

II) $h(x)=4^{(\alpha^2-12\alpha+22)x}$ $\alpha^2-12\alpha+22=(\alpha-6)^2-14$

$\rightarrow 2<\alpha<10 \rightarrow -4<\alpha-6<4$

$\rightarrow 0\leq(\alpha-6)^2<16 \rightarrow -14\leq(\alpha-6)^2-14<2$

$\rightarrow 4^{-14}\leq 4^{(\alpha-6)^2-14}<4^2$

$\rightarrow \dfrac{1}{4^{14}}\leq 4^{\alpha^2-12\alpha+22}<16$

$\rightarrow h(x)$ puede ser creciente o decreciente, según el valor que tome α .... (FALSA)

III) $h(x)=2^{\alpha x};\ 2<\alpha<10 \rightarrow 2^2<2^{\alpha}<2^{10}$

$\rightarrow 4<2^{\alpha}<2^{10} \rightarrow 1<2^{\alpha}$

$\rightarrow h$ es creciente ....(VERDADERA)

RPTA: "A"

PROBLEMA 20 :

Si f es una función definida por $f(x)=2^{1-|x|}, x\in[-3;3]$ tal que $|f(x)|\leq k$, entonces el menor valor de k es:

A)0 B) $\frac{1}{3}$ C)1 D) 2 E)3

RESOLUCIÓN:

* De: $f(x)=2^{1-|x|};\ x\in[-3;3]$

$-3\leq x\leq 3 \rightarrow 0\leq|x|\leq 3$

$\rightarrow 0\geq -|x|\geq -3 \rightarrow 1\geq 1-|x|\geq -2$

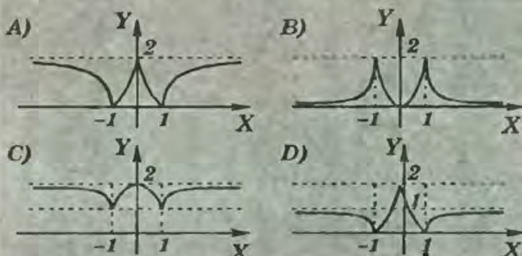
$\rightarrow 2^1\geq 2^{1-|x|}\geq 2^{-2} \rightarrow 2\geq f(x)\geq \dfrac{1}{4}$

$\rightarrow \dfrac{1}{4}\leq|f(x)|\leq 2 \rightarrow 2\leq k \rightarrow k_{mín}=2$

RPTA: "D"

PROBLEMA 21:

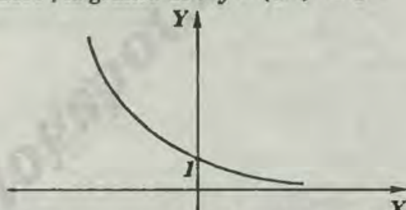
La figura que mejor representa la gráfica de la función $f(x)=||3^{1-|x|}+1|-2|$ es:



RESOLUCIÓN :

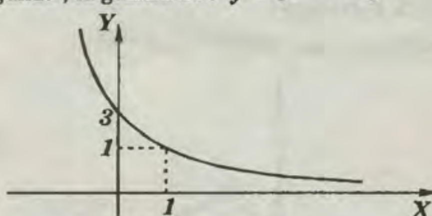
* Primero, la gráfica de : $y=(3^{-1})^x=3^{-x}$

Es :

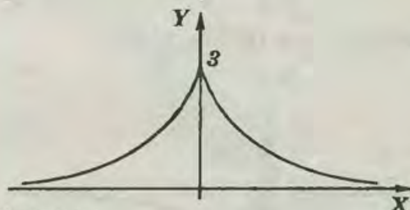


*Segundo, la gráfica de : $y=3^{-(x-1)}=3^{1-x}$

Es :



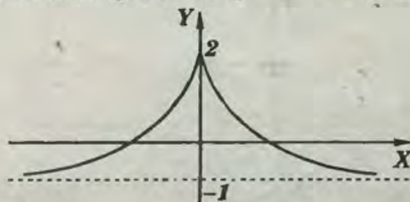
* Luego, la gráfica de : $y=3^{1-|x|}$ es :



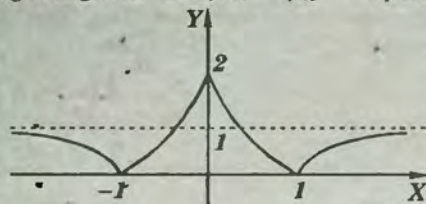
* Nótese que :

$$f(x)=||3^{1-|x|}+1|-2|=|3^{1-|x|}-1|$$

* Entonces, la gráfica de $y=3^{1-|x|}-1$ es:



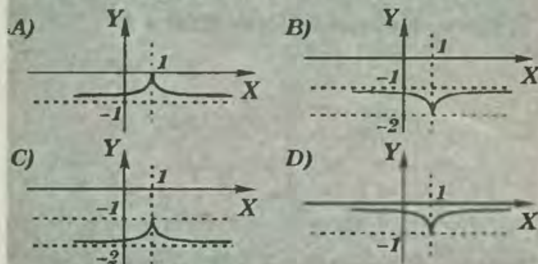
* Luego , la gráfica de : $f(x) = |3^{1-|x|} - 1|$ es:



RPTA: "D"

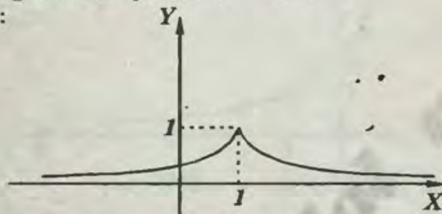
PROBLEMA 22:

Si f es una función definida por :
$f(x) = |2^{-|x-1|} - 1| - 2$, entonces la figura que mejor representa la gráfica de f es :

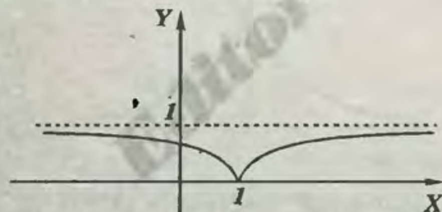


RESOLUCIÓN:

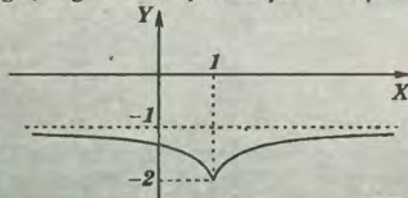
* La gráfica de : $y = (2^{-1})^{|x-1|} = 2^{-|x-1|}$
Es :



* La gráfica de $y = |2^{-|x-1|} - 1|$ es :



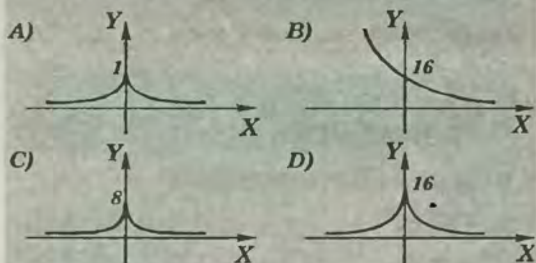
* Luego , la gráfica de $f(x) = |2^{-|x-1|} - 1| - 2$



RPTA: "B"

PROBLEMA 39 :

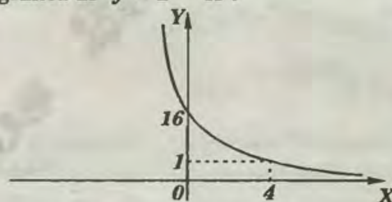
Si f es una función definida por : $f(x) = 2^{4-x^4}$ entonces la figura que mejor representa la gráfica de f es :



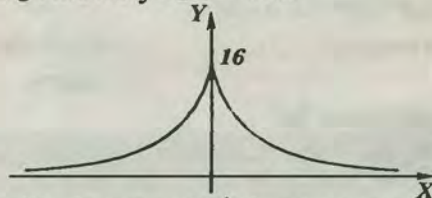
RESOLUCIÓN :

* De : $f(x) = 2^{4-x^4} = 2^{4-|x^4|}$; $x \in \mathbb{R}$

* La gráfica de $y = 2^{4-x}$ es :



* La gráfica de: $y = 2^{4-|x|}$ será:

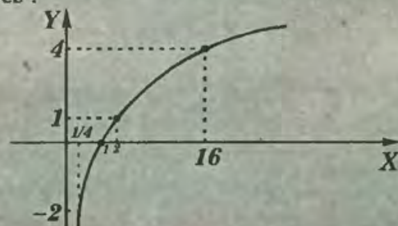


*La gráfica de $f(x) = 2^{4-|x^4|}$ tiene un comportamiento análogo al anterior puede verse que ambas ramas son más cercanas al eje "Y".

RPTA: "D"

PROBLEMA 40 :

En la figura adjunta, se muestra la gráfica de la función $y = Log_b(Ax + C)$, entonces la afirmación correcta es :



A) La base $b \in \langle 0;1\rangle$

B) La gráfica corresponde a: $y = Log_4(x + 2)$

C) La gráfica corresponde a: $y = Log_2(x + 2)$

D) la curva mostrada se intersecta con $y=\dfrac{x^2}{4}$

E) $b > 2$

RESOLUCIÓN :

* Para : $y = Log_b(Ax + C)$, y de la gráfica mostrada, se tiene :

$(1;0)\in f \rightarrow 0 = log_b(A+C) \rightarrow A+C = 1$

$(2;1)\in f \rightarrow 1 = log_b(2A+C) \rightarrow 2A+C = b$

$(16;4)\in f \rightarrow 4 = log_b(16A+C) \rightarrow 16A+C = b^4$

* Resolviendo : $A + 1 = b \wedge 15b - 14 = b^4$

* De donde : $b = 2 ; A = 1 \wedge C = 0$

* Luego : $y = Log_2(x)$

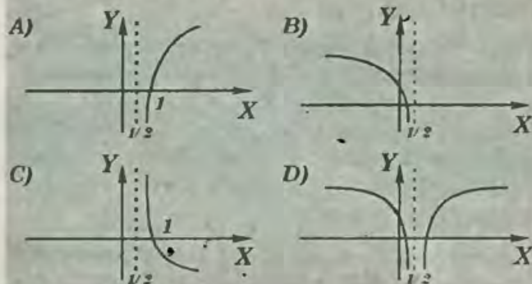
* Esta , tiene un punto de intersección con $y = \dfrac{x^2}{4}$; el punto $(2 ; 1)$

RPTA: "D"

PROBLEMA 41 :

Si f es una función definida por :

$f(x) = Log_2\left(\dfrac{1}{\sqrt{2x}-1} - \dfrac{1}{\sqrt{2x}+1}\right)$, entonces la figura que mejor representa la gráfica de f es:



RESOLUCIÓN :

* De : $f(x) = Log_2\left(\dfrac{1}{\sqrt{2x}-1} - \dfrac{1}{\sqrt{2x}+1}\right)$

$$Domf = \left\{x \in R / \dfrac{1}{\sqrt{2x}-1} - \dfrac{1}{\sqrt{2x}+1} > 0\right\}$$

* De la inecuación :

$$\frac{2}{(\sqrt{2x}-1)(\sqrt{2x}+1)} > 0 \rightarrow (\sqrt{2x}-1)\underbrace{(\sqrt{2x}+1)}_{+} > 0$$

$$\rightarrow x \geq 0 \wedge \sqrt{2x}-1 > 0 \rightarrow x \geq 0 \wedge x > \frac{1}{2}$$

$$\rightarrow x > \frac{1}{2} \rightarrow Domf = \left\langle \frac{1}{2};+\infty\right\rangle$$

* Además : $f(x) = Log_2\left(\dfrac{2}{2x-1}\right)$

* Sean : $x_1, x_2 \in Domf / x_1 < x_2$

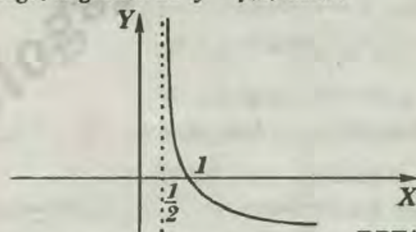
$$\rightarrow 0 < 2x_1 - 1 < 2x_2 - 1 \rightarrow \frac{2}{2x_1-1} > \frac{2}{2x_2-1}$$

$$\rightarrow log_2\left(\frac{2}{2x_1-1}\right) > log_2\left(\frac{2}{2x_2-1}\right) \rightarrow f_{(x_1)} > f_{(x_2)}$$

* Es decir : si : $x_1 < x_2 \rightarrow f_{(x_1)} > f_{(x_2)}$

$\rightarrow f$ es decreciente , $\forall x \in Domf$.

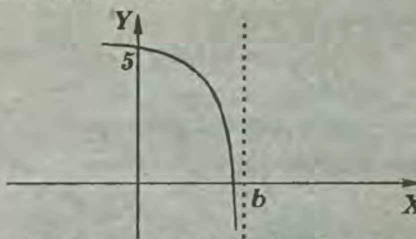
* Luego, la gráfica de $y = f(x)$ será :



RPTA: "C"

PROBLEMA 42 :

En la figura adjunta se muestra la gráfica de la función : $f(x) = Ln(e^a - x) + 1$



Si $e = 2,7182...$, entonces el valor de b es:

A) 1 B) e C) 5 D) e^4 E) e^5

RESOLUCIÓN :

* De la figura :

$(0; 5)\in f \rightarrow 5 = Ln(e^a - 0) + 1 \rightarrow 4 = Lne^a \rightarrow a = 4$

* Por otro lado : $Domf = \{ x \in \mathbb{R} / e^a - x > 0\}$

$$e^a - x > 0 \rightarrow e^4 > x \rightarrow Domf = \langle -\infty; e^4\rangle$$

* De la figura : $Domf = \langle -\infty; b\rangle \rightarrow b = e^4$

RPTA: "D"

PROBLEMA 43 :

Si f es una función definida por :

$f(x) = -Log_3(x + 1)$, entonces determinar el valor de verdad de cada una de las siguientes proposiciones :

p : La gráfica de f pasa por el origen de coordenadas.

q : f es decreciente en todo su dominio.

r : La recta $x = -1$ interseca a la gráfica de la función : $g(x) = |f(x)|$

A)VVF B)VVV C)VFF D)VFV E)FVV

RESOLUCIÓN :

*De: $f(x) = -Log_3(x + 1)$; $Dom = \langle -1; +\infty \rangle$

I) $(0; 0) \in f$, pues: $f(0) = -Log_3(1) = 0$

$\rightarrow$ La gráfica de f pasa por el origen

* Luego , p es verdadera .... (VERDADERA)

II) Sea $x_1, x_2 \in Domf \,/\, x_1 < x_2$

$\rightarrow Log_3(x_1 + 1) < Log_3(x_2 + 1)$

$\rightarrow -Log_3(x_1 + 1) > Log_3(x_2 + 1) \rightarrow f_{(x_1)} > f_{(x_2)}$

$\rightarrow f$ es decreciente, $\forall x \in Domf$.

* Luego , q es verdadera ....(VERDADERA)

III) $g(x) = |f(x)| = |-Log_3(x + 1)|$

$\rightarrow g(x) = |Log_3(x + 1)|$

* Sea $(-1; m) \in x = -1$. Si esta recta intersecta a la gráfica de $g \rightarrow (-1; m) \in g$

$$\rightarrow g_{(-1)} = m \rightarrow |Log_3(-1 + 1)| = m$$

* Pero $Log_3 0$ no está definido.

$\rightarrow x = -1$ no intersecta a la gráfica de g

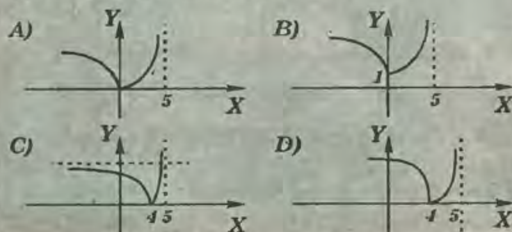
* Luego , r es falsa .... (FALSA)

RPTA: "A"

PROBLEMA 44 :

Si f es una función definida por :

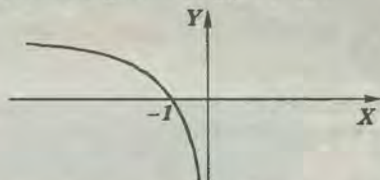
$f(x) = |Log_5(5 - x)|$, entonces la figura que mejor representa la gráfica de f es :



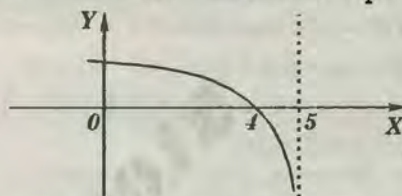
RESOLUCIÓN :

* De : $f(x) = |Log_5(5 - x)|$; $Domf \langle -\infty ; 5 \rangle$

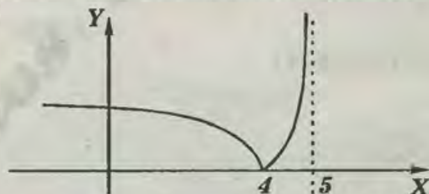
* La gráfica de $g(x) = Log_5(-x)$ es :



* La gráfica de $g_{(x-5)} = Log_5(5 - x)$ es :



* Luego , la gráfica de $f(x) = |Log_5(5 - x)|$ Es :



RPTA: "D"

PROBLEMA 45 :

En un cierto cultivo bacteriano, si $f(t)$ bacterias se encuentran presentes a los t minutos, entonces :

$$f(t) = B \cdot e^{0,05t}$$

siendo B una constante . Inicialmente hay 1500 bacterias presentes , ¿cuántas habrá después de 1 hora?

RESOLUCIÓN :

* Inicialmente , es decir , en $t = 0$, hay 1500 bacterias ; así $f(0) = 1500$. Por tanto

$$1500 = B \cdot e^{0,05(0)} \Rightarrow B = 1500$$

* Reemplazamos este valor en la función $f(t)$ dada, de este modo el valor de t correspondiente a una hora ($t = 60$ minutos) será:

$$f(60) = 1500e^{0,05(60)} = 1500\, e^3$$

PROBLEMA 46:

Una sustancia tiene una constante de decrecimiento del 5% por hora . Si 500 g se tienen inicialmente , ¿cuánta sustancia queda después de 4 horas?

RESOLUCIÓN:

* En general tenemos que el modelo exponencial de decrecimiento es : $q(t) = q_0 e^{-kt}$

* Para nuestro modelo se tiene: $q_0 = 500\ g$ (ya que la cantidad inicial es $500g$) y $k = 0,05$ (ya que la constante de decrecimiento es 5% por hora)

* De donde después de 4 horas:

$$q(4)=500\,e^{-0,05(4)}=500\,e^{-0,2}=500(0,8187)=409,4$$

* Luego, hay $409,4\ g$ de sustancia

PROBLEMA 47 :

En cierta ciudad de población A, el 20% de los residentes escucharon un anuncio por radio acerca de un suceso político local . Después de "t" horas, $f(t)$ personas sabían del comentario.

$$f(t)=\frac{A}{1+Be^{-kt}}$$

Si el 50% de la población supo del suceso después de una hora. ¿Cuánto tiempo transcurrió hasta que el 80% de la población se enteró de la noticia?

RESOLUCIÓN :

* De los datos :

$$\text{Si } t=0:\ 0,2A=\frac{A}{1-Be^{-k(0)}} \Rightarrow \frac{1}{5}=\frac{1}{1+B} \Rightarrow B=4$$

$$\text{Si } t=1:\ 0,5A=\frac{A}{1+Be^{-k}} \Rightarrow \frac{1}{2}=\frac{1}{1+4e^{-k}}$$

$$\Rightarrow 1+4e^{-k}=2 \Rightarrow e^{-k}=2^{-2} \Rightarrow k=Ln4$$

* Se logra : $f(t)=\dfrac{A}{1+4e^{-(ln4)t}}=\dfrac{A}{1+4^{1-t}}$

* Si : $f(t) = 0,8A$

$$\Rightarrow 0,8A=\frac{A}{1+4^{1-t}} \Rightarrow \frac{4}{5}=\frac{1}{1+4e^{1-t}}$$

$$\Rightarrow 4+4^{2-t}=5 \Rightarrow 4^{2-t}=1 \Rightarrow 4^{2-t}=4^0$$

$$\Rightarrow 2-t=0 \Rightarrow t=2$$

PROBLEMA 48 :

Calcular los siguientes límites :

I) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\frac{x}{3}\right)^{1/x}$ III) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{5x+3}$

II) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{x}{2x}\right)^{x}$ IV) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{(x-2)/x}$

RESOLUCIÓN :

I) Sea: $y=\frac{x}{3}$:

$$L=\lim_{y\to 0}\left[(1+y)^{1/y}\right]^{1/3}$$

$$\rightarrow L=\left[\lim_{y\to 0}(1+y)^{1/y}\right]^{1/3}=e^{1/3}=\sqrt[3]{e}$$

II) Sea $y=-2x$:

$$L=\lim_{x\to x}\left(1-\frac{1}{2x}\right)^{x} \rightarrow L=\lim_{y\to -\infty}\left[\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}\right]^{-1/2}$$

$$\rightarrow L=\left[\lim_{y\to -\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}\right]^{-1/2}=e^{-1/2}=\frac{1}{\sqrt{e}}$$

III) $$L=\lim_{x\to -\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{3}\left[\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{2x}\right]^{5/2}\right\}$$

$$\rightarrow L=\lim_{x\to -\infty}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{3}\times\lim_{x\to -\infty}\left[\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{2x}\right]^{5/2}$$

$$\rightarrow L=(1+0)\times\left[\lim_{y\to -\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}\right]^{5/2}=e^{5/2}$$

(haciendo $y = 2x$)

IV) $$L=\lim_{x\to 0}(1+x)^{1-(2/x)}=\lim_{x\to 0}(1+x)\left[(1+x)^{1/x}\right]^{-2}$$

$$\rightarrow L=(1+0)\times e^{-2}=1/e^2$$

PROBLEMA 49 :

Calcular :

I) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left[-\dfrac{1nx^2}{2(1+x^2)}+\dfrac{1}{4}Ln\left(\dfrac{x^2}{1+x^2}\right)\right]$

II) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left[-\dfrac{1nx}{2(1+x^2)}+\dfrac{1}{4}Ln\left(\dfrac{x^2}{1+x^2}\right)\right]$

RESOLUCIÓN :

I) $$L=\lim_{x\to 0^+}\left[-\frac{Lnx}{2(1+x^2)}+\frac{1}{2}Lnx-\frac{1}{4}Ln(1+x^2)\right]$$

$$\rightarrow L=\lim_{x\to 0^+}\left[-\frac{Lnx}{2(1+x^2)}+\frac{1}{2}Lnx\right]$$

$$\rightarrow L=\lim_{x\to 0^+}\frac{(Lnx)}{2}\left[1-\frac{1}{1+x^2}\right]=\lim_{x\to 0^+}\frac{Lnx}{2}\left[\frac{x^2}{1+x^2}\right]$$

$$\rightarrow L=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2 Lnx}{2} \text{ .... } 0\times(-\infty)$$

$$\rightarrow L=\lim_{x\to 0^+}\frac{Lnx}{2/x^2}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1/x}{-4/x^3} \text{ .... (Hospital)}$$

$$\rightarrow L=\lim_{x\to 0^+}-\frac{x^2}{4}=0$$

II) $L = \lim_{x\to+\infty}\left[-\frac{Lnx}{2(1+x^2)}+\frac{1}{4}Ln\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)\right]$ ....$\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$

$\rightarrow L = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-1/x}{4x}\right)+\frac{1}{4}Ln\left[\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{1+x^2}\right]=0+\frac{1}{4}Ln1=0$

PROBLEMA 50 :

Hallar la derivada de : $f(x)=5^{x^{x^{1/2}}}$

RESOLUCIÓN :

$$Lnf(x)=x^{x^{1/2}}Ln5=x^{\sqrt{x}}Ln5=e^{\sqrt{x}\,Lnx}Ln5$$

$$\rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)}=e^{\sqrt{x}Lnx}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{Lnx}{2\sqrt{x}}\right)Ln5$$

$$\rightarrow f'(x)=5^{x^{\sqrt{x}}}x^{\sqrt{x}}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{Lnx}{2\sqrt{x}}\right)Ln5$$

PROBLEMA 51 :

Graficar : $f(x)=x^{Lnx}$

RESOLUCIÓN :

* $Domf=\langle 0;+\infty\rangle$ entonces la recta $x=0$ es una **ASÍNTOTA VERTICAL**

* Luego :

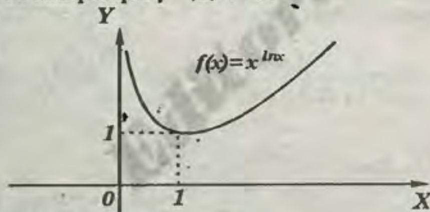
$$f'(x)=2e^{(Lnx)^2}\frac{Lnx}{x}=0\Rightarrow x=1 \text{ .....(punto crítico)}$$

$$f''(x)=e^{(Lnx)^2}\left[4(Lnx)^2-2Lnx+2\right]/x^2$$

$$\rightarrow f''(x)=e^{(Lnx)^2}\left[\left(2Lnx-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}\right]/x^2$$

$\rightarrow f''(x)>0$, $\forall x>0$, entonces la gráfica de $f(x)$ es siempre cóncava hacia arriba .

Luego , en $x=1$: $f(1)=1$ es un valor **MÍNIMO** pues se cumple que $f''(1)>0$.



PROBLEMA 36:

Graficar : $f(x)=\frac{x}{Lnx}$

RESOLUCIÓN :

* $Domf=\langle 0;1\rangle\cup\langle 1;+\infty\rangle$

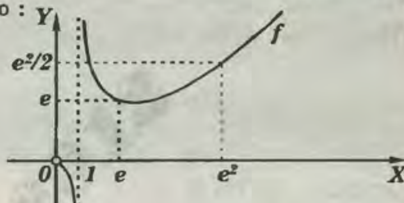
$\lim_{x\to0^+}\frac{x}{Lnx}=\frac{0}{-\infty}=0$; $\lim_{x\to1}=\frac{x}{Lnx}=\frac{1}{0^+}=+\infty$

$\lim_{x\to1-}\frac{x}{Lnx}=\frac{1}{0-}=-\infty$; La recta $x=1$ es asíntota vertical $f'(x)=\frac{Lnx-1}{Ln^2x}$; $f''(x)=\frac{2-Lnx}{xLn^3x}$

PUNTOS CRÍTICOS : $x=e$: POSIBLE PUNTO DE INFLEXIÓN: $x=e^2$

x	f'(x)	f''(x)	conclusiones
⟨0;1⟩	< 0	< 0	decrece, cóncava - abajo
⟨1;e⟩	< 0	> 0	decrece, cóncava - arriba
⟨e;e²⟩	> 0	> 0	crece, cóncava - arriba
⟨e²;4⟩	> 0	< 0	crece, cóncava - abajo

* Graficando :



PROBLEMA 37 :

Graficar : $f(x)=2xe^{-x}$

RESOLUCIÓN :

$f'(x)=2(1-x)e^{-x}$, $f''(x)=2(x-2)e^{-x}$

* **PUNTO CRÍTICO** : $x=1$; posible punto de inflexión : $x=2$

$$f(0)=0,\ f(1)=2/e=0{,}73....;\ f(2)=4/e^2=0{,}54...$$

x	f'(x)	f''(x)	conclusiones
⟨-4;1⟩	> 0	< 0	crece cóncava - abajo
⟨1;2⟩	< 0	< 0	decrece cóncava - abajo
⟨2;4⟩	< 0	> 0	decrece cóncava - arriba

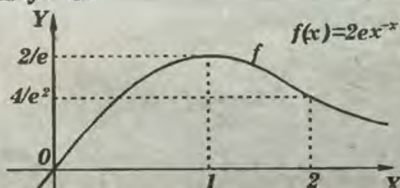
* el punto de inflexión (único) es :

$$(2;f(2))=(2;4/e^2)\ ;\ \lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$$

* Además : $m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}2e^{-x}=0$

$$b=\lim_{x\to\infty}[f(x)-0.x]=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{e^x}=0$$

*De esta forma obtenemos la asíntota horizontal derecha $y=0$.



PROBLEMA 38 :

Sea : $f(x)=\dfrac{(x-1)^2}{2}+Ln(x-1)$

I) Indicar su dominio

II) Graficar $f(x)$

III) Determinar la ecuación de la recta tangente en $x=2$.

RESOLUCIÓN :

I) Como $Ln(x-1)$ está definida para

$x-1>0$, entonces $Dom f=\langle 1;\infty\rangle$

II) $f(2)=1/2$, $f'(x)=(x-1)+(1/(x-1))$, $f'(x)=0$ no puede ocurrir (en caso contrario , $(x-1)^2=-1$ lo cual es absurdo) , luego $f(x)$ no tiene puntos críticos y como $x-1>0$, entonces $f'(x)>0,\ \forall x\in\langle 1;\infty\rangle$, y por lo tanto f resulta estrictamente creciente.

* Además : $f''(x)=1-\left[1/(x-1)^2\right]$

$\rightarrow f''(x)=0$ para $x=2$, $x=0$ se descarta

* Si $x\in\langle 1;2\rangle$: $f''(x)<0$ (f cóncava hacia abajo)

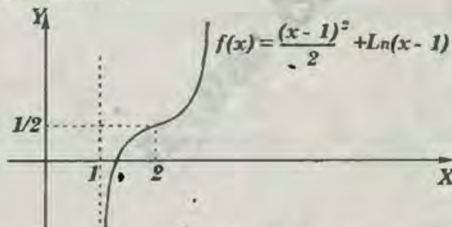
* Si $x\in\langle 2;\infty\rangle$: $f''(x)>0$ (f cóncava hacia arriba)

* Por lo tanto $(2\ ;f(2))=(2\ ;1/2)$ es un punto de inflexión.

* Como $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=+\infty$; $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=-\infty$

* Entonces la recta: $x=1$, resulta ser una asíntota vertical .

* Graficando :



III) $f'(x)=(x-1)+1/(x-1)$; $f'(2)=2$, así que la ecuación de la recta tangente para $x=2$ es:

$$L_T: y-f(2)=f'(2)\,(x-2)$$

$$L_T: y-1/2=2(x-2)$$

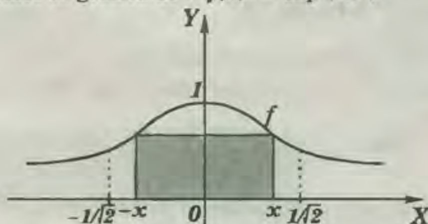
PROBLEMA 52 :

Un rectángulo tiene un lado sobre el eje x y los dos vértices superiores sobre la gráfica de $f(x)=e^{-x^2}$.

¿En qué puntos deberían situarse los vértices superiores para que el área del rectángulo sea máxima?.

RESOLUCIÓN :

* Con los criterios de la primera y segunda derivadas hallamos la gráfica de : $f(x)=\exp(-x^2)$



$A(x)=2x\,f(x)=2x\,e^{-x^2}$; $x>0$ .... (área del rectángulo)

$\rightarrow A'(x)=2\,e^{-x^2}(1-2x^2)=0\Leftrightarrow x=1/\sqrt{2}$

$\rightarrow A''(x)=4\,x\,e^{-x^2}(2\,x^2-3)\Rightarrow A''(1/\sqrt{2})=-4\sqrt{2}/e<0$

* De lo cual, el área del rectángulo es máxima cuando: $x=1/\sqrt{2}$, y de este modo los vértices superiores deberían situarse (por la simétrica respecto al eje y de la gráfica) en :

$(x;f(x))=(1/\sqrt{2};1/\sqrt{e})$ y en $(-x;f(-x))=(-1/\sqrt{2};1/\sqrt{e})$

PROBLEMA 53 :

La velocidad de desintegración de un material radiactivo es proporcional a la cantidad presente de dicho material.

I) Encontrar la cantidad de material presente, t años más tarde, dado que la cantidad inicial es de R_0 kilogramos y que un cuarto del material se desintegra en 5 años.

II) ¿Cuánto tiempo tardará en desintegrarse la mitad del material?

RESOLUCIÓN:

I) Sea $R(t)$ = cantidad de material radiactivo presente en el instante t.

$R_0=R(0)$ = cantidad inicial de material radiactivo.

* Siendo la velocidad de desintegración proporcional a la cantidad presente , entonces:

$$R'(t)=kR(t)\Rightarrow\int\frac{R'(t)}{R(t)}dt=\int k\,dt$$

$$\rightarrow Ln\,R(t)=kt+a\ \Rightarrow\ R(t)=e^{kt}e^{a}=ce^{kt}$$

* Además $R(0)=c$, luego: $R(t)=R_0e^{kt}$

* Al cabo de 5 años se ha desintegrado $\frac{1}{4}R_0$,

quedando presente $\frac{3}{4}R_0$ y por lo tanto:

$$R(5)=\frac{3}{4}R_0\text{ , donde: }R(5)=R_0e^{5k}$$

$\Rightarrow \dfrac{3}{4} = e^{5k} \Rightarrow e^k = \sqrt[5]{\dfrac{3}{4}}$

* Luego: $R(t) = R_0\left(\sqrt[5]{\dfrac{3}{4}}\right)^t = R_0\left(\dfrac{3}{4}\right)^{t/5}$, es la cantidad presente al cabo de t años.

II) Hallaremos el tiempo t para el que $R(t) = R_0/2$:

$$\frac{R_0}{2} = R(t) = R_0\left(\frac{3}{4}\right)^{t/5} \Rightarrow t = \frac{5\,Ln\,2}{Ln\,(4/3)}$$

* A este tiempo se le llama ***"TIEMPO DE VIDA MEDIA"*** de dicha sustancia radiactiva.

PRIMERA PRACTICA DIRIGIDA

01 Indique el valor de la verdad en :

( ) $G(x) = 5^x \Rightarrow Dom(G) = \{5\}$

( ) $H(x) = 2^{-x} \Rightarrow Ran(H) = \langle 0; +\infty\rangle$

( ) $F(x) = 4^x \Rightarrow Dom(F) = \mathbb{R}$

A)FVV B)FVF C)VVV D)FFF E)VVF

02 Hallar el dominio de la función:

$$H(x) = Log(x-1)$$

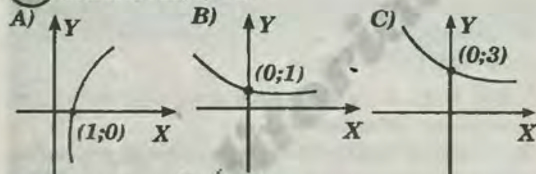
A) $x > 2$ *B)* $x < 2$ *C)* $x > 1$ *D)* $x < 1$ *E)* $x > 0$

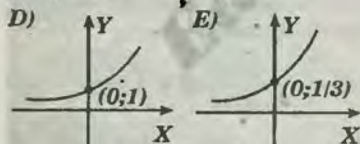
03 Hallar el dominio de la función:

$$G(x) = Log\sqrt{5-x}$$

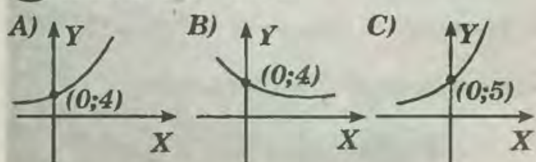
A) $x>5$ *B)* $x<1$ *C)* $x<-5$ *D)* $x>-5$ *E)* $x<5$

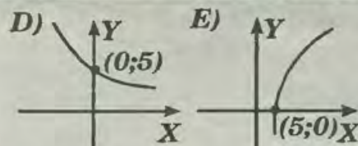
04 Graficar: $H(x) = 3^{-x}$



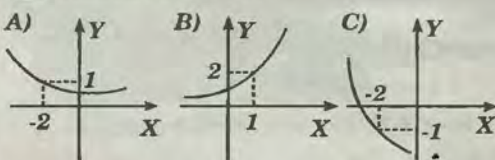


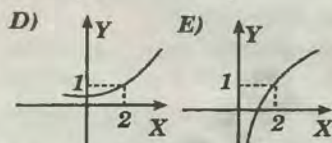
05 Graficar: $G(x) = 2^x + 4$



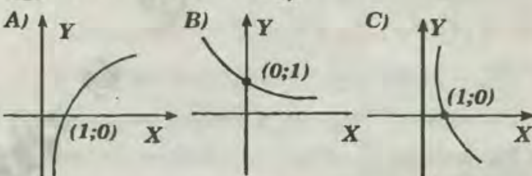


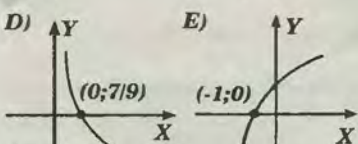
06 Graficar: $H(x) = \sqrt{7}^{\,x-2}$



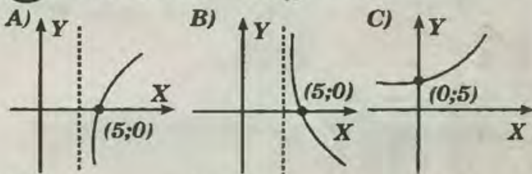


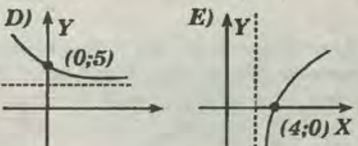
07 Graficar: $T(x) = Log_{0,7}\,x$





08 Graficar: $H(x) = Log_{\sqrt{5}}(x-4)$





09 Resolver: $Log_5 x \geq -1$

indicando el complemento de su conjunto solución.

A) $\left\langle -\infty; \dfrac{1}{5}\right\rangle$ *B)* $\left\langle -\infty; \dfrac{1}{5}\right]$ *C)* $\left[\dfrac{1}{5}; +\infty\right\rangle$

D) $[-5; +\infty\rangle$ *E)* $\langle -\infty; -5\rangle$

10 Luego de graficar :

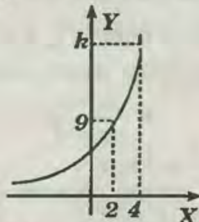
$$F: \mathbb{R} \to \mathbb{R} / y = F(x) = \sqrt{0,5}^{\,x} + 1$$

indica su rango.

A) $< 1; +\infty >$ B) $< 0; +\infty >$ C) $< -\infty; 1 >$

D) $< -\infty; 0 >$ E) $< -2; +\infty >$

11 Se muestra la gráfica de una función exponencial.



¿Cuál es el valor de $\sqrt[4]{k}$?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) $\sqrt{3}$

12 Determinar el punto de intersección de las gráficas de **F** y **G** donde:

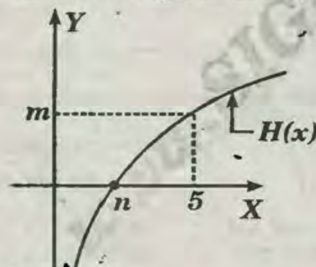
$$H: \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R} / y = H(x) = 2^{(1+x)}$$

$$T: \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R} / y = T(x) = 4^{(2x+5)}$$

A) $(-3; 9)$ B) $(-3; 4)$ C) $(4; -3)$

D) $\left(-3; \frac{1}{4}\right)$ E) $\left(3; \frac{1}{4}\right)$

13 Calcular «$m+n$» a partir de la gráfica



si: $H(x) = Log_4(x-1)$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

14 Determine el punto de intersección de las gráficas de **H** y **F**, si:

$$H(x) = Log(x-2)$$

$$F(x) = Log(4-x)$$

A) (0;3) B) (1;3) C) (3;1) D) (3;1) E) (3; 0)

15 Determine el número de soluciones reales de la siguiente ecuación: $Log_2 x - |x| = 0$

A) 1 B) 2 C) 0 D) 3 E) 4

16 Determine el dominio de la función:

$$Y = Log_{\sqrt{7}}\left(\frac{(x-3)(x-2)}{2x-3}\right)$$

A) $\left\langle -2; \frac{3}{2} \right\rangle$ B) $<3; +\infty>$ C) $<-2; 3>$

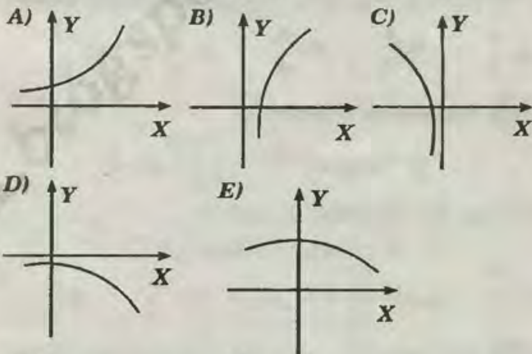
D) $\left\langle -2; \frac{3}{2} \right\rangle \cup <3; +\infty>$ E) $\left\langle -\frac{2}{3}; 1 \right\rangle$

17 Sea la función: $H(x) = 3^{x^2-1}$

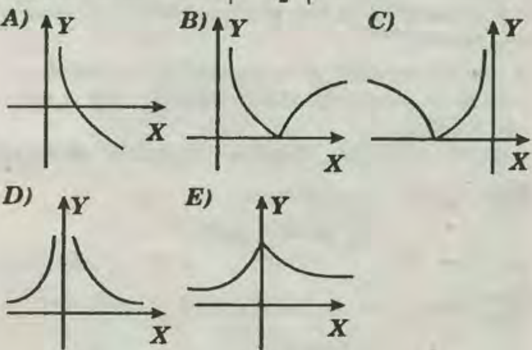
Calcular: $\{H(-1)\}^{H(2)}$

A) -1 B) $\frac{1}{2}$ C) 2 D) 1 E) $\sqrt{3}$

18 Graficar: $T(x) = \left|\sqrt{3}^{\,x}\right|$



19 Graficar: $S(x) = \left|Log_{\frac{1}{2}} x\right|$



20 Resolver: $Log_3 x^2 \geq Log_3(x+2)$

A) $[2; +\infty>$ B) $<-2; -1]$ C) $<-2; +\infty>$

D) $<-2; -1] \cup [2; +\infty>$ E) $<2; +\infty>$

SEGUNDA PRACTICA DIRIGIDA

01 Considerando que: $Log2 = 0,301$, entonces la suma de las soluciones de la ecuación:

$$16^x = 100(4^{x-1} - 1) \text{ es :}$$

A) 1,301 B) 2,301 C) 1,161 D) 2,161 E) 3,322

02 Una de las soluciones de:

$$Log_{(4x)}(2x) + Log_{(9x)}(3x) = 1$$

resulta ser una fracción irreductible de la cual se pide la suma de sus términos.

A) 5 B) 7 C) 9 D) 13 E) 10

03 Resolver la ecuación:

$$Log_{1-2x}(6x^2-5x+1) - Log_{1-3x}(4x^2-4x+1) = 2$$

y dar como respuesta su solución aumentada en uno.

A) $\frac{3}{2}$ B) $\frac{5}{4}$ C) $\frac{6}{5}$ D) $\frac{7}{6}$ E) $\frac{11}{6}$

04 Resolver la ecuación:

$$(b^{-b}Log_b x)^{\sqrt[b]{\log_b x}} = \left(\frac{1}{b}\right)^b ; b>1$$

Indique por respuesta el valor de:

$$E = Log_b x^{-x} + Log_{x^{-1}} b^{-b}$$

A) 0 B) 2b C) −2b D) $-\frac{2}{b}$ E) $\frac{2}{b}$

05 Si se proyecta un haz de luz de intensidad "k" verticalmente hacia abajo, dentro del agua, entonces su intensidad "I" a una profundidad de "x" metros es: $F(x) = ke^{-1,4x}$

¿A qué profundidad es la intensidad la mitad de su valor en la superficie? $(Ln2 = 0,693)$. Dar el valor más próximo.

A) 0,1 m B) 0,2 m C) 0,3 m D) 0,4 m E) 0,5 m

06 Calcular el producto de raíces de:

$$x^{Log_3 x^3} = 3^{12}$$

A) −1 B) 1 C) 3^{-2} D) 3^2 E) Cero

07 Sean x_1 y x_2 las soluciones de la ecuación:

$$\left(\frac{Log_x 4}{Log_4 x}\right)^{Log_4 x} = \frac{1}{x}$$

Siendo: $x_1 < x_2$, calcular el valor de:

$$E = 4x_1 + \frac{x_2}{4}$$

A) $\frac{17}{4}$ B) $\frac{4}{17}$ C) $\frac{10}{3}$ D) $\frac{257}{16}$ E) $\frac{16}{257}$

08 Si T es el $C.S$ de la ecuación:

$$Log_2(7 + 9^{x-1}) = 2 + Log_2(1 + 3^{x-1})$$

entonces se puede afirmar que:

A) $T \subset [3; 5[$ B) $\{0\} \subset T$ C) $T \cap \{-1; 0; 3; 4\} = T$

D) $\exists x_1, x_2 \in T / x_1 + x_2 = 3$ E) $\forall x \in T, x^2 + x > 3$

09 Si x_1 y x_2 son las soluciones de la ecuación:

$$(ab)^x + ab = a^{x+1} + b^{x+1}$$

siendo $a, b \in \mathbb{R}^+ - \{1\} \wedge ab \neq 1$; hallar el valor de:

$$M = \frac{x_1 + 1}{x_2 + 1}$$

A) $Log_b a$ B) $Log_a b$ C) $Log_b a + 1$

D) $Log_a b + 1$ E) Hay dos correctas

10 Con respecto a la solución de la ecuación:

$$Log\sqrt{7x+4} + Log\sqrt{2x+3} = 1 + Log1,5$$

podemos afirmar que:

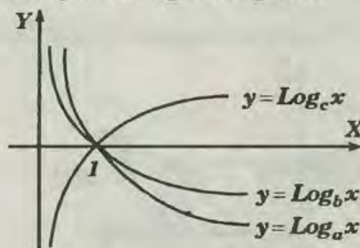
A) $x \in \mathbb{R}^-$ B) $x > 5$ C) $x \in \mathbb{N}$ D) $x \in \mathbb{Q}$ E) $5 > x > 2$

11 Resolver: $x^{Logx} - \left(\frac{10}{\sqrt[6]{x}}\right)^6 = 0$

e indicar el producto de sus raíces.

A) 10^{-2} B) 10^{-1} C) 10 D) 10^2 E) 1

12 Con respecto al siguiente gráfico:

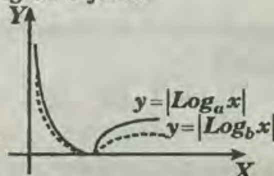


A) $a > b > 1 > c > 0$ B) $b > a > 1 > c > 0$

C) $c < 1 > b > a > 0$ D) $c > 1 > a > b > 0$

E) $c > b > a > 1$

13 De la figura adjunta:



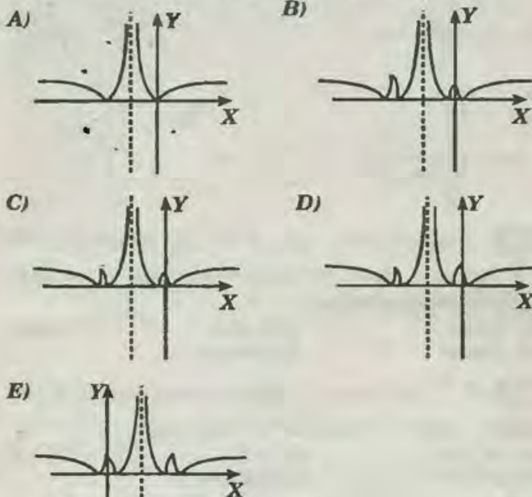
¿cuál de las siguientes alternativas no representa una relación entre a y b?

A) $b > a > 1$ B) $0 < b < a < 1$ C) $0 < b < 1 < a$

D) $0 < a < 1 < b$ E) $0 < a < b < 1$

14 Esbozar la gráfica de la función:

$$H(x)=\|Log_3|x+1\|-1|$$



15 Sea F una función definida:

$$F=\{(x;\, e^{x}-e^{-x})/x\in\mathbb{R}\}$$

Dar el valor de verdad de:

( ) F es creciente.

( ) F es impar.

( ) F es inyectiva.

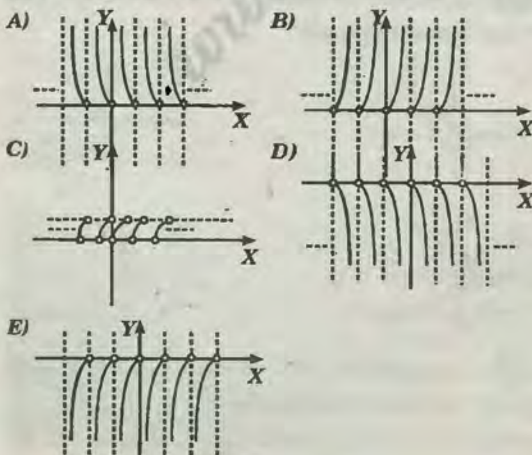
A) VVV *B) VVF* *C) VFF* *D) FVV* *E) FFV*

16 El número de soluciones de la ecuación:

$$|Senx|=|Ln|x-x\|\ \text{es:}$$

A) 1 *B) 2* *C) 3* *D) 4* *E) 6*

17 Graficar la función: $F(x)=Log_2(x-[\![x]\!])$



18 Resolver la desigualdad:

$$\sqrt[4]{(0,8)^{\frac{x-3}{4}}}>\sqrt[8]{(0,64)^{\frac{x-2}{5}}}$$

Si "x" es un entero positivo, indicar lo correcto:

A) Hay infinitas soluciones.

B) El mayor valor de "x" es 11.

C) Solamente cumplen los enteros impares menores que 25.

D) La suma de todas las soluciones es 21.

E) menor valor de "x" es 15.

19 Graficar la función: $F(x)=2(2^{x}-1)$

A) B) C) D) E)

20 Con respecto al siguiente gráfico:

$y=a^x$, $y=b^x$, $y=c^x$, $(0;\,1)$

podemos afirmar que:

A) $a>b>c>1$ *B)* $c>b>a>1$

C) $0<a<1<b<c$ *D)* $0<a<1<c<b$

E) $0<c<b<1<a$

TERCERA PRACTICA DIRIGIDA

FUNCIÓN EXPONENCIAL

01 De las siguientes funciones exponenciales:

$f(x)=3^{x}$; $g(x)=(0,2)^{x}$; $h(x)=(\sqrt{2})^{x}$; $p(x)=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{x}$; $q(x)=e^{x}$

¿Cuántas son crecientes?

A)1 B)2 C)3 D)4 E)5

02 ¿En cuáles de los siguientes casos se verifica que $a>1$?

I) $a^{0,3}>1$ II) $a^{\sqrt{2}}<a^{\sqrt{3}}$ III) $a^{-0,7}>a^{-0,8}$

A)Sólo I B)Sólo I II C)I y III
D)II y III E)I, II y III

03 ¿Cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas?

I) $\left(\frac{3}{2}\right)^{-\frac{4}{5}}<1$ II) $(0,21)^{0,1}<1$ III) $\left(\sqrt{3}\right)^{-1,2}<1$

A) Sólo I B)Sólo III C)I y III
D) II y III E)I, II y III

04 Si: $f(x)=\frac{1}{2}(3^{x}+3^{-x})$

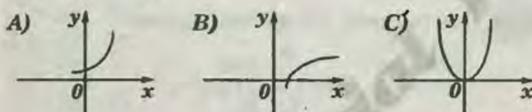
Simplificar: $E=\dfrac{f(b+c)+f(b-c)}{f(b)f(c)}$

A) f(bc) B)f(b) C)f(c) D)2 E)1

05 Si: $f(x)=27^{x}$. Hallar "a" tal que $f(a)=9$.

A) $\frac{3}{2}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{5}{3}$ D) 2 E) 3

06 La función definida por $f(x)=e^{|x|}$ está mejor representada por:





07 Sean: $f(x)=3^{x-1}$; $g(x)=3^{x}$ y $h(x)=f(x)+g(x)$

¿Cuál es el valor de x tal que $h(x)=4$?

A) -1 B)0 C)1 D)2 E)3

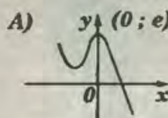
08 Sea : $A=\{a\in\mathbb{R}/f(x)=5^{2ax-4}$ *es creciente*$\}$

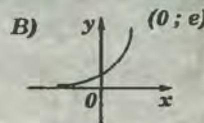
$B=\{x\in\mathbb{R}/5^{-4x}>0\}$

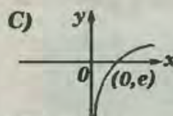
Hallar : $A\cap B$

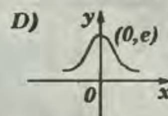
A)$\mathbb{R}$ B)$\langle 0,\infty\rangle$ C)$\langle -\infty,0\rangle$ D)$\varnothing$ E)$\{0, 1, 10\}$

09 El gráfico que mejor representa la función: $f(x)=e^{1+x}$, es :









10 Suponiendo una tasa de inflación del 20%anual, los precios deberían doblarse aproximadamente en:

A) 1 año B)2 años C)3 años
D) 4 años E)5 años

11 Si $y=10^{x}$ es un número comprendido entre 1000 y 10000 entonces "x" está entre:

A) -1 y 0 B)2 y 3 C)3 y 5
D) 5 y 10 E)10 y 100

12 Una función f cuyo dominio es el conjunto $\{-2;-1;0;1;2\}$ está definida por $f(x)=4^{-x}$. Hallar el producto de los elementos del rango f.

A) 16 B)8 C)4 D)2 E)1

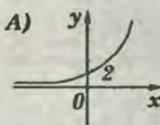
13 Hallar la base de una función exponencial cuya gráfica incluye el punto $\left(-\frac{2}{3};\frac{1}{4}\right)$

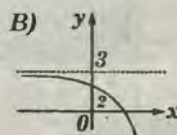
A) 2 B)4 C)8 D)16 E)64

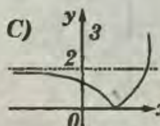
14 Si: $f(x)=2^{x}$, entonces: $f(a+1)-f(a)$ es igual a:

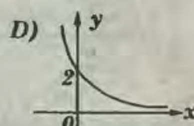
A) 2 B)1 C)f(a) D)f(1) E)2f(a)

15 La función definida por : $f(x)=|3-2^{x}|$ está mejor representada por :









16 La ecuación: $3^{x}-4=a$ con $a\in\mathbb{R}$ sólo tendrá soluciones reales para:

A)$a>-4$ B)$a<4$ C)$a>-3$

D) $a < 3$ *E) $a > \frac{3}{4}$*

17 De la ecuación : $x.2^{3^x} = 1$, podemos afirmar que:

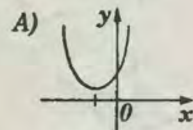
A) Tiene una única solución.
B) Tiene dos soluciones.
C) Tiene tres soluciones.
D) Tiene infinitas soluciones.
E) No admite ninguna solución real.

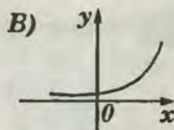
18 Indica el número de soluciones que tiene la siguiente ecuación: $3^x - 3 = 2x$.

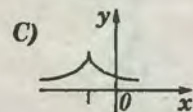
A) 0 *B) 1* *C) 2* *D) 3* *E) Ninguna anterior*

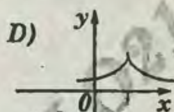
19 ¿Cuál de los siguientes gráficos representa a:

$F(x) = 2^{-|x-1|}$?

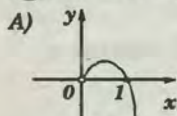
A)


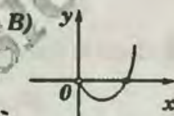
B)


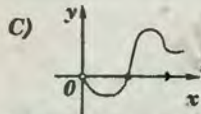
C)


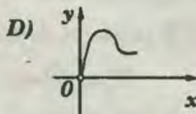
D)


20 Graficar : $F(x) = xLnx$.

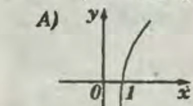
A)


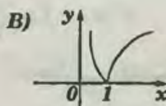
B)


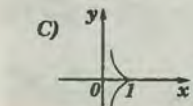
C)


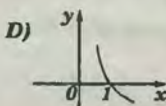
D)


21 ¿Cuál de los gráficos corresponde a: $F(x) = |CoLog_2 x|$?

A)


B)


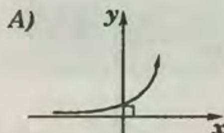
C)


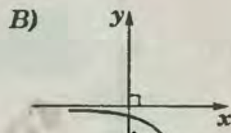
D)


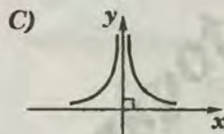
CUARTA PRACTICA DIRIGIDA

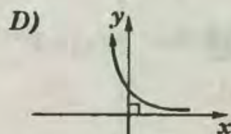
FUNCION LOGARÍTMICA

01 Graficar: $F(x) = 3^x$

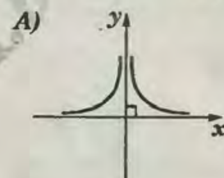
A)


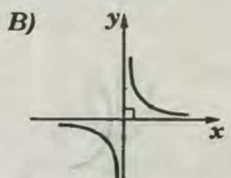
B)


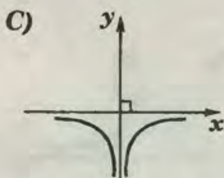
C)


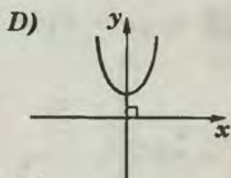
D)


02 Graficar : $F(x) = 2^{|x|}$

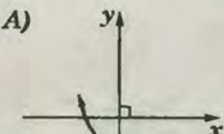
A)


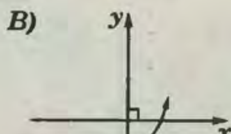
B)


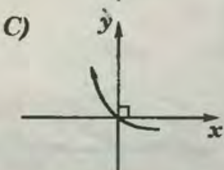
C)


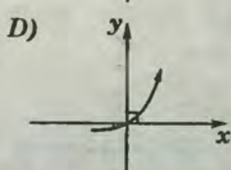
D)


03 Graficar : $F(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{x-1} - 3$

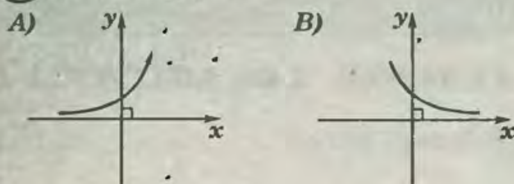
A)


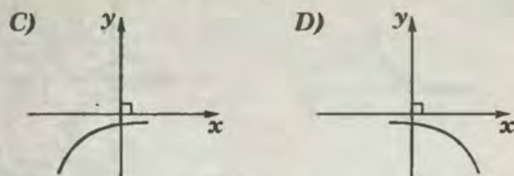
B)


C)


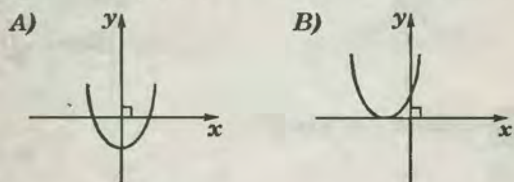
D)


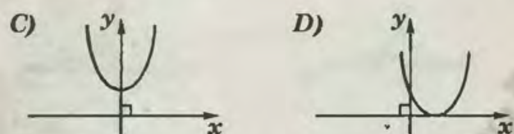
04 Graficar : $F(x) = -2^{x}$



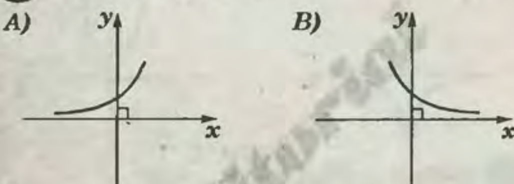


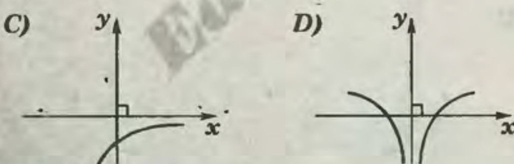
05 Sea : $F(x)=3^{|x+2|}-1$, indicar su gráfica



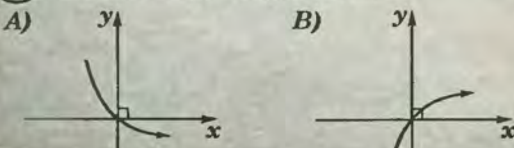


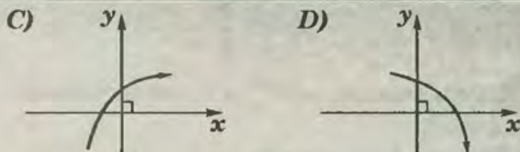
06 Graficar : $F(x)= -5^{-x}$



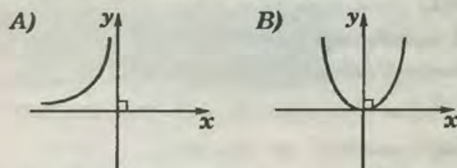


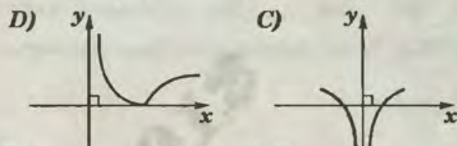
07 Graficar : $F(x)= Log(x+1)$



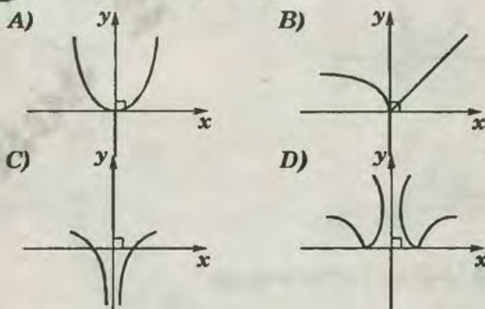


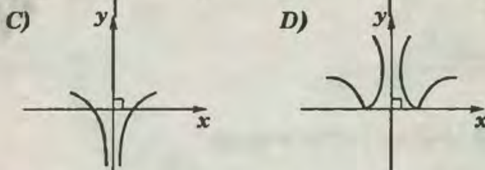
08 Graficar : $G(x)=|Log\,x|$





09 Graficar : $F(x)=Log|x|$





10 Dada la función «F» indicar su dominio si:

$$F(x)\equiv Log_3(4-|x|)$$

A)]0;4] B)]–4;4[C)]3;4] D)]–3;3[E)]–3;4[

11 Hallar el dominio de F si:

$$F(x)\equiv Log_2\sqrt{x^2-x-2}+Log(x-3)$$

A)]–1;2[B) $]2;\infty[$ C) $]3;\infty[$ D) $[1;3[$ E) $]-3;3[$

12 Hallar el dominio de :

$$F(x)\equiv Log\left(x^2+x+1\right)+Log_3\left(|x|+3\right)$$

A) $]3;\infty[$ B) $]2;\infty[$ C) ϕ D) $\{1\}$ E) $\mathbb{R}$

13 Si x_o satisface : $9^{x+2} = 240+9^x$ entonces podemos afirmar que :

A) $\dfrac{1}{x_0}\in[-1;1]$ B) $8x_0\in[5;9]$ C) $x_0^4>32$

D) $3x_0 = 1$ E) $x_0^{-1} \in]1;3[$

14 Hallar x en : $2^{x+1} - 2^{x-1} + 2^{x+2} - 2^{x-2} = 336$

A) 2 B) 4 C) 6 D) 5 E) 3

15 Indicar el valor de verdad de :

( ) $2^{3-\sqrt{2}} > 2^{5-\sqrt{2}}$

( ) $Log_7 3\sqrt{2} > Log_{\frac{1}{2}} 7$

( ) $Log_{7\sqrt{2}} 8 > Log_{\frac{1}{3}} 6$

A) FFF B) VVF C) FFV D) VVV E) FVF

16 Indicar el valor de verdad de :

( ) $Log_{1/2} 3 > 0$

( ) $Log_3 7\sqrt{2} < 0$

( ) $Log_2 7 > Log_2 3$

A) FFF B) FFV C) VVF D) VFV E) VVV

17 Si : $Log(H(x)) = F(Log(x)) - 1$

donde : $F(x) = x + Log2x$; hallar : $H(100)$

A) 10 B) 20 C) 30 D) 40 E) 50

18 Para qué valores se cumple que: $F(x) < 0$

siendo : $F(x) \equiv 2^{x^2-x+3}$

A) $x \in \mathbb{R}^+$ B) $x \in]0;1[$ C) $x \in \phi$

D) $x \in \mathbb{R}$ E) $x \in]1;2[$

19 Sea : $F(x) \equiv 3^{x^2+3}$, hallar para qué valores de x se verifica : $F(x) > 0$

A) $x \in \phi$ B) $x \in \mathbb{R}^+$ C) $x \in \mathbb{R}^-$

D) $x \in \mathbb{R}$ E) $]1;\infty[$

20 Indicar el valor de verdad de :

( ) $Log_2 6 > Log_2 3\sqrt{2}$

( ) $Log_{1/2} 1/3 > Log_{1/3} 4$

( ) $Log\, 0{,}01 > -2$

A) FVV B) VVV C) FFV D) FFF E) VFV

TAREA DOMICILIARIA

01 Si : $F(x) \equiv Log(x) + 2^{Logx}$

hallar : $E = F(10) + F(1)$

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

02 Si : $F(x) \equiv aLog_2(x-1) - b$ hallar : ab

si: $F(17) = 19$; $F(2) = 3$

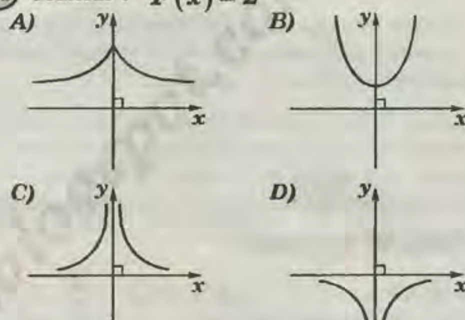
A) 6 B) 8 C) −12 D) −21 E) 36

03 Hallar el dominio de : $F(x) \equiv Log_3(1-2^x)$

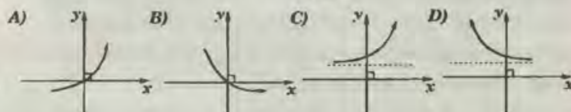
A) $]0;\infty[$ B) $]1;\infty[$ C) $]-\infty;0[$

D) $\mathbb{R}$ E) $]-1;1[$

04 Graficar : $F(x) = 2^{\frac{1}{|x|+1}}$



05 Graficar : $F(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x + 1$



CLAVES DE LA PRIMERA PRACTICA									
1)A	2)C	3)E	4)B	5)C	6)D	7)C	8)A	9)A	10)A
11)C	12)D	13)C	14)E	15)A	16)D	17)D	18)A	19)B	20)D

CLAVES DE LA SEGUNDA PRACTICA									
1)E	2)B	3)B	4)A	5)E	6)B	7)A	8)D	9)E	10)E
11)B	12)D	13)E	14)C	15)A	16)E	17)E	18)D	19)D	20)D

CLAVES DE LA TERCERA PRACTICA				
01) C	02) E	03) E	04) D	05) B
06) D	07) C	08) D	09) B	10) D
11) C	12) E	13) C	14) C	15) C
16) A	17) A	18) B	19) D	20) B
21) B				

CLAVES DE LA CUARTA PRACTICA				
01) A	02) D	03) C	04) C	05) B
06) C	07) B	08) D	09) C	10) B
11) C	12) E	13) E	14) C	15) C
16) B	17) D	18) C	19) D	20) B
01) B	02) C	03) C	04) A	05) D



OBJETIVOS :

*Aprender los conceptos de sucesión, sucesión acotada, sucesión monótona y sucesión convergente/ divergente.

* Conocer la relación entre acotación, monotonía y convergencia de una sucesión.

* Aprender los conceptos de orden de magnitud de una sucesión y de comparación de ordenes (mismo orden, mucho menor y/o grande).

* Estudiar la convergencia de una sucesión definida de modo explícito con técnicas de límites de funciones con ayuda de la regla del sandwich o de modo recursivo, estudiando monotonía y acotación.

INTRODUCCIÓN :

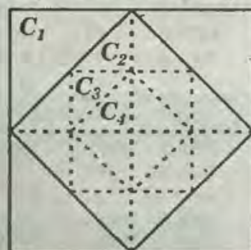
Recordando que una función: $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, es una correspondencia entre los elementos de 2 conjuntos llamados dominio y rango , tal que a cada elemento del dominio le corresponde un único elemento del rango , luego se llama sucesión de números reales a toda función definida sobre el conjunto de los números naturales y que toma valores en $\mathbb{R}$. Dicho de otra manera, una sucesión es una función cuyo dominio es $\mathbb{N}$ y cuyo rango es un subconjunto de $\mathbb{R}$. Veamos el siguiente ejemplo :

Un cuadrado de lado igual a la unidad, que representamos por C_1. Si se unen los puntos medios de sus lados (por segmentos rectilíneos) se obtiene otro cuadrado , C_2 ; uniendo los puntos medios de los lados de C_2 se obtiene otro cuadrado , C_3 : y continuando así indefinidamente , uniendo cada vez los puntos medios de los lados del último cuadrado obtenido, se llega a una sucesión de cuadrados.

$$C_1, C_2, C_3, C_4, \ldots, C_n, \ldots$$

Representemos las áreas de estos cuadrados por S_1, S_2, S_3, ... , S_n, ...respectivamente.

En primer lugar calculamos la expresión del área S_n.



$S_1=1$

$S_2=\frac{1}{2}$

$S_3=\left(\frac{1}{2}\right)^2$

Luego , la sucesión de áreas es la siguiente :

$$(S_n): 1; \frac{1}{2}; \frac{1}{2^2}; \frac{1}{2^3}; \ldots \text{ entonces } S_n = \frac{1}{2^{n-1}}$$

Todo el mundo comprende , por intuición , que el área S_n puede llegar a ser tan pequeña como querramos , tomando n suficientemente grande.

SUCESIÓN

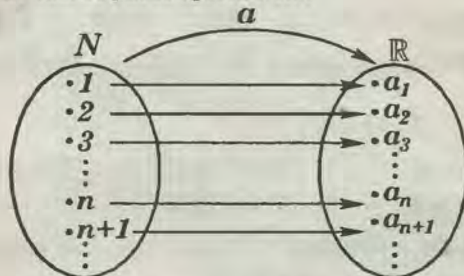
Es toda función definida sobre el conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$ (Dominio) y toma valores en $\mathbb{R}$ (su rango será un subconjunto de los números reales).

NOTACIÓN :

La sucesión, a : $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ es denotada por :

$$(a_n), \{a_n\} \text{ ó } \{a_n\}_{n\geq 1}$$

* Lo cual se puede apreciar en :



* Usualmente la forma de definir una sucesión , es por extensión , que consiste en escribir imágenes en el siguiente orden definido :

$$a_1; a_2; a_3; \ldots a_n; \ldots$$

* Donde el número a_1 es el primer término a_2 es el segundo término y en general, a_n es el *n-ésimo* término. La sucesión $a_1; a_2; a_3; \ldots; a_n; \ldots$; se puede representar por: $\{a_n\} \vee \{a_n\}_{n\geq 1}$

EJEMPLOS :

* $\{a_n\}: 1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \ldots$

* $\{b_n\}: \frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \frac{4}{3}; \ldots$

* $\{c_n\}: 0; \frac{3}{2}; -\frac{2}{3}; \frac{5}{4}; -\frac{4}{5}; .....$

* La sucesión : $\frac{1}{3}; \frac{2}{4}; \frac{3}{5}; \frac{4}{6}; ....$ se puede escribir como $\left\{\frac{n}{n+2}\right\}$

*Los primeros 6 términos de la sucesión $(\sqrt[n]{n})$ son :

$$1; \sqrt{2}; \sqrt[3]{3}; \sqrt[4]{4}; \sqrt[5]{5}; \sqrt[6]{6}$$

OTRAS FORMAS DE DEFINIR UNA SUCESIÓN

I) POR CORRESPONDENCIA :

Dando el n-ésimo término a_n, del que se obtienen sus términos al hacer : $n = 1; 2; 3; .....$

EJEMPLO :

Dada la sucesión : $\{a_n\} = \frac{n}{n^2+1}$

* Evaluando :

$$n = 1 \rightarrow a_1 = \frac{1}{2}$$

$$n = 2 \rightarrow a_2 = \frac{2}{5}$$

$$n = 3 \rightarrow a_3 = \frac{3}{10}$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

* Luego : $\{a_n\}: \frac{1}{2}; \frac{2}{5}; \frac{3}{10}; ....; \frac{n}{n^2+1}; ....$

II) POR RECURRENCIA :

Dando el primer término y una relación entre a_n y a_{n-1}

EJEMPLO 1:

Dada la sucesión $\{a_n\}: a_1 = 1, a_n = 2a_{n-1} + 1; n \geq 2$ se tiene :

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = 2a_1 + 1 = 3$$

$$a_3 = 2a_2 + 1 = 7$$

$$a_4 = 2a_3 + 1 = 15$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \ddots$$

* Luego: $\{a_n\}: 1; 3; 7; 15; ....; 2^n - 1; ......$

EJEMPLO 2 :

Si la sucesión $\{a_n\}$ está definida por: $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$, con $a_1 = a_2 = 1$, se tiene la sucesión de Fibonacci . Halle a_8 .

* En efecto :

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = 1$$

$$a_3 = a_2 + a_1 = 1 + 1 = 2$$

$$a_4 = a_3 + a_2 = 2 + 1 = 3$$

$$a_5 = a_4 + a_3 = 3 + 2 = 5$$

$$a_6 = a_5 + a_4 = 5 + 3 = 8$$

$$a_7 = a_6 + a_5 = 8 + 5 = 13$$

$$a_8 = a_7 + a_6 = 13 + 8 = 21$$

OBSERVACION :

No siempre es posible dar una expresión del ***n*-ésimo** término mediante una función explícita de n . A veces las sucesiones se definen mediante una propiedad que verifican todos sus términos (la sucesión de los números pares , la de los números primos, etc.) Otras veces el n-ésimo término se expresa a partir de los términos anteriores (por ejemplo:

$a_1 = 2 ; a_2 = 3 ; a_n = 2a_{n-1} + 5a_{n-2}, \forall n > 2$); en este último caso se dice que la sucesión se ha definido por ***recurrencia.*** La palabra recurrente se utiliza para designar a este tipo de sucesiones porque para determinar un término hay que recurrir a los anteriores . El siguiente ejemplo muestra diferentes formas de presentar una sucesión .

NOTA:

Llamaremos sucesión infinita a toda función, cuyo dominio es el conjunto N . $\{(n; f(n)) / n \in N\}$

* Esto se puede generalizar así :

$(n; f(n)) / n \in N, n \geq n_0$, donde $n_0 \in N$ y fijo.

GRÁFICA DE UNA SUCESIÓN

Una sucesión se puede visualizar graficando sus términos en una recta numérica o trazando su gráfica en vista de que una sucesión es una función cuyo dominio es el conjunto de los números naturales, su gráfica está formada por puntos aislados cuyas coordenadas son:

$$(1; a_1), (2; a_2), (3; a_3), ..., (n; a_n), ...$$

Por ejemplo la sucesión $a_n = \frac{n}{n+1}$ se puede visualizar geometricamente por una de las dos figuras siguientes :

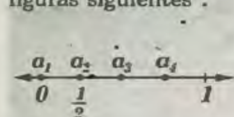


Figura 1
representación gráfica de $a_n = \frac{n}{n+1}$

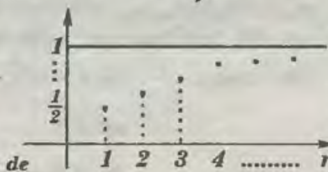


Figura 2
representación gráfica de $a_n = \frac{n}{n+1}$

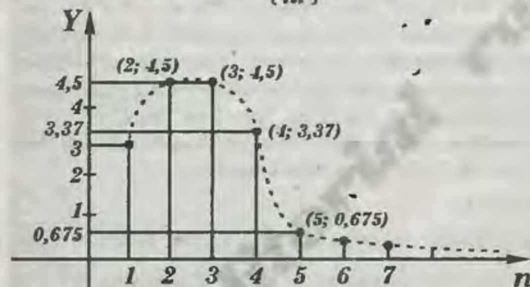
EJEMPLO 1 :

* Sean $\{a_n\} : a_n = \frac{1}{n} ; n \in N$



EJEMPLO 2 :

El gráfico de la sucesión $\left\{\frac{3^n}{n!}\right\}$ es :



* Observe que las ordenadas tienen una tendencia a cero, para valores de «n» muy grandes.

* Se tiene : $\left\{\frac{3^n}{n!}\right\} : \frac{3}{1!}, \frac{3^2}{2!}, \frac{3^3}{3!}, \frac{3^4}{4!}, \frac{3^5}{5!}, ...$

* Efectuando : $\left\{\frac{3^n}{n!}\right\} : 3; 4; 5; 4,5; 3,37; 0,675, ...$

*Finalmente se puede inferir que si «n» tiende a infinito entonces $\frac{3^n}{n!}$ tiende a cero.

OBSERVACIÓN

Considere la sucesión definida mediante la función $a_n = \sqrt{n-6}$, en este caso el dominio está formado por los números naturales $n > 6$. Esto nos indica que podemos ampliar la definición de sucesión considerándola como una función f cuyo dominio consiste de todos los números naturales consecutivos a partir de un número natural fijo distinto del número 1:

$$f: (6; 7; 8; ...) \to \mathbb{R} \to a_n = \sqrt{n-6}$$

OPERACIONES CON SUCESIONES

Debido a que una sucesión es una función entonces las operaciones aritméticas (adición , sustracción , ..., etc.) de una función se aplicarán analogamente para las sucesiones.

I) La sucesión $\{a_n\}$ es igual a la sucesión $\{b_n\}$ si y sólo si $a_n = b_n$ para todo $n \in N$.

II) Dadas las sucesiones $\{a_n\}, \{b_n\}$ se define la suma de ellas como la suma $\{c_n\}$, donde $c_n = a_n + b_n$. Se denota $\{c_n\} = \{a_n + b_n\} = \{a_n\} + \{b_n\}$.

III) Dadas las sucesiones $\{a_n\}, \{b_n\}$ se define el producto de ellas como la sucesión $\{c_n\}$ con $c_n = a_n b_n$ Se denota $\{c_n\} = \{a_n b_n\} = \{a_n\}\{b_n\}$

IV) Dadas las sucesiones $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ con $b_n \neq 0$ para todo $n \in N$ se define la división de ellas como la sucesión $\{c_n\}$ con $c_n = \frac{a_n}{b_n}$.

Se denota : $\{c_n\} = \left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$

V) Dada la sucesión $\{a_n\}$, se define la multiplicación por un escalar , así :

$$(c_n) = k(a_n) = (ka_n) \Leftrightarrow c_n = ka_n \quad \forall n \in \mathbb{N},\ k \in \mathbb{R}$$

EJEMPLO:

Determinar $\{d_n\}_{n>1}$, si :

$$a_n = 2n + 1;\ b_n = \frac{1}{n};\ c_n = -1 \text{ y } d_n = \frac{a_n + c_n}{2b_n}$$

RESOLUCIÓN:

De: $d_n = \frac{a_n + c_n}{2b_n} \Rightarrow d_n = \frac{2n+1+(-1)}{2\left(\frac{1}{n}\right)}$

$\rightarrow d_n = n^2 \rightarrow \{d_n\}_{n>1} : 1 ; 4 ; 9 ; ...... ; n^2 ; ...$

CLASES DE SUCESIONES

I) SUCESIÓN CONSTANTE :

$\{a_n\}$ es una sucesión constante si :

$$a_n = c\ ,\ c \in \mathbb{R}\ ,\forall n \in \mathbb{N}$$

EJEMPLO :

La sucesión $\{4\}$ es constante pues $a_n = 4,\ \forall n \in N$.

Este ejemplo nos sirve para indicar que todos los términos tienen el mismo valor **4** .

$a_1 = 4$, $a_2 = 4$, $a_3 = 4$, $\vdots$ } ***Pero que cada uno de ellos considerado como término de la sucesión y distinto de las demás.***

* Así tenemos que el primer **4** es un término distinto del tercer **4** por estar ubicados en lugares distintos; uno en el primer lugar y el otro en el tercer lugar de la misma sucesión.

II) SUCESIÓN MONÓTONA :

Si la sucesión $\{a_n\}_{n>1}$ es monótona , entonces esta puede ser :

A) CRECIENTE :

Será cuando cada uno de sus términos es mayor que su predecesor , es decir :

$a_1 < a_2 < a_3 < ... < a_n < a_{n+1} < ... \Rightarrow \boxed{a_n < a_{n+1}\ \ \forall n \in N}$

EJEMPLOS :

* $\{2n-1\}_{n\geq 1}$; $1; 3; 5; 7; ... ; 2n-1; ...$

* Es claro que: $a_{n+1} = (n+1)^2 > n^2 = a_n$ entonces $\{n^2\}$ es una sucesión creciente.

B) DECRECIENTE :

Será cuando cada uno de sus términos es menor que su predecesor ; es decir :

$a_1 > a_2 > a_3 > ... > a_n > a_{n+1} > ... \Rightarrow \boxed{a_n > a_{n+1}\ \ \forall n \in N}$

EJEMPLOS :

* $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}_{n\geq 1} : 1; \dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{3}; \dfrac{1}{4}; ....; \dfrac{1}{n}; ...$

* De: $a_n = \dfrac{n}{2^n}$

Consideremos la diferencia :

$$a_{n+1} - a_n = \frac{n+1}{2^{n+1}} - \frac{n}{2^n} = \frac{1-n}{2^{n+1}} \leq 0$$

*Por lo tanto $\left\{\dfrac{n}{2^n}\right\}$ es una sucesión decreciente.

C) NO CRECIENTE :

$$a_1 > a_2 > a_3 > ... > a_n > a_{n+1} > ...$$

es decir si:

$$\boxed{a_n \geq a_{n+1}\ \forall n \in \mathbb{N}}$$

EJEMPLOS :

* (a_n) : $3 ; 2 ; 2 ; 1; 0 ; 0 ; 0 ; -1; -3; -3; ....$

* $\left\{[\sqrt{n}]^{-1}\right\} : 1; 1; 1; \dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{3}; ...$

D) NO CRECIENTE :

$$a_1 < a_2 < a_3 < ... < a_n < a_{n+1} < ...$$

es decir si: $\boxed{a_n \leq a_{n+1}\ \forall n \in \mathbb{N}}$

EJEMPLOS :

* (a_n) : $2; 4; 4; 6; 7; 8; 8; 8; 10; ....$

* $\left\{[\sqrt{n}]\right\} : 1; 1; 1; 2; 2; 2; 3; ...$

MÁS EJEMPLOS:

1) La sucesión $\{a_n\}$: $a_n = \dfrac{n}{n+1}$, ¿es monótona?

* Veamos :

Considere la diferencia : $a_{n+1} - a_n = \dfrac{n+1}{n+2} - \dfrac{n}{n+1}$

$$\Rightarrow a_{n+1} - a_n = \frac{1}{(n+2)(n+1)} > 0; \forall n$$

$$\Rightarrow a_{n+1} > a_n\ ; \forall n \in \mathbb{N}$$

*Luego $\{a_n\}$ es creciente , por tanto monótona.

2) La sucesión $\{b_n\}$; $b_n = n\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$, ¿es monótona?

* Veamos :

Considere la diferencia :

$$b_{n+1} - b_n = (n+1)\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} - n\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$$\Rightarrow b_{n+1} - b_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n \left[\frac{2-n}{3}\right]$$

*Nótese que para algunos «n» la diferencia es positiva y para otros es negativa. Luego $\{b_n\}$ no es creciente ni decreciente, por tanto es no monótona.

3) La sucesión $\{c_n\}$: $c_n = (-1)^n$, ¿es monótona?

* Veamos :

Al desarrollar algunos términos se tiene :

$$\{c_n\}: -1; 1; -1; 1; \ldots\ldots$$

y podemos notar que no es creciente ni decreciente, por tanto es no monótona.

OBSERVACIÓN :

Se dice que una sucesión es alternante u oscilante, si y sólo si $a_n \times a_{n+1} < 0, \forall n \in N$ (estas sucesiones no son monótonas).

EJEMPLO:

$$\{a_n\}_{n>1} : -1 ;\ 3 ; -6 ; 10 ; -15 ; \ldots..$$

III) SUCESIONES ACOTADAS :

A) SUCESIÓN ACOTADA SUPERIORMENTE

Se da, cuando existe un número «y» llamado cota superior de la sucesión, tal que : $a_n \leq y, \forall n \in N$

* Simbólicamente :

$$\begin{pmatrix}\text{Será acotada}\\ \text{superiormente}\end{pmatrix}, \text{ Si } \exists y \in R / a_n \leq y; \forall n \in N$$

EJEMPLO :

La $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n\geq 1}$ $; 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots..$ es acotada superiormente, dado que existe $1 \in R$, tal que:

$$\frac{1}{n} \leq 1, \forall n \in N.$$

B) SUCESIÓN ACOTADA INFERIORMENTE

Se da, cuando existe un número «x» llamado cota inferior de la sucesión, tal que $a_n > x$, $\forall n \in N$.

$$\begin{pmatrix}\text{Será acotada}\\ \text{inferiormente}\end{pmatrix}, \text{ Si } \exists x \in R / x \leq a_n; \forall n \in N$$

EJEMPLO:

La $\left\{\frac{n^2}{n+1}\right\}_{n\geq 1}$ $: \frac{1}{2}; \frac{4}{3}; \frac{9}{4}; \frac{16}{5}; \ldots\ldots$; es acotada inferiormente, dado que existe $\frac{1}{2} \in R$, tal que :

$$\frac{n^2}{n+1} \geq \frac{1}{2}, \forall n \in N$$

C) SUCESIÓN ACOTADA :

Se da, cuando es acotada tanto inferiormente como superiormente, es decir cuando admite una cota superior «y», y una cota inferior «x». Entonces :

$$x \leq a_n \leq y; \forall n \in N$$

EJEMPLO :

La $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n\geq 1}$ $: 1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \ldots\ldots$

* Podemos apreciar que :

$0 < a_n \leq 1; \forall n \in N$, entonces $\{a_n\}_{n>1}$ es acotada.

OBSERVACIÓN

También se puede decir que $\{a_n\}$ es acotada,

si : $\exists k / |a_n| \leq k, \forall n \in N$

D) SUCESIÓN NO ACOTADA :

Es aquella que carece de cota superior, cota inferior o no posee ninguna cota.

EJEMPLOS :

* La $\left\{\frac{n}{3}\right\}_{n\geq 1}$, no es acotada superiormente, dado que un número «k» por grande que sea, para que se tenga $\frac{n}{3} > k$, bastará que $n > 3k$.

* $\{a_n\} = \{(-n^3)\}$ $\{a_n\}: -1; -8; -27; \ldots.$

Esta sucesión no está acotada inferiormente, pues dado un número M, por pequeño que sea, para que $-n^3 < M$, bastará tomar $n > -M$.

MAS EJEMPLOS :

1) La sucesión $\left\{\frac{Cosn}{n^2+4}\right\}$ está acotada, pues

$\left|\frac{Cosn}{n^2+4}\right| \leq \frac{1}{n^2+4} \leq \frac{1}{4}$ en este caso un valor de M es $M = \frac{1}{4}$.

2) Respecto de la sucesión $\{a_n\}$: $a_n = n^2 + 3$. ¿es acotada?

RESOLUCIÓN :

$$\forall n \in N : n \geq 1 \Rightarrow n^2 \geq 1 \Rightarrow n^2 + 3 \geq 4$$
$$\Leftrightarrow a_n \geq 4;\ \forall n$$

* Luego $\{a_n\}$ es acotada inferiormente .

3) Respecto de la sucesión $\{b_n\}$: $b_n = \dfrac{n+2}{n+1}$, ¿es acotada?

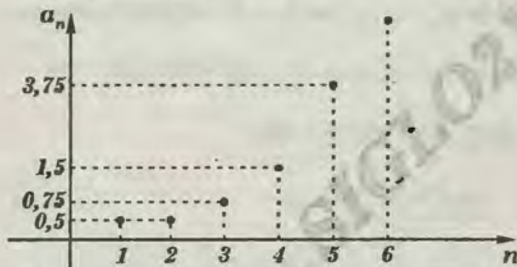
RESOLUCIÓN :

$$b_n = \frac{n+2}{n+1} = \frac{(n+1)+1}{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1}$$
$$\forall n \in N : n \geq 1 \Rightarrow n+1 \geq 2 \Rightarrow 0 < \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{2}$$
$$\Rightarrow 0 < b_n \leq \frac{1}{2}$$

*Luego $\{b_n\}$ es acotada superior e inferiomente por tanto es acotada.

4) Se tiene : $\{a_n\} : \frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{3}{4}; \frac{3}{2}; \frac{15}{4}; ....$

* Cuya gráfica es :



* Se puede observar que esta sucesión es no decreciente y no está acotada superiormente.

SUBSUCESIÓN :

$\{a_n\}$ será una subsucesión de $\{b_n\}$, si $\{a_n\}$ es una sucesión que se obtiene.tomando un númnero finito de términos de $\{b_n\}$ en el mismo orden que aparece en $\{b_n\}$.

EJEMPLO :

* $\{2^{2n}\}_{n \geq 1} : 4; 16; 64; 256; ....$

* $\{2^{2n-1}\}_{n \geq 1} : 2; 8; 32; 128; ....$

Serán subsucesiones de:

* $\{2^n\}_{n \geq 1} : 2; 4; 8; 16; 32; ....$

OJO :

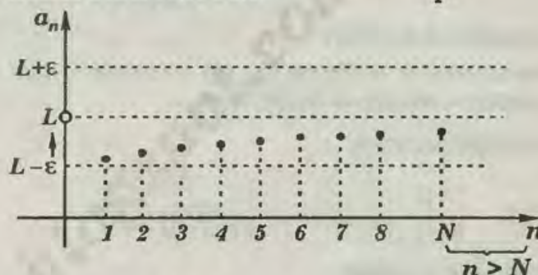
Una subsucesión es también una sucesión .

LÍMITE DE UNA SUCESIÓN

Cuando los términos de una sucesión $\{a_n\}_{n \geq 1}$, se aproximan a un número L, se dirá que la sucesión tiende al límite L, y se denota:

$\lim\limits_{n \to \infty} a_n = L$ (o cuando $a_n \to L$, cuando $n \to \infty$)

GRAFICAMENTE:



DEFINICIÓN :

Se dice que L es el límite de la sucesión $\{a_n\}$ cuando para todo número $\varepsilon > 0$; dado arbitrariamente pequeño, se puede obtener $N \in N$, tal que todos los términos a_n, con índice $n > N$ cumplen la condición: $|a_n - L| < \varepsilon$ (es casi cero)

$$\lim_{n \to \infty} a_n = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N > 0 / n > N \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon$$

OJO :

Esta importante definición significa que para valores muy grandes de «n», los términos a_n, permanecen tan próximos a «L» cuanto se desee, dado que :

$$|a_n - L| < \varepsilon \Rightarrow -\varepsilon < a_n - L < \varepsilon \Rightarrow L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon$$

* Las sucesiones que tienen límite (finito) se llaman ***CONVERGENTES*** y las demás ***DIVERGENTES***.

NOTA:

Para $n > \hat{N}$ los términos de la sucesión están todos a menos de ε unidades de L.

* Si una sucesión $\{a_n\}$ coincide con los valores de una función f en todo entero positivo n, y si $f(x)$ tiende a un límite cuando $x \to \infty$, entonces la

sucesión debe converger a ese mismo límite.

*Antes de continuar debemos saber el siguiente principio :

PRINCIPIO ARQUIMEDIANO

Si «a» y «b» son 2 números reales positivos entonces existe un número entero positivo «n», tal que : $a < nb$.

EJEMPLO :

Cuando $a = 1$ y $b = \varepsilon$, entonces :

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\, n \in N / \frac{1}{n} < \varepsilon$$

OBSERVACIÓN

Para calcular el límite de una sucesión , será suficiente calcular el límite de «a_n».

APLICACIÓN :

Dada : $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n\geq 1}$ demostrar que : $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

RESOLUCIÓN :

* Por definición :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists\, N > 0 / n > N \Rightarrow \left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$$

$$\to \left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon \Rightarrow \underbrace{\frac{1}{n} < \varepsilon}_{} \to n > \frac{1}{\varepsilon}$$

Esto es verdadero ∀ε>0, por el principio arquimediano

*Luego para demostrar lo pedido, será suficiente tomar: $N = \frac{1}{\varepsilon}$; pero deseamos que este último sea un número natural, entonces haremos:

$$N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$$

NOTA:

Para cada número real $\varepsilon > 0$, dado arbitrariamente, es posible obtener un número natural «N» en función de «ε»,tal que $\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$, siempre que $n > N$.

* Según la definición nuestro problema es hallar «N» en función de «ε», siendo «ε» cualquier número real positivo muy pequeño.

EJEMPLO :

Demostrar que : $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{e}\right)^n = 0$, siendo «$e$» la base de los Logaritmos Neperianos.

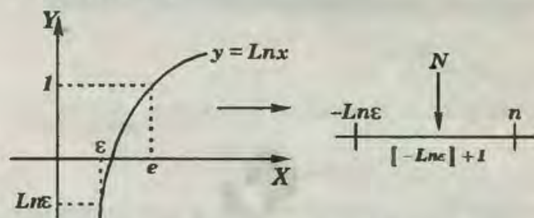
RESOLUCIÓN :

* Busquemos «N» en función de «ε», entonces partamos de :

$$\left|\left(\frac{1}{e}\right)^n - 0\right| = \frac{1}{e^n} < \varepsilon \;; \forall\varepsilon > 0$$

* Tomemos logaritmos : $Ln\left(\frac{1}{e^n}\right) < Ln\varepsilon \to n > -Ln\varepsilon$

* Observemos :



* Luego tomaremos «N» al entero :

$N = [-Ln\varepsilon] + 1$, con lo que se concluye la demostración.

TEOREMAS :

Si $\lim a_n = a$ y $\lim b_n = b \,;\, a, b \in \mathbb{R}$ entonces:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n b_n) = ab$

3) $\lim\limits_{n\to\infty}(ka_n) = ka; k = cte.$

4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{a}{b}; b \neq 0.$

* CASOS DE INDETERMINACIÓN :

Sean (a_n) y (b_n) dos sucesiones, las indeterminaciones pueden presentarse en las siguientes formas :

Operación	Representación simbólica
$\frac{a_n}{b_n}$, si $a_n \to 0 \wedge b_n \to 0$	$\frac{0}{0}$
$\frac{a_n}{b_n}$, si $a_n \to \infty \wedge b_n \to \infty$	$\frac{\infty}{\infty}$
$a_n b_n$, si $a_n \to 0 \wedge b_n \to \infty$	$0\cdot\infty$
$a_n - b_n$, si $a_n \to \infty \wedge b_n \to \infty$	$\infty - \infty$
$a_n^{b_n}$, si $a_n \to 0 \wedge b_n \to 0$	0^0
$a_n^{b_n}$, si $a_n \to \infty \wedge b_n \to 0$	∞^0
$a_n^{b_n}$, si $a_n \to 1 \wedge b_n \to \infty$	1^∞

OBSERVACIÓN

Para el cálculo del límite emplearemos los teoremas ya vistos en el capítulo de límites de funciones reales de variable real.

EJEMPLOS :

1) Dada la sucesión $\{a_n\} = a_n = \dfrac{5n^2+2n+6}{7n^2-5}$

hallar : $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$

RESOLUCIÓN :

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{5n^2+2n+6}{7n^2-5}$$

$$\to \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{5n^2+2n+6}{n^2}}{\dfrac{7n^2-5}{n^2}}$$

$$\to \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{5+\dfrac{2}{n}+\dfrac{6}{n^2}}{7-\dfrac{5}{n^2}} = \frac{5}{7}$$

* Luego : $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \dfrac{5}{7}$

→ El límite de la sucesión es *5/7*

2) Dada la sucesión $\{b_n\} : b_n = n\,Sen\left(\dfrac{\pi}{n}\right)$ calcule el límite de la sucesión.

RESOLUCIÓN :

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} n\,Sen\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

$$\to \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}\frac{Sen\left(\dfrac{\pi}{n}\right)}{\dfrac{1}{n}}$$

$$\to \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}\frac{\pi\times Sen\left(\dfrac{\pi}{n}\right)}{\dfrac{\pi}{n}}$$

$$\to \lim_{n\to\infty} b_n = \underbrace{\lim_{n\to\infty}\pi}_{\pi}\times\underbrace{\lim_{n\to\infty}\frac{Sen\left(\dfrac{\pi}{n}\right)}{\dfrac{\pi}{n}}}_{1}$$

* Luego $\lim b_n = \pi$

→ El límite de la sucesión es *p* .

3) Sea la sucesión : $\{c_n\} : c_n = \dfrac{n^3+1}{3n^2+1}$ calcule el límite de la sucesión

RESOLUCIÓN :

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n^3+1}{3n^2+1} \to \lim_{n\to\infty} c_n = +\infty$$

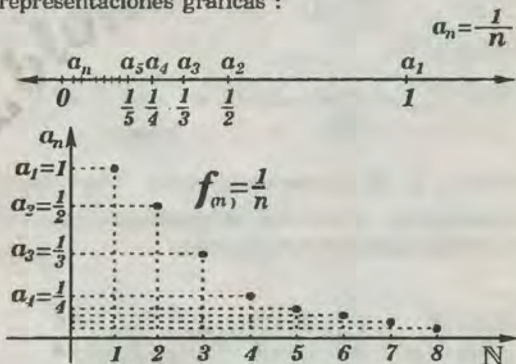
* Luego : $\lim c_n = +\infty$

→ El límite de la sucesión es $+\infty$

CONVERGENCIA Y DIVERGENCIA DE UNA SUCESIÓN

NOCIÓN INTUITIVA DE CONVERGENCIA DE UNA SUCESIÓN :

Consideremos la sucesión $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$ de la cual damos dos representaciones gráficas :



Note que la primera gráfica corresponde al eje Y de la segunda gráfica.

Observamos que conforme n aumenta , los puntos $a_n = \dfrac{1}{n}$ parecen acumularse alrededor del punto *0* en ambas gráficas , lo cual se expresa diciendo que «los valores $a_n = 1/n$ tienden al número *0* conforme n aumenta indefinidamente su valor , o que la sucesión $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$ tiene límite $L = 0$ o también que la sucesión $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$ converge hacia cero .

DEFINICIÓN :

Respecto de la sucesión $\{a_n\}$:

Si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ con $L \in \mathbb{R}$, diremos entonces que la

sucesión $\{a_n\}$ es convergente y converge a L si «L» es finito y único , en caso contrario es divergente.

NOTA:

*Si $Lim\, a_n = +\infty$, diremos entonces que la sucesión $\{a_n\}$ es divergente.

* Si $Lim\, a_n = -\infty$, diremos entonces que la sucesión $\{a_n\}$ es divergente

EJEMPLOS :

* $\{\sqrt[n]{5}\}_{n\geq 1} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} 5^{\frac{1}{n}} = 5^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}} = 5^0 = 1$,

entonces $\{\sqrt[n]{5}\}$ converge a 1.

* $\left\{\left(\frac{3}{2}\right)^n\right\}_{n\geq 1} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^n = \infty$, entonces $\left\{\left(\frac{3}{2}\right)^n\right\}$ diverge a $+\infty$.

* $\{(-1)^n\}_{n\geq 1} \Rightarrow \lim\limits_{\substack{n\to\infty\\(n=par)}} (-1)^n = 1$ ó $\lim\limits_{\substack{n\to\infty\\(n=impar)}} (-1)^n = -1$,

entonces $\{(-1)^n\}$ no es convergente . Esta sucesión es oscilante , a este tipo de sucesión también lo consideraremos como divergente.

* $\left\{\frac{4n+7}{2n+1}\right\}_{n\geq 1} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\frac{4n+7}{2n+1} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{4+\frac{7}{n}}{2+\frac{1}{n}} = \frac{4+0}{2+0} = 2$,

entonces $\left\{\frac{4n+7}{2n+1}\right\}$ es convergente .

TEOREMA 1 :

Toda sucesión monótona y acotada , es convergente.

COROLARIO : (DE BOLZANO WEIERSTRASS)

Toda sucesión acotada de números reales posee una sucesión convergente .

TEOREMA 2 : (UNICIDAD DEL LÍMITE)

Una sucesión no puede converger en 2 límites diferentes.

TEOREMA 3 :

Si la sucesión $\{a_n\}_{n\geq 1}$ converge en $x \in R$, entonces toda sucesión de $\{a_n\}$ converge con «x».

TEOREMA 4 :

Toda sucesión convergente es acotada , pero lo recíproco no necesariamente se cumple.

TEOREMA 5 :

Toda sucesión monótona y no acotada es divergente, lo hace a $+\infty$ ó $-\infty$.

EJEMPLOS :

* $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n\geq 1}$, es monótona y acotada , luego por el Teorema 1, converge.

* $\{2^n\}_{n\geq 1}$, es monótona, pero no es acotada, entonces diverge .

* $\{(-1)^n\}_{n\geq 1}$, es acotada, pero no es monótona, entonces diverge .

*La sucesión divergente $\{b_n\} = \left\{\frac{n^2}{n+1}\right\}$ es monótona pero no acotada .

SUCESIONES DIVERGENTES

Son aquellas que no admiten un límite, este último puede ser, divergente a $+\infty$, a $-\infty$ u oscilante.

PROPIEDADES :

I) Si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ y (b_n) es acotada, entonces $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = +\infty$

II) Si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ y existe $c > 0$ tal que $b_n > c$ $\forall n \in N$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n b_n) = +\infty$

III) Si $a_n > c > 0$, $b_n > 0$ $\forall n \in N$ y $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, entonces $Lim\,\frac{a_n}{b_n} = +\infty$

IV) (a_n) está acotada y $Lim\, b_n = +\infty$, entonces $Lim\,\frac{a_n}{b_n} = 0$

TEOREMA DE LA MEDIA GEOMÉTRICA

Sean (a_n), (b_n) y (c_n) sucesiones de números reales tal que :

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = L \text{ y } a_n < b_n < c_n$$

para todo número natural n suficientemente grande, entonces la sucesión (b_n) tiene límite que coincide con las otras dos sucesiones, es decir : $\lim_{n\to\infty} b_n = L$.

EJEMPLO 1 :

Calcule : $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n + c^n}$

Si $0 < a < c \wedge 0 < b < c$

RESOLUCIÓN:

* Elevando al exponente «*n*» :

$$0 \le a^n \le c^n$$

$$\textit{Sumando}: \frac{0 \le b^n \le c^n}{0 \le a^n + b^n \le 2c^n} \oplus$$

* Sumando : $(c^n) : c^n < a^n + b^n + c^n < 3c^n$
* Extraemos raíz enésima :

$$\sqrt[n]{c^n} \le \sqrt[n]{a^n + b^n + c^n} \le \sqrt[n]{3c^n}$$

$$\Rightarrow c \le \sqrt[n]{a^n + b^n + c^n} \le 3^{\frac{1}{n}} \times c$$

* Como : $\lim_{n\to\infty} c = \lim_{n\to\infty} 3^{\frac{1}{n}} \times c = c$

entonces : $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n + c^n} = c$

TEOREMA DE LA MEDIA ARITMÉTICA

Sea $\{a_n\}_{n\ge 1}$ una sucesión convergente.

Luego :

$$\textbf{Si}: \lim_{n\to\infty} a_n = a \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a .... + a_n}{n} = a$$

TEOREMA DE MEDIA GEOMÉTRICA

Sea $\{a_n\}_{n\ge 1}$ una sucesión convergente .

Luego :

$$\textbf{Si}: \lim_{n\to\infty} a_n = a \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 \times a_2 \times a_3 \times .....a_n} = n$$

EJEMPLO 1 :

Calcular : $\lim_{n\to\infty} \frac{2 + \sqrt{3} + \sqrt[3]{4} + ... + \sqrt[n]{n+1}}{n}$

RESOLUCIÓN :

*Se puede apreciar que piden : $\lim_{n\to\infty} \underset{\text{Media Aritmética}}{(\overline{MA})}$

* Luego bastará calcular :

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n+1} = e^{\lim_{n\to\infty} Ln(n+1)^{1/n}} = e^{\lim_{n\to\infty} \frac{Ln(n+1)}{n}}$$

* Consideramos la regla de L'hospital :

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n+1} = e^{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1}} = e^0 = 1$$

*Entonces por el teorema de la media aritmética , se tendrá que : $\lim_{n\to\infty} \frac{2 + \sqrt{3} + \sqrt[3]{4} + ... + \sqrt[n]{n+1}}{n} = 1$

EJEMPLO 2 :

Calcular : $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n+1} = e^{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1}} = e^0 = 1$

RESOLUCIÓN :

* Se puede apreciar que :

$$a_1 = \frac{4}{15}; a_2 = \frac{7}{30}; a_3 = \frac{12}{55}; a_n = \frac{n^2+3}{5n^2+10}$$

* De donde :

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+3}{5n^2+10} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 + \frac{3}{n^2}}{5 + \frac{10}{n^2}} = \frac{1}{5}$$

*Luego , por el Teorema de la Media Geométrica , se tendrá que : $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{4}{15} \times \frac{7}{30} \times \frac{12}{55} \times .... \times \frac{n^2+3}{5n^2+10}} = \frac{1}{5}$

TEOREMA :

I) La sucesión $\{r^n\}$ converge a cero si $|r| < 1$ (es decir $\lim_{n\to\infty} r^n = 0, |r| < 1$)

II) La sucesión $\{r^n\}$ diverge si $|r| > 1$ (es decir $\lim_{n\to\infty} r^n = \infty, |r| > 1$)

EJEMPLOS :

* $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{7}\right)^n = 0$, puesto que $r = \left(\frac{2}{7}\right) < 1$

* $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{7}{5}\right)^n = +\infty$, puesto que $r = \left(\frac{7}{5}\right) > 1$

CRITERIOS PARA DETERMINAR LA CONVERGENCIA O DIVERGENCIA DE UNA SUCESIÓN

A) CRITERIO DE LA RAZÓN :

Sea la sucesión $\{a_n\}_{n\ge 1}$ tal que : $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = r$,

luego:

I) Si: $r < 1 \Rightarrow$ La sucesión converge a cero.

II) Si $r = 1 \Rightarrow$ No podemos afirmar si converge o diverge.

III) Si: $r > 1 \Rightarrow$ La sucesión converge.

EJEMPLO :

* Dado : $\left\{\frac{2^n}{n!}\right\}_{n\geq 1}$, luego :

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{2n}{n!}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{n+1} = 0 < 1,$$

Entonces la sucesión converge .

B) CRITERIO DE STOLZ – CEZARO :

Sean: $\{a_n\}_{n\geq 1} \wedge \{b_n\}_{n\geq 1}$, tal que :

1) $\{b_n\}_{n\geq 1}$ es monótona y $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0$

ó

2) $\{b_n\}_{n\geq 1}$ es monótona y $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$

Entonces: $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}$.

EJEMPLO :

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2}+\sqrt{5}+\sqrt{10}+...+\sqrt{n^2+1}}{n^2+3}$$

RESOLUCIÓN :

Sean : $a_n = \sqrt{2}+\sqrt{5}+\sqrt{10}+....+\sqrt{n^2+1}$ $b_n = n^2+3$

$\rightarrow a_n = \sqrt{2}+\sqrt{5}+\sqrt{10}+....+\sqrt{n^2+1}+\sqrt{(n+1)^2+1}$

y $b_n = (n+1)^2+3$ ·

*Ahora como $\{b_n\}$ es monótona y $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$

* Entonces podemos aplicar el criterio de Stolz-Cezaro :

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{(n+1)^2+1}}{2n+1}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{2}{n}+\frac{2}{n^2}}}{2+\frac{1}{n}} = \frac{1}{2}$$

III) SUCESIÓN DE CAUCHY :

Sea $\{a_n\}_{n\geq 1}$ se dice que es una sucesión de Cauchy, si:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0 / m > N, n > N \Rightarrow |a_m - a_n| < \varepsilon$$

EJEMPLO :

Probar que $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n\geq 1}$, es una sucesión de Cauchy.

RESOLUCIÓN :

* Consideremos la propiedad arquimediana, en particular: $a=2$ y $b=\varepsilon$, entonces

$2 < n\varepsilon \Rightarrow \frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$

* Ahora :

$$\left|\frac{1}{n}-\frac{1}{n}\right| = \underbrace{\left|\frac{1}{m}+\left(-\frac{1}{n}\right)\right| \leq \left|\frac{1}{n}\right|+\left|\frac{1}{m}\right|}_{\text{desigualdad triangular}} < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

* $\forall n,m > N = \frac{1}{\varepsilon}$

* Con lo que: $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n\geq 1}$ es de Cauchy

LEMA 1 :

Toda sucesión convergente es una sucesisón de Cauchy.

LEMA 2 :

Toda sucesión de Cauchy es acotada.

LEMA 3 :

Toda sucesión de Cauchy definida en el conjunto de los números reales es convergente.

NOTA :

Según la definición, cuando «*m*» y «*n*» son muy grandes, entonces a_m y a_n están muy próximos entre sí.

OBSERVACIÓN

Al querer demostrar la convergencia o divergencia de una sucesión , tomar en cuenta las siguientes equivalencias , es decir , aquellas cuyas relaciones por cociente tienden a *1*.

1) Senx <> x <> arcSenx <> arctanx, (cuando $x \to 0$)

2) $n! <> n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$, (cuando $n \to \infty$)...(fórmula

de Stirling)

3) Ln(1 + x) <> x, (cuando $x \to 0$)

4) $a_0 n^p + a_1 n^{p-1} + ... + a_p <> a_0 n^p$, (cuando $n \to \infty$)

5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{k}{n}\right)^n = e^k$ 6) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$

7) SUMA DE RIEMANN:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{\infty} f\left(a+\left(\frac{b-a}{n}\right)i\right) = \int_a^b f(x)\,dx$$

* En particular para $a = 0$ y $b = 1$, se obtendrá:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{\infty} f\left(\frac{i}{n}\right) = \int_0^1 f(x)\,dx \text{ , siendo: } f(x) = \frac{i}{n}$$

EJEMPLO :

$$\sum_{i=1}^{\infty}\cos\left(P+\frac{i}{n}\right)\times\frac{1}{n} = \int_0^1 \cos(P+x)\,dx$$

NOTA:

En el siglo III a.C., Arquímedes intentó calcular el número π. Su idea era utilizar una secuencia de polígonos regulares que hacia el círculo.

Construimos algunos polígonos regulares a partir del círculo de radio *1*.

Las figuras que obtenemos son:


Polígono 4 lados. Area =2


Polígono 8 lados. Area =2,828...


Polígono 16 lados. Area = 3,...

Observamos que la sucesión, además de ser creciente y estar acotada, parece que tiende hacia un número determinado, el área del círculo, que es π.

SUCESIÓN DE FIBONACCI

En matemáticas, la **sucesión de Fibonacci** es la siguiente sucesión infinita de números naturales:

0 ; 1 ; 1 ; 2 ; 3 ; 5 ; 8 ; 13 ; 21 ; 34 ; 55 ; 89 ;............

El primer elemento es *0,* el segundo es *1* y cada elemento restante es la suma de los dos anteriores:

$$f_i = \begin{cases} 0 & \text{si } i = 0 \\ 1 & \text{si } i = 1 \\ f_{(i-2)} + f_{(i-1)} & \text{si } i > 1 \end{cases}$$

A cada elemento de esta sucesión se le llama número de Fibonacci. Esta sucesión fue descrita en Europa por Leonardo de Pisa, matemático italiano del siglo XIII también conocido como Fibonacci. Tiene numerosas aplicaciones en ciencias de la computación, matemáticas y teoría de juegos.

Antes de que Fibonacci escribiera su trabajo, la sucesión de los números de Fibonacci había sido descubierta por matemáticos indios tales como Gopala (antes de 1135) y Hemachandra (c. 1150), quienes habían investigado los patrones rítmicos que se formaban con sílabas o notas de uno o dos pulsos. El número de tales ritmos (teniendo juntos una cantidad *n* de pulsos) era f_{n+1}, que produce explícitamente los números 1; 2 ; 3; 5; 8; 13; 21, etc.

La sucesión fue descrita por Fibonacci como la solución a un problema de la cría de conejos: «*Cierto hombre tenía una pareja de conejos juntos en un lugar cerrado y uno desea saber cuántos son creados a partir de este par en un año cuando es su naturaleza parir otro par en un simple mes, y en el segundo mes los nacidos parir también*».

De esta manera Fibonacci presentó la sucesión en su libro *Liber Abaci*, publicado en 1202. Muchas propiedades de la sucesión de Fibonacci fueron descubiertas por Édouard Lucas, responsable de haberla denominado como se la conoce en la actualidad.

También Kepler describió los números de Fibonacci, y el matemático escocés Robert Simson descubrió en 1753 que la relación entre dos números de Fibonacci sucesivos f_{n+1} / f_n se acerca a la relación áurea fi () cuanto más se acerque a infinito; es más: el cociente de dos términos sucesivos de toda sucesión recurrente de orden dos tiende al mismo límite. Esta serie ha tenido popularidad en el siglo XX especialmente en el ámbito musical, en el que compositores con tanto renombre como Béla Bartók u Olivier Messiaen la han utilizado para la creación de acordes y de nuevas estructuras de frases musicales.

*** En la pág. 61 de la novela de · Dan Brown · *El código Da Vinci* aparece una versión desordenada de los primeros ocho números de Fibonacci (13, 3, 2, 21, 1, 1, 8, 5), que funcionan como una pista dejada por el conservador del museo del Louvre, Jacques Saunière.**

*** En el álbum *Lateralus* de la banda estadounidense · Tool, los patrones de la batería (Danny Carey) de la canción «Lateralus» siguen la Sucesión de Fibonacci del número 13 (número de pistas del disco): 1,1,2,3,5,8,13,1,1,2,3,5,8,13,1,1,...**

*** En la miniserie · *Abducidos*, la Sucesión de Fibonacci, como la Ecuación de Dios, es descubierta en los planes de los extraterrestres, en ejemplos como que sus naves tienen 5 tripulantes, sus manos 3 dedos y un pulgar, 1597 avistamientos ovnis en año anterior, se siguieron a 55 parejas para descubrir la híbride humano-extraterrestre Allie, y que finalmente el número de abducidos era de 46368. Incidentalmente se habla en de un hombre que fue abducido 13 veces. 1, 3, 5, 13, 55, 1597, 46368, todos números Fibonacci.**

*** En el filme de · Darren Aronofsky · *Á el orden del caos* el · judío Rabbi Cohen presenta la teoría en · hebreo transcrito en números en la cual el personaje Max Cohen relaciona esta última teoría con la secuencia de Fibonacci llegando en conclusión que todo esta basado en la ley del orden y el caos.**

*** En un lateral de la cúpula de la antigua sinagoga ahora convertida en el Museo Nazionale del Cinema, más conocida como Mole Antonelliana, en Torino (Italia), se puede observar una instalación luminosa de la sucesión de números de Fibonacci.**

*** El Dr. Walter Bishop de la serie de televisón · Fringe usa nymeros de la serie de Fibonacci para las contraseñas de sus cajas de seguridad.**

La gran mayoría de los árboles parecen crecer siguiendo la sucesión de fibonacchi: El tronco (1) se divide en una rama grande (1), esta rama se divide en dos (2), luego, cada una de ellas se divide en 3 (3) ramas más pequeñas, y así sucesivamente. El Sistema Solar parecíera seguir este patrón: Mercurio (1), Venus (1), La Tierra (2, incluyendo La Luna), Marte (3, incluyendo Fobos y Deimos). Hasta aquí la semejanza. En el cuerpo humano podemos decir que la cabeza es 1, el cuello, 1, los brazos (2), brazo, antebrazo y mano (3), luego los cinco dedos (5), es decir, la sucesión de Fibonacci hasta el 5. Los machos de una colmena de abejas tienen un árbol genealógico que cumple con esta sucesión. El hecho es que los zánganos, el macho de la abeja, no tiene padre (1), pero sí que tiene una madre (1, 1), dos abuelos, que son los padres de la reina (1, 1, 2), tres bisabuelos, ya que el padre de la reina no tiene padre (1, 1, 2, 3), cinco tatarabuelos (1, 1, 2, 3, 5), ocho tataratatarabuelos (1, 1, 2, 3, 5, 8) y así sucesivamente, cumpliendo con la sucesión de Fibonacci.

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1:

si $\{a_n\}$ es una sucesión definida por $\{a_n\}_{n\in N}=\left\{\frac{1}{3};\frac{3}{5};\frac{5}{7};\frac{7}{9};....\right\}$, entonces el n– ésimo término es:

A) $\frac{3n-2}{3n+2}$ B) $\frac{2n-1}{2n+1}$ C) $\frac{2n+11}{2n-1}$

D) $\frac{n^2+1}{n^2-1}$ E) $\frac{n+1}{n-1}$

RESOLUCIÓN :

* Dando una forma adecuada a los términos , en función de la posición u ordinal de cada término:

$$\{a_n\}: \frac{1}{3}\ ;\ \frac{3}{5}\ ;\ ....\ ;\ \frac{2(\ )-1}{.......}$$

(numeradores: $2(1)-1$, $2(2)-1$; denominadores: $+2$, $+2$, $+2$)

*Entonces se deduce que el término enésimo será :

$$a_n=\frac{2n-1}{2n-1+2}\rightarrow a_n=\frac{2n-1}{2n+1}$$

RPTA: "B"

PROBLEMA 2 :

Sea $\{a_n\}_{n\in N}$ una sucesión definida por $\{a_n\}_{n\in N}=\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^4;\left(\frac{3}{4}\right)^5,\left(\frac{4}{5}\right)^6;...\right\}$, entonces el n– ésimo término es:

A) $\left(\frac{n}{n+2}\right)^n$ B) $\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+2}$ C) $\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+1}$

D) $\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+3}$ E) $\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^n$

RESOLUCIÓN :

* Analizando cada integrante de cada término, se obtendrá :

$$a_1=\left(\frac{1+1}{2+1}\right)^{3+1}\ ;\ a_2=\left(\frac{2+1}{3+1}\right)^{4+1}\ ;\ a_3=\left(\frac{3+1}{4+1}\right)^{5+1}$$

* Entonces :

$$a_n=\left[\left(\frac{n+1}{...}\right)^{...}\right]\rightarrow a_n=\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+3}$$

RPTA: "D"

PROBLEMA 3 :

Si $n\in N$ y $\{b_k\}_{k\in N}$ es una sucesión definida $\{b_k\}_{k\in N}=\left\{\frac{n^2+2}{n};\frac{n^2+1}{n};n;\frac{n^2-1}{n};...\right\}$ entonces el k –ésimo término es:

A) n^3+1 B) $\frac{n^2+k-3}{n}$ C) n^2-1

D) $\frac{n^2-k+3}{n}$ E) n^2+k+6

RESOLUCIÓN :

* Analizando : $\{b_k\}_{k\in N}=\left\{\frac{n^2+2}{n};\frac{n^2+1}{n};n;\frac{n^2-1}{n};...\right\}$

* Se obtiene :

$$\{b_k\}_{k\in N}=\left\{\frac{n^2+2}{n};\frac{n^2+1}{n};\frac{n^2+0}{n};\frac{n^2-1}{n};...\right\}$$

$$\rightarrow b_k=\frac{n^2+a_k}{n}$$

* Donde : $\{a_k\}_{k\in N}=\{2;1;0;-1\};....$

* Es decir : $a_k=3-k$; $k\in N$

* Luego : $b_k=\frac{n^2+3-k}{n}=\frac{n^2-k+3}{n}$

RPTA: "D"

PROBLEMA 4 :

En la siguiente sucesión :

$\{b_n\}_{n\in N}=\left\{2;\frac{9}{4};\frac{64}{27};\frac{625}{256};.....\right\}$, el término de lugar 20 es :

A) $(20)^{20}$ B) $(21)^{20}$ C) $\left(\frac{10}{21}\right)^{20}$ D) $\left(\frac{21}{20}\right)^{20}$ E) $\left(\frac{21}{20}\right)^{21}$

RESOLUCIÓN :

* Primero determinemos el término general o enésimo , dando una forma adecuada :

$$\{b_n\}=\left\{\frac{2}{1};\frac{3^2}{2^2};\frac{4^3}{3^3};\frac{5^4}{4^4};.....\right\}$$

$$\rightarrow \{b_n\}=\left\{\left(\frac{2}{1}\right)^1;\left(\frac{3}{2}\right)^2;\left(\frac{4}{3}\right)^3;\left(\frac{5}{4}\right)^4;.....\right\}$$

* De donde se nota que : $b_n=\left(\frac{n+1}{n}\right)^n$

* Pero como se pide el término del lugar 20,

entonces hacemos $n = 20$, resultando :

$$b_{20} = \left(\frac{20+1}{20}\right)^{20} = \left(\frac{21}{20}\right)^{20}$$

RPTA: "D"

PROBLEMA 5 :

Determinando si una Sucesión es Monótona. Discutir si son monótonas las sucesiones :

$I) a_n = 3+(-1)^n$ $\quad II) b_n = \dfrac{2n}{1+n}$ $\quad III) c_n = \dfrac{n^2}{2^n - 1}$

RESOLUCIÓN :

I) $\{a_n\}$: 2 ; 4; 2; 4; .... esta sucesión alterna entre 2 y 4, luego no es monótona.

II) Sabemos que $0 < 2 = 0 + 4n + 2n^2 < 2 + 4n + 2n^2$

$$\Rightarrow 2n(2+n) < (1+n)(2n+2) \Rightarrow \frac{2n}{1+n} < \frac{2n+2}{2+n}$$

$$\Rightarrow \frac{2n}{1+n} < \frac{2(n+1)}{1+(n+1)} \Rightarrow b_n < b_{n+1}, \forall n \in Z^+$$

*Luego es monótona, pues cada término es mayor que su predecesor.

III) $\{c_n\}; 1, \frac{4}{3}, \frac{9}{7}, \frac{16}{15}, ...$

*No es monótona porque el segundo término es mayor que el primero , pero menor que el tercero .

PROBLEMA 6 :

Clasificar las siguientes sucesiones :

A) $a_{n+1} = 3a_n, a_1 = 5$

B) $\{a_n\}$ = (parte entera de $\sqrt{n}$)

C) $a_{n+1} = 3 - a_n; a_1 = 1$

D) $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

RESOLUCIÓN :

A) $a_{n+1} - a_n = 3a_n - a_n = 2a_n > 0$, ya que todos sus términos son positivos.

* Entonces : $a_{n+1} - a_n > 0 \rightarrow a_{n+1} > a_n \ \forall n \in N$

→ Esta sucesión es creciente.

B) Esta sucesión es no decreciente puesto que $a_{n+1} > a_n \ \forall n \in N$ lo cual se puede notar en la lista de sus términos. (a_n); 1; 1; 1; 2; 2; 2: ....

C) Esta sucesión no es monótona , puesto que sus términos son : (a_n); 1; 2; 1; 2; 1; 2; ....

$$D) a_{n+1} - a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n\left(\frac{1}{2} - 1\right) = -\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} < 0$$

$$\Rightarrow a_{n+1} - a_n < 0 \rightarrow a_{n+1} < a_n \ \forall n \in N$$

→ Esta sucesión es decreciente

PROBLEMA 7 :

Indicar la sucesión o sucesiones que verifican la relación : $a_n \geq a_{n+1}; \forall n \geq 1$

$I) (3n - 1)$ $\quad II) \left\{\dfrac{n}{3^n}\right\}$ $\quad III) \left\{\dfrac{5n-1}{3n+1}\right\}$

A) Sólo I B) Sólo II C) Sólo III
D) I y II E) II y III

RESOLUCIÓN :

I) $\{a_n\}_{n\in N} = \{3n-1\}$ $n < n+1 \rightarrow 3n < 3(n+1)$

$\rightarrow 3n - 1 < 3(n+1) - 1 \rightarrow a_n < a_{n+1}$

* Luego : $\{a_n\}$ no satisface la condición.

$$II) \{b_n\}_{n\in N} = \left\{\frac{n}{3^n}\right\} \Rightarrow \frac{b_n+1}{b_n} = \frac{\frac{n+1}{3^{n+1}}}{\frac{n}{3^n}} = \frac{n+1}{3n} < 1$$

* Pues : $2n > 2 > 1 \rightarrow 2n + n > 1 + n$

$$\Rightarrow 3n > n + 1 \Rightarrow \frac{n+1}{3n} < 1, \ \forall n \in N$$

$\rightarrow \dfrac{b_{n+1}}{b_n} < 1 \rightarrow b_{n+1} < b_n \rightarrow b_n > b_{n+1}$. Luego $\{b_n\}$, si satisface la condición dada.

$$III) \{c_n\} = \left\{\frac{5n-1}{3n+1}\right\} = \left\{\frac{5}{3} - \frac{8}{3(3n+1)}\right\}$$

* Claramente : $\forall n \in N$

$$3(3n+1) < 3[3(n+1)+1]$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3(3n+1)} > \frac{1}{3[3(n+1)+1]} \Rightarrow -\frac{8}{3(3n+1)} < -\frac{8}{3[3(n+1)+1]}$$

$$\Rightarrow \frac{5}{3} - \frac{8}{3(3n+1)} < \frac{5}{3} - \frac{8}{3[3(n+1)+1]}$$

$\rightarrow c_n < c_{n+1}$. Luego , la sucesión $\{c_n\}$ no satisface la condición dada . → **Sólo II**

RPTA: "B"

PROBLEMA 8 :

Sean $n \in N$ y con respecto a las siguientes sucesiones.

$I) \left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}_{n\geq 1}$ $\quad II) \left\{\dfrac{n}{n-1}\right\}_{n\geq 2}$ $\quad III) \{n^2\}_{n\geq 1}$

La afirmación correcta es:

A) I es acotada y creciente
B) II es acotada y creciente
C) III es acotada y creciente
D) I sólo tiene cota superior
E) III sólo tiene cota superior

RESOLUCIÓN :

I) $\{a_n\}=\left\{\frac{n}{n+1}\right\}=\left\{1-\frac{1}{n+1}\right\}$

* $\forall n\in N: n+1>2\rightarrow 0<\frac{1}{n+1}\leq\frac{1}{2}$

$0>-\frac{1}{n+1}\geq-\frac{1}{2}\rightarrow\{a_n\}$ es acotada

* $a_{n+1}-a_n=1-\frac{1}{n+2}-1+\frac{1}{n+1}$

$\rightarrow a_{n+1}-a_n=\frac{1}{(n+2)(n+1)}>0,\forall n\in N$

$\rightarrow a_{n+1}>a_n\rightarrow\{a_n\}$ es creciente

* Luego: $\{a_n\}$ es acotada y creciente
* *(II)* y *(III)* se puede analizar similarmente

RPTA: "A"

PROBLEMA 9 :

Determinar el valor de verdad de las siguientes afirmaciones :

I) La sucesión $\left\{\frac{n-1}{n}\right\}_{n\in N}$ es acotada .

II) La sucesión $\left\{(-1)^{n-1}(-n)^{-n}\right\}_{n\in N}$ es monótona decreciente .

III) La sucesión $\left\{\frac{n-1}{2n-3}\right\}_{n\in N}$ no es monótona

A)VVF B)VFF C)VFV D)FFF E)VVV

RESOLUCIÓN :

I) $\{a_n\}=\left\{\frac{n-1}{n}\right\}_{n\in N}$; $a_n=1-\frac{1}{n}$

$$n\geq 1\Rightarrow 0<\frac{1}{n}\leq 1\Rightarrow 0>-\frac{1}{n}\geq -1$$

$\Rightarrow 1>1-\frac{1}{n}\geq 0\Rightarrow 1>a_n\geq 0$

$\rightarrow\{a_n\}$ es acotada .... **(VERDADERA)**

II) $\{b_n\}=\left\{(-1)^{n-1}\times(-n)^{-n}\right\}$

$b_n=(-1)^{n-1}\times(-n)^{-n}=(-1)(-1)^n\times(-n)^{-n}$

$\Rightarrow b_n=(-1)\times\left(\frac{1}{n}\right)^n\Rightarrow b_n=\frac{-1}{n^n}$

$\forall n\in N:\ n^n<(n+1)^{n+1}\Rightarrow\frac{1}{n^n}>\frac{1}{(n+1)^{n+1}}$

$\Rightarrow -\frac{1}{n^n}<-\frac{1}{(n+1)^{n+1}}\rightarrow b_n<b_n+1$

$\rightarrow\{b_n\}$ es creciente ....**(FALSA)**

III) $\{c_n\}=\left\{\frac{n-1}{2n-3}\right\}_{n\in N}$

$$c_n=\frac{n-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}}{2n-3}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2(2n-3)}$$

$$\Rightarrow c_{n+1}-c_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2(2n-1)}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2(2n-3)}$$

$$\Rightarrow c_{n+1}-c_n=\frac{-2}{2(2n-1)(2n-3)}<0;\forall n\in N$$

$\rightarrow c_{n+1}<c_n\rightarrow\{c_n\}$ es decreciente

$\rightarrow\{c_n\}$ es monótona ....**(FALSA)**

RPTA: "B"

PROBLEMA 10 :

Determine si son convergentes las sucesiones:

I) $\{a_n\}=\{8+(-1)^n\}$ II) $\{b_n\}=\left\{\frac{n}{3-4n}\right\}$

RESOLUCIÓN :

I) Como $\{a_n\}=\{8+(-1)^n\}$ tiene términos 7 ; 9 ; 7 ; 9 ; .... que oscila entre 7 y 9, no hay límite y la sucesión diverge.

II) Para $\{b_n\}$ podemos dividir por «n» numerador y denominador para obtener

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{3-4n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{3}{n}-4}=-\frac{1}{4}$$

*Luego la sucesión converge a $\left(-\frac{1}{4}\right)$

PROBLEMA 11 :

Si : $\lim_{n\to\infty}a_n=5$; $\lim_{n\to\infty}b_n=-4$; $\lim_{n\to\infty}c_n=\frac{2}{3}$

Halle el valor al cual converge : $d_n=\frac{5a_n+3a_nb_n}{4c_n}$

A) $-\frac{7}{3}$ B)2 C)4 D) $-\frac{105}{8}$ E) 0

RESOLUCIÓN :

$$\lim_{n\to\infty}d_n=\lim_{n\to\infty}\frac{5a_n+3a_nb_n}{4c_n}$$

* Aplicando los teoremas :

$$=\frac{5\lim_{n\to\infty}a_n+3\lim_{n\to\infty}a_n\lim_{n\to\infty}b_n}{4\lim_{n\to\infty}c_n}$$

* Reemplazando :

$$\frac{5(5)+3(5)(-4)}{4\left(\frac{2}{3}\right)}=-\frac{105}{8}$$

RPTA: "D"

PROBLEMA 12 :

Halle el n– ésimo término para la sucesión cuyos primeros términos son $-\frac{2}{1};\frac{8}{2};-\frac{26}{6};\frac{80}{24};-\frac{242}{120};....$ y decidir entonces si converge o no.

RESOLUCIÓN :

* Los numeradores son 3^n-1, el proceso de determinar a_n a partir de la observación de los primeros términos de una sucesión es un ejemplo de razonamiento inductivo.

*Para los denominadores , tenemos :

$$1=1$$
$$2=1\times 2$$
$$6=1\times 2\times 3$$
$$24=1\times 2\times 3\times 4$$
$$120=1\times 2\times 3\times 4\times 5$$

* Lo cual sugiere que los denominadores vienen dados por $n!$. Finalmente, como los signos se alternan, podemos escribir el enésimo término como:

$$a_n=(-1)^n\times\left(\frac{3^n-1}{n!}\right)$$

*Pero para cualquier k fijo : $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{k^n}{n!}=0$

Ello significa que el factorial crece más rapido que cualquier exponencial.

* También si : $\lim\limits_{x\to\infty}|a_n|=0$ entonces : $\lim\limits_{x\to\infty} a_n=0$ para cualquier sucesión $\{a_n\}$

* Luego se deduce que :

$\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3^n-1}{n!}=0=\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ y por tanto $\{a_n\}$ converge a cero.

PROBLEMA 13 :

Sea la sucesión $\{a_n\}_{n\in N}=\left\{\frac{6}{2};\frac{11}{5};\frac{16}{8};\frac{21}{11},....\right\}$, entonces hallar el valor de verdad de las siguientes afirmaciones.

I) La sucesión es creciente

II) El término de lugar 81 es $\frac{203}{121}$

III) La sucesión es acotada

IV) La sucesión es convergente

A)VVVV B)VFVF C)VFFV D)FVFV E)FVVV

RESOLUCIÓN :

$$\{a_n\}_{n\in N}=\left\{\frac{6}{2};\frac{11}{5};\frac{16}{8};\frac{21}{11};...\right\}$$

* Notése que : $a_n=\frac{5n+1}{3n-1}$

I) $a_{n+1}-a_n=\frac{5(n+1)+1}{3(n+1)-1}-\frac{5n+1}{3n-1}$

$$=\frac{5n+6}{3n+2}-\frac{5n+1}{3n-1}=\frac{-8}{(3n+2)(3n-1)}<0$$

$\to a_{n+1}-a_n<0\ \to\ a_{n+1}<a_n$

$\to\{a_n\}$ es decreciente .... (*FALSA*)

II) $a_{81}=\frac{5(81)+1}{3(81)-1}=\frac{406}{242}=\frac{203}{121}$ .... (VERDADERA)

III) Notése que : $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5n+1}{3n-1}=\frac{5}{3}$

$\to\{a_n\}$ es convergente; por propiedad, toda sucesión convergente es acotada. ....(*VERDADERA*)

IV) $\{a_n\}$ es convergente.................(*VERDADERA*)

RPTA: "E"

PROBLEMA 14 :

Estudiar la convergencia de la sucesión :

$$\left\{\frac{n^2+2n-1}{3n^2+n+2}\right\}$$

RESOLUCIÓN :

* En este caso : $a_n=\frac{n^2+2n-1}{3n^2+n+2}$

* Se puede escribir como :

$$a_n=\frac{n^2+2n-1}{3n^2+n+2}=\frac{n^2\left(1+\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}\right)}{n^2\left(3+\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}\right)}=\frac{1+\frac{2}{3}-\frac{1}{n^2}}{3+\frac{1}{n}+\frac{2}{12}}$$

* El numerador converge a 1 y el denominador converge a 3 , por lo tanto a_n converge a $1/3$, lo que se escribe como $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+2n-1}{3n^2+n+2}=\frac{1}{3}$

PROBLEMA 15 :

Sea la sucesión $\{a_n\}=\left\{\frac{2}{2};\frac{8}{6};\frac{18}{12};\frac{32}{20};....\right\}$. Si los valores de esta sucesión se encuentran en el

interevalo $[a ; b\rangle$ siendo «a» el mayor valor posible y «b» el menor valor posible, entonces el valor de $T = b - a$ es:

A)1 B)3/2 C)5/2 D) 3 E) 4

RESOLUCIÓN :

* Analizando se obtendrá : $\{a_n\}=\left\{\frac{1}{1};\frac{4}{3};\frac{9}{6};\frac{16}{10};....\right\}$

1 ;4 ;9 ;16 ;.........son los números cuadrangulares

$(n^2 ; n\in N)$

1; 3 ; 6 ; 10 ; ...... son los números triangulares

$$\left(\frac{n(n+1)}{2};n\in N\right)$$

* Luego : $a_n=\dfrac{n^2}{\dfrac{n(n+1)}{2}}=\dfrac{2n}{n+1}$

$\forall n\in N : 1\le n \wedge n<n+2$

$\rightarrow n+1<n+n \wedge n+n<n+n+2$

$\rightarrow 1\le\dfrac{2n}{n+1} \wedge \dfrac{2n}{n+1}<2 \rightarrow 1<a_n \wedge a_n<2$

$\rightarrow 1<a_n<2$

* Luego : $b=2 \wedge a=1 \rightarrow T=b-a=1$

RPTA: "A"

PROBLEMA 16 :

Si $\{a_n\}_{n\in N}$ es una sucesión definida por $\{a_n\}=\left\{\dfrac{9(2^n+4(3^n))}{9(2^{n-1})+4(3^{n-1})}\right\}_{n\ge 1}$, entonces el valor de convergencia de la sucesión $\{a_n\}$ es:

A)1 B) $\frac{3}{2}$ C)2 D) 3 E)Es divergente

RESOLUCIÓN :

* Acomodando el término a_n así :

$$a_n=\frac{18(2^{n-1})+12(3^{n-1})}{9(2^{n-1})+4(3^{n-1})}$$

$$\rightarrow a_n=\frac{3^{n-1}\left[18\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}+12\right]}{3^{n-1}\left[9\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}+4\right]}\rightarrow a_n=\frac{18\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}+12}{9\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}+4}$$

* Como : $\lim\limits_{n\to\infty} a^n=0, \forall a\in\langle -1;1\rangle$

* Se tiene :

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{18\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}+12}{9\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}+4}\Rightarrow\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{18(0)+12}{9(0)+4}=3$$

* Luego : $\{a_n\}$ converge a 3

RPTA: "D"

PROBLEMA 17 :

El valor de convergencia de la siguiente sucesión: $\left\{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+\frac{1}{2}}\right)\right\}_{n\in N}$ es:

A)1/3 B)1/4 C)1/2 D) 1 E)2

RESOLUCIÓN :

* De : $\{a_n\}_{n\in N}=\left\{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+\frac{1}{2}}\right)\right\}_{n\in N}$

* Analicemos :

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left[\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+\frac{1}{2}}\right)\right]$$

$\rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n+\frac{1}{2}}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ Dividiendo entre $\sqrt{n}$

$$\rightarrow \lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{\sqrt{n+\frac{1}{2}}}{\sqrt{n}}}{\dfrac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n}}}$$

$$\rightarrow \lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{2n}}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}=\frac{\sqrt{1+0}}{\sqrt{1+0}+1}\rightarrow \lim_{n\to\infty}a_n=\frac{1}{2}$$

$\rightarrow$ La sucesión $\{a_n\}$ converge a 1/2

RPTA: "C"

PROBLEMA 18 :

Sea la sucesión $\{u_n\}$ donde $u_{n-1}=\sqrt{k+u_n}$, $k>0$. Suponiendo que la sucesión es convergente, calcular el valor al cual converge.

A) $\dfrac{1+\sqrt{1+4k}}{2}$ B) $\dfrac{1+\sqrt{1-4k}}{2}$ C) $\dfrac{1-\sqrt{1+4k}}{2}$

RESOLUCIÓN:

* Si es convergente : $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=L$

* También : $\lim\limits_{n\to\infty}u_{n+1}=L$

$\lim\limits_{n\to\infty}u_{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{k+u_n}\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}u_{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{k+u_n}$

$\Rightarrow L=\sqrt{k+L}\ ;\ L>0\rightarrow L^2=k+L$

$\Rightarrow L=\dfrac{1+\sqrt{1+4k}}{2}\rightarrow\{u_n\}$ converge a $\dfrac{1+\sqrt{1+4k}}{2}$

RPTA: "A"

PROBLEMA 19 :

Si $\{a_n\}_{n\in N}$ es una sucesión tal que $a_1=\sqrt[3]{60}$ y $a_{n+1}=\sqrt[3]{60+a_n};\forall n\geq 1$, entonces el valor de convergencia de la sucesión $\{a_n\}_{n\in N}$ es:

A)2 B)5/2 C)4 D) 8 E)16

RESOLUCIÓN :

* Considerando que $\{a_n\}$ es convergente
* Sea: $L=\lim\limits_{n\to\infty}a_n\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}a_{n+1}=L$
* Como: $a_{n+1}=\sqrt[3]{60+a_n}$

$\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}a_{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[3]{60+a_n}$

$\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}a_{n+1}=\sqrt[3]{60+\lim\limits_{n\to\infty}a_n}$

$\Rightarrow L=\sqrt[3]{60+L}\rightarrow L^3=60+L\ \Rightarrow L=4$

RPTA: "C"

PROBLEMA 20 :

Sea $\{a_n\}_{n\in N}$ una sucesión tal que: $a_1=3$ y $a_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(a_n+\dfrac{25}{a_n}\right)\forall n\in N$, entonces el valor de convergencia de la sucesión $\{a_n\}_{n\in N}$ es:

A)5 B)3 C)2 D)0 E)12

RESOLUCIÓN :

* Como: $a_1=3>0\wedge a_n>0,\forall n\in N$
* Sea $L=\lim\limits_{n\to\infty}a_n\rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}a_{n+1}=L$

$\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1})=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2}\left(a_n+\dfrac{25}{a_n}\right)$

$\rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}a_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(\lim\limits_{n\to\infty}a_n+\dfrac{25}{\lim\limits_{n\to\infty}a_n}\right)$

$\Rightarrow L=\dfrac{1}{2}\left(L+\dfrac{25}{L}\right)\wedge L>0\Rightarrow 2L=L+\dfrac{25}{L}\Rightarrow L^2=25\Rightarrow L=5$

RPTA: "A"

PROBLEMA 21:

Sea $\{a_n\}_{n\in N}$ una sucesión tal que $a_1=\sqrt[3]{6}$ y $a_{n+1}=\sqrt[3]{6+7a_n}$, entonces el valor de convergencia de la sucesión $\{a_n\}$ es:

A)1 B)2 C)3 D) 5 E)6

RESOLUCIÓN:

* Como la sucesión es convergente, entonces: $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=L$, entonces
* En la reglas de recurrencia :

$\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1})=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{6+7a_n}\right)\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}a_{n+1}=\sqrt[3]{6+7\lim\limits_{n\to\infty}a_n}$

$\rightarrow L=\sqrt[3]{6+7L}\ \rightarrow\ L^3-7L-6=0$

* Además, nótese que $a_n>0,\ \forall n\in N\rightarrow L>0$

$$(L+1)(L+2)(L-3)=0$$

* De donde : $L=3$

RPTA: "C"

PROBLEMA 22 :

Sea la sucesión $\{a_n\}_{n\in N}$ tal que $a_1=2;\ a_2=3$ y $a_n=3a_{n-1}-2a_{n-2},\ \forall n>2$. La afirmación correcta es:

A) La sucesión $\{a_n\}_{n\in N}$ converge a un valor finito

B) $a_n>129;\ \forall n\geq 9$ C) $a_n<100;\ \forall n>5$

D) $a_n<2^n+1;\ \forall n\in N$ E) $a_n<1000,\ \forall n\in N$

RESOLUCIÓN :

* De la regla de recurrencia ya se deduce que:

$$a_n-a_{n-1}=2(a_{n-1}-a_{n-2})$$

* Sea: $b_{n-1}=a_n-a_{n-1}\ \rightarrow b_{n-2}=a_{n-1}-a_{n-2}$
* Reemplazando : $b_{n-1}=2\times b_{n-2}\ \wedge b_1=a_2-a_1=1$

$$\rightarrow b_{n-1}=2^{n-2}\times b_1\rightarrow b_{n-1}=2^{n-2}$$

* Luego: $a_n-a_{n-1}=2^{n-2}$

$\rightarrow\ a_n=2(2^{n-2}-1)+\underbrace{a_2}_{3}\ \rightarrow\ a_n=2^{n-1}+1$

* Si $n=8: a_8=2^7+1=129\rightarrow\forall n\geq 9: a_n>129$

RPTA: "B"

PROBLEMA 23 :

Si $\{a_n\}_{n\in N}$ es una sucesión tal que $a_0=2$; $a_1=3$ y $a_{k+1}=3a_k-2a_{k-1},\ \forall n\in N$, entonces el valor de convergencia de la sucesión $\{b_n\}_{n\in N}$ tal que $b_n=\dfrac{a_n}{2^n}$ es:

A)5/2 B)2 C)1 D) 1/2 E)1/3

RESOLUCIÓN :

*De la regla de correspondencia , se deduce que:

$$a_{n+1} - a_n = 2(a_n - a_{n-1}) \quad ,$$

* Sea : $\{c_n\}/c_n = a_n - a_{n-1}$

$\rightarrow c_1 = a_1 - a_0 = 1 \wedge c_{n+1} = a_{n+1} - a_n$

$\rightarrow c_{n+1} = 2c_n \rightarrow c_n = 2^{n-1} \times c_1 \rightarrow c_n = 2^{n-1}$

* Luego : $a_n - a_{n-1} = 2^{n-1}$

$\rightarrow a_1 - a_0 = 2^0$

$a_2 - a_1 = 2^1$

$a_3 - a_2 = 2^2$

$\vdots$

$a_n - a_{n-1} = 2^{n-1}$

(⊕ Sumando miembro a miembro)

$a_n - a_0 = 2^0 + 2^1 + 2^2 + ... + 2^{n-1}$

$$\rightarrow a_n - a_0 = 2^n - 1 \rightarrow a_n = 2^n + 1$$

* Con lo cual : $b_n = \frac{a_n}{2^n} = \frac{2^n+1}{2^n} \rightarrow \quad b_n = 1 + 2^{-n}$

$\rightarrow Lim\ b_n = Lim\ (1 + 2^{-n}) = 1$

$\rightarrow \{b_n\}$ converge a 1

RPTA: "C"

PROBLEMA 24 :

Sea la sucesión definida mediante: $a_1 = \sqrt{2}$

$a_n = \sqrt{2 + a_{n-1}}$. Podemos entonces afirmar que:

A) a_n converge a 0 *B) a_n es decreciente*
C) a_n está acotada por 1
D) a_n no converge *E) a_n converge a 2*

RESOLUCIÓN :

* Si la sucesión $\{a_n\}$ converge entonces:

$Lim\ a_n = L = Lim\ a_{n-1} \rightarrow Lim\ a_n = Lim\sqrt{2 + a_{n-1}}$

$$\rightarrow Lim\ a_n = \sqrt{Lim\ 2 + Lim\, a_{n-1}}$$

$$\rightarrow L = \sqrt{2 + L} \Rightarrow L^2 - L - 2 = 0$$

$\rightarrow (L + 1)\ (L - 2) = 0 \Rightarrow L = -1 \wedge L = 2$

* Como L > 0, la sucesión converge a 2.

RPTA: "E"

PROBLEMA 25 :

Sean las sucesiones : $b_{n+1} = b_n + 4$ con $b_1 = 5$

$c_{n+1} = -3c_n$ con $c_1 = 5;\ n \in N$

Entonces el valor de $\frac{b_n}{c_n}$ para n suficientemente grande, se aproxima a:

A) $\frac{4}{3}$ B) $-\frac{4}{3}$ C) $\frac{3}{4}$ D) 0 E) 1

RESOLUCIÓN :

* De: $b_{n+1} = b_n + 4$

$n = 1 : b_2 = b_1 + 4 = 5 + 4$

$n = 2 ; b_3 = b_2 + 4 = 5 + 4 + 4$

$n = 3 : b_4 = b_3 + 4 = 5 + 4 + 4 + 4$

....

....

....

$\rightarrow b_n = b_{n-1} + 4 = 5 + 4(n-1) \Rightarrow b_n = 4n + 1$

* De: $c_{n+1} = -3c_n$

$n = 1 : c_2 = -3 \times 5$

$n = 2 : c_3 = +3 \times 3 \times 5$

$n = 3 : c_4 = -3 \times 3 \times 3 \times 5$

....

....

....

$$\Rightarrow c_n = (-3)^{n-1} \times 5 \Rightarrow c_n = -\frac{5}{3}(-3)^n$$

* Nos piden $\left(\frac{b_n}{c_n}\right)$ para n grande

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left(\frac{b_n}{c_n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{4n+1}{-\frac{5}{3}(-3)^n}\right) = -\frac{12}{5}\underbrace{\lim_{n\to\infty}\frac{n}{(-3)^n}}_{0} = 0$$

RPTA: "D"

PROBLEMA 26 :

Si $\{a_n\}_{n\in N}$ es una sucesión tal que $a_n = \left(1 + \frac{3}{n}\right)^{8n}$, entonces el valor de convergencia de la sucesión $\{a_n\}$ es :

A) $e^{1/8}$ B) $e^{4/3}$ C) $e^{8/3}$ D) e^2 E) e^{24}

RESOLUCIÓN :

* Recuerda que: $\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$

* Más general: $\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{an}\right)^{an} = e,\ a > 0$

* Luego:

$$Lim\ a_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{3}{n}\right)^{8n} = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{\frac{n}{3}}\right)^{\frac{n}{3}\times 24} = \left[\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{\frac{n}{3}}\right)^{\frac{n}{3}}\right]^{24} = e^{24}$$

RPTA: "E"

PROBLEMA 27:

Si $\{a_n\}_{n\in N}$ es una sucesión definida por :

$$\{a_n\}_{n\in N}=\left\{\left(\frac{3}{2}\right)^2;\left(\frac{11}{10}\right)^{10};\left(\frac{31}{30}\right)^{30};\left(\frac{69}{68}\right)^{68};...\right\},$$

entonces el valor de convergencia es:

A) $\frac{2}{e}$ B) $4e^{-3}$ C) $8e^{-1}$ D) e E) $\frac{3}{5}e$

RESOLUCIÓN :

* Dando al enésimo una forma conocida :

$$\{a_n\}_{n\in N}=\left\{\left(\frac{3}{2}\right)^2;\left(\frac{11}{10}\right)^{10};\left(\frac{31}{30}\right)^{30};\left(\frac{69}{68}\right)^{68};.....\right\}$$

$$\Rightarrow\{a_n\}=\left\{\left(1+\frac{1}{2}\right)^2;\left(1+\frac{1}{10}\right)^{10};\left(1+\frac{1}{30}\right)^{30};\left(1+\frac{1}{68}\right)^{68};...\right\}$$

$$\Rightarrow\{a_n\}=\left\{\left(1+\frac{1}{b_1}\right)^{b_1};\left(1+\frac{1}{b_2}\right)^{b_2};\left(1+\frac{1}{b_3}\right)^{b_3};\left(1+\frac{1}{b_4}\right)^{b_4};...\right\}$$

$$\Rightarrow a_n=\left(1+\frac{1}{b_n}\right)^{b_n}$$

* Donde: $b_n\to\infty$, cuando $n\to\infty$

* Luego: $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{bn\to\infty}\left(1+\frac{1}{b_n}\right)^{b_n}\to\lim\limits_{n\to\infty}a_n=e$

RPTA: "D"

PROBLEMA 28 :

Calcular :

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{\frac{8}{3}}+\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{\frac{16}{5}}+....+\sqrt[3]{\frac{4n}{n+1}}}{\sqrt[3]{2}n+\sqrt[3]{3}}$$

A) 1 B) $\sqrt{2}$ C) $\sqrt[3]{4}$ D) $\sqrt[3]{2}$ E) 2

RESOLUCIÓN :

*Como la sucesión $\sqrt[3]{\frac{4n}{n+1}}$ converge a $\sqrt[3]{4}$

*Pues $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[3]{\frac{4n}{n+1}}=\sqrt[3]{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4}{1+\frac{1}{n}}}=\sqrt[3]{4}$

***Entonces se puede aplicar el teorema de la media aritmética, dividiendo al numerador y denominador por n.**

$$\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{\frac{8}{3}}+\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{\frac{16}{5}}+....+\sqrt[3]{\frac{4n}{n+1}}}{n}\right]\times\left[\frac{n}{\sqrt[3]{2}n+\sqrt[3]{3}}\right]$$

$$=\left[\lim_{n\to\infty}\sqrt[3]{\frac{4n}{n+1}}\right]\times\left[\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n}{n}}{\frac{\sqrt[3]{2}n+\sqrt[3]{3}}{n}}\right]=[\sqrt[3]{4}]\times\left[\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right]=\sqrt[3]{2}$$

RPTA: "D"

PROBLEMA 29 :

Calcular : $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!}$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 0 E) $\sqrt{2}$

RESOLUCIÓN:

* De : $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{(1)(2)(3)...(n)}$

* Podemos aplicar el teorema de la media geométrica: $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$

RPTA: "A"

PROBLEMA 30 :

Calcular : $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\sqrt{2}\times\sqrt[3]{3}\times\sqrt[4]{4}\times\sqrt[5]{5}...\times\sqrt[n+1]{n+1}}$

A) 1 B) 2 C) 3 D) $\sqrt{2}$ E) 0

RESOLUCIÓN:

*Se observa que $a_1=\sqrt[2]{2}$, $a_2=\sqrt[3]{3}$, $a_3=\sqrt[4]{4}$,....

$$a_n=\sqrt[n+1]{n+1}\Rightarrow\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}(n+1)^{\frac{1}{n+1}}=1$$

*Luego por el teorema de la media geométrica se tiene : $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\sqrt{2}\times\sqrt[3]{3}\times\sqrt[4]{4}...\sqrt[n+1]{n+1}}=1$

RPTA: "A"

PROBLEMA 31:

Dada la sucesión: $\{a_n\}:a_1=\sqrt{2};\ a_n=\sqrt{2+a_{n-1}},n\geq 2$ ¿es convergente? en caso afirmativo indique a que valor converge.

RESOLUCIÓN :

* Extendiendo la sucesión se tiene :

$$\{a_n\}:\sqrt{2};\sqrt{2+\sqrt{2}};\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}};........$$

I) Veamos si es monótona :

$$a_1=\sqrt{2}<\sqrt{2+\sqrt{2}}=a_2$$

$$a_2=\sqrt{2+\sqrt{2}}<\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}=a_3$$

⋮ ⋮ ⋮

* Probemos que es creciente por el método de inducción matemática.
* supongamos que : $a_{n-1}<a_n\forall n$ ....(*)
* Debemos demostrar : $a_n<a_{n+1}\forall n$
* Sabemos que : $a_n=\sqrt{2+a_{n-1}}$

* Luego : $a_{n+1} = \sqrt{2+a_n}$
* Nótese que : $a_{n+1}^2 - a_n^2 = a_n - a_{n-1} > 0$, de (*)

$\rightarrow a_{n+1}^2 > a_n^2 ; a_n > 0 \forall n \quad \rightarrow a_{n+1} > a_n ; \forall n$

$\rightarrow \{a_n\}$ es creciente, esto implica monótona

II) Veamos si es acotada :

* De lo anterior hemos probado que $\{a_n\}$ es creciente.
* Luego es válido proponer :

$$a_{n-1} < a_n$$

$$\rightarrow a_{n-1} + 2 < a_n + 2 \rightarrow \underbrace{\sqrt{a_{n-1}+2} < \sqrt{a_n + 2}}_{a_n}$$

$\rightarrow a_n^2 < a_n + 2 \rightarrow a_n^2 \times a_n - 2 < 0$

$\rightarrow (a_n - 2)(a_n + 1) < 0 \rightarrow -1 < a_n < 2$

$\rightarrow \{a_n\}$ es acotada

* Luego hemos probado que $\{a_n\}$ es monótona y acotada entonces $\{a_n\}$ es convergente.

III) Veamos a donde converge :

* Sabemos que: $a_n = \sqrt{2+a_{n-1}}$
* Tomando límite: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{2+a_{n-1}}$

$$\rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{2 + \lim_{n\to\infty} a_{n-1}}$$

* Ahora, supongamos: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$
* Por teorema: $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = L$
* Luego, se tiene: $L = \sqrt{2+L} \rightarrow L^2 = 2 + L$

$\rightarrow L^2 - L - 2 = 0 \rightarrow (L-2)(L+1) = 0$

$\rightarrow L = 2 \vee L = -1$

* L es único, como $\{a_n\}$ es una sucesión creciente y de términos positivos tomamos $L = 2$

$$\therefore \{a_n\} \text{ converge a } 2$$

PROBLEMA 32 :

Calcular :

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$$

RESOLUCIÓN :

* Consideremos lo pedido a: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, luego:
* Dado que:

$$\underbrace{\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} < \frac{1}{\sqrt{n^2+n-1}} < \dots < \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} < \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}}_{\text{"n" términos}}$$

$$\rightarrow \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} < a_n < \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}, \forall n \in \mathbb{N}$$

* Además:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} = 1$$

*Finalmente, por el principio del encaje :

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1$$

PROBLEMA 33:

Converge o diverge : $\left\{\dfrac{n^n}{2^n n!}\right\}_{n\geq 1}$

RESOLUCIÓN :

* Utilicemos el criterio de la razón :

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\dfrac{(n+1)^{n+1}}{2^{n+1}(n+1)!}}{\dfrac{n^n}{2^n n!}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^n}{2n^n}$$

$= \dfrac{1}{2}\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = \dfrac{e}{2}$, pero $\frac{e}{2} > 1$, entonces la sucesión diverge.

PRIMERA PRACTICA DIRIGIDA

01 Dada la sucesión:

$$\{a_n\} = \{1; 15; 53; 127; \dots\}$$

el valor de $a_{10} - a_9$ es:

A) 541 B) 542 C) 543 D) 545 E) 547

02 Calcular el término de lugar doce en la siguiente sucesión:

$$\{4; 9; 18; 33; 58; \dots\}$$

A) 4241 B) 4242 C) 4243 D) 4 341 E) 4 342

03 Calcular el término de lugar cien en la siguiente sucesión: $\left\{\dfrac{4}{5}; \dfrac{7}{9}; \dfrac{10}{15}; \dfrac{13}{23}; \dots\right\}$

A) $\dfrac{301}{10101}$ B) $\dfrac{300}{10102}$ C) $\dfrac{301}{10103}$ D) $\dfrac{305}{10104}$ E) $\dfrac{304}{10105}$

04 Sea la sucesión $\{a_n\} / a_1 = 1; a_2 = 2$ y además

$a_{n+2} = \dfrac{1}{2}(a_{n+1} + a_n), \forall\ n \in Z^+$.

Calcular el valor de: $H = \dfrac{a_{2000} - a_{1999}}{a_{2005} - a_{2004}}$

A) -2 B) 4 C) -8 D) 16 E) -32

05 Se define la sucesión:

$$\{a_n\}=\left\{2;\ \frac{11}{8};\ \frac{7}{6};\ \frac{17}{16};\ ...\right\}$$

¿A partir de qué lugar los términos de la sucesión $\{a_n\}$ son menores que $\frac{4}{5}$?

A) 14 B) 20 C) 21 D) 26 E) 25

06 Sea la sucesión:

$$\left\{\frac{(-2)^n+3^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}}\right\}$$

Encontrar el punto hacia el cual esta converge.

A) $\frac{2}{3}$ B) 1 C) 3 D) $\frac{1}{3}$ E) 2

07 Dada la sucesión $\{a_n\}$, tal que:

$$a_n=\begin{cases}\dfrac{5n^2-1}{2n^2+3};\text{si } n \text{ es par}\\ \dfrac{\lambda n+1}{4n+3};\text{ si } n \text{ es impar}\end{cases}$$

Si dicha sucesión es convergente, calcular:

$$E=1+\lambda+\lambda^2+\lambda^3$$

A) 15 B) 156 C) 400 D) 820 E) 1 111

08 Dada la sucesión:

$$\{a_n\}=\left\{\frac{1}{8};\ \frac{3}{12};\ \frac{5}{16};\ \frac{7}{20};...\right\}$$

y sea L el valor límite de esta sucesión, ¿a partir de qué término de la sucesión, dicho término se acerca tanto a L que la distancia entre ellos es menor que $0,01$?

A) 71 B) 72 C) 73 D) 74 E) 75

09 Calcular el valor al cual converge la sucesión $\{a_n\}$, tal que:

$$a_n=\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+...+\frac{1}{n^2+3n+2}$$

A) 0,2 B) 0,4 C) 0,5 D) 1 E) 1,3

10 Sea la sucesión $\{a_n\}$: $a_n=\dfrac{2n-3}{8n+1}$

Calcular el número de puntos que caen fuera del intervalo abierto

$$\left]L-\frac{1}{100};\ L+\frac{1}{100}\right[,\text{donde } L=Lim\, a_n$$

A) 28 B) 30 C) 40 D) 41 E) Infinitos puntos

11 La siguiente sucesión:

$$\{a_n\}/a_n=\left(\frac{2+2n+n^2}{1+2n+n^2}\right)^{n^2+2n}$$

converge a:

A) 1 B) e C) e^{-1} D) 2e E) 3e

12 $\{S_n\}$ es una sucesión definida por:

$$\{a_n\}=\left\{\sqrt[n]{a^n+b^n}\right\} n\in N$$

Datos:

I) $a>0 \wedge b>0$

II) $0<b<a$

III) $0<a<b$

Para que el valor de convergencia de la sucesión $\{a_n\}$ sea "b":

A) Es suficiente el dato I y no los datos II y III.
B) Es suficiente el dato II y no los datos I y III.
C) Es suficiente el dato III y no los datos I y II.
D) Es suficiente utilizar los datos I y II.
E) Falta más datos.

13 Indicar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

( ) $\{a_n\}$: $a_n=\dfrac{1-3n}{1+n}$, es acotada.

( ) $\{b_n\}\cdot b_n=\dfrac{(-1)^n}{n^2+1}$, es acotada.

( ) $\{c_n\}$: $c_n=\dfrac{n^2}{2n+1}$, es acotada inferiormente, siendo su cota inferior $\dfrac{1}{2}$.

A) FFF B) VVF C) VFV D) FFV E) VFF

14 Sea la sucesión: $\{a_n\}/a_n=\dfrac{nCos(n^2+1)}{n^3+2}$

Dicha sucesión converge a:

A) 3 B) 2 C) $\frac{3}{2}$ D) $\frac{2}{3}$ E) 0

15 Demostrar que la sucesión $\{x_n\}$, tal que:

$$x_1=\sqrt{3};\ x_n=\sqrt{3x_{n-1}};\ n\geq 2$$

es convergente, en caso afirmativo, determine el valor al cual converge.

A) 3 B) 1 C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{1}{4}$ E) Es oscilante

16 Definimos la sucesión $\{a_n\}$ recursivamente:

$$a_n=\sqrt{6+a_{n-1}};\ \forall\, n>1 \wedge a_1=\sqrt{6}$$

luego indique la veracidad (V) o falsedad (F) de las proposiciones:

( ) $\{a_n\}$ es monótona

( ) $\{a_n\}$ es acotada

( ) $\{a_n\}$ es convergente

A) FVV B) VFF C) FFF D) FVF E) VVV

17 A qué valor converge la sucesión $\{a_n\}$ definida por:

$$a_n = \frac{5^{n+2}}{(n+1)!}$$

A) 5 B) 1 C) 0 D) -1 E) -5

18 Calcular el valor al cual converge la sucesión $\{a_n\}$, tal que: $a_n = \sqrt[n]{n}$

A) 1 B) 0 C) 2 D) $\sqrt{2}$ E) $\sqrt{e}$

19 Sea la sucesión $\{a_n\}$, tal que:

$$a_n = \sqrt[n]{\frac{2}{5} \times \frac{11}{17} \times \frac{26}{37} \cdots\cdots\cdots \frac{3n^2-1}{4n^2+1}}$$

Dicha sucesión converge a:

A) 0,4 B) 0,5 C) 0,65 D) 0,75 E) 1,25

20 Dada la siguiente sucesión $\{a_n\}$, tal que:

$a_1 = 3 \wedge a_2 = \frac{7}{3}$, además:

$$3a_{n+2} = 4a_{n+1} - a_n;\ \forall n \in Z^+$$

con respecto a dicha sucesión podemos afirmar que:

A) Converge a 0 B) Converge a 1 C) Converge a 2 D) Converge a 3 E) Diverge

SEGUNDA PRACTICA DIRIGIDA

01 Si $\{b_n\}$ es una sucesión definida por $\{b_n\}_{n\in N} = \left\{3; 4; \frac{27}{5}; \frac{48}{7}; \frac{75}{9}; \ldots\right\}$, entonces el n-ésimo término es:

A) $\frac{2n^2}{3n-1}$ B) $\frac{3n}{2n^2-1}$ C) $\frac{2n^2}{3n+1}$ D) $\frac{3n^2}{2n-1}$ E) $\frac{3n^2-1}{2n}$

02 Si $\{a_n\}_{n\in N}$ es una sucesión definida por $\{a_n\}_{n\in N} = \left\{\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{3}{4}; \frac{3}{2}; \frac{15}{4}, \ldots\right\}$ entonces el n- ésimo término es:

A) $\frac{n^2+1}{n}$ B) $\frac{(n+1)!}{2^n}$ C) $\frac{n^3+n}{n+1}$ D) $\frac{n^n}{1+2^n}$ E) $\frac{n!}{2^n}$

03 Si $\{a_n\}_{n\in N}$ es una sucesión definida por $\{a_n\}_{n\in N} = \left\{1; 2; \frac{13}{4}; 5; \frac{242}{32}; \ldots\right\}$ entonces el término de lugar 8 es:

A) $\frac{128}{3}$ B) $\frac{435}{12}$ C) $\frac{205}{8}$ D) $\frac{120}{5}$ E) $\frac{155}{7}$

04 En la siguiente sucesión :

$\{a_n\}_{n\in N} = \left\{\frac{1}{3}; \frac{7}{4}; \frac{17}{5}; \frac{31}{6}; \ldots\right\}$, el término de lugar 8 es:

A) $\frac{137}{5}$ B) $\frac{127}{10}$ C) $\frac{117}{5}$ D) $\frac{117}{12}$ E) $\frac{116}{15}$

05 Considere la siguiente sucesión $\{a_n\}_{n\in N}$ definida por $\{a_n\}_{n\in N} = \left\{\frac{7}{3}; \frac{9}{6}; \frac{11}{9}; \frac{13}{12}; \ldots\right\}$. ¿A partir de qué lugar los términos de la sucesión son menores que $\frac{3}{4}$?

A) 20 B) 21 C) 22 D) 23 E) 24

06 Se define la sucesión $\{a_n\}_{n\in N}$ de la siguiente forma: $a_1 = 2; a_2 = \frac{19}{9};\ a_n = \frac{6n+9}{3n+1}, \forall n \geq 3$

¿Qué elementos de la sucesión cumplen la condición $|a_n - 2| < \frac{1}{2}$?

A) Todos los elementos
B) Todos los elementos a partir de a_3
C) Solamente a_1 y a_2
D) Todos los elementos excepto a_3 y a_4
E) Ningún elemento

07 Determinar el valor de verdad de las afirmaciones siguientes:

I) $\left\{\frac{3n - \pi n^2 - \pi}{3(n^2+1)} + \frac{\pi}{3}\right\}_{n\in N}$ es creciente

II) $\left\{\frac{(-1)^n}{16n^2+1}\right\}_{n\in N}$ es acotada

III) $\{(-3)^n + 3^n\}_{n\in N}$ es no decreciente

A) FVV B) VVF C) VFF D) FVF E) FFF

08 Si $\{a_n\}_{n\in N}$ es una sucesión tal que $a_n = \frac{n^2+1}{n^2+n+1}$, entonces indicar el valor de verdad de las siguientes afirmaciones:

I) $\{a_n\}_{n\in N}$ converge a un valor menor que *1*

II) $\forall n \in N : a_n \in [0;1]$

III) Si $n > 99$ entonces $|a_n| > 0,99$

A)FVV *B)VFV* *C)FFV* *D)VVF* *E)FVF*

09 Se definen las siguientes proposiciones lógicas:

p : Si $\{a_n\}$ es acotada, entonces la sucesión es convergente

q : Si $\{a_n\}$ es creciente, entonces la sucesión no es convergente

r : Si $\{a_n\}$ es no decreciente, entonces la sucesión puede converger

t : si $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ son convergentes, entonces $\{a_n + b_n\}$ es también convergente

Si M es el número de proposiciones lógicas verdaderas y N es el número de proposiciones falsas, entonces la relación correcta entre los valores de M y N es:

A) $M>N$ *B)* $M<N$ *C)* $M=N$
D) $4M + N = 16$ *E)* $3N = M$

10 Indicar el valor de verdad de las siguientes afirmaciones:

I) La sucesión $\left\{Log_2\left(\frac{n+1}{n}\right)\right\}_{n\in N}$ es decreciente

II) La sucesión $\left\{\frac{n^2}{n+1}\right\}_{n\in N}$ es creciente

III) La sucesión $\left\{(-1)^n/\sqrt{n}\right\}_{n\in N}$ es monótona

A)VFV *B)VFF* *C)FVV* *D) VVV* *E)VVF*

11 Indicar el valor de verdad de las siguientes afirmaciones :

I) La sucesión $\left\{(-1)^{2n+1}\right\}_{n\in N}$ es acotada

II) La sucesión $\left\{\left(-\frac{1}{3}\right)^{n^n-1}\right\}_{n\in N}$ está acotada

III) La sucesión $\left\{(-2)^{n+1}\right\}_{n\in N}$ no está acotada

A) VVV *B)VFF* *C)FVV* *D) FFF* *E)FVF*

12 Si $\{a_n\}_{n\in N}$ es una sucesión cuyos elementos cumplen las siguientes condiciones:

$$a_1 = 1$$
$$a_2 = 2$$
$$\vdots$$
$$a_n = \frac{1}{2}(a_{n-2} + a_{n-1}), \forall n > 2$$

entonces el valor de $|a_{101} - a_{100}|$ es:

A) 2^{-97} *B)* 2^{-98} *C)* 2^{-99} *D)* 2^{-100} *E)* 2^{-101}

13 Indicar el valor de verdad de las siguientes afirmaciones:

I) La sucesión $\left\{\frac{3^n + 2^{n+1}}{3^{n+1} + 2^n}\right\}_{n\in N}$ es decreciente

II) La sucesión $\left\{\frac{(-1)^n\,13n}{n+1}\right\}_{n\in N}$ es convergente

III) La sucesión $\left\{\left(\frac{6n+1}{3n+2}\right)^{-n^2}\right\}_{n\in N}$ es divergente

A)VVV *B)VFV* *C)VFF* *D) FFF* *E)FVF*

14 Sea $\{b_n\}_{n\in N}$ una sucesión definida por $\{b_n\}_{n\in N} = \left\{\frac{5}{3};\frac{7}{6};\frac{9}{9};\frac{11}{12};...\right\}$, entonces el valor de convergencia es:

A) 0 *B)* $\frac{1}{3}$ *C)* $\frac{2}{3}$ *D)* 1 *E)* $\frac{3}{2}$

15 Si $\{a_n\}_{n\in N}$ es una sucesión definida por $\{a_n\}_{n\in N} = \left\{1;\frac{9}{6};\frac{19}{11};\frac{33}{18};...\right\}$, entonces el valor de convergencia es:

A) 4 *B)* 2 *C)* 1 *D)* $\frac{1}{2}$ *E)* $\frac{1}{4}$

16 Si $\{d_n\}_{n\in N}$ es una sucesión definida por $\{d_n\}_{n\in N} = \left\{\frac{6}{3};\frac{15}{6};\frac{30}{11};\frac{51}{18};...\right\}$ el valor de convergencia es:

A)2 *B)3* *C)4* *D) 8* *E)9*

17 Indicar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I) $\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^{-2n}\right\}_{n\in N}$ es una sucesión convergente

II) Si $0 < a < b$, entonces la sucesión $\left\{\left(\frac{b}{a}\right)^n\right\}_{n\in N}$ es convergente

III) Toda sucesión acotada es convergente

A)VVV *B)FVF* *C)VFV* *D)FFF* *E)VFF*

18 Sea $\{a_n\}_{n\in N}$ una sucesión tal que $a_n = \frac{2n+6}{3n+3}$. Si L es el valor de convergencia de la sucesión $\{a_n\}_{n\in N}$ y $\left|\frac{2n+6}{3n+3} - L\right| < 0{,}005$, entonces el máximo valor que puede admitir k (con $n > k$) es:

A)268 *B)267* *C)266* *D)265* *E)264*

19 Si $\{a_n\}_{n\in N}$ es una sucesión definida por $\{a_n\} = \{2;5;9;14;20;....\}$, entonces el valor de convergencia de la sucesión $\left\{\frac{a_n}{1+5n^2}\right\}$ es:

A) 0 *B)* $\frac{1}{10}$ *C)* 1 *D)* 2 *E)* 10

20 Si el vigésimo término de la sucesión $\{a_n\} = \left\{\frac{nx+41}{4n+1}\right\}_{n\in N}$ es la unidad, entonces el valor de convergencia de la sucesión $\{d_n\}$ es:

A) 0 *B)* $\frac{1}{4}$ *C)* $\frac{1}{2}$ *D)* 1 *E)* 2

21 Indicar el valor de verdad de las siguientes afirmaciones :

I) La sucesión $\left\{-\frac{6}{4};-\frac{5}{5};-\frac{4}{6};-\frac{3}{7};....\right\}$ converge a la unidad

II) La sucesión $\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^3;\left(\frac{2}{3}\right)^4;\left(\frac{3}{4}\right)^5;\left(\frac{4}{5}\right)^6;....\right\}$ es divergente

III) La sucesión $\left\{\sqrt{an^2+bn+c} - (\sqrt{a})n\right\}_{n\in N}$ converge al valor de $\frac{b\sqrt{a}}{2a}$

A)VFV *B)VFF* *C)VVV* *D)DVV* *E)FFV*

22 Si $\{a_n\}_{n\in N}$ es una sucesión / $a_n = \frac{2^{n+1}+3^n}{3^{n+1}-2^n}$, entonces el valor de convergencia de la sucesión $\{a_n\}$ es:

A)-1/3 *B)1/3* *C)2/3* *D)4/3* *E)5/3*

23 Indicar el valor de verdad de las afirmaciones siguientes:

I) La sucesión :

$\{(a-b)\sqrt{n} + (b-c)\sqrt{n+1} + (c-a)\sqrt{n+2}\}_{n\geq 1}$ es divergente

II) La sucesión :

$$\left\{\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)...\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\right\}_{n\geq 2}$$

converge a $\frac{1}{2}$

III) La sucesión $\left\{\left(\frac{3n^2+1}{3n^2+2}\right)^{-n^2}\right\}_{n\geq 1}$ converge a $e^{1/3}$

A)FVV *B)VVV* *C)FFV* *D)FFF* *E)VVF*

24 Si $\{a_n\}_{n\in N}$ es una sucesión tal que $a_1 = 1; a_2 = 2$ y $a_{n+2} = \frac{a_n + 2a_{n+1}}{3}\ \forall n \geq 1$, entonces la sucesión $\{a_n\}_{n\in N}$ converge a:

A) $\frac{1}{4}$ *B)* $\frac{1}{2}$ *C)* $\frac{3}{4}$ *D)* $\frac{7}{4}$ *E)* $\frac{5}{2}$

25 Si la siguiente sucesión :

$\{a_n\}_{n\in N} = \{\sqrt{n^2-n+1} - nA - B\}$ es convergente al valor de cero, entonces indicar el valor de verdad de las siguientes afirmaciones:

I) $A\times B > 0$ *II)* $A = -\frac{1}{2} \wedge B = 1$ *III)* $A\times B = -\frac{1}{2}$

A)VFV *B)FFF* *C)FVF* *D)FFV* *E)VFF*

26 Si la siguiente sucesión :

$\{a_n\}_{n\in N} = \left\{\frac{n^2+1}{n+1} - np - q\right\}$ es convergente al valor de cero, entonces la relación correcta entre los valores de p y q es:

A) $q = 2p$ *B)* $p\cdot q > 0$ *C)* $q > p$ *D)* $p = q$ *E)* $q < p$

27 Dado que $a_1 > 1$ considere además que la sucesión verifica $a_n = \sqrt{n\,a_{n-1}}$.

Halle el valor de $\left(\frac{a_{2001}}{a_{2002}}\right)^2$

A) 2001^2 B) $\left(\frac{1}{2002}\right)^2$ C) $\frac{1}{2001}$ D) $(2002)^{-1}$ E) 1

28 Si $\{C_n\}_{n\in N}$ es una sucesión definida por $\{C_n\}_{n\in N}\left\{\frac{5(2^n)-3(5^{n+1})}{100(2^n)+2(5^n)}\right\}$, entonces el valor de convergencia es:

A) 1 B) $-\frac{15}{2}$ C) $-\frac{17}{2}$ D) 0 E) $-\frac{2}{15}$

29 Si la sucesión $\left\{\frac{na+2n-3}{nb-2n+1}\right\}_{n\in N}$ converge a 3, entonces la relación correcta entre a y b es:

A) $a-3b=6$ B) $a-3b=8$ C) $3a-b=6$
D) $3b-a=8$ E) $a+3b=8$

30 Se define la sucesión $\{a_n\}_{n\in N}$ por:

$\{a_n\}_{n\in N}=\left\{\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\times sen\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right\}$, entonces la afirmación correcta es:

A) Es convergente al valor de 1 B) Es divergente
C) Es convergente al valor de cero D) No es acotada
E) Es convergente al valor de $\frac{1}{2}$

31 Se define la sucesión $\{a_n\}_{n\in N}/a_1=\sqrt{3+\sqrt{3}}$ y $a_n=\sqrt{3+a_{n-1}}, \forall n\geq 2$. Entonces, la afirmación correcta es:

A) $\{a_n\}_{n\in N}$ converge a $\sqrt{3}$

B) $\{a_n\}_{n\in N}$ es decreciente

C) $\{a_n\}_{n\in N}$ es acotada

D) $\{a_n\}_{n\in N}$ converge a $\frac{1-\sqrt{13}}{2}$

E) $\{a_n\}_{n\in N}$ converge a $\frac{1+\sqrt{13}}{2}$

32 Se define la sucesión: $\{x_n\}_{n\in N}/x_1=0 \wedge x_{n+1}=mx_n+\sqrt{(m^2-1)x_n^2+p^2}, m\in N; p\in Z$.

Entonces, la afirmación correcta es:

A) $x_{n+3}=2mx_{n+2}-x_n$ B) $x_n=2mx_{n+1}-x_{n+2}$
C) $x_{n+2}=2mx_{n+1}-x_n$ D) $x_{n+4}=2mx_{n+3}-x_{n+2}$
E) $x_{n+5}=2mx_{n+4}-x_{n+3}$

TERCERA PRACTICA DIRIGIDA

01 Sea (a_n) la sucesión tal que: $a_1=2$; $a_{n-1}=\frac{2a_n+1}{2}; n\geq 1$. Calcular a_{2000}

A) 2001 B) $\frac{2002}{3}$ C) $\frac{2004}{5}$ D) $\frac{2005}{2}$ E) $\frac{2003}{2}$

02 Dada la sucesión (a_n) de $a_n=3n-1$ entonces la suma de sus «p» primeros términos es:

A) $\frac{p(3p+1)}{2}$ B) $3p+1$ C) $\frac{(3p+2)p}{2}$
D) $p(3p+1)$ E) p^2+p

03 Se define la sucesión (a_n) tal que: $a_{n-1}=a_n+\frac{1}{a_n}$ $\forall n\geq 1; a_1>0$. Hallar: $\dfrac{3\sum_{k=1}^{2002}\frac{1}{a_k}}{a_{2003}-a_1}$

A) 2^{-1} B) 3 C) 3^{-1} D) $\frac{2}{3}$ E) 8

04 Si (a_n) es una sucesión definida por:
$a_1=2$; $a_{n+2}=2a_{n+1}-a_n$, $\forall n\geq 1$, además $a_{23}=156$. hallar: $a_{10}+a_{20}$

A) 200 B) 300 C) 175 D) 95 E) 245

05 ¿A partir de qué términos de la sucesión $\left(\frac{n+1}{2n+3}\right)$, la diferencia de dos términos consecutivos es menor que $\frac{1}{100}$?

A) 3er B) 4to C) 5to D) 6to E) 7mo

06 Dada la sucesión $\left(\frac{4^n-3^{n+1}}{3^n+4^{n-2}}\right)$, ¿a qué valor converge?

A) $\frac{1}{4}$ B) 4 C) 16 D) $\frac{3}{4}$ E) $\frac{4}{3}$

07 Indicar el valor de verdad en cada una de las siguientes proposiciones :

( ) Si: $\left\{\dfrac{2n^2+n+1}{3n^2+n+1}\right\}$ converge a $\dfrac{2}{3}$

( ) Si: $\left\{\dfrac{n+1}{n^2+1}\right\}$ converge a 0.

( ) Si: $\left\{\dfrac{n^2+n+1}{2n+7}\right\}$ converge a $\dfrac{1}{2}$

A)VVV B)VVF C)FVF D)FFV E)FFF

08 A que valor converge la sucesión $\left\{\left(\dfrac{n^2+3n}{n^2+4n}\right)^{\frac{n^2+1}{n}}\right\}$

A)e B)e^{-1} C)$e-1$ D) $\sqrt{e}$ E) $\sqrt[3]{e}$

09 Si la sucesión $\left\{\dfrac{3n+5}{5^n}\right\}$ converge a: $2b+4$, indicar el valor de «b»

A)1 B)0 C)–2 D) –1 E)Absurdo

10 Indicar el valor de verdad en cada una de las siguientes proposiciones.

( ) Si: $\left\{\dfrac{2^n}{4^n+1}\right\}$ converge

( ) Si: $\left\{\dfrac{e^n}{n}\right\}$ diverge

( ) Si: $\left\{\dfrac{Sen(n+1)}{n^3+4}\right\}$ converge

A)VVF B)VVV C)FVF D)FFF E)VFV

11 Dada la sucesión $\{a_n\}=\left\{\dfrac{3^n-1}{\sqrt{2}\times 3^n}\right\}$, indicar la afirmación correcta :

A)La sucesión no converge
B)La sucesión es monótona creciente
C)La sucesión no es acotada
D)La sucesión es monótona decreciente
E)La sucesión es acotada pero no converge

12 Indicar el valor de verdad , de las siguientes proposiciones :

( ) La sucesión (n^2-n) es monótona

( ) (2^{-n}) es decreciente

( ) Si: $a_n=\begin{cases} n & \text{es múltiplo de } 2 \\ 0 & \text{en los demás casos} \end{cases}$ entonces (a_n) es convergente

A) VVV B)VVF C)VFV D)VFF E) FFF

13 Dada la sucesión $\left\{\dfrac{6}{2};\dfrac{11}{5};\dfrac{16}{8};\dfrac{21}{11};.....\right\}$, ¿a qué valor converge?

A) $\dfrac{5}{2}$ B) $\dfrac{2}{3}$ C) $\dfrac{5}{3}$ D) $\dfrac{1}{3}$ E) $\dfrac{4}{3}$

14 ¿Cuáles de las siguientes sucesiones son convergentes?

I) $\left\{1;-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{3};-\dfrac{1}{4},....\right\}$ II) $\left\{\dfrac{n+(-1)^n}{n-(-1)^n}\right\}$ III) $\left\{\dfrac{2^{n+2^n}+3^{n+2}}{2^n+3^n}\right\}$

A) Sólo I B) Sólo II C)Sólo III
D) I y II E) Todas

15 Hallar : $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{2^2}\right)\left(1-\dfrac{1}{3^2}\right)....\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)$

A) $\dfrac{1}{2}$ B) $\dfrac{2}{3}$ C) $\dfrac{1}{4}$ D) $\dfrac{3}{2}$ E) $\sqrt{2}$

16 Si: $\left\{\dfrac{Ln(n)}{n}\right\}$, ¿a qué valor converge?

A)1 B)e C) $\dfrac{1}{e}$ D) 0 E) $\sqrt{e}$

17 Indicar cuál o cuáles sucesiones cumplen:

$a_n \le a_{n+1} \forall n \in N;\ n \ge 1$, si:

I) $\{3n+5\}$ II) $\left\{\dfrac{n}{3^n}\right\}$ III) $\left\{\dfrac{2n+1}{3n+1}\right\}$

A) Sólo I B)Sólo II C) Sólo III
D) I y II E) I y III

CLAVES DE LA PRIMERA PRACTICA									
1)B	2)A	3)C	4)D	5)D	6)D	7)E	8)E	9)C	10)C
11)B	12)C	13)B	14)E	15)A	16)E	17)C	18)A	19)D	20)C

CLAVES DE LA SEGUNDA PRACTICA				
01) D	02) E	03) C	04) B	05) B
06) D	07) D	08) A	09) C	10) D
11) A	12) D	13) C	14) C	15) B
16) B	17) D	18) D	19) B	20) C
21) A	22) B	23) A	24) D	25) D
26) E	27) D	28) B	29) D	30) C
31) E	32) C			

CLAVES DE LA TERCERA PRACTICA				
01) E	02) A	03) B	04) A	05) E
06) C	07) B	08) B	09) C	10) B
11) B	12) B	13) C	14) E	15) A
16) D	17) A	18) B	19) A	20) A



OBJETIVOS :

* Calcular la suma de series convergentes utilizando ciertos métodos .
* Aplicar los criterios de convergencia en las series.

INTRODUCCIÓN :

Dado un conjunto de números $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$, el símbolo $\sum_{k=1}^{n} a_k$ representa su suma indicada o sumatoria. Es decir :

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$$

La letra griega sigma $\sum$ denota la sumatoria y a_k representa el k-ésimo término . La letra k se llama índice de sumatoria o variable de sumatoria y adquiere valores enteros sucesivos.

EJEMPLO :

Calcular : $\sum_{k=1}^{4} k^2$

RESOLUCIÓN :

* En este caso $a_k = k^2$. Para evaluar la sumatoria sustituimos k por $1;\ 2;\ 3$ y 4 y se suman los términos resultantes . Así ,

$$\sum_{k=1}^{4} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 1 + 4 + 9 + 16 = 30$$

SUMATORIA

Consideremos «m» y «n» dos números naturales tal que $m \le n$, y «f» una función definida para cada $i \in \mathbb{N}$ donde: $m \le i \le n$, luego la notación : $\sum_{i=m}^{n} f(i)$, nos representa la suma de los términos $f(m); f(m+1); f(m+2); ....; f(n)$; es decir :

$$\sum_{i=m}^{n} f(i) = f(m) + f(m+1) + f(m+2) + ... + f(n)$$

donde «i» es el índice o variable , «m» es el límite inferior y «n» es el límite superior .

EJEMPLO 1 :

Si : $f(i) = \frac{1}{i}$, entonces :

$$\sum_{i=3}^{5} f(i) = \sum_{i=3}^{5} \frac{1}{i} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$$

EJEMPLO 2 :

Si $f(i) = \cos ix$, entonces :

$$\sum_{i=1}^{n} f(i) = \sum_{i=1}^{n} \cos ix = \cos x + \cos 2x + \cos 3x + ... + \cos nx$$

OBSERVACIÓN :

En la sumatoria $\sum_{i=m}^{n} f(i)$, existen $(n - m + 1)$ términos los cuales son $f(m); f(m+1); f(m+2); ...; f(m+(n-m))$

en particular , si : $m = 1$ y $n \ge 1$; entonces en $\sum_{i=1}^{n} f(i)$ existen n términos, es decir :

$$\sum_{i=1}^{n} f(i) = f(1) + f(2) + f(3) + ... + f(n)$$

PROPIEDADES DE LA SUMATORIA

Sean f, g funciones definidas $\forall i \in \mathbb{Z}$, k constante.

I) $\sum_{i=1}^{n} k = kn$ II) $\sum_{i=1}^{n} kf(i) = k\sum_{i=1}^{n} f(i)$

III) $\sum_{i=m}^{n} k = (n - m + 1)k$ IV) $\sum_{i=1}^{n} (f(i) \pm g(i)) = \sum_{i=1}^{n} f(i) \pm \sum_{i=1}^{n} g(i)$

V) $\sum_{i=a}^{b} f(i) = \sum_{i=a+c}^{b+c} f(i-c)$ VI) $\sum_{i=a}^{b} f(i) = \sum_{i=a-c}^{b-c} f(i+c)$

VII) $\sum_{i=k}^{n} (f(i) - f(i-1)) = f(n) - f(k-1)$.... (1ra Regla Telescópica)

VIII) $\sum_{i=k}^{n} (f(i) - f(i-1)) = f(n) - f(k-1)$...(1ra Regla Telescópica Generalizada)

IX) $\sum_{i=1}^{n} (f(i+1) - f(i-1)) = f(n+1) + f(n) - f(1) - f(0)$.................................(2da Regla Telescópica)

X) $\sum_{i=k}^{n} (f(i+1) - f(i-1)) = f(n+1) + f(n) - f(k) - f(k-1)$.............. (2da Regla Telescópica Generalizada)

* Para denotar el índice de una sumatoria se pueden usar otras letras como «k», «i»,«j».

EJEMPLOS :

* $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \sum_{i=1}^{4} i^2 = \sum_{j=1}^{4} j^2 = 30$
* $\sum_{k=1}^{2} a_k = a_1 + a_2 = c + c = 2c = \sum_{k=1}^{2} c$
* $\sum_{k=1}^{3} a_k = a_1 + a_2 + a_3 = c + c + c = 3c = \sum_{k=1}^{3} c$
* $\sum_{k=5}^{9} a_k = a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9$
* $\boxed{\sum_{k=1}^{n}(a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_1}$ .....*(Propiedad Telescópica)*

SUMAS FINITAS NOTABLES

Existen sumas finitas que son utilizadas en una serie de problemas prácticos de gran interés, los principales son :

I) $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ II) $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

III) $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$ IV) $\sum_{k=1}^{n} k^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$

EJERCICIO 1 :

Calcular : $S = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$

RESOLUCIÓN :

* El equivalente , será :

$$S = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = -\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k}\right)$$

* Donde se puede hacer : $a_k = \frac{1}{k} \rightarrow a_{k+1} = \frac{1}{k+1}$

* Recordando la propiedad telescópica :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n}(a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_1}$$

* Luego : $S = -\left(\frac{1}{\infty+1} - \frac{1}{1}\right) = 1$

EJERCICIO 2 :

Calcular : $A = \sum_{k=1}^{100} \frac{2k-1}{k^2(k+1)^2}$

RESOLUCIÓN :

* En este caso $a_k = \frac{2k-1}{k^2(k+1)^2}$ el cual se puede escribir como :

$$a_k = \frac{(k+1)^2 - k^2}{k^2(k+1)^2} = \frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)} = -\left[\frac{1}{(k+1)^2} - \frac{1}{k^2}\right]$$

* Entonces :

$$\sum_{k=1}^{100} \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2} = -\sum_{k=1}^{100}\left[\frac{1}{(k+1)^2} - \frac{1}{k^2}\right]$$

$$= -\left[\frac{1}{(101)^2} - \frac{1}{1^2}\right] \rightarrow A = 1 - \frac{1}{(101)^2} = \frac{10200}{10201}$$

EJERCICIO 3 :

Halle el valor de : $\sum_{i=1}^{40}\left(\sqrt{2i+1} - \sqrt{2i-1}\right)$

RESOLUCIÓN :

* Mediante la regla Telescópica se tiene :

$f(i) = \sqrt{2i+1} \Rightarrow f(i-1) = \sqrt{2i-1}$

$\rightarrow \sum_{i=1}^{40}\left(\sqrt{2i+1} - \sqrt{2i-1}\right) = f(40) - f(0)$

$= \sqrt{81} - 1 = 9 - 1 = 8$

EJERCICIO 4 :

Hallar una fórmula para la sumatoria: $\sum_{i=1}^{n} i.i!$

RESOLUCIÓN :

* Aplicando la Regla telescópica se tiene :

$\sum_{i=1}^{n}\left[(i+1)! - i!\right] = f(n) - f(0)$, donde : $f(i) = (i+1)!$

* Simplificando mediante propiedad del factorial la expresión dentro del corchete .

$$\sum_{i=1}^{n}(i!(i+1) - i!) = (n+1)! - 1, \text{ de donde:}$$

$$\sum_{i=1}^{n}(i.i! + i! - i!) = (n+1)! - 1$$

EJERCICIO 5 :

Hallar una fórmula para la sumatoria: $\sum_{i=1}^{n} 5^i$

RESOLUCIÓN :

* Mediante la Regla Telescópica se tiene :

$\sum_{i=1}^{n}\left(5^{i+1} - 5^i\right) = f(n) - f(0)$, donde : $f(i) = 5^{i+1}$

$\sum_{i=1}^{n}\left(5.5^i - 5^i\right) = 5^{n+1} - 5 \rightarrow \sum_{i=1}^{n} 4.5^i = 5\left(5^n - 1\right)$

$\rightarrow \sum_{i=1}^{n} 5^i = \frac{5(5^n - 1)}{4}$

EJERCICIO 6 :

Calcular : $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)(k-1)!}$

RESOLUCIÓN :

* Multiplicando numerador y denominador por «k», así :

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)k(k-1)!}=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(k+1)!}=\sum_{k=1}^{n}\frac{k+1-1}{(k+1)!}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k+1}{(k+1)!}-\frac{1}{(k+1)!}\right)=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k!}-\frac{1}{(k+1)!}\right)$$

$$=-\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{(k+1)!}-\frac{1}{k!}\right)=-\left(\frac{1}{(k+1)!}-1\right)=\frac{(n+1)!-1}{(n+1)!}$$

* Por lo tanto:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)(k-1)!}=\frac{(n+1)!-1}{(n+1)!}$$

EJERCICIO 7:

Calcular : $S=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4k^2-1}$

RESOLUCIÓN :

* Haciendo :

$$\frac{1}{4k^2-1}=\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right]$$

$$\rightarrow\frac{1}{4k^2-1}=-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2(k+1)-1}-\frac{1}{2k-1}\right]$$

* Luego lo pedido será :

$$S=-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2(k+1)-1}-\frac{1}{2k-1}\right)=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2(\infty)-1}-\frac{1}{2(1)-1}\right)$$

$$\rightarrow S=-\frac{1}{2}(0-1)=\frac{1}{2}$$

EJERCICIO 8 :

Calcular : $\sum_{i=1}^{n}sen(ix)$

RESOLUCIÓN :

* Usando la identidad :

$$\cos A-\cos B=-2sen\left(\frac{A+B}{2}\right)sen\left(\frac{A-B}{2}\right)\text{.......................}(I)$$

* De donde haciendo la sustitución se tiene:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{A+B}{2}=ix\\ \frac{A-B}{2}=x\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}A+B=2ix\\ A-B=2x\end{array}\right\}\text{resolviendo el}$$

$$\text{sistema se tiene:}\begin{cases}A=(i+1)x\\ B=(i-1)x\end{cases}\text{.....................................}(II)$$

* Reemplazando (II) en (I) se tiene :

$\cos(i+1)x-\cos(i-1)x=-2senixsenx$, aplicando sumatoria a ambos miembros :

$$*\sum_{i=1}^{n}\left[\cos(i+1)x-\cos(i-1)x\right]=-2senx\sum_{i=1}^{n}sen(ix)$$

* Y mediante la *2da* regla Telescópica se tiene :

$$\cos(n+1)x+\cos(nx)-\cos x-1=-2senx\sum_{i=1}^{n}sen(ix),$$

despejando $\sum_{i=1}^{n}sen(ix)$ se tiene :

$$\rightarrow\sum_{i=1}^{n}sen(ix)=\frac{1+\cos x-\cos(nx)-\cos(n+1)x}{2senx}$$

SERIES

Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números reales . La expresión $a_1+a_2+a_3+....a_n+....$ se denomina **serie** numérica o simplemente serie . Para denotar una serie , se emplea la notación de sumatoria :

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n\ o\,bien\ \sum a_n$$

En la última serie se sobre entiende que la variable de sumatoria es n . Cada número a_k, $k=1;2;3;....$es un término de la serie y a_n es el n–ésimo término.

EJEMPLOS :

Los siguientes son ejemplos de series numéricas

$A)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$ $B)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n}}$ $C)\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ $D)\sum_{n=10}^{\infty}\frac{2^n}{n!}$

Surge una pregunta natural: ¿Qué sentido tiene hablar de la suma de una cantidad infinita de términos?. Por ejemplo es fácil convencerse de que no es posible calcular una suma finita como la serie:

$$2+4+6+8+...+2n+...$$

ya que se obtiene sumas acumuladas que crecen conforme «n» aumenta . Sin embargo , si comenzamos sumando los términos de la serie .

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+...+\frac{1}{2^n}+...$$

* Obtendremos :

n	*Suma de los primeros n términos*
1	0, 500000
2	0, 750000
3	0, 875000
4	0, 937500
5	0, 9687500
6	0, 9843750
10	0, 9990234
20	0, 99999905
25	0, 99999997

Es decir , cuanto más términos sumemos , las sumas acumuladas o parciales se acercan cada vez más a

1. Esto nos muestra que al sumar infinitos términos podemos aproximarnos a un cierto valor o por el contrario la sumas pueden ir aumentando permanentemente. Así cuando escribamos $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$ deseamos indicar que si sumamos la cantidad suficiente de términos de la serie, podemos aproximarnos todo lo que queramos al número S.

Así :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\dots\frac{1}{2^n}+\dots=1$$

Desarrollaremos estas ideas con más detalle en la siguiente sección donde estudiaremos el concepto de convergencia de sucesión y series numéricas.

DEFINICIÓN :

Una serie es la adición de todos los términos de la sucesión (a_n) y se denota mediante el símbolo : $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. También podemos usar las siguientes notaciones:

$$\sum a_n=\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1+a_2+a_3+\dots$$
$$=\lim_{n\to\infty}(a_1+a_2+a_3+\dots a_n)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k$$

Además, a la suma : $a_1+a_2+a_3+\dots+a_n$ denominaremos n–ésima suma parcial de la serie y la denotaremos por S_n

EJEMPLO :

* A partir de la sucesión: $\{a_n\}: \frac{1}{2};\frac{1}{4};\frac{1}{8};\dots;\frac{1}{2^n};\dots$

* Construimos la serie :

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\dots+\frac{1}{2^n}+\dots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$$

* Luego : $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\dots+\frac{1}{2^n}+\dots=S_n$

Se denomina n-ésima suma parcial

GENERALIDADES :

* Las series que tienen todos sus sumandos, positivos se denominan series de términos positivos.
* Las que los tienen alternativamente positivos y negativos, se denominan series alternadas.
* Aquellas en el orden de aparición de los términos positivos y negativos es arbitrario, se denominan series de términos cualesquiera.

* Sea la sucesión (a_n) de números reales, a partir de ella, formaremos una nueva sucesión (S_n), donde:

$$S_1=a_1$$
$$S_2=a_1+a_2$$
$$S_3=a_1+a_2+a_3$$
$$\vdots$$
$$S_n=a_1+a_2+a_3+\dots+a_n,\ etc$$

Sumas parciales

Los números S_n se llaman sumas parciales de la serie $\sum a_n$ y a (S_n) se le denomina sucesión de sumas parciales de la serie $\sum a_n$.

CONVERGENCIA O DIVERGENCIA DE UNA SERIE

La serie $\sum a_n$ es convergente si y sólo si la sucesión de sumas parciales tienen límite finito, a este límite $\left(S=\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k\right)$ se le denomina suma de la serie. Si $\lim_{n\to\infty} S_n=\pm\infty$ o no existe se dice que $\sum a_n$ es una serie divergente.

EJEMPLO 1 :

* Sea : $a_k=\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$

* Luego :

$$\sum_{k=1}^{n} a_k=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\sum_{k=1}^{n} a_k=1-\frac{1}{n+1}$$

$$\to\sum_{k=1}^{n} a_k=\frac{n}{n+1}\to \lim_{\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}}=1$$

* Entonces : $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ "converge a 1"

EJEMPLO 2 :

$\sum_{k=1}^{\infty} k^2=1^2+2^2+3^2+\dots$; por simple análisis podemos decir que esta serie diverge ; ya que su suma tiende a $+\infty$ (no tiene suma)

SERIE GEOMÉTRICA

La sucesión; $a\ ;\ ar\ ;\ ar^2\ ;\ \dots;\ ar^{n-1};\dots$ es una progresión geométrica y la suma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n=a+ar+ar^2+ar^3+,\dots,r\neq 0\ ;\ a\neq 0$$

Recibe el nombre de serie geométrica , cuya razón es r . Veamos en qué casos esta serie converge o diverge . Calculemos la enésima suma parcial de la serie .

$$S_n = a + ar + ar^2 + ... + ar^{n-1}$$
$$r S_n = ar + ar^2 + ar^3 + ... + ar^n \quad \downarrow (-)$$
$$(1-r)S_n = a(1-r^n)$$
$$\rightarrow S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}, r \neq 1$$

Si $r = 1; S_n = na$; $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty \rightarrow$ *la serie diverge*

Si $|r| > 1; r^n \rightarrow \infty$; $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty \rightarrow$ *la serie diverge*

Si $|r| < 1$; $r^n \rightarrow 0$; $\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{1-r} \rightarrow$ *la serie converge*

TEOREMA :

* Si $|r| < 1$, la serie geométrica $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n$ converge y tiene por suma $\frac{a}{1-r}$.

* *Si* $|r| \geq 1$ la serie diverge .

EJEMPLO 1 :

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + ...$ se trata de una serie geométrica de razón $r = \frac{1}{3}$, por tanto convergente , luego por teorema : $\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$.

EJEMPLO 2 :

$S = \frac{3}{5} - \frac{3}{10} + \frac{3}{20} - \frac{3}{40} + ...$ se trata de una serie geométrica de razón $r = -\frac{1}{2}$, por tanto convergente, luego por teorema : $S = \frac{\frac{3}{5}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{2}{5}$

SERIES ARITMÉTICAS GEOMÉTRICAS

El n-ésimo sumando de este tipo de serie , es decir , a_n es de la forma : $a_n = \frac{b_n}{c_n}$

Donde :

* b_n es el n – ésimo término de una sucesión de 1er ó 2do ó 3er ..... orden .

* c_n es el n-ésimo término de una sucesión geométrica .

Este tipo de series converge si la razón de la sucesión geométrica es mayor que 1 , si la razón es menor o igual que uno diverge.

Para el caso de convergencia el valor de la suma designémosla por S se obtiene formando la diferencia

$S - \frac{1}{r}.S$ ....(r es la razón de la sucesión geométrica)

EJEMPLO :

* Obtengamos : $5 + \frac{8}{2} + \frac{11}{4} + \frac{14}{8} + \frac{17}{16} + ...$ designando por S la suma propuesta tales que :

$$S = 5 + \frac{8}{2} + \frac{11}{4} + \frac{14}{8} + \frac{17}{16} + ...$$
$$\downarrow (-)$$
$$\frac{1}{2}S = \frac{5}{2} + \frac{8}{4} + \frac{11}{8} + \frac{14}{16} + ...$$
$$S - \frac{1}{2}S = 5 + \underbrace{\frac{3}{2} + \frac{3}{4} + \frac{3}{8} + \frac{3}{16} + ...}_{\text{Es una serie geométrica de razón: } \frac{1}{2}}$$

* (Nótese que los numeradores forman una sucesión aritmética de 1er orden y los denominadores forman una progresión geométrica de razón $r = 2$)

$$\rightarrow \frac{1}{3}S = 5 + \frac{\frac{3}{2}}{1-\frac{1}{2}} \rightarrow S = 16$$

SERIES ARMÓNICAS

Se denomina así a la serie de la forma :

$$1 + \frac{1}{2^a} + \frac{1}{3^a} + \frac{1}{4^a} + \frac{1}{5^a} + ... = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^a}$$

* Estas series son $\begin{cases} \textit{Convergentes para } a > 1 \\ \textit{Divergentes para } a \leq 1 \end{cases}$

* Por ejemplo para $a = 1$:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + ... \textit{ esta serie es divergente}$$

PROPIEDADES DE LAS SERIES INFINITAS

Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$; $\sum_{n=1}^{\infty} k_n = K$, *un número real* ,las

series que siguen convergen a las sumas indicadas .

I	$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n = \lambda \cdot A$
II	$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + k_n) = A + K$
III	$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - k_n) = A - K$
IV	$\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda a_n + \beta k_n) = \lambda A + \beta K$ **(*linealidad de las series*)**

CRITERIOS DE CONVERGENCIA

Antes de enunciar los criterios debemos considerar que una condición necesaria para la convergencia de la serie $\sum a_n$, es que:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n = 0}$$

* Es decir :

I	Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$
II	**Si** $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ la serie $\sum a_n$ no necesariamente converge, es decir, puede ser convergente o divergente.
III	**Si** $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ entonces la serie diverge

EJEMPLO :

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n+2}$ es divergente , dado que :

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n+2}\right) = 1 \neq 0$$

OJO :

Es importante tomar en cuenta lo anterior , dado que en algunos casos permite determinar rápidamente la divergencia de una serie .

TEOREMAS :

A) Si $\sum a_n$ es divergente y $k \in \mathbb{R}$, entonces la serie $\sum k a_n$ es divergente .

B) Si $\sum a_n$ es convergente y $\sum b_n$ es divergente , entonces : $\sum(a_n + b_n)$ será divergente .

C) Si $\sum a_n$ y $\sum b_n$ convergen a «*A*» y «*B*» respectivamente y sea «*k*» una constante, entonces:

I) $\sum k a_n = k\sum a_n$ converge a «kA»

II) $\sum(a_n \pm b_n) = \sum a_n \pm \sum b_n$ converge a « $A \pm B$ »

EJEMPLO :

A que número converge : $\sum\left[\frac{3}{n(n+1)} - \frac{1}{3^n}\right]$

RESOLUCIÓN :

Considerando las propiedades se tendrá que lo pedido será :

$$3\sum\frac{1}{n(n+1)} - \sum\frac{1}{3^n} = \underbrace{3\sum -\left[\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\right]}_{\alpha} - \underbrace{\left(\frac{1}{3} \overset{\times\frac{1}{3}}{+} \frac{1}{9} \overset{\times\frac{1}{3}}{+} \frac{1}{27} + \dots\right)}_{\beta}$$

* Luego aplicando la propiedad telescópica en «α» y la suma de una progresión geométricadecreciente de razón «$\frac{1}{3}$» , se obtendrá :

$$-3\left[\frac{1}{\infty} - \frac{1}{1}\right] = \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} \cong \frac{5}{2} \rightarrow \textit{La serie converge a } \frac{5}{2}$$

1) CRITERIO DE COMPARACIÓN DIRECTA :

Sean $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ dos series de términos positivos , si $a_n \leq b_n$ para todo n suficientemente grande , entonces se cumple :

I	***Si*** $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ***converge, entonces*** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ***converge.***
II	***Si*** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ***diverge, entonces*** $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ***diverge.***

EJEMPLO 1 :

Determinar si la serie $\sum\frac{\operatorname{Sen} n}{n(n+1)}$ converge .

RESOLUCIÓN :

Dado que : $\underbrace{\frac{\operatorname{Sen} n}{n(n+1)}}_{a_n} \leq \underbrace{\frac{1}{n(n+1)}}_{b_n}$

Como : $a_n \leq b_n$ y $\sum b_n$ es convergente , luego :

$\sum a_n = \sum \frac{Sen\, n}{n(n+1)}$ converge .

EJEMPLO 2 :

Estudiemos la serie : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + n^2}$

* Sabemos que :

$$2^n + n^2 > 2^n, \forall n \rightarrow \frac{1}{2^n + n^2} < \frac{1}{2^n}, \forall n$$

* Luego : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ es convergente por tratarse de una serie geométrica de razón $\frac{1}{2}$

* Por lo tanto : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + n^2}$ es convergente .

EJEMPLO 3 :

Respecto a la serie : $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{Lnk}$

* Sabemos que : $k > Lnk$; $\forall k \geq 2$

* Entonces : $\frac{1}{k} < \frac{1}{Lnk}; \forall k \geq 2$

* Luego : $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k}$ es divergente por tratarse de una serie armónica .

* Por lo tanto $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{Lnk}$ es divergente .

2)CRITERIO DE LA RAZÓN(D' ALÁMBERT)

Sea la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ con $a_n \neq 0, \forall n \in N$ y

$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = r$ entonces:

I	Si $r<1$ la serie converge
II	Si $r>1$ la serie diverge
III	Si $r=1$ no se puede afirmar si converge o diverge

EJEMPLO 1 :

* Con respecto a la serie :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$$

* Tenemos que $a_n = \frac{n}{2^n}$; luego $a_{n+1} = \frac{n+1}{2^{n+1}}$

* Así :

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{2^n (n+1)}{2^{n+1}.n} = \lim_{n \to \infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2} < 1$$

* Por tanto la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ es convergente .

EJEMPLO 2 :

Respecto de : $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k!}$

$$\text{*Sea } a_k = \frac{2^k}{k!} \rightarrow \lim_{k \to +\infty} \frac{a_k + 1}{a_k} = \lim_{k \to +\infty} \frac{\frac{2^{k+1}}{(k+1)!}}{\frac{2^k}{k!}}$$

$$= \lim_{k \to +\infty} k! \frac{2^{k+1}}{(k+1)!\, 2^k} = \lim_{k \to +\infty} \frac{2}{k+1} = 0$$

→ La serie dada es convergente .

3)CRITERIO DE LA RAÍZ (O DE CAUCHY) :

Dada la serie :

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$; con $a_k \geq 0$ y $\lim_{k \to +\infty} \sqrt[k]{a_k} = L \in R$; entonces :

I	Si $L<1$, entonces $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ es convergente
II	Si $L>1$, entonces $\sum a_k$ diverge
III	Si $L=1$, el criterio no permite asegurarla Convergencia o divergencia de la serie.

EJEMPLO 1 :

Analizar la siguiente serie : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$

RESOLUCIÓN :

* Usando el criterio de la raíz :

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^n}} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0 < 1$$

* Entonces $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$ converge

EJEMPLO 2 :

Con respecto a : $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(Lnk)^k}$

* Sea : $a_k = \frac{1}{(Lnk)^k}$

$$L = \lim_{k \to \infty} \sqrt[k]{a_k} = \lim_{k \to \infty} \sqrt[k]{(Lnk)^{-k}} = \lim_{k \to \infty} \frac{1}{Lnk} = 0$$

* Como $L < 1$ el criterio de la raíz nos dice que la serie es convergente .

4) CRITERIO DE LA COMPARACIÓN POR LÍMITES :

* Sean $a_n \geq 0, b_n \geq 0 \wedge \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L$; entonces se cumple :

I	Si $L > 0$ y ($L \neq \infty$), entonces $\sum a_n$ y $\sum b_n$ ambas convergen o ambas divergen a la vez.
II	Si $L = 0$, entonces : Si $\sum b_n$ converge $\Rightarrow \sum a_n \Rightarrow$ converge.
III	Si $L = \infty$, entonces : Si $\sum b_n$ diverge $\Rightarrow \sum a_n \Rightarrow$ diverge.

EJEMPLO :

Determinar la convergencia de :

$$\sum Ln\left(1+\frac{1}{n(n+1)}\right)$$

RESOLUCIÓN :

Consideremos :

$$a_n = Ln\left(1+\frac{1}{n(n+1)}\right) \wedge b_n = \frac{1}{n(n+1)}$$

$$\rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{Ln\left(1+\frac{1}{n(n+1)}\right)}{\frac{1}{n(n+1)}}\right]$$

$$= Ln\left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n(n+1)}\right)^{n(n+1)}\right] = Lne = 1 > 0$$

y como $\sum b_n$ es convergente , entonces :

$\sum a_n = \sum Ln\left(1+\frac{1}{n(n+1)}\right)$, será convergente .

5) CRITERIO DE " n^P " (DE PRINGSHIM)

Sea $\sum a_n \wedge \lim_{n\to\infty} n^P a_n = L$; luego :

I	Si $L \neq \infty$ ("L" es finito, pudiendo ser cero), entonces: Si $P > 1 \Rightarrow \sum a_n$ converge
II	Si $L \neq 0$ ("L" puede ser "∞"), entonces: Si $P \leq 1 \Rightarrow \sum a_n$ diverge

CONSECUENCIAS :

* Si $L \neq 0 \wedge L \neq \infty$, entonces:
  Si $P>1 \Rightarrow$ la serie converge
  Si $P \leq 1 \Rightarrow$ la serie diverge
* Si $L=0$, entonces:
  Si $P>1 \Rightarrow$ la serie converge
  Si $P \leq 1 \Rightarrow$ no se puede afirmar algo
* Si $L=\infty$, entonces:
  Si $P>1 \Rightarrow$ nada se afirma
  Si $P \leq 1 \Rightarrow$ la serie diverge

EJEMPLO 1 :

Analizar la serie : $\sum \frac{1}{n^2+2n}$.

RESOLUCIÓN :

Veamos : $\lim_{n\to\infty} n^P a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+1} = 1$, se aprecia que

$A \neq \infty$ y $P = 2 > 1 \Rightarrow \sum\frac{1}{n^2+2n}$ converge.

EJEMPLO 2 :

Demostrar que $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^P}$, converge si $P > 1$, y diverge si $P \leq 1$.......... (La P – series) .

RESOLUCIÓN :

Sea $L = \lim_{n\to\infty} n^P a_n = \lim_{n\to\infty} n^P . \frac{1}{n^P} = 1$

$\Rightarrow L \neq 0$ y $L \neq 1$, entonces:

* Si $P>1 \Rightarrow \sum\frac{1}{n^P}$ converge
* Si $P \leq 1 \Rightarrow \sum\frac{1}{n^P}$ diverge

OJO :

Las P– Series son importantes en la comparación con otras series .

* $\underbrace{\sum\frac{1}{n} = \frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+....}_{\text{Se llama serie armónica}}$; diverge
* $\sum\frac{1}{n^3} = \frac{1}{1}+\frac{1}{8}+\frac{1}{27}+\frac{1}{64}+....$; converge
* $\sum\frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{1}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+....$; diverge

6) CRITERIO DE LA CONVERGENCIA ABSOLUTA

Si : $\sum|a_n|$ converge $\Rightarrow \sum a_n$ converge

Diremos que una serie converge absolutamente , si la serie de valores absolutos de sus términos convergen , también se dirá que es absolutamente convergente.

EJEMPLO :

la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$, es absolutamente convergente ,

dado que : $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n} = 1$, converge

OBSERVACIONES :

* Una serie convergente cuyos términos son todos del mismo signo es absolutamente convergente .

* Toda serie absolutamente convergente es convergente .

* Pero no toda serie convergente es absolutamente convergente .

* Una serie convergente $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ tal que $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ diverge , se llama condicionalmente convergente

7) CRITERIO DE LAS SERIES ALTERNANTES O DE LEIBNIZ :

Una serie es alternante , si sus signos de sus términos , son opuestos alternantes , es decir será de la siguiente forma :

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$, la cual será convergente, si :

I	$\lvert a_{n+1}\rvert < \lvert a_n\rvert$
II	$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

EJEMPLO:

¿ Converge $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+n}$?

RESOLUCIÓN :

* Como :

$$a_n=\frac{(-1)^n}{n^2+n}\Rightarrow a_{n+1}=\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)^2+n+1}=\frac{-(1)^n}{n^2+2n+2}\to|a_{n+1}|<|a_n|$$

* Además que: $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2+n} = 0$

* Con lo que : $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$, si converge

OBSERVACIÓN

La siguiente serie llamada anarmonicamente $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$, en este caso $a_n = \frac{1}{n}$, por tanto la sucesión (a_n) es no creciente y de términos positivos, además $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ con lo cual podemos afirmar que la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ es convergente. La serie anarmónica $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ es convergente, pero no es absolutamente convergente, ya que $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ es la serie armónica que es divergente. Por lo tanto la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ es condicionalmente convergente.

8) CRITERIO DE RAABE :

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie de términos positivos .

* Sea $r = \lim_{n\to\infty} n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$ entonces :

I	*Si $r>1$ → la serie converge*
II	*Si $r<1$ → la serie diverge*
III	*Si $r=1$ → no se puede afirmar nada*

EJEMPLO 1 :

¿ Converge : $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3+2}$?

RESOLUCIÓN :

$$a_n = \frac{1}{n^3+2} \wedge a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^3+2}$$

$\to \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$; ***luego no se puede*** aplicar el criterio de la razon ; aplicando el criterio de Raabe se tiene : $\lim_{n\to\infty} n\left[1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right] = \lim_{n\to\infty}\frac{3n^3+3n^2+n}{(n+1)^3+2} = 3>1$

*por lo tanto la serie dada converge.

EJEMPLO 2 :

¿ Converge :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\times4\times6\times8\times...\times(2n+2)}{1\times3\times5\times7\times...\times(2n-1)}?$$

RESOLUCIÓN :

* Primero :

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\dfrac{2\times4\times6\times8\times...\times[2(n+1)+2]}{1\times3\times5\times7\times...\times[2(n+1)-1]}}{\dfrac{2\times4\times6\times8\times...\times(2n+2)}{1\times3\times5\times7\times...\times(2n-1)}} = \frac{2n+4}{2n+1}$$

* Entonces aplicando el criterio de ***RAABE*** :

$$\lim_{n\to\infty} n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(1-\frac{2n+4}{2n+1}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{2n+4}{3n} = \frac{2}{3}<1,$$

luego la serie dada no converge.

9) CRITERIO DE CONDENSACIÓN DE CAUCHY :

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie de términos positivos tal que

$a_n \geq a_{n+1}\ \forall\ n \in \mathbb{N}$; entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge

(o diverge) si y sólo si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ converge (o diverge) .

EJEMPLO :

¿ Converge $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$?

RESOLUCIÓN :

* Se tiene que :

$$a_n = \frac{1}{n^2} \to a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2} \to a_n > a_{n+1}, \forall n \in N$$

* Entonces podemos aplicar el criterio de condensación , es decir:

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \times \frac{1}{(2^n)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1,$$

* Luego : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge .

10) CRITERIO DE LA INTEGRAL :

Sea $f(x) \geq 0$, monótona decreciente y continua , $\forall x \in [N;\infty\rangle, N \in \mathbb{Z}$ y es fijo , luego definamos : $a_n = f(n), \forall n \in \mathbb{Z} \wedge n \geq N$, entonces :

I	Si $\sum a_n$ converge $\Leftrightarrow \int_N^{\infty} f(x)dx$ converge
II	Si $\sum a_n$ diverge $\Leftrightarrow \int_N^{\infty} f(x)dx$ diverge

EJEMPLO 1 :

Demostrar con el criterio de la integral que la serie armónica diverge .

RESOLUCIÓN :

Sea $f(x) = \frac{1}{x}$; $x \geq 1$ luego , dado que es decreciente y continua $\forall x \in [1,\infty\rangle$ y $f(x) \geq 0$, ahora:

$$\lim_{t\to\infty} \int_1^t f(x)dx = \lim_{t\to\infty} \int_1^t \frac{dx}{x} = \lim_{t\to\infty}[Lnt - Ln1]$$

$$= \lim_{t\to\infty} Lnt = \infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ diverge.}$$

EJEMPLO 2 :

¿ Converge $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^n}$?

RESOLUCIÓN :

* Lo dado es :

$f(x) = \frac{x}{e^x} = x e^{-x}$, entonces $f(x) > 0$ si $x > 1$ por tanto , f es una función decreciente en $[1;+\infty\rangle$, así tenemos : $\int_1^A x e^{-x} dx = 2e^{-1} - (A+1)e^{-A}$ como

$$\int_1^{\infty} x e^{-x} dx = \lim_{A\to\infty}\left[2e^{-1} - (A+1)e^{-A}\right] = 2e^{-1}$$

Entonces la serie dada converge en base al criterio de la integral.

OBSERVACIÓN :

Sea $\sum a_n$, una serie de signos alternantes , tal que :

$|a_{n+1}| < |a_n| \wedge \lim_{n\to\infty} a_n = 0$, entonces: $|S_n - S_\infty| < |a_{n+1}|$

EJEMPLO :

Sabiendo que : $e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots; \forall x \in R$

aproximar $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ con un error menor a 10^{-4}.

RESOLUCIÓN :

Se tendrá que : $e^{-x^2} = 1 - \frac{x^2}{1} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \ldots$

$$\to \int_0^1 e^{-x^2} dx = \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5\times 2!} - \frac{x^7}{7\times 3!} + \ldots\right)\Big[_0^1$$

$$= \underbrace{1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5\times 2!} - \frac{1}{7\times 3!} + \frac{1}{9\times 4!}}_{S_5} - \underbrace{\frac{1}{11\times 5!}}_{0{,}0000\widehat{75} < 10^{-4}} + \ldots$$

$$\to \left|S_5 - \int_0^1 e^{-x^2} dx\right| < |a_6| < 10^{-4}$$

$$\to \int_0^1 e^{-x^2} dx = S_5 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} + \frac{1}{216}$$

NOTA:

Si una serie converge , entonces al reordenar sus términos la nueva serie puede converger o no , e incluso si converge lo puede hacer a otro valor .

EJEMPLO :

Se sabe que :

$$Ln2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \ldots$$

$$\to \frac{Ln2}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \ldots$$

(+)

$$\frac{3}{2}Ln2 = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \ldots$$

$$\to Ln2 = \frac{2}{3} + \frac{2}{9} - \frac{2}{6} + \frac{2}{15} + \frac{2}{21} + \ldots$$

SERIE DE POTENCIAS

SERIE DE FUNCIONES :

Analogamente a las series numéricas casi se define la serie de funciones , entonces sea $\{f_n(x)\}_{n\geq 1}$ una sucesión , luego la adición de sus términos lo representaremos así :

$$f_1(x)+f_2(x)+f_3(x)+...=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)=\sum f_n(x)$$

EJEMPLO :

* Sea $f_n(x)=e^{-nx}$

$$\to \sum e^{-nx}=e^{-x}+e^{-2x}+e^{-3x}+....$$

CONVERGENCIA DE SERIE DE FUNCIONES

La serie $\sum f_n(x)$ es convergente en el intervalo $\langle a;b\rangle$, si y sólo si $\left\{\sum_{k=1}^{n}f_n(x)\right\}$ converge en $\langle a\,;\,b\rangle$; es decir si su sucesión de sumas parciales es convergente en $\langle a\,;b\rangle$.

OBSERVACIÓN :

Debido a que para cada valor de «x» la sucesión de sumas parciales da origen a una serie numérica, entonces se pueden emplear para analizar la convergencia de series de funciones, todos los criterios que se estudiaron en series numéricas .

EJEMPLO :

Determinar el intervalo de convergencia de :

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n}$$

RESOLUCIÓN :

* Haciendo :

$$a_n=(-1)^n\frac{x^n}{n}\to a_{n+1}=(-1)^{n+1}\frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$$\to\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\left|\frac{(-1)^{n+1}\frac{x^{n+1}}{n+1}}{(-1)^n\frac{x^n}{n}}\right|=\left|\frac{xn}{n+1}\right|=|x|\frac{n}{n+1}$$

* Luego por el criterio del cociente :

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=|x|\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=|x|.1=|x|$$

* Entonces :

I) Si $|x|<1\to$ La $\sum a_n$ convergeen :

$$\underbrace{x\in\langle -1,1\rangle}_{\text{intervalo de convergencia}}$$

II) Si $|x|>1\to\sum a_n$ *diverge en :*

$x\in R-[-1;1]$

III) Si $|x|=1$ hay que aplicar otro criterio para determinar su convergencia.

CONVERGENCIA UNIFORME

La $\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ convergerá uniformemente en el intervalo $\langle a\,;b\rangle$, si : $\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)=f(x)$, donde $f(x)$ es la suma de la serie $\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$, esto da entender que para valor de «x» , se puede aproximar a $f(x)$ mediante la enésima suma parcial de $\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$, es decir, que se puede escribir $f(x)\approx S_n(x)$, cometiéndose un error $R_n(x)=f(x)-S_n(x)$, y que este error tiende a cero cuando «n» tiende al infinito .

CRITERIOS DE LA CONVERGENCIA UNIFORME

I) CRITERIO DE WEIERSTRASS :

Sea $\{a_n\}_n$ una sucesión convergente de números reales, tal que $|f_n(x)|\leq a_n$; $\forall n\wedge\forall x\in\langle a;\,b\rangle$; entonces $\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ converge uniforme y absolutamente en $\langle a\,;\,b\rangle$.

EJEMPLO :

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}$ es uniforme y absolutamente convergente en $\mathbb{R}$, dado que : $\left|\frac{\cos nx}{n^2}\right|\leq\frac{1}{n^2}$; $\forall x\in R$ y de la convergencia de $\sum\frac{1}{n^2}$ y el criterio de Weierstrass .

II) CRITERIO DE CAUCHY :

La serie $\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ converge uniformemente en el intervalo $\langle a;b\rangle$ si y sólo si dado

$\varepsilon>0,\ \exists N>0/\left|\sum_{k=n+1}^{n+1} f_k(x)\right|<\varepsilon;\forall n > N \wedge \forall x\in\langle a\ ;\ b\rangle$

PROPIEDADES :

Las siguientes propiedades se refieren a series uniformemente convergentes .

I) Si $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ en $\langle a;b\rangle$, y cada $f_n(x)$ es continua en $\langle a;b\rangle$, entonces $f(x)$ es continua en $\langle a;b\rangle$.

II) Si las funciones que forman la sucesión $\{f_n(x)\}$ son continuas y derivables en $\langle a;b\rangle$ y si se tiene que:

$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \wedge g(x)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$, entonces : $f'(x)=g(x)$

OJO :

Lo anterior da entender , que la serie , formada por las derivadas de los términos de una serie uniformemente convergente , es uniformemente convergente y su suma es la derivada de la suma de la serie original .

SERIES DE POTENCIAS

Se define por serie de potencias con centro en x_0 , a:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \ldots$$

$,\forall a_n \in \mathbb{R}$.

Siendo además los «a_n» constantes .

CONVERGENCIA DE UNA SERIE DE POTENCIAS

Toda serie de potencias cumple lo siguiente:

$\exists r>0/$ la serie converge en el intervalo $I=\langle x_0-r;\ x_0+r\rangle$ y en los puntos (x_0-r) y (x_0+r) la serie puede converger o diverger; y diverge en el intervalo $\langle -\infty\ ;\ x_0+r\rangle \cup \langle x_0+r\ ;+\infty\rangle$. El intervalo «*I*» es llamado intervalos de convergencia y «*r*» se llama radió de convergencia .



Cuando $x=x_0$ la serie de potencias converge, debido a que todos sus términos son iguales a cero . si existen otros valores de «x», para los cuales la serie converge estos forman una vencindad de x_0 de radio «r».

PROPIEDADES :

I) Toda serie de potencias es absolutamente convergente en su intervalo de convergencia .

II) Toda serie se puede derivar o integrar en su intervalo de convergencia y la serie resultante es también una serie de potencia que tendrá el mismo intervalo de convergencia que la serie inicial .

III) Si $\sum a_n$ y $\sum b_n$ convergen a los números **A** y **B**, entonces :

a) $\sum(a_n \pm b_n) = \sum a_n \pm \sum b_n = A \pm B$

b) $\left(\sum a_n\right)\left(\sum b_n\right) = A \times B$

c) $\dfrac{\sum a_n}{\sum b_n} = \dfrac{A}{B};\ B_n \neq 0$ y $b_0 \neq 0$

* Según la propiedad ***II*** :

siendo $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$

$\rightarrow f'(x)=\sum_{n=0} n a_n(x-x_0)^{n-1}, \forall x \in \langle x_0-r; x_0+r\rangle$

* Además: $\int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} a_n(t-x_0)^n\,dt = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1}$

$,\forall x \in \langle x_0-r;\ x_0+r\rangle$

EJEMPLO 1 :

Se sabe que la solución de :

$$f'(x)=f(x)\ ;\ f(0)=1;\ es: f(x)=e^x$$

determinar la serie de potencia de e^x.

RESOLUCIÓN :

Sea: $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+\ldots$

$\rightarrow f'(x)=a_1+2a_2x+3a_3x^2+4a_4x^3+\ldots$

* Utilizando los datos , es decir de :

$f(0)=1$ y $f'(x)=f(x)$, se obtendrá que :

$$a_0=1;\ a_1=a_0=1;\ 2a_2=a_1=1$$

$\rightarrow a_2=\frac{1}{2},\ 3a_3=a_2 \rightarrow a_3=\frac{1}{2\times3},\ 4a_4=a_3$

$\rightarrow a_4=\frac{1}{2\times3\times4}$,.... se deduce que: $a_n=\frac{1}{n!}$

* Entonces:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

OJO :

Para determinar el intervalo de convergencia, por lo general utilizaremos el criterio del cociente o de la razón .

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}} \right| = \lim_{n \to \infty} \frac{|x|}{n+1} = 0 < 1,\ \forall\, x \in R$$

$$\to\ e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \text{ converge } \forall\, x \in R$$

CRITERIO DE CONVERGENCIA

(*Por Cauchy – Hadamaro*): Dada una serie de potencias centrada en x_0, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$,

llamaremos radio de convergencia al valor $r > 0$, el cual está dado por :

$$r = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \text{ ó por } r = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$$

* Se dice que :

I) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$, ***converge absolutamente en*** $\langle x_0 - r;\ x_0 + r \rangle$

II) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ ***diverge en*** $R - [x_0 - r;\ x_0 + r]$

* Donde $\langle x_0 - r\,;\ x_0 + r \rangle$ será el intervalo de convergencia .

EJEMPLO :

Determinar el intervalo de convergencia de :

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

RESOLUCIÓN :

Calculemos :

$$r = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{\frac{(-1)^n}{2n+1}}{\frac{(-1)^{n+1}}{2n+3}} \right| = \frac{2}{2} = 1$$

Luego la serie converge absolutamente en: $\langle -1; 1 \rangle$, dado que $x_0 = 0$

SERIES DE TAYLOR

Si una función «f» tiene derivadas de todo orden en un cierto intervalo alrededor de un punto x_0 se puede expresar como una serie de potencias del término $(x-x_0)$; es decir :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x_1 - x_0)^2 + \ldots$$

con intervalo de convergencia $\langle x_0 - r;\ x_0 + r \rangle$

* Donde los coeficientes «a_n» se obtendrán derivando $f(x)$ y evaluando en x_0, de la siguiente manera:

* $f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \ldots$

$$\to\ \boxed{f(x_0) = a_0}$$

* $f'_{(x)} = a_1 + 2a_2(x-x_0) + 3a_3(x-x_0)^2 + 4a_4(x-x_0)^3 + \ldots$

$$\to\ \boxed{f'(x_0) = a_1}$$

* $f''_{(x)} = 2a_2 + 3 \times 2a_3(x-x_0) + 4 \times 3a_4(x-x_0)^2 + \ldots$

$$\to\ \boxed{\frac{f''(x_0)}{2} = a_2}$$

* $f'''_{(x)} = 2 \times 3a_3 + 2 \times 3 \times 4a_4(x-x_0)^2 + \ldots$

$$\to\ \boxed{\frac{f'''(x_0)}{3!} = a_3}$$

$\vdots$

$$f^{(n)}_{(x)} = n!\,a_n + (n+1)!\,a_{n+1}(x-x_0) + (n+2)!\,a_{n+2}(x-x_0)^2 + \ldots$$

$$\Rightarrow\ \boxed{\frac{f^n(x_0)}{n!} = a_n}$$

Reemplazando estos valores en $f(x)$, se obtendrá :

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \ldots$$

Es decir :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

es la serie de Taylor alrededor del punto x_0.

SERIES DE MACLAURIN

Si en la serie de Taylor hacemos que $x_0 = 0$, entonces se tendrá :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}_{(0)}}{n!} x^n$$

Es decir :

$$f(x) = f(0) + f'(0) + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \ldots$$

EJEMPLO :

Determinar la serie de MACLAURIN de $f_{(x)} = \cos x$

RESOLUCIÓN :

* $f(x) = \cos x \Rightarrow f(0) = \cos 0° = 1$
* $f'(x) = -\operatorname{sen} x \Rightarrow f'(0) = -\operatorname{sen} 0° = 0$

$* f''(x) = -\cos x \Rightarrow f''(0) = -\cos 0° = -1$

$* f'''(x) = \operatorname{sen} x \Rightarrow f'''(0) = \operatorname{sen} 0° = 0$

En consecuencia :

$$f(x) = \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - ...$$

$$\rightarrow \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

NOTA :

Al integrar el « $\cos x$ » se obtendrá el desarrollo del $\operatorname{sen} x$, así :

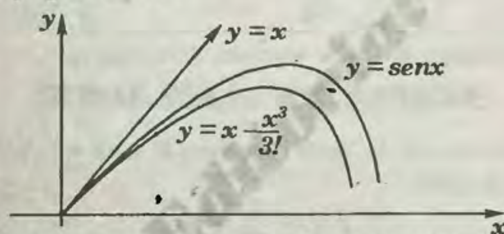
$$\operatorname{sen} x = \int \cos x\, dx = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - ...$$

$$\rightarrow \operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

* Ahora tabulemos y grafiquemos las funciones que se aproximan a $y = \operatorname{sen} x$.

Senx	x	$x - \frac{x^3}{3!}$
0	0	0
0,09983	0,1	0,0998
0,19867	0,2	0,1987
0,29550	0,3	0,2955
0,38930	0,4	0,38933

cuya gráfica será :



A continuación mostramos algunas funciones con su respectiva serie MACLAURIN.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + ... = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$\operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ...$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + ...$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + ... \quad , \forall |x| < 1$$

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} n x^{n-1} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + ... \quad , \forall |x| < 1$$

$$Ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + ...$$

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + ...$$

$$\operatorname{sen} hx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + ...$$

EJEMPLO 1

Determinar la serie de la $Tan x$

RESOLUCIÓN :

* Se sabe que : $Tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$

$$\rightarrow a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + ... = \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ...}{1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + ...}$$

$$\rightarrow a_0 + a_1 x + \left(a_2 - \frac{a_0}{2!}\right)x + \left(a_3 - \frac{a_1}{2!}\right)x^2 + ... = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} ...$$

Luego comparando los coeficientes, se obtendrá:

$$a_0 = 0;\ a_1 = 1;\ a_2 = 0 \rightarrow a_3 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{3!} \rightarrow a_3 = \frac{1}{3}$$

* Luego :

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + ...$$

↘ ↙

Estos coeficientes se hallan tomando más términos del "cosx"

EJEMPLO 2 :

Calcular : $1 + \frac{2}{3 \times 1!} + \frac{4}{9 \times 2!} + \frac{8}{27 \times 3!} + ...$

RESOLUCIÓN :

* De la serie : $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ...$

* Haciendo $x = \frac{2}{3}$, se obtendrá :

$$e^{\frac{2}{3}} = 1 + \frac{2}{3 \times 1!} + \frac{4}{9 \times 2!} + \frac{8}{27 \times 3!} + ...$$

* Entonces lo pedido , será : $e^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{e^2}$

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1 :

El valor de la siguiente suma :

$$S=\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\frac{1}{35}+...+\frac{1}{399} \text{ es:}$$

A) $\frac{99}{100}$ B) $\frac{100}{101}$ C) $\frac{199}{201}$ D) $\frac{10}{21}$ E) $\frac{300}{301}$

RESOLUCIÓN :

* Descomponiendo cada sumando, enfracciones parciales , así :

$$S=\frac{1}{1\times3}+\frac{1}{3\times5}+\frac{1}{5\times7}+...+\frac{1}{19\times21}$$

* Multiplicando por 2 :

$$2S=\frac{2}{1\times3}+\frac{2}{3\times5}+\frac{2}{5\times7}+...+\frac{2}{19\times21}$$

$$\rightarrow 2S=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+...+\frac{1}{19}-\frac{1}{21}$$

$$\rightarrow 2S=1-\frac{1}{21} \rightarrow 2S=\frac{20}{21} \rightarrow S=\frac{10}{21}$$

RPTA: "D"

PROBLEMA 2 :

En la siguiente suma $S=\underbrace{2\times4+4\times6+6\times8+...}_{\text{"n" términos}}$ el valor de n para que S sea igual a 2912 es :

A) 10 B) 11 C) 12 D) 13 E) 14

RESOLUCIÓN :

* Factorizando 4 en cada sumando :

$$S=4(2+6+12+...\text{"n" términos})$$

$$\rightarrow S=4[1\times2+2\times3+3\times4+...+n(n+1)]$$

$$\rightarrow S=4\sum_{k=1}^{n}k(k+1)=4\left(\sum_{k=1}^{n}k^2+\sum_{k=1}^{n}k\right)$$

$$\rightarrow S=4\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}\right]$$

$$\rightarrow S=\frac{4}{3}n(n+1)(n+2)$$

* Pero por dato :

$$\frac{4}{3}n(n+1)(n+2)=2912$$

* Transformando adecuadamente :

$$\rightarrow n(n+1)(n+2)=12\times13\times14 \rightarrow n=12$$

RPTA: "C"

PROBLEMA 3 :

Si $3\sum_{k=1}^{n}(k+1)(k+2)=83n$, entonces el valor de n es:

A) 10 B) 9 C) 8 D) 7 E) 6

RESOLUCIÓN :

* Transformando el miembro izquierdo :

$$\sum_{k=1}^{n}(k^2+3k+2)=\frac{83n}{3} \rightarrow \sum_{k=1}^{n}k^2+3\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}2=\frac{83n}{3}$$

$$\rightarrow \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{3n(n+1)}{2}+2n=\frac{83n}{3}$$

* Simplificando , se obtiene:

$$n^2+6n=72 \rightarrow n(n+6)=6\times12 \rightarrow n=6$$

RPTA: "E"

PROBLEMA 4 :

Si $\sum_{k=1}^{n}2k(3k-4)=15540$, entonces el valor de n es:

A) 18 B) 19 C) 20 D) 21 E) 22

RESOLUCIÓN :

* Aplicando directamente las propiedades de la sumatoria , se obtendrá : $3\sum_{k=1}^{n}k^2-4\sum_{k=1}^{n}k=7770$

$$\rightarrow \frac{3n(n+1)(2n+1)}{6}-4\frac{n(n+1)}{2}=7770$$

* Reduciendo :

$$n(n+1)(2n-3)=20\times21\times37$$

$$\rightarrow n=20$$

RPTA: "C"

PROBLEMA 5 :

En el siguiente sistema :

$$\begin{cases}\sum_{k=0}^{4}(ak+b)=10\\ \sum_{k=1}^{4}(ak+b)=14\end{cases}$$

el valor de $T=a-b$ es :

A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

RESOLUCIÓN :

* Restando miembro a miembro :

$$\underbrace{\sum_{k=0}^{4}(ak+b)}_{b+\sum_{k=1}^{4}(ak+b)}-\sum_{k=1}^{4}(ak+b)=-4$$

$$b+\sum_{k=1}^{4}(ak+b)-\sum_{k=1}^{4}(ak+b)=-4$$

$$\rightarrow b=-4$$

* Luego de la 2da ecuación :

$$\sum_{k=1}^{4}(ak-4)=14 \rightarrow a\left(\frac{4\times5}{2}\right)-4(4)=14 \rightarrow a=3$$

* Se pide : $T=3-(-4)=7$

RPTA: "B"

PROBLEMA 6 :

Si T es una expresión definida por :

$$T=\sum_{i=3}^{12}\left[\left(\sum_{k=1}^{40}(\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k-1})\right)(2i-5)\right]$$, entonces el valor de T es :

A) 400 B) 600 C) 700 D) 800 E) 900

RESOLUCIÓN :

* Analizando la parte interna :

$$T=\sum_{i=3}^{12}\left[\left(\sum_{k=1}^{40}\left(\underbrace{\sqrt{2k+1}}_{a_{k+1}}-\underbrace{\sqrt{2k-1}}_{a_k}\right)\right)(2i-5)\right]$$

* Por la propiedad telescópica :

$$T=\sum_{i=3}^{12}\left[\left(\sqrt{2(40)+1}-\sqrt{2(1)-1}\right)(2i-5)\right]$$

$$\rightarrow T=\sum_{i=3}^{12}[(9-1)(2i-5)] \rightarrow T=16\sum_{i=3}^{12}i-40\sum_{i=3}^{12}(1)$$

$$\rightarrow T=16\left(\frac{12\times13}{2}-3\right)-40(10\times1)$$

$$\rightarrow T=16(75)-400=800$$

RPTA: "D"

PROBLEMA 7 :

El valor de la siguiente suma :

$S=1+2\times3+3\times3^2+4\times3^3+5\times3^4+....+50\times3^{49}$ es :

A) 99×3^{50} B) $99\times3^{50}+1$ C) $\frac{99\times3^{50}+1}{2}$

D) $\frac{99\times3^{50}+1}{4}$ E) $\frac{99\times3^{50}+1}{6}$

RESOLUCIÓN :

* Se tiene :

$$S=1+2\times3+3\times3^2+4\times3^3+...+50\times3^{49}$$
$$3S=1\times3+2\times3^2+3\times3^3+...+49\times3^{49}+50\times3^{50}$$

* Luego de multiplicar por 3 a «S» (formándose la serie «3S»), y restar miembro a miembro resulta:

$$2S=50\times3^{50}-(1+3+3^2+3^3+...+3^{49})$$

$$\rightarrow 2S=50\times3^{50}-\frac{3^{50}-1}{3-1} \rightarrow S=\frac{99\times3^{50}+1}{4}$$

RPTA: "D"

PROBLEMA 8 :

Si M y N son dos series definidas por $M=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k^2}\right)$ y $N=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2k-1}\right)^2$ entonces la relación correcta entre M y N es :

A) $2M=3N$ B) $2N=5M$ C) $4N=3M$ D) $M=3N$ E) $4M=3N$

RESOLUCIÓN :

* Desarrollando «M», se obtiene :

$$M=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}+...$$

$$\rightarrow M=\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+...\right)+\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{6^2}+...\right)$$

$$\rightarrow M=\underbrace{\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+...\right)}_{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}}+\frac{1}{2^2}\underbrace{\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...\right)}_{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}}$$

$$\rightarrow M=N+\frac{1}{2^2}(M) \rightarrow 4M=4N+M \rightarrow 3M=4N$$

RPTA: "C"

PROBLEMA 9 :

Si S es una serie definida por :

$S=2+3+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{2}{9}+\frac{3}{16}+\frac{2}{27}+\frac{3}{64}+\frac{2}{81}+....$, entonces el valor de convergencia es :

A) 6 B) 7 C) 8 D) 15 E) 18

RESOLUCIÓN :

* Analizando se deduce que «S» se puede expresar como la suma de dos series geométricas decrecientes:

$$S=2\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+...\right)+3\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+..\right)$$

$$\rightarrow S=2\left(\frac{1}{1-\frac{1}{3}}\right)+3\left(\frac{1}{1-\frac{1}{4}}\right) \rightarrow S=2\left(\frac{3}{2}\right)+3\left(\frac{4}{3}\right)=7$$

RPTA: "B"

PROBLEMA 10 :

Si S es una serie definida por :

$S=\frac{1}{6}+\frac{13}{6^2}+\frac{19}{6^3}+\frac{97}{6^4}+...$, entonces el valor de convergencia es:

A) $\frac{3}{4}$ B) $\frac{7}{8}$ C) $\frac{4}{5}$ D) $\frac{35}{36}$ E) $\frac{5}{6}$

RESOLUCIÓN :

* Dando una forma conocida a cada sumando se obtiene :

$$S=\frac{3-2}{6}+\frac{3^2+2^2}{6^2}+\frac{3^3-2^3}{6^3}+\frac{3^4+2^4}{6^4}+...$$

$$\rightarrow S=\frac{3}{6}-\frac{2}{6}+\frac{3^2}{6^2}+\frac{2^2}{6^2}+\frac{3^3}{6^3}-\frac{2^3}{6^3}+\frac{3^4}{6^4}+\frac{2^4}{6^4}+...$$

$$\rightarrow S=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{2^3}-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+...$$

$$\rightarrow S=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+...\right)+\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{3^4}-\frac{1}{3^5}+...\right)$$

$$\times\frac{1}{2}\quad\times\frac{1}{2}\qquad\qquad\times\left(-\frac{1}{3}\right)\times\left(-\frac{1}{3}\right)$$

$$\rightarrow S=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}+\frac{-\frac{1}{3}}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)}=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

RPTA: "A"

PROBLEMA 11 :

Si S es una serie definida por $S=\frac{1}{6}+\frac{7}{72}+\frac{37}{864}+...$, entonces el valor de convergencia es :

A) $\frac{1}{12}$ B) $\frac{1}{6}$ C) $\frac{17}{33}$ D) $\frac{2}{3}$ E) 1

RESOLUCIÓN :

* Transformando los sumandos , así :

$$S=\frac{6^0+1}{6}+\frac{6^1+1}{72}+\frac{6^2+1}{864}+...$$

$$\rightarrow S=\left(\frac{6^0}{6}+\frac{6^1}{72}+\frac{6^2}{864}+...\right)+\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{72}+\frac{1}{864}+...\right)$$

$$\rightarrow S=\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{24}+...\right)+\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{72}+\frac{1}{864}+...\right)$$

$$\times\frac{1}{2}\quad\times\frac{1}{2}\qquad\qquad\times\frac{1}{12}\quad\times\frac{1}{12}$$

$$\rightarrow S=\frac{\frac{1}{6}}{1-\frac{1}{2}}+\frac{\frac{1}{6}}{1-\frac{1}{12}}=\frac{1}{3}+\frac{2}{11}=\frac{17}{33}$$

RPTA: "C"

PROBLEMA 12 :

Si S es una serie definida por :

$S=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2^{k+2}-6k^2-6k}{2^k k^2+2^k k}\right)$, entonces el valor de convergencia es :

A) -1 B) -2 C) -3 D) -4 E) 2

RESOLUCIÓN :

* Transformando la sumatoria , así :

$$S=\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{2^{k+2}}{2^k(k^2+k)}-\frac{6(k^2+k)}{2^k(k^2+k)}\right]$$

$$\rightarrow S=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^2}{k^2+k}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{6}{2^k}$$

$$\rightarrow S=2^2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)}-6\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k$$

$$\rightarrow S=2^2\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)-6\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k$$

$$\rightarrow S=2^2(1-0)-\frac{6\times\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=2^2-6\rightarrow S=-2$$

RPTA: "B"

PROBLEMA 13 :

Si S es una serie definida por $S=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2k-1}{2^k.(k!)}$, entonces el valor de la convergencia de S es :

A) $\frac{3}{2}$ B) 1 C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{1}{4}$ E) 0

RESOLUCIÓN :

* Transformando adecuadamente :

$$S=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2k}{2^k.(k!)}-\frac{1}{2^k.(k!)}\right)$$

$$\rightarrow S=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\underbrace{\frac{1}{2^{k-1}.(k-1!)}}_{a_k}-\underbrace{\frac{1}{2^k.(k!)}}_{a_{k+1}}\right)$$

* Luego aplicando la propiedad telescópica , resulta:

$$S\cong\frac{1}{2^0\times 0!}-\frac{1}{2^{\infty}\times\infty!}\cong 1-0\rightarrow S=1$$

RPTA: "B"

PROBLEMA 14 :

Si S es una serie definida por $S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7}{(5n+2)(5n-3)}$, entonces el valor de convergencia es:

A) $\frac{1}{10}$ B) $\frac{7}{10}$ C) $\frac{7}{9}$ D) $\frac{7}{8}$ E) $\frac{10}{7}$

RESOLUCIÓN :

* Tratando de dar una forma tal , que se pueda aplicar la propiedad telescópica , así :

$$S=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{7}{(5k+2)(5k-3)}$$

$$\rightarrow S=\lim_{n\to\infty}.\frac{7}{5}\sum_{k=1}^{n}\frac{5}{(5k+2)(5k-3)}$$

$$\rightarrow S=\lim_{n\to\infty}.\frac{7}{5}\sum_{k=1}^{n}\left(\underbrace{\frac{1}{5k-3}}_{a_k}-\underbrace{\frac{1}{5k+2}}_{a_{k+1}}\right)$$

* Por la propiedad telescópica :

$$S=\lim_{n\to\infty}.\frac{7}{5}\left(\frac{1}{5(1)-3}-\frac{1}{5n+2}\right)$$

$$\rightarrow S=\lim_{n\to\infty}.\frac{7}{5}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5n+2}\right)=\frac{7}{5}\left(\frac{1}{2}-0\right)\rightarrow S=\frac{7}{10}$$

RPTA: "B"

PROBLEMA 15 :

Si S es una serie definida por

$$S=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{Ln\sqrt[n]{e}\cdot Log_2\left(e^{(n+1)!}\right)},$$ entonces el valor de convergencia es :

A) $Ln4$ B) $Ln2$ C) $\frac{1}{2}Ln2$ D) 1 E) $\frac{1}{e}$

RESOLUCIÓN :

* Aplicando las propiedades de los logaritmos , se obtendrá :

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\frac{1}{n}.(n+1)!\,Lne\,.\log_2 e}=\frac{1}{Log_2 e}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)!}$$

$$\rightarrow S=Ln2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1-1}{(n+1)!}=Ln2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{(n+1)!}-\frac{1}{(n+1)!}\right)$$

$$\rightarrow S=Ln2\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}\right]$$

*Aplicando la propiedad telescópica , se obtendrá :

$$S=Ln2\left(\frac{1}{1!}-\frac{1}{\infty!}\right)=Ln2(1-0)\rightarrow S=Ln2$$

RPTA: "B"

PROBLEMA 16 :

Si S es una serie definida por

$$S=\frac{1}{2\times 0!}+\frac{1}{3\times 1!}+\frac{1}{4\times 2!}+\frac{1}{5\times 3!}+...,$$ entonces el valor de convergencia es:

A) 1 B) E C) $\frac{1}{e}$ D) $Ln2$ E) la serie es divergente

RESOLUCIÓN :

* Dándole una forma de sumatoria , así :

$$S=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k+2)k!}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k+1}{(k+2)(k+1)k!}$$

$$\rightarrow S=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k+1}{(k+2)!}=\sum_{k=0}^{\infty}\left\{\frac{k+2}{(k+2)!}-\frac{1}{(k+2)!}\right\}$$

$$\rightarrow S=\sum_{k=0}^{\infty}\left\{\frac{1}{(k+1)!}-\frac{1}{(k+2)!}\right\}$$

*Aplicando la propiedad telescópica , se obtiene:

$$S=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{(0+1)!}-\frac{1}{(n+2)!}\right\}\rightarrow S=1-0=1$$

RPTA: "A"

PROBLEMA 17 :

Estudiar si la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n+1)(3n+4)}$, es convergente , si lo es , calcule su suma .

RESOLUCIÓN :

* Tratando de formar la propiedad telescópica , así:

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3k+1}-\frac{1}{3k+4}\right)=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{3k+1}-\frac{1}{3k+4}\right)$$

$$\rightarrow S_n=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{3k+1}-\frac{1}{3(k+1)+1}\right]=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{3n+4}\right)$$

* Luego : $\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{3n+4}\right)\right]=\frac{1}{12}$

* Entonces la serie dada converge en $\frac{1}{12}$.

PROBLEMA 18 :

Sea $r_0=\frac{1}{2}$; para $k=1; 2; 3; ...$ se cumple:

$$r_k=\frac{1}{2^k+1}+\frac{1}{2^k+2}+...+\frac{1}{2^k+2^k},$$ entonces la serie $S_k=r_0+r_1+r_2+...+r_k$

A) converge a cero B) converge a 1/2
C) converge a 1 D) crece indefinidamente
E) oscila al crecer k

RESOLUCIÓN :

* Tabulando:

Para $k=1$: $r_1=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$

Para $k=2$: $r_2=\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}$

Para $k=3$: $r_3=\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+...$

$$\Rightarrow S_k=r_0+r_1+r_2+...+r_k$$

$$k=\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+...\right)$$

→Se forma la serie armónica que crece indefinidamente .

RPTA: "D"

PROBLEMA 19 :

Analizar la convergencia o divergencia de la

siguiente serie :

$I)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{2n!+1}$ $II)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{3^k+1}$ $III)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}+n}{Ln\,n}$

$IV)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{5n^4-2}$ $V)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5n^4-1}{n^7+2n+1}$ $VI)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n^2+3n}{n^3+5}$

RESOLUCIÓN :

I) Se tiene :

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{2n!+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left[\frac{2n!+1}{2n!+1}-\frac{1}{2n!+1}\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left[1-\frac{1}{2n!+1}\right]=\frac{1}{2}\neq 0$$

* Así pues , el límite del término general no es cero y , en consecuencia, la serie diverge.

II) Si $k\geq 0$ se tiene que $3^k+1>3^k>0$ y por tanto

$$0<\frac{1}{3^k+1}<\frac{1}{3^k}$$

* Luego , la serie dada está dominada por la serie geométrica $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{3^k}$, que es convergente , porque $r=\frac{1}{3}$

* Finalmente el criterio de comparación nos dice que la serie dada es convergente .

III) Veamos : $\underbrace{\frac{\sqrt{n}+n}{Lnn}}_{b_n}>\frac{\sqrt{n}}{Lnn}>\frac{\sqrt{n}}{n}=\frac{1}{\sqrt{n}}=\underbrace{\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}}}_{a_n}$

* Tenemos que $a_n<b_n$ y como $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ diverge entonces $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ diverge .

IV) Haciendo : $a_n=\frac{n^3}{5n^4-2}\wedge b_n=\frac{1}{n}$

* Sabemos que $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ es divergente

* Veamos a qué es igual :

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^4}{5n^4-2}=\frac{1}{5}>0$$

* Por la comparación por límites : $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ diverge .

V) Utilicemos el criterio de «n^P»

* Tomando : $n^P=n^3$

$$\to \lim_{n\to\infty}n^3a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3\left(5n^4-1\right)}{n^7+2n+1}=\underbrace{5}_{finito}$$ y $P>1\Rightarrow$ la serie converge.

VI) Tomando : $n^P=n^1$

$$\to \lim_{n\to\infty}na_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(2n^2+3n\right)}{n^3+5}=2\neq 0$$ y $P\leq 1\Rightarrow$ la serie diverge .

PROBLEMA 20 :

¿Converge $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5^n+1}$?

RESOLUCIÓN :

Utilicemos el criterio de la comparación , dado que: $0\leq\frac{1}{5^n+1}<\frac{1}{5^n}$; y como $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5^n}$ converge (dado que es una serie geométrica decreciente de razón $\frac{1}{5}$); entonces : $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5^n+1}$ converge .

PROBLEMA 21 :

¿converge $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n^2-n+8}{n^3+8n}$?

RESOLUCIÓN :

Consideremos adicionalmente la serie divergente:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

* Ahora por el criterio de la comparación por límites, se tendrá que :

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{4n^2-n+8}{n^3+8n}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4-\frac{1}{n}+\frac{8}{n^2}}{1+\frac{8}{n^2}}\right)=4=L$$

$\to L>0\wedge L\neq\infty$ (entonces ambas divergen o ambas convergen) $\to\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n^2-n+8}{n^3+8n}$, diverge.

PROBLEMA 22 :

Analizar la convergencia de:

$I)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+3}{2n}\right)^n$ $II)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n^3-7}{3n^4+5n+2}$

RESOLUCIÓN :

I) Como :

$$a_n=\left(1+\frac{3}{2n}\right)^n=\left(1+\frac{3/2}{n}\right)^n\to\lim_{n\to\infty}a_n=e^{3/2}\to\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+3}{2n}\right)^n$$

diverge , dado que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$

II) Por ser el término general una expresión racional en que el grado del denominador es mayor en *1* que el del numerador , usaremos el criterio de n^P con $P=1$, luego : $\lim\limits_{n\to\infty} n^P a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^1(2n^3-7)}{3n^4+5n+2} = \dfrac{2}{3} \neq 0 \wedge \neq \infty$;

entonces la serie original diverge .

PROBLEMA 23 :

Si la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x^2-1)n+1}{2n-3}$ es convergente , determine el valor que puede tomar $x \in \mathbb{R}$.

A) 1 ó 2 *B) 1 ó –1* *C) 2 ó 4* *D) 4* *E)* $\sqrt{2}$

RESOLUCIÓN :

* Como la serie es convergente , entonces :

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{(x^2-1)n+1}{2n-3} = 0$$

* Por propiedad de límites , dividimos los coeficientes principales , es decir $\dfrac{x^2-1}{2} = 0$

* Por lo tanto : $x = 1$ ó $x = -1$

RPTA: "B"

PROBLEMA 24 :

Indicar el valor de verdad de las siguientes proposiciones :

I) Si $0<a<b<1$, entonces la serie $S = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a^{bk}$ es convergente.

II) La serie $T = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\dfrac{1}{k(k+1)}\right)$ es convergente .

III) La serie $S = \dfrac{1}{7} + \dfrac{5}{49} + \dfrac{19}{343} + \ldots$ es divergente.

A) VVV *B) FVF* *C) VVF* *D) FFV* *E) VFF*

RESOLUCIÓN :

I) Como se trata de una serie geométrica decreciente , entonces es convergente . $(0<a^b<1)$

II) Se observa que se trata de una serie telescópica, entonces será convergente .

III) Dando forma conocida a los sumandos :

$$S = \frac{3-2}{7} + \frac{3^2-2^2}{7^2} + \frac{3^3-2^3}{7^3} + \ldots$$

$$\to S = \left\{\frac{3}{7} + \left(\frac{3}{7}\right)^2 + \left(\frac{3}{7}\right)^3 + \ldots\right\} - \left\{\frac{2}{7} + \left(\frac{2}{7}\right)^2 + \left(\frac{2}{7}\right)^3 + \ldots\right\}$$

$$\to S = \frac{\frac{3}{7}}{1-\frac{3}{7}} - \frac{\frac{2}{7}}{1-\frac{2}{7}} = \frac{3}{4} - \frac{2}{5} = \frac{7}{20}$$

$\to$ ***S es convergente.***

RPTA: "C"

PROBLEMA 25 :

Analizar la convergencia de :

$$I)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{3n+1}-\sqrt{3n}}{n} \qquad II)\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$

RESOLUCIÓN :

I) Como :

$$0 < \frac{\sqrt{3n+1}-\sqrt{3n}}{n} = \frac{1}{n(\sqrt{3n+1}+\sqrt{3n})} < \frac{1}{n(\sqrt{3n}+\sqrt{3n})} = \frac{1}{2\sqrt{3}n^{3/2}};$$

donde la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^{3/2}}$ converge, dado que corresponde a $\sum \dfrac{1}{n^P} \wedge P>1$

* Luego por el criterio de la comparación directa , se tendrá que la serie *(I)* converge .

II) Utilizando el criterio de la raíz :

$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n} = 1$, luego no se puede concluir nada; sin embargo si analizamos :

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} \neq 0,$$

$\Rightarrow$ La serie *(II)* diverge dado que: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$

PROBLEMA 26 :

Si f es una función, entonces indicar el valor de verdad de cada una de las afirmaciones siguientes :

$$I)\sum_{k=1}^{n+1} [f(k+2)-f(k)] = f(n+2)-f(n)$$

$$II)\sum_{k=1}^{n} x^{k+1} = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$$

$$III)\sum_{k=1}^{n} x^{n+k} = \frac{x^{n+1}(x^n-1)}{x-1}$$

A) FFV *B) VVV* *C) VFV* *D) VFF* *E) FFF*

RESOLUCIÓN :

I) Descomponiendo , así :

$$\sum_{k=1}^{n+1}[f(k+2)-f(k)]$$

$$=\sum_{k=1}^{n+1}[f(k+2)-f(k+1)+f(k+1)-f(k)]$$

$$=\sum_{k=1}^{n+1}[f(k+2)-f(k+1)]+\sum_{k=1}^{n+1}[f(k+1)-f(k)]$$

* Pero por la propiedad telescópica :

$$\sum_{k=1}^{n+1}[f(k+2)-f(k)]=f(n+3)-f(2)+f(n+2)-f(1)n$$

II) Desarrollando :

$$\sum_{k=1}^{n}x^{k+1}=x^2+x^3+x^4+x^5+...+x^{n+1}$$

$$\to \sum_{k=1}^{n}x^{k+1}=x^2\left(1+x+x^2+...+x^{n-1}\right)$$

$$\to \sum_{k=1}^{n}x^{k+1}=x^2\left(\frac{x^n-1}{x-1}\right)=\frac{x^{n+2}-x^2}{x-1}$$

III) Desarrollando :

$$\sum_{k=1}^{n}x^{n+k}=x^{n+1}+x^{n+2}+x^{n+3}+...+x^{2n}$$

$$\to \sum_{k=1}^{n}x^{n+k}=x^{n+1}\left(1+x+x^2+x^3+...+x^{n-1}\right)$$

$$\to \sum_{k=1}^{n}x^{n+k}=x^{n+1}\left(\frac{x^n-1}{x-1}\right)$$

RPTA: "A"

PROBLEMA 27 :

Si el número de Néper «e» se puede aproximar mediante la siguiente serie:

$e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+...$; entonces el valor de convergencia de la serie

$S=\frac{1}{(1!)(4\times5)}+\frac{1}{(2!)(5\times6)}+\frac{1}{(3!)(6\times7)}+\frac{1}{(4!)(7\times8)}+...$ es:

A) $3e-\frac{17}{12}$ B) $3e-\frac{90}{13}$ C) $3e-\frac{97}{12}$ D) $3e-\frac{86}{13}$ E) $3e-\frac{89}{12}$

RESOLUCIÓN :

* Transformando los sumandos :

$$S=\frac{2\times3}{(1!)2\times3\times4\times5}+\frac{3\times4}{(2!)3\times4\times5\times6}+\frac{4\times5}{(3!)4\times5\times6\times7}+\frac{5\times6}{(4!)5\times6\times7\times8}+...$$

$$\to S=\frac{2\times3}{5!}+\frac{3\times4}{6!}+\frac{4\times5}{7!}+\frac{5\times6}{8!}+...$$

$$\to S=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(k+2)(k+3)}{(k+5)!}$$

$$\to S=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k^2+5k+6}{(k+5)!}=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{k}{(k+4)!}+\frac{6}{(k+5)!}\right)$$

$$\to S=\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{k+4-4}{(k+4)!}+\frac{6}{(k+5)!}\right]$$

$$\to S=\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{1}{(k+3)!}-\frac{4}{(k+4)!}+\frac{6}{(k+5)!}\right]$$

$$\to S=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k+3)!}-4\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k+4)!}+6\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k+5)!}$$

$$\to S=\sum_{k=3}^{\infty}\frac{1}{k!}-4\sum_{k=4}^{\infty}\frac{1}{k!}+6\sum_{k=5}^{\infty}\frac{1}{k!}$$

$$\to S=\left[e-\left(1+1+\frac{1}{2}\right)\right]-4\left[e-\left(1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\right)\right]+6\left[e-\left(1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}\right)\right]$$

$$\to S=\left(e-\frac{5}{2}\right)-4\left(e-\frac{8}{3}\right)+6\left(e-\frac{65}{24}\right)\to S=3e-\frac{97}{12}$$

RPTA: "C"

PROBLEMA 28 :

Si S es una serie definida por : $S=1+\frac{2}{3}+\frac{4}{18}+\frac{8}{162}+\frac{16}{1944}+...$ entonces el valor de convergencia es :

A) $\sqrt[3]{e^2}$ B) $\sqrt[5]{e}$ C) $\sqrt[7]{e}$ D) $\sqrt[8]{e^3}$ E) $\sqrt[4]{e^3}$

RESOLUCIÓN :

* Considerando que :

$$1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+...=e^x;\ \forall x\in\mathbb{R}$$

$$\to S=1+\frac{2}{3}+\frac{4}{18}+\frac{8}{162}+\frac{16}{1944}+...$$

$$\to S=1+\frac{2}{3\times1}+\frac{2^2}{3^2\times2}+\frac{2^3}{3^3\times6}+\frac{2^4}{3^4\times24}+...$$

* Esto se puede colocar así :

$$S=1+\frac{\frac{2}{3}}{1!}+\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^2}{2!}+\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^3}{3!}+\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^4}{4!}+...$$

$$\to S=e^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{e^2}$$

RPTA: "A"

PROBLEMA 29 :

Si T es una serie definida por

$T=\pi+\frac{\pi}{\sqrt{2}}+\frac{\pi}{\sqrt{2^2}}+\frac{\pi}{\sqrt{2^3}}+...\frac{\pi}{\sqrt{2^{n-1}}}+...$, entonces el valor de la convergencia es :

A) $\frac{\sqrt{2}\pi}{\sqrt{2}-1}$ B) $\frac{\pi}{\sqrt{2}+1}$ C) $(\sqrt{2}-1)\pi$ D) $\frac{\pi}{\sqrt{2}-1}$ E) $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$

RESOLUCIÓN :

*Analizando se deduce que se trata de una progresión geométrica decreciente de razón : $1/\sqrt{2}$

* Entonces : $T=\dfrac{\pi}{1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}}=\dfrac{\pi\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$

RPTA: "D"

PROBLEMA 30 :

Si $Ln2=1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{6}+\ldots$, entonces el valor de convergencia de la serie :

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1+(-1)^n}{2}\cdot\frac{1}{10^n}+\frac{1+(-1)^n}{2}\cdot\frac{1}{n(n+1)}\right\}\text{ es :}$$

A) $\dfrac{100}{99}+2Ln2$ B) $\dfrac{100}{99}-Ln2$ C) $\dfrac{100}{99}+Ln2$

D) $\dfrac{99}{100}+Ln2$ E) $\dfrac{99}{100}-Ln2$

RESOLUCIÓN :

* Descomponiendo la sumatoria , así :

$$S=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+(-1)^n}{10^n}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+(-1)^n}{n(n+1)}$$

$$\rightarrow S=\frac{1}{2}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{10}\right)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{10}\right)^n\right\}+\frac{1}{2}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(n+1)}\right\}$$

$$\rightarrow S=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{9}-\frac{1}{11}\right\}+\frac{1}{2}\left\{1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}\right\}$$

$$\rightarrow S=\frac{1}{99}+\frac{1}{2}\left\{1+(-1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}\right\}$$

* Pero : $Ln2=1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{6}+\ldots=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$

* Entonces reemplazando :

$$S=\frac{1}{99}+\frac{1}{2}\left\{1-Ln2+\underbrace{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\ldots\right)}_{1-Ln2}\right\}$$

$$\rightarrow S=\frac{1}{99}+1-Ln2=\frac{100}{99}-Ln2$$

RPTA: "B"

PROBLEMA 31 :

Aplicar el criterio de la integral para determinar la convergencia o divergencia de las siguientes series

A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2}{(3n+5)^2}$ B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(n+2)^{\frac{3}{2}}}$

C) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{Ln\,n}{n^3}$ D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{e^{1/n}}{n^2}$

RESOLUCIÓN :

A) Sea : $f(x)=\dfrac{2}{(3x+5)^2}$; para $x\geq 1$

$x_1<x_2\rightarrow(3x_1+5)^2<(3x_2+5)^2$

$\rightarrow\dfrac{2}{(3x_1+5)^2}>\dfrac{2}{(3x_2+5)^2}$

$\Rightarrow f$ es continua ,decreciente y de valores positivos $\forall\geq 1$.

por lo tanto ,se puede aplicar la prueba de la integral:

$$\int_1^{\infty}\frac{2}{(3x+5)^2}dx=\lim_{b\to\infty}\int_1^{b}\frac{2}{(3x+5)^2}dx$$

$$=\lim_{b\to\infty}\left[-\frac{2}{3}\frac{1}{(3x+5)}\right]\Bigg|_1^b=\lim_{b\to\infty}\left[-\frac{2}{3}\frac{1}{(3b+5)}+\frac{2}{24}\right]=\frac{1}{12}$$

* por lo tanto la serie de *(A)* es convergente .

B) sea : $f(x)=\dfrac{1}{(x+2)^{\frac{3}{2}}}$; para $x>1$

$x_1<x_2\rightarrow(x_1+2)^{\frac{3}{2}}<(x_2+2)^{\frac{3}{2}}$

$\rightarrow\dfrac{1}{(x_1+2)^{\frac{3}{2}}}>\dfrac{1}{(x_2+2)^{\frac{3}{2}}}$

$\Rightarrow f$ es continua ,decreciente y de valores positivos $\forall\geq 1$.

por lo tanto, se puede aplicar la prueba de la integral:

$$\int_1^{\infty}\frac{1}{(x+2)^{\frac{3}{2}}}dx=\lim_{b\to\infty}\int_1^{b}\frac{2}{(x+2)^{\frac{3}{2}}}dx$$

$$=\lim_{b\to\infty}\left[-\frac{2}{(x+2)^{\frac{1}{2}}}\right]\Bigg|_1^b=\lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{(b+2)^{\frac{1}{2}}}+\frac{2}{\sqrt{3}}\right]=\frac{2}{\sqrt{3}}$$

* por lo tanto la serie de *(B)* es convergente .

C) Sea : $f(x)=\dfrac{Lnx}{x^3}$

$\rightarrow f'(x)=\dfrac{1-3Lnx}{x^4}$; cuando $x\geq 2$, $f'(x)$ es negativo

$\Rightarrow f$ es continua ,decreciente y de valores positivos $\forall\geq 2$.

por lo tanto ,se puede aplicar la prueba de la integral:

$$\int_2^{\infty}\frac{Lnx}{x^3}dx=\lim_{b\to\infty}\int_2^{b}\frac{Lnx}{x^3}dx$$

*luego de aplicar la integracion por partes se obtiene:

$$\lim_{b\to\infty}\left[-\frac{Lnb}{2b^2}-\frac{1}{4b^2}+\frac{Ln2}{8}+\frac{1}{16}\right]\Bigg|_1^b=\lim_{b\to\infty}\left[-\frac{Lnb}{2b^2}\right]+\frac{Ln2}{8}+\frac{1}{16}$$

*luego de aplicar h'ospital se obtiene:

$$\lim_{b\to\infty}\int_2^{b}\frac{Lnx}{x^3}dx=\frac{Ln2}{8}+\frac{1}{16}$$

* por lo tanto la serie de *(C)* es convergente .

D) sea : $f(x)=\frac{e^{1/x}}{x^2}$

$\rightarrow f'(x)=\frac{1}{x^2}e^{1/x}\left(-\frac{1}{x^2}\right)+e^{1/x}\left(-\frac{2}{x^3}\right)$

$\rightarrow f'(x)=-\frac{e^{1/x}}{x^2}\left(\frac{1}{x}+2\right)$; cuando $x\geq 1$

, $f'(x)$ es negativo $\Rightarrow f$ es continua , decreciente y de valores positivos $\forall\geq 1$. por lo tanto , se puede aplicar la prueba de la integral:

$$\int_1^{\infty}\frac{e^{1/x}}{x^2}dx=\lim_{b\to\infty}\int_2^{\infty}\frac{e^{1/x}}{x^2}dx$$

$$\lim_{b\to\infty}\int_2^{\infty}\left(\frac{e^{1/x}}{x^2}\right)dx\Bigg|_1^b=\lim_{b\to\infty}\int_1^b\left(-e^{-1/x}\right)d\left(\frac{1}{x}\right)\Bigg|_1^b$$

$$\lim_{b\to\infty}\left(-e^{-1/x}+e\right)=e$$

* por lo tanto la serie de *(D)* es convergente .

PROBLEMA 32:

Aplicar el criterio de las series alternantes para determinar la convergencia o divergencia de las siguientes series :

A) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}sen\frac{\pi}{n}$ *B)* $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n^2}{n^3+2}$

C) $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{Ln\,n}{n^2}$ *D)* $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{3^n}{n}$

RESOLUCIÓN :

A) la serie dada es alterna, con :

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}sen\frac{\pi}{n}=0$$

*demostraremos que $a_{n+1}<a_n$, así :

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{sen\frac{\pi}{n+1}}{sen\frac{\pi}{n}}<1\rightarrow a_{n+1}<a_n$$

*entonces por el criterio de las series alternantes concluímos que la *(A)* es convergente .

B) la serie dada es alterna, con :

$$a_n=\frac{n^2}{n^3+2}\wedge a_{n+1}=\frac{(n+1)^2}{(n+1)^3+2}$$

*donde :

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^3+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+\frac{2}{n^3}}=0$$

* demostraremos que $a_{n+1}<a_n$, así :

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\frac{(n+1)^2}{(n+1)^3+2}}{\frac{n^2}{n^3+2}}=\frac{(n^2+2n+1)(n^3+2)}{n^2\left[(n^3+1)+2\right]}<1$$

$\rightarrow a_{n+1}<a_n;\forall n\in\mathbb{Z}^+$

*entonces por el criterio de las series alternantes concluímos que la *(B)* es convergente.

C) la serie dada es alterna, con :

$$a_n=\frac{Ln\,n}{n^2}\wedge a_{n+1}=\frac{Ln(n+1)}{(n+1)^2}$$

*donde : $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{Ln\,n}{n^2}=\frac{\infty}{\infty}$

*por h'ospital : $\lim_{n\to\infty}\frac{Ln\,n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{(1/n)}{2n}=0$

*demostraremos que $a_{n+1}<a_n$, así :

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\frac{Ln\,n}{n^2}}{\frac{Ln(n+1)}{(n+1)^2}}=\frac{n^2}{(n+1)^2}\times\frac{Ln(n+1)}{Ln\,n}<1$$

$\rightarrow a_{n+1}<a_n;\forall n\in\mathbb{Z}^+$

*entonces por el criterio de las series alternantes concluímos que la *(C)* es convergente.

D) la serie dada es alterna, con :

$$a_n=\frac{3^n}{n^2}\wedge a_{n+1}=\frac{3^{(n+1)}}{(n+1)^2}$$

*donde : $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{3^n}{n^2}=\frac{\infty}{\infty}$

*por 2 veces h'ospital :

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^nLn3}{2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^n(Ln3)^2}{2}=\infty$$

*entonces por el criterio de las series alternantes , donde el límite no existe concluímos que la *(D)* es divergente .

PROBLEMA 33:

Determinar el intervalo de convergencia de :

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^{n+1}x^{2n}}{n+3}$$

RESOLUCIÓN :

*sea : $a_n=\frac{4^{n+1}x^{2n}}{n+3}\wedge a_{n+1}=\frac{4^{n+2}x^{2n+2}}{n+4}$

*aplicando el criterio de la razón :

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{4^{n+2}x^{2n+2}}{n+4}\times\frac{n+3}{4^{n+1}x^{2n}}\right|$$

$$\lim_{n\to x}\left|x^2\right|\frac{4(n+3)}{n+4}=4x^2$$

* como : $4x^2<1\rightarrow -\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}$

* para : $x=\frac{1}{2}\wedge x=-\frac{1}{2}$ se tiene la serie divergente

$$\sum_{n=0}^{x}\frac{4^{n+1}x^{2n}}{n+3}$$

* por lo tanto , el intervalo de convergencia es $\left\langle -\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right\rangle$

PROBLEMA 34 :

Calcular $cos58°$ aproximadamente con 4 cifras decimal es:

RESOLUCIÓN :

* Sabemos que : $\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+...$

* se nos pide $cos58°$, de donde :

$$58°=\frac{58\pi}{180}rad=\frac{29\pi}{90}$$

$$\rightarrow \cos 58°=1-\frac{1}{2!}\left(\frac{58\pi}{180}\right)^2+\frac{1}{4!}\left(\frac{58\pi}{180}\right)^4-\frac{1}{6!}\left(\frac{58\pi}{180}\right)^6+...$$

$$\rightarrow \cos 58°=1-0,5123665+0,043753-0,001494$$

$$\rightarrow \cos 58°=0,5299$$

PROBLEMA 34 :

Calcular $\sqrt[5]{e}$ aproximadamente con 4 cifras decimales.

RESOLUCIÓN :

* Sabemos que :

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}+....$$

* se nos pide $\sqrt[5]{e}$, de donde : $x=\frac{1}{5}$

$$\rightarrow e^{\frac{1}{5}}=1+\frac{1}{5}+\left(\frac{1}{5}\right)^2\frac{1}{2!}+\left(\frac{1}{5}\right)^3\frac{1}{3!}+\left(\frac{1}{5}\right)^4\frac{1}{4!}+\left(\frac{1}{5}\right)^5\frac{1}{5!}+....$$

$$\rightarrow e^{\frac{1}{5}}=1+\frac{1}{5}+\frac{1}{25}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{125}\times\frac{1}{6}+\frac{1}{625}\times\frac{1}{24}+\frac{1}{3125}\times\frac{1}{120}+....$$

$$\rightarrow e^{\frac{1}{5}}=1-0,2+0,02+0,001333+0,000066+0,0000026$$

$$\Rightarrow \sqrt[5]{e}=1,2214$$

EJERCICIOS

I) Determinar si convergen o no las siguientes series :

A) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3+1}}$ ....Rpta : "converge"

B) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{5n^2+3}$ ....Rpta : "diverge"

C) $\sum_{n=1}^{\infty}sen\frac{1}{n}$ ....Rpta : "diverge"

D) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|csc\, n|}{n}$ ....Rpta : "converge"

E) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+\sqrt{n}}$ ....Rpta : "diverge"

F) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{n^2+1}$ ....Rpta : "converge"

G) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+\sqrt{n}}$ ....Rpta : "diverge"

H) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Ln\, n}{n^2+1}$ ....Rpta : "converge"

I) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n-\cos n}$ ....Rpta : "converge"

J) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{2n}$ ....Rpta : "converge"

III) Determinar el intervalo de convergencia de las siguientes series de potencias :

A) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2x^n}{2^n}$ ....Rpta : $\langle -2;2\rangle$

B) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2+1}$ ....Rpta : $[-1;1]$

C) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^nx^n}{n^2}$ ....Rpta : $\left\langle -\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right\rangle$

D) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$ ....Rpta : $\langle -\infty;\infty\rangle$

E) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{(2n-1)3^{2n-1}}$ ......Rpta : $< -9;2]$

F) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{Ln(n+1)}$ ....Rpta : $[-1;1>$

G) $\sum_{n=1}^{\infty}n^n(x-3)^n$ ....Rpta : $\{3\}$

H) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!x^n}{n^n}$ ....Rpta : $\langle -e;e\rangle$

I) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1\times 3\times 5\times .....\times(2n-1)}{2\times 4\times 6\times ....\times(2n)}x^{2n+1}$...

....Rpta : $[-1;1]$

IV) Demostrar el desarrollo de las siguientes series de potencias , y determinar el radio de convergencia

A) $tgx = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \frac{62x^9}{2835} + ...$

B) $ctgx = \frac{1}{x} - \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} - \frac{2x^5}{945} - \frac{x^7}{4725} - ......$

C) $\sec x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + \frac{61x^7}{720} + \frac{277x^9}{8064} + ...$

D) $\operatorname{cosec} x = \frac{1}{x} + \frac{x}{6} + \frac{7x^3}{360} + \frac{61x^8}{720} + \frac{277x^8}{8064} + ...$

E) $(1 \pm x)^{-n} = 1 \mp nx + \frac{n(n+1)x^2}{2!} \mp \frac{n(n+1)(n+2)x^3}{3!} + ...$

F) $a^x = 1 + xLna + \frac{(xLna)^2}{2!} + \frac{(xLna)^3}{3!} + ...$

G) $Ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + ... + \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + ...\right)$

H) $arcsenx = x + \frac{x^3}{2\times3} + \frac{1\times3x^5}{2\times4\times5} + \frac{1\times3\times5x^7}{2\times4\times6\times7} + ...$

I) $arc\cos x = \frac{\pi}{2} - \left(x + \frac{x^3}{2\times3} + \frac{1\times3x^5}{2\times4\times5} + \frac{1\times3\times5x^7}{2\times4\times6\times7} + ...\right)$

J) $arctgx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + ...$

K) $Lnsenx = Lnx - \frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{180} - \frac{17x^7}{2835} - ......$

L) $Ln\cos x = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} - \frac{x^6}{45} - \frac{17x^8}{2520} - ......$

M) $Lntgx = Lnx + \frac{x^2}{3} + \frac{7x^4}{90} + \frac{62x^6}{2835} + ...$

N) $e^{tgx} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{3x^3}{3!} + \frac{9x^4}{4!} + \frac{37x^5}{5!} + ...$

O) $e^{senx} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} - \frac{3x^4}{4!} - \frac{8x^5}{5!} - \frac{3x^6}{6!} + \frac{56x^7}{7!} + ...$

P) $e^{\cos x} = e\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{4x^4}{4!} - \frac{31x^6}{6!} + ...\right)$

Q) $senhx = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + ... + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

R) $\cosh x = 1 + \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + ... + \frac{x^{2n}}{(2n)!}$

S) $tghx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} - \frac{17x^7}{315} + \frac{62x^9}{2835} - ......$

T) $arctghx = x + \frac{x^2}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + ... + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + ...$

U) $arc\,cotghx = \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{5x^5} + ... + \frac{1}{(2n+1)x^{2n+1}} + ...$

PRIMERA PRACTICA DIRIGIDA

01 Calcular : $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 7^n}{9^n}$

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

02 Calcular : $S = \sum_{k=1}^{50} \frac{1}{k(k+1)}$

A) 1 B) 2 C) $\frac{5}{6}$ D) $\frac{50}{51}$ E) $\frac{3}{4}$

03 Hallar : $S = \frac{1}{2} + \frac{1}{3\times1!} + \frac{1}{4\times2!} + \frac{1}{5\times3!} + ...$

A) E B) $\frac{1}{2}$ C) 1 D) $\frac{1}{3!}$ E) E^2

04 Si S_n representa la suma de los «n» primeros términos de una serie halle el término general de dicha serie si : $S_n = \frac{n-2}{2n+1}$

A) $\frac{3}{2n^2-1}$ B) $\frac{2n+1}{n^2-1}$ C) $\frac{5}{4n^2-1}$ D) $\frac{n+3}{2n-4}$ E) $\frac{n^2-1}{4n^2-1}$

05 Calcular : $S = a + \frac{a}{\sqrt{2}} + \frac{a}{\sqrt{2}^2} + \frac{a}{\sqrt{2}^3} + ...$

A) $\frac{\sqrt{2}a}{3}$ B) $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2}-1}$ C) $\frac{\sqrt{2}a}{\sqrt{2}-1}$ D) $\frac{\sqrt{2}a}{\sqrt{2}+1}$ E) $\frac{\sqrt{2}}{3}$

06 Sabiendo que : $e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ hallar la suma de la serie : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{n!}$

A) 4 B) 4e+1 C) 4e–3 D) 4e+4 E) 2e

07 Calcular la suma de la serie :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)(n+4)}$$

A) $\frac{33}{16}$ B) $\frac{11}{96}$ C) $\frac{15}{24}$ D) $\frac{25}{36}$ E) $\frac{18}{35}$

08 Sumar la serie : $\sum_{n=2}^{\infty} Log\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$

A) Log 2 B) – Log 2 C) 2 Log 3 D) – 2 Log 2 E) $\frac{2}{3}$ Log 2

09 Indicar el valor de verdad de las siguientes afirmaciones :

( ) La serie : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{5n+1}$ es convergente

( ) La serie : $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ es divergente

( ) La serie : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 3^n}{5^n}$ es convergente

A) VVV B) VFV C) FVV D) FFF E) VFF

10 Determinar : $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+3}{n(n+1)(n+3)}$

A) $\frac{15}{12}$ B) $\frac{12}{15}$ C) $\frac{17}{12}$ D) $\frac{3}{4}$ E) $\frac{5}{12}$

11 Calcular : $S=\frac{2}{5}+\frac{5}{5^2}+\frac{10}{5^3}+\frac{17}{5^4}+......$

A) $\frac{32}{5}$ B) $\frac{23}{32}$ C) $\frac{5}{16}$ D) $\frac{15}{2}$ E) $\frac{4}{3}$

12 Hallar el valor de : $S=\sum_{k=2}^{n}(k+1)+\sum_{k=1}^{n}(n-k)$

A) n^2 B) n^2+n-2 C) n^2+n-1 D) n^2+n E) n^2-n

13 Calcular : $S=\frac{1}{1\times3\times5}+\frac{1}{3\times5\times7}+\frac{1}{5\times7\times9}+.........$

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{12}$ C) $\frac{1}{6}$ D) $\frac{1}{8}$ E) $\frac{1}{18}$

14 Calcular : $S=\frac{2}{1!}+\frac{12}{2!}+\frac{28}{3!}+\frac{50}{4!}+\frac{78}{5!}+.....$

A) $4e+3$ B) $5e+2$ C) $4e+1$ D) $5e+3$ E) $4e+5$

15 Calcular : $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{7^n}$

A) $\frac{27}{16}$ B) $\frac{35}{96}$ C) $\frac{5}{9}$ D) $\frac{34}{18}$ E) 2

16 Calcular : $\sum_{k=1}^{n}\frac{k-1}{2^{k+1}}$

A) $\frac{2^n-n+1}{2^{n-1}}$ B) $\frac{2^n-n-1}{2^{n-1}}$ C) $\frac{2^n-n-1}{2^{n+1}}$

D) $\frac{2^n+n+1}{2^n}$ E) $\frac{2^n-n-1}{2^n}$

17 Sabiendo que: $1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+....=\frac{\pi^2}{12}$

Calcular : $S=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+....$

A) $\frac{\pi^2}{6}$ B) $\frac{\pi^2}{4}$ C) $\frac{\pi^2}{3}$ D) $\frac{\pi^2}{8}$ E) $\frac{\pi^2}{9}$

18 Calcular : $\sum_{n=1}^{n}\frac{1}{(2n-1)(2n+5)}$

A) $\frac{23}{90}$ B) $\frac{1}{9}$ C) $\frac{30}{93}$ D) $\frac{5}{9}$ E) $\frac{14}{96}$

19 Calcular: $S+P$ Si : $S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{3^n}$; $P=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

20 Respecto a las series :

I) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{3^k}{5^k+8^k}$ II) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^4-4}{5k^4-2}$ III) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(k+1)^k}{e^{k^2}}$

A) I y II convergen B) I y III convergen
C) Todas convergen D) Ninguna converge
E) Sólo I converge

SEGUNDA PRACTICA DIRIGIDA

01 Sobre el radio de una semicircunferencia describimos otra semicircunferencia, sobre el radio de esta nueva semicircunferencia describimos otra nueva semicircunferencia y así sucesivamente. Calcule la suma de las longitudes de todas las semicircunferencias, siendo el radio de la primera "r".

A) $\frac{r\pi}{8}$ B) $\frac{r\pi}{4}$ C) $\frac{r\pi}{2}$ D) $r\pi$ E) $2r\pi$

02 Si: $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=A$, halle el valor de la suma:

$$S=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}$$

A) $\frac{A}{3}$ B) $\frac{3A}{8}$ C) $\frac{A}{2}$ D) $\frac{3A}{4}$ E) $\frac{4A}{5}$

03 Calcule la suma de la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty}ArcTg\left(\frac{1}{n^2+n+1}\right)$$

A) $\frac{\pi}{4}$ B) $\frac{\pi}{3}$ C) $\frac{\pi}{2}$ D) π E) 2π

04 Sea $\sum_{n=1}a_n$ una serie de términos positivos que cumplen con la condición $a_n\to1$. De la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+a_n}$ podemos afirmar:

A) Converge a 0 B) Converge a $\frac{1}{2}$ C) Converge a 1
D) Converge a 3 E) Es Divergente

05 Calcule la suma de la siguiente serie:

$$S=\frac{1}{11}+\frac{4}{11^2}+\frac{1}{11^3}+\frac{4}{11^4}+\frac{4}{11^5}+\frac{4}{11^6}+...$$

A) $\frac{1}{60}$ B) $\frac{1}{24}$ C) $\frac{1}{10}$ D) $\frac{1}{8}$ E) $\frac{1}{6}$

06 Halle la suma:

$$S=\sum_{k=1}^{n+1}Log\left(2^{2^k}.Tg^k\left(\frac{\pi}{4}+k\pi\right)\right)$$

en términos de "n".

A) $2^{n+1}Log2$ B) $(2^{n+1}-1)Log2$ C) $(2^{n+1}+1)Log2$
D) $2(2^{n+1}-1)Log2$ E) $2(2^{n+1}+1)Log2$

07 Determine el valor de:

$$\sum_{k=1}^{60}\left(\frac{1}{25k^2+5k-6}\right)$$

A) $\frac{10}{303}$ B) $\frac{20}{303}$ C) $\frac{37}{303}$ D) $\frac{41}{303}$ E) $\frac{53}{303}$

08 En relación a la serie:

$$S=\sum_{k=1}^{\infty}\left[(\pi k+1)\left(\frac{1}{\pi}\right)^{k+2}\right]$$

determine el valor de verdad de los enunciados siguientes:

( ) Es divergente.

( ) Converge a cero.

( ) Convergente a: $\frac{\pi^2+\pi-1}{\pi^2(\pi-1)^2}$

A) VVV B) VFV C) FVV D) FFV E) FFF

09 Determine la suma de la serie:

$$S=1+\frac{3}{4}+\frac{7}{16}+\frac{15}{64}+\dots$$

A) $\frac{4}{3}$ B) $\frac{9}{4}$ C) $\frac{7}{3}$ D) $\frac{8}{3}$ E) $\frac{5}{3}$

10 El conjunto:

$$F=\left\{x\in R/\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(1-x)^n}\text{ converge}\right\}$$

es igual a:

A) R B) $<0;+\infty>$ C) $\left\langle\frac{1}{2};+\infty\right\rangle$ D) $\left\langle-\infty;\frac{1}{2}\right\rangle$ E) $\left\langle-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right\rangle$

11 La suma finita:

$$S_k=\frac{1}{5(12)}+\frac{1}{12(19)}+\frac{1}{19(26)}+\dots$$

tiene "k" sumandos. Entonces S_k es igual a:

A) $\frac{1}{7}\left[\frac{1}{5}-\frac{2}{7k+5}\right]$ B) $\frac{1}{7}\left[\frac{1}{5}-\frac{1}{7k+5}\right]$ C) $\frac{1}{7}\left[\frac{1}{5}+\frac{1}{2k+5}\right]$
D) $\frac{1}{7}\left[\frac{1}{5}+\frac{2}{2k+5}\right]$ E) $\frac{1}{7}\left[\frac{1}{5}+\frac{3}{2k+5}\right]$

12 Si: $e=\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\dots$

hallar: $F(e)=\frac{3}{1!}+\frac{4}{2!}+\frac{5}{3!}+\frac{6}{4!}+\frac{7}{5!}+\dots$

A) $3e-4$ B) $3e-3$ C) $3e-2$ D) $3e-1$ E) $3e$

13 Si $\sum_{k=1}^{2n+1}\left(k+\sum_{r=1}^{n}(2r-1)\right)=(n+1)^3+x$

determine el valor de "x".

A) 0 B) 1 C) n D) n^2 E) n^3

14 Determine la siguiente suma:

$$S=1+\frac{2}{9}+\frac{26}{3^6}+\frac{242}{3^{10}}+\dots$$

A) $\frac{101}{80}$ B) $\frac{215}{73}$ C) $\frac{121}{80}$ D) $\frac{215}{101}$ E) $\frac{425}{80}$

15 Determine la suma de la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{(1+2^n)(1+2^{n-1})}$$

A) $\frac{1}{8}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{1}{2}$ D) 1 E) 2

16 Indique el valor de convergencia de la serie:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^2+3k+3}{k^4+6k^3+11k^2+6k}$$

A) 1 B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{2}{3}$ D) $\frac{4}{3}$ E) 2

17 Calcule el valor de:

$$H=\sum_{i=4}^{13}\left\{\sum_{k=1}^{64}(\sqrt{5k-1}-\sqrt{5k+4})(2i-11)\right\}$$

A) -906 B) -960 C) -968 D) -986 E) -976

18 Si la serie:

$$S=\frac{1}{a}+\frac{11}{a^2}+\frac{111}{a^3}+\frac{1111}{a^4}+\dots$$

converge a $\frac{13}{36}$, determine el valor de "a".

A) 18 B) 13 C) $\frac{10}{13}$ D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{3}{4}$

CLAVES DE LA 1RA PRACTICA

01) C	02) D	03) C	04) C	05) C
06) C	07) B	08) B	09) C	10) C
11) B	12) B	13) B	14) B	15) C
16) C	17) A	18) A	19) C	20) B

CLAVES DE LA SEGUNDA PRACTICA

1)E	2)D	3)A	4)E	5)D	6)D	7)B	8)D	9)D	10)D
11)B	12)C	13)E	14)A	15)C	16)C	17)B	18)B	19)C	20)B



INTEGRALES

34

OBJETIVO.:

* Realizar un estudio elemental del cálculo integral y sus aplicaciones.

INTRODUCCIÓN :

En la unidad anterior , nuestro estudio se centró en el cálculo de la derivada de una función *f*. Es decir, se conocía *f(x)* y queríamos calcular *f '(x)*:

$$f'(x) \text{--------}\rightarrow Dom\, f(x) = f'(x) = ?$$

Ahora el trabajo se centrará en el «proceso inverso», conociendo *f '(x)* queremos encontrar *f(x)* :

$$f(x) = ? \text{--------}\rightarrow f'(x)$$

En física , por ejemplo , si conocemos la velocidad de un cuerpo (en movimiento) , cuya notación es $\frac{df(t)}{dt}$, *¿cómo encontramos la posición f(t) en un instante dado?*

En economía , si conocemos la tasa de crecimiento de las ganancias en una compañía , cuya notación es $\frac{dG(t)}{dt}$, *¿cómo hallamos la ganancia G(t) en un futuro dado?*

En ecología , si conocemos la tasa de cambio del nivel del monóxido de carbono , cuya notación es $\frac{dc(t)}{dt}$, *¿cómo encontramos el nivel de monóxido de carbono c(t)?*

Los hechos anteriores y muchos más nos llevan al estudio de este «proceso inverso» .

EJEMPLO:

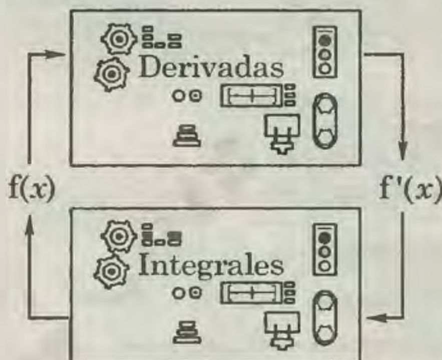
Hallar la función *F(x)* que tenga la propiedad :

$$F'(x) = 5x^4$$

RESOLUCIÓN :

Como $F'(x) = 5x^4$ es una función potencia, intuimos que *F(x)* debe ser otra función potencia . Ahora , recordando las derivadas de las funciones potencias «razonando regresivamente» , concluimos que $F(x) = x^5$. Pero otras respuestas pueden ser $F(x) = x^5 + 8$ (ya que $F'(x) = 5x^4$) ó $F(x) = x^5 - \sqrt{2}$ (ya que $F'(x) = 5x^4$) Una respuesta que involucra a todas las anteriores es de la forma : $F(x) = x^5 + c$, donde **c** es una constante real .

OBSERVACIÓN



La integral y la derivada son operaciones inversas .

ANTIDERIVADA DE UNA FUNCIÓN

Una función *F* es llamada *ANTIDERIVADA* de otra función *f* en un intervalo *J* si se cumple :

$$F'(x) = f(x) \quad ; \quad \forall x \in J = \varepsilon$$

EJEMPLO :

* Una antiderivada de :

$$f(x) = 3x^2 \text{ en } \mathbb{R} \text{ es } F(x) = x^3$$

* Pues : $F'(x) = 3x^2 = f(x); \forall x \in \mathbb{R}$

ANTIDERIVADA GENERAL

Sea *f* una antiderivada de una función *f* en un intervalo *J*. Entonces la función *G* dada por $G(x)=F(x)+c$, donde «*c*» es una constante arbitraria, es llamada ANTIDERIVADA GENERAL de la función *f* en *J* .

EJEMPLO :

$G=x^2+c$ es la antiderivada general de $f(x=2x$ en $\mathbb{R}$

ANTIDERIVADA DE LA FUNCIÓN DE LA FORMA $f(x)=x^n$:

En el siguiente cuadro se ilustran algunas funciones y las antiderivadas respectivas :

Función	Antiderivada
$f(x)$	$g(x)$
1	$x+C$
x	$\frac{x^2}{2}+C$
x^2	$\frac{x^3}{3}+C$
x^3	$\frac{x^4}{4}+C$

Observa como la antiderivada de $f(x)=x^5$ es:

$$g(x)=\frac{x^{5+1}}{5+1}+C=\frac{x^6}{6}+C$$

También si $f(x)=x^3$, la función antiderivada es:

$$g(x)=\frac{x^{3+1}}{3+1}+C=\frac{x^4}{4}+C$$

EN GENERAL :

Si n es un número real diferente de -1, la antiderivada de la función $f(x)=x^n$, es el cociente entre la base elevada al exponente aumentado en uno y tal exponente aumentado también en uno .

EN SÍMBOLOS :

Si $f(x)=x^n, n\in R; n\neq -1$, entonces, la antiderivada de $f(x)$ es: $g(x)=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C$

EJEMPLOS :

*La función antiderivada de $f(x)=x^{-2}$ es la función:

$$g(x)=\frac{x^{-2+1}}{-2+1}+C=\frac{-1}{x}+C$$

* La función $f(x)=x^0$ tiene por antiderivada la función: $g(x)=\frac{x^{0+1}}{0+1}+C=x+C$

Recuerda : $x^0=1$

* La antiderivada de la función $f(x)=\sqrt{x}$ es :

$$g(x)=\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}+C=\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+C=\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}+C$$

Recuerda : $\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$

*La antiderivada de la función $f(x)=\frac{1}{x^3}$ o $f(x)=x^{-3}$ es

$$g(x)=\frac{x^{-3+1}}{-3+1}+C=\frac{x^{-2}}{-2}+C=\frac{1}{-2x^2}+C$$

ANTIDERIVADAS TRIGONOMÉTRICAS :

La función $f(x)=\cos x$ es la derivada de $g(x)=\operatorname{sen} x$. Además es la derivada de las funciones :

$$y=\operatorname{sen} x+\pi \quad ; \quad y=\operatorname{sen} x+\sqrt{\frac{5}{3}}$$

$$y=\operatorname{sen} x-\frac{3\pi}{4} \quad ; \quad y=\operatorname{sen} x+C$$

* Las funciones :
$y=\operatorname{sen} x$; $y=\operatorname{sen} x+\pi$; $y=\operatorname{sen} x-3\frac{\sqrt{2}}{4}$, $y=\operatorname{sen} x+C$ *son funciones antiderivadas de* $y=\cos x$.

ANTIDERIVADA DE FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

En el capítulo anterior ya se estudió las derivadas de las funciones exponenciales y logarítmicas ; la inversa y la antiderivada , se puede encontrar con el mismo procedimiento que se ha venido desarrollando en este acápite

* La antiderivada de la función :

$$f(x)=e^x \text{ es } g(x)=e^x+C$$

porque la derivada de : $y=e^x+C$ es e^x.

* La antiderivada de la función $f(x)=\frac{1}{x}$ es la función $g(x)=Ln\,x+C$ porque la derivada de la función es: $y=Ln\,x+C$ es $y'=\frac{1}{x}$.

INTEGRAL INDEFINIDA

El conjunto de todas las antiderivadas de $f(x)$ se llama la integral de $f(x)$.

* Se utiliza el símbolo : $\int$ que se llama una integral o símbolo de integración.

NOTACIÓN :

$\int f(x)dx$: integral indefinida de f.

$$\Rightarrow \int f(x)dx=F(x)+C$$

*Donde F es una antiderivada de f y C es una constante arbitraria.

* La función $f(x)$ se llama integrando ; dx indica la variable en términos de la cual debe darse la función resultante .

EJEMPLOS :

* La notación $\int x^3dx$ se lee integral de la función $f(x)=x^3$ respecto a la variable x.

* La notación $\int \cos x\,dx$ se lee la integral de la

función $f(x)=\cos x$ respecto a la variable x.

* $\int(3x^2)dx = x^3 + c$

* $\int(x^5 + 2x + 3)dx = \frac{x^6}{6} + x^2 + 3x + c$

porque: $\frac{d}{dx}\left(\frac{x^6}{6} + x^2 + 3x + c\right) = x^5 + 2x + 3$

CÁCULO DE INTEGRALES INMEDIATAS

Se llaman integrales inmediatas a aquellas que son fácilmente reconocidas como la antiderivada de una función .

La integral de la función $2x$ es $x^2 + C$ porque la derivada de $x^2 + C$ es $2x$.

* En símbolos : $\int 2x\,dx = x^2 + C$.

INTEGRAL DE MONOMIOS :

La integral de expresiones de la forma x^n, se obtiene aplicando la expresión estudiada en el taller anterior : $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \;; n \neq -1$

EJEMPLOS :

* $\int x^5 dx = \frac{x^{5+1}}{5+1} + C = \frac{x^6}{6} + C$

* $\int x^{\frac{-7}{2}}\,dx = \frac{x^{\frac{-7}{2}+1}}{-\frac{7}{2}+1} + C = -\frac{x^{\frac{-5}{2}}}{\frac{5}{2}} + C = -\frac{2}{5\sqrt{x^5}} + C$

LA INTEGRAL DE UNA CONSTANTE POR UNA FUNCIÓN :

* La integral de la función : $f(x) = x^2$ *es* $\frac{x^3}{3} + C$

* La integral de la función $g(x) = 5x^2$ *es* $\frac{5x^3}{3} + C$

porque la derivada de $\frac{5x^3}{3}$ es igual a $5x^2$.

OBSERVA:

$\int 5x^2\,dx = 5 \text{ veces } \int x^2\,dx = \frac{5x^3}{3} + C = 5 \text{ veces } \frac{x^3}{3} + C$

* La integral de la función : $f(x) = \cos x$ es $\operatorname{sen} x + C$

* La integral de la función : $g(x) = \frac{3}{4}\cos x$ es $\frac{3}{4}\operatorname{sen} x + C$ porque la derivada de $\frac{3}{4}\operatorname{sen} x + C$ es $\frac{3}{4}\cos x$.

OBSERVA :

* La integral de la función $g(x)$ es $\frac{3}{4}$ de la integral de la función $f(x)$. Es decir :

$$\int \frac{3}{4}\cos x\,dx = \frac{3}{4}\int \cos x\,dx = -\frac{3}{4}\operatorname{sen} x + C$$

EN GENERAL :

La integral del producto de una constante por una función es igual a la constante por la integral de la función. $\int k\,f(x)dx = k\int f(x)dx$, donde $k \in R$

EJEMPLO 1 :

Hallar la integral respecto a x de la función $f(x) = 7x^4$.

RESOLUCIÓN :

La función $f(x)$ es el producto de la constante 7 y la función $h(x) = x^4$. Por lo tanto :

$$\int 7x^4\,dx = 7\int x^4\,dx = 7\left(\frac{x^5}{5}\right) + C$$

INTEGRAL DE LA SUMA DE FUNCIONES:

La función $g(x) = x + 1$ es la suma de las funciones $f(x) = x$ y $h(x) = 1$. Por ser $\int x\,dx = \frac{x^2}{2} + C_1$ y $\int 1dx = x + C_2$, la integral de la suma de las funciones será : $\int (x+1)dx = \int x\,dx + \int 1dx = \left(\frac{x^2}{2} + C_1\right) + (x + C_2$

* Como la suma de dos números reales es otro número real , es suficiente escribir una sola constante. $\frac{x^2}{2} + C_1 + x + C_2 = \frac{x^2}{2} + x + C$

* Entonces: $\int (x+1)dx = \frac{x^2}{2} + x + C$ donde $C = C_1 + C_2$

EJEMPLO 2 :

Calcular : $\int (x^2 + x + 1)dx$

RESOLUCIÓN :

*La función $g(x) = x^2 + x + 1$ es la suma de las funciones: $f(x) = x^2$, $h(x) = x$, y $r(x) = 1$ por ser:

$$\int (x^2 + x + 1)dx = \int x^2 dx + \int x\,dx + \int 1dx$$

* D o n d e : $\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + C_1$; $\int x\,dx = \frac{x^2}{2} + C_2$;

$\int 1dx = x + C_3$;

$\rightarrow \int x^2\,dx+\int x\,dx+\int dx=\frac{x^3}{3}+C_1+\frac{x^2}{2}+C_2+x+C_3$

$\rightarrow \int(x^2+x+1)dx=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x+C$

* Donde : $C_1+C_2+C_3=C$

EN GENERAL :

La integral de una suma o resta de funciones respecto a la misma variable es la suma de las integrales de las funciones sumandos .

$$\int[f(x)\pm g(x)]dx=\int f(x)dx\pm\int g(x)dx$$

EJEMPLO 3 :

Hallar la integral de : $f(x) = 3x^2 - 7x + 3{,}5$

RESOLUCIÓN :

* Por ser la función $f(x)$, la suma de las funciones $h(x) = 3x^2$; $l(x) = -7xy$; $r(x) = 3{,}5$ se tiene :

$\int(3x^2-7x+3{,}5)dx=\int 3x^2dx-\int 7xdx+\int 3{,}5dx$

$=\int 3x^2dx-\int 7xdx+\int 3{,}5dx$

$=\frac{3x^3}{3}+C_1-\frac{7x^2}{2}+C_2+3{,}5x+C_3$

* Entonces :

$\int(3x^2-7x+3{,}5)dx=x^3-\frac{7x^2}{2}+3{,}5x+C$

EJEMPLO 4 :

Hallar la integral de la función $f(x) = (4x + 3)^2$

RESOLUCIÓN :

* Se calcula el cuadrado del binomio :

$f(x)=(4x+3)^2=16x^2+24x+9$

$\rightarrow\int(4x+3)^2dx=\int(16x^2+24x+9)dx$

$=\int 16x^2dx+\int 24xdx+\int 9dx$

* Luego : $\int(4x+3)^2dx=\frac{16x^3}{3}+12x^2+9x+C$

PROPIEDADES DE LA INTEGRAL INDEFINIDA

Sean f y g funciones que tienen definidas antiderivadas en un intervalo J , entonces :
$(f\pm g)$ admite antiderivada en J :

$$\int(f\pm g)(x)dx=\int f(x)dx\pm\int g(x)dx$$

(kf) admite antiderivadas en J :

$$\int(Kf)(x)dx=K\int f(x)dx,\ K\ constante$$

* En el siguiente cuadro se presenta una síntesis de las funciones estudiadas , sus derivadas y las integrales inmediatas más notables :

Función	Derivada	Integral
$y=x^n, n\neq 1$	$\frac{dy}{dx}=nx^{n-1}$	$\int x^ndx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C; n\neq -1$
$y=a^x$	$\frac{dy}{dx}=a^xLna$	$\int a^xdx=\frac{a^x}{Lna}+C$
$y=e^x$	$\frac{dy}{dx}=e^x$	$\int e^xdx=e^x+C$
$y=Lnx$	$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x}$	$\int\frac{dx}{x}=Lnx+C$
$y=senx$	$\frac{dy}{dx}=cosx$	$\int cosxdx=senx+C$
$y=cosx$	$\frac{dy}{dx}=-senx$	$\int senxdx=-cosx+C$
$y=tanx$	$\frac{dy}{dx}=sec^2x$	$\int sec^2xdx=tanx+C$
$y=cotx$	$\frac{dy}{dx}=-csc^2x$	$\int csc^2xdx=-cotx+C$
$y=secx$	$\frac{dy}{dx}=secx\,tanx$	$\int secx\,tanxdx=secx+C$
$y=cscx$	$\frac{dy}{dx}=-cscx\,cotx$	$\int cscx\,cotxdx=-cscx+C$

FÓRMULAS ELEMENTALES DE INTEGRACIÓN

1) $\int du=u+c$

2) $\int\frac{du}{u}=Ln|u|+c$

3) $\int u^ndu=\frac{u^{n+1}}{n+1}+c; n\neq -1$

4) $\int e^udu=e^u+c$

5) $\int a^udu=\frac{a^u}{Lna}+c\ ;\ a>0\wedge a\neq 1$

6) $\int senu\,du=-cosu+c$

7) $\int cosu\,du=senu+c$

8) $\int tgu\,du=Ln|secu|+c$

9) $\int ctgu\,du=Ln|senu|+c$

10) $\int secu\,du=Ln|secu+tanu|+c$

11) $\int cscu\,du=Ln|cscu-cotu|+c$

12) $\int sec^2u\,du=tgu+c$

13) $\int csc^2 u\,du = -ctg\,u + c$

14) $\int sec\,u\,tg\,u\,du = sec\,u + c$

15) $\int csc\,u\,ctg\,u\,du = -csc\,u + c$

16) $\int senh\,du = cosh\,u + c$

17) $\int cosh\,du = senh\,u + c$

18) $\int tanu\,du = Ln|cosh\,u| + c$

19) $\int sech^2 u\,du = tanhu + c$

20) $\int sech^2 u\,du = tanhu + c$

21) $\int sechu\;tghu\;du = -\,sechu + c$

22) $\int cschu\;ctghu\;du = -\,cschu + c$

23) $\int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a}arctg\frac{u}{a} + c\;;(a>0)$

24) $\int \frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a}Ln\frac{|u-a|}{|u+a|} + c\;;(a>0)$

25) $\int \frac{du}{a^2-u^2} = \frac{1}{2a}Ln\frac{|u+a|}{|u-a|} + c\;;(a>0)$

26) $\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = arcsen\frac{u}{a} + c\;;(a>0)$

27) $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = Ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right|$

28) $\int \frac{du}{u\sqrt{u^2-a^2}} = \frac{1}{2}arcsec\frac{|u|}{a} + c\;;(a>0)$

29) $\int \sqrt{a^2-u^2}\,du = \frac{1}{2}\left[u\sqrt{a^2-u^2} + a^2 arcsen\frac{u}{a}\right] + c\;;(a>0)$

30) $\int \sqrt{u^2+a^2}\,du = \frac{1}{2}\left[u\sqrt{u^2+a^2} + a^2 Ln\left(u+\sqrt{u^2+a^2}\right)\right] + c$

31) $\int \sqrt{u^2-a^2}\,du = \frac{1}{2}\left[u\sqrt{u^2-a^2} - a^2 ln\left(u+\sqrt{u^2-a^2}\right)\right] + c$

c : constante arbitraria .

EJEMPLOS :

Evaluar :

* $\int d(x^2) = x^2 + c$

* $\int d(7x^3 + x) = 7x^3 + x + c$

* $\int x^5 dx = \frac{x^6}{6} + c$

* $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int x^{-1/2}dx = \frac{x^{-1/2+1}}{-1/2+1} + c = 2\sqrt{x} + c$

* $\int \frac{d(x+2)}{x+2} = Ln(x+2) + c$

* $\int e^{x^2} d(x^2) = e^{x^2} + c$

* $\int e^{x+2}dx = e^{x+2}d(x+2) = e^{x+2} + c$

* $\int 5^x dx = \frac{5^x}{Ln5} + c$

* $\int \frac{dx}{1+x^2} = arctan(x) + c$

* $\int \frac{dx}{3+x^2} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)arctan\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) + c$

* $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = arcsen(x) + c$

* $\int \frac{dx}{\sqrt{7-x^2}} = arcsen\left(\frac{x}{\sqrt{7}}\right) + c$

* $\int \sqrt{9-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left[x\sqrt{9-x^2} + 9\,arcsen\left(\frac{x}{3}\right)\right] + c$

* $\int \sqrt{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\left[x\sqrt{x^2+1} + Ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right] + c$

* $\int \sqrt{x^2-5}\,dx = \frac{1}{2}\left[x\sqrt{x^2-5} - 5Ln\left|x+\sqrt{x^2-5}\right|\right] + c$

TÉCNICAS DE INTEGRACIÓN

I) INTEGRACIÓN POR SUSTITUCIÓN ALGEBRAICA (CAMBIO DE VARIABLE)

Uno de los métodos para calcular integrales es el de sustitución . Este procedimiento consiste en realizar un cambio de variable de tal forma que se transforme la función en una integral inmediata .

* Por ejemplo , la integral $\int (x^3+2)^2\,3x^2dx$, no es inmediata ; es decir , no se puede hallar directamente. Es necesario transformarla en otra función cuya integral sea inmediata , para lo cual se hace un cambio de variable .

* La función $f(x) = (x^3 + 2)^2\,3x^2$ es el producto de la función compuesta $g(x) = (x^3 + 2)^2$ y la función $h(x) = 3x^2$.

* La función $h(x) = 3x^2$ es la derivada interna de la función $f(x)$.

* Por ser $3x^2$ la derivada de $x^3 + 2$, se hace $u = x^3 + 2$, de donde se obtiene que:

$$\frac{du}{dx} = 3x^2 \ ; du = 3x^2dx.$$

* En la integral $\int (x^3+2)^2 3x^2dx$, se sustituye la variable u por $x^3 + 2$ y du por $3x^2\,d\,x$.

$$\int \underbrace{(x^3+2)^2}_{u} \underbrace{3x^2dx}_{du} = \int u^2du = \frac{u^3}{3} + C$$

Integral inmediata

* Para expresar la respuesta en función de x, se sustituye nuevamente a u por $x^3 + 2$.

$$\int u^2du == \frac{u^3}{3} + C = \frac{(x^3+2)^3}{3} + C$$

*Para verificar, se deriva la función resultante respecto a x. Se debe obtener la función $f(x) = (x^3 + 2)^2 3x^2$.

* La derivada d e $g(x) = \frac{(x^3+2)^3}{3} + C$ es:

$$g'(x) = \frac{3(x^3+2)^2}{3} 3x^2 = 3x^2(x^3+2)^2 = f(x)$$

PASOS PARA APLICAR EL MÉTODO DE SUSTITUCIÓN :

El método de sustitución se emplea de la siguiente forma :

* Se identifican las funciones cuyo producto es la función que se desea integrar .

* Una de las funciones corresponde a la función primitiva y debe existir la posibilidad de obtener con la otra función, su derivada .

* Se halla la derivada de la función compuesta.

* Se designa con una variable la primera función que forma la función compuesta .

* La función que se debe integrar se expresa en términos de la nueva variable .

* Se exprèsa la integral hallada en términos de la primera variable .

EJEMPLO 1 :

Hallar : $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx$

RESOLUCIÓN :

* La integral $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx$ no es inmediata. La función denominador es compuesta.

* Se llama : $u = x^2 + 1$.

* Con la función numerador $h(x) = x$ se puede formar la derivada de la función $u = x^2+1$. $\frac{du}{dx} = 2x$ equivale a, $xdx = \frac{du}{2}$.

* Se sustituye la función $\sqrt{x^2+1}$, por $u^{1/2}$ y xdx por $\frac{du}{2}$.

$$\int \frac{\overbrace{xdx}^{\frac{du}{2}}}{\underbrace{\sqrt{x^2+1}}_{u}} = \int \frac{\frac{du}{2}}{\sqrt{u}} = \int \frac{du}{2u^{1/2}} = \frac{1}{2}\int u^{-\frac{1}{2}}du = \frac{1}{2}\frac{u^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C = u^{1/2} + C$$

*Entonces : $\int \frac{du}{2\sqrt{u}} = u^{1/2} + C$

* Se sustituye u por $x^2 + 1$:

$$u^{1/2} + C = (x^2 + 1)^{1/2} + C$$

* Por consiguiente :

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+1}} = \sqrt{u} + C = \sqrt{x^2+1} + C$$

EJEMPLO 2 :

Calcular : $\int 4x(x^2+2)^4 dx$

RESOLUCIÓN :

* Sea : $v = x^2 + 2 \Rightarrow dv = 2x\,dx$

* Luego :

$$\int 4x(x^2+2)^4 dx = \int 2(x^2+2)^4 \cdot 2xdx$$
$$= 2\int v^4dv = 2\frac{v^5}{5} + c$$
$$\rightarrow \int 4x(x^2+2)^4 dx = \frac{2}{5}(x^2+2)^5 + c$$

EJEMPLO 3 :

Probar que : $\int tan\,x\,dx = Ln|sec\,x| + c$

RESOLUCIÓN :

$$\int tan\,x\,dx = \int \frac{sen\,x\,dx}{cosx} = -\int \frac{-sen\,x\,dx}{cosx}$$

* Sea : $v = cosx \Rightarrow dv = -\,sen\,x\,dx$

$$\Rightarrow \int tan\,x\,dx = -\int \frac{dv}{v} = -Ln|v| + c$$

$$\Rightarrow \int tan\,x\,dx = = Ln\left|\frac{1}{v}\right| + c = Ln\left|\frac{1}{cos\,x}\right| + c$$

$$\Rightarrow \int tan\,x\,dx = Ln|\,sec\,x\,| + c$$

EJEMPLO 4 :

Calcular : $\int e^{8x+1}dx$

RESOLUCIÓN:

* Sea : $v = 8x + 1 \Rightarrow dv = 8\,dx \Rightarrow dx = \dfrac{dv}{8}$

* Luego :

$$\int e^{8x+1}dx = \int e^v \frac{dv}{8} = \frac{1}{8}\int e^v dv = \frac{1}{8}e^v + c$$

$$\rightarrow \int e^{8x+1}dx = \frac{1}{8}e^{8x+1} + c$$

OBSERVACIÓN

Se puede proceder así:

$$\int e^{8x+1}dx = \frac{1}{8} \quad \int e^{8x+1}8dx = \frac{1}{8}$$

$$\rightarrow \int e^{8x+1}d(8x+1) = \frac{1}{8}e^{8x+1} + c$$

EJEMPLO 5:

Calcular : $\displaystyle\int \frac{e^x dx}{e^{2x}+1}$

RESOLUCIÓN :

$$\int \frac{e^x dx}{e^{2x}+1} = \int \frac{d(e^x)}{(e^x)^2\,1} = arctan(e^x) + c$$

EJEMPLO 6 :

Calcular : $\displaystyle\int \frac{dx}{Ln(x^x)}$

RESOLUCIÓN :

$$\int \frac{dx}{Lnx^x} = \int \frac{dx}{xLnx} = \int \frac{1}{Lnx}\cdot\frac{dx}{x} = \int \frac{1}{Lnx}\cdot d(Lnx)$$

$$\rightarrow \int \frac{dx}{Lnx^x} = Ln|lnx|$$

EJEMPLO 7 :

Calcular : $\displaystyle\int 10x\cos(x^2+\pi)dx$

RESOLUCIÓN :

$$\int 10x\cos(x^2+\pi)dx = 5\int[\cos(x^2+\pi)]2xdx$$

$$= 5\int[\cos(x^2+\pi)]\cdot d(x^2+\pi)$$

$$= 5sen(x^2+\pi) + c$$

EJEMPLO 8 :

Calcular : $\displaystyle\int \frac{2x+5}{x^2+5x+2}dx$

RESOLUCIÓN :

*La función que aparece en el numerador es la derivada de la función del denominador .

Se hace $u = x^2 + 5x + 2$ de donde $du = (2x+5)dx$.

* Se sustituyen estos valores en la integral :

$$\int \frac{2x+5}{x^2+5x+2}dx = \int \frac{du}{u} = Lnu + C$$

* Finalmente, volvemos a la variable original:

$$\int \frac{2x+5}{x^2+5x+2}dx = Ln(x^2+5x+2) + C$$

EJEMPLO 9 :

Calcular : $\displaystyle\int 4x^3 e^{x^4}dx$

RESOLUCIÓN :

* La función a integrar es el producto de dos funciones , una de las cuales es la derivada interna de una función compuesta . Llamamos u al exponente de e, $u = x^4$, con lo cual $du = 4x^3dx$.

Al sustituir estos valores en la integral tenemos:

$$\int 4x^3e^{x^4}dx = \int e^{x^4}(4x^3dx) = \int e^u du.$$

Esta es una integral inmediata.

*Luego: $\displaystyle\int 4x^3e^{x^4}dx = \int e^{x^4}du = e^u + C$, volviendo a la variable original , Tenemos :

$$\int 4x^3e^{x^4}dx = e^{x^4} + C$$

EJEMPLO 10 :

Calcular : $\displaystyle\int a^{tanx}sec^2x\,dx$

RESOLUCIÓN :

* Si llamamos $u = tan\,x$, entonces :

$$du = sec^2x\,dx$$

* Al reemplazar en la integral tenemos :

$$\int a^{tanx}sec^2x\,dx = \int a^u du = \frac{a^u}{Lna} + C$$

* Al volver a la variable original :

$$\int a^{tanx}sec^2x\,dx = \frac{a^{tanx}}{Lna} + C$$

EJEMPLO 11 :

Calcular : $\displaystyle\int \frac{x+5}{x+3}dx$

RESOLUCIÓN :

* Cuando en una integral tanto el numerador como el denominador son binomios de grado uno , se

divide el numerador entre el denominador :

$$\begin{array}{rl} x+5 & \underline{|x+3} \\ -x-3 & 1 \\ 2 & \end{array}$$

* Por lo tanto : $\dfrac{x+5}{x+3}=1+\dfrac{2}{x+3}$

$$\int\frac{x+5}{x+3}dx=\int\left(1+\frac{2}{x+3}\right)dx=\int dx+2\int\frac{dx}{x+3}$$

* Se hace $u=x+3$, de donde $du=dx$

$$\int\left(\frac{x+5}{x+2}\right)dx=x+2Ln|x+3|+C$$

II) INTEGRACIÓN POR PARTES

Cuando la función que se desea integrar es igual al producto de dos funciones , una de las cuales es la derivada de una función conocida , se puede aplicar el método de integración por partes.

* Si u y v son funciones tales que $u=f(x)$ y $v=g(x)$, se tiene :

* Al aplicar la derivada del producto de dos funciones :

$$\int\frac{d}{dx}(uv)dx=\int\left(u\frac{dv}{dx}+v\frac{du}{dx}\right)dx$$

* A funciones iguales les corresponde integrales iguales respecto a la misma variable :

$$uv=\int\left(u\frac{dv}{dx}\right)dx+\int\left(v\frac{du}{dx}\right)dx$$

"La integral de la derivada de una función es la función"

* Al despejar $\int\left(u\frac{dv}{dx}\right)dx$, se tiene:

$$\int\left(u\frac{dv}{dx}\right)dx=uv-\int\left(v\frac{du}{dx}\right)dx$$

* Se escribe la expresión en forma diferencial :

$$\int u\,dv=uv-\int v\,du \Rightarrow \boxed{\int u\,dv=uv-\int v\,du}$$

Es la fórmula de la integración por partes .

*Una de las técnicas de integración más ampliamente usada es la integración por partes.

EJEMPLO 1:

Calcular: $\int xe^x dx$

RESOLUCIÓN:

* Sean : $\begin{cases} u=x & \Rightarrow du=dx \\ dv=e^x dx \Rightarrow & v=e^x \end{cases}$

* Aplicamos : $\int udv=uv-\int vdu$

$$\Rightarrow \int \underbrace{x}_{u}\cdot\underbrace{e^x dx}_{dv}=xe^x-\int e^x\cdot dx$$

$$\Rightarrow \int xe^x dx=xe^x-e^x+c$$

EJEMPLO 2 :

Hallar : $\int x\,sen\,x\,dx$

RESOLUCIÓN :

* Se hace : $u=x$ y $dv=sen\,x\,dx$:

$$\int u\,dv=uv-\int v\,du$$

* Se obtiene: $v=\int dv=\int sen\,x\,dx=-cosx$ y $du=dx$

$$\int\underbrace{x}_{u}\underbrace{sen\,x\,dx}_{dv}=x(-cosx)-\int(-cosx)dx$$

$$=xcosx+\int cosx\,dx$$

$$\rightarrow \int x\,sen\,x\,dx=-xcosx+senx+C$$

EJEMPLO 3 :

Hallar la integral de la función $f(x)=Ln\,x$ respecto a la variable x.

RESOLUCIÓN :

$\int Lnx\,dx$. Se hace $u=Ln\,x$ y $dv=dx$, se tiene :

$$du=\frac{1}{x} \quad y \quad v=x+C.$$

$$\int\underbrace{Lnx}_{u}\underbrace{dx}_{dv}=\int u\,dv \quad ; \quad \int u\,dv=uv-\int v\,du$$

* Entonces :

$$\int udv=(Lnx)x-\int x\frac{1}{x}dx=Lnx-\int dx=xLnx-x+C$$

* Entonces : $\int Lnx\,dx=x(Lnx-1)+C$

EJEMPLO 4 :

Hallar la integral de la función: $f(x)=x^2\,e^x$

RESOLUCIÓN :

$$\int x^2e^x\,dx$$

* Se hace : $u=x^2$ y $dv=e^x\,dx$ entonces :

$$v=\int dv=e^x+C; du=2xdx$$

* Entonces :

$$\int\underbrace{x^2}_{u}\underbrace{e^x\,dx}_{dv}=\underbrace{x^2}_{u}\underbrace{e^x}_{v}-\int\underbrace{e^x}_{v}\underbrace{(2x)dx}_{du}\,........(I)$$

* Pero : $\int e^x(2x)dx=2\int e^x x\,dx$ porque :

$$\int hf(x)dx=h\int f(x)dx$$

* Observa que $\int e^x x dx$ no es inmediata pero se puede

hallar por partes, así :

* Si $u=x; dv=e^x dx$, entonces: $du = dx$ y $v=\int dv=e^x+C$

* Entonces :

$$\int e^x\, x\, dx = x e^x - \int e^x\, dx = x e^x - e^x + C$$

* Se sustituye $\int e^x x\, dx$ por xe^x-ex+C en la ecuación *(I)*:

$$\int x^2 e^x\, dx = x^2 e^x - 2(xe^x - e^x) + C = e^x(x^2 - 2x + 2) + C$$

¡RECUERDA!

El método de integración por partes se aplica a funciones que sean el producto de dos funciones , una de las cuales es la derivada de una función conocida.

Para aplicarlo se procede de la siguiente forma:

* La función que se desea integrar se expresa como el producto de dos funciones. A una de ellas se le nota por u, la otra función incluido dx se nota por dv.

* La parte seleccionada como dv debe ser integrable.

*El sustraendo $\int v\,du$ debe ser más simple que $\int u\,dv$.

EJEMPLO 5:

Calcula la integral $\int x\cos x\, dx$. Ten en cuenta las siguientes ayudas :

*Identifica las funciones factor que se han de integrar :

* Como $\int x\cos x\, dx$ es la integral del producto de las funciones x y $\cos x$, llama a una de estas funciones u y a la otra llámala dv. ¿Por qué es más conveniente llamar $u = x$ y $dv = \cos x\, dx$?

* Calcula du y v respectivamente.

* Reemplaza estas expresiones en:

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du$$

* Como :

$u= x$; $du = dx$; $dv = \cos x\, dx$; $v=\operatorname{sen} x$

* La integral $\int e^x\cos x\, dx$, que deseas calcular se reduce a : $\int e^x\cos x\, dx = x\operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x\, dx$

EJEMPLO 6:

Calcula : $\int e^x \operatorname{sen} x\, dx$

RESOLUCIÓN :

* Llama : $u=e^x$ y $dv=\operatorname{sen} x\, dx$

* Calcula du y v.

* Aplica la fórmula de integración por partes y reemplaza en ellas las expresiones u, du, v, y dv.

* Como has obtenido la expresión :

$\int e^x\operatorname{sen} x\, dx = -e^x\cos x - \int -e^x\cos x\, dx$, llegaste casi al mismo punto de partida .

*Calcula $\int e^x\cos x\, dx$, aplicando el método de integración por partes.

* Ahora has obtenido :

$\int e^x\cos x\, dx = e^x\operatorname{sen} x - \int e^x\operatorname{sen} x\, dx$ Observa que la última integral es igual a la que inicialmente se quería calcular .

La expresión obtenida hasta el momento es:

$$\rightarrow \int e^x\operatorname{sen} x\, dx = -e^x\cos x + \int e^x\cos x\, dx$$

* Expresa $\int e^x\operatorname{sen} x\, dx$ a un solo lado de la igualdad y despeja : $\int e^x\operatorname{sen} x\, dx$.

* El resultado es :

$$\int e^x\operatorname{sen} x\, dx = -\frac{1}{2}e^x\cos x + \frac{1}{2}e^x\operatorname{sen} x + C$$

EJEMPLO 7:

Usando integración por partes , calcular:

$$\int \cos^2 x\, dx \quad ; \quad \int \operatorname{sen}^2 x\, dx$$

RESOLUCIÓN:

a) $\int \cos^2 x\, dx = \int \cos x\cos x\, dx$

* Sean :

$$\begin{Bmatrix} u = \cos x & \Rightarrow & du = (-\operatorname{sen} x)dx \\ dv = \cos x\, dx & \Rightarrow & v = \operatorname{sen} x \end{Bmatrix}$$

* Luego :

$$\int \underbrace{\cos x}_{u}\cdot \underbrace{\cos x\, dx}_{dv} = (\cos x)\cdot(\operatorname{sen} x) - \int (\operatorname{sen} x)(-\operatorname{sen} x)dx$$

$$\Rightarrow \int \cos^2 x\, dx = \cos x\operatorname{sen} x + \int \operatorname{sen}^2 x\, dx$$

$$= \cos x\cdot\operatorname{sen} x + \int (1-\cos^2 x)dx$$

$$\Rightarrow \int \cos^2 x\, dx = \cos x\cdot\operatorname{sen} x + \int dx - \int \cos^2 x\, dx$$

$$\Rightarrow 2\int \cos^2 x\, dx = \cos x\cdot\operatorname{sen} x + \int dx$$

$$\Rightarrow \int \cos^2 dx = \frac{\cos x\cdot\operatorname{sen} x + x}{2} + c$$

III) INTEGRACIÓN POR FRACCIONES PARCIALES

Si no se tiene éxito al aplicar la integración por doble sustitución , puede aplicarse otra técnica, integraremos funciones de la forma $\frac{p(x)}{q(x)}$, donde $p(x)$ y $q(x)$ son polinomios . A este tipo de fracciones

se les denomina **funciones racionales** .

*El caso más simple se da cuando el denominador es de primer grado , como veremos en estos ejemplos:

EJEMPLO 1 :

$$\int \frac{x^2+3x+3}{x+1}dx$$

RESOLUCIÓN :

* Como el numerador es de mayor grado que el denominador , se efectúa la división y el resultado se reduce a un polinomio y una fracción del tipo $\frac{A}{x+1}$.

* Esto permite efectuar la integración sin problemas , porque es fácil integrar una función polinómica y también la fracción :

* Como primer paso dividimos :

$$\begin{array}{rl} x^2+3x+3 & \underline{|\, x+1} \\ \underline{-x^2-x} & x+2 \\ 2x+3 & \\ \underline{-2x-2} & \\ 1 & \end{array}$$

luego : $\frac{x^2+3x+3}{x+1}=x+2+\frac{1}{x+1}$

* Y la integral se convierte en :

$$\int \frac{x^2+3x+3}{x+1}dx=\int\left(x+2+\frac{1}{x+1}\right)dx=\int x\,dx+\int 2\,dx+\int\frac{1}{x+1}dx$$

$$=\frac{x^2}{2}+2x+ln|x+1|+c$$

EJEMPLO 2:

Calcular : $\int \frac{x}{x+2}dx$

RESOLUCIÓN :

* Podemos comprobar que $\frac{x}{x+2}=1-\frac{2}{x+2}$; luego:

$$\int\frac{x}{x+2}dx=\int\left(1-\frac{2}{x+2}\right)dx=\int 1\,dx-\int\frac{2\,dx}{x+2}$$

$$=x-2\int\frac{1}{x+2}dx=x-2Ln|x+2|dx+c$$

* Puede notarse que al final aparece una integral del tipo: $\int\frac{Adx}{x+b}$, donde A y b son constantes ; así esta integral es fácil de calcular . Basta con recordar que: $\int\frac{du}{Lnu}=Ln|u|+c$ $\int\frac{Adx}{x+b}=ALn|x+b|+c$

* Pero no siempre el denominador será de primer grado, y para integrar funciones racionales del tipo $\frac{p(x)}{q(x)}$ en cualquier caso, donde el grado de p es menor que el de q , hay que transformar ésta en fracciones parciales , como se indica en estos otros ejemplos .

EJEMPLO 3 :

Calcular: $\int\frac{x-2}{x^2+x}dx$

RESOLUCIÓN :

* Transformemos la fracción como suma de dos fracciones simples. Primero factorizamos el denominador, luego descomponemos:

$$\frac{x-2}{x(x+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}$$

* Efectuando la suma en el segundo miembro :

$$\frac{x-2}{x(x+1)}=\frac{A(x+1)+Bx}{x(x+1)}$$

* Igualando numeradores :

$$x-2=A(x+1)+Bx;\ \ x-2=(A+B)x+A$$

* De aquí vemos que $A=-2;\ A+B=1$ y $B=3$

* Entonces :

$\frac{x-2}{x(x+1)}=\frac{-2}{x}+\frac{3}{x+1}$; ahora, sí procedemos a integrar

$$\int\frac{x-2}{x^2+2}dx=\int\left(\frac{-2}{x}+\frac{3}{x+1}\right)dx$$

$$=-2\int\frac{dx}{x}+3\int\frac{2dx}{x+1}=-2Ln|x|+3Ln|x+1|+c$$

* Un método alternativo para hallar A y B consiste en darle valores adecuados a x en la identidad :

$$x-2=A(x+1)+Bx$$

* Así tenemos :

Si $x=-1 \Rightarrow -1-2=A(0)+B(-1) \Rightarrow B=3$

Si $x=0 \Rightarrow 0-2=A \Rightarrow A=-2$

* El procedimiento anterior permite descomponer cualquier función racional cuyo denominador tenga factores lineales no repetidos . Cuando el denominador tenga factores lineales repetidos , factores de mayor grado no reducibles a lineales , debemos considerar variantes en el procedimiento , como las que se indican a continuación :

* Por cada factor $(x-a)^n$ donde n es el número de veces que $(x-a)$ se repite , corresponden fracciones parciales ; así:

$$\frac{A}{x-a}+\frac{B}{(x-a)^2}+....+\frac{K}{(x-a)^n}$$

* Si en el denominador hay un factor cuadrático x^2+bx+c , que no se puede factorizar en el campo real, y sólo aparece una vez , corresponderá a una fracción parcial de la forma :

$$\frac{Ax+B}{x^2+bx+c}$$

SIGLOZIX

* Estas y otras variantes se podrán aplicar en un curso que tenga mayor extensión y, por tanto, sugerimos sólo considerar casos como los que se presentaron como ejemplos .

EJEMPLO 4 :

Calcular: $\int \frac{dx}{x^3 + x}$

RESOLUCIÓN :

$$\frac{1}{x^3+x}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+1}$$

* $1 = A(x^2 + 1) + (Bx + C)x$
* $x = 0\ ; 1 = A$
* $x = 1\ ; 1 = 2 + B + C$
* $x = -1\ ; 1 = 2 + B - C$

$\Rightarrow B=-1 \wedge C=0$

$\Rightarrow \frac{1}{x^3+x}=\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+1}$

* Luego : $\int\frac{dx}{x^3+x}=\int\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+1}\right)dx$

$= Lnx-\int\frac{x}{x^2+1}dx = Lnx-\frac{1}{2}\int\frac{2x}{x^2+1}dx$

$= Lnx-\frac{1}{2}ln(x^2+1)+C$

EJEMPLO 5 :

Calcular : $\int\frac{dx}{x(x+1)^2}$

RESOLUCIÓN :

$$\frac{1}{x(x+1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{(x+1)^2}$$

* $1 = A(x + 1)^2 + Bx(x + 1) + Cx$
* $x = 0 ; 1 = A$
* $x = -1 ; 1 = -C \Rightarrow C = -1$
* $x = 1 ; 1 = 4 + 2B - 1 \Rightarrow B = -1$

* Luego : $\int\frac{dx}{x(x+1)^2}=lnx-ln(x+1)+\frac{1}{(x+1)}+c$

EJEMPLO 6 :

Calcular : $\int\frac{4x^3}{4x^2-1}dx$

RESOLUCIÓN :

$$\frac{4x^3}{4x^2-1}=\frac{A}{2x-1}+\frac{B}{2x+1}$$

$\rightarrow \frac{4x^3}{4x^2-1}=\frac{4x^3-x+x}{4x^2-1}=\frac{4x^3-x}{4x^2-1}+\frac{x}{4x^2-1}=$

$= x+\frac{x}{4x^2-1}$

OBSERVACIÓN :

$$\frac{x}{4x^2-1}=\frac{A}{4x^2-1}=\frac{4x^3-x}{4x^2-1}+\frac{x}{4x^2-1}=$$

$$=\frac{x}{4x^2-1}=\frac{A}{2x-1}+\frac{B}{2x+1}$$

$\Rightarrow x = A(2x+1)+B(2x-1)$

* $x=\frac{-1}{2};-\frac{1}{2}=-2B \Rightarrow B=\frac{1}{4}$ * $x=\frac{1}{2};\frac{1}{2}=2A \Rightarrow A=\frac{1}{4}$

$\Rightarrow \frac{4x^3}{4x^2-1}=x+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2x-1}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2x+1}$

$\rightarrow \int\frac{4x^3}{4x^2-1}dx=\int\left[x+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2x-1}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2x+1}\right)\right]dx$

$=\frac{x^2}{2}+\frac{1}{4}\int\frac{dx}{2x-1}+\frac{1}{4}\int\frac{dx}{2x+1}$

$=\frac{x^2}{2}+\frac{1}{8}Ln|2x-1|+\frac{1}{8}Ln|2x+1|+c$

EJEMPLO 7 :

Calcule: $I=\int\frac{dx}{e^x+1}$

RESOLUCIÓN :

$$\Rightarrow I=\int\frac{dx}{u(u+1)}=\int\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{u+1}\right)du$$

* Sea $u = e^x$:

$\Rightarrow I=\int\frac{du}{u(u+1)}=\int\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{u+1}\right)du=\int\frac{du}{u}-\int\frac{du}{u+1}$

$= Lnu-Ln(u+1)+C = Ln(e^x)-Ln(e^x+1)+C$

$\rightarrow I=\int\frac{dx}{e^x+1}=x-Ln(e^x+1)+C$

IV) INTEGRACIÓN POR SUSTITUCIÓN TRIGONOMÉTRICA

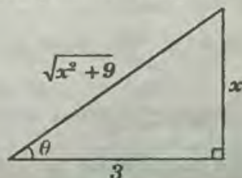
En las integrales que contienen expresiones como $\sqrt{a^2-x^2}$; $\sqrt{a^2+x^2}$ $\wedge$ $\sqrt{x^2-a^2}$, las sustitución de ciertas funciones trigonométricas pueden simplificar el integrando .

EJEMPLO 1 :

Calcular : $A=\int\frac{x^2dx}{(9+x^2)^{1/2}}$

RESOLUCIÓN :

Construimos el siguiente triángulo en función de 9 ó 3^2 y x :



* Se toma la función :

$$\begin{cases} tg\theta = \dfrac{x}{3} \\ x = 3tg\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \theta = arctg\left(\dfrac{x}{3}\right) \\ dx = 3\sec^2\theta d\theta \end{cases}$$

* Además : $\sec\theta = \dfrac{(x^2+9)^{1/2}}{3} \Rightarrow (x^2+9)^{1/2} = 3\sec\theta$

* Ahora hacemos las sustituciones :

$$\int \frac{x^2 dx}{(9+x^2)^{1/2}} = \int \frac{9tg^2\theta\, 3\sec^2\theta d\theta}{3\sec\theta} = 9\int tg^2\theta \cdot \sec\theta d\theta$$

$$\rightarrow A = 9\int(\sec^2\theta - 1)\sec\theta\, d\theta = 9\int(\sec^3\theta - \sec\theta)d\theta$$

$$\rightarrow A = 9\left[\frac{1}{2}(tg\theta\cdot\sec\theta + Ln|tg\theta + \sec\theta|) - Ln|tg\theta + \sec\theta|\right] + c$$

$$\rightarrow A = \frac{9}{2}(tg\theta \cdot sen\theta - Ln|tg\theta + \sec\theta|) + c$$

$$\rightarrow A = \frac{9}{2}\left[\frac{x}{3}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+9}} - Ln\left|\frac{x}{3} + \frac{\sqrt{x^2+9}}{3}\right|\right] + c$$

$$\rightarrow A = \frac{9}{2}\left[\frac{x^2}{3\sqrt{9+x^2}} - Ln\left|\frac{x+\sqrt{9+x^2}}{3}\right|\right] + c$$

EJEMPLO 2 :

Calcular : $I = \int \dfrac{x^2 dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$; $a > 0$

RESOLUCIÓN :

* Sea : $x = a sen\theta$; $\theta \in \left\langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right\rangle$

* Entonces : $\theta = arcsen\dfrac{x}{a}$

$$\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - a^2 sen^2\theta} = \sqrt{a^2\cos^2\theta} = a\cos\theta$$

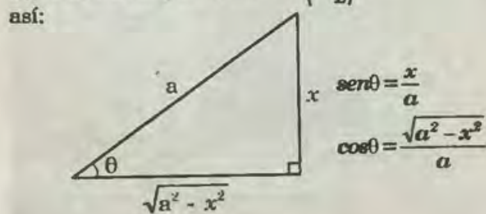
* Pues $\theta \in \langle -\pi/2 ; \pi/2\rangle$ implica que $\cos\theta > 0$
* Además $dx = a\ co\theta\, d\theta$

$$I = \int \frac{(a^2 sen^2\theta)a\cos\theta d\theta}{a\cos\theta} = a^2\int sen^2\theta\, d\theta$$

$$\Rightarrow I = a^2\int\frac{1-\cos 2\theta}{2}dt = \frac{a^2}{2}\int(1-\cos 2\theta)d\theta$$

$$\Rightarrow I = \frac{a^2}{2}\left[\theta - \frac{sen 2\theta}{2}\right] + C = \frac{a^2}{2}[\theta - sen\theta\cos\theta] + C$$

* Como : $x = a sen\theta$, $\theta \in \langle -\pi/2; \pi/2\rangle$; Construimos el siguiente triángulo para $\theta \in \left\langle 0; \frac{\pi}{2}\right\rangle$; así:



$sen\theta = \dfrac{x}{a}$

$\cos\theta = \dfrac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a}$

* Reemplazando tenemos que :

$$I = \frac{a^2}{2}\left[arcsen\left(\frac{x}{a}\right) - \frac{x}{a}\cdot\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}\right] + C$$

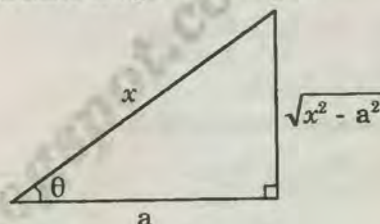
$$\Rightarrow I = \frac{a^2}{2}arcsen\left(\frac{x}{a}\right) - \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + C$$

EJEMPLO 3 :

Calcular : $B = \int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}$; $x > a$

RESOLUCIÓN :

* Construimos el siguiente triángulo :



* Se toma la función :

$$\begin{cases} \sec\theta = \dfrac{x}{a} \\ x = a\sec\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \theta = arc\sec\left(\dfrac{x}{a}\right) \\ dx = a\sec\theta\cdot tg\theta d\theta \end{cases}$$

* Además : $tg\theta = \dfrac{\sqrt{x^2 - a^2}}{a} \Rightarrow \sqrt{x^2 - a^2} = a tg\theta$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \int\frac{a\sec\theta\cdot tg\theta}{a tg\theta}d\theta = \int \sec\theta d\theta$$

$$\rightarrow B = Ln|\sec\theta + tg\theta| + c_1 = \left|\frac{x}{a} + \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right| + c_1$$

$$\rightarrow B = Ln\left|x + \sqrt{x^2 - a^2}\right| + c_1 - Lna = Ln\left|x + \sqrt{x^2-a^2}\right| + c$$

EJEMPLO 4 :

Calcular : $I = \int \dfrac{dx}{x\sqrt{4x^2 - 9}}$

RESOLUCIÓN :

* Sea : $x = \dfrac{3}{2}\sec\theta$; $\theta \in [-\pi; -\pi/2\rangle \cup [0; \pi/2\rangle$

$$dx = \frac{3}{2}\sec\theta\tan\theta\, d\theta;\ \sqrt{4x^2 - 9} = 3\tan\theta$$

$$I = \int\frac{\frac{3}{2}\sec\theta\tan\theta\, d\theta}{\frac{3}{2}\sec\theta\cdot 3\tan\theta} = \frac{1}{3}\int d\theta$$

$$\rightarrow I = \frac{\theta}{3} + C = \frac{1}{3}arc\sec\frac{2x}{3} + C$$

EJEMPLO 5 :

Calcular : $I=\int\frac{dx}{(x^2-2x+5)}$

RESOLUCIÓN :

$$I=\int\frac{dx}{(x-1)^2+4}=\int\frac{d(x-1)}{(x-1)^2+4}$$

$$\rightarrow I=\int\frac{du}{u^2+a^2}, u=x-1, a=2$$

$$\rightarrow I=\frac{1}{a}arctg\frac{u}{a}+C\rightarrow I=\frac{1}{2}arctg\left(\frac{x-1}{2}\right)+C$$

EJEMPLO 6:

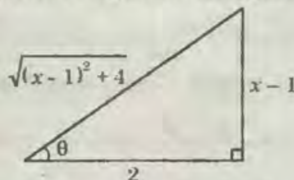
Calcular : $D=\int\frac{dx}{(x^2-2x+5)^{3/2}}$

RESOLUCIÓN:

* A la integral escribiremos así :

$$\int\frac{dx}{(x^2-2x+5)^{3/2}}=\int\frac{dx}{\left[(x-1)^2+4\right]\left[(x-1)^2+4\right]^{1/2}}$$

* Construyendo el siguiente triángulo :



* Se toma la función :

$$\begin{cases}tg\theta=\frac{x-1}{2}\\ x=1+2tg\theta\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\theta=arctg\left(\frac{x-1}{2}\right)\\ dx=2sec^2\theta\, d\theta\end{cases}$$

* además :

$$sec\theta=\frac{\sqrt{(x-1)^2+4}}{2}\Rightarrow\sqrt{(x-1)^2+4}=2sec\theta$$

* Ahora hacemos la sustitución en la integral:

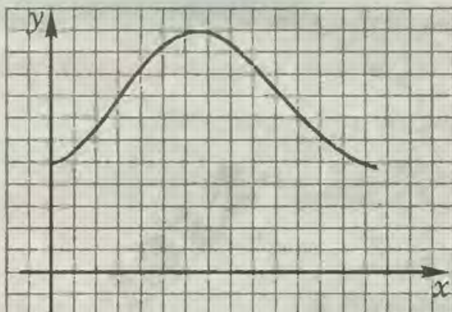
$$D=\int\frac{dx}{(x^2-2x+1)^{3/2}}=\int\frac{2sec^2\theta\, d\theta}{4sec^2\theta\cdot 2sec\theta}$$

$$\rightarrow D=\frac{1}{4}\int cos\theta\, d\theta=\frac{sen\theta}{4}+c=\frac{x-1}{4\sqrt{x^2-2x+5}}+c$$

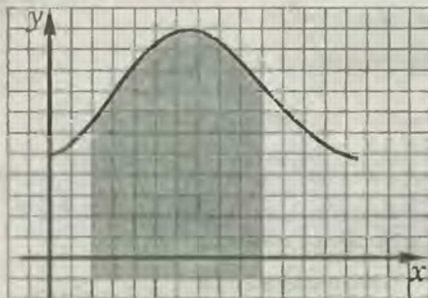
INTEGRAL DEFINIDA

El área de cualquier figura se puede calcular por procedimientos geométricos siempre y cuando se encuentre limitada por segmentos . En geometría elemental se aprendió que el área de un rectángulo es igual al producto de la base por la altura ; y el área de un triángulo es igual al semiproducto de la base por la altura . Para calcular el área de cualquier figura limitada por segmentos , se divide la región en rectángulos y triángulos , y se calcula el área de cada región. Cuando el área que deseamos calcular está limitada por curvas , este último procedimiento no se puede emplear. Para determinar el valor de estas áreas hace falta el cálculo integral tal como lo estudiaremos a continuación .

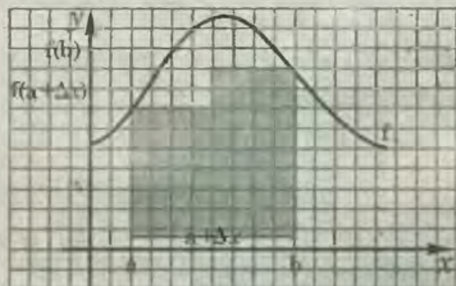
* La gráfica corresponde a la función continua $y=f(x)$



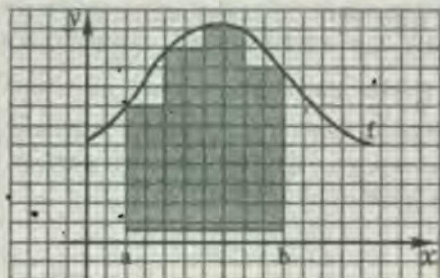
* Se desea hallar el área de la región del plano limitada por la gráfica de la función , el eje X y las rectas $x=a$ y $x=b$.



* Para tal efecto , se divide el intervalo *[a;b]* , en dos subintervalos. Se busca de esta forma aproximar la suma de las áreas de regiones rectangulares al área de la región bajo la curva.



* Si se divide el intervalo cerrado *[a ; b]* en cuatro subintervalos, se logra una mayor aproximación:



* Hemos dividido el intervalo *[a ; b]* en dos subintervalos iguales: $[a ; a+\Delta x]$ y $[a+\Delta x ; b]$; al tomar como base cada intervalo, se construyen dos rectángulos de altura $f(a+\Delta x)$ y *f(b)*, respectivamente. Si se calcula el área de cada rectángulo y luego se suman, se obtiene una aproximación al área bajo la curva *f* en el intervalo *[a; b]* . Si se divide el intervalo *[a;b]* en cuatro subintervalos y se efectúa el mismo proceso, la aproximación al valor del área es mayor.

De igual forma , el grado de aproximación aumenta al incrementar el número de subintervalos a *8* y *16*, etc .

*Entre más rectángulos tomemos , nos aproximamos más al área real bajo la curva en el intervalo *[a ; b]*.

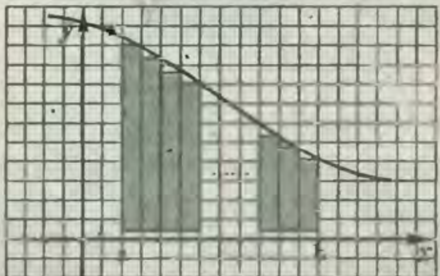
*** EN FORMA GENERAL :**

Si deseamos calcular el área *A* bajo la curva positiva *y = f(x)*, entre *y = 0* , *x = a* y *x = b*, se procede de la siguiente forma :

* Se divide el intervalo *[a ; b]* en *n* subintervalos iguales. La longitud de cada subintervalo será:

$\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$. Luego, los puntos de subdivisión del intervalo *[a ; b]* serán en su orden :

$$a; a + \Delta x; a + 2\Delta x; a + 3\Delta x; + \ldots\ a + n\Delta x.$$



* Se construye en cada uno de los subintervalos, un rectángulo de base Δx y altura igual a *f* , calculada en el extremo derecho del intervalo ; es decir , $f(a+k\Delta x)$ con $k \le n$.

* El área del *k*–ésimo rectángulo es : $A = f(a+k\Delta x)\cdot \Delta x$

*Se halla la suma de las áreas de todos los rectángulos :

$$f(a+\Delta x)\cdot\Delta x + f(a+2\Delta x)\cdot\Delta x + \ldots + f(a+n\Delta x)\cdot x =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} f(a+k\Delta x)\,\Delta x$$

DEFINICIÓN DE INTEGRAL DEFINIDA

Si la cantidad de intervalos *n* tiende a infinito, la sumatoria de la áreas corresponde al área bajo la curva de la función *y = f(x)*, continua y definida en el intervalo cerrado *[a;b]*.

$$f(a+\Delta x)\cdot\Delta x + f(a+2\Delta x)\cdot\Delta x + \ldots + f(a+n\Delta x)\cdot\Delta x =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} f(a+k\Delta x)\,\Delta x$$

* El área bajo la curva es igual al límite de la suma de las áreas de *n* rectángulos , a medida que el número de rectángulos se acerca a infinito , y la base de los rectángulos se acerca a cero .

* El límite de esta suma de áreas se llama integral definida y se define como la integral definida de la función *y=f(x)* entre los valores *a* y *b* :

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(a+k\Delta x)\Delta x\,, \text{ donde } \Delta x = \frac{b-a}{n}$$

y se lee integral definida entre *a* y *b* de la función *f(x)* , respecto a *x*.

* El lado izquierdo de la ecuación muestra la notación de la integral definida. Los valores *a* y *b* que aparecen , respectivamente , abajo y arriba del signo de la integral , se llaman límites de integración. El límite inferior es *"a"* y el límite superior es *"a"*.

***NOTA*:**

Observa que los valores de la función *f(x)* son no negativos , $f(x) \ge 0$.

*A diferencia de la integral indefinida , la «integral definida» de una función *f* continua sobre un intervalo *J* es un valor real (positivo , negativo o nulo) obtenido a partir de la función *f* , al someterla a un proceso , llamado de integración sobre dicho intervalo *J* .

La integral definida se aplica en el cálculo de áreas, de superficies , volúmenes de sólidos , longitud de arco , centro de gravedad , momento de inercia , etc.

DEFINICIÓN :

Una función *f* se dice que es integrable en *J= [a ; b]* si es continua en *J* .

Esto significa que para que exista la integral definida de *f* sobre un intervalo *[a ; b]* , *f* debe ser

continua en dicho intervalo cerrado .

NOTACIÓN :

Sea f una función continua en $J = [a ; b]$. Entonces la integral definida de f de «a» hasta «b» se denota por : $\int_a^b f(x)\,dx$

DEFINICIONES :

1) Si $a < b$ entonces $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$

2) Si f es una función definida en «a»: $\int_a^a f(x)dx = 0$

PROPIEDADES DE LA INTEGRAL DE UNA FUNCIÓN CONTINUA

Sean $f(x)$, $g(x)$ dos funciones continuas en $[a ; b]$, entonces :

1) $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$

2) $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$; k cte . real

3) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$; $c \in [a;b]$

4) $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$

PRIMER TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO INTEGRAL

Sea f una función continua en $J = [a; b]$ y G es la función definida por $G(x) = \int_a^x f(t)dt$, $x \in J$, entonces : $\dfrac{d}{dx}G(x) = f(x)$; $\forall x \in J$

SEGUNDA TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

Si $y=f(x)$ es una función continua en $[a;b]$ entonces: $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b$ donde $F'(x) = f(x)$

* Donde :

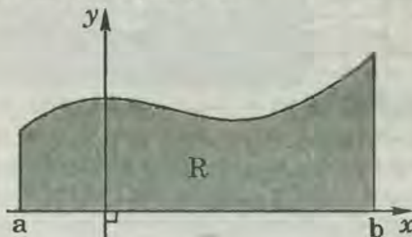
$\int$: símbolo de integración
f : función integrando
a y b : límites de integración $(a<b)$
x : variable de integración $(a<x<b)$

OBSERVACIÓN

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(y)dy = \int_a^b f(t)dt, \text{ etc}$$

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LA INTEGRAL DEFINIDA

Sea f una función continua en $[a;b]$. Si $f(x) \geq 0\ \forall x \in [a ; b]$ entonces: $\int_a^b f(x)dx$ es numéricamente igual al área de la región limitada por la gráfica de f, las rectas $x = a$, $x=b$ y el eje X.



$$Área(R) = \int_a^b f(x)dx$$

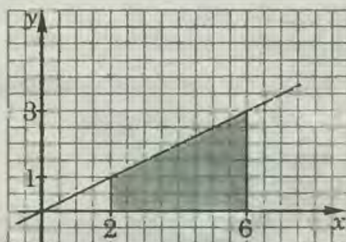
* El procedimiento seguido para calcular la integral definida de una función es muy sencillo. En los siguientes ejemplos se calcula la integral definida de algunas funciones y luego se plantea el teorema fundamental del cálculo .

EJEMPLO 1:

Hallar el área de la región limitada por la gráfica de la función $f(x)=\frac{x}{2}$, el eje horizontal y las rectas $x=2 \wedge x=6$.

RESOLUCIÓN :

* La figura delimitada por las rectas es un trapecio:



*Área del trapecio : $A = \dfrac{(B+b)h}{2}$

* La superficie del trapecio *ABCD* corresponde al área buscada : $\dfrac{(3+1)4}{2} = 8$

* Área del trapecio $\dfrac{x^2}{4}\Big|_2^6$ unidades cuadradas .

* Si en la integral $\int \frac{x}{2}dx = \frac{x^2}{4} + C$, se sustituyen los valores $x = 2$; $x = 6$ así :

$\left(\frac{6^2}{4}+C\right)-\left(\frac{2^2}{4}+C\right)=9+C-1-C=8$ unidades cuadradas .

* Se obtiene el valor correspondiente a la integral definida de la función $f(x)=\frac{x}{2}$ en el intervalo cerrado $[2;6]$ $\cdot \int_2^6 \frac{x}{2}dx=8$ unidades cuadradas.

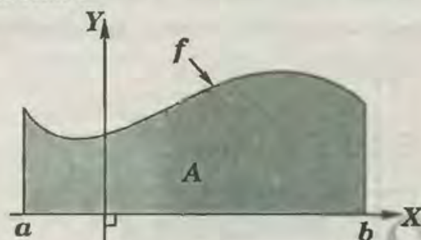
* La integral definida $\int_2^6 \frac{x}{2}\,dx$ también se nota $\left.\frac{x^2}{4}\right|_2^6$

APLICACIONES DE LA INTEGRAL

ÁREA DE REGIONES PLANAS

* Sea $f:[a;b]\to\mathbb{R}$ continua y $f(x)>0 \quad \forall x\in[a;b]$

* Entonces el área de la región A limitada por la gráfica de f, el eje X y las rectas $x=a$ y $x=b$ se define como :

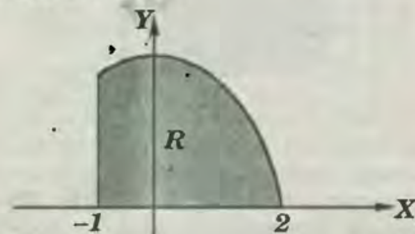


$$\text{Área}(A)=\left(\int_a^b f(x)dx\right)u^2$$

EJEMPLO 2 :

Calcule el área de la región limitada por la gráfica de f dado por $f(x)=4-x^2$, el eje X y las rectas $x=-1$ y $x=2$

RESOLUCIÓN :



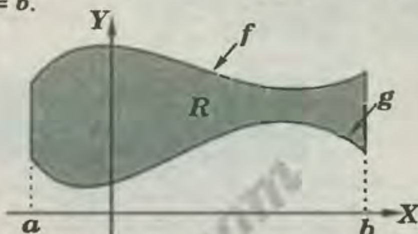
Área : R

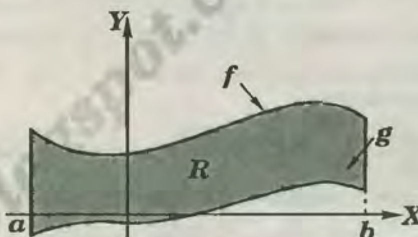
$$R=\left(\int_{-1}^2 f(x)dx\right)u^2=\left(\int_{-1}^2 (4-x^2)dx\right)u^2$$

$$\to R=\left(\left|4x-\frac{x^3}{3}\right|_{-1}^2\right)u^2 \to R=\left(\frac{16}{3}-\left(-\frac{11}{3}\right)\right)u^2=9u^2$$

TEOREMA :

Sean f y g funciones continuas en $J=[a;b]$ y de $f(x)\cdot g(x)\ \forall x\in[a;b]$. Entonces el área de la región R limitada por las gráficas de f y g y las rectas $x=a$ y $x=b$.



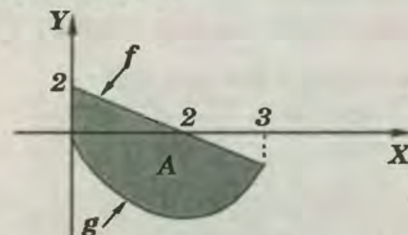


* Donde : $R=\left(\int_a^b [f(x)-g(x)]dx\right)u^2$

EJEMPLO 3 :

Calcular el área limitada por la gráfica de las funciones $f(x)=2-x$, $g(x)=x^2-5x$ y las rectas $x=0$ y $x=3$.

RESOLUCIÓN :



$$\text{Área}(A)=\left(\int_0^3 [f(x)-g(x)]dx\right)u^2$$

$$\to A=\left(\int_0^3 [(2-x)-(x^2-5x)]dx\right)u^2$$

$$\to A=\left(\int_0^3 (2+4x-x^2)dx\right)u^2$$

$$\to A=\left(\left[2x+2x^2-\frac{x^3}{3}\right]_0^3\right)u^2 \to A=(15-0)u^3=15u^3$$

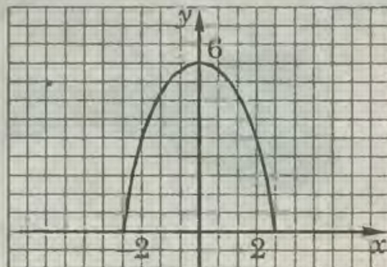
EJEMPLO 4:

Hallar el área comprendida entre la gráfica de la

función $f(x) = -x^2 + 6$ y el eje X.

RESOLUCIÓN :

* La gráfica de la función es una parábola cóncava hacia abajo que corta al eje X en los valores $x=-\sqrt{6}$ y $x=\sqrt{6}$.



* Si en la integral $\int(-x^2+6)dx=-\frac{x^3}{3}+6x+C$ se sustituyen los valores $x=-\sqrt{6}$ y $x=\sqrt{6}$, de la siguiente manera :

$$-\frac{(-\sqrt{6})^3}{3}+6(-\sqrt{6})+C-\left[-\frac{(\sqrt{6})^3}{3}+6\sqrt{6}+C\right]=-8\sqrt{6}$$

* El valor obtenido corresponde a la integral definida : $\int_{2}^{2}(6-x^2)dx=-8\sqrt{6}$

EJEMPLO 5 :

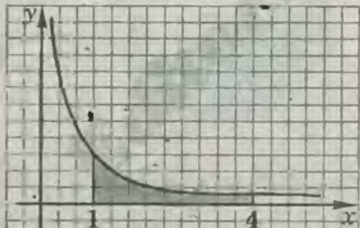
Hallar el área de la región del plano limitada por la gráfica de la función $f(x)=\frac{1}{x}$ el eje X y las rectas $x=1$ y $x=4$.

RESOLUCIÓN :

* Recuerda la gráfica :

* El área de la región rayada es la integral $\int_1^4\frac{1}{x}dx$

$\rightarrow \int_1^4\frac{1}{x}dx=Ln|x|\|_1^4=Ln4-Ln1\cdot Ln4$



EJEMPLO 6 :

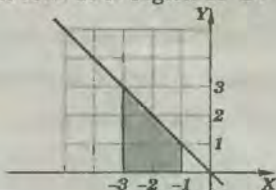
Hallar el área de la región limitada por la gráfica de la función $f(x)=-x$, las rectas $x=-3$ y $x=-1$.

RESOLUCIÓN :

* El área correspondiente entre las rectas $x=1$ es la integral $\int_{-3}^{-1}-x\,dx\rightarrow\int_{-3}^{-1}-x\,dx=-\frac{x^2}{2}\Big|_{-3}^{-1}$

$$=-\frac{(-1)^2}{2}-\left[-\frac{(-3)^2}{2}\right]=-\frac{1}{2}+\frac{9}{2}=4$$

* Entonces el área de la región es 4.

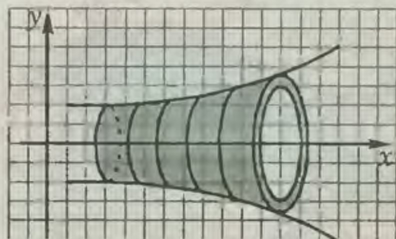


VOLÚMEN DE UN SÓLIDO

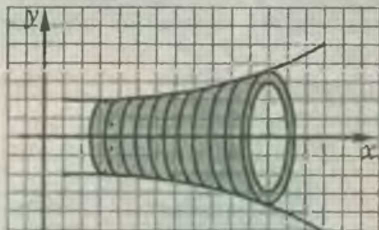
Si la región comprendida entre una curva , el eje X y una recta paralela al eje Y, gira sobre el eje X, se genera un sólido cuyo volumen se puede calcular por medio del Cálculo Integral .

El volumen del sólido que se genera al rotar la curva es igual a la suma de los volúmenes de cada uno de los cilindros que tienen de radio $f(x)$ y de altura Δx.

Al volumen se llega por sucesivas aproximaciones :

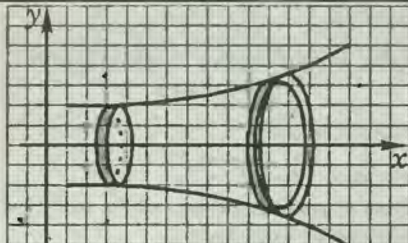


Para tal efecto dividimos el intervalo cerrado *[a;b]* en cuatro intervalos iguales. Se observa que la suma de los volúmenes de los cilindros obtenidos se aproxima al volumen del sólido .



* Si se divide el intervalo *[a ; b]* en ocho subintervalos iguales , se observa que la suma de los volúmenes de los cilindros obtenidos , se aproxima más al volumen del sólido .

* Si el intervalo se divide en un número cada vez mayor de intervalos iguales , se puede llegar a obtener un número infinito de cilindros cuya suma de los volúmenes tiene por límite el volumen del sólido , y se expresa por la integral definida de la función correspondiente .



* Si $f(x)$ representa el radio de cada cilindro y Δx el espesor , se tiene que la suma de volúmenes :

$\pi f(x_1)^2\Delta x + f(x_2)^2\Delta x + \pi f(x_3)^2\Delta x + ... + \pi f(x_\Delta)^2\Delta x$

$= \int [f(x_n)]^2 \Delta x\, dx$

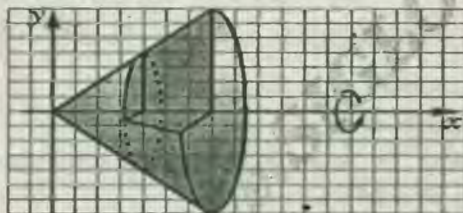
* El volumen del sólido de revolución es la integral definida en el intervalo *[a;b]* de la función cuya gráfica al rotar sobre un eje , determina el sólido :

$$V = \int_a^b \pi [f(x_n)]^2 dx$$

EJEMPLO 1:

Hallar el volumen del cono generado por el triángulo que rota respecto al eje **X**, limitado por la gráfica de la función $y=x$ en el intervalo cerrado *[0 ; 8]*.

RESOLUCIÓN :



*El cono se forma por un conjunto infinito de cilindros de radio $y=x$, espesor Δx cada uno de los cuales tiene por volumen el conjunto: $\pi x^2 \Delta x$

*La suma de cilindros tiene un límite que es la integral $\int_0^8 \pi x^2\, dx$ que corresponde al volumen del cono.

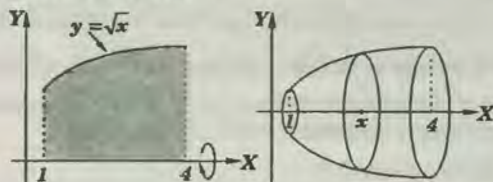
* Entonces : $V = \int_0^8 \pi x^2\, dx$

$$\rightarrow V = \int_0^8 \pi x^2 dx = \pi \int_0^8 x^2 dx = \pi \left(\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^8 = \frac{\pi 8^3}{3} = \frac{512\pi}{3}$$

EJEMPLO 2 :

Hallar el volumen del sólido generado por la rotación alrededor del eje x de : $y=\sqrt{x}$; el eje **X** ; $x=1$; $x=4$

RESOLUCIÓN :



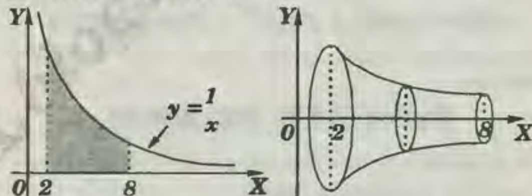
$$V = \left(\pi\int_1^4 [\sqrt{x}]^2 dx\right)u^3 \rightarrow V = \left(\pi\int_1^4 x\, dx\right)u^3 = \left(\pi\frac{x^2}{2}\Bigg|_1^4\right)u^3$$

$$\rightarrow V = \pi\left(\frac{4^2}{2} - \frac{1^2}{2}\right)u^3 = \frac{15}{2}\pi u^3$$

EJEMPLO 3 :

Halle el volumen del sólido que se genera por la rotación de la región limitada por la curva: $y=\frac{1}{x}$ y el eje **X** en el intervalo de : *[2 ; 8]*

RESOLUCIÓN :



$$V = \pi\int_2^4 \left(\frac{1}{x}\right)^2 dx = -\pi\,\frac{1}{x}\Bigg|_2^8 = -\pi\left(\frac{1}{8} - \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{8}\pi u^3$$

OTRAS APLICACIONES DE LA INTEGRAL DEFINIDA

Aparte de aplicarse en el cálculo de áreas, también se utiliza en otros campos como la física, química, ecología, etc. Sirviendo para estimar acontecimientos futuros o pasados .

EJEMPLO 1:

Una partícula que parte del reposo, efectúa el movimiento a una velocidad dada numéricamente por $v=(3t^2+5)$ *cm/s*. Hallar la distancia recorrida por la partícula en los primeros **5** segundos .

RESOLUCIÓN :

* Tenemos: $v=3t^2+5 \Rightarrow \frac{df(t)}{dt} = 3t^2+5 \Rightarrow f(t) = t^3+5t+c$..(I)

* Como parte del reposo : $f(0)=0$; en *(I)* : $0 = 0 + c \Rightarrow c = 0$

* Reemplazando en *(I)* , nos queda : $f(t) = t^3 + 5t$

* Para $t = 5$, nos queda : $f(5)=5^3+25=150cm$, que es la distancia recorrida por la partícula.

EJEMPLO 2 :

Se estima que dentro de t meses la población P de cierto pueblo cambiará a una tasa de $\frac{dP}{dt}=2+9t^{\frac{4}{5}}$ por mes. Si la población actual es de 25000 personas, ¿cuál será la población dentro de 32 meses?

RESOLUCIÓN :

* Como $\frac{dP}{dt}=2+9t^{\frac{4}{5}}$, entonces $P=\int\left(2+9t^{\frac{4}{5}}\right)dt=2t+5t^{\frac{9}{5}}+c$

* Es decir : $P(t)=2t+5t^{\frac{9}{5}}+c$ .... (I)

* Pero cuando $t=0$, la población es de 25000, en (I):

$$25000=2(0)+\frac{1}{5}(0)+c$$

* Luego $c=25000$; en (I) :

$$P(t)=2t+5t^{\frac{9}{5}}+25000 \text{ .... (II)}$$

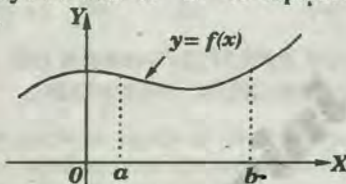
* Para $t=32$, en (II):

$$P(32)=2(32)+5(32)^{\frac{9}{5}}+25000=27624$$

La población dentro de 32 meses , será de 27624 personas .

LONGITUD DE ARCO

Sea $f:[a;b]\to\mathbb{R}$ una función con derivada continua en $[a;b]$, entonces la longitud del arco de la curva $y=f(x)$ desde el punto cuya abscisa es "a" hasta el punto cuyo abscisa es "a" es expresado por la fórmula.

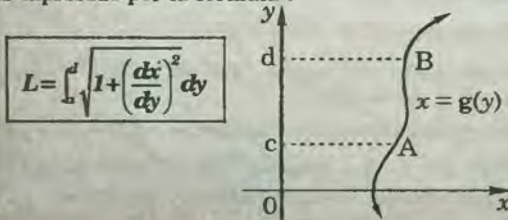


$$L=\int_a^b\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx \quad \text{ó} \quad L=\int_a^b\sqrt{1+[f'(x)]^2}dx$$

OBSERVACIÓN :.

Si $g:[c;d]\to\mathbb{R}$ es un función continua en $[c;d]$, entonces la longitud del arco de la curva $x=g(y)$ desde el punto $A(g(c),c)$ hasta el punto $B(g(d),d)$ es expresado por la fórmula :

$$L=\int_c^d\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}dy$$



EJEMPLO 1 :

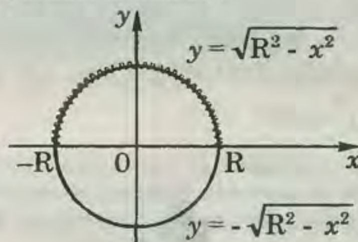
Determinar la longitud de la circunferencia:

$$x^2+y^2=R^2$$

RESOLUCIÓN :

* Despejando : $y=\pm\sqrt{R^2-x^2}$

* Tomamos primero la parte positiva (en el eje y) , y luego duplicamos lo hallado :



$$y=\sqrt{R^2-x^2}\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2}}$$

* Luego lo pedido , será :

$$L=2\int_{-R}^{R}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx=2\int_{-R}^{R}\sqrt{1+\frac{x^2}{R^2-x^2}}dx$$

$$\to L=2\int_{-R}^{R}\frac{dx}{\sqrt{R^2-x^2}}=2R\,arc\,sen\frac{x}{a}\Big|_{-R}^{R}$$

$$\to L=2R[arc\,sen(1)-arc\,sen(-1)]=2R\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)$$

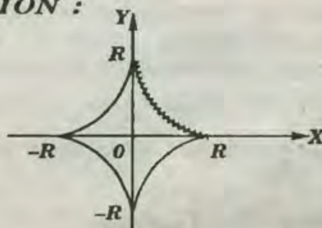
$$\to L=2\pi R$$

EJEMPLO 2 :

Calcular la longitud total de la hipocicloide $x^{2/3}+y^{2/3}=R^{2/3}$

RESOLUCIÓN :

* Graficando :



$$x^{2/3}+y^{2/3}=R^{2/3}\Rightarrow y=\left(R^{2/3}-x^{2/3}\right)^{3/2}$$

$$\frac{dy}{dx}=x^{-1/3}\sqrt{R^{2/3}-x^{2/3}}\to L=4\int_0^R\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx$$

$$\to L=4\int_0^R\sqrt{1+x^{-2/3}\left(R^{2/3}-x^{2/3}\right)}dx=4\int_0^R\sqrt{x^{-2/3}R^{2/3}}dx$$

$$\to L=4\int_0^R x^{-1/3}R^{1/3}dx=6x^{1/3}R^{1/3}\Big|_0^R=6R$$

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1 :

Calcular : $A=\int e^{\sqrt{x}}dx$

RESOLUCIÓN :

* Sea : $x=z^2 \Rightarrow dx=2zdz$, entonces :

$$\int e^{\sqrt{x}}dx=2\int ze^z dz$$

* Integrando por partes :

* Haciendo : $\begin{cases} u=z \\ dv=e^z dz \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=dz \\ v=e^z \end{cases}$

*Aplicando la fórmula de integración por partes :

$$A=\int e^{\sqrt{x}}dx=2\left(ze^z-\int e^z dz\right)+c=2(ze^z-e^z)+c$$

$$\rightarrow A=2e^z(z-1)+c=2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)+c$$

PROBLEMA 2 :

Calcular : $B=\int x^2 Lnx\,dx$

RESOLUCIÓN :

* Cuando se tiene un producto de una función logarítmica inclusive afectada de un exponente por una expresión en x , en todos estos casos , se toma así :

* Haciendo : $\begin{cases} u=Lnx \\ dv=x^2dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=\dfrac{dx}{x}. \\ v=\dfrac{x^3}{3} \end{cases}$

* Ahora reemplazamos en la fórmula de integración por partes :

$$\int x^2 Lnx\,dx=\frac{x^3}{3}Lnx-\int\frac{x^3}{3}\cdot\frac{dx}{x}$$, simplificando:

$$\rightarrow B=\frac{x^3}{3}Lnx-\frac{1}{3}\int x^2dx=\frac{x^3Lnx}{3}-\frac{x^3}{9}+c$$

PROBLEMA 3 :

Calcular : $C=\int\dfrac{9^x+3^x}{9^x-1}dx$

RESOLUCIÓN :

* Haciendo :

$$u=3^x,\ du=3^xLn3dx \Rightarrow dx=\frac{du}{u\,Ln3}$$

$$\rightarrow C=\int\frac{(u^2+u)du}{(u^2-1)u\,Ln3}=\frac{1}{Ln3}\int\frac{(u+1)du}{u^2-1}$$

$$\rightarrow C=\frac{1}{Ln3}\int\frac{du}{u-1}=\frac{1}{Ln3}Ln|3^x-1|+c$$

PROBLEMA 4 :

Calcular : $D=\int Ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)dx$

RESOLUCIÓN :

*Haciendo : $\begin{cases} u=Ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) \\ dv=dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=\dfrac{dx}{\sqrt{1+x^2}} \\ v=x \end{cases}$

* Ahora aplicamos la fórmula de integración por partes :

$$\int Ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)dx=xLn\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-\int\frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}=$$

$$\Rightarrow D=xLn\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-\sqrt{1+x^2}+c$$

PROBLEMA 5 :

Calcular : $E=\int\dfrac{(2x^2+1)dx}{(x+1)^2(x-3)}$

RESOLUCIÓN :

* A la integral dada expresemos en la forma:

$$\int\frac{(2x^2+1)dx}{(x+1)^2(x-3)}=\int\left(\frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{C}{x-3}\right)dx\ ....(I)$$

* Ahora calculando las constantes A, B y C :

$$\frac{(2x^2+1)dx}{(x+1)^2(x-3)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{C}{x-3}=$$
$$\frac{A(x+1)(x-3)+B(x-3)+C(x+1)^2}{(x+1)^2(x-3)}$$

* Igualando los numeradores se tiene :

$$2x^2+1=A(x^2-2x-3)+B(x-3)+C(x^2+2x+1)$$

* Ordenando :

$$2x^2+1=(A+C)x^2+(-2A+B+2C)x-3A-3B+C$$

* Ahora por identidad de polinomios se tiene :

$$\begin{cases} A+C=2 \\ -2A+B+2C=0 \\ -3A-3B+C=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=C=\dfrac{13}{16} \\ B=-\dfrac{3}{4} \end{cases}$$

* Luego reemplazando los valores de A, B y C en *(I)*:

$$E=\int\frac{(2x^2+1)dx}{(x+1)^2(x-3)}=\frac{13}{16}\int\frac{dx}{x+1}-\frac{3}{4}\int\frac{dx}{(x+1)^2}+\frac{13}{16}\int\frac{dx}{x-3}$$

$$\rightarrow E=\frac{13}{16}Ln|x+1|+\frac{3}{4(x+2)}+\frac{13}{16}Ln|x-3|+c$$

PROBLEMA 6 :

Calcular : $F=\int_0^{\pi}x\,senx\,dx$

RESOLUCIÓN :

* Haciendo : $\begin{cases} u = x \\ dv = sen\,x\,dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -\cos x \end{cases}$

$$\Rightarrow F = \int_0^{\pi} x\,sen\,x\,dx = -x\cos x\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\cos x\,dx$$

$$= -x\cos x\Big|_0^{\pi} + sen\,x\Big|_0^{\pi} \Rightarrow F = -(-\pi - 0) + (0 - 0) = \pi$$

PROBLEMA 7 :

Calcular : $G = \int_{-3}^{1} x\sqrt{1-x}\,dx$

RESOLUCIÓN :

* Hacemos $1 - x = u^2$, es decir $x = 1 - u^2$, elegimos

$u = \sqrt{1-x}$, $\quad x = 1 \Leftrightarrow u = 0 \quad dx = -2u\,du$:

$\quad x = -3 \Leftrightarrow u = 2$

$$G = \int_2^0 (1-u^2)u(-2u)\,du = 2\left(\frac{u^5}{5} - \frac{u^3}{3}\right)\Bigg|_2^0$$

$$\rightarrow G = -2\left(\frac{32}{5} - \frac{8}{3}\right) = -\frac{112}{15}$$

PROBLEMA 8 :

Calcular : $H = \int_0^8 x\sqrt{1+x}\,dx$

RESOLUCIÓN :

*Para calcular la integral definida, primero evaluamos la integral indefinida $\int x\sqrt{1+x}\,dx$ realizando el siguiente cambio de variables :

$$u = \sqrt{1+x};\ u^2 = 1 + x;\ x = u^2 - 1;\ dx = 2u\,du$$

* Sustituyendo tenemos:

$$\rightarrow \int x\sqrt{1+x}\,dx = \int (u^2 - 1)u(2u\,du) = 2\int (u^4 - u^2)\,du$$

$$\rightarrow \int x\sqrt{1+x}\,dx = \frac{2}{5}u^5 - \frac{2}{3}u^3 + C$$

$$\rightarrow \int x\sqrt{1+x}\,dx = \frac{2}{5}(1+x)^{5/2} - \frac{2}{3}(1+x)^{3/2} + C$$

* Luego, se calcula la integral definida:

$$H = \int_0^8 x\sqrt{1+x}\,dx = \frac{2}{5}(1+x)^{5/2} - \frac{2}{3}(1+x)^{3/2}\Bigg|_0^8$$

$$\rightarrow H = \int_0^8 x\sqrt{1+x}\,dx =$$

$$\underbrace{\left[\frac{2}{5}(1+8)^{5/2} - \frac{2}{3}(1+8)^{3/2}\right]}_{F(8)} - \underbrace{\left[\frac{2}{5}(1+0)^{5/2} - \frac{2}{3}(1+0)^{3/2}\right]}_{F(0)}$$

$$\rightarrow H = \int_0^8 x\sqrt{1+x}\,dx = \left[\frac{2}{5}(243) - 18\right] - \left[\frac{2}{5} - \frac{2}{3}\right]$$

$$\rightarrow H = \int_0^8 x\sqrt{1+x}\,dx = \left[\frac{486}{5} - 18\right] - \left[\frac{-4}{15}\right]$$

$$= \frac{396}{5} + \frac{4}{15} = \frac{1192}{15}$$

PROBLEMA 9 :

Calcular : $I = \int_0^1 \frac{t^2 + 2t}{\sqrt[3]{t^3 + 3t^2 + 4}}dx$

RESOLUCIÓN :

* Se realiza un cambio de variable para calcular la antiderivada :

* Si $u = t^3 + 3t^2 + 4$, entonces

$du = (3t^2 + 6t)\,dt$; $\frac{1}{3}du = (t^2 + 2t)dt$; luego :

$$\int_0^1 \frac{t^2 + 2t}{\sqrt[3]{t^3 + 3t^2 + 4}}dt = \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{du}{u^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{3}\int_0^1 u^{-\frac{1}{3}}du = \frac{1}{3}\frac{u^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} + C$$

$$\rightarrow \int_0^1 \frac{t^2 + 2t}{\sqrt[3]{t^3 + 3t^2 + 4}}dt = \frac{1}{2}(t^3 + 3t^2 + 4)^{2/3} + C$$

$$\rightarrow \int_0^1 \frac{t^2 + 2t}{\sqrt[3]{t^3 + 3t^2 + 4}}dt = \frac{1}{2}(t^3 + 3t^2 + 4)^{2/3} + C$$

$$\rightarrow I = \int_0^1 \frac{t^2 + 2t}{\sqrt[3]{t^3 + 3t^2 + 4}}dt =$$

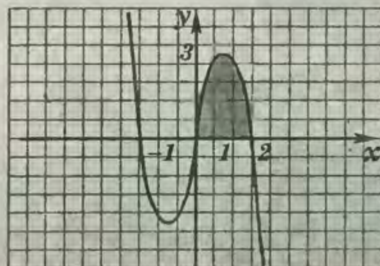
$$\underbrace{\frac{1}{2}(1+3+4)^{2/3}}_{F(1)} - \underbrace{\frac{1}{2}(0+0+4)^{2/3}}_{F(0)} \rightarrow I = 2 - \sqrt[3]{2}$$

PROBLEMA 10 :

Hallar el área de la región limitada por el eje x y la gráfica de la función $f(x) = 4x - x^3$ en el intervalo $[0 ; 2]$.

RESOLUCIÓN :

* Se hace la representación gráfica de la función a integrar .



*El área de la región sombreada es el área a calcular.

* Una tabla de datos facilita la representación:

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	0	-3	0	3	0

* El área de la región es la integral :

$$\int_0^2 (4x + x^3)\,dx = \left[2x^2 - \frac{x^4}{4}\right]_0^2 = 2(2)^2 - \frac{(2)^4}{4} = 4$$

PROBLEMA 11 :

Hallar el área de la región de la función $f(x) = 4x - x^3$, en el intervalo $[-2\ ;\ 0]$.

RESOLUCIÓN :

* De la gráfica se deduce que la región ocupa la parte inferior al eje X. Por lo tanto, el área se calcula con la integral negativa :

$$-\int_{-2}^{0} (4x - x^3)dx = \left(2x^2 - \frac{x^4}{4}\right]_{-2}^{0} = 4$$

PROBLEMA 12 :

Hallar el área de la misma función : $f(x) = 4x - x^3$ en el intervalo $[-2\ ;\ 2]$

RESOLUCIÓN :

* El área de la región es la suma de las áreas en los intervalos $[-2\ ;\ 0]$ y $[0\ ;\ 2]$, es decir :

$4 + 4 = 8$ unidades (según problemas *10* y *11*)

* Observa que con mucha facilidad se puede cometer el error de calcular el área entre los dos extremos sin tener en cuenta que una es negativa y la otra es positiva , en tal caso el área se anularía .

$$\int_2^2 (4x - x^3)dx = \left(2x^2 - \frac{x^4}{4}\right]_{-2}^{2}$$

$$= \left[2(2)^2 - \frac{(2)^4}{4}\right] - \left[2(2)^2 - \frac{(-2)^4}{4}\right] = 0$$

* Sobra aclarar que el método anterior es incorrecto.

PROBLEMA 13 :

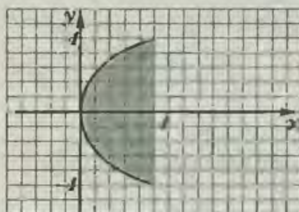
Hallar el área de la región del plano limitada por la gráfica de la relación $y^2 = 4x$ y las rectas $x=0$ y $x=4$.

RESOLUCIÓN :

* Si $y^2 = 4x$ entonces $y = \sqrt{4x}$ ó $y = -\sqrt{4x}$

La tabla muestra algunas parejas de la relación que sugieren la siguiente representación gráfica:

x	0	1	2	3	4
$\pm\sqrt{4x}$	0	± 2	$\pm 2\sqrt{2}$	$\pm 2\sqrt{3}$	± 4



* Parte del área que se debe hallar corresponde a valores negativos . Por lo tanto , es necesario hallar el área correspondiente a la función positiva y el área correspondiente a la función negativa y luego sumarlas.

A_1 representa el área sobre el eje X, y es la integral:

$$\rightarrow\ A_1 = \int_0^4 \sqrt{4x}\,dx = \frac{4x^{3/2}}{3} = \frac{32}{3} \text{ (unidades)}^2$$

A_2 representa el área por debajo del eje X, y es la integral: $\rightarrow\ A_2 = \int_0^4 \sqrt{4x}\,dx = \frac{32}{3}$ (unidades $)^2$

* Entonces el área de la región del plano limitada por la gráfica de la relación $y^2 = 4x$ y las rectas $x=0$ y $x=4$ es : $\frac{32}{3} + \frac{32}{3} = \frac{64}{3}$

PROBLEMA 14 :

Hallar la función $g(x)$ tal que $f\,'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ y $g(4)=1$

RESOLUCIÓN :

*Como $f\,'(x) = x^{-1/2}$; $g(x)$ debe ser una antiderivada de $x^{-1/2}$ $\int x^{-1/2}dx = 2x^{1/2} + C$, luego $g(x) = 2x^{1/2} + C$ para alguna constante C .

$g(4) = 1 = 2 \cdot 4^{1/2} + C = 4 + C$, así $C = -3$

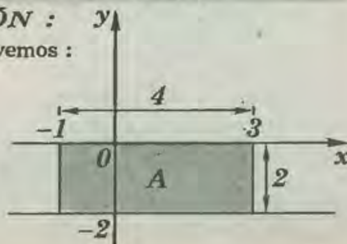
* Entonces la función pedida es : $g(x) = 2x^{1/2} - 3$

PROBLEMA 15 :

Halle la integral definida de la función: $f(x)= 2$; en el intervalo : $I = [-1\ ;\ 3]$

RESOLUCIÓN :

* Graficamente vemos :

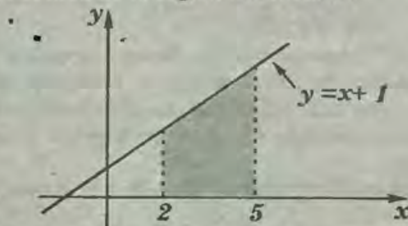


$$\int_1^2 f(x)\,dx=\int_{-1}^{3}(-2)\,dx=-2x\Big[_{-1}^{3}=-2(3)-(-2(-1))=-8$$

* Luego : $A=-\int_1^2 f(x)\,dx=-(-8)=8$

PROBLEMA 16 :

Halle el área de la región sombreada .



RESOLUCIÓN :

$$A=\int_2^5 (x+1)\,dx=\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\Big[_2^5$$

$$\rightarrow\ A=\left(\frac{5^2}{2}+5\right)-\left(\frac{2^2}{2}+2\right)=\frac{27}{2}u^2$$

PROBLEMA 17 :

Hallar el área de la región comprendida entre las gráficas de las funciones $f(x)=x^2$ y $g(x)=2x-x^2$

RESOLUCIÓN :

* Se hace la representación gráfica de las funciones :

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	4	1	0	1	4

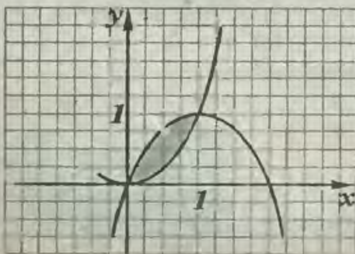
x	-2	-1	0	1	2
$g(x)$	-8	-3	0	1	0

* Es necesario hallar los puntos de corte de las gráficas : $y=x^2\ ;\ =2x-x^2$

Se aplica el método de igualación : $x^2=2x-x^2$

* Se reducen términos semejantes y se factoriza $2x$: $2x^2-2x=0$

$\rightarrow 2x\,(x-1)=0$ Por lo tanto $x=0$ ó $x=1$



* El área de la región comprendida entre las dos curvas , se obtiene al hallar la diferencia de las áreas de las regiones limitadas de las funciones $g(x)=2x-x^2$ y $f(x)=x^2$, las cuales son iguales a las integrales .

$\int_0^1(2x-x^2)\,dx$ y $\int_0^1 x^2\,dx$, si se denomina con la letra A a dicha región, se tiene :

$$\rightarrow A=\int_0^1(2x-x^2)\,dx-\int_0^1 x^2\,dx=\left(\frac{2x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1-\left(\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{3}$$

PROBLEMA 18 :

Hallar el área de la región del plano comprendida entre la gráfica de la relación $y^2=4x$ y la función $y=2x-4$.

RESOLUCIÓN :

* Es necesario hallar los puntos en los cuales las gráficas de la relación y de la función se cortan . Para esto se resuelve el sistema :

$$y^2=4x\ ;\ y=2x-4$$

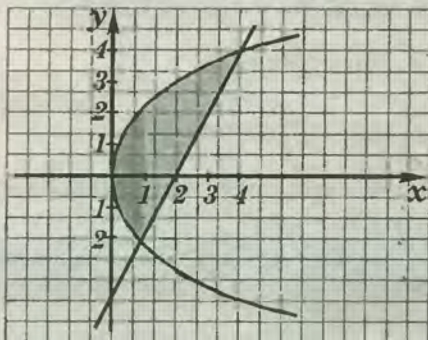
* Las gráficas se cortan en los puntos

$$A=(4\,;4)\ \text{y}\ B=(1;-2)$$

* Observa la gráfica determinada por la representación de la relación y de la función :

x	0	1	2	3	4
y	0	± 2	$\pm 2\sqrt{2}$	$\pm 2\sqrt{3}$	$\pm\sqrt{4}$

x	0	1	3	4	5
y	-4	-2	2	4	6



* En el intervalo *[0 ; 1]* , la parábola en sus dos ramas está por encima de la recta. El área de la región en *[0 ; 1]* es el doble del área bajo la curva $y=\sqrt{x}$.

En el intervalo *[1 ; 4]* la parábola está por encima y la recta por debajo .

* Es necesario descomponer el intervalo *[0 ; 4]* en dos intervalos *[0 ; 1]* y *[1 ; 4]*.

$$A_1 = \int_0^1 [\sqrt{4x} - (-\sqrt{4x})]dx$$

* El área de la región: $A_2 = \int_0^1 [\sqrt{4x} - (2x-4)]dx$

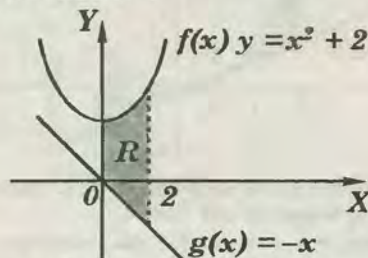
* El área total entre las dos curvas es:

$$A = \int_0^1 [\sqrt{4x} - (-\sqrt{4x})]dx + \int_1^4 [\sqrt{4x} - (2x-4)]dx = 9$$

PROBLEMA 19 :

Hallar el área de la región limitada por las gráficas de $y=x^2+2$; $y=-x$; $x=0$ y $x=2$

RESOLUCIÓN :



Haciendo $g(x)=-x$; $f(x)=x^2+2$ y graficando aplicamos :

$$\text{Área} = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

$$\rightarrow A = \int_0^2 [(x^2+2)-(-x)]dx = \left[\frac{x^3}{3} + 2x + \frac{x^2}{2}\right]_0^2$$

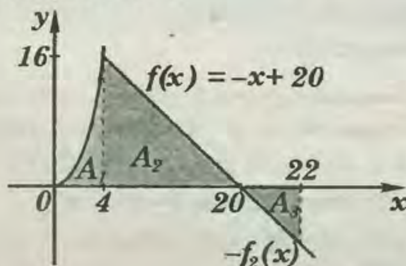
$$= \frac{8}{3} + 4 + 2 \rightarrow A = \frac{26}{3}u^2$$

PROBLEMA 20 :

Hallar el área de la región limitada por el eje **X** ; la recta vertical $x = 22$ y la gráfica de la funcíon

$$f(x) = \begin{cases} x \; ; \; x \leq 4 \\ -x+20 \; ; \; x > 4 \end{cases}$$

RESOLUCIÓN :



* El área total es : $A = A_1 + A_2 + A_3$

$$A_1 = \int_0^4 (x^2)dx = \frac{1}{3}x^3\Big|_0^4 = \frac{64}{3}$$

$$A_2 = \int_4^{20} (-x+20)\,dx = \left(-\frac{x^2}{2} + 20x\right)\Big|_4^{20} = 200 - 72 = 128$$

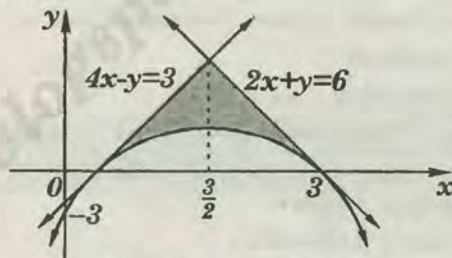
$$A_3 = -\int_{20}^{22} f_2(x)\,dx = \int_{20}^{22} (x-20)\,dx = \left(\frac{x^2}{2} - 20x\right)\Big|_{20}^{22} = 2$$

$$\rightarrow A = A_1 + A_2 + A_3 = \frac{64}{3} + 128 + 2$$

PROBLEMA 21 :

Hallar el área de la figura comprendida entre la parábola $y=-x^2+4x-3$ y las tangentes a esta en los puntos *(0 ; – 3)* y *(3 ; 0)* .

RESOLUCIÓN :



$$y = -x^2 + 4x - 3 = 1 - (x-2)^2$$
$$y - 1 = -(x-2)^2,\ V(1;2)$$

$$y = -x^2 + 4x - 3 \Rightarrow \frac{dy}{dx}\Big|_{x=3} = (-2x+4)|_{x=3} = -2$$

L_1: $y - 0 = -2(x-3)$ de donde L_1: $2x + y = 6$

$$\frac{dy}{dx}\Big|_{x=0} = (-2x+4)|_{x=0} = 4$$

L_2: $y + 3 = 4(x-0)$ de donde L_2: $4x - y = 3$

$$\rightarrow A = \int_0^{3/2} [(4x-3) - (-x^2+4x-3)]dx +$$

$$\int_{3/2}^{3} [(6-2x) - (-x^2+4x-3)]dx$$

$$\rightarrow A = \int_0^{3/2} x^2 dx + \int_{3/2}^{3} (x^2 - 6x + 9)dx$$

$$\rightarrow A = \frac{x^3}{3}\Big|_0^{3/2} + \left(\frac{x^3}{3} - 3x^2 + 9x\right)\Big|_{3/2}^{3} = \frac{9}{4} + \frac{9}{8} - \frac{9}{4} = \frac{9}{8}$$

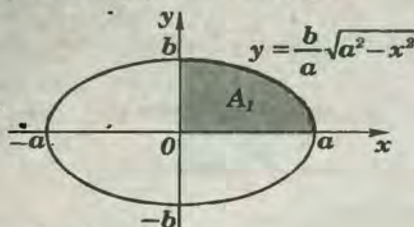
PROBLEMA 22 :

Hallar el área A encerrada por la elipse :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

RESOLUCIÓN :

* Calcularemos el área A_1 de la región correspondiente al primer cuadrante : .



$$A_1=\int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

$$\rightarrow\ A_1=\frac{b}{2a}\left[x\sqrt{a^2-x^2}+a^2 arc\,sen\frac{\pi}{a}\right]_0^a=\frac{\pi ab}{4}$$

* Por lo tanto , el área buscada es igual a :

$A=4A_1=\pi ab$

PROBLEMA 23 :

Hallar el área encerrada entre las curvas :

$y = x^3$ y $8y=2x^3+x^2-2x$.

RESOLUCIÓN :

* Puntos de intersección :

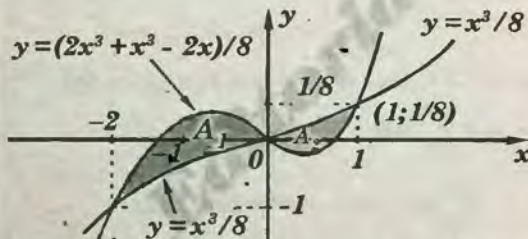
$$x^3=2x^3+x^2-2x\Rightarrow x^3+x^2-2x=0$$

$$\Rightarrow x(x^2+x-2)=0$$

$$x(x-1)(x+2)=0\Rightarrow\ x=-2,\ x=0,\ x=1.$$

* Así , los puntos de intersección son

$(-2;-1),(0;0),(1;1/8)$;



*Aquí hemos utilizado necesariamente los criterios de la primera y segunda derivadas para encontrar los máximos y mínimos relativos , los intervalos de crecimiento y decrecimiento , así como las concavidades en ambas gráficas .

Por lo tanto , ya podemos establecer la fórmula adecuada para el área : $A = A_1 + A_2$

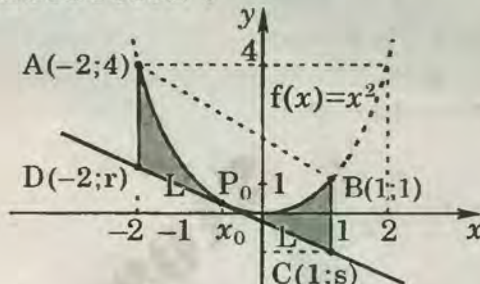
$$\rightarrow A=\int_{-2}^{0}\left|\frac{2x^3+x^2-2x}{8}-\frac{x^3}{8}\right|dx+\int_0^1\left|\frac{x^3}{8}-\frac{2x^3+x^2-2x}{8}\right|dx$$

$$\rightarrow A=(1/3)+(5/96)=\frac{37}{96}$$

PROBLEMA 24 :

Sean los puntos $A = (-2\ ;\ 4)$, $B = (1\ ;\ 1)$ sobre la parábola $y=x^2$, y los puntos $C = (1\ ;\ s)$ y $D = (-2\ ;\ r)$ tales que el segmento de recta CD es tangente a la parábola y es paralelo al segmento de recta AB . Hallar el área de la región encerrada por la parábola y por los segmentos AD , DC y CB.

RESOLUCIÓN :



* Es suficiente hallar la ecuación de la recta L que contiene al segmento CD . Sea :

$L:\ y=mx+b$ y como $L\,//\,AB$, entonces

$$m=\frac{4-1}{-2-1}=-1\Rightarrow L:\ y=-x+b$$

* Además , si $y=f(x)=x^2$ entonces $f'(x)=2x$, y por lo tanto $m=-1=f'(x_o)=2x_o\Rightarrow x_o=-1/2$

* Así obtenemos el punto de tangencia $P_0=(x_0;f(x_0))=(-1/2;1/4)$ sobre la recta L.

* Luego hallamos $b=-1/4$ y completamos la ecuación de $L:\ y=-x-\frac{1}{4}$. Procedemos a calcular el área A : $A=\int_{-2}^{1}\left[x^2-\left(-x-\frac{1}{4}\right)\right]dx=\frac{9}{4}$

PROBLEMA 25 :

Calcular el área A de la región S limitada por la curva $(y-x-2)^2=9x$ y por uno o ambos de los ejes coordenados .

RESOLUCIÓN :

$x\geq 0$. Despejando $y=x+2\pm 3\sqrt{x}=\ldots$ (dos ramas) Intersecciones con los ejes: Eje Y , si $x=0$: $y=2$. Eje X , si $y=0$, para la rama $0=x+2+3\sqrt{x}\geq 2$, no existe; pero para la rama $x+2-3\sqrt{x}=0$

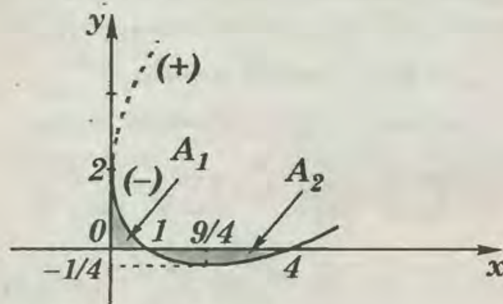
$$\Rightarrow\ x^2+4x+4=9x\ \Rightarrow\ x^2-5x+4=0$$

$$\Rightarrow (x-4)(x-1)=0\cdot$$

* Así la gráfica corta al eje X en $x = 1$ y $x = 4$.
La región S es la que corresponde a la rama con el signo (–) y por lo tanto , $A = A_1 + A_2$

$$\rightarrow A=\int_0^1(x+2-3\sqrt{x})dx+\int_1^4-(x+2-3\sqrt{x})dx$$

$$\rightarrow A=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$$

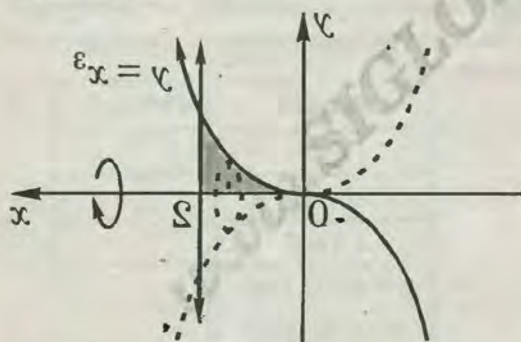


PROBLEMA 26 :

Encontrar el volumen del sólido generado al rotar alrededor del eje X la región acotada por la curva $y=x^3$ y las rectas $x=0$; $x=2$.

RESOLUCIÓN :

* Graficando :



$$V=\pi\int_0^2 y^2dx=\pi\int_0^2 x^6dx=\frac{128\pi}{7}$$

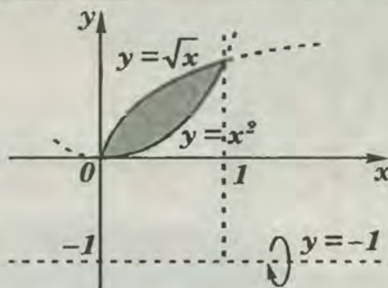
PROBLEMA 27 :

Hallar el volumen del sólido de revolución obtenido al rotar alrededor de la recta $y=-1$ la región comprendida entre las curvas $y=x^2$ y $y=\sqrt{x}$.

RESOLUCIÓN :

* Intersecciones entre las curvas : $(0;0)$ y $(1;1)$.

Además , $y=-1 \Rightarrow c=-1$



* Entonces :

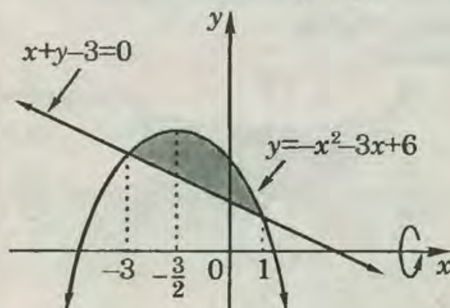
$$V=\pi\int_0^1\left\{\left[\sqrt{x}-(-1)\right]^2-\left[x^2-(-1)\right]^2\right\}dx=\frac{29\pi}{30}$$

PROBLEMA 28 :

Encontrar el volumen cuando el área plana encerrada por :
$y=-x^2-3x+6$, y , $x+y-3=0$ gira alrededor de $y=0$.

RESOLUCIÓN :

$$y=-x^2-3x+6 \Rightarrow y-\frac{33}{4}=-\left(x+\frac{3}{2}\right)^2 \text{ parábola}$$



$$\begin{cases} y=-x^2-3x+6 \\ y=3-x \end{cases} \Rightarrow -x^2-3x+6=3-x$$

$$\rightarrow x^2+2x-3=0 \quad \rightarrow (x+3)(x-1)=0$$

$$\Rightarrow x=-3 \vee x=1$$

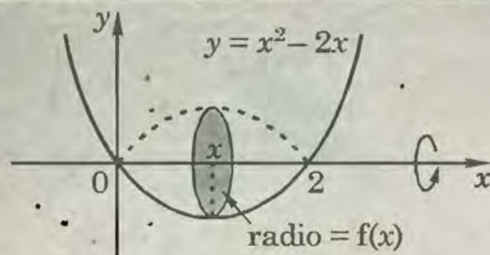
$$\rightarrow V=\pi\int_{-3}^1\left[(-x^2-3x+6)^2-(3-x)^2\right]dx$$

$$\rightarrow V=\pi\int_{-3}^1(x^4+6x^3-4x^2-30x+27)dx=\frac{1792\pi}{15}$$

PROBLEMA 29 :

Hallar el volumen del sólido generado por la rotación de la región comprendida entre la curva $y=x^2-2x$ y el Eje X , alrededor del eje de abscisas .

RESOLUCIÓN :



* Los puntos de intersección del Eje **X** con la curva son : **(0 ; 0)** y **(2 ; 0)** .

Si definimos $f(x) = x^2 - 2x$ entonces $f(x)$ está debajo del Eje **X**. Las secciones transversales circulares tienen radio : $-f(x)$. Por tanto ,

$$A(x) = \pi[-f(x)]^2 = \pi[f(x)]^2 , x \in [0 ; 2]$$

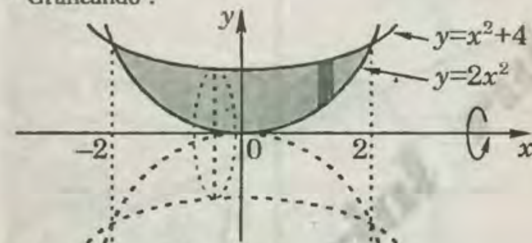
$$V = \int_0^2 \pi[x^2 - 2x]^2 dx = 16\pi/15$$

PROBLEMA 30 :

Encontrar el volumen del sólido generado por la rotación de la región entre las curvas $y = x^2 + 4$ e $y = 2x^2$ alrededor del eje **X** .

RESOLUCIÓN :

* Graficando :



$$\begin{cases} y = x^2 + 4 \\ y = 2x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} 2x^2 = x^2 + 4 \\ x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2 \end{matrix}$$

$$\rightarrow V = \pi\int_{-2}^2 \left[(x^2+4)^2 - (2x^2)^2\right]dx$$

$$\rightarrow V = \pi\int_{-2}^2 (-3x^4 + 8x^2 + 16)dx = \frac{1024\pi}{15}$$

PROBLEMA 31 :

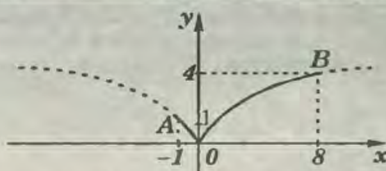
Hallar la longitud de arco de la curva **C**:

$$y = x^{\frac{2}{3}}$$

entre $x = -1$ y $x = 8$.

RESOLUCIÓN :

$$\frac{dx}{dy} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{x^{1/3}}$$



Como la derivada no está definida en $x = 0$ entonces se puede considerar $x = g(y)$ como función de y, en lugar de $y = f(x)$. Así , despejando : $x = \pm y^{3/2}$, donde

* $x = y^{3/2}$ para $y \in [0 ; 4]$ **(Arco OB)**, y

* $x = -y^{3/2}$ para $y \in [0 ; 1]$ **(Arco OA)**; entonces

$$L = \int_{y=0}^{y=1} \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy + \int_{y=0}^{y=4} \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy$$

$$\rightarrow L = \int_0^1 \sqrt{1 + \left(-\frac{3}{2}y^{1/2}\right)^2}\, dy + \int_0^4 \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2}y^{1/2}\right)^2}\, dy$$

$$\rightarrow L = \frac{1}{27}\left(13\sqrt{13} + 80\sqrt{10} - 16\right)$$

PRIMERA PRACTICA DIRIGIDA

01 Completa el siguiente cuadro con las derivadas de las funciones algebraicas estudiadas en la unidad anterior :

Función	Derivada
$y = x$	
$y = x^2$	
$y = ax^n$	
$y = f(x) + g(x)$	
$y = f(x) \cdot g(x)$	
$y = \frac{f(x)}{g(x)}$	

02 Completa el siguiente cuadro , escribiendo la función antiderivada de las funciones dadas :

Función	Antiderivada
$f(x) = 1$	$F(x) = x + C$
$f(x) = x$	$F(x) = \square + C$
$f(x) = 2x$	$F(x) = \square + C$

$f(x)=3x^2$	$F(x)=\square+C$
$f(x)=4x^3$	$F(x)=\square+C$
$f(x)=7x^5$	$F(x)=\square+C$
$f(x)=x^5$	$F(x)=\square+C$

03 Completa el siguiente cuadro con las derivadas de las funciones exponenciales y logarítmicas, estudiadas en la unidad anterior:

Función	*Derivada*
$y=e^x$	
$y=a^x$	
$y=Ln\,x$	
$y=Log\,x$	
$y=e^u$, donde $u=f(x)$	
$y=a^u$, donde $u=f(x)$	
$y=u^v$, donde $u=f(x)$ y $v=g(x)$	
$y=Ln\,u$, donde $u=f(x)$	

04 Completa el siguiente cuadro escribiendo en la columna de la derecha la antiderivada de la función escrita en la columna de la izquierda :

Función	*Antiderivada*
$f(x)=e^x$	
$f(x)=a^x Ln\,a$	
$f(x)=\dfrac{a^x}{Ln\,a}$	
$f(x)=2xe^{x^2}$	
$f(x)=1/x$	
$f(x)=u'/u$ donde $u=f(x)$	

05 Halla la antiderivada de las funciones:

A) $f(x)=x^{\frac{1}{4}}$ *B)* $f(x)=x^{\frac{3}{4}}$ *C)* $f(x)=x^{\frac{1}{2}}$

D) $f(x)=x^{-3}$ *E)* $f(x)=\dfrac{1}{x^{3}}$ *F)* $f(x)=\dfrac{x^{3}}{4}$

G) $f(x)=\dfrac{x^{3}}{5}$ *H)* $f(x)=\dfrac{x^{3}}{5}$

06 Calcula las antiderivadas de las funciones:

A) $f(x)=3x^4$ *B)* $f(x)=sen\,x$ *C)* $f(x)=0$

D) $f(x)=sec^2x$ *E)* $f(x)=sec\,x\,tgx$ *F)* $f(x)=\dfrac{2}{3}x^{3/2}$

07 Determina la función $f(x)$ si :

A) $f'(x)=6x$ *B)* $f'(x)=cosx$ *C)* $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

D) $f'(x)=e^x$ *E)* $f'(x)=xe^{x^2}$

F) $f'(x)=3x^2$ *G)* $f'(x)=5x^7$

H) $f'(x)=4tanx\,sec\,x$ *I)* $f'(x)=2x$ *J)* $f'(x)=\dfrac{-5}{x}$

K) $f'(x)=-\sqrt{3}\,sec^2x$ *L)* $f'(x)=\dfrac{3}{x}$ *M)* $f'(x)=-5\,csc^2x$

N) $f'(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$ *O)* $f'(x)=tanx$

08 Calcula las siguientes integrales :

A) $\int x^2dx$ *B)* $\int x^4dx$ *C)* $\int x^7dx$

D) $\int \sqrt[3]{x}\,dx$ *E)* $\int \sqrt[5]{x^2}\,dx$ *F)* $\int \sqrt[7]{x^3}\,dx$

G) $\int \dfrac{dx}{\sqrt[3]{x^5}}$ *H)* $\int x^3\sqrt{x^7}\,dx$ *I)* $\int \sqrt[4]{x^7}\,dx$

09 Si la integral de $y=x$ es $\dfrac{x^2}{2}+C$, ¿a qué será igual la integral de $3x$?

10 La integral de $y=senx$ es igual $-cosx+C$, ¿a qué será igual la integral de $A\,senx$?

11 Explica si son correctas las siguientes afirmaciones:

A) Si $f(x)=x^n$ entonces $\int kx^n dx=k\dfrac{x^{n+1}}{n+1}+C$; $n\neq 1$

B) Si $f(x)=senx$ entonces $\int k\,senx\,dx=ksen\dfrac{x^{n+1}}{n+1}+C$

12 Verifica si :

A) $\dfrac{3}{2}\int 2cosx\,dx=3\,senx+C$ *B)* $4\int\dfrac{1}{x^2}dx=\int 4x^{-2}\,dx$

13 Analiza las siguientes igualdades y determina si son correctas. En caso de ser incorrectas corrígelas :

A) $\int 3x^2\,dx = x^3 + C$ B) $\int -senx\,dx = cosx + C$

C) $\int \frac{2}{2\sqrt{x}}dx = \sqrt{x} + C$ D) $\int 4x^3\,dx = x^4 + C$

14 Calcula las siguientes integrales :

A) $\int 4x^2 dx$ B) $\int -3x^7\,dx$ C) $\int \frac{5}{2x^3}dx$

D) $\int \frac{-2}{7x^{1/2}}dx$ E) $\int \sqrt{3x^6}\,dx$ F) $\int -x^4\,dx$

G) $\int k\,x^{10}\,dx$ H) $\int \frac{-9}{5x^{3/2}}\,dx$

15 Halla la función $g(x)$ que satisfaga la condición dada : A) $f'(x) = 4x^5, g(1) = 1$

B) $f'(x) = 3x^2 - 4x + 3x^3, g(2) = \frac{1}{2}$

C) $f'(x) = senx - cosx, g(0) = 3$

D) $f'(x) = e^x + x, g(0) = 2$

E) $f'(x) = \pi sec2x, g(7) = 0$

F) $f'(x) = (3 - 2x)^2, g(3) = 2$

G) $f'(x) = (x-1)(x^2 + 3), g(0) = 3$

H) $f'(x) = 2^x + x^2, g(3) = -1$

16 Verifica si :

A) $\int (x+1)dx = \int (1+x)dx$

B) $\int (x^2 + x + 1)dx = \int (x + 1 + x^2)dx$

17 Escribe la propiedad que justifica la igualdad:

$$\int f(x)dx + \int g(x)dx + \int h(x)dx = \int [f(x) + g(x) + h(x)]dx$$

18 Calcula las siguientes integrales :

A) $\int x\,dx + \int x^2\,dx + \int x^{-3}\,dx$

B) $\int senx\,dx + \int 5cosx\,dx + 9\int sec^2x\,dx$

C) $\int x^3\,dx + \int 5x^3\,dx + 9\int x^{-2}\,dx$

19 Calcula las siguientes integrales :

A) $\int (4x^6 - 5x + 8)dx$ B) $\int (x^3 - 5\sqrt{x} + x\sqrt[3]{x})dx$

C) $\int \frac{3x^4 - 5x^2}{4}dx$ D) $\int \frac{3x^{-5} + 6}{\sqrt{x}}dx$

E) $\int \left(\frac{1}{x^5} - \frac{\sqrt[3]{x}}{x} + \sqrt{x}\right)dx$ F) $\int \frac{3x^2 + 3x\sqrt{x} - 2x - 2\sqrt{x}}{x + \sqrt{x}}dx$

20 Emplea el método de sustitución para efectuar estas integrales :

A) $\int (2x+1)^4\,dx$ B) $\int \sqrt{3x+5}\,dx$

C) $\int (x^2 - 1)^7\,x\,dx$ D) $\int_0^2 \sqrt{5x^2 + 3}\,x\,dx$

E) $\int_0^{\pi/2} sen\,2x\,dx$ F) $\int sec^2 2x\,dx$

G) $\int cos(5x^2 + 3)\cdot x\,dx$ H) $\int_1^2 \frac{dx}{x+1}$

21 calculen las siguientes integrales :

A) $\int \frac{3x^3}{2}dx$ B) $\int 2x\sqrt{x}\,dx$ C) $\int \frac{dx}{x^5}$

D) $\int \left(\frac{5x^3 + 4x^2 - 3}{x^2}\right)dx$ E) $\int 3\sqrt{x}\,dx$ F) $\int (x+3)^2 dx$

G) $\int (4x^3 + 3x^2 + 1)dx$ H) $\int (x-1)^2\,dx$

I) $\int (4x^{1/2} - 2x^{2/3})dx$ J) $\int x(1-x)dx$

K) $\int (2x+7)^2\,dx$ L) $\int (x^3 - \sqrt[3]{x})dx$

22 Realiza la descomposición en fracciones parciales , para las siguientes funciones racionales:

A) $\frac{5x-1}{x^2-1} =$ B) $\frac{4x+8}{x^2+2x-3} =$

C) $\frac{x-6}{x^2-2x} =$ D) $\frac{x+1}{(x-1)^2} =$

23 Efectúa las siguientes integraciones :

A) $\int \frac{x}{x+1}dx$ B) $\int \frac{3x+4}{x+3}dx$

C) $\int \frac{4x+8}{x^2+2x-3}\,dx$ D) $\int \frac{x-6}{x^2-2x}dx$

24 Por grupos calculen las siguientes integrales:

A) $\int \frac{2x-6}{x^2-6x+25}dx$ B) $\int x\,sen\left(\frac{x^2}{2}\right)dx$

C) $\int \sqrt[3]{x}\left(\sqrt[3]{x^4} + 1\right)^{20}\,dx$ D) $\int x\sqrt{x^2+1}dx$

E) $\int\left(1+\frac{1}{x}\right)^2\frac{dx}{x^2}$ F) $\int 5\sqrt{t^4-t^2}\,(20t^3-10t)dt$

G) $\int\frac{x^3}{(x^2-1)}\,2dt$ H) $\int\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dt$

I) $\int(\cos x)e^{\operatorname{sen}x}\,dt$ J) $\int\frac{1}{x}[1+\ln x]\,dx$

K) $\int\frac{2x^2+1}{(2x^3+3x+1)^{2/3}}\,dx$ L) $\int\frac{x+5}{x+3}\,dx$

25 Aplica el método de integración por partes y calcula las siguientes integrales:

A) $\int \ln x\,dx$ B) $\int x\ln x\,dx$ C) $\int x^3e^x\,dx$

D) $\int x\sqrt{x+1}\,dx$ E) $\int e^{-x}\operatorname{sen}x\,dx$ F) $\int x\,a^x\,dx$

26 Halla el valor de la integral en cada caso :

A) $\int_0^3 2x\,dx$ B) $\int_0^2(x-3)dx$ C) $\int_1^4(x+2)dx$

D) $\int_1^3 x^2\,dx$ E) $\int_2^5(x^2-1)dx$ F) $\int_2^8 -x^2\,dx$

27 Encuentra :

A) $\int_3^6(2x-5)\,dx$ B) $\int_0^4(3x^2-5x+6)\,dx$

C) $\int_{-1}^2(x+4)^3\,dx$ D) $\int_a^{\pi/2}(3\operatorname{sen}x-4\cos x)\,dx$

E) $\int_0^{\pi/4}[\operatorname{sen}x-\operatorname{tg}x\sec x]\,dx$ F) $\int_0^{\pi}[\cos x+\sec^2x]\,dx$

28 Calcula las siguientes integrales :

A) $\int\frac{dx}{(3x+2)^4}$ B) $\int\sqrt[5]{(5-2x)^4}\,dx$ C) $\int\frac{x^3}{\sqrt{5+x^4}}dx$

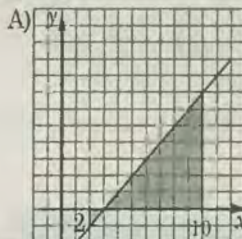
D) $\int\sqrt{7-3x}\,dx$ E) $\int_1^3 2x\sqrt{x^2+1}\,dx$

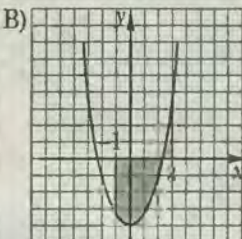
F) $\int_0^1(3x^2+6)x^{20}\,dx$ G) $\int_3^5\frac{e^{2x}+1}{e^x}\,dx$

H) $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\operatorname{sen}2x\,dx$ I) $\int\cos^2x\operatorname{sen}x\,dx$ J) $\int\frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2x}dx$

K) $\int\frac{\ln^3x}{x}dx$ L) $\int\frac{1}{x\ln^3x}dx$

29 Escribe la integral que te permite calcular el área sombreada .

A) 

B) 

30 Dibuja y sombrea la región representada en las siguientes integrales :

A) $\int_{-1}^1(x^2-1)dx$ B) $\int_0^3 x^3\,dx$

31 Ilustra graficamente y sombrea la región que representa el área representada por las siguientes integrales :

A) $\int_0^{\pi}\operatorname{sen}x\,dx$ B) $\int_1^2 x^2\,dx$ C) $\int_0^2 2x+1\,dx$

SEGUNDA PRACTICA DIRIGIDA

01 Una compañía ha determinado que la función de costo marginal para la producción de un cierto artículo esta dada por :

$C'(x)=125+10x+1/9x^2$, donde $C(x)$ en soles, es el costo total de producción de x unidades del artículo. Si los gastos generales son **250** soles . ¿cuál es el costo de producción de **15** unidades?

A) 3375 B) 2125 C) 4000 D) 6000 E) 8000

02 La función de costo marginal esta definida por $C'(x)=6x$, donde $C(x)$ es el número de cientos de soles del costo total de x cientos de unidades de cierto artículo. Si el costo de **200** unidades es **2000** soles, obtenga los gastos generales.

A) 8 Cientos B) 6 C) 4 D) 12 E) 24

03 El volumen de agua contenida en un tanque es **V** metros cúbicos cuando la profundidad del agua es **h** metros . Si la intensidad de cambio (la derivada) de **V** con respecto a **h** es :

$p\,(4h^2+12h+9)$, determine el volumen de agua que hay en el tanque cuando la profundidad es **3 m**.

A) $117m^3$ B) 243 C) 58 D) 107 E) 902

04 Calcular : $\int_1^2\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right)dx$

A) 2 B) -3 C) 3 D) 1,5 E) 2

05 Calcular : $\int_0^1 \left(\dfrac{x}{\left(x^3+1\right)^3} \right) dx$

A) 24/25 *B) 49/24* *C) 3/16* *D) 1/2* *E) 2*

06 Calcular : $\int_{-1}^{3} \dfrac{dx}{(x+2)^3}$

A) 0 *B) 12/25* *C) 1,2* *D) 1/2* *E) 1/8*

07 Calcular : $\int_0^3 (x+2)\sqrt{x+1}dx$

A) 6 *B) 8* *C) 10* *D) 12* *E) 24*

08 Calcular : $\int \dfrac{sen\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$

A) $-2\cos\sqrt{x}+c$ B) $-2sen\sqrt{x}+c$

C) $-\cos\sqrt{x}+c$ D) $-sen\sqrt{x}+c$ E) 0

09 Calcular : $\int_{-5}^{5} 2x\sqrt[3]{x^2+2}dx$

A) 5 *B) 0* *C) 2/5* *D) 3/5* *E) 4/5*

10 Calcular el área de la región acotada por las curvas $x = y^2 \wedge x = y^3$

A) 1/6 *B) 8* *C) 10* *D) 1/12* *E) 14*

11 Calcular el área de la región acotada por el lazo de la curva $y^2 = x^2(4-x)$

A) $\dfrac{256}{15}$ B) $\dfrac{1}{12}$ C) 3 D) 6 E) 1

12 Calcular el volumen del sólido que se genera al girar , alrededor del eje X , la región limitada por la curva $y= x^4$, la recta $x=1$ y el eje X .

A) 2π B) $\dfrac{25\pi}{3}$ C) 6π D) $\dfrac{2\pi}{15}$ E) 24π

13 Calcular la longitud del arco de la curva : $9y^2=4x^3$ del origen al punto $(3;2\sqrt{3})$

A) 0 *B) 1* *C) 2/7* *D)14/3* *E) 2*

14 Calcular la longitud del arco de la curva : $x^{2/3}+y^{2/3}$ del punto donde $x=1/8$ hasta el punto donde $x=1$

A) 0 *B) 9/8* *C) 2/5* *D)14/3* *E) 2*

CLAVES DE LA SEGUNDA PRACTICA

1)A	2)A	3)A	4)D	5)C	6)B	7)A	8)A	9)B	10)D
11)A	12)B	13)D	14)B						

CÁLCULO INFINITESIMAL O CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

El cálculo infinitesimal, llamado por brevedad «cálculo», tiene su origen en la antigua geometría griega. Demócrito calculó el volumen de pirámides y conos considerándolos formados por un número infinito de secciones de grosor infinitesimal (infinitamente pequeño). Eudoxo y Arquímedes utilizaron el «método de agotamiento» o exhaución para encontrar el área de un círculo con la exactitud finita requerida mediante el uso de polígonos regulares inscritos de cada vez mayor número de lados. En el periodo tardío de Grecia, el neoplatónico Pappus de Alejandría hizo contribuciones sobresalientes en este ámbito. Sin embargo, las dificultades para trabajar con números irracionales y las paradojas de Zenón de Elea impidieron formular una teoría sistemática del cálculo en el periodo antiguo.

En el siglo XVII, Cavalieri y Torricelli ampliaron el uso de los infinitesimales, Descartes y Fermat utilizaron el álgebra para encontrar el área y las tangentes (integración y Derivación en términos modernos). Fermat y Barrow tenían la certeza de que ambos cálculos estaban relacionados, aunque fueron Newton (hacia 1660), en Inglaterra y Leibniz en Alemania (hacia 1670) quienes demostraron que los problemas del área y la tangente son inversos, lo que se conoce como teorema fundamental del cálculo.

El descubrimiento de Newton, a partir de su teoría de la gravitación universal, fue anterior al de Leibniz, pero el retraso en su publicación aún provoca controversias sobre quién de los dos fue el primero. Newton utilizó el cálculo en mecánica en el marco de su tratado «Principios matemáticos de filosofía natural», obra científica por excelencia, llamando a su método de «fluxiones». Leibniz utilizó el cálculo en el problema de la tangente a una curva en un punto, como límite de aproximaciones sucesivas, dando un carácter más filosófico a su discurso. Sin embargo, terminó por adoptarse la notación de Leibniz por su versatilidad.

En el siglo XVIII aumentó considerablemente el número de aplicaciones del cálculo, pero el uso impreciso de las cantidades infinitas e infinitesimales, así como la intuición geométrica, causaban todavía confusión y duda sobre sus fundamentos. De hecho, la noción de límite, central en el estudio del cálculo, era aun vaga e imprecisa en ese entonces. Uno de sus críticos más notables fue el filósofo George Berkeley.

En el siglo XIX el trabajo de los analistas matemáticos sustituyeron esas vaguedades por fundamentos sólidos basados en cantidades finitas: Bolzano y Cauchy definieron con precisión los conceptos de límite en términos de épsilon_delta y de derivada, Cauchy y Riemann hicieron lo propio con las integrales, y Dedekind y Weierstrass con los números reales. Fue el periodo de la fundamentación del cálculo. Por ejemplo, se supo que las funciones diferenciables son continuas y que las funciones continuas son integrables, aunque los recíprocos son falsos. En el siglo XX, el análisis no convencional, legitimó el uso de los infinitesimales, al mismo tiempo que la aparición de las Computadoras ha incrementado las aplicaciones y velocidad del cálculo.

Actualmente, el cálculo infinitesimal tiene un doble aspecto: por un lado, se ha consolidado su carácter disciplinario en la formación de la sociedad culta del conocimiento, destacando en este ámbito textos propios de la disciplina como el de Louis Leithold, el de Earl W. Swokowski o el de James Stewart entre muchos otros; por otro su desarrollo como disciplina científica que ha desembocado en ámbitos tan especializados como el cálculo fraccional, la teoría de funciones analíticas de variable compleja o el análisis matemático. El éxito del cálculo ha sido extendido con el tiempo a las ecuaciones diferenciales, al cálculo de vectores, al cálculo de variaciones, al análisis complejo y a las topología algebraica y topología diferencial entre muchas otras ramas.

El desarrollo y uso del cálculo ha tenido efectos muy importantes en casi todas las áreas de la vida moderna: es fundamento para el cálculo numérico aplicado en casi todos los campos técnicos y/o científicos cuya principal característica es la continuidad de sus elementos, en especial en la física. Prácticamente todos los desarrollos técnicos modernos como la construcción, aviación, transporte, meteorología, etc. hacen uso del cálculo. Muchas fórmulas algebraicas se usan hoy en día en balística, calefacción, refrigeración, etc.

Como complemento del cálculo, en relación a sistemas teóricos o físicos cuyos elementos carecen de continuidad, se ha desarrollado una rama especial conocida como Matemática discreta.



INDUCCION MATEMATICA

OBJETIVO :

* *Conocer unos de los métodos más utilizados en la demostraciones de los teoremas MATEMÁTICOS.*

INTRODUCCIÓN :

La inducción es el proceso de razonar por el cual se extraen conclusiones a partir del análisis de casos particulares. La deducción , por el contrario , permite extraer conclusiones particulares a partir de casos generales . Cuando un experimentador observa que varias sustancias se dilatan al aumentar su temperatura, y de esta observación infiere que todas las sustancias tienen dicho comportamiento , está haciendo uso del proceso de inducción, sin embargo el análisis de algunos casos no permite saber a ciencia cierta que la conjetura sea válida, por ejemplo el agua cuando pasa de **0°C** a **4°C**, se contrae, no se dilata.

En MATEMÁTICA , disciplina deductiva por excelencia, el razonamiento inductivo sólo es utilizado en la fase creativa y de construcción. Cuando un matemático encuentra ciertos patrones y regularidades al manipular los objetos matemáticos , utiliza el razonamiento inductivo al proponer una conjetura a partir de los casos que ha analizado , pero para demostrar dicha conjetura deberá utilizar necesariamente métodos deductivos.

Aclaremos esto con un ejemplo, supongamos que un alumno ha sumado los tres primeros números impares positivos, obteniendo $1+3+5=9$, observa además que 9 es el cuadrado de tres. Toma ahora un número mayor de sumandos , digamos **6**, y obtiene $1+3+5+7+9+11=36$, observa ahora que **36** , es el cuadrado de 6. Esto no puede ser casualidad, el alumno sospecha que debe existir algún patrón general , al parecer siempre se obtienen cuadrados perfectos al sumar los primeros números impares. El alumno inicia una comprobación ordenada.

* Con un sumando : $1=1$
* Con dos sumandos : $1+3=4$
* Con tres sumandos : $1+3+5=9$
* Con cuatro sumandos : $1+3+5+7=16$

Sucede que en cada caso se obtienen números cuadrados perfectos, además tenemos que cada cuadrado está en relación con el número de sumandos, observemos esto.

* Con un sumando : $1=1=1^2$
* Con dos sumandos : $1+3=4=2^2$
* Con tres sumandos : $1+3+5=9=3^2$
* Con cuatro sumandos : $1+3+5+7=16=4^2$

El alumno ahora utiliza el razonamiento inductivo para elaborar una conjetura sobre la suma de los n primeros impares: $1+3+5+7+...+(2n-1)=n^2$, enunciándola verbalmente sería: ***La suma de los n primeros impares positivos es igual al cuadrado del número de términos.***

Preguntamos ahora ¿bastará la comprobación de unos cuantos casos particulares para asegurar la validez de esta proposición? Es evidente que no, hemos comprobado la proposición para $n=1; 2; 3; 4$, pero nada nos asegura que el patrón se siga manteniendo. Para poder afirmar categoricamente que la propiedad se verifica para cualquier valor de n deberíamos comprobarla para cada uno de estos valores. Es decir, un proceso infinito, o inventar un conjunto de pasos que nos garanticen la comprobación para infinitos casos.

Es aquí que acude en nuestra ayuda un método de demostración conocido con el nombre de ***MÉTODO DE INDUCCIÓN MATEMÁTICA***. Aunque su nombre haga referencia al proceso inductivo de razonamiento, este método es deductivo. Fue el matemático francés Blas Pascal, quien en el siglo **XVII**, lo usó por primera vez de manera sistemática logrando demostrar con su ayuda numerosas propiedades numéricas. El método goza hoy de gran prestigio entre los matemáticos, y ha servido para demostrar teoremas en geometría, en teoría de grafos, teoría de números y otros campos de la matemática.

EL EFECTO DOMINÓ:



Veamos cuáles son las ideas tras el método, aplicándolo a la demostración de la conjetura que nuestro alumno elaboró.

Supongamos que hemos colocado una hilera infinita de dominós, de pie, de modo que la distancia entra cada uno de ellos es menor que la longitud de una ficha. Alguien empuja la primera ficha y cae. Conclusión: todas las fichas caerán.

Este modelo físico nos muestra las ideas básicas del método de inducción matemática, considera a los números enteros positivos como fichas de dominó . Supón que demuestras que si una propiedad se cumple para uno de ellos (digamos k), también se cumple para el siguiente $k+1$. A continuación verificas que la propiedad se cumple para el primer número. Conclusión: la propiedad se cumple para *todos* los números enteros positivos.

Se puede pensar en el método de inducción matemática como en una máquina automática que verifica enunciados, la cual comienza con $P_{(1)}$ y continúa sobre la lista de manera progresiva demostrando cada proposición. Veamos cómo trabaja, encendemos la máquina verificando que $P_{(1)}$ es verdadero . A continuación introducimos $P_{(1)}$ en la máquina. Esta utiliza el hecho de que $P_{(1)}$ es verdadero y automaticamente demuestra que $P_{(2)}$ es verdadero. Entonces tomamos $P_{(2)}$ y lo introducimos en la máquina . De nuevo ella utiliza el hecho de que $P_{(2)}$ es verdadero para obtener la conclusión de que $P_{(3)}$ es verdadero, y así sucesivamente. Observemos que cuando la máquina va a demostrar que $P_{(k+1)}$ es verdadero, ella ya habrá demostrado que $P_{(k)}$ es verdadero (en el paso anterior) Así al diseñar la máquina podemos suponer que $P_{(k)}$ es verdadero, y nuestro trabajo consiste en asegurar que $P_{(k+1)}$ también sea verdadero. No olvidemos que para empezar el proceso, debemos verificar que $P_{(1)}$ sea verdadero.

Podemos ahora formalizar el método. La demostración de: $P_{(n)}$ es verdadero para todo $n \in Z^+$ por inducción matemática consiste en dos pasos:

I) Demostrar la validez del enunciado $P_{(1)}$.

II) Suponiendo que el enunciado $P_{(k)}$ es verdadero, demostrar que el enunciado $P_{(k+1)}$ es verdadero.

De los pasos ***(I)*** y ***(II)*** se concluye que la proposición $P_{(n)}$ es válida para cualquier valor de n, entero positivo.

Apliquemos este método a la conjetura de nuestro alumno.

La proposición a demostrar es $P_{(n)}: 1+3+5+.....+(2n-1) = n^2$, para todo n entero positivo.

Verifiquemos la validez de $P_{(1)}$, evidentemente $1=1^2$

Supongamos ahora que la proposición se verifica para un entero positivo k . $1+3+5+7+...+(2k-1)= k^2$

Si a esta expresión le sumamos a ambos miembros $(2(k+1)-1\ )$ obtenemos:

$$1+3+5+7+...+(2k-1)+(2(k-1)+1)=k^2+2(k+1)-1$$

$$1+3+5+7+...+(2k-1)+(2(k+1)-1)=k^2+2k+1=(k+1)^2$$

Como vemos la proposición $P_{(k+1)}$ también se verifica. Entonces por el método de inducción matemática deducimos que la conjetura del alumno es valida para cualquier entero positivo .

Como hemos visto sólo cuando se ha realizado el método de inducción matemática podemos elevar la conjetura al nivel de teorema o propiedad.

ACCIDENTES INDUCTIVOS :

Sería errado que el alumno plantee la validez del enunciado sólo porque verificó algunos casos particulares , sin embargo la historia de la matemática nos cuenta algunos casos de errores famosos del uso inadecuado del proceso inductivo, por ejemplo consideremos el trinomio n^2+n+41, estudiado por Leonhard Euler, si reemplazamos para $n = 0;1;2;3;4;5;6;7;8;9$ y 10.

Obtenemos cada vez un número primo ***(47;53;61;71;83;97;113;131*** y ***151*** respectivamente) de aquí Euler infirió que al sustituir n por cualquier entero positivo se obtendría un número primo , pero posteriormente observó que con $n= 40$, obtenemos $40^2 + 40 + 41= 1681= 41\times41$.

G.W. Leibniz, eminente matemático alemán del siglo ***XVII*** y uno de los fundadores del cálculo, demostró que cualquiera que sea el entero positivo n el número n^3-n es divisible por 3, el número n^5-n es divisible por 5 y el número n^7-n es divisible por 7. De aquí supuso que para todo k impar y cualquier n natural el número n^k-n es divisible por k, pero pronto observó que $2^9-2 = 510$ no es divisible por 9.

Veamos otro ejemplo de carácter muy instructivo. Si evaluamos $991n^2 + 1$ para $n= 1;2;3...$ no obtendremos el cuadrado de un número por muchos tiempo que dediquemos a ello . Sin embargo, sería erróneo deducir de aquí que ningún número de este tipo es un cuadrado. Usando un programa de computo podemos encontrar entre los números de tipo $991n^2 + 1$ cuadrados perfectos; el valor mínimo de n para el cual $991n^2 + 1$ es un cuadrado es $n= 12055735790331359447442538767$.

INDUCCIÓN MATEMATICA

Si n es entero positivo y «P_n» es el enunciado matematico $(xy)^n = x^n y^n$, se obtiene la siguiente

sucesion infinita de enunciados:

Enunciado P_1 : $(xy)^1 = x^1 y^1$

Enunciado P_2 : $[xy]^2 = x^2 y^2$

Enunciado P_3 : $(xy)^3 = x^3 y^3$

Enunciado P_n : $(xy)^n = x^n y^n$

Es façil demostrar que P_1, P_2 y P_3 son afirmaciones *ciertas*. Sin embargo, es imposible comprobar la validez de P_n para *todo* entero positivo n. Para demostrar que P_n es cierta para toda n se necesita el siguiente principio:

PRINCIPIO DE INDUCCIÓN MATEMÁTICA

si para cada entero positivo n hay asociado un enunciado , P_n , entonces todas las afirmacipnes P_n serán válidas siempre y cuando se satisfagan las dos condiciones siguientes :

I) Que P_1 sea cierta

II) Que siempre que P_n sea válida para un entero positivo "n", entonces P_{n+1} también es cierta.

La ***inducción*** es un razonamiento que permite demostrar una infinidad de proposiciones, o una proposición que depende de un parametro n que toma una infinidad de valores, usualmente en el conjunto de los enteros naturales N.

El esquema del razonamiento es el siguiente: Llamemos P_n la proposición al rango n :

* Se demuestra que P_0 es cierta (iniciación de la inducción).

* Se demuestra que si se asume P_n como cierta, entonces P_{n+1} lo es también, y esto sin condición sobre el entero natural n. (relación de inducción).

EN CONCLUSIÓN:

Se ha demostrado , por inducción , que P_n es cierto para todo natural n. La inducción puede empezar por otro término que P_0, digamos por P_{n_0}. Entonces P_n será válido a partir del rango n_0 , es decir , para todo natural $n \geq n_0$.

EJEMPLO 1:

Demostrar que para todo $n \geq 1$; 6^n es un número que acaba en 6.

RESOLUCIÓN :

* Sea P_n: "6^n *acaba en* 6".

* Obviamente P_1 es cierto porque $6^1=6$. También lo es P_2 pues $6^2=36$ acaba en 6.

* Supongamos que P_n es cierto para un valor de n, y probemos P_{n+1}.

Un entero acaba por 6 si se puede escribir así: $10a+6$, con a entero. La hipótesis es, pues, $6^n=10a+6$.

Entonces $6^{n+1} = 6(10a + 6) = 60a + 36 = 60a + 30 + 6 = 10(6a + 3) + 6 = 10c + 6$, con $c=6a + 3$, entero.

Esta última escritura prueba que 6^{n+1} acaba por 6 , o sea que P_{n+1} es cierto.

* Luego P_n es cierto para todo $n \geq 1$

CONCLUSIÓN :

se ha demostrado :

$$\underbrace{[P(1)\ es\ V] \wedge \{[P(h)\ es\ V] \rightarrow [P(h+1)\ es\ V]\}}_{\text{método de la inducción matemática}}$$

La inducción es válida por la construcción misma del conjunto de los naturales mediante los *axiomas de Peano*. De hecho, la inducción limita la construcción del conjunto : *0 es un natural*, y, si n lo es, entonces $n+1$ (sucesor de n) lo es también. Existen otras inducciones, para otros conjuntos elaborados de forma distinta, como por ejemplo la ***inducción transfinita***, y la inducción sobre las fórmulas de la lógica proposicional.

OBSERVACIÓN :

Al aplicar el principio de inducción matematica, siempre se siguen dos pasos.

1) Demostrar que P_1 es válida .

2) Suponer que P_n es cierta y , a continuación, demostrar que P_{n+1} , es cierta también.

Con frecuencia , el paso 2 se presto a confusión. Nótese que no se *demostró*que P_n sea cierta,a excepción de cuando $n=1$. Lo que se demostró es que si se cumple que P_n es cierta , entonces el enunciado P_{n+1} también lo será .

La hipotesis de que P_n es cierta se llama ***HIPÓTESIS DE INDUCCIÓN.***

EJEMPLO 2 :

Mediante inducción matemática, demostrar que para todo entero positivo n, la suma de los n primeros enteros positivos es:

$$1+2+3+......+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

RESOLUCIÓN :

PASO 1 : Si se sustituye $n = 1$ en P_n entonces el primer miembro sólo contiene al número 1 , y el segundo miembro es $\frac{1(1+1)}{2}$, que también es igual a 1 . Por lo tanto , P_1 es válida, o cierta.

PASO 2 : Supóngase que P_n sea válida. Entonces, la hipótesis de inducción es :

$$1+2+3+......+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

El objetivo es demostrar que P_{n+1} es válida ; es decir, que :

$$1+2+3+......+n+(n+1)=\frac{(n+1)[(n+1)+1]}{2}$$

* se puede demostrar que la última fórmula es cierta volviendo a escribir el primer miembro y empleando la hipótesis de inducción como sigue :

$$1+2+3+......+n+(n+1)$$
$$=(1+2+3+........+n)+(n+1)$$
$$=\frac{n(n+1)}{2}+(n+1)...por\ hipotesis$$
$$=\frac{n(n+1)+2(n+1)}{2}$$
$$=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$$
$$=\frac{(n+1)[(n+1)+1]}{2}$$

* Con lo cual se demuestra que P_{n+1} es cierta y , por consiguiente , se termina la demostración empleando la inducción matemática.

CONCLUSIÓN :

se ha demostrado :

$$\underbrace{[P(1)\ es\ V]\wedge\{[P(h)\ es\ V]\rightarrow[P(h+1)\ es\ V]\}}_{\text{método de la inducción matemática}}$$

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1 :

Demostrar que para cada entero positivo n.

$$1^2+3^2+5^2+..........+(2n+1)^2=\frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$$

RESOLUCIÓN :

* Sea :

$$P(n)=1^2+3^2+5^2+......+(2n+1)^2=\frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$$

**** PASO 1 :***

Verifiquemos que cumpla para $n=1$, (sólo se sumaría un término).

$$P_1:\ 1^2=\frac{(1)(2-1)(2+1)}{3}=\frac{3}{3}=1$$

es verdadero

**** PASO 2 :***

Suponiendose que cumpla $n=h$,

$P(h)=\dfrac{h(2h-1)(2h+1)}{3}$ es verdadera por la hipótesis inductiva .

* Ahora probaremos si $P(h)$ es verdadera , entonces $P(h+1)$ es verdadera ; en efecto :

$$P(h+1)=\underbrace{1^2+3^2+5^2+...+(2h-1)^2}_{\text{hipótesis inductiva}}+[2(h+1)-1]^2$$

$$\rightarrow P(h+1)=\frac{h(2h-1)(2h+1)}{3}+(2h+1)^2$$
$$=\frac{(2h+1)[h(2h-1)+(2h+1)]}{3}$$
$$=\frac{(2h+1)(2h^2+5h+3)}{3}$$
$$=\frac{(2h+1)(2h+3)(h+1)}{3}$$
$$=\frac{(2h+1)[2(h+1)-1][2(h+2)-1]}{3}$$

por lo tanto la proposición dada es válida .

CONCLUSIÓN :

se ha demostrado :

$$\underbrace{[P(1)\ es\ V]\wedge\{[P(h)\ es\ V]\rightarrow[P(h+1)\ es\ V]\}}_{\text{método de la inducción matemática}}$$

PROBLEMA 2 :

Demostrar que para cada entero positivo n .

$$\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+....+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$$

RESOLUCIÓN :

* Sea :

$$P(n)=\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+..............+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$$

**** PASO 1 :***

Verifiquemos que cumpla para $n=1$, (sólo se sumaría un término).

$$P(1):\ \frac{1}{1\times2}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}=\frac{1}{1\times2}\quad se\ verifica$$

**** PASO 2 :***

Suponiendose que cumpla $n=h$,

$P(h)=\dfrac{h(2h-1)(2h+1)}{3}$ es verdadera por la *hipótesis inductiva.*

* Ahora probaremos : *si $P(h)$ es verdadera , entonces $P(h+1)$ es verdadera* ; en efecto :

$$P(h+1)=\underbrace{\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\dots\dots+\frac{1}{h(h+1)}}_{\text{hipótesis inductiva}}+\frac{1}{(h+1)(h+2)}$$

$$\rightarrow P(h+1)=\frac{h}{h+1}+\frac{1}{(h+1)(h+2)}=\frac{h(h+2)+1}{(h+1)(h+2)}=\frac{h+1}{[(h+1)+1]}$$

* Por lo tanto la proposición es válida para $n=h+1$, siempre que lo sea para $n=h$; esto completa la demostración por inducción.

CONCLUSIÓN :

se ha demostrado :

$$\underbrace{[P(1)\ es\ V]\wedge\{[P(h)\ es\ V]\rightarrow[P(h+1)\ es\ V]\}}_{\text{método de la inducción matemática}}$$

PROBLEMA 3 :

Demostrar que para cada entero positivo n.

x^n-y^n es divisible por $x-y$

RESOLUCIÓN :

* Sea :

$$P(n)=\left\{n\in N/x^n-y^n \text{ es divisible por } x-y\right\}$$

PASO 1 :

Verifiquemos que cumpla para $n=1$:

$$P(1):\frac{x^1-y^1}{x-y}=1\dots\dots\dots\dots\text{se verifica}$$

PASO 2 :

Suponiendose que cumpla $n=h$,

$P(h)=\dfrac{h(2h-1)(2h+1)}{3}$ es verdadera por la ***hipótesis inductiva*** .

* Ahora probaremos : *si* $P(h)$ *es verdadera , entonces* $P(h+1)$ *es verdadera* ; en efecto :

$$P(h)=\underbrace{x^h-y^h \text{ es divisible por } x-y}_{\text{hipótesis inductiva}}$$

* Luego :

$$P(h+1)=x^{h+1}-y^{h+1}=x^hx-y^hy$$

$$\rightarrow P(h+1)=x^hx-yx^h+yx^h-y^hy$$

$$\rightarrow P(h+1)=x^h(x-y)+y(x^h-y^h)$$

$$\rightarrow P(h+1)=x^h(x-y)+yP(h)$$

El primer término de la izquierda es divisible por $x-y$, y por la hipotesis inductiva el segundo término es divisible por $x-y$, entonces $P(h+1)$ tiene como factor a $x-y$.

* Por lo tanto la proposición es válida para $n=h+1$, siempre que lo sea para $n=h$; esto completa la demostración por inducción.

CONCLUSIÓN :

se ha demostrado :

$$\underbrace{[P(1)\ es\ V]\wedge\{[P(h)\ es\ V]\rightarrow[P(h+1)\ es\ V]\}}_{\text{método de la inducción matemática}}$$

PROBLEMA 4 :

Probar que para cada entero positivo n .

(n^2+5n) es divisible por 2

RESOLUCIÓN :

* Sea :

$$P(n)=\left\{n\in N/(n^2+5n) \text{ es divisible por } 2\right\}$$

PASO 1 :

Verifiquemos que cumpla para $n=1$:

$$P(1):\ 1^2+5(1)=6=\overset{o}{2}\dots\dots\text{ se verifica}$$

PASO 2 :

Suponiendose que cumpla $n=h$,

$P(h): h^2+5h$ *es* $\overset{o}{2}$ es verdadera por la hipótesis inductiva .

* ahora probaremos : *si* $P(h)$ *es verdadera , entonces* $P(h+1)$ *es verdadera* ; en efecto :

$$P(h+1)=(h+1)^2+5(h+1)$$

$$\rightarrow P(h+1)=h^2+2h+1+5h+5$$

$$\rightarrow P(h+1)=\underbrace{h^2+5h}_{\text{hipótesis inductiva}}+\underbrace{2(h+3)}_{\overset{o}{2}}$$

$$\rightarrow P(h+1)=\overset{o}{2}$$

el primer término de la izquierda es divisible por 2 por la hipotesis inductiva , y el segundo término también es divisible por 2 , entonces $P(h+1)$ tiene como factor a 2 .

* Por lo tanto la proposición es válida para $n=h+1$, siempre que lo sea para $n=h$; esto completa la demostración por inducción.

CONCLUSIÓN :

Se ha demostrado :

$$\underbrace{[P(1)\ es\ V]\wedge\{[P(h)\ es\ V]\rightarrow[P(h+1)\ es\ V]\}}_{\text{método de la inducción matemática}}$$

PROBLEMA 5 :

Probar que para cada entero positivo n .

$$\left(1^5+2^5+3^5+\dots+n^5\right)+\left(1^7+2^7+3^7+\dots+n^7\right)=2\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^4$$

RESOLUCIÓN :

* Sea :

$$P(n)=\left(1^5+2^5+3^5+\dots+n^5\right)+\left(1^7+2^7+3^7+\dots+n^7\right)=2\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^4$$

PASO 1 :

Verifiquemos que cumpla para $n=1$:

$$P(1):\ 1^5+1^7=2\left[\frac{1(1+1)}{2}\right]^4=2 \text{ .... se verifica}$$

PASO 2 :

Suponiendose que cumpla $n=h$,

$P(h)=2\left[\frac{h[h+1]}{2}\right]^4$ es verdadera por la hipótesis inductiva .

* ahora probaremos : *si P(h) es verdadera , entonces P(h+1) es verdadera* ; en efecto :

$$P(h+1)=P(h)+(h+1)^5+(h+1)^7$$

$$\rightarrow P(h+1)=2\left[\frac{h(h+1)}{2}\right]^4+(h+1)^5\left[1+(n+1)^2\right]$$

$$\rightarrow P(h+1)=2\left[\frac{h(h+1)}{2}\right]^4+(h+1)^5\left[h^2+2h+2\right]$$

$$\rightarrow P(h+1)=(h+1)^4\left[\frac{h^4}{8}+(h+1)(h^2+2h+2)\right]$$

$$\rightarrow P(h+1)=\frac{(h+1)^4}{8}(h^4+8h^3+24h^2+32h+16)$$

$$\rightarrow P(h+1)=\frac{(h+1)^4}{8}(h+2)^4=2\left[\frac{(h+1)(h+2)}{2}\right]^4$$

* Por lo tanto la proposición es válida para $n=h+1$, siempre que lo sea para $n=h$;esto completa la demostración por inducción.

CONCLUSIÓN :

se ha demostrado :

$$[P(1)\ es\ V]\wedge\{[P(h)\ es\ V]\rightarrow[P(h+1)\ es\ V]\}$$

método de la inducción matemática

PROBLEMA 6 :

Sea p un número real tal que $p\geq -1$. Demostrar que :

$$(1+p)^n\ \geq 1+np\quad ;n\in Z^+$$

RESOLUCIÓN :

* Sea :

$$P(n)=\left\{\ n\in Z^+/(1+p)^n\ \geq 1+np\ \right\}$$

PASO 1 :

Verifiquemos que cumpla para $n=1$:

$P(1):\ (1+p)^1\geq 1+p$ .... se verifica

PASO 2 :

Suponiendose que cumpla $n=h$, $P(h):(1+p)^h\geq 1+hp$ es verdadera por la hipótesis inductiva .

*Ahora probaremos : *si P(h) es verdadera , entonces P(h+1) es verdadera* ; en efecto :

$$P(h+1)=(1+p)^{h+1}=(1+p)^h(1+p)\geq(1+hp)(1+p)$$

$$\rightarrow P(h+1)=1+p+hp+hp^2\ \geq 1+(h+1)p$$

$$\rightarrow P(h+1)=(1+p)^{h+1}\ \geq 1+(h+1)p$$

* Por lo tanto la proposición es válida para $n=h+1$, siempre que lo sea para $n=h$;esto completa la demostración por inducción.

CONCLUSIÓN :

se ha demostrado :

$$[P(1)\ es\ V]\wedge\{[P(h)\ es\ V]\rightarrow[P(h+1)\ es\ V]\}$$

método de la inducción matemática

PROBLEMA 7 :

Demostrar que : $a(b+c)=ab+ac$

se generaliza para n sumandos en la forma :

$$a(b_1+b_2+b_3+...+b_n)=ab_1+ab_2+ab_3+...+ab_n$$

RESOLUCIÓN :

* para $n=1$ resulta válido de inmediato que:

$$ab_1=ab_1$$

*supongamos para $n=h$ (hipótesis inductiva)

$$a(b_1+b_2+b_3+...+b_h)=ab_1+ab_2+ab_3+...+ab_h$$

* la propiedad quedará demostrada , si en base a esta hipótesis probamos que la propiedad se cumple para $n=h+1$. en efecto :

$$a(b_1+b_2+b_3+...+b_{h+1})=a(b_1+b_2+b_3+...+b_{h+1})$$

$$=a(b_1+b_2+b_3+...+b_h)+a(b_{h+1})$$

$$=ab_1+ab_2+ab_3+...+ab_h+ab_{h+1}$$

CONCLUSIÓN :

se ha demostrado :

$$[P(1)\ es\ V]\wedge\{[P(h)\ es\ V]\rightarrow[P(h+1)\ es\ V]\}$$

método de la inducción matemática

PROBLEMA 8 :

Demostrar que para cada entero positivo n.

$3^{2n+2}+2^{6n+1}$ es divisible por 11 ;$\forall n\geq 1$

RESOLUCIÓN :

PASO 1 :

Verifiquemos que cumpla para $n=1$:

$$\underbrace{3^{2(1)+2}+2^{6(1)+1}=209=11\times 19 \text{ es divisible por } 11}_{verificado}$$

PASO 2:

* ahora probaremos : *si* ***P(h)*** *es verdadera , entonces* ***P(h+1)*** *es verdadera* ; en efecto :

$$\underbrace{P(h)=3^{2h+2}+2^{6h+1} \text{ es divisible por } 11}_{hipotesis\ inductiva}$$

*Luego :

$$P(h+1)=3^{2(h+1)+2}+2^{6(h+1)+1}$$

$$\rightarrow P(h+1)=3^2 3^{2h+2}+2^6 2^{6h+1}$$

$$\rightarrow P(h+1)=9\times 3^{2h+2}+(9+55)2^{6h+1}$$

$$\rightarrow P(h+1)=9\left(3^{2h+2}+2^{6h+1}\right)+11\left(5\times 2^{6h+1}\right)$$

$$\rightarrow P(h+1)=9\times \overset{0}{11}+\overset{0}{11}=\overset{0}{11}$$

CONCLUSIÓN :

se ha demostrado :

$$\underbrace{[P(1)\ es\ V]\wedge\{[P(h)\ es\ V]\rightarrow[P(h+1)\ es\ V]\}}_{método\ de\ la\ inducción\ matemática}$$

PROBLEMA 9 :

Demostrar que dado el conjunto : $\{x_n / n\in N\}$

$$\left[\left(x_1=\sqrt[3]{60}\wedge x_{n+1}=\sqrt[3]{x_n+60}\right)\Rightarrow(x_n<4)\right];\forall n\geq 1$$

RESOLUCIÓN :

***PASO 1 :**

Verifiquemos que cumpla para $n=1$:

$$\underbrace{x_1=\sqrt[3]{60}<\sqrt[3]{64}=4\rightarrow x_1<4}_{verificado}$$

PASO 2 :

* ahora probaremos : *si* ***P(h)*** *es verdadera , entonces* ***P(h+1)*** *es verdadera* ; en efecto :

$$P(h):\quad \underbrace{x_h<4}_{hipótesis\ inductiva}$$

* probaremos que $x_{h+1}<4$; en efecto :

$$x_h<4\rightarrow x_h+60<4+60$$

$$\rightarrow x_{h+1}=\sqrt[3]{x_h+60}<\sqrt[3]{64}=4$$

$$\rightarrow x_{h+1}<4$$

*por lo tanto : $x_n<4;\forall n\geq 11$ por el principio de la inducción matemática .

PROBLEMA 10 :

Demostrar que : $2^{n-3}\geq n-2\ ;\forall n\geq 4$

RESOLUCIÓN :

***PASO 1 :**

Verifiquemos que cumpla para $n=4$:

$$\underbrace{2^{4-3}=2\geq 4-2}_{verificado}$$

*** PASO 2 :**

Ahora probaremos : *si* ***P(h)*** *es verdadera , entonces* ***P(h+1)*** *es verdadera* ; en efecto :

$$P(h):\ \underbrace{2^{h-3}\geq h-2}_{hipótesis\ inductiva}$$

* probaremos que $2^{h+1-3}\geq h+1-2$; *en efecto :*

$$2^{h+1-3}=2\times 2^{h-3}\geq 2(h-2)\geq(h+1)-2$$

puesto que para $h\geq 4\rightarrow h>3$

* Luego por transitividad :

$$2^{h+1-3}\geq h+1-2$$

*por lo tanto : $2^{n-3}\geq n-2\ ;\forall n\geq 4$ por el principio de la inducción matemática .

PROBLEMA 11 :

Demostrar en la sucesión :

$$a_1=0;a_2=1;a_n=\frac{a_{n-1}+a_{n-2}}{2},n\geq 3$$

$$\Rightarrow a_n=\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\frac{(-1)^n}{2^{n-1}}$$

RESOLUCIÓN :

*** PASO 1 :**

Verifiquemos que cumpla para $n=3$:

$$\underbrace{a_3=\frac{a_2+a_1}{2}=\frac{1+0}{2}=\frac{1}{2}\wedge a_3=\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\frac{(-1)^3}{2^{3-1}}=\frac{1}{2}}_{verificado}$$

*** PASO 2 :**

Ahora probaremos : *si* ***P(h)*** *es verdadera , entonces* ***P(h+1)*** *es verdadera* ; en efecto :

$$P(h):\underbrace{a_h=\frac{1}{2}\left(a_{h-1}+a_{h-2}\right)}_{hipótesis\ inductiva}$$

*Luego :

$$a_{h+1}=\frac{1}{2}\left(a_h+a_{h-1}\right)=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\frac{(-1)^h}{2^{h-1}}\right)+\left(\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\frac{(-1)^{h-1}}{2^{h-2}}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}-\frac{4}{3}\frac{(-1)^{h+1}}{2^h}+\frac{2}{3}+\frac{8}{3}\frac{(-1)^{h+1}}{2^h}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{4}{3}+\frac{4}{3}\frac{(-1)^{h+1}}{2^h}\right]=\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\frac{(-1)^{h+1}}{2^{(h+1)-1}}$$

*por lo tanto : $a_n=\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\frac{(-1)^n}{2^{n-1}};\forall n\geq 3$ por el

principio de la inducción matemática .

PROBLEMA 12 :

Demostrar que $\forall n \geq 1$:

$$S_n = \frac{\left(2+\sqrt{3}\right)^n + \left(2-\sqrt{3}\right)^n}{2} \text{ es un entero positivo.}$$

RESOLUCIÓN :

*** PASO 1 :***

Verifiquemos que cumpla para $n = 1$:

$$\underbrace{S_1 = \frac{\left(2+\sqrt{3}\right)^1 + \left(2-\sqrt{3}\right)^1}{2} = 2}_{verificado}$$

*** PASO 2 :***

Ahora probaremos : *si* ***S(h)*** *es verdadera , entonces* ***S(h+1)*** *es verdadera* ; en efecto :

$$\underbrace{S(h): S_h = \frac{\left(2+\sqrt{3}\right)^h + \left(2-\sqrt{3}\right)^h}{2} \text{ es un entero}}_{hipótesis\ inductiva}$$

*Luego :

$$S_{h+1} = \frac{\left(2+\sqrt{3}\right)^{h+1} + \left(2-\sqrt{3}\right)^{h+1}}{2}$$

$$= \frac{\left(2+\sqrt{3}\right)^h\left(2+\sqrt{3}\right) + \left(2-\sqrt{3}\right)^h\left(2-\sqrt{3}\right)}{2}$$

$$= 2\left[\frac{\left(2+\sqrt{3}\right)^h + \left(2-\sqrt{3}\right)^h}{2}\right] + \sqrt{3}\left[\frac{\left(2+\sqrt{3}\right)^h - \left(2-\sqrt{3}\right)^h}{2}\right]$$

$$= 2S_h + 3\underbrace{\left[\frac{\left(2+\sqrt{3}\right)^h - \left(2-\sqrt{3}\right)^h}{2\sqrt{3}}\right]}_{Q_h}$$

*nos queda demostrar que Q_h también es un número entero positivo , para ello utilizamos de nuevo la inducción , asi :

$$Q_{h+1} = \frac{\left(2+\sqrt{3}\right)^{h+1} - \left(2-\sqrt{3}\right)^{h+1}}{2\sqrt{3}}$$

$$= \frac{\left(2+\sqrt{3}\right)^h\left(2+\sqrt{3}\right) - \left(2-\sqrt{3}\right)^h\left(2-\sqrt{3}\right)}{2\sqrt{3}}$$

$$= 2\left[\frac{\left(2+\sqrt{3}\right)^h - \left(2-\sqrt{3}\right)^h}{2\sqrt{3}}\right] + \sqrt{3}\left[\frac{\left(2+\sqrt{3}\right)^h + \left(2-\sqrt{3}\right)^h}{2\sqrt{3}}\right]$$

$$= 2Q_h + \frac{\left(2+\sqrt{3}\right)^h + \left(2-\sqrt{3}\right)^h}{2} = \underbrace{2Q_h + S_h}_{entero}$$

resultando S_{h+1} y Q_{h+1} la suma de 2 expresiones que son enteros positivos por hipótesis de la inducción , entonces queda completa la demostración deseada .

PROBLEMA 13 :

Demostrar :

$$\sum_{k=1}^{n} \cos(2k-1)x = \frac{sen(2nx)}{2senx} ; n \geq 1 \wedge senx \neq 0$$

RESOLUCIÓN :

****PASO 1 :***

Verifiquemos que cumpla para $n = 1$:

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{1} \cos(2k-1)x = \cos(2\times 1-1) = \cos x \\ &\frac{sen[2(1)x]}{2senx} = \frac{sen2x}{2senx} = \frac{2senx\cos x}{2senx} = \cos x \end{aligned}\right\} verificado$$

PASO 2 :

*ahora probaremos : *si* ***P(h)*** *es verdadera , entonces* ***P(h+1)*** *es verdadera* ; en efecto :

$$\underbrace{P(h): \sum_{k=1}^{h} \cos(2k-1)x = \frac{sen(2hx)}{2senx}}_{hipótesis\ inductiva}$$

* Luego :

$$\sum_{k=1}^{h+1} \cos(2k-1)x = \sum_{k=1}^{h} \cos(2k-1)x + \cos[2(h+1)-1]x$$

$$= \frac{sen(2hx)}{2senx} + \cos(2h+1)x$$

$$= \frac{[sen(2hx) + 2senx\cos(2h+1)x]}{2senx}$$

$$= \frac{[sen(2hx) + [sen2(h+1)x - sen(2hx)]]}{2senx}$$

$$= \frac{sen2(h+1)x}{2senx}$$

*por lo tanto: $\sum_{k=1}^{n} \cos(2k-1)x = \frac{sen(2nx)}{2senx}$ por el principio de la inducción matemática .

PROBLEMA 14 :

Demostrar que $\forall n \in N; p, q, a_i, b_i \in R$

$$2pq\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leq q^2\sum_{k=1}^{n} a_k^2 + p^2\sum_{k=1}^{n} b_k^2$$

RESOLUCIÓN :

*Recordando que : $2ab \leq a^2 + b^2$

*** PASO 1 ;***

Verifiquemos que cumpla para $n = 1$:

$$2pq\sum_{k=1}^{1} a_k b_k = 2pqa_1 b_1 = 2(qa_1)(pb_1)$$

$$\leq (qa_1)^2 + (pb_1)^2 = q^2\sum_{k=1}^{1} a_k^2 + p^2\sum_{k=1}^{1} b_k^2$$

PASO 2 :

* ahora probaremos : *si* ***P(h)*** *es verdadera , entonces* ***P(h+1)*** *es verdadera* ; en efecto :

$$P(h): \underbrace{2pq\sum_{k=1}^{h} a_k b_k \le q^2\sum_{k=1}^{h} a_k^2 + p^2\sum_{k=1}^{h} b_k^2}_{\text{hipótesis inductiva}}$$

* Luego :

$$2pq\sum_{k=1}^{h+1} a_k b_k = 2pq\left(\sum_{k=1}^{h} a_k b_k\right) + 2(qa_{h+1})(pb_{h+1})$$

$$\le \underbrace{q^2\sum_{k=1}^{h} a_k^2 + p^2\sum_{k=1}^{h} b_k^2}_{\text{por la hipotesis inductiva}} + (qa_{h+1})^2 + (pb_{h+1})^2$$

$$\le q^2\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2 + a_{h+1}^2\right) + p^2\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2 + b_{h+1}^2\right)$$

$$= q^2\sum_{k=1}^{h+1} a_k^2 + p^2\sum_{k=1}^{h+1} b_k^2$$

PROBLEMA 14 :

Demostrar la ***DESIGUALDAD DE CAUCHY-SCHWARZ*** , la señala que:

$$\forall n \in \mathbb{N} ; a_i, b_i \in \mathbb{R}$$

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \le \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)$$

RESOLUCIÓN :

PASO 1 :

Verifiquemos que cumpla para $n = 1$:

$$\underbrace{a_1^2 b_1^2 \le a_1^2 b_1^2}_{\text{verificado}}$$

PASO 2 :

* ahora probaremos : *si* ***P(h)*** *es verdadera , entonces* ***P(h+1)*** *es verdadera* ; en efecto :

$$P(h): \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{h} a_k b_k\right)^2 \le \left(\sum_{k=1}^{h} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{h} b_k^2\right)}_{\text{hipótesis inductiva}}$$

*Luego :

$$\left(\sum_{k=1}^{h+1} a_k b_k\right)^2 = \left(\sum_{k=1}^{h} a_k b_k + a_{h+1}b_{h+1}\right)^2$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{h} a_k b_k\right)^2 + 2a_{h+1}b_{h+1}\sum_{k=1}^{h} a_k b_k + a_{h+1}^2 b_{h+1}^2$$

$$\le \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{h} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{h} b_k^2\right)}_{\text{por hipótesis inductiva}} + \underbrace{\left(b_{h+1}^2\sum_{k=1}^{h} a_k^2 + a_{h+1}^2\sum_{k=1}^{h} b_k^2\right)}_{\text{por el problema anterior}} + a_{h+1}^2 b_{h+1}^2$$

$$= \sum_{k=1}^{h} a_k^2\left(\sum_{k=1}^{h} b_k^2 + b_{h+1}^2\right) + a_{h+1}^2\left(\sum_{k=1}^{h} b_k^2 + b_{h+1}^2\right)$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{h} a_k^2 + a_{h+1}^2\right)\left(\sum_{k=1}^{h} b_k^2 + b_{h+1}^2\right) = \left(\sum_{k=1}^{h+1} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{h+1} b_k^2\right)$$

PRIMERA PRACTICA DIRIGIDA

* Demostrar por inducción matemática cada una de las siguientes fórmulas y enunciados :

01 $1+2+3+\dots\dots+(n-1) = \dfrac{n(n-1)}{2}$

02 $2+4+6+\dots\dots+2n = n(n+1)$

03 $1^2+2^2+3^2+\dots\dots+n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

04 $1^3+3^3+5^3+\dots\dots+(2n-1)^3 = n^2(2n^2-1)$

05 $2^3+4^3+6^3+\dots\dots+(2n)^3 = 2n^2(n+1)^2$

06 $1+3+3^2+3^3+\dots\dots+3^{n-1} = \dfrac{3^n-1}{2}$

07 $\dfrac{1}{1\times3}+\dfrac{1}{3\times5}+\dfrac{1}{5\times7}+\dots\dots+\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \dfrac{n}{2n+1}$

08 $\dfrac{1^2}{1\times3}+\dfrac{2^2}{3\times5}+\dfrac{3^2}{5\times7}+\dots\dots+\dfrac{n^2}{(2n-1)(2n+1)} = \dfrac{n(n+1)}{2(2n+1)}$

09 $\dfrac{1}{1\times2\times3}+\dfrac{1}{2\times3\times4}+\dfrac{1}{3\times4\times5}+\dots\dots+\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)} = \dfrac{n(3n+5)}{4(n+1)(n+2)}$

10 $4^n > n^4$; $\forall n \ge 5$

11 $5^n > 1+4n$; $\forall n \ge 1$

12 $n! > 2^n$; $\forall n \ge 4$

13 $2^n > n^2$; $\forall n \ge 5$

14 $3^n > 2n+1$; $\forall n \ge 1$

15 $n^3 - n$ *es divisible por 3* ; $\forall n \ge 1$

16 $n^5 - n$ *es divisible por 5* ; $\forall n \ge 1$

17 $3^{2n+2} + 3^{6n+1}$ *es divisible por 11* ; $\forall n \ge 1$

18 $3^{2n+2} - 2^{n+1}$ *es divisible por 7* ; $\forall n \ge 1$

19 $4^n - 1$ *es divisible por 3* ; $\forall n \ge 1$

20 $2^{2n} + 5$ *es divisible por 8* ; $\forall n \ge 1$

(21) $3n^2+15n+6$ *es divisible por* 6 ; $\forall n\geq 1$

(22) $x^{2n+1}+y^{2n+1}$ *es divisible por* $x+y$; $\forall n\geq 1$

(23) Demuestra que $1+2^n<3^n$ para cualquier entero positivo.

(24) Demuestra que si un conjunto A tiene n elementos, entonces $P(A)$ tiene 2^n elementos.

(25) Demuestra que 3^n-1 es divisible por 2 para todos los enteros positivos n.

(26) Demuestra que en cualquier instante de tiempo, la cantidad de hombres en la Tierra que se han dado un número impar de apretones de manos, es par.

(27) Demuestra que la fórmula:
$2+4+6+....+2n=n^2+n+2$ cumple con el segundo paso del principio de inducción matemática. Esto es, si la fórmula es verdadera para $n=k$, también lo es para $n=k+1$. Sin embargo, esta fórmula no es válida para $n=1$. ¿Qué deduce de esto?

(28) ***EL TEOREMA DEL MAPA DE DOS COLORES***:

Si se traza en un plano líneas rectas que empiezan y terminan en un borde de la hoja, este mapa puede ser coloreado con sólo dos colores sin que ninguna región adyacente tenga el mismo color.

(29) Demuestra que cualquier conjunto de número naturales, con un número finito de elementos, contiene un número natural máximo.

(30) Demuestra que la derivada de $f(x)=x^n$ es nx^{n-1} para cualquier entero positivo n.

(31) Adecua el método de inducción matemática para demostrar proposiciones que son validas a partir de un valor n_0.

SEGUNDA PRACTICA DIRIGIDA

* Demostrar por inducción matemática cada una de las siguientes fórmulas y enunciados :

(01) $1+4+7+............+(3n-2)=\dfrac{n(3n-1)}{2}$

(02) $2+6+18+............+2\times 3^{n-1}=3^n-1$

(03) $n>2^n$; $\forall n\geq 1$

(04) 9 *es factor de* $10^{n+1}+3\times 10^n+5$

(05) $sen(\theta+n\pi)=(-1)^n\,sen\theta$

(06) $cos(\theta+n\pi)=(-1)^n\cos\theta$

(07) $\left[r(\cos\theta+isen\theta)\right]^n=r^n(\cos n\theta+isenn\theta)$

(08) $(-1)^{2n}=1$; $\forall n\geq 1$

(09) $x^{2n+1}-y^{2n+1}$ *es divisible por* $x-y$; $\forall n\geq 1$

(10) $(ab)^n=a^nb^n$; $\forall n\geq 1$

(11) $\dfrac{5}{1\times 2\times 3}+\dfrac{6}{2\times 3\times 4}+\dfrac{1}{3\times 4\times 5}+....+\dfrac{n+4}{n(n+1)(n+2)}=\dfrac{n(3n+7)}{2(n+1)(n+2)}$

(12) $n^3+(n+1)^3+(n+2)^3$ *es divisible por* 9 ; $\forall n\geq 1$

(13) Demostrar que $\forall n\geq 1$:

$S_n=\dfrac{\left(3+2\sqrt{2}\right)^n+\left(3-2\sqrt{2}\right)^n}{2\sqrt{2}}$ es un entero positivo par.

(14) Demostrar que $\forall n\geq 1$:

$P_n=\dfrac{\left(1+\sqrt{17}\right)^n+\left(1-\sqrt{17}\right)^n}{2^n\sqrt{17}}$ es un entero positivo .

(15) Demostrar en la sucesión :

$$a_1=0;\,a_2=1;\,a_n=\frac{a_{n-1}+a_{n-2}}{2},\,n\geq 3$$

$$\Rightarrow a_n=\frac{\left(1+\sqrt{13}\right)^n-\left(1-\sqrt{13}\right)^n}{2^n\sqrt{13}};\,n\geq 1$$

(16) Demostrar que dado el conjunto : $\{x_n/n\in N\}$

$$\left[\left(x_1=\sqrt{2}\wedge x_{n+1}=\sqrt{2+x_n}\right)\Rightarrow(x_n\leq 2)\right];\forall n\geq 1$$

(17) Demostrar que dado el conjunto : $\{x_n/n\in N\}$

$$\left[\left(x_0=0\wedge x_n=6+\frac{4}{x_{n-1}+1}\right)\Rightarrow\left(0\leq x_n\leq 2+\sqrt{5}\right)\right];\forall n\geq 1$$

(18) $\dfrac{1}{2^n}>1-\dfrac{1}{n+1}$; $\forall n\geq 1$

(19) $senx+sen3x+sen5x+...+sen(2n-1)x=\dfrac{1-\cos 2nx}{2senx}$

(20) $n^3(n+1)^4\geq 16\sqrt[n]{(n!)^6}$

(21) $\dbinom{n}{0}-\dfrac{1}{3}\dbinom{n}{1}+\dfrac{1}{5}\dbinom{n}{2}+.......+\dfrac{(-1)^n}{2n+1}\dbinom{n}{n}=\dfrac{4^n(n!)^2}{(2n+1)!}$



TEORIA SOBRE POLINOMIOS 36

POLINOMIOS EN UNA VARIABLE

1) NOCIONES PRELIMINARES :

Un polinomio en una variable compleja x , es una función de la forma:

$$\boxed{P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+...+a_n},$$

donde a_0, a_1, a_2 ....., a_n son números complejos, llamados ***coeficientes*** de $P(x)$, y n es un entero no negativo.

* Si $a_0 \neq 0$, se dice que el ***grado*** de $P(x)$ es n, y se escribe: grado $P(x)=n$.

En este caso, a_0 se llama ***coeficiente principal*** de $P(x)$. Las expresiones

$a_0x^n, a_1x^{n-1}, a_2x^{n-2}, ..., a_n$ se denominan ***términos*** de $P(x)$, y a_0x^n se llama ***término principal*** de $P(x)$.

* Si $a_0=1$, $P(x)$ recibe el nombre de ***polinomio mónico***. El término a_n se conoce como ***término constante*** de $P(x)$.

* Si $a_0=a_1=a_2=...=a_n=0$, $P(x)$ se denomina ***polinomio idénticamente nulo.***

* Si $a_0=a_1=...=a_{n-1}=0$, pero $a_n \neq 0$, $P(x)=a_n$ se denomina ***polinomio constante***. Se dice que un número complejo z es un ***cero*** de un polinomio $P(x)$ si $P(z)=0$

NOTAS:

1) Los términos con coeficientes nulos suelen omitirse en el desarrollo de $P(x)$.

2) El grado de un polinomio idénticamente nulo no está definido.

3) El grado de un polinomio constante es cero.

EJEMPLO:

En el polinomio $P(x)=2x^5+3x^4-4x^2+6x-7$: 2 es el coeficiente principal.

$2x^5$ es el término principal.

7 es el término constante.

5 es el grado de $P(x)$.

1 es un cero de $P(x)$.

2) IGUALDAD , ADICIÓN Y MULTIPLICACIÓN DE POLINOMIOS

DEFINICIÓN 1 :

Dos polinomios son ***iguales*** (identicamente iguales). si tienen el mismo grado, y sus coeficientes son respectivamente iguales.

Es decir :

$$P(x)=a_0x^m+a_1x^{m-1}+...+a_m \quad \text{y}$$

$$Q(x)=b_0x^n+b_1x^{n-1}+...+b_n$$

son iguales si $m=n$ y , además , $a_0=b_0$, $a_1=b_1$, . . . , $a_m=b_n$.

DEFINICIÓN 2 :

Si: $P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+....+a_n$ y

$Q(x)=b_0x^n+b_1x^{n-1}+...+b_n$,

entonces:

$$P(x)\pm Q(x)=(a_0\pm b_0)x^n+(a_1\pm b_1)x^{n-1}+...+(a_n\pm b_n),$$

eligiéndose en cada paréntesis el signo + ó el signo –, según que se trate de una ***suma o resta*** de polinomios.

NOTAS:

1) Los términos que no aparecen en el desarrollo de un polinomio pueden escribirse con coeficientes nulos, en caso de ser necesario.

2) Se dice que un polinomio está completo si en su desarrollo existen todos los términos que siguen al término principal.

EJEMPLO:

Si $P(x)=3x^4+2x^3-3x+8$ y

$Q(x)=x^6-x^4+5x^3-2x^2+4x+1$, entonces se puede escribir:

$P(x)=0x^6+0x^5+3x^4+2x^3+0x^2-3x+8.$

$Q(x)=x^6+0x^5-x^4+5x^3-2x^2+4x+1.$

* Luego, la suma es:

$$P(x)+Q(x)=(0+1)x^6+(0+0)x^5+(3-1)x^4+(2+5)x^3+$$
$$(0-2)x^2+(-3+4)x+(8+1)=x^6+2x^4+7x^3-2x^2+x+9.$$

y la resta:

$$P(x)-Q(x)=(0-1)x^6+(0-0)x^5+(3+1)x^4+(2-5)x^3$$
$$+(0+2)x^2+(-3-4)x+(8-1)$$
$$=-x^6+4x^4-3x^3+2x^2-7x+7$$

DEFINICIÓN 3 :

Si:

$$P(x)=a_0x^m+a_1x^{m-1}+...+a_m \quad \text{y}$$

$$Q(x)=b_0x^n+b_1x^{n-1}+...+b_n,$$

el ***producto*** $P(x)Q(x)$ está definido por:

$$P(x)Q(x)=c_0x^k+c_1x^{k-1}+...+c_k,$$

siendo $k=m+n$ y $c_t=a_tb_0+a_{t-1}b_1+...+a_0b_t$ con $t=0;1;2;...;k$.

EJEMPLO:

Efectuar el producto de los siguientes polinomios:

$P(x)=2x^3+x^2-1$ y $Q(x)=x^2-3x+5$.

RESOLUCIÓN:

Escribiendo $P(x)=a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3$ y $Q(x)=b_0x^2+b_1x+b_2$ resulta $m=3$ y $n=2$; además:

$a_0=2, a_1=1, a_2=0, a_3=-1, a_4=a_5=...=0;$

$b_0=1, b_1=-3, b_2=5, b_3=b_4=...=0.$

Luego, para $P(x)Q(x)=c_0x^k+c_1x^{k-1}+...+c_k$ se tiene $k=3+2=5$ y, además,

$c_0=a_0b_0=(2)(1)=2$

$c_1=a_1b_0+a_0b_1=(1)(1)+(2)(-3)=1-6=-5$

$c_2=a_2b_0+a_1b_1+a_0b_2=(0)(1)+(1)(-3)+(2)(5)$
$=0-3+10=7$

$c_3=a_3b_0+a_2b_1+a_1b_2+a_0b_3$
$=(-1)(1)+(0)(1)+(1)(5)+(2)(0)=-1+0+5+0=4$

$c_4=a_4b_0+a_3b_1+a_2b_2+a_1b_3+a_0b_4$
$=(0)(1)+(-1)(-3)+(0)(5)+(1)(0)+(2)(0)$
$=0+3+0+0+0=3.$

$c_5=a_5b_0+a_4b_1+a_3b_2+a_2b_3+a_1b_4+a_0b_5$
$=(0)(1)+(0)(-3)+(-1)(5)+(0)(0)+(1)(0)+(2)(0)$
$=0+0-5+0+0+0=-5.$

$c_6=c_7=...=0$

Por consiguiente,

$$P(x)Q(x)=2x^5-5x^4+7x^3+4x^2+3x-5.$$

8) EL ALGORITMO DE LA DIVISIÓN :

TEOREMA 1 : (EL ALGORITMO DE LA DIVISIÓN)

Dados dos polinomios $P(x)$ y $Q(x)\neq 0$, existen dos polinomios $S(x)$ y $R(x)$ tal que :

$$P(x)=S(x)Q(x)+r(x),$$

donde $R(x)$ es nulo o $grad\ R(x)< grad\ Q(x)$. Los polinomios $S(x)$ y $R(x)$ se denominan ***cociente y residuo***, respectivamente, de la ***división*** de $P(x)$ entre $Q(x)$. Si $R(x)$ es nulo, se dice que $P(x)$ es divisible por $Q(x)$, o que $Q(x)$ es ***divisor o factor*** de $P(x)$. El cociente $S(x)$ y el residuo $R(x)$ se calculan por el conocido proceso de división ordinaria.

EJEMPLO:

Sean : $P(x)=4x^5-3x^3+x^2+2x-1$ y
$Q(x)=x^3+2x^2+5$.

Efectuando la división ordinaria:

$$\begin{array}{l|l}
4x^5+0x^4-3x^3+x^2+2x-1 & x^3+2x^2+0x+5 \\ \hline
-4x^5-8x^4-0x^3-20x^2 & 4x^2-8x+13 \\
\quad -8x^4-3x^3-19x^2+2x & \\
\quad 8x^4+16x^3+0x^2+40x & \\
\qquad 13x^3-19x^2+42x-1 & \\
\qquad -13x^3-26x^2-0x-65 & \\
\qquad\quad -45x^2+42x-66 &
\end{array}$$

* Luego, $S(x)=4x^2-8x+13$ y $R(x)=-45x^2+42x-66$ son el cociente y el residuo, respectivamente, de la división de $P(x)$ entre $Q(x)$. Por lo tanto, se puede escribir:

$$4x^5-3x^3+x^2+2x-1=(4x^2-8x+13)(x^3+2x^2+5)-45x^2+42x-66.$$

4) EL TEOREMA DEL RESIDUO Y EL TEOREMA DEL FACTOR :

TEOREMA 2 :

(EL TEOREMA DEL RESIDUO).

El residuo de la división de un polinomio $P(x)$ entre $x-a$ es $P(a)$.

DEMOSTRACIÓN:

Por el algoritmo de la división, existen $S(x)$ y $R(x)$ tales que: $P(x)=S(x)(x-a)+R(x)$, con :

$grad\ R(x)<grad(x-a)=1$. Se deduce entonces que grad $R(x)=0$ y, por consiguiente, que $R(x)$ es constante. En consecuencia, resulta que $P(x)=S(x)(x-a)+r$, donde r es una constante.

Haciendo $x=a$ en esta última igualdad se obtiene;

$$P(a)=s(a)(a-a)+r=s(a)(0)+r=0+r=r,$$

con lo cual queda demostrado el Teorema.

EJEMPLO:

El residuo de la división de $P(x)=2x^4-3x^3+5x-6$ entre $x-2$ es:

$P(2)=2(2)^4-3(2)^3+5(2)-6=32-24+10-6=12$

Utilizando la división ordinaria se obtiene el mismo resultado.

En efecto,

$$\begin{array}{l|l} 2x^4-3x^3+0x^2+5x-6 & x-2 \\ \hline -2x^4+4x^3 & 2x^3+x^2+2x+9 \\ \quad x^3+0x^2 & \\ \quad -x^3+2x^2 & \\ \qquad 2x^2+5x & \\ \qquad -2x^2+4x & \\ \qquad\quad 9x-6 & \\ \qquad\quad -9x+18 & \\ \qquad\qquad 12=r & \end{array}$$

TEOREMA 3 : (TEOREMA DEL FACTOR)

Si c es un cero de un polinomio $P(x)$, entonces $x-c$ es un factor de $P(x)$. Por el algoritmo de la división, existen $S(x)$ y r tal que: $P(x)=S(x)(x-c)+r$.

Si c es un cero de $P(x)$, entonces $P(c)=0$; además, por el Teorema del Residuo, $r=P(c)$. Luego, $r=0$ y, por lo tanto, $P(x)=S(x)(x-c)$.

En consecuencia, $x-c$ es un factor de $P(x)$. También se cumple el recíproco de este Teorema, cuya demostración se deja al lector.

TEOREMA 4 :

Si $x-c$ es un divisor de $P(x)$, entonces c es un cero de $P(x)$.

EJEMPLO:

Sea el polinomio $P(x)=x^3-6x^2+11x-6$. Se observa que $P(3)=0$; luego, 3 es un cero de $P(x)$. Por lo tanto, $x-3$ es un divisor de $P(x)$. En efecto,

$$x^3-6x^2+11x-6=(x^2-3x+2)(x-3).$$

5) LA DIVISIÓN SINTÉTICA :

Estudiaremos a continuación un proceso para calcular el cociente y el residuo de la división de un polinomio $P(x)$ entre un binomio de la forma $x-c$, sin necesidad de recurrir a la división ordinaria. Este proceso se conoce con el nombre de división sintética. Por el algoritmo de la división, sabemos que existen $S(x)$ y r tal que: $P(x)=S(x)(x-c)+r$.

Sean:

$$P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\dots+a_n \quad \wedge$$

$$S(x)=b_0x^{n-1}+b_1x^{n-2}+b_2x^{n-3}+\dots+b_{n-1}$$

Entonces:

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\dots+a_n=(b_0x^{n-1}+b_1x^{n-2}+b_2x^{n-3}+\dots+b_{n-1})(x-c)+r=b_0x^n+(b_1-cb_0)x^{n-1}+(b_2-cb_1)x^{n-2}+\dots+(b_{n-1}-cb_{n-2})x+r-cb_{n-1}$$

Igualando los coeficientes respectivos se obtienen las igualdades:

$$a_0=b_0,\ a_1=b_1-cb_0,\ a_2=b_2-cb_1,\dots,a_{n-1}=b_{n-1}-cb_{n-2},a_n=r-cb_{n-1}$$

Transponiendo términos resulta:

$$b_0=a_0;b_1=a_1+cb_0;b_2=a_2+cb_1;\dots;b_{n-1}=a_{n-1}+cb_{n-2};r=a_n+cb_{n-1}$$

De este modo se pueden hallar el residuo r y los coeficientes del cociente $S(x)$, en función de los coeficientes del dividendo $P(x)$ y del divisor $x-c$.

Estos resultados se disponen en una tabla, dando lugar al procedimiento llamado *división sintética*, tal como se indica a continuación:

a_0	a_1	$a_2 \dots\dots a_{n-1}$	a_n	c
	cb_0	$cb_1 \dots\dots cb_{n-2}$	cb_{n-1}	
$a_0=b_0$	b_1	$b_2 \dots\dots b_{n-1}$	r	

EJEMPLO:

Hallar, por división sintética, el cociente y el residuo de la división de $P(x)=5x^4-8x^3+x-10$ entre $x-2$.

RESOLUCIÓN:

Por el proceso anteriormente descrito escribimos:

5	−8	0	1	−10	2
	10	4	8	18	
5	2	4	9	8	

Luego, el cociente y el residuo son:

$$S(x)=5x^3+2x^2+4x+9,\quad r=8.$$

6) NÚMERO DE CEROS DE UN POLINOMIO

TEOREMA 5:

(El Teorema Fundamental del Algebra)

Todo polinomio de grado positivo tiene un cero complejo. Este Teorema deja establecido que el sistema de números complejos $\mathbb{C}$ resuelve el problema algebraico de hallar un sistema de números (como extensión de R), en el cual todo polinomio definido en él tenga un cero en el mismo sistema. Se sabe, en

particular, que el sistema de números Reales $\mathbb{R}$ no satisface tal condición, un ejemplo de lo dicho lo constituye el polinomio $P(x) = x^2+1$, el cual no tiene ceros en $\mathbb{R}$. La demostración del Teorema Fundamental del Álgebra escapa a los alcances del presente tratamiento, razón por la cual es omitida. Una consecuencia muy importante del *T.F.A.* es el siguiente:

TEOREMA 6:

Todo polinomio de grado n tiene exactamente n ceros.

DEMOSTRACIÓN:

Sea: $P(x)= a_0x^n+a_1x^{n-1}+ \ldots +a_n$, con $a_0 \neq 0$.

Por el *T.F.A.*, $P(x)$ tiene un cero complejo, tal como r_1. Luego, por el Teorema del Factor, $x - r_1$ es un divisor de $P(x)$ y se puede escribir: $P(x) = (x - r_1)q_1(x)$,

siendo $Q_1(x)$ un polinomio de grado $n-1$, cuyo término principal es a_0x^{n-1}, pudiéndose calcular sus demás coeficientes por división sintética. Aplicando nuevamente el *T.F.A.*, $Q_1(x)$ debe tener un cero, tal como r_2; luego, $x-r_2$ es un factor de $Q_1(x)$.

Esto permite escribir:

$Q_1(x)= (x - r_2)\, q_2(x)$ y $P(x)=(x - r_1)(x-r_2)q_2(x)$,

donde $Q_2(x)$ es un polinomio de grado $n-2$, cuyo término principal es a_0x^{n-2}

Repitiendo este proceso n veces se obtiene:

$$P(x)=(x-r_1)(x-r_2)\ldots(x-r_n)Q_n(x) \ldots\ldots\ldots\ldots (I)$$

donde $Q_n(x)$ es un polinomio de grado $n - n=0$, cuyo término principal es $a_0x^0= a_0$. Es decir, $Q_n(x)$ es constante e igual a $a_0 \neq 0$. En consecuencia, se puede expresar $P(x)$ en la forma factorizada

$$P(x)= a_0(x - r_1)(x - r_2)\ldots(x - r_n) \ldots\ldots\ldots (II)$$

Evidentemente, $r_1, r_2, \ldots, r_n$ son ceros de $P(x)$. Ningún otro número complejo r, diferente de $r_1, r_2, \ldots, r_n$, es cero de $P(x)$. En efecto, haciendo $x=r$, no se anula ningún factor del segundo miembro de la igualdad *(1)* y, por consiguiente, $P(r) \neq 0$. Se concluye, por lo tanto, que $P(x)$ tiene exactamente n ceros. Con herramientas no dadas en el presente tratamiento, se demuestra que la descomposición factorial obtenida en este teorema es única, salvo el orden de factores. Este resultado se conoce con el nombre de Teorema de Factorización Única y se enuncia de la siguiente forma:

TEOREMA 7:

(Teorema de Factorización Única)

Todo polinomio con coeficientes complejos, de grado n, se puede expresar de una única forma (salvo el orden de los factores): $P(x) = a_0(x-r_1)(x-r_2)\ldots(x-r_n)$, donde a_0 es el coeficiente principal, y $r_1, r_2, \ldots, r_n$ son ceros de $P(x)$. Una consecuencia de los teoremas anteriores es el siguiente.

TEOREMA 8 :

(Teorema de Identidad)

Si dos polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ son del mismo grado n y coinciden en $n+1$ valores diferentes de la variable x, entonces $P(x)$ y $Q(x)$ son identicamente iguales.

DEMOSTRACIÓN:

Sean:

$$P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$$
y
$$Q(x)=b_0x^n+b_1x^{n-1}+\ldots+b_n$$

con $a_0 \neq 0$ y $b_0 \neq 0$.

Puesto que $P(x)$ y $Q(x)$ coinciden en $n+1$ valores diferentes de x, el polinomio

$$D(x)=P(x)-Q(x)$$

$$=(a_0-b_0)x^n+(a_1-b_1)x^{n-1}+\ldots+(a_n-b_n)$$

se anula para $n+1$ valores diferentes de x.

Si $a_i - b_i \neq 0$, para algún $i = 0; 1; 2; \ldots; n$, se tendría que grado $D(x) \leq n$. Luego, $D(x)$ sería un polinomio con grado no mayor que n, pero con $n+1$ ceros, lo cual es una contradicción (Teorema **6**). Por consiguiente, $a_i-b_i=0$ para todo $i = 0, 1, 2, \ldots, n$. Es decir, $a_i=b_i$ para todo $i = 0, 1, 2, \ldots, n$. En consecuencia, $P(x)$ y $Q(x)$ son identicamente iguales.

7) MULTIPLICIDAD DE UN FACTOR :

DEFINICIÓN :

Si $(x-r)^m$, con m entero positivo, es un factor de un polinomio $P(x)$, pero no lo es $(x-r)^{m+1}$, entonces se dice que $(x-r)$ es un ***factor de multiplicidad m*** de $P(x)$; además, en este caso, se dice que r es un ***cero de multiplicidad m*** de $P(x)$.

EJEMPLO:

Sea $P(x)=8x^3 - 4x^2 - 2x + 1$. Se puede escribir:

$$P(x) = (2x-1)^2\,(2x+1).$$

Luego, $P(x)$ tiene un factor $2x-1$ de multiplicidad **2**, y un factor $2x+1$ de multiplicidad **1**. Además, $1/2$ es un cero de multiplicidad 2 (cero doble) y $-1/2$ es un cero de multiplicidad **1** (cero simple) de $P(x)$.

8) EL PROCEDIMIENTO DE HORNER :

Usando el Teorema del Binomio, toda potencia de x se puede expresar como un desarrollo polinómico de potencias del binomio lineal $x - a$, para cualquier número $a \in C$.

En efecto,

$$x^n=[a+(x-a)]^n=a^n+na^{n-1}(x-a)+\frac{n(n-1)}{1\times 2}a^{n-2}(x-a)^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\times 2\times 3}a^{n-3}(x-a)^3+\ldots\ldots$$

EJEMPLO:

Expresar x^4 en potencias de $x-2$.

RESOLUCIÓN:

$$x^4=[2+(x-2)]^4=2^4+4\times 2^3(x-2)+\frac{4\times 3}{1\times 2}2^2(x-2)^2+\frac{4\times 3\times 2}{1\times 2\times 3}2^1(x-2)^3+\frac{4\times 3\times 2\times 1}{1\times 2\times 3\times 4}2^0(x-2)^4$$

$$=16+32(x-2)+24(x-2)^2+8(x-2)^3+(x-2)^4.$$

Una consecuencia de lo anterior es que todo polinomio $P(x)$ puede desarrollarse en potencias de $x-a$, para cualquier complejo a. Se puede escribir entonces,

$$P(x)=A_0+A_1(x-a)+A_2(x-a)^2+\ldots+A_n(x-a)^n.$$

Los coeficientes $A_0, A_1, \ldots, A_n$ de este desarrollo se pueden calcular por repetidas aplicaciones de la división sintética. En efecto, escribiendo:

$P(x)=A_0+(x-a)P_1(x)$ con $P_1(x)=A_1+A_2(x-a)+\ldots+A_n(x-a)^{n-1}$

$P_1(x)=A_1+(x-a)P_2(x)$ con $P_2(x)=A_2+A_3(x-a)+\ldots+A_n(x-a)^{n-2}$

$P_{n-2}(x)=A_{n-2}+(x-a)P_{n-1}(x)$ con $P_{n-1}(x)=A_{n-1}+A_n(x-a)^1$

$P_{n-1}(x)=A_{n-1}+(x-a)P_n(x)$ con $P_n(x)=A_n$

* Se observa que:

A_0 es el residuo de la división de $P(x)$ entre $x-a$,

A_1 es el residuo de la división de $P_1(x)$ entre $x-a$,

A_2 es el residuo de la división de $P_2(x)$ entre $x-a$,

---,

A_{n-2} es el residuo de la división de $P_{n-2}(x)$ entre $x-a$,

A_{n-1} es el residuo de la división de $P_{n-1}(x)$ entre $x-a$,

$A_n=P_n(x)$ (constante) es el último de los cocientes obtenidos en este proceso de división por $x-a$.

EJEMPLO:

Expresar $P(x)=3x^4+x^3-2x^2+x-7$ en potencias de $x-1$.

RESOLUCIÓN:

Efectuando abreviadamente las divisiones sintéticas por $x-1$:

3	1	−2	1	−7	|1
3	4	2	3	|−4	
3	7	9	|12		
3	10	|19			
3	|13				
|3					

Tomando los residuos en orden de aparición se escribe:

$$P(x)=-4+12(x-1)+19(x-1)^2+13(x-1)^3+3(x-1)^4.$$

9) MÁXIMO COMÚN DIVISOR :

DEFINICIÓN 1:

Un polinomio $P(x)$ es ***irreducible*** si no se puede expresar como el producto de dos polinomios de grado positivo. En caso contrario, se dice que $P(x)$ es reducible.

NOTA:

Puesto que, según el Teorema de Factorización Única, todo polinomio de grado n puede descomponerse en un producto de n factores lineales, los únicos polinomios irreducibles son de grado *1* (lineales).

DEFINICIÓN 2:

Dos polinomios no nulos son ***asociados*** si uno de ellos es igual al otro multiplicado por una constante.

EJEMPLO:

Los polinomios $P(x)=3x+6$ y $Q(x)=x+2$ son irreducibles, sin embargo, ellos son asociados, pues: $P(x)=3Q(x)$. En cambio, el polinomio $S(x)=x^3+1$ es reducible, tal como lo indica la descomposición:

$$x^3+1=(x+1)(x^2-x+1).$$

DEFINICIÓN 3:

Se llama máximo común divisor de dos polinomios no nulos $P(x)$ y $Q(x)$, a un polinomio $D(x)$ que satisface las siguientes condiciones:

1) $D(x)$ divide a $P(x)$ y a $Q(x)$

2) Si $S(x)$ divide a $P(x)$ y a $Q(x)$, entonces $S(x)$ divide a $D(x)$.

OBSERVACIONES:

1) Si un polinomio cumple con las condiciones *1* y *2*, también las cumplen sus asociados.

2) Se prueba que el *m.c.d.* de dos polinomios es único, salvo asociados.

DEFINICIÓN 4:

Se dice que dos polinomios son primos relativos o primos entre sí, si el máximo común divisor de ambos es constante. El procedimiento para calcular el m.c.d. de polinomios es análogo al usado para hallar el m.c.d. de números enteros y se fundamenta en los siguientes teoremas:

TEOREMA 9:

Si un polinomio $Q(x)$ divide a otro polinomio $P(x)$, el ***m.c.d.*** de ambos es $Q(x)$. La demostración es inmediata de la definición de ***m.c.d.***

TEOREMA 10:

Si $Q(x)$ no divide a $P(x)$, y $grad\ q(x)\leq grad\ p(x)$, el ***m.c.d.*** de $P(x)$ y $Q(x)$ es el mismo que el de $Q(x)$ y el residuo de la división de $P(x)$ entre $Q(x)$.

DEMOSTRACIÓN:

Por el Algoritmo de la División, existen $S(x)$ y $R(x)$ tal que: $P(x)=S(x)Q(x)+R(x)$, con grado $R(x)<grad Q(x)$ Sea $D(x)$ **m.c.d.** de $P(x)$ y $Q(x)$. Se prueba a continuación que $D(x)$ también es **m.c.d.** de $Q(x)$ y $R(x)$: Si $D(x)$ divide a $P(x)$ y a $Q(x)$, entonces $D(x)$ divide a $Q(x)$ y a $R(x) = P(x)- S(x)Q(x)$.

Supongamos ahora que $D'(x)$ también divide a $Q(x)$ y a $R(x)$; por lo tanto, $D'(x)$ divide a $P(x)= S(x)Q(x)+R(x)$. Así se tiene que $D'(x)$ divide a $P(x)$ y a $Q(x)$. Pero, como $D(x)$ es **m.c.d.** de $P(x)$ y $Q(x)$, se concluye en seguida que $D'(x)$ divide a $D(x)$. En consecuencia, queda demostrado que $D(x)$ es **m.c.d.** de $Q(x)$ y $R(x)$. A continuación se describe el proceso para calcular el **m.c.d.** de dos polinomios no nulos $P(x)$ y $Q(x)$. Supongamos que $grad\ Q(x) \le grad\ P(x)$. Dividiendo el polinomio P entre el ***polinomio*** Q se hallan un cociente S_1 y un residuo R_1 tal que:

$P=S_1Q+R_1$, ***con grado*** $R_1<grad\ Q$ Si R_1 no es nulo, se divide Q entre R_1, obteniéndose un cociente S_2 y un residuo R_2 tal que: $Q = S_2R_1 + R_2$, con grado $R_2<grad\ R_1$. Si R_2 no es nulo, se divide R_1 entre R_2, entonces se escribe: $R_1=S_3 R_2+ R_3$, donde grado $R_3<grado\ R_2$. Procediendo reiteradamente se llega a obtener un residuo nulo, escribiendo entonces: $R_{n-1}= S_{n+1} R_n$. En resumen, resulta la siguiente sucesión de igualdades:

$$\begin{aligned} P &= S_1Q + R_1 \\ Q &= S_2 R_1 + R_2 \\ R_1 &= S_3 R_2 + R_3 \\ R_2 &= S_4 R_3 + R_4 \\ &\cdots\cdots \\ R_{n-2} &= S_n R_{n-1} + R_n \\ R_{n-1} &= S_{n+1} R_n. \end{aligned}$$

El último divisor R_n, así obtenido, es el **m.c.d.** de P y Q. Para demostrar esta a firmación diremos que R_n divide a R_{n-1} y, por lo tanto, a R_{n-2}; si R_n divide a R_{n-2}, entonces divide a R_{n-3}; y así sucesivamente, . . . , dividiendo a R_3 divide a R_2; si divide a R_3 y a R_2, divide entonces a R_1; diviendo a R_2 y a R_1, divide a Q; finalmente, si divide a R_1 y a Q, divide a P . Además, si D es un divisor de P y Q, es también divisor de:

$$\begin{aligned} R_1 &= P - S_1 Q \\ R_2 &= Q - S_2 R_1 \\ R_3 &= R_1 - S_3 R_2 \\ R_4 &= R_2 - S_4 R_3 \\ &\cdots\cdots \\ R_n &= R_{n-2} - S_n R_{n-1} \end{aligned}$$

Esto completa la prueba de que R_n es el **m.c.d.** de P y Q.

EJEMPLO:

Hallar el **m.c.d.** de los polinomios:

$$P(x) = x^5+x^4+ 5x^3 - 2x^2+x-10 \text{ y}$$
$$Q(x)=x^4+2x^2 - x+2$$

RESOLUCIÓN:

Dividiendo P entre Q (por coeficientes separados):

$$\begin{array}{rrrrrr|rrrrr} 1 & 1 & 5 & -2 & 1 & -10 & 1 & 0 & 2 & -1 & 2 \\ \cline{7-11} -1 & 0 & -2 & 1 & -2 & & 1 & 1 & & & \\ \cline{1-5} & 1 & 3 & -1 & -1 & -10 & & & & & \\ & -1 & 0 & -2 & 1 & -2 & & & & & \\ \cline{2-6} & & 3 & -3 & 0 & -12 & & & & & \end{array}$$

Se obtienen así el cociente $S_1 = x+1$ y el residuo $R_1 = 3x^3 - 3x^2 -12$. Tomando $3Q$ (para evitar fracciones) y dividiendo entre R_1.

$$\begin{array}{rrrrr|rrrr} 3 & 0 & 6 & -3 & 6 & 3 & -3 & 0 & -12 \\ \cline{6-9} -3 & 3 & 0 & 12 & & 1 & 1 & & \\ \cline{1-4} & 3 & 6 & 9 & 6 & & & & \\ & -3 & 3 & 0 & 12 & & & & \\ \cline{2-5} & & 9 & 9 & 18 & & & & \end{array}$$

Se obtiene el cociente $S_2 = x+1$ y el residuo $R_2 = 9x^2+9x+18$. Dividiendo R_1 entre $\frac{1}{3}R_2$:

$$\begin{array}{rrrr|rrr} 3 & -3 & 0 & -12 & 3 & 3 & 6 \\ \cline{5-7} -3 & -3 & -6 & & 1 & -2 & \\ \cline{1-3} & -6 & -6 & -12 & & & \\ & 6 & 6 & 12 & & & \\ \cline{2-4} & 0 & 0 & 0 & & & \end{array}$$

Luego, el último divisor es el **m.c.d.**; es decir:

$$m.c.d.(P;Q) = x^2 + x + 2.$$

EJERCICIOS:

01 Descomponer $P(x) = x^3 + 3x^2 + 4x +4$, sabiendo que, salvo un factor constante, puede escribirse en la forma $(x^2 + mx + n)^2 -x^4$.

02 Calcular la raíz cuadrada del polinomio.

$$x^6-12x^5+60x^4-160x^3+240x^2-192x+64$$

03 Determinar $\lambda \wedge \mu$ para que el polinomio

$P(x) = x^4+\lambda x^3+\mu x^2+12x+4$, sea cuadrado perfecto.

(04) Evaluar:

$P(x)=x^3-3x$ para $x=\sqrt[3]{a+\sqrt{a^2-1}}+\sqrt[3]{a-\sqrt{a^2-1}}$

(05) Evaluar:

$P(x)=(1-x)(1-ax)(1-a^2x)(1-a^3x)(1-a^4x)$ Si a es una raíz quinta de la unidad.

(06) Verificar que $x=1+\sqrt[3]{2}$ es un cero del polinomio.

(07) Hallar el valor numérico de

$$A=2x^4-4x^3-7x-14 \text{ para } x=1+\sqrt{3}.$$

(08) Determinar el valor de a y b, tales que $A=ax^{n+1}+bx^n+1$ sea divisible por $(x-1)^2$.

(09) Hallar el cociente y el residuo de las siguientes divisiones, usando la división sintética:

a) $2x^3+x^2-4x+7$ entre $x+7$

b) $3x^4+x^2-2x+7$ entre $x-\sqrt{3}$

c) x^5-7x^2+x-5i entre $x+5i$

d) x^4+ix^2-9x+6 entre $3x-2$

e) $4x^3-3x^2+x+2$ entre $2x-i$

f) $3x^5+5ix^4-7x^2+4i$ entre $x-1+i$

(10) Dado $P(x)=x^7-3x^4+x^3+2x+5$.

Calcular: a) $P(-5)$ d) $P(0,1)$

b) $P(\sqrt{3})$ e) $P(-2i)$

c) $P(1/2)$ f) $P(1+i)$

(11) Sin efectuar la división, demostrar que:

a) $x^4-x^3+3x^2-5x-10$ es divisible por x^2-x-2.

b) $2x^5-9x^4\,7x^3+7x^2-5x+6$ es divisible por x^2-5x+6.

c) $2x^4+x^3+3x^2+x+1$ es divisible por x^2+1.

d) $3x^4+2x^3-74x^2-50x-25$ es divisible por x^2-25.

e) $2x^3+7x^2-3x-3$ es divisible por $2x+1$

f) $9x^5+18x^4-4x^3+x^2-4$ es divisible por $9x^2-4$.

(12) En cada uno de los siguientes ejercicios, hallar una ecuación que tenga las raíces que se indican.

a) $1;-2;3$ d) $3;1\pm\sqrt{2}$

b) $i;-i;4$ e) $1;1\pm\sqrt{5}$

c) $1;2;2;-3$ f) $1\pm i;2\pm 3i$.

(13) Desarrollar:

a) x^4+x^3-3x+2, en potencias de $x-1$.

b) x^5+3x+4, en potencias de $x+2$.

c) $2x^5-4x^3+x^2-8$, en potencias de $x+1$.

d) x^6+1, en potencias de $x-2$.

(14) En cada ejercicio, hallar el ***m.c.d.*** de los polinomios que se indican:

a) x^3-1 y $x^4+x^3+2x^2+x+1$.

b) $2x^3+6x^2-x-3 \wedge x^4+4x^3+3x^2+x+1$.

c) $x^4-6x^2-8x-3 \wedge x^3-3x-2$.

TEORÍA DE ECUACIONES

1) DEFINICIÓNES PRELIMINARES :

Una igualdad de la forma $P(x)=0$, donde $P(x)$ es un polinomio , se denomina ecuación polinómica ; x se llama incógnita y los ceros de $P(x)$ de denomina raíces de la ecuación $P(x)=0$. El grado de una ecuación es el grado del polinomio que la define. En toda ecuación se puede suponer que el coeficiente principal es positivo.

De acuerdo a lo estudiando en polinomios , se puede afirmar que toda ecuación de grado no tiene exactamente en raíces .

2) ECUACIÓN REDUCIDA :

Si $P(x)=0$ es una ecuación de grado n y r es una raíz, se puede escribir: $P(x)=(x-r)Q(x)$ donde $Q(x)$ es un polinomio de grado $n-1$. Toda raíz de $P(x)=0$, diferente de r es raíz de $Q(x)=0$ y reciprocamente , toda raíz de es $P(x)=0$ es , a su vez , raíz $P(x)=0$. En este caso. $Q(x)=0$ se denomina ***ecuación reducida*** de $P(x)=0$.

EJEMPLO:

Resolver la ecuación : $P(x)=x^4-8x^2-4x+3=0$, si tiene las raíces -1 y 3.

RESOLUCIÓN:

Usando la división sintética con -1:

1	0	−8	−4	3	−1
	−1	1	7	−3	
1	−1	−7	3	0	

Se obtiene la ecuación reducida $Q_1(x)=x^3-x^2-7x+3=0$ Reduciendo a su vez $Q_1(x)=0$, aplicando la división sintética por 3:

1	–1	–7	3	3
	3	6	–3	
1	2	–1	0	

Se obtiene $Q_2(x) = x^2 + 2x - 1 = 0$, que es una ecuación de segundo grado.

Resolviendo $Q_2(x) = 0$, se hallan las raíces:

$$x = -1 \pm \sqrt{2}$$

las cuales son, a su vez, raíces de $P(x) = 0$.

Por consiguiente, el conjunto solución de $p(x) = 0$ es:

$$\{-1; 3; -1 \pm \sqrt{2}\}$$

8) RELACIONES ENTRE LAS RAICES Y LOS COEFICIENTES :

Sea la ecuación mónica de segunda grado*:*

$x^2 + bx + c = 0$. Si r_1 y r_2 son las raíces de esta ecuación, se puede escribir:

$$x^2+bx+c=(x-r_1)(x-r_2) = x^2-(r_1+r_2)x+r_1r_2$$

igualdad de polinomios, se sigue que:

$$r_1 + r_2 = -b \quad , \quad r_1 r_2 = c.$$

Es decir, en toda ecuación mónica de segundo grado, la suma de las raíces es igual al coeficiente del segundo término con signo contrario, y el producto de dichas raíces es igual al término constante. Sea ahora una ecuación cúbica de la forma: $x^3+bx^2+cx+d=0$, y sean r_1, r_2 y r_3 sus raíces.

Entonces se escribe:

$$x^3+ bx^2+ cx+d = (x-r_1)(x-r_2)(x-r_3)$$
$$= x^3 - (r_1+r_2+r_3)x^2 + (r_1r_2+r_1r_3+r_2r_3)x - r_1r_2r_3$$

Igualando los respectivos coeficientes se obtienen las relaciones entre

$$r_1+r_2+r_3=-b$$
$$r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3 = c$$
$$r_1r_2r_3 = -d$$

Es decir, la suma de las raíces es igual al coeficiente del segundo término con signo contrario; la suma de los productos, dos a dos, de las raíces es igual al coeficiente del tercer término; y, finalmente, el producto de las tres raíces es igual al término constante con signo contrario. Estos resultados pueden obtenerse en forma análoga para las ecuaciones de 4° grado, 5° grado, etc.

El siguiente teorema es una generalización de las relaciones mencionadas entre las raíces y los coeficientes.

TEOREMA 1:

Sea la ecuación mónica de grado n:

$$p(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + ... + a_{n-1} + a_n = 0,$$

y sean $r_1, r_2, ..., r_n$ sus n raíces.

Entonces se cumplen las siguientes

RELACIONES:

$$S_1=r_1+r_2+...+r_n=-a_1$$
$$S_2=r_1r_2+r_1r_3+r_2r_3+....+r_{n-1}r_n=a_2$$
$$S_3=r_1r_2r_3+r_1r_2r_4+...+r_{n-2}r_{n-1}r_n=-a_3.$$

$$S_n=r_1r_2...+r_n=(-1)^n a_n$$

DEMOSTRACIÓN:

Puesto que,

$P(x)=x^n+a_1x^{n-1}+...+a_n = (x-r_1)(x-r_2)'...(x-r_n)$, basta probar que se cumple la fórmula:

$$(x-r_1)(x-r_2)...(x-r_n)= x^n-S_1x^{n-1}+S_2x^{n-2}-...+(-1)^nS_n.$$

La demostración se efectuará por inducción matemática sobre n.

Para $n = 1$, la igualdad es obvia. En efecto,

$$(x-r_1) = x^1- S_1x^0 = x-S_1$$

donde $S_1 = r_1$.

Para $n = 2$ y $n = 3$, se ha comprobado que se cumple dicha fórmula.

Supongamos que se cumple para $n = h$; es decir.

$$(x-r_1)(x-r_2)...(x-r_h)=x^h-S_1x^{h-1}+S_2x^{h-2}-...+(-1)^hS_h$$

Luego, para $n = h + 1$ resulta:

$$(x-r_1)(x-r_2)...(x-r_h)(x-r_{h+1})$$
$$=(x^h - S_1x^{h-1}+S_2x^{h-2}-....+(-1)^hS_h)(x-r_{h+1})$$
$$= x^{h+1}-(S_1+r_{h+1})x^h+(S_2+r_{h+1}S_1)x^{h-1}-(S_3+r_{h+1}S_2)x^{h-2}+...+(-1)^{h+1}r_{h+1}S_h$$

Pero:

$S_1 + r_{h+1}$ es la suma de las $h + 1$ raíces $r_1, r_2, ..., r_{h+1}$; $S_2+r_{h+1}S_1$ es la suma de los productos, dos a dos, de las $h+1$ raíces, $S_3+r_{h+1}S_2$ es la suma de los productos, tres a tres, de las $h+1$ raíces ;..... $r_{h+1}S_h$ es el producto de las $h + 1$ raíces.

Por consiguiente, la fórmula se cumple para *:*

$n = h + 1$, siempre que se cumple para $n=h$, lo cual completa la inducción. Se puede concluir así que dicha fórmula se cumple para todo entero positivo n, como se quería demostrar.

EJEMPLO 1:

Resolver la ecuación $x^4-2x^3-3x^2 + 4x + 4 = 0$, si tiene dos raíces dobles.

RESOLUCIÓN:

Sean r, r, s y s las cuatro raíces. Por el Teorema anterior se satisfacen las igualdades:

$r+r+s+s=2$ ....(1)

$r^2+rs+rs+rs+rs+s^2=-3$ ....(2)

$r^2s+r^2s+rs^2+rs^2=-4$ ....(3)

$r^2s^2=4$ ....(4)

Es decir:

$r+s=1$ ....(1)

$r^2+4rs+s^2=-3$ ....(2)

$r^2s+rs^2=-2$ ....(3)

$r^2s^2=4$ ....(4)

Resolviendo *(1)* y *(3)* se obtiene: $r+s=1$ y $rs=-2$, de lo cual se sigue que: $r=-1$ y $s=2$.

Por consiguiente, la solución de la ecuación dada es:

$$\{-1;-1;2;2\}$$

EJEMPLO 2:

Resolver $4x^3-4x^2-x+1=0$, si una raíz es el opuesto de otra.

RESOLUCIÓN:

La ecuación se puede escribir: $x^3-x^2-\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}=0.$

Las raíces son de la forma. r, $-r$ y s. Por lo tanto,

$r-r+s=1$ ....(1)

$-r^2-rs+rs=-1/4$ ....(2)

$-r^2s=-1/4$ ....(3)

Resolviendo *(1)* y *(3)*, se obtienen los valores: $s=1$ y $r=\pm 1/2$ que son las raíces buscadas.

En consecuencia, la solución es: $\{\pm 1/2;1\}$

4)RAICES COMPLEJAS CONJUGADAS :

TEOREMA 2:

Si z es una raíz compleja de una ecuación con coeficientes reales, entonces $\overline{z}$ también es raíz de tal ecuación.

Demostración: Sea la ecuación

$$P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_n=0,$$

con a_0, a_1; ..., a_n, números reales.

Si z es raíz de $P(x)=0$, $P(z)=0$. Es decir,

$$P(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+...+a_n=0.$$

Tomando conjugados resulta:

$$\overline{0}=0=\overline{P(z)}=\overline{a_0z^n+a_1z^{n-1}+....+a_n}$$
$$=\overline{a_0z^n}+\overline{a_1z^{n-1}}+...+\overline{a_n}$$
$$=a_0\overline{(z)}^n+a_1\overline{(z)}^{n-1}+....+a_n$$
$$=P(\overline{z}).$$

Lo cual prueba que $\overline{z}$ es raíz de $P(x)=0.$

NOTA:

Es importante observar que, de acuerdo al teorema demostrado, toda ecuación de grado impar y con coeficientes reales tiene al menos una raíz real.

EJEMPLO:

Resolver $P(x)=x^4+x^3-14x^2+26x-20=0$, si tiene la raíz $1-i$

RESOLUCIÓN:

Por el teorema anterior, $1+i$ también es raíz de esta ecuación.

Luego: $[x-(1-i)][(x-(1+i)]=[(x-1)+i][x-1)-i]$
$=(x-1)^2+1=x^2-2x+2$

es un factor de $P(x)$.

Dividiendo $P(x)$ entre x^2-2x+2 resulta:

$$\frac{P(x)}{x^2-2x+2}=x^2+3x-10$$

Asi, las dos raíces de la ecuación reducida $x^2+3x-10=0$ son las raíces restantes de $P(x)=0$.

Tales raíces son: $x=2$, $x=-5$. Por lo tanto, la solución de la ecuación dada es: $\{2;-5;1\pm i\}$

5) RAICES DE LA FORMA $a+\sqrt{b}$:

TEOREMA 3 :

Si una ecuación con coeficientes racionales tiene una raíz de la forma $a+\sqrt{b}$, donde a y b son números racionales, pero no $\sqrt{b}$, entonces tiene también la raíz $a-\sqrt{b}$

DEMOSTRACIÓN:

Sea $P(x)=0$ y una raíz $a+\sqrt{b}$ con las hipótesis del enunciado. Dividiendo $P(x)$ entre el producto:

$$[x-(a+\sqrt{b})][x-(a-\sqrt{b})]=[(x-a)-\sqrt{b}][(x-a)+\sqrt{b}]$$
$$=(x-a)^2-b=x^2-2ax+a^2-b$$

se obtiene un cociente $Q(x)$ y un residuo $R(x)=mx+n$, con coeficientes racionales (pues, el dividendo y el divisor tienen coeficientes racionales).

Resulta así:

$$P(x)=(x^2-2ax+a^2-b)\,q(x)+mx+n.$$

Por ser $a+\sqrt{b}$ raíz de $P(x)=0$, se sigue que

$m(a+\sqrt{b})+n=0$ ....(1)

si $m\neq 0$, $\sqrt{b}=-\frac{n+ma}{m}$ sería un número racional, en contra de la hipótesis. Por consiguiente, $m=0$, y, reemplazando en *(1)*, $n=0$. Esto significa que $R(x)=0$. Se concluye de inmediato que $x^2-2ax+a^2b$

es un divisor de $P(x)$ y, en consecuencia, también lo es $x-(a-\sqrt{b})$. De esta última afirmación se sigue que $a-\sqrt{b}$ es raíz de $P(x)=0$, completándose así la demostración del Teorema.

EJEMPLO:

Resolver : $P(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 19x + 5 = 0$, si tiene la raíz $2+\sqrt{3}$.

RESOLUCIÓN:

Por el teorema anterior, $2-\sqrt{3}$ también es raíz.

Luego, $P(x)$ es divisible por el producto:

$$\left[x-(2+\sqrt{3})\right]\left[x-(2-\sqrt{3})\right]=\left[(x-2)-\sqrt{3}\right]\left[(x-2)+\sqrt{3}\right]=(x-2)^2-3=x^2-4x+1$$

Efectuando la división, se obtiene: $\dfrac{P(x)}{x^2-4x+1}=x^2+x+5$

Resolviendo la ecuación reducida $x^2+x+5=0$, se hallan las raíces: $-\dfrac{1}{2}\pm\dfrac{\sqrt{19}}{2}i$ Por consiguiente, la solución de $p(x)=0$ es: $2\pm\sqrt{3}, -\dfrac{1}{2}\pm\dfrac{\sqrt{19}}{2}i$

6) RAICES ENTERAS Y RAICES RACIONALES :

TEOREMA 4 :

Si un número racional b/c, con b y c enteros primos entre sí, es una raíz de la ecuación con coeficientes enteros.

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0; \ (a_0>0)$$

b divide al término constante a_n y c divide al coeficiente principal a_0. Demostración: Sustituyendo x por b/c en la ecuación, resulta

$$a_0\left(\frac{b}{c}\right)^n+a_1\left(\frac{b}{c}\right)^{n-1}+\ldots\ldots+a_{n-1}\left(\frac{b}{c}\right)+a_n=0.$$

Efectuando las potencias indicadas y suprimiendo denominadores se obtiene:

$$a_0b^n+a_1b^{n-1}c+\ldots+a_{n-1}bc^{n-1}+a_nc^n=0$$

lo cual se puede escribir:

$$b(a_0b^{n-1}+a_1b^{n-2}c+\ldots+a_{n-1}c^{n-2})=-a_nc^n$$

En esta última igualdad se observa que b divide al producto a_nc^n; pero b no divide a c^n (pues b y c son primos entre si), luego b divide a a_n. Por otra parte, escribiendo la igualdad en la forma.

$$c(a_1b^{n-1}+a_2cb^{n-2}+\ldots+a_nc^{n-1})=-a_0b^n$$

se observa que c divide al producto a_0b^n; pero c no divide a b^n, entonces c divide a a_0. El Teorema queda así demostrado. Una consecuencia muy importante de este Teorema es el siguiente

COROLARIO :

Toda raíz racional de la ecuación mónica con coeficientes enteros $x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a^n=0$ es una raíz entera y, además, es un divisor del término constante a_n.

EJEMPLO 1:

Hallar todas las raíces racionales de

$$3x^4-x^3+4x^2-20x-16=0$$

RESOLUCIÓN:

Las posibles raíces racionales son:

$\pm 1, \pm 1/3, \pm 2, \pm 2/3, \pm 4, \pm 4/3, \pm 8, \pm 8/3, \pm 16, \pm 16/3$

Probando por divisiones sintéticas abreviadas:

	3	–1	4	–20	–16
1	3	2	6	–14	–30
–1	3	–4	8	–28	12
1/3	3	0	4	–56/3	–200/9
–1/3	3	–2	14/3	–194/9	–238/27
2	3	5	14	8	0

se halla que 2 es una raíz. Puesto que todos los coeficientes de la ecuación $3x^3+5x^2+14x+8=0$ son positivos, tal ecuación no tiene raíces positivas

Probando ahora para raices negativas:

	3	5	14	8
–2	3	–1	16	–24
–2/3	3	3	12	0

se halla así una segunda raíz $-2/3$.

La ecuación reducida

$$3x^2+3x+12=0 \text{ ó } x^2+x+4=0$$

se puede resolver por la fórmula general de solución de una ecuación de 2° grado $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$; siendo, en este caso, $a=1$, $b=1$ y $c=4$; resultan las raíces: $-\dfrac{1}{2}\pm\dfrac{\sqrt{15}}{2}i$ Por lo tanto, las únicas raíces racionales de la ecuación dada son 2 y $-2/3$.

En consecuencia, el conjunto solución de dicha ecuación es: $\left\{2; \dfrac{-2}{3}; -\dfrac{1}{2}\pm\dfrac{\sqrt{15}}{2}i\right\}$

EJEMPLO 2:

Hallar todas las raíces racionales de :

$$x^4+4x^3-8x^2-40x-32=0$$

RESOLUCIÓN:

Las raíces racionales de esta ecuación, si las tuviera, tendrían que ser enteras Las posibles raíces enteras son: $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8, \pm 16, \pm 32$,

que son los divisores de **32**. Probando por divisiones sintéticas:

	1	4	–8	–40	–32
1	1	5	–3	–43	–75
–1	1	3	–11	–29	–3
2	1	6	4	–32	–96
–2	1	2	–12	–16	–0

se obtiene la raíz –2. Continuando la prueba con la ecuación reducida

	1	2	–12	–16
4	1	6	12	32
–4	1	–2	–4	0

se halla la raíz -4. Resolviendo la ecuación reducida $x^2-2x-4=0$, se obtienen las raíces $1\pm\sqrt{5}$ Por lo tanto, las únicas raíces racionales son –2 y -4.

El conjunto solución de la ecuación dada es

$$\{-2;-4;1\pm\sqrt{5}\}$$

NOTAS:

Por simple inspección de los coeficientes de una ecuación con coeficientes reales y en virtud del **Teorema del Residuo, se establecen las siguientes reglas:**

I) Si todos los coeficientes de una ecuación $P(x) = 0$ son reales y positivos, la ecuación no tiene raíces positivas. En efecto, si $a>0$, $P(a)$ tendría todos sus términos positivos y, así, $P(a)>0$.

II) Si una ecuación $P(x) = 0$ tiene todos sus coeficientes reales y alternadamente positivos y negativos, entonces no tiene raíces negativas. En efecto, si $a<0; P(a)$ tendría todos sus términos de igual signo, luego $p(a)\neq 0$.

EJEMPLOS:

1) $2x^4 + 5x^3 + x^2 + 4x + 9 = 0$ no tiene raíces positivas.

2) $x^5- 4x^4+7x^3-2x^2+x-10=0$ no tiene raíces negativas

7) ACOTACIÓN DE RAÍCES :

Una importante cuestión en el estudio de las raíces reales de una ecuación es la acotación de las mismas. El problema consiste en hallar un número real $M>0$ tal que si r es una raíz positiva de $P(x)=0$, debe ser $r\leq M$. En este caso M se denomina **cota superior** de las raíces positivas de $P(x)=0$.

Analogamente, una cota inferior de las raíces negativas de $P(x)=0$ es un número $m<0$ tal que $r\geq m$, para toda raíz negativa r de $P(x)=0$.

Existen varios criterios para determinar las cotas de las raíces reales de una ecuación. En este tratamiento elegimos el criterio más sencillo de aplicar y, además, el que en general proporciona la mejor cota.

Nótese que si M es una cota superior, cualquier número $M'>M$ también es cota superior. Analogamente, si m es cota inferior, cualquier número $m'<m$ también es cota inferior. Antes de estudiar los criterios mencionados se requiere dejar establecido el siguiente.

LEMA:

Si r es raíz de una ecuación $P(x)=0$ con coeficientes reales, $-r$ es raíz de la ecuación $P(-x)=0$.

DEMOSTRACIÓN:

Si r es raíz de $P(x)=0$, se puede escribir $P(x) = (x-r)\,Q(x)$, donde $Q(x)$ es el cociente de la división de $P(x)$ entre $x-r$. Por consiguiente,

$P(-x)=(-x-r)Q(-x) = -(x+r)\,Q(-x)$, de donde se sigue de inmediato que $x=-r$ es raíz de $Q(-x)=0$, como se quería demostrar.

TEOREMA 5 :

Sea $P(x)=0$ una ecuación con coeficientes reales. Si r es un número real positivo, tal que la división de $P(x)$ entre $x-r$ proporciona un cociente con coeficientes no negativos y un residuo no negativo, entonces r es una cota superior de las raíces positivas de $P(x)=0$

DEMOSTRACIÓN:

Sea : $P(x) = a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_n$ con coeficientes reales, y sea r un número real positivo. Supongamos que al efectuar la división sintética por $x-r$ se obtiene:

a_0	a_1	a_2....	a_{n-1}	a_n
	rb_0	rb_1...	rb_{n-2}	rb_{n-1}
$a_0=b_0$	b_1	b_2...	b_{n-1}	$b_n=R$

donde $b_0, b_1, ... b_n-1$ y $R=b_n$ son no negativos.

Luego, el cociente y el residuo de la división son, respectivamente, $Q(x)=b_0x^{n-1}+b_1x^{n-2}+...+b_{n-1}$ y $R=b_n$.

Se puede escribir la igualdad *:*

$P(x) = (x-r)\,Q(x) + R$. Para todo valor $s>r, s-r$ y $Q(s)$ son positivos. Por consiguiente,

$$P(s)=(s-r)\,Q(s)+R$$

es positivo y, así, s no puede ser raíz de $P(x)=0$. Se concluye de aquí que $P(x)=0$ no tiene raíces positivas mayores que r; es decir, que r es una cota superior de las raíces positivas de $P(x)=0$.

TEOREMA 6:

Sea $P(x)=0$ una ecuación con coeficientes reales. Si r es un número real positivo tal que la división de $P(-x)$

entre $x-r$ proporciona un cociente con coeficientes no negativos y un residuo no negativo, entonces $-r$ es una cota inferior de las raíces negativas de $P(x)=0$. La demostración de este Teorema es una aplicación directa del Teorema 5 y del Lema que le precede.

Los dos Teoremas anteriores se traducen en sendos criterios que permiten determinar las cotas superiores e inferiores de las raíces de las ecuaciones con coeficientes reales.

CRITERIO 1:

Si r es un número real positivo tal que al efectuar la división sintética del polinomio $P(x)$ (con coeficientes reales) entre $x-r$, todos los números que aparecen en la 3a. fila son no negativos, r es una cota superior de las raíces positivas de $P(x)=0$.

CRITERIO 2:

Si r es un número real positivo tal que al efectuar la división sintética de $P(-x)$ entre $x-r$, todos los números aparecidos en la 3a. fila son no negativos, $-r$ es una cota inferior de las raíces negativas de $P(x)=0$.

EJEMPLO:

Hallar una cota superior y una cota inferior para las raíces positivas y negativas, respectivamente, de la ecuación: $P(x)=2x^5-7x^4+x^2+2x-9=0$.

RESOLUCIÓN :

Efectuando las divisiones sintéticas entre los primeros enteros positivos:

	2	−7	0	1	2	−9
1	2	−5	−5	−4	−2	−11
2	2	−3	−6	−11	20	−49
3	2	−1	−3	−8	−22	−75
4	2	1	4	17	70	271

se halla que 4 es una cota superior de las raíces positivas de $P(x)=0$.

Probando con $P(-x)=-2x^5-7x^4+x^2-2x-9=0$, es decir, con la ecuación

	2	7	0	−1	2	9
1	2	9	9	8	10	19

hallamos que 1 es cota superior de las raíces positivas de $P(-x)=0$ y, en consecuencia, -1 es cota inferior de las raíces negativas de $P(x)=0$.

EJERCICIOS

(01) Resolver las siguientes ecuaciones dado que tienen las raíces que se indican.

a) $x^3-7x-6=0$, $r=-1$

b) $20x^3-30x^2+12x-1=0$; $r=\frac{1}{2}$

c) $x^4-x^3-9x^2+3x+18=0$; $r=-2;3$

d) $x^3-2(1+i)x^2-(1-2i)x+2(1+2i)=0$; $r=1+2i$

e) $x^4+2x^3-5x^2+6x+2=0$; $r=-2+\sqrt{3}$

f) $3x^4+11x^3-34x^2+46x-12=0$; $r=1/3;-6$

(02) Resolver:

a) $x^3-12x^2+39x-28=0$ si sus raíces están en progresión aritmética.

b) $x^3+3x^2-6x-8=0$ si sus raíces están en progresión geométrica.

c) $x^3-3x^2+kx-12=0$ si el producto de dos raíces es -6. ¿Cuál es el valor de k?

d) $4x^4+2x^3-3x^2+dx+e=0$ si tiene una raíz triple. Hallar d y e.

e) $2x^3-x^2-22x-24=0$ si dos de sus raíces están en razón de $3:4$.

f) $x^3-14x^2+61x-84=0$ si una raíz es la suma de las otras dos.

(03) Hallar todas las raíces enteras y racionales de:

a) $x^3-9x^2+16x-14=0$

b) $2x^3+x^2-2x-6=0$

c) $x^5+3x^4+5x^3+8x^2+6x+4=0$

d) $2x^6+x^5-2x^4-x^3-12x^2-6x=0$

e) $12x^4-20x^3-57x^2+50x+75=0$

f) $8x^4-24x^3+5x^2+52x-15=0$

(04) Determinar una cota superior y una cota inferior para las raíces reales de cada una de las siguientes ecuaciones:

a) $4x^5-8x^4+22x^3+98x^2-73x+5=0$

b) $x^4-8x^3+12x^2+16x-50=0$

c) $x^5-5x^4-13x^3+2x^2+x-70=0$

d) $6x^5+27x^4-100x^3-200x-50=0$

e) $x^4-5x^3+46x^2-8x+28=0$

f) $x^6-6x^4+3x^3-2x+1=0$

(05) Hallar los números reales a y b de modo que $z=1+i$ sea raíz de la ecuación $x^5+ax^3+b=0$

Determinar a tal que $x^3-55x+a=0$ tenga dos raíces mutuamente recíprocas. Hallar tales raíces.

8) SOLUCIÓN DE ECUACIONES

ECUACIONES BINOMIAS

Las ecuaciones binomias son de la forma

$$y^n-A=0, \qquad (1)$$

donde A es una constante no nula.

Si B es una raíz enésima de A, haciendo $Y=Bx$ se

tiene $B^n x^n - A = 0$. Pero, como $B^n = A$, resulta:

$$Ax^n - A = 0$$
$$x^n - 1 = 0.$$

Es decir: $x^n = 1$ ·, Luego, las n raíces de la ecuación *(1)* se obtienen multiplicando cada raíz enésima de la unidad por el valor de B.

Las raíces enésimas de la unidad son de la forma

$$\cos\frac{2k\pi}{n} + i\,\text{sen}\frac{2k\pi}{n},$$

para todo valor $k = 0; 1; 2; \dots ; n-1$. (probarlo) Por la fórmula de De Moivre, las raíces enésimas de la unidad se pueden expresar como potencias $w^k, (k=0;1;2;\dots;n1.)$, de la raíz.

$$w = \cos\frac{2\pi}{n} + i\,\text{sen}\frac{2\pi}{n}$$

Por lo tanto, las raíces de la ecuación binomia *(1)* son:

$B, Bw, Bw^2, \dots, Bw^{n-1}$

EJEMPLO:

Resolver: $X^5 + 32 = 0$

RESOLUCIÓN:

Haciendo $B = (-32)^{1/5} = -2$ y y considerando las 5 raíces quintas de la unidad: $1, w, w^2, w^3, w^4$, con

$$w = \cos\frac{2\pi}{5} + i\,\text{sen}\frac{2\pi}{5}$$

se obtienen las raíces de la ecuación dada, a saber:

$X_1 = B = -2$

$X_2 = Bw = -2(\cos 2\pi/5 + i\,\text{sen}\, 2\pi/5)$

$X_3 = Bw^2 = -2(\cos 4\pi/5 + i\,\text{sen}\, 4\pi/5)$

$X_4 = Bw^3 = -2(\cos 6\pi/5 + i\,\text{sen}\, 6\pi/5)$

$X_5 = Bw^4 = -2(\cos 8\pi/5 + i\,\text{sen}\, 8\pi/5)$

9) SOLUCION ALGEBRAICA DE UNA ECUACION CUBICA :

Sea la ecuación cúbica $x^3 + bx^2 + cx + d = 0$.......*(1)*

Haciendo $x = y - b/3$ se tiene:

$$(y - b/3)^3 + b(y - b/3)^2 + c(y - b/3) + d = 0$$

Efectuando:

$y^3 - by^2 + b^2 y/3 - b^3/27 + by^2 - 2b^2 y/3 + b^3/9 + cy - bc/3 + d = 0$

Reduciendo y ordenando:

$$y^3 + (c - b^2/3)y + 2b^3/27 - bc/3 + d = 0$$

Esta última ecuación se puede escribir en la forma:

$$y^3 + py + q = 0, \dots\dots\dots (2)$$

donde $p = c - b^2/3$ y $q = 2b^3/27 - bc/3 + d$. La ecuación *(2)* recibe el nombre de ecuación cúbica reducida de la ecuación *(1)*

El problema de resolver una ecuación cúbica se convierte así en la solución de la ecuación reducida correspondiente. El método expuesto a continuación recoge básicamente los lineamientos dados por ***F.*** Vieta *(1540 - 1603)*.

Haciendo $y = z - \dfrac{p}{3z}$ ....*(3)*

y sustituyendo en la ecuación *(2)* resulta:

$$\left(z - \frac{p}{3z}\right)^3 + p\left(z - \frac{p}{3z}\right) + q = 0.$$

Efectuando las operaciones indicadas y reduciendo términos semejantes se obtiene: $z^3 - \dfrac{p^3}{27z^3} + q = 0,$

de donde resulta la ecuación cuadrática:

$$z^6 + qz^3 - \frac{p^3}{27} = 0 \dots\dots\dots (4)$$

Resolviendo esta ecuación para z^3, se halla:

$$z^3 = -\frac{q}{2} \pm \frac{\sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}}{2} = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

$$= -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{p}{2}\right)^2}$$

Haciendo $R = \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2$, se puede escribir:

$$z^3 = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{R}$$

Se tienen así dos ecuaciones binomias en z:

$$z^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{R}\ (5) \wedge z^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{R} \dots\dots (6)$$

Si $R\ )o$, las raíces reales de estas ecuaciones son:

$$A = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{R}} \quad y \quad B = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{R}},$$

respectivamente.

Por lo tanto, las raíces de las ecuaciones *(5)* y *(6)* son: A, Aw, Aw^2 y B, Bw, Bw^2, respectivamente, siendo $w = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ raíz cubica de la unida. En consecuencia, las 6 raíces de la ecuación *(4)* son:

$$A, Aw, Aw^2, B, Bw, Bw^2,$$

donde w es la mencionada raíz cúbica de la unidad. (o su conjugado $\overline{w}$, que también es raíz cúbica de la unidad: $\overline{w} = w^2$)

¿Cómo obtener de estas 6 raíces las 3 raíces de la ecuación cúbica reducida *(2)*? a de notarse que se

cumplen las siguientes relaciones:

$$AB=-\frac{p}{3},\quad AwBw^2=-\frac{p}{3},\quad Aw^2Bw=-\frac{p}{3}.$$

Es decir, cada raíz z está asociada de este modo a una raíz $-\frac{p}{3z}$, de tal suerte que $z\left(-\frac{p}{3z}\right)=-\frac{p}{3}$

Además, la suma de tales raíces es , por la relación *(3)*, igual a una raíz de la ecuación cúbica reducida *(2)*. Por consiguiente, las raíces de la ecuación cúbica reducida son:

$$y_1=A+B$$
$$y_2=Aw+Bw^2$$
$$y_3=Aw^2+Bw.$$

Estas expresiones para las raíces de una ecuación cúbica reducida se denominan Fórmulas de Cardano.

Refiere Joseph E. Hofmann en su obra "Historia de la Matemática" que fue el profesor boloñés Scipio del Ferro quien halló un método de solución algebraica de la ecuación cúbica, por el año *1500*, sin publicarlo; posteriormente, en *1545*, G. Cardano publica su propio método que difiere muy poco del de Ferro.

Por la sustitución realizada $x=y-\frac{b}{3}$, se sigue que las soluciones de la ecuación *(1)* son:

$$x_1=y_1-\frac{b}{3}=A+B-\frac{b}{3}$$
$$x_2=y_2-\frac{b}{3}=Aw+Bw^2-\frac{b}{3}$$
$$x_3=y_3-\frac{b}{3}=Aw^2+Bw-\frac{b}{3}$$

EJEMPLO 1:

Resolver la ecuación $x^3-6x+6=0$.

RESOLUCIÓN:

En este caso $p=-6$ y $q=6$.

Luego, $R=\left(\frac{p}{3}\right)^3+\left(\frac{q}{2}\right)^2=-8+9=1.$

Entonces, $A=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{R}}=\sqrt[3]{-3+1}=-\sqrt[3]{2}$ y

$$B=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{R}}=\sqrt[3]{-3-1}=-\sqrt[3]{4}$$

Por tanto:

$$y_1=A+B=-\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{4}$$

$$y_2=Aw+Bw^2=-\sqrt[3]{2}\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)-\sqrt[3]{4}\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$
$$=\frac{1}{2}(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4})-\frac{1}{2}(\sqrt[6]{108}-\sqrt[6]{432})i$$

$$y_3=Aw^2+Bw=-\sqrt[3]{2}\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)-\sqrt[3]{4}\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$
$$=\frac{1}{2}(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4})+\frac{1}{2}(\sqrt[6]{108}-\sqrt[6]{432})i$$

EJEMPLO 2:

Resolver : $x^3+3x^2-15x-47=0.$

RESOLUCIÓN:

Haciendo $x=y-\frac{b}{3}=y-1$ y sustituyendo en la ecuación dada, se obtiene la ecuación cúbica reducida:

$(y-1)^3+3(y-1)^2-15(y-1)-47=0$ Efectuando y reduciendo términos: $y^3-18y-30=0.$

Aquí, $p=-18$ y $q=-30$, entonces

Por tanto: $R=\left(\frac{p}{3}\right)^3+\left(\frac{q}{2}\right)^2=-216+225=9$

$$A=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{R}}=\sqrt[3]{15+3}=\sqrt[3]{18}\ ;$$

$$B=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{R}}=\sqrt[3]{15-3}=\sqrt[3]{12}\ ;$$

y las raíces de la ecuación cúbica reducida son:

$$y_1=A+B=\sqrt[3]{18}+\sqrt[3]{12}$$
$$y_2=Aw+Bw^2=\sqrt[3]{18}\,w+\sqrt[3]{12}\,w^2$$
$$y_3=Aw^2+Bw=\sqrt[3]{18}\,w^2+\sqrt[3]{12}\,w,$$

donde $w=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$, raíz cúbica de la unidad.

Finalmente, las soluciones de la ecuación cúbica dada son:

$$x_1=y_1-\frac{b}{3}=y_1-1=\sqrt[3]{18}+\sqrt[3]{12}-1$$
$$x_2=y_2-\frac{b}{3}=y_2-1=\sqrt[3]{18}w+\sqrt[3]{12}w^2-1$$
$$x_3=y_3-\frac{b}{3}=y_3-1=\sqrt[3]{18}w^2+\sqrt[3]{12}w-1$$

10) CASO IRREDUCIBLE SOLUCIÓN TRIGONOMÉTRICA

El caso en que $R<0$ se denomina **caso irreducible**, debido a que cualquier intento por resolverlo mediante radicales resulta infructuoso. En este caso, $p<0$ y las soluciones de las igualdades *(5)* y *(6)* son las raíces cúbicas de los números complejos:

$$A=-\frac{q}{2}+i\sqrt{-R}\ \wedge\ B=-\frac{q}{2}-i\sqrt{-R}.$$

Para hallar dichas raíces cúbicas, se debe expresar A y B en sus formas trigonométricas. Con este fin se calcula el módulo r y el argumento θ de A:

$$r=\sqrt{\left(-\frac{q}{2}\right)2+(-R)}=\sqrt{\left(-\frac{q}{2}\right)^2-\left(\frac{p}{3}\right)^3-\left(\frac{q}{2}\right)^2}=\left(-\frac{p}{3}\right)^{3/2}$$

y $tg\,\theta=\frac{\sqrt{-R}}{-\frac{q}{2}}=\frac{-2\sqrt{-R}}{q}$, con θ en el primer cuadrante si $q<0$ ó en el segundo cuadrante si $q>0$.

por consiguiente : $A=\left(-\frac{p}{3}\right)^{3/2}(\cos\theta+i\ sen\ \theta)$

Analogamente se halla : $B=\left(-\frac{p}{3}\right)^{3/2}(\cos\theta-i\ sen\ \theta)$.

Tomando las raíces cúbicas : $\sqrt[3]{A}=\sqrt{-\frac{p}{3}}\left(\cos\frac{\theta}{3}+i sen\frac{\theta}{3}\right)$

y $\sqrt[3]{B}=\sqrt{-\frac{p}{3}}\left(\cos\frac{\theta}{3}-i sen\frac{\theta}{3}\right)$, tal que $\sqrt[3]{A}\ \sqrt[3]{B}=-\frac{p}{3}$, se obtienen las raíces: $y_1=\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B}$

$$y_2=\sqrt[3]{A}w+\sqrt[3]{B}w^2$$
$$y_3=\sqrt[3]{A}w^2+\sqrt[3]{B}w,$$

con $w=\cos\frac{2\pi}{3}+i sen\frac{2\pi}{3}$

Es decir:
$$y_1=2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\frac{\theta}{3}$$
$$y_2=2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\left(\frac{\theta}{3}+\frac{2\pi}{3}\right)$$
$$y_3=2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\left(\frac{\theta}{3}+\frac{4\pi}{3}\right).$$

EJEMPLO:

Resolver la ecuación : $x^3-3x+1=0$.

RESOLUCIÓN.

Para esta ecuación se tiene $p=-3, q=1$ y $R=-\frac{3}{4}<0$.

Por lo tanto : $\sqrt{-\frac{p}{3}}=1 \wedge \theta=arc\ tg\left(\frac{2-\sqrt{-R}}{q}\right)=arc\ tg(-\sqrt{3})$

En consecuencia , $\theta=\frac{2\pi}{3}$ y las raíces son:

$y_1=2\cos\frac{2\pi}{9}=1{,}5320888$

$y_2=2\cos\left(\frac{2\pi}{9}+=\frac{2\pi}{3}\right)=2\cos\frac{8\pi}{9}=-1{,}8793852$

$y_3=2\cos\left(\frac{2\pi}{9}+=\frac{4\pi}{3}\right)=2\cos\frac{14\pi}{9}=-0{,}3472963$,

aproximadamente.

11) SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN CUÁRTICA :

El método de solución de una ecuación cuártica se debe a *L.* Ferrari , discípulo de Cardano , quien lo publica en *1545* en la misma obra en que Cardamo publicó sus fórmulas de solución de la ecuación cúbica. "Ars Magna".

Sea la ecuación de cuarto grado:

$x^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$..(1)

Transponiendo los *3* últimos términos:

$$x^4+bx^3=-cx^2-dx-e$$

y completando cuadrados en el primer miembro de la igualdad: $x^4+bx^3+\frac{b^2x^2}{4}=\frac{b^2x^2}{4}-cx^2-dx-e$.

Esta última igualdad se puede escribir:

$$\left(x^2+\frac{bx}{2}\right)^2=\left(\frac{b^2}{4}-c\right)x^2-dx-e.$$

Sumando $\left(x^2+\frac{bx}{2}\right)y+\frac{y^2}{4}$ en ambos miembros , se obtiene la expresión:

$$\left(x^2+\frac{bx}{2}+\frac{y}{2}\right)^2=\left(\frac{b^2}{4}-c+y\right)x^2+\left(\frac{by}{2}-d\right)x+\frac{y^2}{4}-e \text{....(2)}$$

Se sabe que una ecuación de 2° grado se puede escribir como un trinomio cuadrado perfecto si , y sólo si su discriminante es cero. Por consiguiente , el segundo miembro de la igualdad *(2)* será cuadrado perfecto de un polinomio lineal en x si , y sólo si se cumple la condición. $\left(\frac{by}{2}-d\right)^2-4\left(\frac{b^2}{4}-c+y\right)\left(\frac{y^2}{4}-e\right)=0.$

Efectuando las operaciones indicadas resulta:

$$\frac{b^2y^2}{2}-bdy+d^2-\frac{b^2y^2}{4}+b^2e+cy^2-4ce-y^3+4ey=0;$$

reduciendo y ordenando como un polinomio en y , se obtiene: $y^3-cy^2+(bd-4e)y+4ce-b^2e-d^2=0$, ***LLAMADA ECUACIÓN CÚBICA RESOLVENTE*** de la ecuación cuártica *(1)*. Cualquier raíz y_1 de esta ecuación permitirá representar el 2° miembro de la igualdad *(2)* como el cuadrado perfecto de un polinomio lineal en x. Sea $mx+n$ dicho polinomio ; entonces se puede escribir: $\left(x^2+\frac{bx}{2}+\frac{y_1}{2}\right)^2=(mx+n)^2$.

Extrayendo raíces cuadradas , se obtienen las ecuaciones de segundo grado:

$$x^2+\frac{bx}{2}+\frac{y_1}{2}=mx+n\ ,\ x^2+\frac{bx}{2}+\frac{y_1}{2}=-mx-n,$$

cuyas raíces serán las *4* raíces de la ecuación *(1)*.

EJEMPLO 1:

Resolver la ecuación :

$$x^4+3x^3-2x^2-10x-12=0.$$

RESOLUCIÓN :

Siguiendo el método de Ferrari , despejamos los *3* últimos términos: $x^4+3x^3=2x^2+10x+12$.

Completando cuadrados en el primer miembro de la igualdad ; $x^4+3x^3+\frac{9x^2}{4}=\frac{9x^2}{4}+2x^2+10x+12$.

Factorizando y simplificando resulta:

$$\left(x^2+\frac{3x}{2}\right)^2=\frac{17}{4}x^2+10x+12.$$

Sumando $\left(x^2+\frac{3x}{2}\right)y+\frac{y^2}{4}$ en ambos miembros:

$$\left(x^2+\frac{3x}{2}\right)^2+\left(x^2+\frac{3x}{2}\right)y+\frac{y^2}{4}=\left(x^2+\frac{3x}{2}\right)y+\frac{y^2}{4}+\frac{17}{4}x^2+10x+12$$

Factorizando y simplificando ,

$$\left(x^2+\frac{3x}{2}+\frac{y}{2}\right)^2=\left(y+\frac{17}{4}\right)x^2+\left(\frac{3y}{2}+10\right)x+\frac{y^2}{4}+12....(1)$$

Igualando a cero el discriminante del 2° miembro.

$$\left(\frac{3y}{2}+10\right)2-4\left(y+\frac{17}{4}\right)\left(\frac{y^2}{4}+12\right)=0.$$

Efectuando y simplificando se halla la ecuación cúbica resolvente. $y^3+2y^2+18y+104=0.$

Para la raíz $y_1=-4$ de esta ecuación la igualdad *(1)* se convierte en:

$$\left(x^2+\frac{3x}{2}-2\right)2=\frac{x^2}{4}+4x+16=\left(\frac{x}{2}+4\right)^2.$$

De aquí se obtienen las ecuaciones cuadráticas:

$$x^2+\frac{3x}{2}-2=\frac{x}{2}+4 \quad , \quad x^2+\frac{3x}{2}-2=-\frac{x}{2}-4,$$

es decir: $x^2+x-6=0$, $x^2+2x+2=0.$

cuyas raíces $2;-3$ y $-1\pm i$ son las 4 raíces de la ecuación cuártica dada.

En este ejemplo , la ecuación cuártica tiene raíces racionales. En general es conveniente antes de aplicar el método de Ferrari verificar la existencia de tales raíces , lo cual reduciría el problema a la solución de la ecuación reducida correspondiente.

EJEMPLO 2 :

Resolver : $x^4-11x^2-6x+10=0$

RESOLUCIÓN:

Por el método de Ferrari: $x^4=11x^2+6x-10.$

Sumando $x^2y+\frac{y^2}{4}$ en ambos miembros:

$$x^4+x^2y+\frac{y^2}{4}=x^2y+\frac{y^2}{4}+11x^2+6x-10;$$

simplificando ,

$$\left(x^2+\frac{y}{2}\right)^2=(y+11)x^2+6x+\frac{y^2}{4}-10...(1)$$

Anulando el discriminante del 2° miembro:

$$36-4(y+11)\left(\frac{y^2}{4}-10\right)=0.$$

Obtenemos así la ecuación cúbica resolvente:

$$y^3+11y^2-40y-476=0.$$

Una raíz de esta ecuación es $y=-7$. Sustituyendo en *(1)* resulta: $\left(x^2-\frac{7}{2}\right)^2=4x^2+6x+\frac{9}{4}=\left(2x+\frac{3}{2}\right)^2$

de donde se obtienen las ecuaciones:

$$x^2-\frac{7}{2}=2x+\frac{3}{2} \quad , \quad x^2-\frac{7}{2}=-2x-\frac{3}{2},$$

o sea, $x^2-2x-5=0$, $x^2+2x-2=0,$

cuyas respectivas raíces $1\pm\sqrt{6}$; $-1\pm\sqrt{3}$

son , a su vez , raíces de la ecuación cuártica.

EJERCICIOS:

01 Resolver las siguientes ecuaciones binomias:

a) $x^4+1=0.$
b) $x^6-9=0.$
c) $x^7-1=0.$
d) $x^6+i=0.$
e) $x^6+64=0.$
f) $x^5-8=0.$
g) $x^3+2i=0.$
h) $x^4=1+i.$

02 Resolver las siguientes ecuaciones cúbicas:

a) $x^3-12-20=0$
b) $x^3+3x+1=0$
c) $2x^3-6x-5=0$
d) $x^3-9x-12=0$
e) $x^3+30x+15=0$
f) $2x^3-3x+5=0$
g) $x^3+6x^2+6x-10=0$
h) $3x^3-6x^2-2=0$
i) $x^3+6x^2-36=0$
j) $x^3-3x^2-18x-36=0$

03 Resolver :

a) $x^3-5x-1=0$
b) $x^3+x^2-2x-1=0$
c) $x^3-9x+9=0$
d) $x^3+3x^2-3x-4=0$
e) $x^3-6x+2=0$
f) $x^3+x^2-4x+1=0$

04 Resolver las siguientes ecuaciones cuárticas:

a) $x^4-4x^2+x+2=0$
b) $x^4+x^3-5x^2+2=0$
c) $x^4+6x^3+8x^2+8x-16=0$
d) $x^4+2x^3-8x^2-6x-1=0$
e) $x^4-x^2+10x-4=0$
f) $x^4-37x^2+18x-2=0$
g) $x^4+9x^2+14x+30=0$
h) $x^4-2x^3+3x^2-2x+2=0$
i) $x^4+x^3+5x^2+5x+12=0$
j) $x^4-24x^2+84x-13=0$

12) GRÁFICA DE POLINOMIOS :

Se sabe que un polinomio es una función continua (sin "interrupciones"). La determinación de las coordenadas de los puntos de la gráfica de un polinomio se realiza dando valores reales a la variable x y calculando los correspondientes valores $P(x)$; la gráfica del polinomio $P(x)$ es , pues , el conjunto de puntos: $\{(x;P(x)) : x\in R)\}$ Sin embargo , existen algunos criterios que permiten determinar aproximadamente

la gráfica de un polinomio, liberando así de la tediosa tarea de tabular los puntos $(x;P(x))$.

En primer lugar, los puntos de la gráfica que corresponden a los ceros reales de un polinomio están sobre el eje X y son de la forma $(x;0)$.

1) Si $x = a$ es una raíz real simple de la ecuación $P(x) = 0$, la gráfica de $P(x)$ corta al eje X en el punto $(a;0)$. (Fig. 1).

2) Si $x=a$ es una raíz real de multiplicidad m par, la gráfica de $P(x)$ es tangente al eje X en el punto $(a;0)$. (Fig.2).

3) Si $x=a$ es una raíz real de multplicidad m impar, la gráfica de $P(x)$ es tangente y corta al eje X en el punto $(a;0)$. (Fig.3).

(En este caso se dice que $(a;0)$ es un punto de inflexión de la gráfica de $P(x)$).

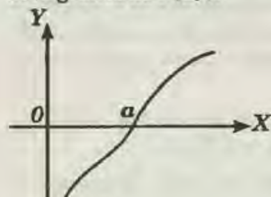


Fig. 1

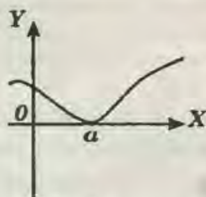


Fig. 2

La propiedad *(1)* se sigue del análisis de la expresión:

$$P(x) = (x-a)\,Q(x)$$

Para x ligeramente menor que a, $x-a<0$, luego $P(x)$ tiene signo contrario a $Q(x)$; para x ligeramente mayor que a, $x-a>0$, entonces $P(x)$ tiene el signo de $Q(x)$. Es decir, $P(x)$ cambia de signo cuando x "pasa" por a y, por lo tanto, la gráfica de $P(x)$ corta al eje X en $(a,0)$.

La propiedad *(2)* se deduce de la expresión:

$$P(x)=(x-a)^m\,Q(x),$$

siendo m par. Si x es ligeramente menor o mayor que a, $(x-a)^m > 0$, luego $P(x)$ tiene igual signo que $Q(x)$. Es decir, $P(x)$ no cambia de signo cuando x "pasa" por a, de lo cual se puede afirmar que la gráfica de $P(x)$ no corta al eje X: así, $(a;0)$ es un punto de tangencia de $P(x)$ con el eje X.

Finalmente, si $P(x) = (x-a)^m\,Q(x)$,

siendo m impar, se sigue que $(x-a)^m<0$, para x ligeramente menor que a: y $(x-a)^m>0$, para x ligeramente mayor que a. Por consiguiente, $P(x)$ cambia de signo cuando x "pasa por a", y entonces la gráfica de $P(x)$ corta al eje X en el punto $(a;0)$.

En cálculo diferencial se prueba que, en este caso, la gráfica de $P(x)$ es además tangente al eje X en $(a;0)$; es decir, $(a;0)$ es un punto de inflexión de la gráfica de $P(x)$.

Un punto importante en la gráfica de $P(x)$ es $(0;P(0))$; esto es, el punto de intersección con el eje Y. Nótese que $P(0)$ es el término constante del polinomio $P(x)$.

Se pueden determinar, además, los intervalos en los cuales se encuentran las raíces reales de una ecuación $P(x) = 0$, usando la siguiente regla.

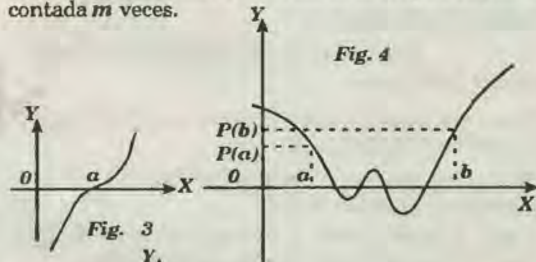
REGLA:

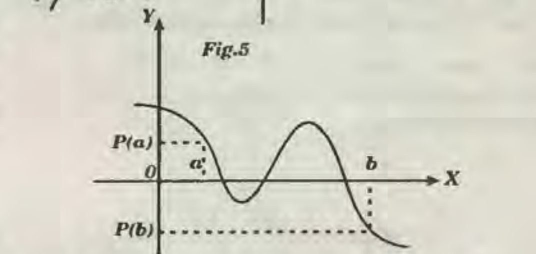
Sean a y b son dos enteros consecutivos, con $a < b$.

Si $P(a)$ y $P(b)$ son de signos iguales, entre a y b existe un número par de raíces reales, o ninguna raíz real de $P(x) = 0$.

(Fig.4). Si $P(a)$ y $P(b)$ son de signos contrarios, entre a y b existe un número impar de raíces reales de $P(x) = 0$.

(Fig.5). En cada caso, una raíz de multiplicidad m es contada m veces.





13) SIGNO DE UN POLINOMIO :

Si $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_n$ con $a_0 \neq 0$, es un polinomio con coeficientes reales, para valores de x suficientemente grandes en valor absoluto $P(x)$ tiene el mismo signo que a_0x^n.

Intuitivamente se ve que, para x suficientemente grande en valor absoluto, a_0x^n será numericamente mayor que la suma de los demás términos y, por consiguiente, su signo prevalecerá sobre el signo de dicha suma. Una consecuencia de la afirmación anterior es que toda ecuación con coeficientes reales de grado impar tiene, por lo menos, una raíz real de signo opuesto al término constante. (El coeficiente

principal se considera positivo). En efecto, si $P(x) = a_0x^n + a_1 x^{n-1} + ... + a_n = 0$ es una ecuación con coeficientes reales, siendo n impar, por teoría de límites: $P(-\infty) = -\infty, P(0) = a_n \wedge P(+\infty) = +\infty$

de lo cual se sigue que si $a_n > 0$, $P(x) = 0$ tiene una raíz negativa en el intervalo $<-\infty;0>$; y si $a_n < 0$, $P(x) = 0$ tiene una raíz. positiva en el intervalo $\langle 0;+\infty \rangle$. También se cumple que toda ecuación con coeficientes reales de grado par, cuyo término constante es negativo, tiene al menos una raíz negativa y al menos una raíz positiva.

Ciertamente, si $P(x) = a_0x^n + a_1 x^{n-1} + ... + a_n = 0$ tiene coeficientes reales, siendo n par y $a_n < 0$:

$$P(-\infty) = +\infty; P(0) = a_n < 0 \wedge P(+\infty) = +\infty$$

Luego existe al menos una raíz negativa en $\langle -\infty;0 \rangle$, y al menos una raíz positiva en. $\langle 0;+\infty \rangle$.

EJEMPLO 1:

Graficar el polinomio :

$$P(x) = (x-1)^3 (x+3)^2 (x^2 - 2x + 2)$$

RESOLUCIÓN:

La ecuación tiene las raíces enteras 1 de multiplicidad 3, y -3 de multiplicidad 2.

Las raíces de la ecuación reducida $x^2 - 2x + 2 = 0$, son complejas conjugadas: $1 \pm i$.

Luego, la gráfica corta y es tangente al eje X en el punto $(1;0)$ y, además, es tangente en $(-3;0)$.

De otro lado, $P(-\infty) = -\infty, P(0) = -18$ y $P(+\infty) = +\infty$ Entonces, la gráfica de $P(x)$ es, aproximadamente:

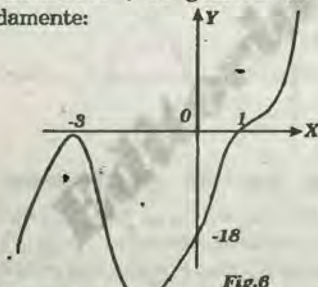


Fig.6

EJEMPLO 2 :

Discutir la gráfica del polinomio:

$$P(x) = x^5 - 2x^3 + x^2 - 7x + 4$$

RESOLUCIÓN:

Se tiene, de un lado, que :

$$P(-\infty) = -\infty\ ,\ P(0) = 4 \wedge P(+\infty) = +\infty$$

Luego, la curva "viene" debajo del eje X y se "aleja" sobre el eje X. Probando para raíces positivas.

	1	0	−2	1	−7	4
1	1	1	−1	0	−7	−3
2	1	2	2	5	3	10

Se observa que los coeficientes obtenidos en la división sintética por 2, son todos positivos ; luego, 2 es una cota superior de las raíces positivas de $P(x) = 0$.

Además, puesto que $P(0) = 4$, $P(1) = -3$ y $P(2) = 10$, existe una raíz en el intevalo $(0;1)$ y una raíz en el intervalo $(1;2)$ (al menos una).

Probando para raíces positivas:

	1	0	−2	1	−7	4
−1	1	−1	−1	2	−9	13
−2	1	−2	2	−3	−1	6
−3	1	−3	7	−20	53	−155

Los coeficientes alternadamente positivos y negativos obtenidos en la división sintética por -3, indican que -3 es una cota inferior para las raíces negativas de $P(x) = 0$.

Además, como $P(-2) = 6$ y $P(-3) = -155$, existe al menos una raíz en el intervalo $(-2;-3)$.

La gráfica aproximada de $P(x)$ es una de las siguientes: (La única certeza con la cual podemos contar es que existe una sola raíz negativa ; este hecho resulta de la aplicación de la Regla de Descartes, explicada en el párrafo que viene).

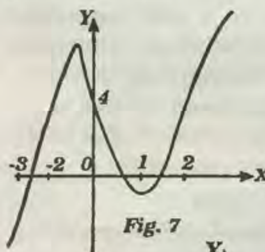


Fig. 7

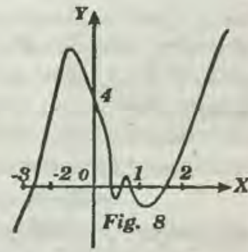


Fig. 8

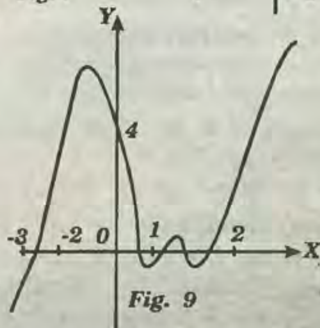


Fig. 9

La aplicación de las propiedades geométricas de la derivada $P'(x)$ del polinomio $P(x)$ permite determinar

con precisión la gráfica de $P(x)$.

NÚMERO DE RAÍCES REALES DE UNA ECUACIÓN

El número de raíces reales de una ecuación con coeficientes reales puede ser determinado usando el siguiente criterio, llamado:

REGLA DE LOS SIGNOS DE DESCARTES

Si $P(x)=0$ es una ecuación con coeficientes reales, con término constante no nulo:

01 El número de raíces positivas de $P(x)=0$ es igual al número de variaciones de signo de sus coeficientes, o menor que él en un número par.

02 El número de raíces negativas de $P(x)=0$ es igual al número de variaciones de signo de $P(-x)$, o menor que él en un número par. Esta última afirmación obedece al hecho que las raíces positivas de $P(-x) = 0$ son las raíces negativas de $P(x) = 0$.

Los términos nulos no se consideran en la determinación de las variaciones de signos de los coeficientes de $P(x) = 0$ Para una demostración de la Regla de Descartes, consultar la obra de L.E. Dickson: *"New First Course in the Theory of Equations"*.

EJEMPLO:

Determinar el número de raíces positivas, negativas y complejas de la ecuación $P(x) = x^5 + 3x^4 - x^2 + 2x - 3$

RESOLUCIÓN :

$P(x)$ presenta 3 variaciones de signo en sus coeficientes, luego hay 3 raíces positivas o 1, de

$$P(x)= 0. \quad P(-x) = -x^5 + 3x^4 - x^2 - 2x - 3$$

presenta 2 variaciones de signo en sus coeficientes, entonces hay 2 raíces negativas de $P(x) = 0$.

Combinando todas las posibilidades, se puede construir la siguiente tabla. (incluyendo el número de raíces complejas).

+	–	c
1	0	4
1	2	2
3	0	2
3	2	0

De otro lado, probando por división sintética para raíces positivas, se tiene:

	1	3	0	–1	2	–3
1	1	4	4	3	5	2

Puesto que $P(0) = -3$ y $P(1) = 2$., entonces existe un número impar de raíces positivas en el intervalo $(0;1)$. Observando los coeficientes obtenidos en la división sintética por 1, se puede afirmar que 1 es una cota superior de las raíces positivas de $P(x) = 0$ y, por lo tanto, no hay más raíces positivas aparte de las que están en $(0;1)$. Probando para raíces negativas:

	1	3	0	–1	2	–3
–1	1	2	–2	1	1	–4
–2	1	2	–2	3	–4	5
–3	1	0	0	–1	5	–18

Se tiene que $P(-1) = -4$, $P(-2) = 5$ y $P(-3) = -18$. Luego, hay un número impar de raíces negativas en el intervalo $(-2;-1)$, y también en el intervalo $(-3;-2)$ (¡Una en cada uno!).

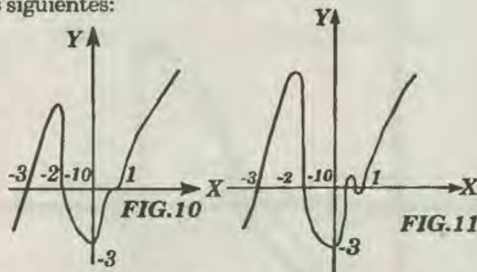
Además, puesto que los coeficientes obtenidos en la división sintética por -3 son alternadamente positivos y negativos, se sigue que -3 es una cota inferior de las raíces negativas de $P(x) = 0$.

(Nótese que los coeficientes 0 se pueden considerar positivos o negativos, según convenga el caso).

De esta forma se reduce la tabla a las siguientes posibilidades:

+	–	c
1	2	2
3	2	0

Por lo anterior se puede afirmar que la gráfica aproximada de $P(x)$ es una de las siguientes:



Por métodos del cálculo diferencial , se puede determinar con precisión si la raíz en $(0;1)$ es una raíz triple, y, por consiguiente, si el punto correspondiente en que la gráfica corta al eje X es punto de inflexión.

EJERCICIOS

01 Determinar el número de raíces positivas, negativas y complejas de cada ecuación y discutir la gráfica del polinomio correspondiente.

a) $3x^3 + 9x^2 - 7x + 4 = 0$

b) $x^4 + 12x^2 + 5x - 9 = 0$

c) $x^5 + x^3 - 2x^2 + x - 2 = 0$

d) $x^3 - 8x^2 - 9 = 0$

e) $2x^3 - 5x^2 + 2x + 6 = 0$

f) $x^4 - 10x^3 + x^2 + 6x + 11 = 0.$

g) $3x^4 - 4x^3 - 7x^2 - 18x - 22 = 0.$

h) $x^5 + x^4 - x + 12 = 0.$

i) $x^5 - 2 = 0.$ j) $x^7 + 2x^5 - 3x^4 + 8x^3 - 9x = 0$

RAÍCES IRRACIONALES MÉTODOS DE APROXIMACIÓN

Aislar una raíz real de $P(x) = 0$, significa hallar un intervalo $(a;b)$ que la contiene y que no contiene a otra raíz de $P(x) = 0$.

Existen varios procedimientos para determinar, una vez aislada, una raíz irracional por aproximación.

Aquí, se estudian básicamente dos de tales métodos: la interpolación lineal y el método de Horner.

A) INTERPOLACIÓN LINEAL:

Sea r una raíz irracional de $P(x) = 0$ aislada en un intervalo $(a;b)$. Supóngase que $P(a)=h<0 \wedge P(b)=k>0$, de manera que los puntos $P(a;h)$ y $Q(b;k)$ pertenecen a la gráfica de $P(x)$.

Puesto que entre a y b se encuentra la raíz r, el punto C de abcisa x_1, en que el segmento PQ corta el eje X, estará relativamente próximo al punto de abcisa r, en que la gráfica de $P(x)$ corta al eje X.

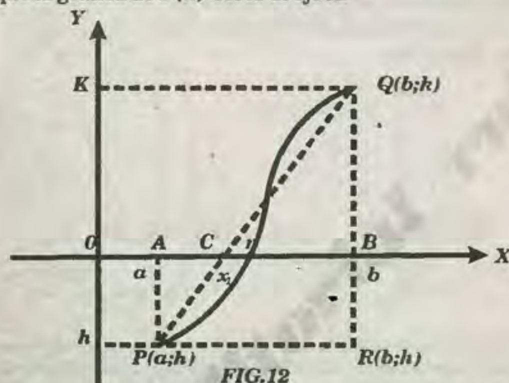


FIG.12

El valor de la abcisa X_1 de este punto es, así, una primera aproximación a la raíz r, y se determina usando las relaciones de semejanza de los lados de los triángulos CBQ y PRQ; tal como: $\frac{CB}{PR} = \frac{BQ}{RQ}$ Pero, $PR = b-a; BQ = k; RQ = k-h$ y Entonces, sustituyendo: $\frac{CB}{b-a} = \frac{k}{k-h}$ de donde se tiene:

$CB = \frac{k(b-a)}{k-h}$. Calculando de este modo el valor del segmento $\overline{CB}$, se resta de b y se obtiene la abcisa del punto C; es decir, x_1.

Si $f(x_1) = h_1 < 0$ y existe un número s_1 muy próximo a x_1, tal que $P(s_1) = k_1 > 0$, entonces la raíz r se encuentra en el intervalo $(x_1; s_1)$; se puede repetir el proceso de interpolación lineal para obtener una segunda aproximación x_2 de r.

Cuanto más veces se repita este proceso, tanto mayor será la aproximación obtenida.

EJEMPLO 1:

Sea la ecuación: $P(x) = x^3 + 2x^2 - 3x - 4 = 0.$

Por la Regla de los signos de Descartes, se sabe que la ecuación tiene una sola raíz positiva. Por división sintética se halla que $P(1)=-4$ y $P(2)=6$. De esta manera queda aislada la raíz positiva en intervalo $(1;2)$.

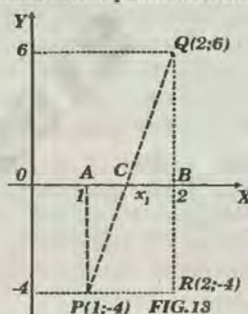


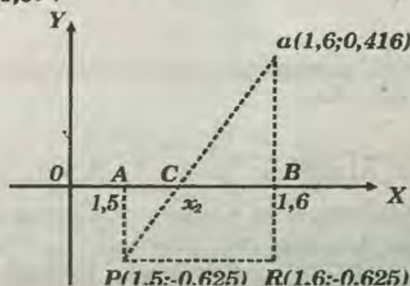
FIG.13

En la figura (Por comodidad se ha forzado un poco la gráfica), se puede apreciar que los triángulos CBQ y PRQ son semejantes, entonces resulta: $\frac{CB}{PR} = \frac{BQ}{RQ}$

Pero $PR=2-1=1, BQ=6 \wedge RQ=6+4=10$.
Reemplazando estos valores resulta de donde se obtiene: $CB=0,6$

Por consiguiente, una primera aproximación es $x_1 = 2-0,6 = 1,4$. Repitiendo el proceso, hallamos por división sintética que $P(1,4) = -1,536$, $P(1,5) = -0,625$, $P(1,6) = 0,416$

Entonces, la raíz r se encuentra en el intervalo $<1,5;1,6>$.



En el gráfico se tiene : $\frac{CB}{0,1}=\frac{0,416}{0,416+0,625}=\frac{0,416}{1,041}$

luego : $CB=\frac{0,0416}{1,041}=0,03$

Por lo tanto, una segunda aproximación de la raíz r es: $x_2=1,6-0,03=1,57$

Así , se puede obtener una aproximación cada vez mayor conforme repitamos este proceso.

EJEMPLO 2:

Calcular una raíz positiva de $P(x)=x^3-5x^2+x+4$

con dos decimales de aproximación.

RESOLUCIÓN:

$P(x)=0$ tiene una raíz positiva en $(1;2)$ y otra en $(4;5)$.

Calculando por interpolación lineal la raíz positiva de $(1;2)$:

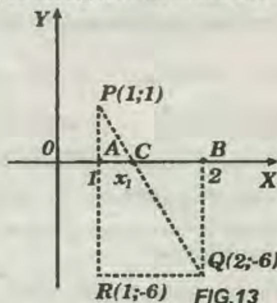


FIG.13

$$P(1)=1 \quad , \quad P(2)=-6$$

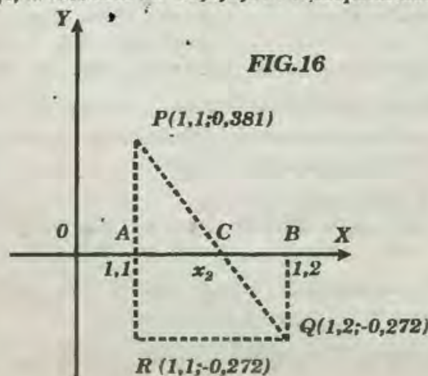
* En la figura: $\frac{AC}{RQ}=\frac{AP}{RP}$

* Es decir : $\frac{AC}{1}=\frac{1}{7}$ * luego: $AC=\frac{1}{7}=0,1...$

Una primera aproximación es : $x_1=1+0,1=1,1$

Evaluando, por división sintética, se halla que $P(1,1)=0,381$, $P(1,2)=-0,272$

Luego, la raíz está en $<1,1;1,2>$. Interpolando:



$$\frac{AC}{0,1}=\frac{0,381}{0,381+0,272}=\frac{0,381}{0,653}$$

de donde :

$$\overline{AC}=\frac{0,0381}{0,653}=0,05...$$

Así, una segunda aproximación a la raíz es

$$x_2=1,1+0,05=1,15.$$

Por consiguiente, la raíz aproximada a dos decimales de $P(x)=0$, en el intervalo $(1;2)$, es $r=1,15$.

La interpolación lineal se usa, en general, para ecuaciones reales de cualquier tipo, en una variable.

B) MÉTODO DE HORNER :

El método de Horner se aplica solamente para ecuaciones polinómicas (algebraicas) con coeficientes racionales.

Este método se ilustrará con los siguientes ejemplos:

EJEMPLO 1:

Hallar una raíz real de : $P(x)=x^3+8x-160=0$, con dos decimales de aproximación.

RESOLUCIÓN:

La única raíz de $P(x)=0$ se encuentra en el intervalo $(4;5)$, puesto que $P(4)=-64$ y $P(5)=5$.

Entonces, tal raíz debe ser de la forma : $x=4+\frac{a}{10}$,

donde a es un número comprendido entre 0 y 10

Luego : $x-4=\frac{a}{10}$, Expresando $P(x)$ en potencias de $x-4$, por el proceso de Horner *(IV, 8)*:

1	0	8	−160	4
	4	16	96	
1	4	24	−64	
	4	32		
1	8	56		
	4			
1	12			

$$P(x)=-64+56(x-4)+12(x-4)^2+(x-4)^3$$

Sustituyendo $x-4=\frac{a}{10}$, se puede escribir

$$P\left(4+\frac{a}{10}\right)=-64+56\left(\frac{a}{10}\right)+12\left(\frac{a}{10}\right)^2+\left(\frac{a}{10}\right)^3$$

De donde se obtiene una ecuación en a, tal como:

$$P_1(a)=a^3+120a^2+5600a-6400=0$$

Ciertamente, $\frac{a}{10}$ está entre 0 y 1; luego, para obtener un decimal de aproximación de la raíz x, basta hallar la parte entera de a. Por división sintética, se obtiene

que: $9 < a < 10$; entonces, se puede escribir: $a=9+\frac{b}{10}$

donde b está entre 0 y 10. Puesto que $a-9=\frac{b}{10}$, expresamos $P_1(a)$ en potencias de $a-9$, usando nuevamente el proceso de Horner:

1	120	5600	-64000	9
	9	1161	60849	
1	129	6761	-3151	
	9	1242		
1	138	8003		
	9			
1	147			

Luego: $P_1(a)=-3151+8003(a-9)+147(a-9)^2+(a-9)^3$;

sustituyendo $a=9+\frac{b}{10}$:

$$P_1(9+\frac{b}{10})=-3151+8003(\frac{b}{10})+147(\frac{b}{10})^2+(\frac{b}{10})^3$$

Lo cual da origen a la ecuación:

$$P_2(b)=b^3+1470b^2+800300b-3151000=0$$

Por división sintética se halla que b está entre 3 y 4.

Por consiguiente, $b=3+\frac{c}{10}$

Luego: $x=4+\frac{a}{10}=4+\frac{1}{10}(9+\frac{b}{10})=4+\frac{1}{10}\left[9+\frac{1}{10}(3+\frac{c}{10})\right]$

Es decir: $x=4+\frac{9}{10}+\frac{3}{100}+\frac{c}{1000}$ En consecuencia, $x=4{,}93$ es una raíz aproximada de $P(x)=0$.

EJEMPLO 2:

Calcular por el método de Horner $\sqrt[3]{7}$, con 3 decimales de aproximación.

RESOLUCIÓN:

$x=\sqrt[3]{7}$ es la única raíz real de la ecuación $x^3-7=0$

Por división sintética, se la aisla en el intervalo $(1;2)$.

Entonces, se tiene que: $x=1+\frac{a}{10}$, de donde $x-1=\frac{a}{10}$ con $0 < a < 10$. Expresando $P(x)=x^3-7$ en potencias de $x-1$, se tiene, por el proceso de Horner:

$$P(x)=-6+3(x-1)+3(x-1)^2+(x-1)^3$$

sustituyendo $x-1=\frac{a}{10}$, y suprimiendo denominadores, resulta la ecuación: $P_1(a)=a^3+30a^2+300a-6000=0$, que tiene una única raíz positiva a.

La parte entera de a será la primera cifra decimal de la raíz x. Por división sintética, se logra aislar a en el intervalo $(9;10)$; y, por lo tanto $a=9+\frac{b}{10}$, de donde $a-9=\frac{b}{10}$; siendo $0 < b < 10$.

Expresando $P_1(a)$ en potencias de $a-9$:

$$P_1(a)=-141+1083(a-9)+57(a-9)^2+(a-9)^3$$

Sustituyendo $a-9=\frac{b}{10}$, igualando a cero y suprimiendo denominadores resulta la ecuación:

$$P_2(b)=b^3+570b^2+108300b-141000=0$$

que tiene una única raíz positiva b.

La parte entera de b será la segunda cifra decimal de la raíz buscada.

Aislando la raíz b en el intervalo $(1;2)$ se sigue que $b=1+\frac{c}{10}$ de donde $b-1=\frac{c}{10}$, $0 < c < 10$

Repitiendo el proceso, expresamos $P_2(b)$ en potencias de $b-1$:

$$P_2(b)=-32129+109443(b-1)+573(b-1)^2+(b-1)^3$$

Reemplazando $b-1=\frac{c}{10}$, igualando a cero y suprimiendo denominares se obtiene la ecuación:

$$P_3(c)=c^3+5730c+10944300c-32129000=0$$

donde la parte entera de la única raiz positiva será la tercera cifra decimal de la raiz buscada.

Aislando dicha raíz en el intervalo $(2;3)$, se sigue que $c=2+\frac{d}{10}$. Finalmente, de la sucesión de igualdades:

$$x=1+\frac{a}{10};a=9+\frac{b}{10};b=1+\frac{c}{10};c=2+\frac{d}{10}$$

se deduce que la raíz x de la ecuación $x^3-7=0$ es $x=1{,}912$, aproximada a 3 decimales.

EJERCICIOS

01 Hallar, por interpolación lineal, las raíces irracionales con 3 decimales de aproximación, de cada una de las siguientes ecuaciones:

a) $x^3+x^2-3=0$ b) $x^3-12x-20=0$
c) $2x^3+x^2-7=0$ d) $x^3+3x^2-2x-1=0$
e) $x^4-2x^3+21x-23=0$ f) $4x^4-4x^3+7x^2-8x-2=0$

02 Por el método de Horner, calcular las raíces irracionales, con 3 decimales de aproximación, de cada una de las siguientes ecuaciones:

a) $x^3+10x^2+34x-60=0$
b) $x^3-4x^2-5x+20=0$; c) $x^3+33x-110=0$
d) $x^3-18x-42=0$; e) $x^3+6x^2+x-9=0$

03 Por el método de Horner, calcular las siguientes raíces con 3 decimales de aproximación:

a) $\sqrt[3]{2}$ b) $\sqrt[3]{-5}$ c) $\sqrt[3]{10}$ d) $\sqrt[4]{9}$ e) $\sqrt[4]{2}$ d) $\sqrt[5]{-8}$



OBJETIVOS :

* Captar la idea de la programación lineal y sus posibilidades de aplicación a problemas prácticos.

* Dominar el lenguaje propio de la programación lineal : ***función objetivo , restricciones , región factible***, etc...

* Aplicar las técnicas de resolución de sistemas de ecuaciones e inecuaciones lineales .

* Saber representar regiones factibles y determinar gráficamente los puntos donde puede darse la solución óptima.

* Saber encontrar esa solución óptima.

* Saber plantear un problema de programación lineal partiendo de su enunciado en términos generales.

* Conocer y valorar el origen de la programación lineal y su influencia en la historia de este siglo.

* Utilizar y valorar las nuevas tecnologías.

Origen De La Programación Lineal

Se llama programación lineal al conjunto de técnicas matemáticas que resuelven la situación de optimizar (maximizar o minimizar) una función objetivo sujeta a ciertas restricciones en la forma de desigualdades lineales.

Así por ejemplo :

Minimizar:

$C = 2x + 7y$ ← Es la función objetivo Sujeto a:

$$\left.\begin{array}{l} 3x + 5y \geq 3000 \\ 6x + y \geq 2500 \\ 4x + 9y \geq 1000 \\ \left.\begin{array}{l} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array}\right\} \text{condición de no negatividad} \end{array}\right\} \text{restricciones}$$

En los siglos ***XVII*** y ***XVIII***, grandes matemáticos como ***Newton*** , ***Leibnitz*** , ***Bernouilli*** y , sobre todo , ***Lagrange*** , que tanto habían contribuido al desarrollo del cálculo infinitesimal , se ocuparon de obtener máximos y mínimos condicionados de determinadas funciones.


G.B. Dantzig

Posteriormente el matemático fránces Jean Baptiste–Joseph ***Fourier (1768 – 1830)*** fue el primero en intuir , aunque de forma imprecisa , los métodos de lo que actualmente llamamos programación lineal y la potencialidad que de ellos se deriva.

Si exceptuamos al matemático **Gaspar Monge *(1746-1818)***, quien en ***1776*** se interesó por problemas de este género, debemos remontarnos al año ***1939*** para encontrar nuevos estudios relacionados con los métodos de la actual programación lineal . En ese año , el matemático ruso Leonodas Vitalyevich ***Kantarovitch*** publica una extensa monografía titulada *Métodos matemáticos de organización y planificación de la producción.* en la que por primera vez se hace corresponder a una extensa gama de problemas una teoría matemática precisa y bien definida llamada, hoy en día, programación lineal . En ***1941-1942*** se formula por primera vez el problema de transporte, estudiado independientemente por ***Koopmans*** y ***Kantarovitch*** , razón por la cual se suele conocer con el nombre de ***problema de Koopmans-Kantarovitch.***

Tres años más tarde, ***G.Stigler*** plantea otro problema particular conocido con el nombre de régimen alimenticio optimal. En estos años posteriores a la Segunda Guerra Mundial , en Estados Unidos se asumió que la eficaz coordinación de todas las energías y recursos de la nación era un problema de tal complejidad , que su resolución y simplificación pasaba necesariamente por los modelos de optimización que resuelve la programación lineal . Paralelamente a los hechos descritos se desarrollan las técnicas de computación y los ordenadores , instrumentos que harían posible la resolución y simplificación de los problemas que se estaban gestando. En ***1947, G.B. Dantzig*** formula , en términos matemáticos muy precisos , el enunciado estándar al que cabe reducir todo problema de programación lineal. Dantzig, junto con una serie de investigadores del *United States Departament of Air Force*, formarían el grupo que dio en denominarse *SCOOP (Scientific Computation of Optimum Programs).*

Una de las primeras aplicaciones de los estudios del grupo *SCOOP* fue el puente aéreo de Berlín. Se continuó con infinidad de aplicaciones de tipo preferentemente militar. Hacia ***1950*** se constituyen, fundamentalmente en Estados Unidos, distintos grupos de estudio para ir desarrollando las diferentes ramificaciones de la programación lineal. Cabe citar, entre otros, Rand Corporation, con Dantzig ,Orchard-Hays, Ford, Fulkerson y Gale, el departamento de Matemáticas de la Universidad de Princenton, con Tucker y Kuhn, así como la Escuela Graduada de Administración Industrial, dependiente del Carnegie Institute of Technology , con Charnes y Cooper. Respecto al método del simplex , que estudiaremos después , señalaremos que su estudio comenzó en el año ***1951*** y fue desarrollado por Dantzig en el *United States Bureau of Standards SEAC COMPUTER*, ayudándose de varios modelos de ordenador de la firma *IBM*. Los fundamentos matemáticos de la programación lineal se deben al matemático norteamericano de origen húngaro ***Janos von Neuman (1903-1957)***, quie en ***1928*** publicó su famoso trabajo *Teoría de Juegos*. En ***1947*** conjetura la equivalencia de los problemas de programación lineal y la teoría de matrices desarrollada en sus trabajos. La influencia de este respetado matemático, discípulo de David Hilbert en Gotinga y , desde ***1930***, catedrático de la *Universidad de Princenton de Estados Unidos*, hace que otros investigadores se interesaran paulatinamente por el desarrollo riguroso de esta disciplina . En ***1858*** se aplicaron los métodos de la programación lineal a un problema concreto: *el cálculo* del plan óptimo de transporte de arena de construcción a las obras de edificación de la ciudad de Moscú . En este problema había ***10*** puntos de partida y 230 de llegada. El plan óptimo de transporte ,calculado con el ordenador Strena en ***10*** días del mes de junio, rebajó un 11% los gastos respecto a los costes previstos. Se ha estimado , de una manera general , que si un país subdesarrollado utilizase los métodos de la programación lineal , su producto interior bruto ***(PIB)*** aumentaría entre un ***10*** y un ***15%*** en tan sólo un año.

La Programación Lineal Hace Historia

El puente aéreo de Berlín

En ***1946*** comienza el largo período de la guerra fría entre la antigua Unión Soviética ***(URSS)*** y las potencias aliadas (principalmente , Inglaterra y Estados Unidos). Uno de los episodios más llamativos de esa guerra fría se produjo a mediados de ***1948***, cuando la ***URSS*** bloqueó las comunicaciones terrestres desde las zonas alemanas en poder de los aliados con la ciudad de Berlín, iniciando el bloqueo de Berlín. A los aliados se les plantearon dos posiblidades : o romper el bloqueo terrestre por la fuerza , o llegar a Berlín por el aire. Se adoptó la decisión de programar una demostración técnica del poder aéreo norteamericano ; a tal efecto, se organizó un gigantesco puente aéreo para abastecer la ciudad: en diciembre de ***1948*** se estaban transportando ***4500*** toneladas diarias ; en marzo de ***1949***, se llegó a las ***8000*** toneladas, tanto como se transportaba por carretera y ferrocarril antes del corte de las comunicaciones. En la planificación de los suministros se utilizó la programación lineal. (El ***12*** de mayo de ***1949***, los soviéticos levantaron el bloqueo) En infinidad de aplicaciones de la industria, la economía, la estrategia militar, etc. se presentan situaciones en las que se exige maximizar o minimizar algunas funciones que se encuentran sujetas a determinadas limitaciones, que llamaremos restricciones. Para hacernos una idea más clara de estos supuestos, veamos dos ejemplos :

EJEMPLO 1:

Problema De Máximos

En una granja se preparan dos clases de ***combinity***, ***P*** y ***Q***, mezclando dos productos ***A*** y ***B***. Un saco de ***P*** contiene ***8 kg*** de ***A*** y ***2*** de ***B***, y un saco de ***Q*** contiene ***10 kg*** de ***A*** y ***5*** de ***B***. Cada saco de ***P*** se vende a ***S/. 300.*** y cada saco de ***Q*** a ***S/.800*** . Si en la granja hay almacenados ***80 kg*** de ***A*** y ***25*** de ***B***, ¿cuántos sacos de cada tipo de ***combinity*** deben preparar para obtener los máximos ingresos?

EJEMPLO 2 :

Problema De Mínimos

Una campaña para promocionar una marca de productos lácteos se basa en el reparto gratuito de yogures con sabor a limón o a fresa. Se decide repartir al menos ***30000*** yogures. Cada yogur de limón necesita para su elaboración ***0,5*** gramos de un producto de fermentación y cada yogur de fresa necesita ***0,2*** gramos de este mismo producto. Se dispone de ***9*** kilogramos de este producto para fermentación. El costo de producción de un yogur de limón es de ***30*** soles y ***20*** soles uno de fresa.

En los dos ejemplos descritos está claro que tanto la cantidad que deseamos maximizar como la cantidad que deseamos minimizar podemos expresarlas en forma de ecuaciones lineales. Por otra parte , las restricciones que imponen las condiciones de ambos problemas se pueden expresar en forma de inecuaciones lineales.

Trataremos de plantear en términos matemáticos los dos ejemplos enteriores :

1) Si designamos por x al número de sacos de ***combinity*** de clase ***P*** y por y el número de sacos de ***combinity*** de clase ***Q*** que se han de vender , la función : $Z = 300x + 800y$ y representará la cantidad de soles obtenidos por la venta de los sacos , y por tanto es la que debemos maximizar. Podemos hacer un pequeño cuadro que nos ayude a obtener las restricciones :

	N°	kg de A	kg de B
P	x	$8x$	$2x$
Q	y	$10y$	$5y$
		≤ 80	≤ 25

Por otra parte, las variables x e y, lógicamente, han de ser no negativas , por tanto : $x \ge 0,\ y \ge 0$

Conjunto de restricciones :

$8x + 10y \le 80$
$2x + 5y \le 25$
$x \ge 0;\ y \ge 0$

2) Si representamos por x el número de yogures de limón e y al número de yogures de fresa , se tiene que la función de costo es $Z = 30x + 20y$. Por otra parte , las condiciones del problema imponen las siguientes restricciones :

* De número : $x + y \le 80$

* De fermentación: $0{,}5x + 0{,}2y \le 9000$

Programación Lineal

La programación lineal se puede definir como un medio matemático que busca la optimización (maximización o minimización) del uso de recursos limitados. La cual tiene por objeto ayudar a los responsables en la toma de decisiones sobre asuntos en donde intervienen un gran número de variables. La representación matemática de dicho óptimo se conoce como función objetivo y consiste generalmente en maximizar utilidades, beneficios, ingresos , eficiencia o alguna medida efectiva; o en minimizar costos erogaciones, gastos ,etc. Toda limitación , condición o disponibilidad de los recursos o actividades se denomina restricción y debe expresarse matemáticamente por medio de desigualdad (no estricta) o igualdad.

Tanto la función objetivo como las restricciones deben poderse escribir linealmente: de allí el nombre dado a este método: **Programación Lineal (P.L.).**

El problema general de Programación Lineal consiste en la búsqueda del óptimo (máximo o mínimo) de una función lineal de n variables x_j , $j = 1;2;3;...n$: ligadas por relaciones lineales (ecuaciones o inecuaciones) llamadas ***restricciones***.

Entre las restricciones se distinguen:

* Las del tipo $x_j \ge 0$. imponiendo a una parte o al conjunto de las variables ser no negativas. Usualmente. son llamadas ***restricciones de no negatividad.***

* El resto de las restricciones , del tipo que sean , a las que a veces de les denomina ***restricciones verdaderas.***

Exceptuando el caso de los problemas lineales en números enteros. Las variables pueden tomar cualquier conjunto de valores reales que satisfagan las restricciones . Precisamente , se tratará de encontrar , de entre estos posibles valores , aquel que de un mejor valor a la función lineal antes mencionada. Las restricciones son normalmente inecuaciones o ecuaciones. Se puede suponer siempre que sea necesario , que algunas inecuaciones se han multiplicado por -1 , para que todas las desigualdades tengan el mismo sentido , y que algunas variables se han sustituido por sus opuestas para que las únicas condiciones suplementarias impuestas a estas variables sean restricciones de ***no negatividad.*** Un problema de programación lineal en dos variables , tiene la siguiente formulación estándar :

$$\begin{cases} \text{Maximizar} : Z = f(x;y) = ax + by + c \\ \text{sujeto a} : \quad a_1x + b_1y \le c_1 \\ \qquad\qquad a_2x + b_2y \le c_2 \\ \qquad\qquad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ \qquad\qquad a_nx + b_ny \le c_n \end{cases}$$

puediendo cambiarse maximizar por minimizar , y el sentido de las desigualdades.

Usos de la programación lineal en el Perú

Desde los primeros años de la década del *60* diversas empresas y entidades han aplicado la programación lineal para la toma de decisiones en problemas específicos .

Dentro de las aplicaciones conocidas en nuestro medio , mencionaremos las siguientes:

PETROPERU

* Modelo matemático de transporte de crudos y refinados para la asignación óptima de la flota nacional.

* Modelo de refinerías para la obtención de gasolinas del octanaje adecuado al mínimo costo.

* Modelo matemático para la planta de lubricantes del callao

NICOLINI HNOS. S.A.

* Modelo de mezcla insumos para la fabricación de alimentos balanceados para aves.

UNILECHE S.A.

* Modelo de transportes para las asignaciones de rutas y vehículos de reparto de leche en Lima Metropolitana.

SIDER PERÚ

* Modelo de mezcla de insumos para la alimentación del alto horno.

MINISTERIO DE TRANSPORTES

* Modelo de evaluación de proyectos de construcción vial considerando los efectos regionales de centros de producción y consumo.

INSTITUTO NACIONAL DE PLANIFICACIÓN

* Modelo de selección de cartera de proyectos de desarrollo económico.

MINISTERIO DE AGRICULTURA IOWA STATE UNIVERSITY

* Modelo de rotación de cultivos para los valles de la costa norte del Perú.

A continuación presentaremos un ejemplo práctico de la programación lineal.

EJEMPLO 1

Suponiendo que una empresa manufacturera que produce dos artículos, el 1 y el 2, cuyas demandas son limitadas. La siguiente tabla indica los tiempos de procesamiento requerido por cada producto en tres departamentos por los que deben ser procesados y muestra además, la disponibilidad en horas hombre de estos por semana, y la ganancia unitaria de cada artículo.

	Dpto. A	Dpto. B	Dpto. C	Ganancia Unit.
Producto 1	2	1	4	1,00
Producto 2	2	2	2	1,50
Disponibilidad	160	120	280	

El problema consiste en decidir la cantidad de cada producto que debe elaborarse con el objeto de lograr el mejor empleo de los medios de producción (horas disponibles en los departamentos), para obtener el máximo beneficio total. Dicho de otro modo, quien decide, debe asignar los recursos (tiempo disponible en los departamentos) con el propósito de optimizar un objetivo (maximizar la ganancia total) satisfacer otras condiciones definidas (no exceder las capacidades de trabajo de cada departamento).

Su resolución lo veremos más adelante.



En infinidad de aplicaciones de la industria, la economía, la estrategia militar, etc., se presentan situaciones en las que se exige maximizar o minimizar algunas funciones que se encuentran sujetas a determinadas limitaciones, que llamaremos restricciones.

El Modelo Matemático De La Programación Lineal

En general con rigor matemático el problema de Programación Lineal se presenta en los siguientes términos

$$max.\ (min.)\ Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots c_nx_n \ \cdots\cdots\cdots \ (I)$$

Sujeto a

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad\quad & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \ \cdots\cdots\cdots (II) \end{aligned}$$

Y las restricciones de no negatividad

$$x_j = 0,\ j = 1;\ 2;\ 3;\ \ldots;n \ \cdots\cdots\cdots (III)$$

En las ecuaciones o inecuaciones a_{ij}; b_i; c_j son valores conocidos y el problema consiste en hallar los valores de las x_j que optimicen la función ***(I)*** sujeta a las condiciones ***(II)*** y ***(III)*** Las variables x_j se llaman variables de decisión.

La estructura anterior se puede expresar como :

$$(max.\ o\ min.)\ Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j = C^t X$$

Sujeto a :

$$AX \lesseqgtr B$$

$$X = 0$$

$$Donde\ A = (a_{ij})_{m\times n};\ C = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix};\ X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix};\ B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

En un problema de programación lineal debemos tener en cuenta que los beneficios, capacidades, etc. Son funciones que se deben maximizar; en cambio los costos, las pérdidas, los accidentes son funciones que se deben minimizar.

En Programación Lineal se tienen los siguientes elementos

- Una función objetivo.
- Un conjunto de restricciones.
- La no negatividad de las variables decisorias.

Para mayor comprensión del tema en este trabajo, lo plantearemos en dos variables decisorias; por ello nuestro problema de Programación Lineal tendrá la siguiente estructura.

$$\begin{cases} \text{Maximizar}: Z = f(x;y) = c_1x + c_2y + c_3 \\ \text{sujeto a}: \quad a_{11}x + a_{12}y \le b_1 \\ \qquad\qquad a_{21}x + a_{22}y \le b_2 \\ \qquad\qquad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ \qquad\qquad a_{m1}x + a_{m2}y \le b_m \end{cases}$$

$$con \ x \ge 0 \ ; \ y \ge 0$$

DEFINICIONES :

En un problema de programación lineal intervienen:

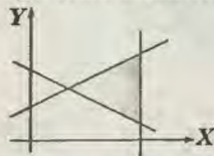
VARIABLES DECISORIAS : Son cantidades desconocidas que indican los valores numéricos de los actos o actividades que se van a emprender con el fin de lograr el objetivo.

FUNCIÓN OBJETIVO : Es la representación matemática de la función a optimizar (max. o min.)

$$f(x;y) = ax + by + c$$

En esa expresión x e y son las variables de decisión, mientras que a , b y c son constantes.

REGIÓN FACTIBLE : Es aquella que cumple con todas las restricciones y las condiciones de no negatividad. Existen dos tipos de región factible.

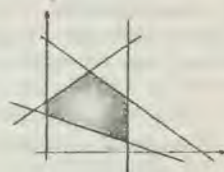


Región factible acotada



Región factible no acotada


region factible no acotada


región factible acotada

SOLUCIÓN FACTIBLE : Es cualquier punto situado en la región factible.

SOLUCIÓN BÁSICA : Es aquella que se encuentra en la intersección de rectas o hiperplanos o en la intersección con los ejes coordenados

SOLUCIÓN ÓPTIMA : Es una solución factible que maximiza o minimiza la función objetivo.

POLÍGONO CONVEXO : Dados dos puntos cualesquiera que pertenecen al polígono, el segmento de recta que los une está contenido en dicho polígono.


POLÍGONO CONVEXO


POLÍGONO NO CONVEXO

Un polígono se dice que es convexo si todos sus ángulos interiores miden menos de $180°$.

LAS RESTRICCIONES que deben ser inecuaciones lineales . Su número depende del problema en cuestión. El carácter de desigualdad viene impuesto por las limitaciones , disponibilidades o necesidades, que son: inferiores a ...(menores : $< 0 \le$); como mínimo de ... (mayores : $> 0 \ge$) . Tanto si se trata de maximizar como de minimizar, las desigualdades pueden darse en cualquiera de los dos sentidos.

Aplicaciones de la región factible

****PROBLEMAS DE PRODUCCIÓN :*** En estos problemas se trata de determinar la cantidad de productos que se deben fabricar para obtener los máximos beneficios en la venta de los mismos, o bien, calcular los mínimos costos en su fabricación.

****PROBLEMAS DE ALIMENTACIÓN :*** En estos problemas se trata de determinar la cantidad de cada uno de los alimentos que constituyen la alimentación diaria de un conjunto de personas o animales, de manera que el costo sea mínimo.

**** PROBLEMAS DE TRANSPORTE :*** En estos problemas se trata de elegir el camino óptimo de envío de una mercancía desde varios orígenes (por ejemplo, plantas de producción) a diferentes destinos (centros de almacenamiento o consumo), de manera que el costo sea el mínimo.

Fundamentación Matemática de la Programación Lineal

La Programación Lineal se fundamenta en un conjunto de teoremas.

TEOREMA 1 :

El conjunto de todas las soluciones factibles a un problema Lineal es un CONJUNTO CONVEXO (resulta de la intersección de las ecuaciones e inecuaciones de restricción),éste teorema demuestra, además que si un programa lineal tiene más de una solución, entonces

tendrá infinitas soluciones.

TEOREMA 2 :

La función objetivo alcanza su máximo en un punto extremo del conjunto convexo, generado por el conjunto de soluciones factibles al Programa lineal. De estos dos teoremas concluimos que sólo es necesario investigar las soluciones en los puntos extremos (es decir en los vértices o las aristas del polígono convexo del programa lineal)

DETERMINACIÓN DE LA REGIÓN FACTIBLE

La solución de la programación lineal, en el supuesto que exista, debe estar en la región determinada por las distintas desigualdades. Esta recibe el nombre de ***región factible***, y puede estar o no acotada.

El procedimiento para determinar la región factible es el siguiente:

* Se resuelve cada inecuación por separado, es decir, se encuentra el semiplano de soluciones de cada una de las inecuaciones.

* La región factible está formada por la intersección o región común de las soluciones de todas las inecuaciones.

La solución de un problema de programación lineal, en el supuesto de que exista, debe estar en la región determinada por las distintas desigualdades. Esta recibe el nombre de región factible, y puede estar o no acotada. La región factible incluye o no los lados y los vértices, según que las desigualdades sean en sentido amplio $(\leq o \geq)$ o en sentido estricto **$(< o >)$**. Si la región factible está acotada, su representación gráfica es un polígono convexo con un número de lados menor o igual que el número de restricciones. El procedimiento para determinar la región factible es el siguiente:

1) SE RESUELVE CADA INECUACIÓN POR SEPARADO.

Es decir, se encuentra el semiplano de soluciones de cada una de las inecuaciones.

* Se dibuja la recta asociada a la inecuación. Esta recta divide al plano en dos regiones o semiplanos.

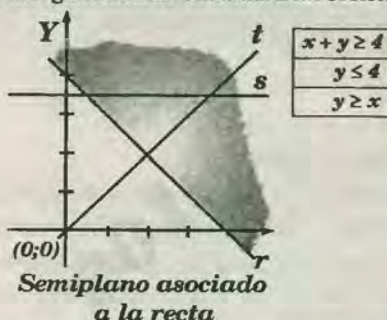
* Para averiguar cuál es la región válida, el procedimiento práctico consiste en elegir un punto, por ejemplo, el ***(0;0)*** si la recta no pasa por el origen, y comprobar si las coordenadas satisfacen o no la inecuación. Si lo hacen, la región en la que está ese punto es aquella cuyos puntos verifican la inecuación; en caso contrario, la región válida es la otra.

2)La región factible está formada por la intersección o región común de las soluciones de todas las inecuaciones.

Como sucede con los sistemas de ecuaciones lineales, los sistemas de inecuaciones lineales pueden presentar varias opciones respecto a sus soluciones: puede no existir solución, en el caso de que exista el conjunto solución puede ser acotado o no.

*** VEÁMOSLO CON UN EJEMPLO :**

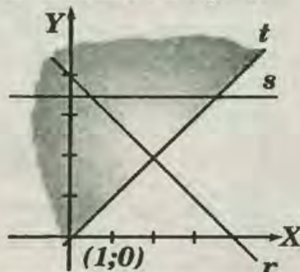
Dibuja la región factible asociada a las restricciones:



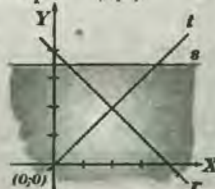
$x + y \geq 4$
$y \leq 4$
$y \geq x$

Semiplano asociado a la recta

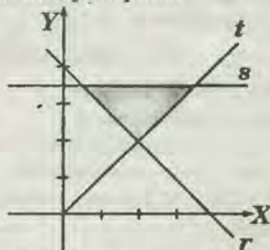
Elegimos el punto ***O(0;0)***, que se encuentra en el semiplano situado por debajo de la recta. Introduciendo las coordenadas ***(0;0)*** en la inecuación $x+y\geq 4$, vemos que no la satisface: $0 + 0 = 0 < 4$. Por tanto, el conjunto de soluciones de la inecuación es el semiplano situado por encima de la recta $r:\ x + y = 4$.



La recta ***t*** asociada a la rectricción pasa por el origen, lo cual significa que si probásemos con el punto ***O(0;0)*** no llegaríamos a ninguna conclusión. Elegimos el punto ***(1;0)*** y vemos que no satisface la inecuación $y \geq x (y = 0 < 1 = x)$. Por tanto, el conjunto solución de esta inecuación es el semiplano determinado por la recta ***t*** que no incluye al punto ***(1;0)***.



Procedemos como en el paso anterior. Las coordenadas *(0;0)* satisfacen la inecuación $y \leq 4$. $(0 \leq 4)$. Por tanto, el conjunto de soluciones de la inecuación es el semiplano que incluye al punto



La región factible está formada por los puntos que cumplen las tres restricciones, es decir, se encuentran en los tres semiplanos anteriores.

Método Gráfico o Método de las Rectas De Nivel

Las ***rectas de nivel*** dan los puntos del plano en los que la función objetivo toma el mismo valor.

Para aplicar este método es necesario seguir estos pasos:

* Representar gráficamente la región factible.
* Representar las rectas de nivel.
* Determinar la solución óptima.

Para encontrar la solución óptima de una función objetivo a partir de las rectas de nivel, es necesario representarla y desplazarla paralelamente a sí misma dentro de la región factible hasta encontrar el vértice que determine dicha condición.

Si la función objetivo es $F(x;y)=Ax + by$, las ecuaciones de las rectas de nivel son de la forma:

$Ax + by = k$, donde $k \in \mathbb{Z}$

NOTA:

* Las rectas de nivel dan los punto del plano en los que la función objetivo toma el mismo valor.

* Si la región factible está acotada, su representación gráfica es un polígono convexo con un número de lados menor o igual que el número de restricciones.

Si la función objetivo es $f(x;y)=ax+by+c$, la ecuación de las rectas de nivel es de la forma :

$$ax + by + c = 0 \quad \leftrightarrow \quad ax + by = k$$

Variando k (ó p) se obtienen distintos niveles para esas rectas y , en consecuencia , distintos valores para $f(x;y)$. En un problema todas las rectas de nivel son paralelas , pues los coeficientes a y b de la recta $ax+by=k$ son los que determinan su pendiente. Por tanto , si k_1 es distinto de k_2, las rectas $ax+by=k_1$ y $ax+by=k_2$ son paralelas. Luego , trazada una cualquiera de esas rectas , las demás de obtienen por desplazamientos paralelos a ella . Si lo que se pretende es resolver un problema de programación lineal , los únicos puntos que interesan son los de la ***región factible*** , y las únicas rectas de nivel que importan son aquellas que están en contacto con dicha región . Como el nivel aumenta (o disminuye) desplazando las rectas , el máximo (o el mínimo) de $f(x;y)$ se alcanzará en el último (o en el primer) punto de contacto de esas rectas con la región factible. Veamos ahora como se aplica todo esto a la resolución de un problema de programación lineal :

Maximizar	$Z=f(x;y)=x+y$
Sujeto a :	$0 \leq x \leq 4$
	$0 \leq y \leq 4$
	$y \geq /2$

1) REPRESENTAMOS LA REGIÓN FACTIBLE :

* La recta $s: x=4$ pasa por el punto *(4;0)* y es paralela al eje **Y**. Las soluciones de $0 \leq x \leq 4$ son los puntos entre el eje **Y** y la recta $x = 4$.

* La recta $r: y=4$ pasa por el punto *(0;4)* y es paralela al eje **X**. Las soluciones de $0 \leq y \leq 4$ son los puntos entre el eje **X** y la recta $y = 4$.

* La recta $t: y = x/2$ pasa por los puntos *(0;0)* y *(2;1)* Las soluciones de $y \geq x/2$ son los puntos de su izquierda.

Resolviendo los sistemas correspondientes calculamos los vértices de la región factible :

{ $y=x/2$; $x=0$ } nos da el vértice *O(0;0)*

{ $x=4$; $y=x/2$ } nos da el vértice *A(4;2)*

{ $x=4$; $y=4$ } nos da el vértice *B(4;4)*

{ $y=4$; $x=0$ } nos da el vértice *C(0;4)*

2) REPRESENTAMOS LAS RECTAS DE NIVEL :

En nuestro caso son rectas de la forma $x+y=k$. Inicialmente representamos $Z = x + y = 0$. Trasladándola hacia la derecha, obtenemos las rectas $x+y=2$; $x+y=4$; $x+y=8$, es decir aumenta el nivel.

3) OBTENEMOS LA SOLUCIÓN ÓPTIMA :

Se obtiene en el punto de la región factible que hace máximo k. En nuestro caso esto ocurre en el punto B; es el último punto de contacto de esas rectas con la región factible , para el que $k = 8$. Si hay dos vértices, **P** y **Q**, que se encuentran en la misma recta de nivel ,de ecuación $ax + by = k$. Es evidente que todos los puntos del segmento **PQ** son de esa recta ; por tanto,

en todos ellos $f(x;y)$ vale k. Así pues, la solución óptima es cualquier punto de esa recta; en particular los vértices P y Q.

PROBLEMA :

Suponiendo que una empresa manufacturera que produce dos artículos, el *1* y el *2*, cuyas demandas son limitadas. La siguiente tabla indica los tiempos de procesamiento requerido por cada producto en tres departamentos por los que deben ser procesados y muestra además, la disponibilidad en horas hombre de estos por semana, y la ganancia unitaria de cada artículo.

	Dpto. A	*Dpto. B*	*Dpto. C*	*Ganancia Unit.*
Producto 1	2	1	4	1
Producto 2	2	2	2	1
Disponibilidad	160	120	280	

El problema consiste en decidir la cantidad de cada producto que debe elaborarse con el objeto de lograr el mejor empleo de los medios de producción (horas disponibles en los departamentos), para obtener el máximo beneficio total. Dicho de otro modo, quien decide, debe asignar los recursos (tiempo disponible en los departamentos) con el propósito de optimizar un objetivo (maximizar la ganancia total) satisfacer otras condiciones definidas (no exceder las capacidades de trabajo de cada departamento).

RESOLUCIÓN

Paso 1 : (Variables decisorias) Sea x el número de unidades producidas del artículo *1*.

Sea y el número de unidades producidas del artículo 2.

Paso 2 : (construcción de la función objetivo)

El beneficio obtenido al vender x unidades del artículo *1* e y unidades del artículo 2 será : $x + 1,5y$ considerando la función $f(x;y) = x + 1,50y$ (función objetivo) el problema consiste en hallar x, y tal que esta función sea máxima, teniendo en cuenta que x e y están sujetas a las siguientes condiciones (restricciones).

Paso 3 : (Restricciones o limitaciones)

En el ejemplo la producción está limitada por el tiempo disponible de manufacturación en cada departamento. Observando los valores del cuadro anterior se puede deducir fácilmente que:

• El tiempo de manufacturación requerido al departamento A, es igual a $2x + 2y$ pero el requisito no debe exceder la capacidad del departamento A, por la que la expresión anterior queda completa con: $2x + 2y \le 160$ con igual razonamiento para los departamentos B y C, se tiene: $x + 2y \le 120$

$$4x + 2y \le 280$$

obviamente esta implícita la circunstancia de no poder considerar cantidades a producir negativas, por tanto se debe escribir: $x \ge 0 ; y \ge 0$

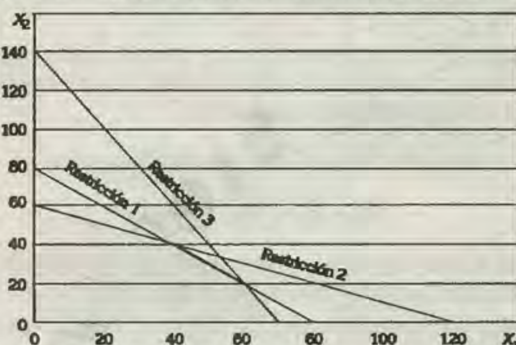
• En resumen y simbolizando la función ganancia total con **Z** se tiene: $[Max]Z = x + 1,5y$

Sujeto a : $2x + 2y \le 160$ ....*(restricción 1)*

$x + 2y \le 120$........*(restricción 2)*

$4x + 2y \le 280$......*(restricción 3)*

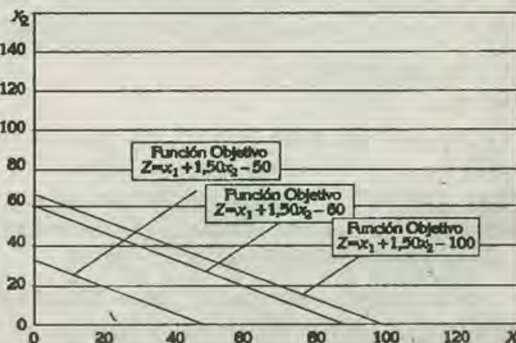
Con : $x \ge 0$; $y \ge 0$ Como este problema contiene sólo dos variables es posible representarlo y resolverlo gráficamente. Graficando las tres restricciones se tiene:



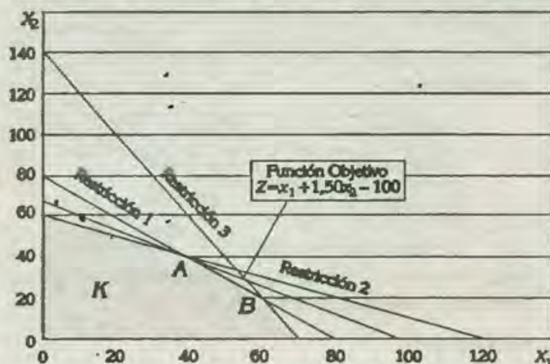
La figura que ha quedado definida no es otra cosa que un polígono convexo.

El problema de la Programación Lineal, entonces, se reduce (nada más ni nada menos) a la selección del punto que sea factible y que a su vez maximice la función objetivo. Asignando a **Z** un valor arbitrario para que pueda ser graficada. Por ser **Z** una recta, para cualesquiera valores asignados a **Z** se obtendrán rectas paralelas ya que tienen igual pendiente.

Es :



Es evidente que se podrá seguir desplazando **Z** hasta que se alcance el último punto común entre ésta y el polígono. Dicho punto es A tal como se verifica en el gráfico que sigue.



Este es el punto de Ganancia Total Máxima o punto óptimo. Corresponde por lo tanto a la solución óptima. La respuesta al problema es entonces

$x_1 = 40$; $x_2 = 40$. Y el valor de la función objetivo es $Z = 100$

MÉTODO ANALÍTICO O MÉTODO DE LOS VÉRTICES

Para aplicar este método es necesario seguir estos pasos:

* Hallar los puntos de corte de las rectas asociadas a las restricciones.

* Determinar los vértices de la región factible.

* Calcular los valores de la función objetivo para determinar la solución óptima.

La evaluación de la función objetivo en los vértices de la región factible permitirá encontrar la solución óptima.

El siguiente resultado , denominado ***TEOREMA FUNDAMENTAL DE LA PROGRAMACIÓN LINEAL***, nos permite conocer otro método de solucionar un programa con dos variables.

En un programa lineal con dos variables , si existe una solución única que optimice la función objetivo , ésta se encuentra en un punto extremo (vértice) de la región factible acotada , nunca en el interior de dicha región. Si la función objetivo toma el mismo valor óptimo en dos vértices , también toma idéntico valor en los puntos del segmento que determinan. En el caso de que la región factible no es acotada , la función lineal objetivo no alcanza necesariamente un valor óptimo concreto , pero , si lo hace , éste se encuentra en uno de los vértices de la región . La evaluación de la función objetivo en los vértices de la región factible nos va a permitir encontrar el valor óptimo (máximo o mínimo) en alguno de ellos.

EJEMPLO :

Maximizar	$Z = f(x;y) = 3x + 8y$
Sujeto a :	$4x + 5y \leq 40$
	$2x + 5y \leq 30$
	$x \geq 0;\ y \geq 0$

1) HALLAR LOS PUNTOS DE CORTE DE LAS RECTAS ASOCIADAS A LAS RESTRICCIONES :

Calculamos las soluciones de cada uno de los seis sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas que se pueden formar con las cuatro restricciones :

$\{ 4x + 5y = 40 ; 2x + 5y = 30\}$.

Solución $A(5;4)$

$\{ 4x + 5y = 40 ; x = 0 \}$ Solución: $B(0;8)$

$\{ 4x + 5y = 40 ; y = 0\}$.

Solución: $C(10; 0)$

$\{ 2x + 5y = 30 ; x = 0\}$ Solución: $D(0;6)$

$\{ 2x + 5y = 30 ; y = 0\}$. Solución : $E(15;0)$

$\{ x = 0; y = 0\}$ Solución: $O(0;0)$

2) DETERMINAR LOS VÉRTICES DE LA REGIÓN FACTIBLE :

Los vértices de la región factible son aquellos puntos que cumplen todas las restricciones. Si sustituimos los puntos en cada una de las desigualdades tenemos que:

* ***B*** no cumple la segunda restricción $2x + 5y \leq 30$, ya que $2\times0 + 5\times8 = 40$. Por tanto , el punto ***B*** no es un vértice de la región factible.

* ***E*** no cumple la primera restricción $4x + 5y \geq 40$, ya que $4\times15 + 5\times0 = 60$. Por tanto , el punto E no es un vértice de la región factible.

3) CALCULAR LOS VALORES DE LA FUNCIÓN OBJETIVO EN LOS VÉRTICES :

$f(A)=f(5;4)= 3\times5 + 8\times4 = 47$	$f(C)=f(10;0)=3\times10+8\times0=30$
$f(D) = f(0;6) = 3\times0 + 8\times6 = 48$	$f(O) = f(0;0) = 3\times0 + 8\times0 = 0$

La solución óptima corresponde al vértice para el que la función objetivo toma el valor máximo. En este caso es el vértice ***D(0;6)***.

ESQUEMA PRÁCTICO :

Los problemas de programación lineal pueden presentarse en la forma estándar , dando la función objetivo y las restricciones , o bien plantearlos mediante un enunciado. Si éste es el caso , puede seguirse el camino que indicamos a continuación, ejemplificado con el siguiente problema:

PROBLEMA MODELO :

En un almacén se guarda aceite de girasol y de oliva. Para atender a los clientes se han de tener almacenados un mínimo de *20* bidones de aceite de girasol y *40* de aceite de oliva y, además, el número de bidones de aceite de oliva no debe ser inferior a la mitad del número de bidones de aceite de girasol. La capacidad total del almacén es de *150* bidones. Sabiendo que el gasto de almacenaje es el mismo para los dos tipos de aceite (*1* unidad monetaria) . ¿Cuántos bidones de cada tipo habrá que almacenar para que el gasto sea máximo?

OBSERVACIÓN :

Puede parecer algo absurdo maximizar los gastos , pero se ha enunciado de esta forma para que el ejemplo sea lo más completo posible.

**** PASO 1°:***

LEER DETENIDAMENTE EL ENUNCIADO: determinar el objetivo , definir las variables y escribir la función objetivo.

EL OBJETIVO :

hallar cuántos bidones de cada tipo hay que almacenar para maximizar los gastos . Suponemos que tal objetivo se consigue almacenado x bidones de aceite de girasole y de aceite de oliva. Cómo cada bidón de aceite de girasol cuesta almacenarlo *1* unidad monetaria y lo mismo para uno de aceite, los gastos serán $x + y$. Luego la función objetivo es :

Maximizar la función $Z = f(x;y) = x + y$.

**** PASO 2°:***

Reordenar los datos del problema y a partir de las cantidades decididas , x e y, escribir el sistema de inecuaciones que determinan las restricciones.

- Un mínimo de *20* bidones de aceite de girasol: $x \geq 20$.
- Un mínimo de *40* bidones de aceite de oliva : $y \geq 40$.
- El número de bidones de aceite de oliva no debe ser inferior a la mitad del número de bidones de aceite de girasol : $y \geq x/2$
- La capacidad total del almacén es de *150* bidones: $x + y \leq 150$.

Además, los números de bidones deben ser cantidades positivas : $x \geq 0$; $y \geq 0$.

OBSERVACIÓN :

Como veremos en ejemplos posteriores en algunas ocasiones puede interesar utilizar una tabla para recopilar toda la información y hacer los dos primeros apartados.

**** PASO 3° :***

Expresar el problema en la forma estándar.

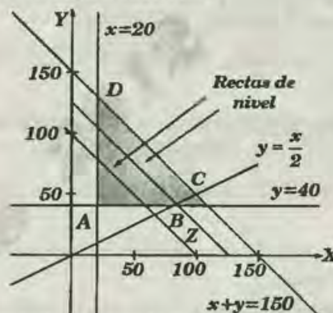
EJEMPLO :

Maximizar	$Z = f(x;y) = x + y$
Sujeto a :	$x + y \leq 150$
	$y \leq x/2$
	$x \geq 20; y \geq 40$

Aquí termina el planteamiento del problema. Para su resolución hay que continuar con :

**** PASO 4°:***

Representar gráficamente las restricciones y marcar claramente la región factible.



Para las restricciones anteriores debemos representar las rectas: $x + y = 150$; $y = x/2$; $x = 20$ e $y = 40$, obteniéndose la región factible que en la figura se encuentra sombreada.

**** PASO 5°:***

Hallar las coordenadas de los vértices del polígono obtenido.

Resolviendo los sistemas :

$\{ x = 20; y = 40 \}$; $\{ y = x/2 ; y = 40 \}$,

$\{ y = x/2 ; x + y = 150 \}$; $\{ x + y = 150 ; x = 20 \}$;

se obtienen los vértices : ***A(20;40) , B(80;40) , C(100;50) , D(20;130).***

**** PASO 6°:***

Sustituir las coordenadas de esos puntos en la función objetivo y hallar el valor máximo o mínimo.

Sustituyendo en $f(x;y) = x + y$, se tiene :

$$f(20;40) = 60 \quad ; \quad f(80;40) = 120 ;$$
$$f(100;50) = 150 \quad ; \quad f(20;130) = 150$$

Como el valor máximo se obtiene en los puntos **C** y **D**, puede optarse por cualquiera de los dos, o por cualquier punto perteneciente al segmento que los une. Así, por ejemplo , se obtendría el mismo gasto con *40* bidones

de aceite girasol y **110** bidones de aceite de oliva ; o **90** y **60** respectivamente.

*** PASO 7°:**

También es conveniente representar las rectas de nivel para comprobar que la solución gráfica coincide con la encontrada. Esta conveniencia se convierte en necesidad cuando la región factible es no acotada.

En nuestro caso , puede comprobarse que las rectas de nivel tienen la misma pendiente que la recta límite de la restricción $x + y \leq 150$; por tanto, hay múltiples soluciones.

*** PASO 8° :**

Por último , como en la resolución de todo problema es necesario criticar la solución : cerciorarse de que la solución hallada es lógica y correcta. En este ejemplo , no todos los puntos del segmento **CD** son soluciones válidas , ya que no podemos admitir valores de x e y no enteros , como ocurriría en el punto $(90\times5; 59\times5)$

OBSERVACIÓN :

Si un problema en la forma estándar no indica que se debe realizar por el método analítico o gráfico , seguiremos para su resolución los pasos del **4°** al **8°**.

TIPOS DE SOLUCIONES

Los programas lineales con dos variables suelen clasificarse atendiendo al tipo de solución que presentan. Éstos pueden ser :

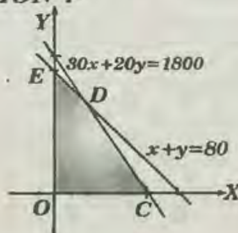
FACTIBLES :

Si existe el conjunto de soluciones o valores que satisfacen las restricciones. A su vez, pueden ser:

PROBLEMA CON SOLUCIÓN ÚNICA :

En una urbanización se van a construir casas de dos tipos : **A** y **B**. La empresa constructora dispone para ello de un máximo de **1800** millones de soles , siendo el coste de cada tipo de casa de **30** y **20** millones, respectivamente. La municipalidad exige que el número total de casas no sea superior a **80**. Sabiendo que el beneficio obtenido por la venta de una casa de tipo **A** es **4** millones y de **3** millones por una de tipo **B**, ¿cuántas casas deben construirse de cada tipo para obtener el máximo beneficio?

RESOLUCIÓN :



* ***Variables :*** $x = n°$ de casas tipo **A**

$y = n°$ de casas tipo **B**.

* ***Función objetivo :***

Maximizar $Z = f(x,y) = 4x + 3y$.

* ***Conjunto de restricciones*** : El costo total $30x + 20y \leq 1800$. La municipalidad impone $x + y \leq 80$. De no negatividad : $x \geq 0$, $y \geq 0$ Tiene por región factible la región sombreada.

Si hallamos los valores de la función objetivo en cada uno de los vértices :

$f(O) = f(0;0) = 0$; $f(C) = f(60;0) = 240$;
$f(D) = f(20;60) = 260$; $f(E) = f(0;80) = 240$

La solución es única , y corresponde al vértice para el que la función objetivo toma el valor máximo. En este caso es el vértice **D(20;60)**. Por tanto se deben construir **20** casas de tipo **A** y **60** de tipo **B** con un coste de **260** millones de soles.

PROBLEMA CON SOLUCIÓN MÚLTIPLE

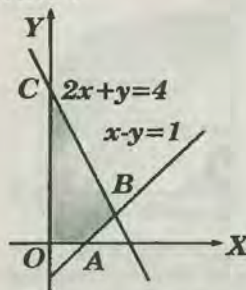
Si existe más de una solución .

Maximizar la función : $Z = f(x;y) = 4x + 2y$

sujeta a las restricciones :

$$2x + y \leq 4;\ x - y \leq 1;\ x \geq 0;\ y \geq 0.$$

RESOLUCIÓN :



Los valores de la función objetivo en cada uno de los vértices son: $f(O) = f(0;0) = 0$, $f(A) = f(1;0) = 4$; $f(B) = f(5/3;2/3) = 8$, $f(C) = f(0;4) = 8$. La función objetivo alcanza el valor máximo en los vértices **B** y **C**, por tanto , en todos los puntos del segmento **BC**. Hay infinitas soluciones, solución múltiple , que corresponden a los puntos del segmento situado entre dos vértices de la región factible. En estos casos la función objetivo es paralela a una de las restricciones.

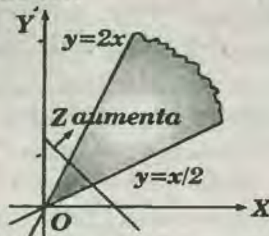
PROBLEMA CON SOLUCIÓN NO ACOTADA :

Cuando no existe límite para la función objetivo.

Maximizar la función : $Z = f(x;y) = x + y$

sujeta a las restricciones : $y \leq 2x$; $y \geq x/2$

RESOLUCIÓN:



Tiene por región factible la zona sombreada que aparece en la figura , que es una región no acotada . La función crece indefinidamente para valores crecientes de x e y. En este caso no existe un valor extremo para la función objetivo, por lo que puede decirse qne el problema carece de solución. Para que suceda esta situación la región factible debe estar no acotada.

PROBLEMAS NO FACTIBLES :

Cuando no existe el conjunto de soluciones que cumplen las restricciones, es decir, las restricciones son inconsistentes.

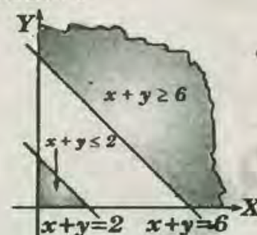
Maximizar la función :

$$Z = f(x; y) = 3x + 8y$$

sujeta a las restricciones

$$x + y \geq 6; \; x + y \leq 2; \; x \geq 0; \; y \geq 0$$

RESOLUCIÓN :



No existe la región factible, ya que las zonas coloreadas que aparecen en la figura son únicamente soluciones de alguna de las inecuaciones . Por tanto, el conjunto de soluciones del sistema de desigualdades no determina ninguna región factible. Este tipo de problemas carece de solución.

MÉTODO DEL SIMPLEX

Es un procedimiento iterativo que permite ir mejorando la solución a cada paso. El proceso concluye cuando no es posible seguir mejorando más dicha solución. Partiendo del valor de la función objetivo en un vértice cualquiera , el método consiste en buscar sucesivamente otro vértice que mejore al anterior. La búsqueda se hace siempre a través de los lados del polígono (o de las aristas del poliedro, si el número de variables es mayor). Cómo el número de vértices (y de aristas) es finito, siempre se podrá encontrar la solución . El método del simplex se basa en la siguiente propiedad :

Si la función objetivo, f, no toma su valor máximo en el vértice A, entonces hay una arista que parte de A, a lo largo de la cual f aumenta.

El método del simplex fue creado en **1947** por el matemático George Dantzig . El método del simplex se utiliza, sobre todo, para resolver problemas de programación lineal en los que intervienen tres o más variables. El álgebra matricial y el proceso de eliminación de Gauss – Jordan para resolver un sistema de ecuaciones lineales constituyen la base del método simplex.

Vamos a resolver mediante el método del simplex el siguiente problema :

Maximizar	$Z = f(x;y) = 3x + 2y$
sujeto a :	$2x + y \leq 18$
	$2x + 3y \leq 42$
	$3x + y \leq 24$
	$x \geq 0 \wedge y \geq 0$

Se consideran las siguientes fases :

I) CONVERTIR LAS DESIGUALDADES EN IGUALDADES :

Se introduce una variable de holgura por cada una de las restricciones , para convertirlas en igualdades, resultando el sistema de ecuaciones lineales :

$2x + y + h = 18$
$2x + 3y + s = 42$
$3x + y + d = 24$

II) IGUALAR LA FUNCIÓN OBJETIVO A CERO

$$-3x - 2y + Z = 0$$

III) ESCRIBIR LA TABLA INICIAL SIMPLEX :

En las columnas aparecerán todas las variables del problema y , en las filas , los coeficientes de las igualdades obtenidas , una fila para cada restricción y la última fila con los coeficientes de la función objetivo

Tabla I . Iteración n° 1

Base	Variable de decisión		Variable de holgura			Valores solución
	x	y	h	s	d	
h	2	1	1	0	0	18
s	2	3	0	1	0	42
d	3	1	0	0	1	24
Z	-3	-2	0	0	0	0

IV) ENCONTRAR LA VARIABLE DE DECISIÓN QUE ENTRA EN LA BASE Y LA VARIABLE DE HOLGURA QUE SALE DE LA BASE.

A) Para escoger la variable de decisión que entra en la base, nos fijamos en la última fila, la de los coeficientes de la función objetivo y escogemos la variable con el coeficiente negativo mayor (en valor absoluto).

* En nuestro caso, la variable x de coeficiente -3.

Si existiesen dos o más coeficientes iguales que cumplan la condición anterior, entonces se elige uno cualquiera de ellos. Si en la última fila no existiese ningún coeficiente negativo, significa que se ha alcanzado la solución óptima. Por tanto, lo que va a determinar el final del proceso de aplicación del método del simplex, es que en la última fila no haya elementos negativos.

La columna de la variable que entra en la base se llama columna pivote (En color verde).

B) Para encontrar la variable de holgura que tiene que salir de la base, se divide cada término de la última columna (valores solución) por el término correspondiente de la columna pivote, siempre que estos últimos sean mayores que cero. En nuestro caso:

$$18\div 2=9] \;;\; 42\div 2=21 \quad \text{y} \quad 24\div 3=8$$

Si hubiese algún elemento menor o igual que cero no se hace dicho cociente. En el caso de que todos los elementos fuesen menores o iguales a cero, entonces tendriamos una solución no acotada y no se puede seguir. El término de la columna pivote que en la división anterior dé lugar al menor cociente positivo, el **3**, ya **8** es el menor, indica la fila de la variable de holgura que sale de la base, d. Esta fila se llama fila pivote.

Si al calcular los cocientes, dos o más son iguales, indica que cualquiera de las variables correspondientes pueden salir de la base.

C) En la intersección de la fila pivote y columna pivote tenemos el elemento pivote operacional, **3**.

V) ENCONTRAR LOS COEFICIENTES DE LA NUEVA TABLA:

Los nuevos coeficientes de x se obtienen dividiendo todos los coeficientes de la fila d por el pivote operacional, **3**, que es el que hay que convertir en **1**. A continuación mediante la reducción gaussiana hacemos ceros los restantes términos de su columna, con lo que obtenemos los nuevos coeficientes de las otras filas incluyendo los de la función objetivo **Z**.

También se puede hacer utilizando el siguiente esquema:

Fila del pivote:

Nueva fila del pivote= (Vieja fila del pivote) : (Pivote)

Resto de las filas:

Nueva fila= (Vieja fila)–(Coeficiente de la vieja fila en la columna de la variable entrante) × (Nueva fila del pivote)

Veámoslo con un ejemplo una vez calculada la fila del pivote (fila de x en la Tabla *II*):

Vieja fila de s	2	3	0	1	0	42
	–	–	–	–	–	–
Coeficiente	2	2	2	2	2	2
	x	x	x	x	x	x
Nueva fila pivote	1	1/3	0	0	1/3	8
	=	=	=	=	=	=
Nueva fila de s	0	7/3	0	1	–2/3	26

Tabla II. Iteración nº2						
Base	Variable de decisión		Variable de holgura			Valores solución
	x	y	h	s	d	
h	0	1/3	1	0	-2/3	2
s	0	7/3	0	1	-2/3	26
x	1	1/3	0	0	1/3	8
Z	0	-1	0	0	1	24

Como en los elementos de la última fila hay uno negativo, **–1**, significa que no hemos llegado todavía a la solución óptima. Hay que repetir el proceso:

A) La variable que entra en la base es y, por ser la variable que corresponde al coeficiente **–1**.

B) Para calcular la variable que sale, dividimos los términos de la última columna entre los términos correspondientes de la nueva columna pivote:

$$2\div 1/3=6 \;;\; 26\div 7/3=78/7 \quad \text{y} \quad 8\div 1/3=24$$

y como el menor cociente positivo es **6**, tenemos que la variable de holgura que sale es h.

C) El elemento pivote, que ahora hay que hacer **1**, es **1/3**.

Operando de forma análoga a la anterior obtenemos la tabla:

Tabla III. Iteración nº3						
Base	Variable de decisión		Variable de holgura			Valores solución
	x	y	h	s	d	
y	0	1	3	0	-2	6
s	0	0	-7	0	4	12
x	1	0	-1	0	1	8
Z	0	0	3	0	-1	24

Como en los elementos de la última fila hay uno negativo, **–1**, significa que no hemos llegado todavía a la solución óptima. Hay que repetir el proceso:

A) La variable que entra en la base es d, por ser la variable que corresponde al coeficiente **–1**

B) Para calcular la variable que sale, dividimos los términos de la última columna entre los términos correspondientes de la nueva columna pivote:

$$6/(-2)=-3\ ;\ 12/4=3\ ,\ \text{y}\ \ 6\div 1=6$$

y como el menor cociente positivo es **3**, tenemos que la variable de holgura que sale es **s**.

C) El elemento pivote, que ahora hay que hacer ***1***, es ***4***

Tabla IV. Final del proceso						
Base	Variable de decisión		Variable de holgura			Valores solución
	x	y	h	s	d	
y	0	1	-1/2	0	0	12
d	0	0	-7/4	0	1	3
x	1	0	-3/4	0	0	3
Z	0	0	5/4	0	0	33

Como todos los coeficientes de la fila de la función objetivo son positivos, hemos llegado a la solución óptima.

Los solución óptima viene dada por el valor de **Z** en la columna de los valores solución, en nuestro caso: ***33***. En la misma columna se puede observar el vértice donde se alcanza, observando las filas correspondientes a las variables de decisión que han entrado en la base: ***D(3;12)***

* Si en el problema de maximizar apareciesen como restricciones inecuaciones de la forma: $ax + by + c$; multiplicándolas por -1 se transforman en inecuaciones de la forma $-ax - by - c$ y estamos en el caso anterior.

*** Si en lugar de maximizar se trata de un problema de minimizar se sigue el mismo proceso, pero cambiando el sentido del criterio, es decir, para entrar en la base se elige la variable cuyo valor, en la fila de la función objetivo, sea el mayor de los positivos y se finalizan las iteraciones cuando todos los coeficientes de la fila de la función objetivo son negativos.**

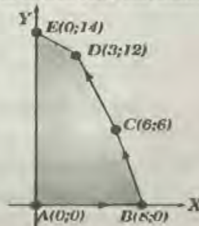
INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DEL MÉTODO DEL SIMPLEX

Las sucesivas tablas que hemos construido van proporcionando el valor de la función objetivo en los distintos vértices, ajustándose, a la vez, los coeficientes de las variables iniciales y de holgura.

En la primera iteración (Tabla ***I***) han permanecido todos los coeficientes iguales, se ha calculado el valor de la función objetivo en el vértice ***A(0;0)***, siendo este ***0***

* A continuación se desplaza por la arista ***AB***, calculando el valor de ***f***, hasta llegar a ***B***.

Este paso aporta la Tabla ***II***.



* En esta segunda iteración se ha calculado el valor que corresponde al vértice ***B(8;0): Z=f(8;0) = 24***

Sigue por la arista ***BC***, hasta llegar a ***C***, donde se para y despliega los datos de la Tabla ***III***.

En esta tercera iteración se ha calculado el valor que corresponde al vértice ***C(6;6) : Z=f(6;6)=30***.

Continua haciendo cálculos a través de la arista ***CD***, hasta llegar al vértice ***D***. Los datos que se reflejan son los de la Tabla ***IV***. Concluye con esta tabla, advirtiendo que ha terminado (antes ha comprobado que la solución no mejora al desplazarse por la arista ***DE***) El valor máximo de la función objetivo es ***33***, y corresponde a $x = 3$ e $y=12$ (vértice ***D***). Si calculas el valor de la función objetivo en el vértice ***E(0;14)***, su valor no supera el valor ***33***

SOLUCIÓN GRÁFICA DE PROBLEMAS DE PROGRAMACIÓN LINEAL

Muchos problemas de administración y economía están relacionados con la optimización (maximización o minimización) de una función sujeta a un sistema de igualdades o desigualdades. La función por optimizar es la función objetivo. Las funciones de ganancia y de costo son ejemplos de funciones objetivo. El sistema de igualdades o desigualdades a las que está sujeta la función objetivo reflejan las restricciones (por ejemplo, las limitaciones sobre recursos como materiales y mano de obra) impuestas a la solución (o soluciones) del problema. Los problemas de esta naturaleza se llaman ***problemas de programación matemática***. En particular, aquellas donde la función objetivo y las restricciones se expresan como ecuaciones o desigualdades lineales se llaman ***problemas de programación lineal***.

Un problema de programación lineal consta de una función objetivo lineal por maximizar o minimizar, sujeta a ciertas restricciones en la forma de igualdades o desigualdades lineales.

Desigualdades lineales se llaman ***problemas de programación lineal.***

Siempre que el problema incluya únicamente dos o tres variables de decisión, podemos representar gráficamente las restricciones para dibujar en su intersección el poliedro convexo que conforma la región de factibilidad ***F***.

Si el número de variables es dos, las restricciones, semiespacios cerrados, son semiplanos delimitados por la recta que corresponde a cada restricción. Si el número de variables es tres, los semiespacios en este caso están delimitados por planos.

Para hallar gráficamente la solución de un problema de Programación Lineal con dos variables.

procederemos del siguiente modo:

PASO 1: representaremos todas las restricciones del problema para determinar la región de factibilidad ***F***. Si ésta es vacía, el problema no tiene solución óptima, se dice que es inconsistente. En otro caso. ir al paso 2.

PASO 2: identificar los extremos o vértices de ***F***.

PASO 3: dibujar una de las rectas que pertenece a la familia de rectas paralelas que representa la función objetivo $f(x;y)=k$. Habitualmente. suele dibujarse $f(x;y)=0$ por comodidad.

PASO 4: desplazamos paralelamente a sí misma la recta que representa la función objetivo para determinar la dirección de mejora que será aumento o disminución según si el objetivo del problema es la maximización o minimización de dicha función.

PASO 5: el punto extremo de ***F*** al que corresponde el valor óptimo para la recta que representa la función objetivo es la solución óptima finita del problema.

NOTA: *hay que tener en cuenta que pueden presentarse las situaciones estudiadas en el apartado anterior , cuando existe más de un punto extremo o la región de factibilidad es no acotada.*

Como ejemplo de un problema de programación lineal en que la función objetivo debe maximizarse, considerese el siguiente problema de producción con dos variables

PROBLEMA MODELO 2:

El granjero Lopez tiene ***480*** hectáreas en la que se puede sembrar ya sea trigo o maíz. El calcula que tiene ***800*** horas de trabajo disponible durante la estación crucial del verano. Dados márgenes de utilidad y los requerimientos laborales mostrados a la derecha, ¿Cuántas hectáreas de cada uno debe plantar para maximizar su utilidad? ¿Cuál es ésta utilidad máxima?

Maíz: Utilidad: ***$40*** por hrs. Trabajo*:* ***2hs*** por hrs.
Trigo: Utilidad*:* ***$30*** por hrs. Trabajo*:* ***1hs*** por hrs.

RESOLUCIÓN :

* Como primer paso para la formulación matemática de este problema, se tabula la información dada (Tabla *1*). Si llamamos x a las hectáreas de maíz e y a las hectáreas de trigo. Entonces la ganancia total ***P***, en dólares , está dada por *:* $P=40x+30y$

Que es la función objetivo por maximizar.

	Maíz	*Trigo*	*Elementos disponibles*
Horas	*2*	*1*	
Hectáreas	*1*	*1*	*800*
Utilidad por unidad	*$40*	*$30*	*480*

La cantidad total de tiempo por hectáreas para sembrar maíz y trigo está dada por $2x+y$ horas que no debe exceder las ***800*** horas disponibles para el trabajo. Así se tiene la desigualdad: $2x+y<800$

En forma análoga, la cantidad de hectáreas disponibles está dada por $x+y$, ***y*** ésta no puede exceder las hectáreas disponibles para el trabajo, lo que conduce a la desigualdad. Por último, si no queremos tener pérdidas, x y y no pueden ser negativa, de modo que

$$x>0$$
$$y>0$$

En resumen, el problema en cuestión consiste en maximizar la función objetivo $P=40x+30y$ sujeta a las desigualdades

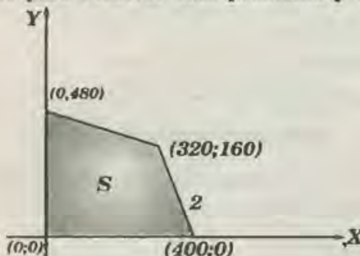
$$2x+y<800$$
$$x+y<480$$
$$x>0$$
$$y>0$$

RESOLUCIÓN GRÁFICA :

Los problemas de programación lineal en dos variables tienen interpretaciones geométricas relativamente sencillas ; por ejemplo, el sistema de restricciones lineales asociado con un problema de programación lineal bidimensional si no es inconsistente define una región plana cuya frontera está formada por segmentos de recta o semirrectas, por lo tanto es posible analizar tales problemas en forma gráfica. Si consideremos el problema del granjero López, es decir, de maximizar $P=40x+30$ y sujeta a :

$$2x+y < 800$$
$$x+y < 480$$
$$x>0;\ y>0$$

El sistema de desigualdades define la región plana ***S*** que aparece en la figura ***5***. Cada punto de ***S*** es un candidato para resolver este problema y se conoce



como *solución factible*. El conjunto ***S*** se conoce como *conjunto factible*. El objetivo es encontrar entre todos los puntos del conjunto ***S*** el punto o los puntos que optimicen la función objetivo ***P***. Tal solución factible es una *solución óptima* y constituyen la solución del

problema de programación lineal en cuestión. Como ya se ha observado, cada punto ***P(x; y)*** en ***S*** es un candidato para la solución óptima del problema en cuestión, por ejemplo, es fácil ver que el punto ***(200;150)*** está en ***S*** y, por lo tanto, entra en la competencia. El valor de la función objetivo *P* en el punto ***(200;150)*** está dado

RESUMEN :

La programación lineal es una técnica que facilita la resolución de problemas de planificación económica o social. Su objetivo es optimizar, es decir, reducir los costos elevados o elevar los beneficios, utilizando las restricciones o condiciones impuestas por el problema.

Así también en lugar de maximizar se puede minimizar y cambiar el sentido de las desigualdades. Intervienen:

* La función $z=ax+by+c$ se llama ***función objetivo*** y es la que se va a optimizar.

* En la expresión, x e y son las ***variables de decisión***, mientras que a, b y c son constantes.

* ***Las restricciones*** son las inecuaciones lineales. Su número lo define el problema.

* Al conjunto de valores de x e y que verifican cada una de las restricciones en su totalidad se le denomina ***conjunto*** (o región) ***factible.*** Todo punto de ese conjunto puede ser solución del problema.

* La ***solución óptima*** del problema será un par de valores $(x_0; y_0)$ del conjunto factible que haga que z tome el valor máximo o mínimo.

La cantidad que se desea maximizar o minimizar se expresa en forma de ecuaciones lineales. Las restricciones que imponen las condiciones de los problemas se expresan en forma de inecuaciones lineales.

Para la resolución de un problema de programación lineal se tiene tres tipos de métodos:

* Método práctico.
* Método analítico o de los vértices.
* Método gráfico o de las rectas de nivel.

MÉTODO PRÁCTICO

Para resolver un problema de programación lineal, es necesario seguir estos pasos:

•Planteamiento.

•Determinación de la región factible.

•Determinación de la solución óptima.

PLANTEAMIENTO :

Para plantear un problema de programación lineal se debe:

•Organizar la información mediante una tabla.

•Asignar una variable a cada una de la incógnitas.

•Determinar las restricciones que se crean conveniente.

•Determinar la función objetivo.

DETERMINACIÓN DE LA REGIÓN FACTIBLE

La solución de la programación lineal, en el supuesto que exista, debe estar en la región determinada por las distintas desigualdades. Esta recibe el nombre de ***región factible***, y puede estar o no acotada.

El procedimiento para determinar la región factible es el siguiente:

* Se resuelve cada inecuación por separado, es decir, se encuentra el semiplano de soluciones de cada una de las inecuaciones.

* La región factible está formada por la intersección o región común de las soluciones de todas las inecuaciones.

DETERMINACIÓN DE LA SOLUCIÓN ÓPTIMA

La solución óptima es aquella que maximiza o minimiza la función objetivo. Dicha solución se encuentra en la frontera de la región factible.

TIPOS DE SOLUCIONES

Los tipos de soluciones que se presentan en los problemas de programación lineal con dos incógnitas pueden ser:

•***FACTIBLES :*** Aquellas que tienen un conjunto de soluciones o valores que satisfacen las restricciones del problema.

•***NO FACTIBLES :*** Aquellas que no tienen un conjunto de soluciones que cumplan con las restricciones del problema.

SOLUCIÓN FACTIBLE :

•***SOLUCIÓN ÚNICA :*** Una solución es única cuando la solución óptima se encuentra sólo en uno de los vértices de la región factible.

•***SOLUCIÓN MÚLTIPLE :*** Una solución es múltiple cuando hay infinitas soluciones que corresponden a los puntos del segmento que tiene por extremos a dos vértices de la región factible.

•***SOLUCIÓN NO ACOTADA :*** Una solución no es acotada cuando la función objetivo no tiene valores extremos, pues la región factible es no acotada.

· ***SOLUCIÓN NO FACTIBLE :*** Una solución es no factible cuando no existe la región factible por falta de puntos comunes en el sistema de inecuaciones.

Matemático norteamericano de origen húngaro. Él planteó los fundamentos de la programación lineal y en 1928 publicó su famoso trabajo Teoría de juegos. En 1947 conjeturó la equivalencia de los problemas de programación lineal y la teoría de matrices desarrollada en sus trabajos.

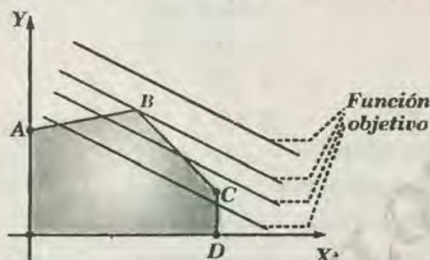


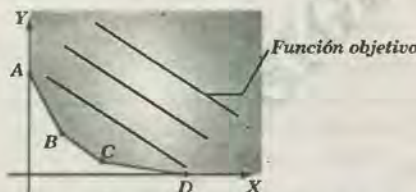
OBSERVACIONES PARA LOS PROBLEMAS RESUELTOS

Se va a resolver problemas de programación lineal en dos variables cuya interpretación se va a dar geométricamente.

Así tenemos:

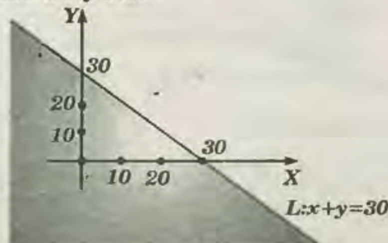
1) La gráfica de la función objetivo son rectas paralelas.





2) La gráfica de cada inecuación de primer grado (lineal) es un semiplano.

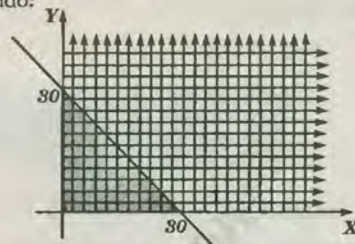
Si se tiene $x + y \leq 30$.



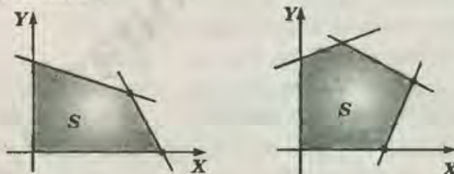
3) Las restricciones de no negatividad $(x \geq 0; y \geq 0)$ hacen que toda la zona rayada sólo nos interesa la que está en el primer cuadrante incluyendo las partes positivas de los ejes X e Y.

Si se tiene: $\left.\begin{array}{r} x + y \geq 30 \\ con\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array}\right\}$

Graficando:



4) La intersección de todas las gráficas de las restricciones es una región plana S, que es un conjunto convexo en R^2.





5) Cada punto del plano S es un candidato a resolver un problema de programación lineal y se conoce como solución factible.

Así entonces, el objetivo, en nuestro problema dado, es encontrar de entre todos los puntos del conjunto S, el punto o puntos que optimicen la función objetivo. Esa solución factible es una solución óptima.

OBSERVACIONES

1) Si un problema de programación lineal tiene una solución, esto debe aparecer en un vértice (esquina) del conjunto factible S, asociado con el problema.

2) Si S está acotado, entonces $z = f(x; y)$ tiene un valor máximo o un valor mínimo en S.

3) Si S no está acotado y los parámetros a y b son negativos, *entonces* $f(x; y) = ax + by$.

Tiene un valor mínimo de S, si las restricciones que definen a S incluyen las desigualdades $x \geq 0; y \geq 0$.

4) Si S es un conjunto vacío, entonces el problema de programación lineal en $f(x; y)$ no tiene un valor máximo o un valor mínimo.

PROBLEMAS RESUELTOS

PROPLEMA 1:

Minimizar $z = 3x + y$.

Sujeta a: $3x + y \geq 5$

$x+3y \geq 3$

$x \geq 0$

$y \geq 0$

RESOLUCIÓN:

Para resolver éste problema de programación lineal en dos variables aplicaremos ***el método de los vértices o de las esquinas***, que en general se enuncia así:

Sea la función objetivo: $f(x; y) = ax + by$.

Luego se ha de realizar los pasos siguientes:

1) Graficar el conjunto factible.

2) Hallar las coordenadas de todas las esquinas (vértices) del conjunto factible.

3) Evaluar el conjunto objetivo en cada esquina.

4) Hallar el vértice que nos proporcione el máximo o mínimo de la función objetivo.

NOTA

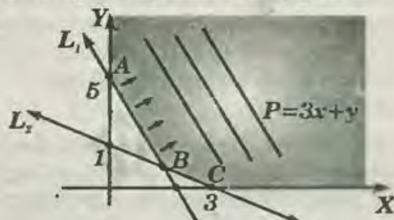
Si existe un sólo vértice con las características anteriores, este constituye una solución única al problema.

Si la función objetivo se mantiene o minimiza en dos esquinas adyacentes de S, entonces existe una Infinidad de soluciones al problema dado que se optimiza en todos los puntos de segmento de recta que une estos vértices.

Graficando las rectas:

• $L_1: 3x: +y = 5$

• $L_2: x + 3y = 3;\ con x \geq 0;\ y \geq 0$



Cálculo del punto B:

$$B(x_o; y_o) = L_1 \cap L_2$$

Resolviendo el sistema formado:

$$\begin{cases} 3x+y=5 \\ x+3y=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{3}{2} \\ y=\dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow B(x_o\ ;y_o)=\left(\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right)$$

• Reemplazando las coordenadas de las esquinas en la función objetivo:

Esquina \ f(x;y)	z=3x+y
A(0;5)	z=3(0)+5=5
$B\left(\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right)$	$z=3\left(\frac{3}{2}\right)+\frac{1}{2}=5$
C(3;0)	z=3(0)+0=9

• Sea $P = 3x + y$ lo que se debe minimizar.

Luego: El mínimo de P es 5 y recae en las esquinas A y B a lo largo del segmento $\overline{AB}$.

NOTA

La función objetivo es una familia de rectas que son paralelas al segmento $\overline{AB}$.

PROPLEMA 2 :

Maximizar $z = 2x + 10y$.

Sujeto a las siguientes restricciones:

$x+y \leq 30$

$x - 3y < 0$

$x \geq 0$

$y \geq 0$

RESOLUCIÓN:

I) De las restricciones:

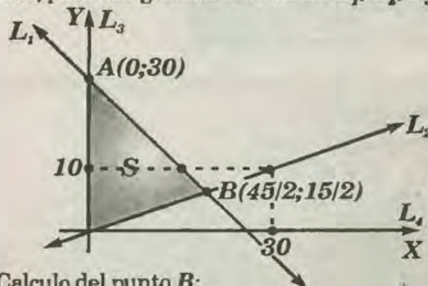
$x+y \leq 30$ hacemos $L_1: x+y=30$

$x-3y \leq 0$ hacemos $L_2: x-3y=0$

$x \geq 0$ hacemos $L_3: x=0$

$y \geq 0$ hacemos $L_4: y=0$

II) Resolvemos gráficamente el sistema de inecuaciones formado, para ello graficar las rectas: L_1, L_2, L_3 y L_4.



III) Calculo del punto B:

$B(x_o; y_o) = L_1 \cap L_2$ ***Resolviendo:***

$$\begin{cases} L_1: x + y = 30 \\ L_2: x - 3y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{45}{2} \\ y=\dfrac{15}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow B(x_o\ ; y_o) = \left(\frac{45}{2};\frac{15}{2}\right)$$

IV) Reemplazar las siguientes coordenadas de las esquinas en la función objetivo:

Esquina \ f(x;y)	$z=2x+10y$
$O(0;0)$	$z=2(0)+10=0$
$A(0;30)$	$z=2(0)+10(30)=300$
$B\left(\frac{45}{2};\frac{15}{2}\right)$	$z=2\left(\frac{45}{2}\right)+10\left(\frac{15}{2}\right)=120$

V) El máximo de z es 300; cuando $x=0;\ y=30$.

PROBLEMA 3 :

Al maximizar: $x+y$; $x,y \in \mathbb{R}$ sujeta a las siguientes condiciones:

$$2x+3y \ge 6$$
$$2x+y \le 6$$
$$y \le 4$$
$$x \ge 0$$
$$y \ge 0$$

Indique la alternativa correcta después de determinar si la proposición es verdadera*(V)* o falsa*(F)*:

I) Los puntos *(2;2)* y *(4;1)* pertenecen a la región admisible.

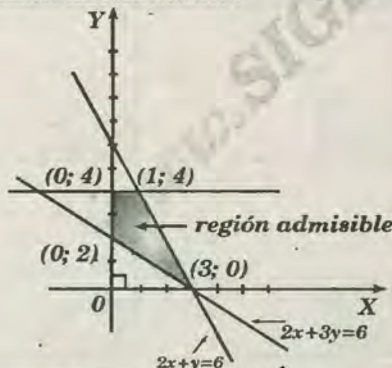
II) La región admisible es un polígono de cuatro lados.

III) El valor óptimo es *5*.

A) V V F *B) V V V* *C) VFV*
D) F V V *E) F V F*

RESOLUCIÓN:

* Graficamos las restricciones :



*Evaluamos en los vértices del polígono :

$(0;2) \Rightarrow x+y=2$

$(0;4) \Rightarrow x+y=4$

$(1;4) \Rightarrow x+y=5$*(máximo)(óptimo)*

$(3;0) \Rightarrow x+y=3$

*Del gráfico obtenemos :

I) FALSO: (2;2) Pertenece a la región admisible.

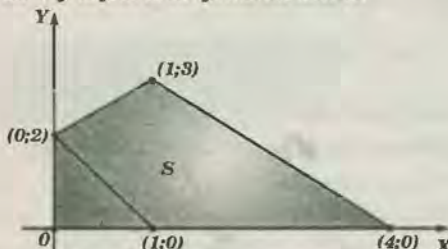
II)VERDADERO: La región admisible es un polígono de *4* lados.

III)VERDADERO: El valor óptimo es *5*.

RPTA : "D"

PROBLEMA 4 :

Determine los valores óptimos de la función objetivo $z=3x+y$ sujeto al conjunto factible S.



RESOLUCIÓN:

Se puede observar en la gráfica que los vértices (esquinas) son puntos de intersección de cierto sistema de ecuaciones.

Vamos a evaluar la función objetivo en cada esquina:

Esquina \ f(x;y)	$z=3x+y$
$A(0;2)$	$z=3(0)+2=2$*(mínimo)*
$B(1;3)$	$z=3(1)+3=6$
$C(4;0)$	$z=3(4)+0=12=$*(máximo)*
$D(1;0)$	$z=3(1)+0=3$

Así tenemos que los valores óptimos de la función objetivo $z=3x+y$.

Son: $z\ (máximo)=12$

$z\ (mínimo)=2$

PROBLEMA 5 :

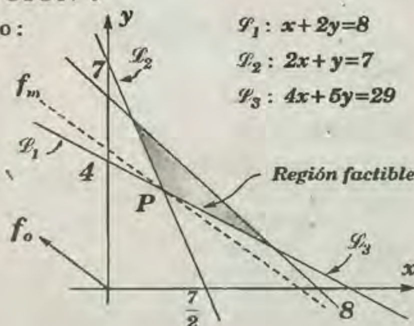
Minimizar $z=2x+3y$ Sujeto a :

$x+2y \ge 8$; $2x+y \ge 7$; $4x+5y \le 29$; $x \ge 0; y \ge 0$

A)15 *B)11* *C)13*
D)21 *E)32*

RESOLUCIÓN :

* Gráficando :



$f_m // f_o$. z será mínimo en P.

* Calculando P : $\mathscr{L}_1 \cap \mathscr{L}_2$

$$\left.\begin{array}{l} x+2y=8 \\ 2x+y=7 \end{array}\right\} \xrightarrow{+} \left\{\begin{array}{l} 3x+3y=15 \\ x+y=5 \end{array}\right.$$

* Luego : $x=2 \wedge y=3$

$$z_{MÍN}=z_{(2;3)}=2(2)+3(3)=13$$

CLAVE : "C"

PROBLEMA 6 :

Maximizar la función : $Z=f(x_1;x_2)=4x_1+3x_2$

sujeta a las restricciones :

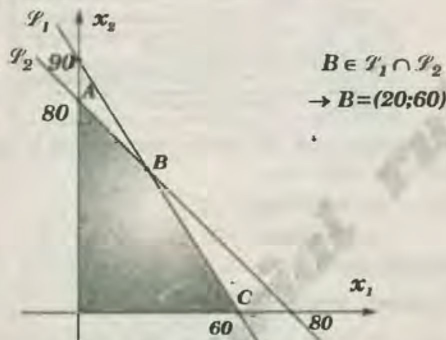
$30x_1+20x_2 \le 1800$; $x_1+x_2 \le 80$; $x_1 \ge 0 \wedge x_2 \ge 0$

A) 260 B) 200 C) 230 D) 290 E) 210

RESOLUCIÓN :

*Restricciones : $\begin{cases} x_1+x_2 \le 80 \\ 30x_1+20x_2 \le 1800 \\ x_1 \ge 0 \wedge x_2 \ge 0 \end{cases}$

* Graficando :



$B \in \mathscr{L}_1 \cap \mathscr{L}_2$
$\rightarrow B=(20;60)$

* En $A=(0;80)$: $f_{(A)}=f_{(0;80)}=240$

* En $B=(20;60)$: $f_{(B)}=f_{(20;60)}=260$

* En $C=(60;0)$: $f_{(C)}=f_{(60;0)}=240$

* Luego : $Z_{MÁX}=260$

RPTA : "A"

PROBLEMA 7 :

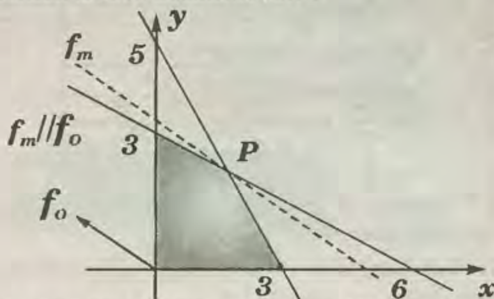
Determine $Máx\,(2x+3y)$

Sujeto a : $\begin{cases} x+2y \le 6 \\ 5x+3y \le 15 \\ x \ge 0; y \ge 0 \end{cases}$

A) 1 B) 9 C) 2 D) 10 E) 69/7

RESOLUCIÓN :

* Graficando adecuadamente , así :



* La solución óptima se encuentra en $P \in f_m$ (cualquiera otra recta paralela a f_o que pase por la región factible contiene puntos de esta donde f tomará valores menores que en P) . Calculando P :

$$\begin{cases} x+2y=6 \\ 5x+3y=15 \end{cases} \rightarrow x=\frac{12}{7}; y=\frac{15}{7} \Rightarrow P=\left(\frac{12}{7};\frac{15}{7}\right)$$

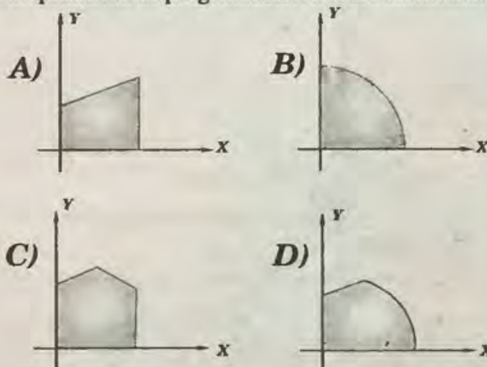
* Luego : $f_{MÁX}=f\left(\frac{12}{7};\frac{15}{7}\right)=2\left(\frac{12}{7}\right)+3\left(\frac{15}{7}\right)$

$$\Rightarrow f_{MÁX}=\frac{24}{7}+\frac{45}{7}=\frac{69}{7}$$

RPTA : "E"

PROBLEMA 8 :

A continuación se muestra 4 regiones en el plano XY indique cuál(es) de ellas representan la región tangible de un problema de programación lineal bidimensional.



E) A ó C

RESOLUCIÓN :

* En programación lineal bidimensional (en $\mathbb{R}^2$) cuyas restricciones son inecuaciones de primer grado , las cuales forman regiones delimitadas por segmentos de rectas, entonces solo es posible que A y C sean regiones factibles en estos problemas .

RPTA : "E"

PROPLEMA 9 :

Una fábrica produce cámaras fotográficas convencionales y digitales. Se obtiene un ingreso de *S/.400* por cada cámara convencional y *S/.700* por cada digital. En un día no se pueden fabricar más de *300* cámaras convencionales ni más de *200* digitales ni tampoco se pueden producir más de *400* en total. Si logra vender toda la producción del día. ¿Cuál es el número de cámaras de cada clase que conviene fabricar para obtener un ingreso máximo?

RESOLUCIÓN:

Planteamiento del problema.

Sea: • x: número de cámaras convencionales

• y: número de cámaras digitales

i) Se pide maximizar el ingreso:

$$I = 400x + 700y$$

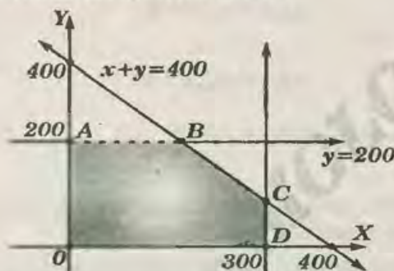
las restricciones según datos son:

$x \leq 300$

$y \leq 200$

Donde: $\left.\begin{matrix} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{matrix}\right\}$ *condición de no negatividad*

ii) Graficando la región factible **S** .



iii) Cálculo de las esquinas (vértices):

A(0; 200) *B(200; 200)* *C(300; 100)*

D(300; 0) *O(0; 0)*

iv) Evaluar la función objetivo en cada esquina:

Esquina \ f(x;y)	I=400x+700y
A(0;200)	I=400(0)+700(200)=140 000
B(200;200)	I=400(200)+700(200)=220 000(*)
C(300;100)	I=400(300)+700(100)=190 000
D(300;0)	I=400(300)+700(0)=120 000
O(0;0)	I=400(0)+700(0)=0

V) Se concluye que se deben producir *200* cámaras convencionales y *200* cámaras digitales para así obtener un ingreso máximo de *S/. 220000*.

PROBLEMA 10 :

Determine el máximo valor que asume : $f(x;y)=2x+y$

Sujeto a : $y \leq x+2;\ y \leq -x+3$

$x \geq 0 \wedge y \geq 0$

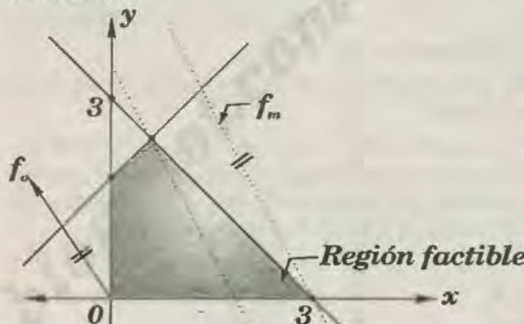
A)2 *B)18* *C)11* *D)29* *E)6*

RESOLUCIÓN :

* Se desea el máximo de $f(x;y)=2x+y$

$$\textit{Restricciones}\begin{cases} y \leq x+2 \\ y \leq -x+3 \\ x \geq 0;\ y \geq 0 \end{cases}$$

* Graficando :



* La recta $f_m (f_m \parallel f_o)$ es aquella que contiene a la solución óptima. $\Rightarrow f$ será máxima en *(3;0)*

* luego : $f_{máx}=f(3;0)=2(3)+0=6$

RPTA :"E"

PROBLEMA 11 :

Sea $f: \mathbb{R}^2 \Rightarrow \mathbb{R}$ una función definida por $f(x;y) = -3x + y$. Determine el punto de la región convexa mostrada en la figura , donde f alcanza su mínimo.

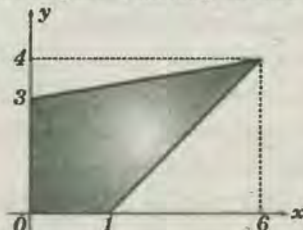
A) (2;3)

B) (2;0)

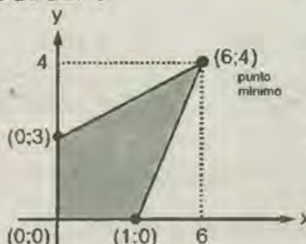
C) (0;3)

D) (6;4)

E) (4;6)



RESOLUCIÓN :



Aplicación de fórmula o teorema Tenemos: *(0; 3), (6; 4), (1; 0), (0; 0)* los vértices de la región poligonal convexa. La función objetivo $f_{(x;y)} = -3x + y$ puede alcanzar su minímo valor en los vértices *(0;3)* , *(6;4)* ó *(1;0)* de la región convexa. Evaluando en estos puntos se tiene :

$$f_{(0;3)} = 3(0) + 3 = 3$$
$$f_{(6;4)} = -3(6) + 4 = -14$$
$$f_{(1;0)} = -3(1) + 0 = -3$$

*Entonces su mínimo valor es **-14** y este se da en el punto *(6;4)*.

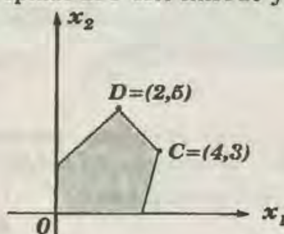
RPTA : "D"

PROBLEMA 12 :

Sea $F(x_1, x_2) = ax_1 + bx_2$, la función objetivo del problema P.

* **P** : minimizar $F(x_1, x_2)$ sujeto a:$(x_1 ; x_2) \in S \subset \mathbb{R}^2$
* Si el lado **CD** de la región admisible **S** que se indica es solución del problema **P** , determine **a+b** de modo que el valor óptimo de **F** este entre **20** y **25**.

A) 2
B) 4
C) 6
D) 8
E) 10



RESOLUCIÓN :

* Dado que el lado **CD** de la región admisible **S** es solución del problema **P** , podemos tomar cualquier punto del segmento **CD** y reemplazarlo en la función objetivo $F(x_1, x_2) = ax_1 + bx_2$. Así tomando los extremos **C** y **D** , y evaluamos
* Para: **C=(4; 3)**, resulta **F(4; 3) = 4a+3b** y
* Para: **D=(2; 5)**, tenemos **F(2; 5) = 2a+5b**
* Dado que el valor óptimo de **F** está entre **20 y 25:**

$\Rightarrow 20 < F(x_1; x_2) < 25$

$\Rightarrow 20 < F(4 ; 3) < 25 \wedge 20 < F(2; 5) < 25$

$\Rightarrow 20 < 4a+3b < 25 \wedge 20 < 2a+5b < 25$

* Luego :

$$\begin{cases} 20<4a+3b<25 \\ 20<2a+5b<25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 60<12a+9<75 \\ 20<2a+5b<25 \end{cases}$$
$$\overline{80<14a+14b<100}$$

$$\Rightarrow \frac{40}{7} < a+b < \frac{50}{7}$$

* Entonces , los valores de *(a+b)* están en el intervalo

$$\left\langle \frac{40}{7} ; \frac{50}{7} \right\rangle$$

* Por lo tanto: **a+b = 6**

RPTA : "C"

PROBLEMA 13 :

Dadas las siguientes proposiciones respecto a la programación lineal:

I) Las restricciones de desigualdad son polinomios de primer y segundo grado

II) El punto óptimo se encuentra en la región admisible.

III) La región admisible contiene puntos , los cuales tienen alguna de sus coordenadas valor negativo

Son correctas:

A) Solo I B) Solo III C) Solo II D) Solo I y II E) Solo II y III

RESOLUCIÓN :

* De acuerdo a la forma general de un problema de programación lineal en dos variables :

$$máx\ (mín)\ f_{(x;y)} = C_1x + C_2y$$

Restricciones: $\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y \le b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y \le b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y \le b_3 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{n1}x + a_{n2}y \le bn \end{cases}$

variables de decisión : $x ; y \ge 0$

*luego :

I) FALSO : pues las restricciones de desigualdad son funciones lineales.

II) VERDADERO : pues la región admisible se ubica en el 1er cuadrante (incluyendo los ejes coordenados); en esta región se encuentran las soluciones admisibles y obviamente se encuentra el punto óptimo.

III) FALSO : pues ninguna solución admisible tiene coordenadas negativas.

RPTA :"C"

PROBLEMA 14 :

Considere el problema : maximizar $z = 30x_1 + 20x_2$. Sujeto a las restricciones

$$x_1 \le 60$$
$$x_2 \le 75$$
$$10x_1 + 8x_2 \le 800$$
$$x_1 \ge 0$$
$$x_2 \ge 0$$

Dadas las siguientes proposiciones referidas al problema.

I) No existe región admisible

II) El óptimo se da en el punto *(60;0)*

III) Una solución factible es el punto *(0;75)*

Son correctas :

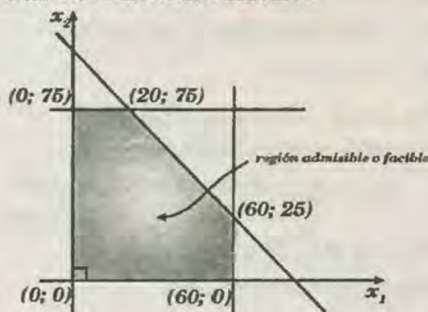
A)Solo I B)Solo II C)Solo III D)I y II E)II y III

RESOLUCIÓN:

* Sea: $(x;y)=(x_1;x_2)$, piden maximizar $Z=30x_1+20x_2$ sujeto a las siguientes :

$$\text{restricciones}\begin{cases} x_1 \le 60;x_2 \le 75 \\ 10x_1+8x_2 \le 800 \\ x_1 \ge 0\ ;x_2 \ge 0 \end{cases}$$

* Al graficar las restricciones tenemos:



* Luego todos los puntos $(x_1;x_2)$ que pertenecen a la región factible se llaman soluciones factibles. Ahora , para hallar el punto óptimo , debemos evaluar la

función **Z** en los vértices.

$(0;0) \Rightarrow Z=0$

$(0;75) \Rightarrow Z=1500$

$(20;75) \Rightarrow Z=2100$

$(60;25) \Rightarrow Z=2300(máx) \Rightarrow (60;25)$

es la solución optima. $(60;0) \Rightarrow Z=1800$

* Son correctas sólo ***III***

RPTA : "C"

PROBLEMA 15 :

En relación al siguiente problema maximizar $Z=x_1+1,5\,x_2$ sujeto a:

$2\,x_1+2\,x_2 \le 160 \quad ; \quad x_1+2x_2 \le 120$

$4\,x_1+2\,x_2 \le 280 \quad ; \quad x_1 \ge 0 ; x_2 \ge 0$

Indique la secuencia correcta después de determinar la veracidad *(V)* o falsedad *(F)* de las siguientes proposiciones.

I) No existe región admisible

II) El óptimo es el punto *(60;20)*

III) Una solución admisible es el punto *(40;40)*

A) V V V B) F F V C) V F V D) V V F E) V F F

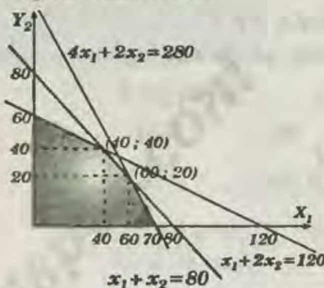
RESOLUCIÓN:

* De acuerdo al problema tenemos:

maximizar $z=f(x_1;x_2)=x_1+1,5x_2$

$$\text{sujeto a}\begin{cases} 2x_1+2x_2 \le 160 \\ x_1+2x_2 \le 120 \\ 4x_1+2x_2 \le 280 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

* Luego la región admisible es:



* Se observa que existe la región admisible.

* Entonces , evaluando en los vértices para hallar la solución óptima se tiene que:

$$z=f(x_1;x_2)=x_1+1,5x_2$$

$f(0;60)=90$

$f(40;40)=100$ ⇒ la solución óptima es *(40;40)*

$f(60;20)=90$

$f(70;0)=70$

RPTA : "B"

PROBLEMA 16 :

Minimizar la función $f(x;y)=2x+8y$ sometidas a las restricciones :

$$\begin{cases} 2x+4y \ge 8 \wedge 2x-5y \le 0 \wedge -x+5y \le 5 \\ x \ge 0; y \ge 0 \end{cases}$$

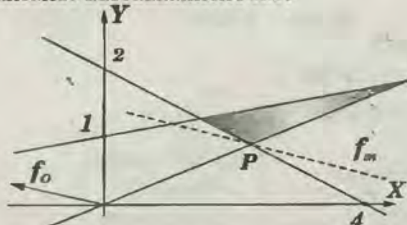
A)2 B)1/5 C)11 D)104/9 E)177/5

RESOLUCIÓN :

* Se desa minimizar : $f_{(x;y)}=2x+8y$

$$\text{* Sujeto A:}\begin{cases} 2x+4y \ge 8 \\ 2x-5y \le 0 \\ -x+5y \le 5 \\ x \ge 0\ ;\ y \ge 0 \end{cases}$$

* Graficando adecuadamente así :



f_o: $2x+8y=0$; $f_m // f_o$

* *luego f* será mínimo en $P \in f_m$. Calculando de P.

$$\begin{cases}2x-5y=0\\2x+4y=8\end{cases} \rightarrow x=\frac{20}{9}; y=\frac{8}{9}$$

*entonces : $f_{MIN}=f_{\left(\frac{20}{9};\frac{8}{9}\right)}=2\left(\frac{20}{9}\right)+8\left(\frac{8}{9}\right)=104/9$

RPTA : "D"

PROBLEMA 17 :

Maximizar $Z(x;y)=3x+2y$ Sujeto a las restricciones ;

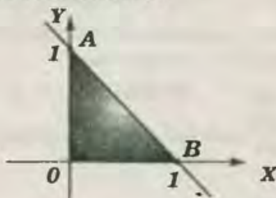
$x+y \leq 1$; $x \geq 0; y \geq 0$

A)0 *B)3* *C)-2* *D)-3* *E)-4*

RESOLUCIÓN :

*Restricciones : $\begin{cases}x+y \leq 1\\x \geq 0 \wedge y \geq 0\end{cases}$

*Graficando éstas rectricciones .



*En $A=(0;1)$: $Z_{(A)}=z_{(0;1)}=2$

*En $B=(1;0)$: $Z_{(B)}=z_{(1;0)}=3$

*Veamos , a lo largo de AB , donde se encuentran las condiciones extremas del problema , se tiene que :

$$2 \leq Z_{(x;y)} \leq 3$$

$\wedge$ como $Z_{(xy)}$ es lineal . $\Rightarrow Z_{MÁX}=3$

RPTA : "B"

PROBLEMA 18 :

Determinar el máximo valor de la expresión : $f(x;y)=4y+3y$

Si : $(x;y) \in \left\{\begin{matrix}(x;y) \in R^2 / 30x+20y \leq 1800\\x+y \leq 80 \ ; \ x \geq 0 \ ; \ y \geq 0\end{matrix}\right\}$

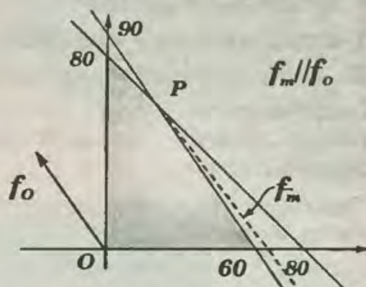
A)210 *B)240* *C)250* *D)200* *E)260*

RESOLUCIÓN :

*Se pide maximizar : $f(x;y)=4x+3y$

* Restricciones : $\begin{cases}30x+20y \leq 1800\\x+y \leq 80\\x \geq 0 \wedge y \geq 0\end{cases}$

Graficando :



* La solución óptima se encuentra en el punto $P \in f_m$. Calculando las coordenadas de P.

$\mathscr{L}_1$: $30x+20y=1800 \Rightarrow 3x+2y=180$

$\mathscr{L}_2$: $x+y=80$

$P \in \mathscr{L}_1 \cap \mathscr{L}_2 \rightarrow x+2(x+y)=180$

$\rightarrow x=20 \wedge y=60 \rightarrow P=(20;50)$

$$Z_{MÁX}=Z_{(20;60)}=4(20)+3(60) \Rightarrow Z_{MÁX}=260$$

RPTA : "E"

PROBLEMA 19 :

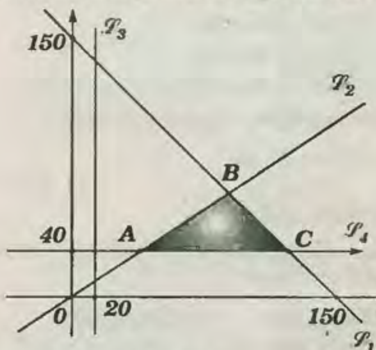
Maximizar $f(x;y)=x+y$; si :

$\{x+y \leq 150 ; y \leq \frac{x}{2} ; x \geq 20 \ y \geq 40 ; xy \in Z^+$

A)150 *B)100* *C)110* *D)180* *E)190*

RESOLUCIÓN :

*Graficando las tres primeras restricciones :



$A \in \mathscr{L}_2 \cap \mathscr{L}_4 \rightarrow A=(80;40)$

$B \in \mathscr{L}_1 \cap \mathscr{L}_2 \rightarrow B=(100;50)$

$C \in \mathscr{L}_1 \cap \mathscr{L}_2 \rightarrow C=(110;40)$

* Luego : $f_{(A)}=f_{(80;40)}=120$

$f_{(C)}=f_{(110;60)}=150 \quad \Rightarrow f_{MÁX}=150$

RPTA : "A"

PROBLEMA 20 :

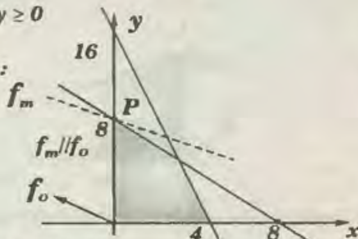
Determine el máximo valor de $f(x;y)=3x+6y$, tal que:

$$\begin{cases} x+y\le 8 \\ 2x+\frac{y}{2}\le 8 \\ x\ge 0; y\ge 0 \end{cases}$$

A)48
B)30
C)40
D)238
E)60

RESOLUCIÓN :

*Graficando :



f será máxima en $P=(0;8)$

*Luego : $f_{máx}=f_{(0;8)}=3(0)+6(8)$

$f_{máx}=48$

RPTA : "A"

PROBLEMA 21 :

Minimizar : $C(x;y)=6x+8y$, sujeta a las restricciones

$40x+10y>2400$; $10x+15y>2100$

$5x+15y>1500$; $x>0$; $y>0$

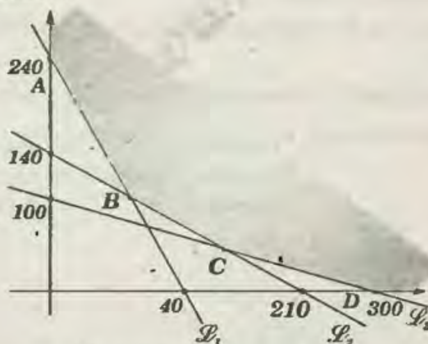
A)2200 B)1120 C)1140 D)1800 E)1220

RESOLUCIÓN :

$$C(x;y)=6x+8y=2(3x+4y)$$

* Restricciones : $\begin{cases} 40x+10y>2400 \\ 10x+15y>2100 \\ 5x+15y>1500 \\ x>0 \wedge y>0 \end{cases}$

* Graficando :



$B \in \mathscr{L}_1 \cap \mathscr{L}_2 \to B=(30;120)$

$C \in \mathscr{L}_2 \cap \mathscr{L}_3 \to C=(120;60)$

* Luego : $C_{(A)}=C_{(0;240)}=1920$;

$C_{(B)}=C_{(30;120)}=1140$

$C_{(C)}=C_{(120;60)}=1200$; $C_{(D)}=C_{(300;0)}=1800$

* De donde : $C_{MIN}=1140$

RPTA : "C"

PROBLEMA 22 :

Maximizar $Z=4x+6y$. sujeta a :

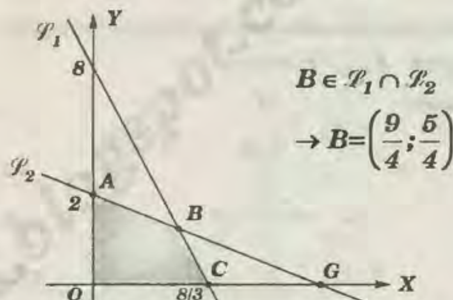
$x+3y\le 6$; $3x+y\le 8$; $x\ge 0; y\ge 0$

A)33/2 B)10 C)12 D)13 E)17/2

RESOLUCIÓN :

$Z=4x+6y=2(2x+3y)$

* Restricciones : $\begin{cases} x+3y\le 6 \\ 3x+y\ge 8 \\ x\ge 0 \wedge y\ge 0 \end{cases}$



$B \in \mathscr{L}_1 \cap \mathscr{L}_2$

$\to B=\left(\frac{9}{4};\frac{5}{4}\right)$

Los valores extremos de la función se encuentran a lo largo de la frontera ABC, puesto que f es lineal. Para hallar el máximo de f sólo basta evaluar ésta en los puntos A ; B y C . El mayor valor entre ellos será el máximo de f.

* En : $A=(0;2)$: $Z_{(A)}=Z_{(0;2)}=12$

* En : $B=\left(\frac{9}{4};\frac{5}{4}\right)$: $Z_{(B)}=Z_{\left(\frac{9}{4};\frac{5}{4}\right)}=\frac{33}{2}$

* En : $C=\left(\frac{8}{3};0\right)$: $Z_{(C)}=Z_{\left(\frac{8}{3};0\right)}=\frac{32}{3}$

* Luego : $Z_{máx}=\frac{33}{2}$

RPTA : "A"

PROBLEMA 23 :

Beatríz tiene $80m^2$ de tela de algodón y $120m^2$ de tela de lana . Un traje requiere $1m^2$ de algodón y $3m^2$ de lana ; y un vestido de mujer requiere $2m^2$ de cada una de las dos telas . Calcular el número de trajes y vestidos que debe confeccionar Beatríz para maximizar los beneficios ; si un traje y un vestido se venden al mismo precio .

A) 20 trajes y 30 vestidos B) 20 trajes y 18 vestidos

C) 35 trajes y 26 vestidos
D) 15 trajes y 30 vestidos
E) 27 trajes y 40 vestidos

RESOLUCIÓN :

* Haciendo un cuadro(tabulación) con los datos :

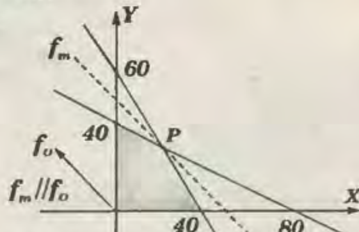
	Traje	Vestido	m^2
Algodon	1	2	80
Lana	3	2	120

* Sean: x: # de trajes ; y: # de vestidos

* Restricciones : $\begin{cases} x+2y \le 80 \\ 3x+2y \le 120 \\ x \ge 0 \wedge y \ge 0 \end{cases}$

* Si k es el precio de cada prenda , entonces la función objetivo será . $f_{(x;y)}=k(x+y)$

* Graficando :



f tomará su máximo valor . En $P \in f_m$

*calculando las coordenadas de P .

$$\begin{cases} x+2y=80 \\ 3x+2y=120 \end{cases} \rightarrow x=20 \wedge y=30$$

* Se deben confeccionar. 20 trajes $\wedge$ 30 vestidos

RPTA : "A"

PROBLEMA 24 :

UNITOUR-S.A. requiere producir dos clases de recuerdos de viaje : del tipo ***A*** y ***B***.Cada unidad tipo ***A*** producirá una ganancia de ***$0,8***. Para fabricar un recuerdo tipo ***A*** se necesitan dos minutos en la máquina ***I*** y ***1*** minuto en la máquina ***II*** . Un recuerdo tipo ***B*** requiere ***1*** minuto en la máquina ***I*** y ***3*** en máquina ***II***. Hay ***3*** horas disponibles en la máquina ***I*** y ***5*** horas disponibles.en la máquina ***II*** para procesar el pedido. ¿Cuántas piezas de cada tipo debe producir ***UNITOUR-S.A***. para maximizar la ganacia?

A)A=48 ; B=84 *B)A=60 ; B=32*
C)A=65 ; B=42 *D)A=72 ; B=50*

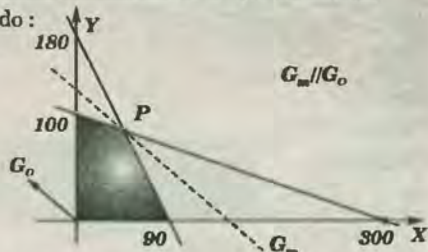
RESOLUCIÓN :

* Sean x: # piezas de tipo ***A***.
y: # piezas de tipo ***B***.

* Sea ***G*** , la ganancia obtenida tal que : $G_{(x;y)}=x+0,8y$

Sujeto A :	$x \ge 0 \wedge y \ge 0$
Hora en maquina I :	$2x+y \le 180$
Horas en maquina II :	$x+3y \le 300$

* Graficando :



G, será máxima en ***P*** , cuyas coordenadas son :

$$\begin{cases} 2x+y=180 \\ x+3y=300 \end{cases} \rightarrow x=48;y=84$$

$\Rightarrow$ La ganancia será máxima cuando se produzcan :
48 piezas del tipo ***A*** y ***84*** piezas del tipo ***B*** .

RPTA : "A"

PROBLEMA 25 :

Priscilo tiene ***24*** Ha en la que puede sembrar cebada o maíz. Él calcula que tiene ***40*** horas de trabajo disponible durante la estación crucial de verano . Dados los márgenes de utilidad y requerimientos siguientes :

Maíz: *Utilidad : **$40** por Ha .*
*Trabajo : **2** hrs por Ha .*

Cebada : *Utilidad : **$30** por Ha .*
*Trabajo : **2** hr por Ha .*

¿Cuántas hectáreas ***(Ha)*** de cada cereal debe plantar para maximizar su utilidad?

A)600 *B)880* *C)400* *D)7600* *E)180*

RESOLUCIÓN :

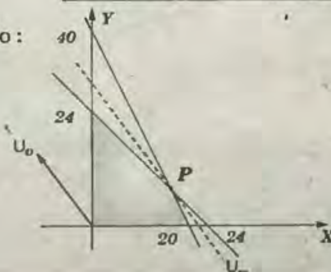
* Sean: x: # Hectáreas de maíz ; y: # Hectáreas de trigo

* La utilidad $\bigcup$ (función objetivo se da . $U_{(x;y)}=40x+30y$

* Restricciones :

Terreno :	$x+y \le 24$
Horas de trabajo :	$2x+y \le 40$
Además:	$x \ge 0 \wedge y \ge 0$

* Graficando :



U será máxima en **P**, cuyas coordenadas son :

$$\begin{cases} x+y=24 \\ 2x+y=40 \end{cases} \rightarrow x=16\ ;\ y=8$$

Luego : $U_{MÁX}=U_{(16;8)}=40(16)+30(8)=880$

RPTA : "D"

PROBLEMA 26 :

En los Olivos , se van a construir casas de dos tipos : ***nivel I*** y ***nivel II***. La empresa constructora dispone de **$ 1800 000**, siendo el costo de cada tipo de casa **$ 30 000** y **$20 000** respectivamente. La municipalidad exige que el número total de casas no debe superar a *80*. Sabiendo que el beneficio por la venta de una casa ***nivel II*** es de **$4000** y por ***nivel I*** **$3000**. ¿Cuántas casas ***nivel I*** deben construirse para obtener el máximo beneficio?

A)10 B)60 C)50 D)90 E)100

RESOLUCIÓN :

* Sean **x :** # de casas ***nivel II***

y : # de casas ***nivel I***

∧ El beneficio $\mathscr{B}_{(x;y)}$:

$$\mathscr{B}_{(x\,;\,y)}=4000x+3000y=1000(4x+2y)$$

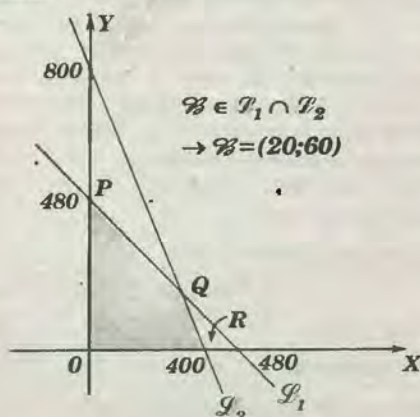
*Restricciones :

$$\begin{cases} 30000x+20000y \le 1800\ 00 \\ x+y \le 80 \\ x \ge 0 \wedge y \ge 0 \end{cases}$$

*Las cuales , piden quedar así :

$$\begin{cases} 3x+2y \le 180 \\ x+y \le 80 \ \wedge\ x \ge 0 \wedge y \ge 0 \end{cases}$$

* Graficando :



* Luego :

$\mathscr{B}_{(A)}=\mathscr{B}_{(0;80)}=1000(240)=240\ 000$

$\mathscr{B}_{(B)}=\mathscr{B}_{(20;60)}=1000(50+180)=260\ 000$

$\mathscr{B}_{(C)}=\mathscr{B}(60;0)=1000(240)=240\ 000$

* El máximo beneficio se obtienen en $\mathscr{B}$ cuando se contruyan : **20** casas ***nivel II*** ∧ **60** ***nivel I***

RPTA : "B"

PROBLEMA 27 :

Un club social encarga a una empresa de trasporte el viaje para llevar a los **1200** socios a ver la final de su equipo , la empresa dispone de autobús de **50** plazas y de microbuses de **30** plazas . El precio de cada viaje en el autobús es de **252** dólares y el del viaje en microbús de **180** dólares . Sabiendo que la empresa dispone de **28** conductores. ¿Cuál es el costo máximo del viaje?

A) 6125 B) 6000 C) 6002 D) 70000 E) 6336

RESOLUCIÓN :

* Sean :

x : # de autobuses .

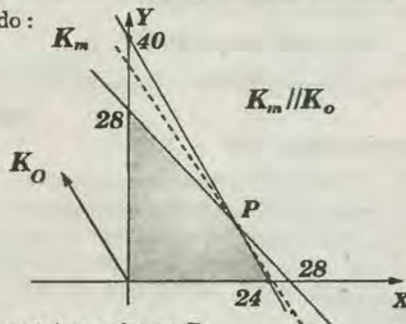
y : # de microbuses .

* En costo **K** del viaje será : $K_{(x\,;\,y)}=252x+180y$

* Sujeto a las restricciones :

N° conductores :	$x+y \le 28$
N° aficionados :	$50x+30y \le 1200$
∧ ***Además :***	$x \ge 0 \wedge y \ge 0$

* Graficando :



K Toma su máxima valor en **P** .

* Calculando las coordenadas de **P** .

$$\begin{cases} x+y=28 \\ 50x+30y=1200 \end{cases} \rightarrow x=18 \wedge y=10$$

* Luego : $K_{MÁX}=K_{(18;10)}$

$$\Rightarrow K_{MÁX}=252(18)+180(10)=6336$$

RPTA : "E"

PROBLEMA 28 :

Una microempresa se especializa en vender dos tipos de artículos **A** y **B** . Si "**x**" representa la cantidad de artículos producidos del tipo **A** , "**y**" representa la cantidad de artículos producidos del tipo **B** ,sujeta a:

$2x+y\leq 8$; $2x+3y\leq 12$

Determine la utilidad máxima $\cup$ si está dada por :

$\cup(x;y)=(3x+y)\times 200$ dólares

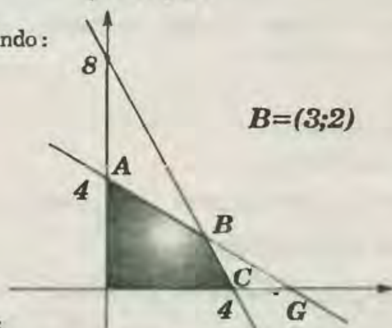
A)$300 B)$800 C)$200 D)9000 E)$2400

RESOLUCIÓN :

$\cup(x;y)=200(3x+y)$

*Restricciones : $\begin{cases} 2x+y\leq 8 \\ 2x+3y\leq 12 \\ x+0\wedge y\geq 0 \end{cases}$

*Graficando :



* Luego :

$\cup_{(A)}=\cup_{(0;4)}=200(0+4)=800$

$\cup_{(B)}=\cup_{(3;2)}=200(9+2)=2200$

$\cup_{(C)}=\cup_{(4;0)}=200(12+0)=2400$

$\Rightarrow$La utilidad máxima es : $\cup_{MÁX}=2400$ dólares

RPTA : "E"

PROBLEMA 29 :

UNI_COMPANY produce dos tipos de artículos mecánico y eléctricos mensualmente cada uno requiere para su fabricación del uso de tres máquinas **A ; B** y **C**. En la tabla adjunta se muestra la información relacionada con la fabricación de estos tipos de artículos.

	A	B	C	Utilidad / Unidad
Mecánico	2h	1h	1h	S/.4
Eléctrico	1h	2h	1h	S/.6
Máx. de horas disponibles	180h	160h	100h	

Se sabe que la compañía vende todos los atículos que produce. Determina la utilidad máxima mensual (en Soles)

A)S/.160 B) 200 C) 520 D) 880 E) 320

RESOLUCIÓN :

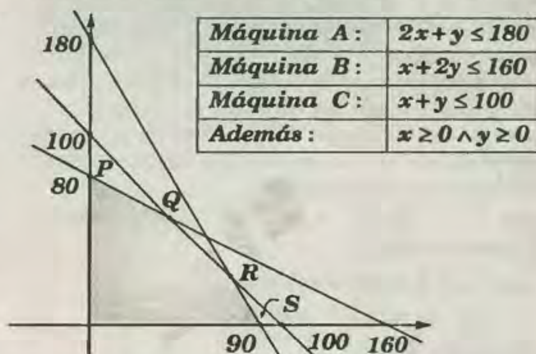
* Sean : x : # artículos magnéticos .

y : # artículos eléctricos

$\wedge$La unidad $\cup$, definida por : $U_{(x;y)}=4x+6y=2(2x+3y)$

* De la tabla , extremos las siguientes restricciones :

Máquina A :	$2x+y\leq 180$
Máquina B :	$x+2y\leq 160$
Máquina C :	$x+y\leq 100$
Además :	$x\geq 0\wedge y\geq 0$



* Calculando las coordenadas de **Q** y **R** , se obtiene :

$Q=(40;60)\wedge R(80;20)$

* Luego :

$U_{(P)}=U_{(0;80)}=2(240)=480$

$U_{(Q)}=U_{(40;60)}=2(80+180)=520$

$U_{(R)}=U_{(80;20)}=2(160+60)=440$

$U_{(S)}=U_{(90;0)}=2(180+0)=360 \Rightarrow U_{MÁX}=520$

RPTA : "C"

PROBLEMA 30 :

Santillana S.A. planea utilizar una sección de planta para producir dos libros de texto . La utilidad unitaria es de S/.2 para el libro*1*, y S/.3 para el libro *2*. El texto *1* requiere ***4h*** para su impresión y ***6h*** para su encuadernación. El texto ***2*** requiere ***5h*** para imprimirse y de ***3h*** para su encuadernado.Se dispone de ***200 h*** para imprimir y de ***210h*** para encuadernar . Determine la máxima utilidad que puede obtener .

A)S/.120 B) 180 C) 100 D)110 E) 1000

RESOLUCIÓN :

* Haciendo un cuadro de datos :

	Texto 1	Texto 2	Horas
Impresión	4	5	200
Encuadernar	6	3	210

* Sean : x : # de unidades del texto *1*

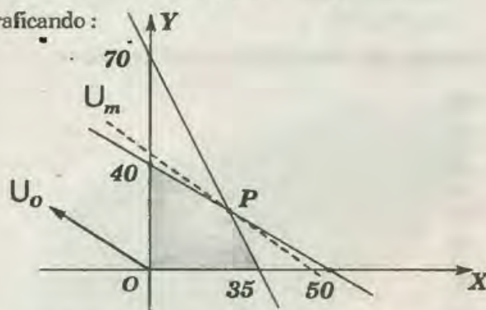
y : # de unidades del texto 2

* Restricciones :

$4x+5y \le 200$; $6x+3y \le 210$; $x \ge 0 \wedge y \ge 0$

* Función objetivo : $U_{(x;y)}=2x+3y$

* Graficando :



* U será máxima en P , cuyas coordenadas son :

$$\begin{cases} 4x+5y=200 \\ 6x+3y=210 \end{cases} \rightarrow x=25 \wedge y=20$$

* Luego : $U_{MÁX}=U_{(25;20)}=2(25)+3(20)$

$$\Rightarrow U_{MÁX}=110 \text{ soles}$$

RPTA : "D"

PROBLEMA 31 :

La universidad de la selva tiene *480* hectáreas en la que puede sembrar yuca o café . Se calcula que tiene *800* horas de trabajo disponible durante la estación crucial de verano . Dados los márgenes de utilidad y los requerimientos laborales que se adjunta .

YUCA : Utilidad : *$40* por hectárea

Trabajo : *2* horas por hectárea

CAFÉ : Utilidad : *$30* por hectárea

Trabajo : *1* hora por hectárea

¿Cuántas hectáreas de cada uno debe plantar para maximizar su utilidad? ¿Cuál es la utilidad máxima?

A)17600 B)18000 C)19200 D)12210 E)24200

RESOLUCIÓN :

* Sean: x : # Hectárea de maíz

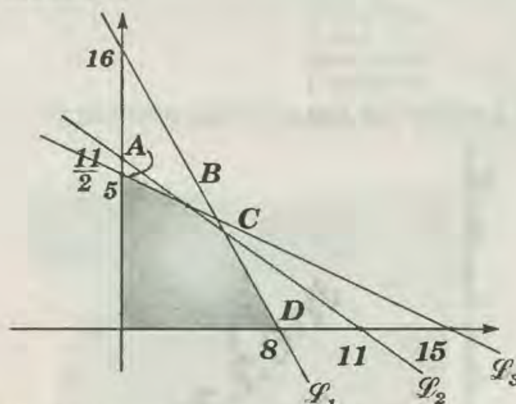
y :# Hectárea de trigo

* La utilidad $\mathcal{U}_{(x;y)}$: $\mathcal{U}(x;y)=40x+30y=10(4x+3y)$

* Restricciones :

Terreno :	$x+y \le 480$
Horas de trabajo :	$2x+y \le 800$
Además:	$x \ge 0 \wedge y \ge 0$

* Graficando :



$\mathcal{U}_{(P)}=\mathcal{U}_{(0;480)}=10(3;480)=14\,400$

$\mathcal{U}_{(Q)}=\mathcal{U}_{(320;160)}=10(1280+480)=17\,600$

$\mathcal{U}_{(R)}=\mathcal{U}_{(400;0)}=10(1600)=16000$

$\Rightarrow \mathcal{U}_{MÁX}=17\,600$

RPTA : "A"

PROBLEMA 32 :

Un frutero necesita *16* cajas de naranjas, *5* de plátanos y *20* de manzanas. Dos mayoristas pueden suministrarle para satisfacer sus necesidades , pero sólo venden la fruta en contenedores completos. El mayorista **A** envía en cada contenedor *8* cajas de naranjas , *1* de plátanos y *2* de manzanas. El mayorista **B** envía en cada contenedor *2* cajas de naranjas , una de plátanos y *7* de manzanas. Sabiendo que el mayorista **A** se encuentra a *150 km* de distancia y el mayorista **B** a *300km* , calcular cuántos contenedores habrá de comprar a cada mayorista , con objeto de ahorrar tiempo y dinero , reduciendo al mínimo la distancia de lo solicitado.

RESOLUCIÓN :

* *MATEMATIZACIÓN DEL PROBLEMA :*

	MAYORISTA A	MAYORISTA B	Necesidades mínimas
Naranjas	8	2	16 cajas
Plátanos	1	1	5 cajas
Manzanas	2	7	20 cajas
Distancia	150 Km	300 km	

* *VARIABLES INSTRUMENTALES :*

Llamamos x : al número de contenedores del mayorista **A**

Llamamos y : al número de contenedores del mayorista **B** ·

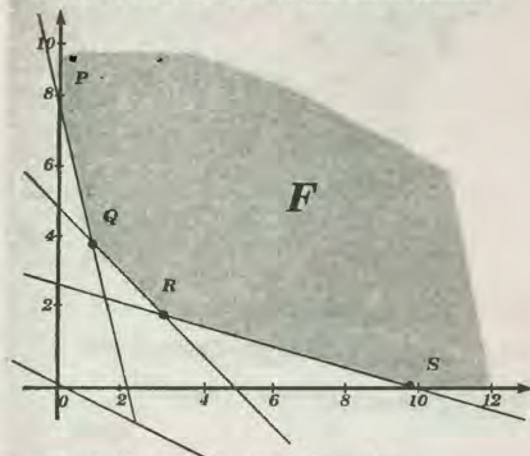
* *FUNCIÓN OBJETIVO (Minimizar)*

$$f(x;y) = 150x + 300y$$

*** RESTRICCIONES**

$$\left.\begin{array}{r} 8x+2y\geq 16 \\ x+y\geq 5 \\ 2x+7y\geq 20 \\ x\geq 0;y\geq 0 \end{array}\right\}$$

*** REGIÓN DE SOLUCIONES FACTIBLES**



*** SOLUCIÓN FACTIBLE ÓPTIMA**

Observamos que el mínimo se alcanza en el punto ***R(3;2)*** (solución óptima)Por tanto el frutero solicitará *3* contenedores del mayorista ***A*** y *2* contenedores del mayorista ***B***.

PROBLEMA 33 :

Una compañía tiene dos minas : la mina ***A*** produce diariamente ***1*** tonelada de carbón de antracita de alta calidad , *2* toneladas de carbón de calidad media y *4* toneladas de carbón de baja calidad ; la mina ***B*** produce *2* toneladas de cada una de las tres clases. La compañía necesita ***70*** toneladas de carbón de alta calidad , ***130*** de calidad media y ***150*** de baja calidad . Los gastos diarios de la mina ***A*** ascienden a ***150*** dólares y los de la mina ***B*** a ***200*** dólares. ¿Cuántos días deberán trabajar en cada mina para que la función de coste sea mínima?

RESOLUCIÓN :

*** MATEMATIZACIÓN DEL PROBLEMA**

	Mina A	Mina B	Necesidades mínimas
Alta	1	2	70
Media	2	2	130
Baja	4	2	150
Coste	diario	150 $	200 $

***VARIABLES INSTRUMENTALES :**

Llamamos x : al número de días trabajados en la mina ***A***

Llamamos y : al número de días trabajados en la mina ***B***.

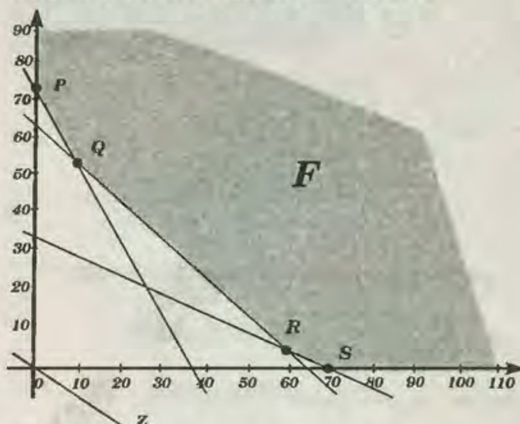
*** FUNCIÓN OBJETIVO (MINIMIZAR) :**

$$f(x;y) = 150x + 200y$$

*** RESTRICCIONES :**

$$\left.\begin{array}{l} x+2y\geq 70 \\ 2x+2y\geq 130 \\ 4x+2y\geq 150 \\ x\geq 0;y\geq 0 \end{array}\right\}$$

*** REGIÓN DE SOLUCIONES FACTIBLES :**



*** SOLUCIÓN FACTIBLE ÓPTIMA :**

El mínimo se obtiene en el punto ***R(60;5)*** es decir, la compañía debe trabajar ***60*** días en la mina ***A*** y ***5*** días en la mina ***B*** para que el coste sea mínimo.

*** VALOR DEL PROGRAMA LINEAL :**

Como la función objetivo es $f(x;y) = 150x + 200y$ el valor del programa lineal (gasto) es :

$f(x;y) = 150\times60 + 200\times5 = 10\,000$ **$** diarios.

PROBLEMA 34 :

Imaginemos que las necesidades semanales mínimas de una persona en proteínas , hidratos de carbono y grasas son , respectivamente , ***8; 12*** y ***9*** unidades. Supongamos que debemos obtener un preparado con esa composición mínima mezclando dos productos ***A*** y ***B***, cuyos contenidos por ***Kg*** son los que se indican en la siguiente tabla :

	Proteínas	Hidratos	Grasas	Costo/kg
A	2	6	1	600
B	1	1	3	400

a) ¿Cuántos Kg de cada producto deberán comprarse semanalmente para que el costo de preparar la dieta sea mínimo?

b) ¿Cuántos ***Kg*** de cada producto deberíamos comprar si el precio de ***A*** subiera a ***1000 pts/Kg*** ?

RESOLUCIÓN :

* MATEMATIZACIÓN DEL PROBLEMA :

	A	B	Necesidades
Proteínas	2	1	8
Hidratos	6	1	12
Grasas	1	3	9
Coste	600	400	

* VARIABLES INSTRUMENTALES :

Llamamos x : al número de Kg. usados del producto **A**

Llamamos y : al número de Kg. usados del producto **B**

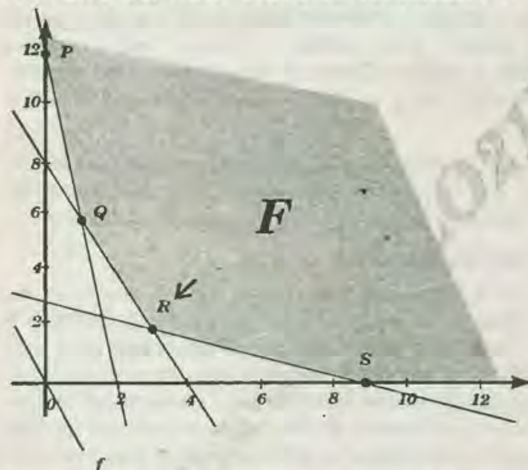
* FUNCIÓN OBJETIVO (MINIMIZAR) :

$$f(x;y) = 600x + 400y$$

* RESTRICCIONES :

$$\left.\begin{array}{r} 2x+y \geq 8 \\ 6x+y \geq 12 \\ x+3y \geq 9 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array}\right\}$$

*REGIÓN DE SOLUCIONES FACTIBLES :



* SOLUCIÓN FACTIBLE ÓPTIMA :

Todos los puntos que forman la región **F** son soluciones factibles , y por paralelismo con la recta de beneficio nulo f vemos que $R(3;2)$ es el punto mínimo. Por tanto , deben comprarse 3 **kg**. de **A** y 2 **kg**. de **B** para que el gasto sea mínimo.

* VALOR DEL PROGRAMA LINEAL :

Cuando la función objetivo es $f(x;y)=600x+400y$ el valor del programa lineal (gasto) es **2600 pts**. Si la función objetivo es $f(x;y) = 100x + 400y$ la solución óptima está en el punto $Q(1; 6)$ y el valor del programa lineal (gasto) es **3400 pts**.

PROBLEMA 35 :

En la elaboración de un producto **A** se necesita una sustancia **B**. La cantidad de **A** obtenida es menor o igual que el doble de **B** utilizada , y la diferencia entre las cantidades del producto **B** y **A** no supera los **2g** mientras que la suma no debe sobrepasar los **5g**. Además se utiliza por lo menos **1g** de **B** y se requiere **1g** de **A**. La sustancia **A** se vende a **5** millones y la **B** cuesta **4** millones el gramo. Calcular la cantidad de sustancia **B** necesaria para que el beneficio sea máximo.

RESOLUCIÓN :

* VARIABLES INSTRUMENTALES :

Llamamos x a la cantidad de sustancia **A** .

Llamamos y a la cantidad de sustancia **B** .

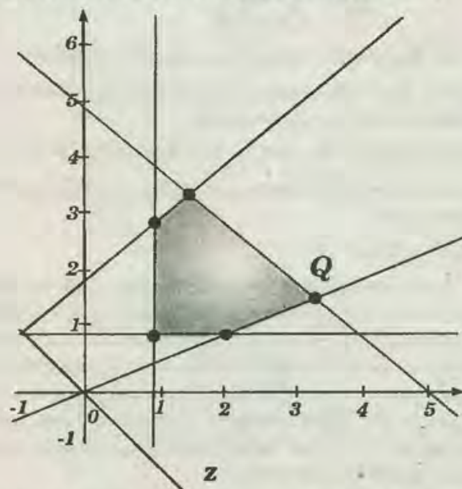
* FUNCIÓN OBJETIVO (MAXIMIZAR):

$$f(x;y) = 5x + 4y$$

* RESTRICCIONES

$$\left.\begin{array}{r} x \leq 2y \\ y-x \leq 2 \\ y+x \leq 5 \\ x \geq 1; y \geq 1 \end{array}\right\}$$

* REGIÓN DE SOLUCIONES FACTIBLES :



* SOLUCIÓN FACTIBLE ÓPTIMA :

Se encuentra en el punto $Q(10/3;5/3)$, es decir la cantidad de sustancia **B** para que el beneficio sea máximo debe ser $5/3$ **g**.

PROBLEMA 36 :

Se considera la región del plano determinada por las inecuaciones :

$$x+3 \geq y \,;\, 8 \geq x+y \,;\, y \geq x-3 \,;\, x \geq 0;\; y \geq 0$$

a) Dibujar la región del plano que definen, y calcular sus vértices.

b) Hallar el punto de esa región en el que la función

$F(x;y) = 6x + 4y$ alcanza el valor máximo y calcular dicho valor.

RESOLUCIÓN:

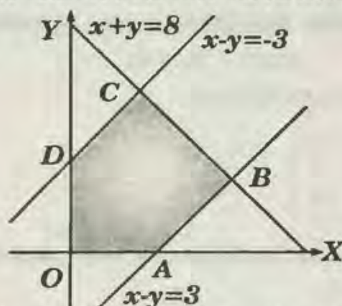
a) Hay que dibujar la región factible correspondiente. Para ello vamos a representar las rectas :

$$x - y = -3 \,;\, x + y = 8 \,;\, x - y = 3$$

La región factible es la determinada por los vértices **O, A, B, C** y **D**.

Las coordenadas de los vértices son:

$A(3;0);B(5{\times}5;2{\times}5)\,;C(2{\times}5;5{\times}5)\,;D(0;3)$ y $O(0;0)$.



b) Para determinar dónde la función objetivo

$F(x;y) = 6x + 4y$ alcanza su máximo, calculamos los valores que toma en los vértices :

$F(A)=18\,;\,F(B)=43\,;\,F(C)=37\,;\,F(D)=12\,;\,F(O)=0.$

* Luego la función alcanza su máximo en el vértice **B** y su valor es **43**.

PROBLEMA 37 :

Las restricciones pesqueras impuestas por la **CEE** obligan a cierta empresa a pescar como máximo **2000** toneladas de merluza y **2000** toneladas de rape, además, en total, las capturas de estas dos especies no pueden pasar de las **3000** toneladas. Si el precio de la merluza es de **1000 soles/kg** y el precio del rape es de **1500 soles/kg**, ¿qué cantidades debe pescar para obtener el máximo beneficio?

RESOLUCIÓN:

* Sean : x = número de toneladas de merluza

y = número de toneladas de rape

Del enunciado deducimos las restricciones :

*Como máximo **2000** toneladas de merluza: $x \le 2000$

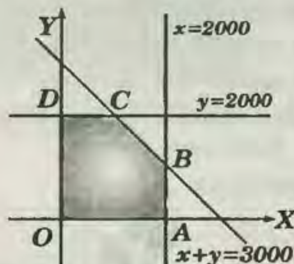
* Como máximo **2000** toneladas de rape : $y \le 2000$

* Las capturas de estas dos especies no pueden pasar de las **3000** toneladas : $x + y \le 3000$

La función objetivo que da el beneficio en miles de soles y que hay que maximizar viene dada por :

$$f(x;y) = 1000x + 1500y$$

Representando las rectas : $x = 2000$; $y = 2000$, $x + y = 3000$ correspondientes a las fronteras de las restricciones obtenemos la región factible :



Donde los vértices obtenidos son :

$A(2000;0);B(2000;1000)\,;C(1000;2000)\,,D(0;2000)$ y $O(0;0)$.

Al sustituir sus coordenadas en la función objetivo f resulta : $f(A) = 2000$ millones de soles. ; $f(B) = 3500$ millones de soles; $f(C)=4000$ millones de soles ; $f(D) = 3000$ millones de soles y $f(O)= 0$ soles.

⇒ La función objetivo alcanza su máximo en el vértice **C**, por lo que las cantidades a pescar son **1000** toneladas de merluza y **2000** toneladas de rape.

PROBLEMA 38 :

Dos pinturas **A** y **B** tienen ambas dos tipos de pigmentos **p** y **q**; **A** está compuesto de un **30%** de **p** y un **40%** de **q**, **B** está compuesto de un **50%** de **p** y un **20%** de **q**, siendo el resto incoloro. Se mezclan **A** y **B** con las siguientes restricciones : La cantidad de **A** es mayor que la de **B**. Su diferencia no es menor que **10** gramos y no supera los **30** gramos. **B** no puede superar los **30** gramos ni ser inferior a **10** gramos.

a) ¿ Qué mezcla contiene la mayor cantidad del pigmento **p**?.

b) ¿ Qué mezcla hace **q** mínimo?

RESOLUCIÓN:

* Sean x e y, respectivamente, los gramos de las pinturas **A** y **B** que aparecen en la mezcla. Traduzcamos a inecuaciones las restricciones a las que se han de someter esas cantidades.

* La cantidad de **A** es mayor que la de **B** : $x > y$

* Su diferencia no es menor que **10** gramos y no supera los **30** gramos : $30 \ge x - y \ge 10$

* **B** no puede superar los *30* gramos ni ser inferior a *10* gramos : $30 \geq y \geq 10$

Además sabemos que : $x \geq 0$, $y \geq 0$.

Veamos las cantidades de pigmento de cada tipo :

Cantidad de pigmento de tipo ***p***: $F_p(x,y) = 0{,}3x + 0{,}5y$

Cantidad de pigmento de tipo ***q***: $F_q(x,y) = 0{,}4x + 0{,}2y$

La región factible es la que aparece en la imagen del margen.

Sus vértices son $A(20;10)$, $B(40;10)$, $C(60;30)$ y $D(40;30)$.

a) La mayor cantidad de pigmento ***p***, se produce para *60* gramos de la pintura ***A*** y *30* de la ***B*** :

$F_p(40;30) = 0{,}3\times40 + 0{,}5\times30 = 27$;

$F_p(20;10) = 11$; $F_p(40;10) = 17$; $F_p(60;30) = 33$

b) La menor cantidad de pigmento ***q***, se produce para *20* gramos de la pintura ***A*** y *10* de la ***B***:

$F_q(40;30) = 0{,}4\times40 + 0{,}2\times30 = 22$; $F_q(20;10) = 10$;

$F_q(40;10) = 18$; $F_q(60;30) = 30$

PROBLEMA 39 :

Una empresa dedicada a la fabricación de componentes de ordenador tiene dos fábricas que producen, respectivamente, *800* y *1500* piezas mensuales. Estas piezas han de ser transportadas a tres tiendas que necesitan *1000; 700* y *600* piezas, respectivamente. Los costos de transporte, en soles por pieza son los que aparecen en la tabla adjunta. ¿Cómo debe organizarse el transporte para que el coste sea mínimo?

RESOLUCIÓN:

	Tienda A	Tienda B	Tienda C
Fábrica I	3	7	1
Fábrica II	2	2	6

En este tipo de problemas se exige que toda la producción sea distribuida a los centros de ventas en las cantidades que precisa cada uno; por tanto, no pueden generarse stocks del producto ni en las fábricas ni en los centros de ventas. En consecuencia, los *800* artículos producidos en la fábrica ***I*** deben distribuirse en las cantidades x , y , z a ***A*** , ***B*** y ***C***, de manera que $x + y + z = 800$. Pero, además, si desde ***I*** se envían x unidades a ***A***, el resto, hasta las *1000* necesarias en ***A***, deben ser enviadas desde la fábrica ***II***; esto es, $1000 - x$ unidades serán enviadas desde ***II*** a ***A***. Del mismo modo, si desde ***I*** a ***B*** se envían y, el resto necesario, $700 - y$, deben enviarse desde ***II***. y lo mismo para ***C***, que recibirá z desde ***I*** y $600 - z$ desde ***II***. En la siguiente tabla de distribución se resume lo dicho :

Envíos	Tienda A (1000)	Tienda B (700)	Tienda C (600)
Desde la fábrica I(800)	x	y	$800 - x - y$
Desde la fábrica II (1500)	$1000 - x$	$700 - y$	$x + y - 200$

La última columna la hemos obtenido de la siguiente forma :

Como $x + y + z = 800$, se tiene que $z = 800 - x - y$, de donde, $600 - z = 600 - (800 - x - y) = x + y - 200$.

Ahora bien, todas las cantidades anteriores deben ser mayores o iguales que cero. Por tanto, se obtienen las siguientes desigualdades :

$x \geq 0$; $1000 - x \geq 0$; $y \geq 0$; $700 - y \geq 0$
; $800 - x - y \geq 0$; $x + y - 200 \geq 0$

Simplificando las desigualdades anteriores, se obtienen las siguientes inecuaciones :

$$1000 \geq x \geq 0 ;\quad 700 \geq y \geq 0 ;\quad 800 \geq x + y \geq 0$$

Recordemos que nuestro objetivo es abaratar al máximo los costes de transporte. Estos costes se hallan multiplicando las cantidades enviadas a desde cada fábrica a cada tienda por los respectivos costes de transporte unitario.

Se obtiene :

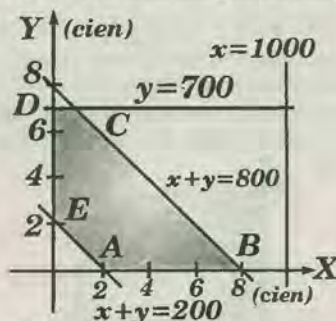
$Z = f(x;y) = 3x + 2(1000) + 7y + 2(700 - y) + (800 - x - y) + 6(x + y - 200)$

$\Rightarrow Z = f(x;y) = 6x + 10y + 3000$

En definitiva, el programa lineal a resolver es :

Minimizar	$Z = 6x + 10y + 3000$
Sujeto a :	$1000 \geq x \geq 0$
	$700 \geq y \geq 0$
	$800 \geq x + y \geq 0$

La región factible se da en la imagen del margen.



Sus vértices son

$A(200;0)$; $B(800;0)$; $C(100;700)$; $D(0;700)$ y $E(0;200)$.

El coste, el valor de **Z** en cada uno de esos puntos, es :

* en ***A*** , *4200* * en ***B*** , *7800*

* en ***C*** , *10600* * en ***D*** , *10000*

* en ***E*** , *5000*

El mínimo se da en ***A*** , cuando $x = 200$ e $y = 0$.

Envíos	Tienda A (1000)	Tienda B (700)	Tienda C (600)
Desde la fábrica I(800)	200	0	600
Desde la fábrica II (1500)	600	700	0

PROBLEMA 40 :

En una granja de pollos se da una dieta "para engordar" con una composición mínima de *15* unidades de una sustancia *A* y otras *15* de una sustancia *B*. En el mercado sólo se encuentran dos clases de compuestos : el tipo *X* con una composición de una unidad de *A* y cinco de *B*, y el tipo *Y*, con una composición de cinco unidades de *A* y una de *B*. El precio del tipo *X* es de *1000* soles y el del tipo *Y* es de *3000* soles. Se pregunta : ¿Qué cantidades se han de comprar de cada tipo para cubrir las necesidades con un coste mínimo ? .

RESOLUCIÓN:

El problema se llama así porque en sus orígenes consistió únicamente en determinar la dieta humana más económica. En su forma industrial más corriente, el problema consiste en saber cómo mezclar de la forma más económica posible las materias primas que constituyen un producto de fórmula química conocida.

Podemos organizar la información mediante una tabla:

	Unidades	Sustancia A	Sustancia B	Costo
Compuesto X	x	x	$5x$	$1000x$
Compuesto Y	y	$5y$	y	$3000y$
Total		≥ 15	≥ 15	$1000x+3000y$

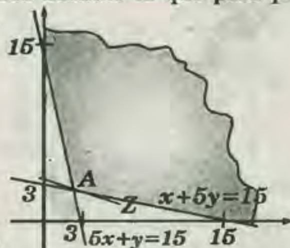
La función objetivo del costo total, *f*, si se emplean x *kg* del compuesto *X* e y *kg* del compuesto *Y*, es :

$$Z = f(x;y) = 1000x + 3000y$$

* El conjunto de restricciones es :

$$x \geq 0\ ;\ y \geq 0\ ;\ x+5 \geq 15\ ;\ 5x+y \geq 15$$

* Con estos datos representamos la región factible y las rectas de nivel de la función objetivo. De todas las rectas de nivel que tocan a la región factible, hace que el coste *Z* sea mínimo la que pasa por el vértice *A(2,5;2,5)*.



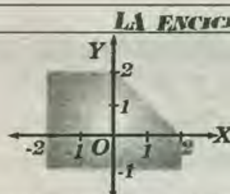
La solución óptima se obtiene comprando *2,5* unidades de *X* y *2,5* unidades de *Y*.

El coste total es :

$Z=f(2,5;2,5)=1000\times2,5+3000\times2,5=10000$ soles.

PROBLEMA 41 :

Considera el recinto de la figura en el que están incluidos todos los lados y todos los vértices.



a) Escribe la inecuaciones que lo definen

b) Maximiza la función $Z = x + y$

RESOLUCIÓN :

a) Hallamos la ecuación de la recta que pasa por *(2;0)* y *(0;2)* :

$y = mx + n$	$(0,2) \to 2 = m\cdot 0 + n \to n = 2$ $(2,0) \to 0 = m\cdot 2 + 2 \to m = -1$	$\to y = -x+2 \to x+y=2$

Los puntos del recinto (por ejemplo, el *(0;0)*) verifican $x + y \leq 2$.

* Ecuación de la recta paralela al eje *X* que pasa por *(0;2)* : $y = 2$. Los puntos del recinto verifican $y \leq 2$

* Ecuación de la recta paralela al eje *X* que pasa por *(0;–1)*:$y = -1$ Los puntos del recinto verifican $y \geq -1$

* Ecuación de la recta paralela al eje *Y* que pasa por *(2;0)* : $x = 2$ Los puntos del recinto verifican $x \leq 2$

* Ecuación de la recta paralela al eje *Y* que pasa por *(–2;0)*: $x = -2$. Los puntos del recinto verifican $x \geq -2$

Las inecuaciones que cumplen los puntos del recinto son :

$x + y \leq 2$
$-2 \leq x \leq 2$
$-1 \leq y \leq 2$

b) Como la dirección de la función $Z=x+y$ a maximizar es la misma que la del borde $x + y = 2$, resulta que esta recta es tal que deja todo el recinto a un lado , precisamente del lado que hace $x + y \leq 2$. Por tanto , el máximo de $Z=x+y$ para *(x;y)* en el recinto se alcanza para cualquier punto de ese segmento del borde y tiene por valor 2.

¡ RECUERDE !

Un problema particular que se resuelve con los procedimientos de la programación lineal es la situación conocida como problema del transporte o problema de la distribución de mercancías. Se trata de encontrar los caminos para trasladar mercancía, desde varias plantas (orígenes) a diferentes centros de almacenamiento (destinos), de manera que se minimice el costo del transporte. Para que un problema pueda ser resuelto por el método del transporte debe cumplir :

1) La función objetivo y las restricciones deben ser

lineales.

2) El total de unidades que salen en origen debe ser igual al total de unidades que entran en destino.

PROBLEMA 42 :

Dos fábricas de papel producen 3 tipos diferentes de papel de bajo grado, medio grado y alto grado. Se tiene contrato de venta para proveer: ***16 Tn.*** de bajo grado, ***5 Tn.*** de medio grado y ***20 Tn.*** de alto grado los costos de operación son de ***S/.1000*** /día para la primera fábrica y ***S/.2000*** /día para la segunda.

La fábrica ***N° 1***, produce ***8 Tn.*** de bajo grado, ***1 Tn.*** de medio grado y ***2Tn.*** de alto grado en un día de operación. La fábrica ***N° 2***, produce ***2 Tn.*** de bajo grado, ***1 Tn.*** de grado medio y ***7 Tn.*** de alto grado por día. ¿Cuántos días debe trabajar cada fábrica a fin de cumplir con el mencionado contrato de venta en la forma más económica?

RESOLUCIÓN

Sean

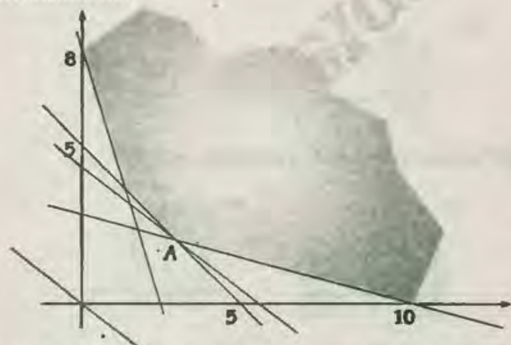
x : Número de días de trabajo de la fábrica 1

y : Número de días de trabajo de la fábrica 2

la función objetivo será : (Min:) $Z = 1\,000x + 2000y$

Sujeto a:
$$8x + 2y \geq 16$$
$$x + y \geq 5$$
$$2x + 7y \geq 20$$
$$x \geq 0 \wedge y \geq 0$$

Gráficamente



La solución optima se encuentra en el punto ***A*** donde :

$x = 3 ;\ y = 2 ;\ z = 7000$

PROBLEMA 43 :

Desde dos almacenes ***A*** y ***B***, se tiene que distribuir fruta a tres mercados de la ciudad. El almacén ***A*** dispone de ***10*** toneladas de fruta diarias y el ***B*** de ***15*** toneladas, que se reparten en su totalidad. Los dos primeros mercados necesitan, diariamente, 8 toneladas de fruta, mientras que el tercero necesita 9 toneladas diarias.

El costo del transporte en soles por tonelada desde cada almacén a cada mercado viene dado por el siguiente cuadro:

Almacén	Mercado 1	Mercado 2	Mercado 3
A	10	15	20
B	15	10	10

Planificar el transporte para que el coste sea mínimo.

RESOLUCIÓN

Podemos hacer el siguiente cuadro que nos ayude a obtener la función objetivo y las restricciones

Almacén	Mercado 1	Mercado 2	Mercado 3
A	X	Y	10−(X+Y)
B	8−X	8−Y	X+Y−1

Del cuadro anterior se puede observar

• Del almacén ***A*** se transporta ***X*** Tn. al mercado 1 , ***Y*** Tn. al mercado 2, y lo restante al mercado ***3***.

• Del almacén ***B*** se transporta lo faltante a cada mercado.

De los dos cuadros anteriores se puede obtener la función objetivo la cual viene dada.

$F(X; Y) = 10X + 15Y + 20(10 - (X + Y) + 15(8 - X) + 10(8 - Y) + 10(X + Y - 1),$

de donde efectuando se tiene :

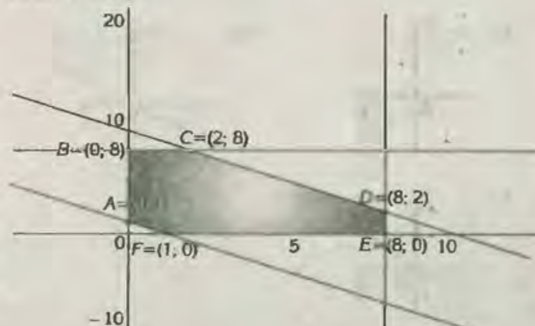
$$F(X; Y) = 390 - 15X - 5Y$$

Teniendo en cuenta que las cantidades repartidas a cada mercado son positivas entonces se tiene:

$$\boxed{10 - X + Y \geq 0};\ \boxed{8 - X \geq 0};\ \boxed{8 - Y \geq 0}$$
$$\boxed{X + Y - 1 \geq 0};\ \boxed{X \geq 0 \wedge Y \geq 0}$$

Las cuales representan las restricciones del problema

Gráficamente :



El costo de transporte en cada en cada vértice es :

$A = (0; 1)$, $B = (0; 8)$,$C = (2; 8)$

$D = (8; 2)$, $E = (8; 0)$, $F = (1; 0)$

Vértices valor del objetivo F :

385 ; 350 ; 320 ; 260 menor costo ***; 270 ; 375***

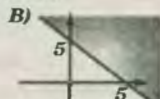
La solución óptima ocurre en el vértice $D = (8;2)$ lo que indica que se deben transportar del almacén A: ***8Tn*** al mercado ***1,2*** **Tn** al mercado **2** y al mercado **3** nada. Así mismo del almacén ***B*** , al mercado 1 nada, al mercado ***2,6 Tn*** y al mercado ***39 Tn***. De esta manera el costo mínimo es de ***S/.260***.

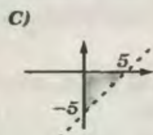
EJERCICIOS

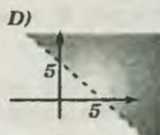
01 Dado el conjunto: $A=\{(x;y)\in R^2 / x+y>5\}$

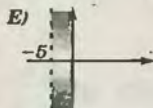
Calcule la solución en forma gráfica.

A) 

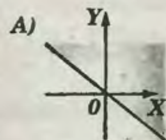
B) 

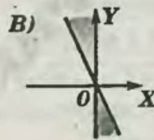
C) 

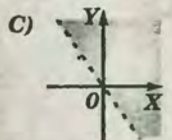
D) 

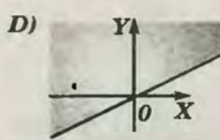
E) 

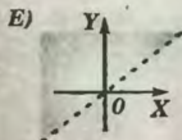
02 Calcule la solución gráfica de $x \le 2y$.

A) 

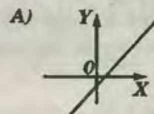
B) 

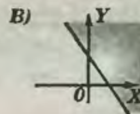
C) 

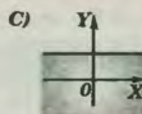
D) 

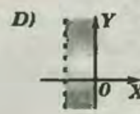
E) 

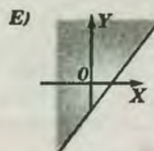
03 Resolver $2x - y \le 4$.

A) 

B) 

C) 

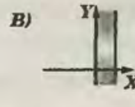
D) 

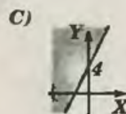
E) 

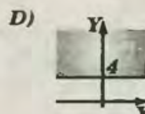
04 Dado el conjunto:

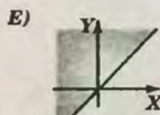
$A=\left\{(x;y)\in R^2 / y \ge \frac{4}{5}x+4\right\}$. Hallar la solución.

A) 

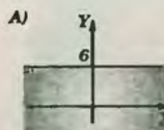
B) 

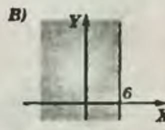
C) 

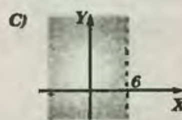
D) 

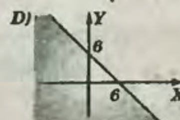
E) 

05 Calcule la solución gráfica de $x \le 6$.

A) 

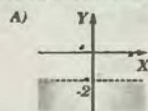
B) 

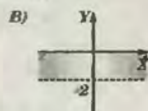
C) 

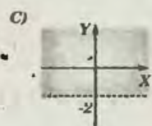
D) 

E) 

06 Calcule la solución de $y < -2$.

A) 

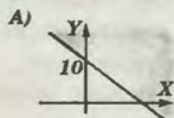
B) 

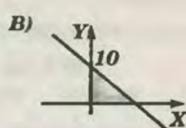
C) 

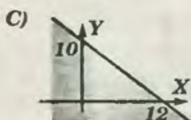
D) 

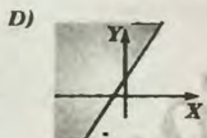
E) 

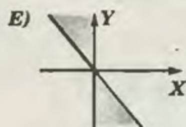
07 Resolver $5x + 6y \leq 60$.

A) 

B) 

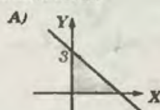
C) 

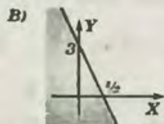
D) 

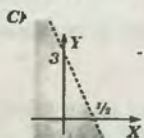
E) 

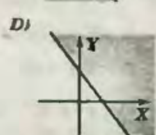
08 Dado el conjunto: $P = \left\{ (x; y) \in R^2 / 2x < -\frac{y}{3} + 1 \right\}$

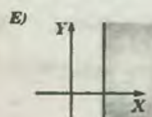
Calcule su solución.

A) 

B) 

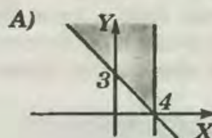
C) 

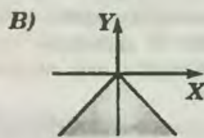
D) 

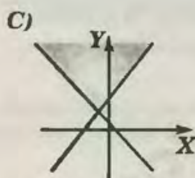
E) 

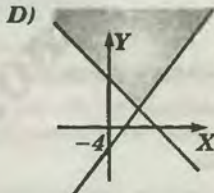
09 Resolver el sistema:

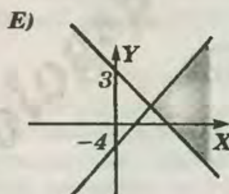
$$\begin{cases} x + y \geq 3 & \text{....(1)} \\ 5x - y \leq 4 & \text{....(2)} \end{cases}$$

A) 

B) 

C) 

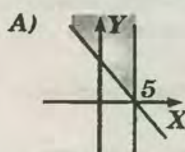
D) 

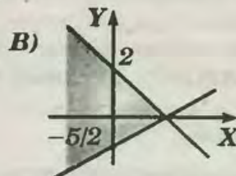
E) 

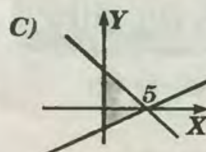
10 Dados los conjuntos:

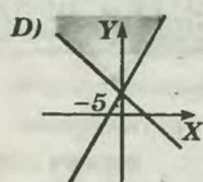
- $A = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / 2y < x - 5\}$
- $B = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / 2x + 5y \leq 10\}$

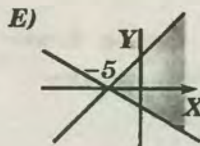
Calcule la solución de $A \cap B$.

A) 

B) 

C) 

D) 

E) 

¡ RECORDAR QUE !

En un problema de programación lineal intervienen:

1) LA FUNCIÓN OBJETIVO :

Es la función que se va optimizar (maximización o minimización) sujeta a ciertas restricciones. Las funciones de ganancias (maximización) y de costos (minimización) son algunos ejemplos de función objetivo.

Su representación: $f(x; y) = ax + by + c$

Donde:

$x , y \rightarrow$ son variables de decisión

a , b y $c \rightarrow$ son constantes

2)RESTRICCIONES :

Las restricciones son generalmente inecuaciones o ecuaciones; su número depende del problema en cuestión.

Si se tiene la desigualdad $x \geq 0$, nos indican a la variable ser no negativa. Usualmente son llamadas restricciones de no negatividad.

3) SOLUCIÓN FACTIBLE: f(x; y)

Son los valores de x e y que verifican todas y cada una de las restricciones. Todo punto formado con estos valores pueden ser soluciones del problema, como también aquellos puntos que no pertenecen a ese conjunto no puede ser solución.

NOTA

A la solución factible se le conoce también como conjunto o región factible.

4) LA SOLUCIÓN ÓPTIMA

En todo problema la solución óptima será un par de valores $(x_o; y_o)$ del conjunto factible de tal manera que $f(x ; y)$ asuma un valor máximo o mínimo.

5) REGIÓN ADMISIBLE :

Es el conjunto de todas las soluciones posibles o factibles.

PRIMERA PRACTICA DIRIGIDA

01 Maximizar la función : $Z=f(x,y)=4x+3y$

sujeta a las restricciones :

$30x+20y \leq 1800$; $x+y \leq 80$

$x \geq 0$; $y \geq 0$

A) 220 B) 240 C) 250 D) 260 E) 280

02 Determine el máximo valor que asume : $2x+y$

Sujeto a : $y \leq x+2; y \leq -x+3$
$x \geq 0; y \geq 0$

A)6 B)14 C)15 D)20 E)30

03 Halle el máximo valor de $Z=3x+6y$, tal que :

$$\begin{cases} x+y \leq 80 \\ 2x+\dfrac{y}{2} \leq 80 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

A)200
B)300
C)400
D)480
E)600

04 Maximizar $f(x;y)=x+y$ si

$x+y \leq 150$; $y \leq \dfrac{x}{2}$; $x \geq 20$; $y \geq 40$; $xy \in Z^+$

A)120 B)130 C)140 D)150 E)160

05 Maximizar $f_{(x;y)}=4x+6y$. sujeta a :

$x+3y \leq 6$; $3x+y \leq 8$; $x \geq 0; y \geq 0$

A)9,8 B)10,7 C)12 D)16,5 E)18

06 Minimizar : $C(x;y)=6x+8y$, sujeta a las restricciones $40x+10y>2400$; $10x+15y>2100$

$5x+15y>1500$; $x>0$; $y>0$

A)1100 B)1140 C)1200 D)1800 E)1920

07 Minimizar la función $f(x;y)=2x+8y$ sometidas a las restricciones :

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 2x+4y \geq 8 \\ 2x-5y \leq 0 \\ -x+5y \leq 5 \end{cases}$$

A) $\dfrac{104}{9}$
B) $\dfrac{104}{7}$
C) $\dfrac{91}{3}$ D) $\dfrac{91}{7}$ E)26

08 Minimizar $Z=2x_1+3x_2$

Sujeto a : $x_1+2x_2 \geq 8$; $2x_1+x_2 \geq 7$

$4x_1+5x_2 \leq 29$; $x_1; x_2 \geq 0$

A)13 B)14 C)15 D)16 E)17

09 Determine *Máx* $(2x_1+3x_2)$

Sujeto a : $x_1+2x_2 \leq 6$; $5x_1+3x_2 \leq 15$

$x_1 \geq 0$; $x_2 \geq 0$

A)8 B)9 C) 69/7 D)10 E)11

10 Determinar el máximo valor de la expresión :

$Z = 4y + 3y$

Si: $(x;y) \in \left\{ \begin{matrix} (x;y) \in R^2 / 30x+20y \leq 1800 \\ x+y \leq 80 \ ; \ x \geq 0 \ ; \ y \geq 0 \end{matrix} \right\}$

A)220 B)240 C)250 D)260 E)280

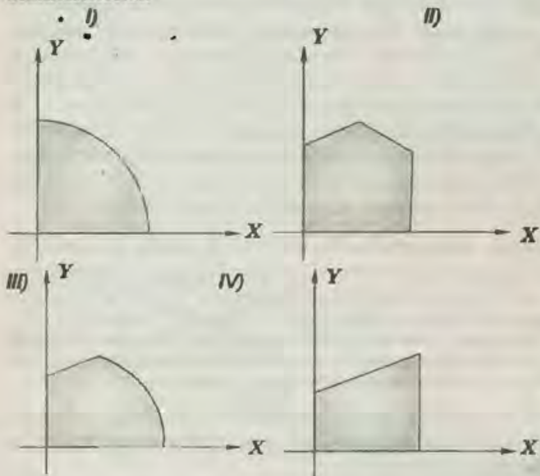
11 Resolver el problema de programación lineal

Maximizar : $Z(x;y)=3x+2y$

Sujeto a las restricciones . $x+y \leq 1$; $x \geq 0; y \geq 0$

A)-2 B)0 C)2 D)3 E)4

(12) A continuación se muestra **4** regiones en el plano **XY** indique cual(es) de ellas representan la región tangible de un problema de programación lineal bidimensional.



A)I-IV B)I-II C)II-III D)II-IV E)II-IV

(13) Una compañía produce dos tipos de artículos mecánico y eléctricos mensualmente cada uno requiere para su fabricación del uso de tres máquinas **A ; B** y **C**. En la tabla adjunta se muestra la información relacionada con la fabricación de estos tipos de artículos.

	A	B	C	Utilidad / Unidad
Mecánico	2h	1h	1h	$4
Eléctrico	1h	2h	1h	$6
Máx. de horas disponibles	180h	160h	100h	

Se sabe que la compañía vende todos los atículos que produce. Determina la utilidad máxima mensual (en dólares)

A)$360 B)$400 C)$440 D)$480 E)$520

(14) En una urbanización del distrito de Surco , se van a construir casas de dos tipos : económicas y super economicas . La empresa constructora dispone de « **1800 000** , siendo el costo de cada tipo de casa **$ 30 000** y **$20 000** respectivamente. La municipalidad exige que el número total de casas no debe superar a **80**. Sabiendo que el beneficio por la venta de una casa económica es de **$4000** y por la super económica **$3000**. ¿Cuántas casas super económicas deben construirse para obtener el máximo beneficio?

A)20 B)40 C)50 D)60 E)70

(15) Un granjero tiene **480** hectáreas en la que puede sembrar trigo o maíz . Él calcula que tiene **800** horas de trabajo disponible durante la estación crucial de verano . Dados los márgenes de utilidad y los requerimientos laborales que se adjunta .

Maiz Utilidad : **$40** por hectárea

Trabajo : 2 horas por hectárea

Trigo Utilidad : **$30** por hectárea

Trabajo : **1** hora por hectárea

¿Cuántas hectáreas de cada uno debe plantar para maximizar su utilidad? ¿Cuál es la utilidad máxima?

A)12560 B)14500 C)17600 D)18210 E)20200

(16) Silvestre tiene a su disposición $16m^2$ de algodón $11m^2$ de seda y $15m^2$ de lana . Un traje requiere lo siguiente: $2m^2$ de algodón , $1m^2$ de seda , $1m^2$ de lana, una tunica requiere lo siguiente: $1m^2$ de algodón , $2m^2$ de seda $3m^2$ de lana . Si el traje se vende por **$30** y una túnica por **$50**. ¿Cuántas piezas de cada confección debe hacer el sastre para obtener la máxima cantidad de dinero?

A) **8** trajes **0** túnicas B) **4** trajes **3** túnicas
C) **7** trajes **2** túnicas D) **3** trajes **4** túnicas
E) **5** trajes **0** túnicas

(17) Un sastre tiene $80m^2$ de tela de algodón y $120m^2$ de tela de lana . Un traje requiere $1m^2$ de algodón y $3m^2$ de lana ; y un vestido de mujer requiere $2m^2$ de cada una de las dos telas . Calcular el número de trajes y vestidos que debe confeccionar el sastre para maximizar los beneficios ; si un traje y un vestido se venden al mismo precio .

A) **10** trajes y **20** vestidos B) **20** trajes y **10** vestidos
C) **30** trajes y **20** vestidos D) **20** trajes y **30** vestidos
E) **20** trajes y **40** vestidos

(18) Una editorial planea utilizar una sección de planta para producir dos libros de texto . La utilidad unitaria es de **$2** para el libro **1**, y **$3** para el libro **2**. El texto **1** requiere **4h** para su impresión y **6h** para su encuadernación. El texto **2** requiere **5h** para imprimirse y de **3h** para su encuadernado. Se dispone de **200 h** para imprimir y de **210h** para encuadernar . Determine la máxima utilidad que puede obtener .

A)$70 B) $110 C) $120 D) $140 E) $160

(19) Un grupo de aficionados de una equipo de fútbol encarga a una empresa de trasporte el viaje para llevar a los **1200** socios a ver la final de su equipo , la empresa dispone de autobús de **50** plazas y de microbuses de

30 plazas . El precio de cada viaje en el autobús es de 252 dólares y el del viaje en microbús de *180* dólares . Sabiendo que la empresa dispone de *28* conductores. ¿Cuál es el costo máximo del viaje?

A) 6048 *B) 6056* *C) 6336* *D) 7056* *E) 7080*

(20) La compañia Stock *S.A.* requiere producir dos clases de recuerdos de viaje : del tipo ***A*** y ***B***.Cada unidad tipo *A* producirá una ganancia de ***$1,20***. Para fabricar un recuerdo tipo ***A*** se necesitan dos minutos en la máquina ***I*** y *1* minuto en la máquina ***II*** . Un recuerdo tipo ***B*** requiere *1* minuto en la máquina ***I*** y ***3*** en máquina ***II***. Hay ***3*** horas disponibles en la máquina ***I*** y ***5*** horas disponibles en la máquina ***II*** para procesar el pedido. ¿Cuántas piezas de cada tipo debe producir Stock ***S.A*** para maximizar la ganacia?

A)A=48 ; B=84 ***B)A=60 ; B=32***

C)A=65 ; B=42 ***D)A=72 ; B=50*** ***E)A=40 ; B=68***

(21)Lewis tiene ***$2200*** para invertir durante los siguientes ***5*** años. Al principio de cada año puede invertir su dinero en depósitos a plazo fijo de 1 ó 2 años. El banco paga el *8%* de interés en depósitos a plazo fijo de un año y el *17%* (total) en depósitos a plazo fijo de 2 años: además al principio del segundo año, la compañía Western Unión ofrecerá certificados a tres años. Estos certificados tendrán una ganancia del *27%* (total). Si Lewis reinvierte su dinero disponible cada año formular un programa lineal que muestre como maximizar su ganancia total al final del quinto año.

(22)Una refinería puede comprar dos tipos de petróleo: petróleo crudo ligero y petróleo crudo pesado. El costo por barril de estos tipos de petróleo es de ***$11*** y ***$9***, respectivamente, de cada tipo de petróleo se producen por barril las siguientes cantidades de gasolina, keroseno, y combustible para reactores.

	Gasolina	Kerosene	Combustible para reactores
Petróleo crudo ligero	0,4	0,2	0,35
Petróleo crudo pesado	0,32	0,4	0,2

Obsérvese que durante el proceso de refinamiento se pierden el ***5%*** y el *8%* del crudo , respectivamente . La refinería tiene un contrato para entregar 1 millón de barriles de gasolina , ***400 000*** barriles de keroseno , y ***250 000*** barriles de combustible para reactores . Encontrar el número de barriles de cada tipo de petróleo que satisfacen la demanda y que minimizan el costo total.

(23)Una fabrica quiere producir bicicletas de paseo y de montaña la fabrica dispone de ***80 kg*** de acero y ***120*** kg de aluminio. Para construir una bicicleta de paseo se necesitan ***1 kg*** de acero y ***3 kg*** de aluminio y para construir una bicicleta de montaña se necesitan ***2 kg*** de acero y otros ***2 kg*** de aluminio. Si se vende las bicicletas de paseo a ***200*** soles y las de montaña a ***150*** soles, ¿cuántas bicicletas de cada tipo se deben construir para que el beneficio sea máximo?

(24)Lila necesita mensualmente ***60*** unidades de carbohidratos , **45** unidades de proteínas y **30** unidades de grasa ; de cada libra del alimento A , ella recibe 5 unidades de carbohidratos, **3** de proteínas y **4** de grasa. El alimento ***B*** contiene ***2*** unidades de carbohidratos, 2 unidades de proteína y 1 de grasa por libra; si el alimento A cuesta ***5*** soles la libra y el alimento B cuesta **4** soles la libra. ¿Cuántas libras de cada alimento debe comprar Lila cada mes para mantener un costo mínimo?

(25)**Un estudiante dedica parte de su tiempo al reparto de propaganda publicitaria. La empresa A le paga *10* céntimos, por cada impreso repartido y la empresa B, con folletos más grandes, le paga *20* céntimos por impreso. El estudiante lleva dos bolsas: una para los impresos A, en la que caben *120*, y otra para los impresos B, en la que caben *100*. Ha calculado que cada día es capaz de repartir *150* impresos como máximo.**

Lo que se pregunta el estudiante es: ¿Cuántos impresos habrá de repartir de cada clase para que su beneficio diario sea máximo?

(26)Un agricultor posee un campo de ***70*** hectáreas y puede cultivar ya sea trigo o cebada. Si siembra trigo gasta ***S/.300*** por cada hectárea plantada. En cambio si siembra cebada, su gasto es de ***S/.400*** por hectárea. El capital total disponible es de ***S/.25 000*** Por otra parte, también existen restricciones en la disponibilidad de agua para los meses de octubre y noviembre, según se indica:

Mes	Consumo m^3/Hcta	Consumo m^3/Hcta	Disponibilidad
	Trigo	Cebada	m^3
Octubre	900	650	57,900
Noviembre	1200	850	115,200

Una hectárea cultivada rinde ***3 Tm*** de trigo o ***2,5 Tm*** de cebada según sea el caso. Los precios vigentes por Tm son de ***S/.150*** para el trigo y ***S/.200*** para la cebada.

Utilizando el método gráfico, determinar la cantidad de hectáreas de trigo y de cebada que debe sembrar el agricultor para que maximice su beneficio.

(27)Una compañía de transportes posee ***2*** tipos de camiones. El camión tipo A tiene ***20*** m^3 de espacio refrigerado y ***40*** m^3 no refrigerado. El camión tipo B tiene 30 m^3 refrigerados y ***30*** m^3 no refrigerados. Una fábrica de productos alimenticios debe embarcar ***900*** m^3 de productos refrigerados y ***1200*** no refrigerados. ¿Cuántos camiones de cada tipo debe alquilar la fábrica par minimizar costos si el tipo A se alquila a ***S/.30*** m^3 y el B a ***S/.40*** m^3?.

SEGUNDA PRACTICA DIRIGIDA

01 Encuentre el valor mínimo de $z = 2x - 3y$ sujeto a las restricciones:

$$x + 2y \le 10$$
$$2x + y \le 11$$
$$x;\ y \ge 0$$

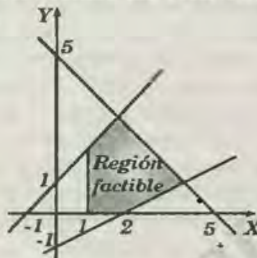
A) –17 *B) –15* *C) –11* *D) –1* *E) 0*

02 Maximizar la función objetivo $F = 2x + 2y$ sujeta a las restricciones:

$$3x - 2y \ge -6$$
$$3x + y \ge 3$$
$$x \le 3$$
$$x;\ y \ge 0$$

A) 18 *B) 19* *C) 20* *D) 21* *E) 22*

03 De la gráfica, señale las restricciones de la región factible.



A) $x + y \le 5$; $y - x \le 1$; $-2y + x \le 2$; $x \ge 1;\ y \ge 0$

B) $x + y \le 5$; $y + x \le 1$; $2y + x \ge 2$; $x \ge 1;\ y \ge 0$

C) $x + y \le 5$; $y - x \le 1$; $2y - x \le 2$; $x \ge 1;\ y \ge 0$

D) $x + y \le 5$; $y - x \le 1$; $y - 2x \le 2$; $x \le 1;\ y \ge 0$

E) $x + y \ge 5$; $y - x \ge 1$; $y \ge 2;\ x \le 1$

04 Dada la función objetivo $z = x + y$, sujeta a: $x - y \le 2;\ x - y \ge -2;\ x \ge 0;\ y \ge 0$, señalar el valor de verdad de las proposiciones:

( ) *(1; 1)* pertenece ala región factible.

( ) *(3; 0)* no pertenece a la región factible.

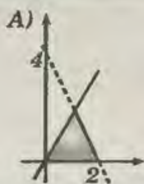
( ) *(2; 2)* es el valor óptimo.

A) VFV *B) VVV* *C) FFV* *D) VVF* *E) FFF*

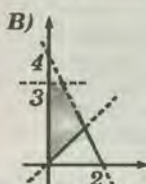
05 Señale la región factible sujeta a las restricciones:

$$y + 2x \le 4$$
$$y + 1 \ge x$$
$$y \le 3\ ;\ x \ge 0$$

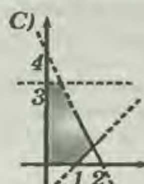
A)



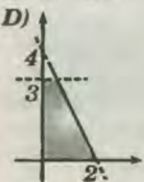
B)



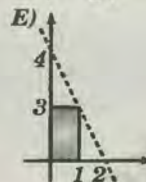
C)



D)



E)



06 Un estacionamiento puede atender un máximo de *100* vehículos entre automóviles y camiones, un automóvil ocupa $10m^2$ mientras que un camión ocupa $20\ m^2$. Si el área total de estacionamiento es $1\ 200\ m^2$ y además se cobra una tarifa mensual de *$ 20* por automóvil y *$ 30* por camión, ¿cuántos vehículos de cada tipo proporciona al dueño una ganancia máxima?

A) 30 autos y 50 camiones. *B) 40 autos y 40 camiones.*
C) 20 autos y 80 camiones. *D) 50 autos y 40 camiones.*
E) 60 autos y 30 camiones.

07 El administrador de una cafetería dispone de a lo más *600* raciones de comida diariamente, algunas calientes y otras frías, basado en su experiencia anterior se pronostica que el número de raciones frías es a lo más *75* unidades menos que el número de raciones calientes, además como mínimo la cafetería debe vender un número de *50* raciones frías diariamente, ganando *15* céntimos por cada ración caliente y *10* céntimos por cada ración fría. ¿Cuántas raciones de cada tipo se tendrá que vender para maximizar sus ganancias?

A) 550 raciones calientes y 50 raciones frías.
B) 200 raciones calientes y 50 raciones frías.
C) 250 raciones calientes y 150 raciones frías.
D) 400 raciones calientes y 250 raciones frías.
E) 500 raciones calientes y 400 raciones frías.

08 Una fábrica de ropa confecciona pantalones y chompas. La ganancia que obtiene por cada pantalón es de *S/. 6* y por cada chompa *S/. 5*, se necesita *2 m* de tela para los pantalones y *1,5 m* para las chompas; debido a ciertas limitaciones la fábrica no puede manufacturar más de *10* artículos por día y no puede usar más de *18 m* de tela al día. Si la fábrica puede vender todos los pantalones y chompas que produce, calcular el número de artículos que deberá producir diariamente para obtener la

máxima ganancia.

A) 6 pantalones y 4 chompas.
B) 8 pantalones, y 3 chompas.
C) 5 pantalones y 4 chompas.
D) 4 pantalones y 4 chompas.
E) 10 pantalones y 5 chompas.

09 Un comerciante al por menor vende dos marcas de trajes, ***A*** y ***B***. Nunca hace pedidos mayores de ***60*** trajes a la semana. La marca ***A*** le cuesta ***$ 20*** y la vende en ***$ 23***, mientras que compra ***B*** en ***$ 40*** para venderla en ***$ 44***. Si restringe su gasto a ***$ 1 600*** por semana, ¿cuántos de cada marca deberá comprar para que su utilidad sea máxima? (Admítase que vende todos los trajes).

A) 150 *B) 200* *C) 250* *D) 300* *E) 350*

10 Mil alumnos de Hotelería y Turismo van a ir de excursión. Para el viaje se contrata a una empresa que dispone de ***15*** autobuses de ***60*** pasajeros cada uno y ***12*** de ***40*** pasajeros cada uno. Si la empresa tiene al menos ***18*** conductores y el alquiler de cada autobús grande cuesta ***500*** soles y cada pequeño ***400*** soles, ¿cuántos autobuses de cada clase convendrá alquilar para que el viaje resulte lo más económico posible?

A) Autobuses grandes: 15 y autobuses pequeño: 3
B) Autobuses grandes: 10 y autobuses pequeño: 12.
C) Autobuses grandes: 8 y autobuses pequeños: 12.
D) Autobuses grandes: 14 y autobuses pequeños: 4.
E) Autobuses grandes: 10 y autobuses pequeños: 6.

11 El número de unidades de químicos ***A, B*** y ***C*** en una caja de fertilizante ***1*** y fertilizante ***2*** son dados en la siguiente tabla:

Químicos	*A*	*B*	*C*
Fertilizante 1	*1*	*1*	*3*
Fertilizante 2	*2*	*1*	*1*

Un obrero quiere obtener al menos ***20*** unidades del ***A***, ***16*** del ***B*** y ***24*** del ***C*** para fertilizar un pedazo de tierra. Si el costo por caja de fertilizante ***1*** y fertilizante ***2*** es de ***$ 24*** y ***$ 12***, respectivamente, encuentra el mínimo costo de fertilización.

A) $ 288 *B) $ 240* *C) $ 300* *D) $ 336* *E) $ 480*

12 Una compañía de química programa la producción de ciertos tipos de mezclas, donde el material ***M*** es igual a ***8*** dólares por paquete y con un peso de ***4*** kilos, el material ***N*** es igual a ***5*** dólares por paquete con un peso de ***2*** kilos. Se requiere ***100*** kilos de la mezcla y se necesita emplear no menos de ***20*** paquetes de ***N*** para hacer la mezcla. ¿Cuántos paquetes se debe usar para minimizar los costos?

A) 15 de M y 30 de N. *B) 10 de M y 20 de N.*
C) 30 de M y 30 de N. *D) 15 de M y 20 de N.*
E) 10 de M y 30 de N.

13 Una compañía requiere producir dos clases de recuerdos de viaje del tipo ***A*** y del tipo ***B***. Cada unidad del tipo ***A*** producirá una ganancia de ***$ 1***, mientras que uno del tipo ***B*** generará una ganancia de ***$ 1,20***. Para fabricar un recuerdo tipo ***A*** se necesitan ***2*** minutos en la máquina ***I*** y ***1*** minuto en la máquina ***II***. Un recuerdo tipo ***B*** requiere ***1*** minuto en la máquina ***I*** y ***3*** minutos en la máquina ***II***. Hay ***3*** horas disponibles en la máquina ***I*** y ***5*** horas disponibles en la máquina ***II*** para procesar el pedido. Si se desea maximizar la ganancia, ¿cuál es la ganancia máxima?

A) $100 *B) $120* *C) $148,8* *D) $ 90* *E) $ 160*

14 Sofía y Carmen ganan ***10*** millones de nuevos soles en una lotería y les aconsejan que los inviertan en dos tipos de acciones, ***A*** y ***B***. Las de tipo ***A*** tienen más riesgo pero producen un beneficio anual del ***10%***. Las de tipo ***B*** son más seguras, pero producen sólo el ***7%*** anual. Después de varias deliberaciones ellas deciden invertir como máximo ***6*** millones en la compra de acciones ***A*** y, por lo menos, ***2*** millones en la compra de acciones ***B***. Además, deciden que lo invertido en las acciones de tipo ***A*** sea, por lo menos, igual a lo invertido en las de tipo ***B***. ¿Cómo deberán invertir los ***10*** millones de nuevos soles para que el beneficio anual sea máximo?

A) 6 millones de tipo A y 4 millones de tipo B.
B) 2 millones de tipo A y 8 millones de tipo B.
C) 5 millones de tipo A y 5 millones de tipo B.
D) 8 millones de tipo A y 2 millones de tipo B.
E) 7 millones de tipo A y 3 millones de tipo B.

15 Un fabricante produce dos tipos de llantas, para pista seca y para pista mojada. Durante la producción de las llantas requieren del uso de dos máquinas, ***A*** y ***B***. El número de horas necesarias en ambos tipos se muestra en la siguiente tabla:

Llanta	*Máquina A*	*Máquina B*
Pista seca	*2 horas*	*3 horas*
Pista mojada	*3 horas*	*2 horas*

Si cada máquina se puede utilizar ***24*** horas al día y las utilidades en los modelos son de ***3*** y ***5*** dólares, respectivamente, ¿cuántas llantas de cada tipo deben producirse por día para obtener una utilidad máxima?

A) 8 llantas para pista mojada.
B) 8 llantas para pista seca.
C) 4 llantas para pista mojada y 4 llantas para pista seca.

D) 6 llantas para pista mojada y 2 llantas para pista seca.
E) 4 llantas para pista mojada y 2 llantas para pista seca.

16 Un herrero con ***80 Kg*** de acero y ***120 Kg*** de aluminio quiere fabricar bicicletas de paseo y de montaña que quiere vender, respectivamente, a ***2 000*** y ***1 500*** nuevos soles, para obtener el máximo beneficio. En la elaboración de la bicicleta de paseo empleará ***1 Kg*** de acero y ***3 Kg*** de aluminio, y en la de montaña ***2 Kg*** de cada metal. ¿Cuántas bicicletas de paseo y de montaña venderá el herrero para obtener el máximo beneficio?

A) 30 de paseo y 20 de montaña.
B) 20 de paseo y 20 de montaña.
C) 30 de paseo y 30 de montaña.
D) 20 de paseo y 30 de montaña.
E) 18 de paseo y 32 de montaña.

17 La compañía Ruedas S.A. fabrica triciclos y bicicletas. La experiencia indica que debe producir al menos ***10*** triciclos. La fábrica puede producir a lo más ***60*** triciclos y ***120*** bicicletas por mes. Si la ganancia es de ***$ 134*** por triciclo y de ***$ 20*** por bicicleta, y puede fabricar ***160*** unidades combinadas, determinar la cantidad de triciclos y bicicletas que se debe producir para maximizar las ganancias.

A) 155 triciclos y 5 bicicletas.
B) 10 triciclos y 150 bicicletas.
C) 40 triciclos y 120 bicicletas.
D) 60 triciclos y 100 bicicletas.
E) 120 triciclos y 40 bicicletas.

18 Una mezcla de alimento ***A*** y alimento ***B*** debe elaborarse de manera que contenga al menos ***45*** onzas de nutrientes N_1 y ***40*** onzas de nutrientes N_2. El costo por libra de ***A*** es ***$ 4*** y cada libra de ***A*** contiene ***1*** onza de N_1 y ***2*** onzas de N_2. El alimento ***B*** cuesta ***$ 8*** por libra y cada libra de ***B*** contiene ***1,5*** onzas de N_1 y ***0,5*** onzas de N_2. Si el peso de la mezcla no debe exceder de ***40 Lb***, ¿cuántas libras de cada alimento deben utilizarse de manera que el costo total sea mínimo?

A) 5 Lb de A y 10 Lb de B. *B) 10 Lb de A y 10 Lb de B.*
C) 20 Lb de A y 10 Lb de B. *D) 8 Lb de A y 10 Lb de B.*
E) 12 Lb de A y 10 Lb de B.

19 En una granja se da una dieta "para engordar" con una composición mínima de ***15*** unidades de una sustancia ***A*** y otras ***15*** de una sustancia ***B***. En el mercado sólo se encuentran dos clases de compuestos: el tipo ***X*** con una composición de una unidad de ***A*** y cinco de ***B***, y el tipo ***Y*** con una composición de cinco unidades de ***A*** y una de ***B***. El precio del tipo ***X*** es de ***10*** euros y el del tipo ***Y*** es de ***30*** euros. ¿Qué cantidades se han de comprar de cada tipo para cubrir las necesidades con un costo mínimo?

A) 2 unidades de X y 2 unidades de Y.
B) 1,5 unidades de X y 1,5 unidades de Y.
C) 2,5 unidades de X y 2,5 unidades de Y.
D) 2 unidades de X y 2,5 unidades de Y.
E) 2,5 unidades de X y 2 unidades de Y.

20 Una compañía fábrica dos tipos de lámparas. Se lleva el doble de tiempo fabricar el tipo ***A*** que el tipo ***B***, pero si todas las lámparas fueran del tipo ***B*** la compañía podría producir ***1 250*** por día. Sin embargo debido a la disponibilidad de materiales, la producción diaria total de ambos tipos no puede ser mayor que ***800***. Además la producción diaria del tipo ***A*** no puede rebasar ***400*** y la producción diaria del tipo ***B*** no puede ser mayor que ***700***. Si la utilidad de cada tipo de lámpara ***A*** es de ***S/. 8*** y la utilidad de cada tipo ***B*** es de ***S/. 6***, ¿cuántas lámparas de cada tipo deben fabricarse por día para maximizar la utilidad?

A) 400 tipo A y 400 tipo B. *B) 100 tipo A y 200 tipo B.*
C) 200 tipo A y 200 tipo B. *D) 500 tipo A y 300 tipo B.*
E) 300 tipo A y 500 tipo B.

CLAVES DE LA PRIMERA PRACTICA

1)D	2)A	3)D	4)D	5)D	6)B	7)A	8)A	9)C	10)D
11)D	12)A	13)E	14)D	15)C	16)C	17)D	18)B	19)C	20)A

CLAVES DE LA SEGUNDA PRACTICA

1)B	2)D	3)A	4)D	5)C	6)C	7)A	8)A	9)B	10)D
11)B	12)D	13)C	14)A	15)A	16)D	17)D	18)B	19)C	20)A

¡ RECUERDE !

Resolver un problema de Programación Lineal consiste en optimizar una función sujeta a restricciones, entendiendo por optimizar encontrar el máximo o el mínimo, según los casos. Pero ese punto óptimo está sujeto a limitaciones, ya que las variables que intervienen en la función a optimizar se encuentran relacionadas por medio de un conjunto de desigualdades.

Por tanto, hay que resolver un sistema de desigualdades y, una vez resuelto, ver en qué punto o puntos del conjunto de soluciones la función a optimizar alcanza su valor máximo o mínimo.

Naturalmente, tanto la función a optimizar como las desigualdades que constituyen las restricciones del problema pueden ser o no lineales; si lo son nos encontramos ante un problema de Programación Lineal.

El número mínimo de variables del problema será de dos, aunque el número puede ser mucho más alto. Este tipo de problemas complejos sólo es accesible mediante la ayuda de un ordenador capaz de manipular un alto número de variables.

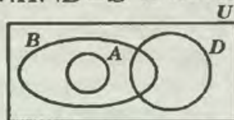
Quedan fuera de nuestro alcance métodos de resolución como el Simplex, creado por Dantzig, o el Método Húngaro, aplicable a determinado tipo de problemas.

PROBLEMAS RESUELTOS DE REPASO

PROBLEMA 1 :
Si $A\subset B \wedge A\cap D=\varnothing$
Simplifique : $\left[(A\cap D^c)\cap B^C\right]\cup\left[B\cup(A-D)\right]$

A) $A\cap B$ B) A C) B D) $\varnothing$ E) $D\cap B$

RESOLUCIÓN:
* Si: $A\subset B \wedge A\cap D=\varnothing$ tenemos :



* Luego simplificaremos :

$$\underbrace{\left[(A\cap D^c)\cap B^C\right]}_{A\cap\phi}\cup\underbrace{\left[B\cup(A-D)\right]}_{B\cup A}$$

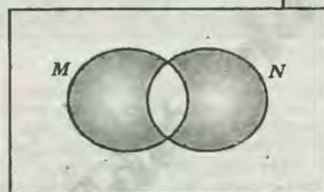
$\Rightarrow \phi\cup B=B$

RPTA: "C"

PROBLEMA 2 :
Dados los conjuntos A, B y C en U, simplifique la expresión. $\left[A\Delta(B\Delta C)\right]\Delta\left[C\Delta B^c\right]$

A) A^C B) B^C C) C^C D) A E) B

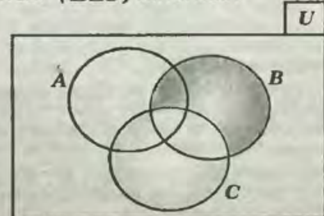
RESOLUCIÓN:
* Para dos conjuntos M y N, se tiene :
$M\Delta N=(M\cup N)-(M\cap N)$



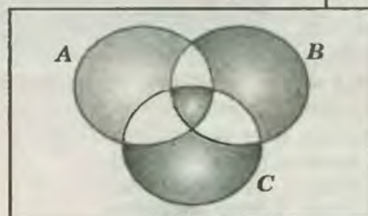
* Nos piden simplificar la expresión :

$$\left[\underbrace{A\Delta(B\Delta C)}_{P}\right]\Delta\left[\underbrace{C\Delta B^c}_{Q}\right]$$

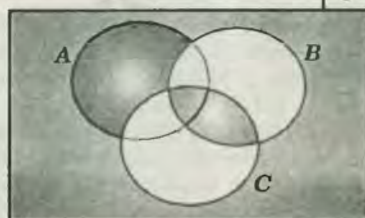
I) Al graficar $(B\Delta C)$ tenemos:



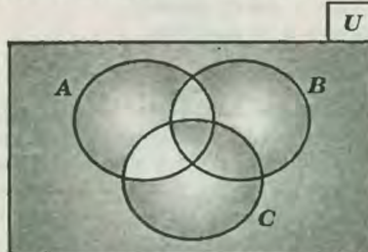
II) Hacemos $A\Delta(B\Delta C)\equiv P$



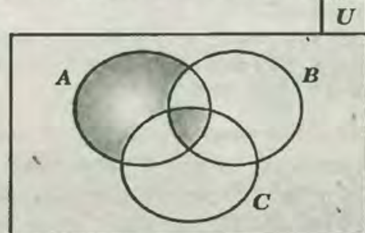
III) Hacemos $C\Delta B^c\equiv Q$



IV) De *(I)* y *(II)* graficamos $P\cup Q$.

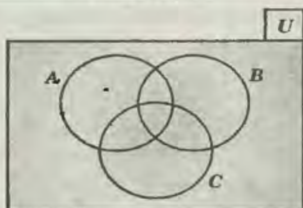


V) De *(II)* y *(III)* graficamos $P\cap Q$.



VI) Finalmente graficamos.

$P\Delta Q\equiv\left[A\Delta(B\Delta C)\right]\Delta\left[C\Delta B^c\right]$



* Entonces , el gráfico resultante es: A^C.

RPTA: "A"

PROBLEMA 3 :

Al simplificar :

$$\{A\cap[(B-C^c)\cup(B-C)]^c\}-\{A\cap[B-(C-A)]^c\cap B^c\}$$

Se obtiene :

A) $(A\cap B)^c$ B) $A\cup B$ C) ϕ D) B^c E) $A\cap B^c$

RESOLUCION :

$$\underbrace{\{A\cap[(B-C^C)\cup(B-C)]^C\}}_{P}-\underbrace{\{A\cap[(B-C^C)\cup(B-C)]^C\}}_{Q}$$

* Sea:

$$P=\{A\cap[\underline{(B-C^C)}\cup(B-C)]^C\}$$

$$\Rightarrow P=\{A\cap[(B\cap C)\cup(B\cap C^C)]\}$$ ...Ley dela Diferencia

$$\Rightarrow P=A\cap\Big[B\cap\underbrace{(C\cup C)^C}_{U}\Big]^C$$ ...Ley Distributiva

$$\Rightarrow P=A\cap\underbrace{(B\cap U)}_{B}{}^C\Rightarrow P=\{A\cap B^c\}$$

* También:

$$Q=\Big\{A\cap\underbrace{[B-(C-A)]}_{M}{}^C\cap B^C\Big\}$$

$$\Rightarrow M=[B-(C\cap A^C)]^C$$ ...Ley de la Diferencia

$$M=[B\cap(C\cap A^C)^C]^C$$ ...Ley de la Diferencia

$$M=[B^C\cup(C\cap A^C)]$$ ...Ley de la D'Morgan

* Luego en

$$Q=A\cap\underbrace{[B^C\cup(C\cap A^C)]\cap B^C}_{B^C}$$ ...Ley de Absorción

$$\Rightarrow Q=\{A\cap B^C\}$$

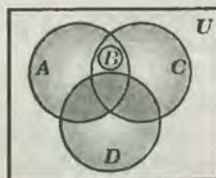
se aprecia que $P=Q$, entonces: $P-Q=\phi$

* Finalmente al simplificar se obtiene: ϕ

RPTA: "C"

PROBLEMA 4 :

Dado el diagrama



de las siguientes afirmaciones

I) $A\cap C$ contiene $B-D$

II) La intersección de B con el complemento de $C-D$ es ϕ.

III) $\complement(A)\cup\complement(B)\cup\complement(B\cap D)=U$ son verdaderas.

A) todas ***B) solo II*** ***C) solo I y II***

D) solo I y II ***E) solo II y III***

RESOLUCIÓN :

* Según el diagrama tenemos:

II) VERDADERA :

Se aprecia que B y D son disjuntos , por lo tanto $B-D=B$ y además $(A\cap C)$ contiene a B.

II) VERDADERA : Se aprecia que $B\subset(C-D)$, entonces $B\cap(C-D)^C=\phi$

III) VERDADERA :

Se aprecia que $B\cap D=\phi$ (son disjuntos B y D) , entonces . $\complement(B\cap D)=U$

* Por tanto:

$$\complement(A)\cup\complement(B)\cup\complement(B\cap D)=U$$

$$\complement(A)\cup\complement(B)\cup U=U$$

RPTA: "A"

PROBLEMA 5 :

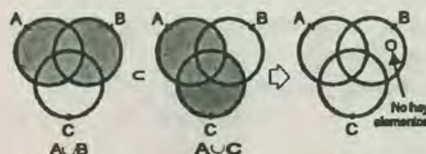
Dado tres conjuntos *A,B y C,* tales que $(A\cup B)\subset(A\cup C)\wedge(A\cap B)\subset A\cap C$ entonces.

A) $B\subset C$ *B)* $B=C$ *C)* $C\subset B$

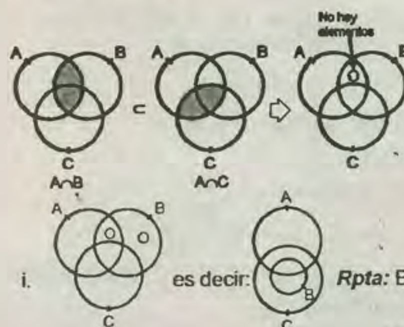
D) $(A\cup C)\subset B$ *E)* $(A\cup B)\subset C$

RESOLUCIÓN:

- **Si $(A\cup B)\subset(A\cup C)$:**
  Gráficamente:



- **SI $(A\cap B)\subset(A\cap C)$:**
  Gráficamente:



RPTA: "A"

PROBLEMA 6 :

Sean P y Q conjuntos tales que:
Si $p \in P$, entonces $p \in Q$. Luego se puede afirmar que :

A) Si $-3 \in Q$, entonces $-3 \in P$

B) Si $13 \notin P$, entonces $13 \notin Q$

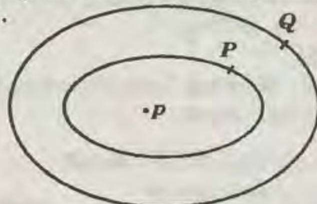
C) Si $10 \notin Q$, entonces $10 \notin P$

D) Si $0,10 \in Q$, entonces $0,10 \notin P$

E) Si $1 \notin Q$, entonces $1 \in P$

RESOLUCIÓN:

* Por la proposición condicional se tiene:
Si $p \in P$, entonces $p \in Q$ equivale a decir que $P \subset Q$.



* Entonces , de las alternativas se puede afirmar que: Si $10 \notin Q$, entonces $10 \notin P$

OTRO MÉTODO :

Recuerda $a \Rightarrow b$ es equivalente $\sim b \Rightarrow \sim a$

$p \in P \Rightarrow p \in Q$ es equivalente $p \notin Q \Rightarrow p \notin P$

RPTA: "C"

PROBLEMA 7 :

Indique la secuencia correcta después de determinar si la proposición es verdadera *(V)* o falsa *(F)*:

I) Si $A = \{\phi\}$; entonces $A \subset P(A)$; $P(A)$ potencia de *A*.

II) $A \Delta B \in P(A \cup B)$

III) Si $A/B = \phi$ entonces $A = B$

A) VVV *B) VVF* *C) VFV*
D) VFF *E) FFF*

RESOLUCIÓN:

I) VERDADERO :

El conjunto potencia de *A* está formado por todos los subconjuntos de *A*.

$\forall A, A \not\subset A \wedge A \in P(A)$

Si $A = \{\phi\} \rightarrow P(A) = \{\{\phi\};\phi\}$

Luego $\{\phi\} \subset P(A$

II) VERDADERO :

$(A\Delta B) \subset (A \cup B) \rightarrow (A\Delta B) \in P(A \cup B)$

III) FALSO : $A/B = \phi \rightarrow A = B$ no necesariamente

Contra ejemplo :

$A = \{2;3\}$, $B = \{1;2;3;4\}$

* Por lo tanto $A/B = \phi$; sin embargo. $A \neq B$

RPTA: "B"

PROBLEMA 8 :

Sea $A = \{1;\ 2\ ;\ 3\}$

Determine el valor de verdad de las siguientes expresiones:

I) $\exists x \in A\ \forall y \in A / x^2 < y+1$

II) $\forall x \in A\ \exists y \in A / x^2 + y^2 < 12$

III) $\exists x \in A\ \forall y \in A\ \exists z \in A / x^2 + y^2 < 2z^2$

IV) $\exists x \in A\ \exists y \in A\ \forall z \in A / x^2 + y^2 < 2z^2$

A) VFVV C) VVVF B) VVFV D) FVVV E) VVVV

RESOLUCIÓN :

I) VERDADERA :

* Si: $\exists x = 1$; $\forall y \in \{1;2;3\}$
* Entonces: $1 < y+1 \Rightarrow 0 < y$
* Por tanto, $y \in \{1;2;3\}$

II) VERDADERA :

* Si: $\exists y = 1; \forall y \in \{1;2;3\}$
* Entonces:
$x^2 + 1 < 12 \Rightarrow x^2 < 11 \Rightarrow -\sqrt{11} < x < \sqrt{11}$
* Por tanto: $x \in \{1;2;3\}$

III) VERDADERA :

* Si: $\exists x = 1; \exists z = 3$; $\forall y \in \{1;2;3\}$
* Entonces:
$1 + y^2 < 2(9) \Rightarrow y^2 < 17 \Rightarrow -\sqrt{17} < y < \sqrt{17}$
* Por tanto: $y \in \{1;2;3\}$

VI) FALSA :

* Si: $\exists x = 1; \exists y = 1; 1+1 < 2z^2$
$\Rightarrow 1 < z^2 \Rightarrow z > 1 \vee z < -1$
* Entonces, no cumple $\forall z \in \{1;2;3\}$, pues falla para $z = 1$

RPTA: "C"

PROBLEMA 9 :

Sea x un conjunto no vacío y $R \subset P(x)$ un subconjunto no vacío del conjunto potencia de x , R es un anillo de conjuntos si para cualquier par de elementos A y B en R se cumple $A \cup B \in R \wedge A/B \in R$. Si R es un anillo de conjuntos. Indique el valor de verdad de las siguientes afirmaciones:

I) $A \Delta B \in R$ *II)* $A \cap B \in R$ *III)* $\phi \in R$

A) VFF *B) FVF* *C) VVV*
D) VVF *E) VFV*

RESOLUCIÓN:

* Se dan:
$\forall A ; B \in R$: $A \cup B \in R$........................*(I)*
$A - B \in R$..*(II)*
* Analizando cada afirmación dada:
I) VERDADERO: $A\Delta B \in R$ si $A ; B \in R$

* Por *(II)*: $(A-B)$ y $(B-A)\in R$
* Luego por *(I)*:

$$(A-B)\cup(B-A)\in R\Rightarrow A\Delta B\in R$$

II) VERDADERO : $A\cap B\in R$
* Entonces $(A\cup B)\in R\wedge(B\Delta A)\in R$
* Además : $A\cap B=(A\cup B)-(A\Delta B)$
* Luego por : $A\cap B\in R$

III) VERDADERO : $\phi\in R$ entonces $\forall A\in R$

$$\underline{A-A}\in R\Rightarrow\phi\in R$$

* Justificación:

ϕ es subconjunto de cualquier conjunto y los elementos de *R* subconjuntos.

Ejemplo:
* Dado $X=\{a;b;c\}$ .....*a ; b ; c* : diferentes

$\Rightarrow P(X)=\{\phi;\{a\};\{b\};\{c\};\{a,b\};\{b,c\};\{a,c\};X\}$

aquí , por las condiciones dadas , uno de los anillos *R* es : $R=\{\{a\};\{b\};\{a,b\};\phi\}$

RPTA: "C"

PROBLEMA 10 :

Sean los conjuntos :

$A=\left\{x=\frac{r}{s}/r;s\in\mathbb{Z};\text{con }1<r<3\text{ y }0<s<3\right\}$,

$B=\{x\in\mathbb{Z}/1<x<2\}$. Calcule $A\cup B$

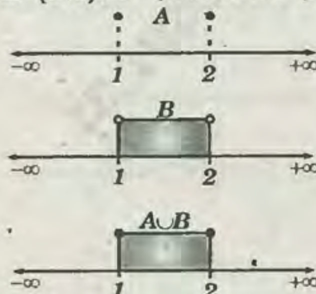
A) $\langle 1;2\rangle$ B) $\langle 1;2]$ C) $[1;2\rangle$
D) $[1;2]$ E) $[2;3\rangle$

RESOLUCION :

Si: $1<r<3\Rightarrow r=2$

Si: $0<s<3\Rightarrow s=1\vee s=2$

* Luego: $A=\{2;1\}$; $B=\{x\in\mathbb{R}/1<x<2\}$



$\Rightarrow A\cup B=[1;2]$

RPTA: "D"

PROBLEMA 11:

Sea $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}<-1$ donde *a* y *b* son números reales, entonces dadas las proposiciones

I) $(a+1)^2<(b+1)^2$ II) $a^2>b^3$
III) $a^3-b^3>0$

son ciertas

A) I y II B) II y III C) I y III
D) I , II y III E) solo II

RESOLUCIÓN:

* Invirtiendo tenemos: $0>a>b>-1$

I) VERDADERA: $\underbrace{a+1}_{+}>\underbrace{b+1}_{+}$

$$(a+1)^2>(b+1)^2$$

II) VERDADERA : $\underbrace{a}_{+}^{2}>\underbrace{b}_{-}^{3}$

III) VERDADERA : $a>b$

$$a^3>b^3$$

$$a^3-b^3>0$$

*** Por lo tanto, las 3 proposiciones son verdaderas.**

RPTA: "D"

PROBLEMA 12 :

Sean *a* , *b* , *c* y *d* cuatro números reales positivos tal que *a* – *b*= *c* – *d* y *a* < *c*. Diga la verdad o falsedad de las siguientes afirmaciones.

I) $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$; si $a<b$ II) $\frac{c}{d}<\frac{a}{b}$; si $c<d$ III) $\frac{c}{b}<\frac{a}{d}$

A) FFV B) FVV C) FVF
D) VFV E) VFF

RESOLUCIÓN:

* Se sabe que : $a,b,c,d>0$
* Además : $a-b=c-b\Rightarrow d=c+b-a$

$a<c$ ....(I)

I) VERDADERA:

* Si : $a<b\Rightarrow\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$ de *(I)*

$$\begin{cases}a-b<0\\a-b<0\end{cases}\begin{cases}-(a-b)(a-c)<0\Rightarrow a\underline{(c+b-a)}-bc<0\\\Rightarrow ad-bc<0\Rightarrow ad<bc\Rightarrow\frac{a}{b}<\frac{c}{d}\end{cases}$$

II) FALSA:

* Si: $a<b\Rightarrow\frac{c}{b}<\frac{a}{d}$
* Dado que:

$$a-c<0\ \wedge\ a-b<0$$

$$\text{como}:(a-c)(a-b)>0\Rightarrow cb-\underbrace{(c+b-a)}_{d}a>0$$

$$\Rightarrow cb>da\Rightarrow\frac{c}{d}>\frac{a}{b}$$

III) FALSA:

$\frac{c}{b}<\frac{a}{d}\Rightarrow c-a>0$ por $(c+b)$

$\Rightarrow(c+b)(c-a)>0\Rightarrow c\underbrace{(b+c-a)}_{d}-ab>0$

$\Rightarrow cd>ab\Rightarrow\frac{c}{b}>\frac{a}{d}$

RPTA: "E"

PROBLEMA 13 :

Partiendo de la desigualdad $a^2-2ab+b^2\geq 0$ donde *a* y *b* son reales no negativos , podemos demostrar que :

A) $a-b\geq 0$ B) $a+b\geq ab$ C) $a+b\leq 2\sqrt{ab}$

D) $\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$ E) $a\leq b$

RESOLUCIÓN :

* En lo dado : $a^2-2ab+b^2\geq 0$
* Sumando *4ab* ambos miembros :

$$a^2+2ab+b^2\geq 4ab\Rightarrow(a+b)^2\geq 4ab$$

* Como : $ab\geq 0$

$$\Rightarrow a+b\geq 2\sqrt{ab}\Rightarrow\boxed{\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}}$$

RPTA: "D"

PROBLEMA 14:

Dadas las siguientes proposiciones. ¿Cuáles son verdaderas?

I) Si: $a,b\in\mathbb{R}/a>0\wedge|b|<1\Rightarrow(ab+a+1)$ es siempre mayor que *1.*

II) Si: $a,b\in\mathbb{R}^+$ el máximo valor que toma $\frac{5ab}{a^2+^2+3ab}$ es *1.*

III) Si: $3+a^2-a^4<M,\forall a\in\mathbb{R}\Rightarrow$ el menor valor entero de *M* es *3.*

A) F F F B) V F F C) F V F
D) V V F E) V V V

RESOLUCIÓN:

I)VERDADERO :

* Si: $a,b\in\mathbb{R};\ a>0\wedge|b|<1$

entonces $-1<b<1\wedge a>0\Leftrightarrow -a<ab<a$

$\Leftrightarrow 0<ab+a<2a\Leftrightarrow 1<ab+a+1<2a+1$

$\Rightarrow ab+a+1>1$

II)VERDADERO :

* Si: $a,b\in\mathbb{R}^+\Rightarrow(a-b)^2\geq 0\Leftrightarrow a^2+b^2\geq 2ab$

$$\Leftrightarrow a^2+b^2+3ab\geq 5ab\Leftrightarrow 0<\frac{5ab}{a^2+b^2+3ab}\leq 1$$

$$\Rightarrow\left(\frac{5ab}{a^2+b^2+3ab}\right)_{máx}=1$$

III) FALSO :

* Por las condiciones del problema:

$$a^4-a^2+\frac{1}{4}>3-M+\frac{1}{4}\Leftrightarrow\left(a^2-\frac{1}{2}\right)^2>\frac{13}{4}-M$$

*Si se cumple: $\forall a\in\mathbb{R}\Rightarrow\frac{13}{4}-M\leq 0\Rightarrow M\geq\frac{13}{4}$

$\Rightarrow M_{menor\ entero}=4$

RPTA: "D"

PROBLEMA 15 :

Sea el conjunto $A=\{x\in\mathbb{R}/\sqrt{x-1}\in\mathbb{Z}\}$. El elemento de *A* que se encuentre en la posición *50* es.

A) 2104 B) 2205 C) 2301 D) 2402 E) 2403

RESOLUCIÓN:

* De acuerdo al dato: $A=\{x\in\mathbb{R}/\sqrt{x-1}\in\mathbb{Z}\}$
* Asumiendo que: $\sqrt{x-1}=K\ \wedge\ K\in\mathbb{Z}$
* Entonces: $K\in\mathbb{Z}_0^+\ \wedge\ x=K^2+1$
* Luego evaluando para los siguentes valores:

$$K=0\Rightarrow x_1=0^2+1$$
$$K=1\Rightarrow x_2=1^2+1$$
$$K=2\Rightarrow x_3=2^2+1$$
$$\vdots\qquad\vdots$$
$$K=49\Rightarrow x_{50}=49^2+1=2402$$

* Por lo tanto , el elemento de *A* que ocupa la posición *50* es: *2402*

RPTA: "D"

PROBLEMA 16 :

El conjunto

$A=\left\{x\in\mathbb{R}/;a<-4\wedge 2-ax>\sqrt{x+ax^2}\right\}$ es igual a.

A) $\langle -0;\infty]\cup\left[-\frac{1}{a};\infty\right\rangle$ B) $\left[0;-\frac{1}{a}\right]$ C) $\mathbb{R}$

D) $\left\langle\frac{1}{a};\infty\right\rangle$ E) $\left\langle -\infty;-\frac{1}{a}\right\rangle$

RESOLUCION :

$$x\in A\Leftrightarrow \underline{2-ax>\sqrt{x+ax^2}}\ ;\ a<-4$$

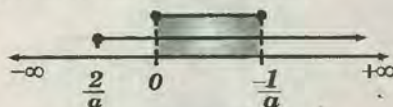
* Resolviendo la desigualdad:

C.V.A.

$2-ax>0\ \wedge\ x+ax^2\geq 0\Rightarrow 2>ax\ \wedge\ x(1+ax)\geq 0$

* Se sabe que : $a<-4:x>\frac{2}{a}\ \wedge\ 0\leq x\leq -\frac{1}{a}$

* Luego intersectando se obtiene:



$$C.V.A=\left[0\ ;-\frac{1}{a}\right]$$

* Elevando al cuadrado: $2-ax>\sqrt{x+ax^2}$

$4-4a+a^2x^2>x+ax^2$

$\Rightarrow(a^2-a)x^2-(4a+1)x+4>0$ ....(α)

*Aquí: coeficientes principal $=a^2-a>0$
discriminante $=24a+1<0$

* Entonces: (α) se verifica $\forall x\in\mathbb{R}$.

* Por tanto: $A=C.S=C.V.A=\left[0\,;-\frac{1}{a}\right]$

RPTA: "B"

PROBLEMA 17 :

Determine el valor de verdad de las afirmaciones.

I) Si $x\in\langle -1\,;5\rangle \Rightarrow \frac{3}{2x+5}\in\langle 0\,;1\rangle$

II) Si $x\in[0\,;4\rangle \Rightarrow \sqrt{\frac{16-x}{x+2}}-\sqrt{x}+1>0$

III) Si $\frac{x-1}{x+3}>x \Rightarrow x<-3$

A) F V V B) F V F C) F F V
D) F F F E) V V V

RESOLUCIÓN:

* Al analizar las proposiciones se obtiene:

I) $-1<x<5 \Rightarrow 3<2x+5<15$

$\Rightarrow \frac{1}{5}<\frac{3}{2x+5}<1$ ....(V)

II) $0\le x<4 \Rightarrow \begin{cases}\sqrt{2}<\sqrt{\frac{16-x}{x+2}}\le\sqrt{8}\\ -1<-\sqrt{x}+1\le 1\end{cases}$

$\Rightarrow \sqrt{\frac{16-x}{x+2}}-\sqrt{x}+1>0$ ....(V)

III) $\frac{x-1}{x+3}>x \Rightarrow \frac{x-1}{x+3}-x>0 \Rightarrow \frac{\cdot(x+1)^2}{(x+3)}<0$

$\Rightarrow x+3<0 \Rightarrow x<-3$ ....(V)

* Por lo tanto , resulta V V V

RPTA: "E"

PROBLEMA 18 :

Si el conjunto : $A=\left\{x\in\mathbb{R}/\sqrt{x^2-1}-\sqrt{|x-1|}\ge 0\right\}$

Entonces el conjunto $\mathbb{R}-A$ está dado por

A) ϕ B) $[-2\;;\;2]$ C) $\langle -2\;;\;2\rangle$
D) $\langle -2\;;\;1\rangle$ E) $[-2\;;\;1]$

RESOLUCIÓN:

* Hallando el conjunto A se tiene:

I) C.V.A.: $x^2-1\ge 0$.

$\Rightarrow x\in\langle -\infty;-1]\cup[1;+\infty\rangle$ ....(r_1)

II) Elevando al cuadrado $\sqrt{x^2-1}\ge\sqrt{|x-1|}$, se obtiene: $x^2-1\ge|x-1|$

$\Rightarrow 1-x^2\le x-1\le x^2-1$

$\Rightarrow 1-x^2\le x-1 \wedge x-\not{1}\le x^2-\not{1}$

$\Rightarrow \underbrace{(x+2)(x-1)\ge 0 \wedge x(x-1)\ge 0}$

$\Rightarrow x\in\langle -\infty\,;-2]\cup[1;+\infty\rangle$ ....(r_2)

$\Rightarrow A=r_1\cap r_2=\langle -\infty;-2]\cup[1;+\infty\rangle$

* Entonces: $\mathbb{R}-A=\langle -2\,;1\rangle$

RPTA: "D"

PROBLEMA 19 :

Resuelva: $\left(\sqrt{3+\sqrt{8}}\right)^x+\left(\sqrt{3-\sqrt{8}}\right)^x\le 34$

A) $-3\le x\le 3$ B) $\sqrt{8}\le x\le 2\sqrt{8}$ C) $-4\le x\le 4$
D) $-\sqrt{2}\le x\le\sqrt{2}$ E) $-\sqrt{3}\le x\le\sqrt{3}$

RESOLUCIÓN :

* Se sabe que: $\sqrt{3\pm\sqrt{8}}=\sqrt{3\pm 2\sqrt{2}}=\sqrt{2}\pm 1$

* Entonces,la expresión dada es equivalente a:

$(\sqrt{2}+1)^x+(\sqrt{2}-1)^x\le 34 \Rightarrow (\sqrt{2}+1)^x+\frac{1}{(\sqrt{2}+1)^x}\le 34$

* Luego haciendo $(\sqrt{2}+1)^x=a$, tenemos:

$a+\frac{1}{a}\le 34;\,a>0 \Rightarrow a+2+\frac{1}{a}\le 36 \Rightarrow \left(\sqrt{a}+\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2\le 36$

$\Rightarrow \sqrt{a}+\frac{1}{\sqrt{a}}\le 6 \Rightarrow 3-2\sqrt{2}\le\sqrt{a}\le 3+2\sqrt{2}$

* Finalmente reemplazando *a* resulta.

$(\sqrt{2}-1)^2\le\sqrt{(\sqrt{2}+1)^x}\le(\sqrt{2}+1)^2$

$\Rightarrow (\sqrt{2}+1)^{-2}\le(\sqrt{2}+1)^{\frac{x}{2}}\le(\sqrt{2}+1)^2;\,\sqrt{2}+1>1$

$\Rightarrow -2\le\frac{x}{2}\le 2 \Rightarrow -4\le x\le 4 \Rightarrow C.S.=[-4;4]$

RPTA: "C"

PROBLEMA 20 :

Calcule el conjunto solución de la inecuación :

$$(x-2^{-2})^2+4x+2<0$$

A) $\left\langle -\frac{13}{4},-\frac{3}{4}\right\rangle$ B) $\left\langle -\frac{11}{4},-\frac{3}{4}\right\rangle$ C) $\left\langle -\frac{9}{4},-\frac{3}{4}\right\rangle$ D) $\left\langle -\frac{13}{4},-\frac{5}{4}\right\rangle$ E) $\left\langle -\frac{11}{4},-\frac{5}{4}\right\rangle$

RESOLUCIÓN:

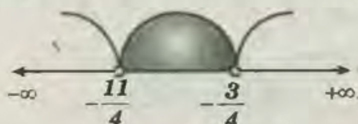
* Transformando la inecuación dada tenemos:

$$\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+4\left(x-\frac{1}{4}\right)+3<0$$

* Luego factorizando por aspa simple , se tiene:

$\left(x-\frac{1}{4}+1\right)\left(x-\frac{1}{4}+3\right)<0 \Leftrightarrow \left(x+\frac{3}{4}\right)\left(x+\frac{11}{4}\right)<0$

* Entonces los puntos críticos son: $\left\{-\frac{11}{4};-\frac{3}{4}\right\}$



* Finalmente: $C.S.=\left\langle -\frac{11}{4};-\frac{3}{4}\right\rangle$

RPTA: "B"

PROBLEMA 21 :
Los valores enteros x e y son los lados de un rectángulo. Si se cumple que $a^2x+y<\frac{a}{a+1}$
$\frac{1}{a^2}x+y<11+\frac{1}{a+1}$,
para $a>0$, halle el rectángulo de mayor área.

A) 2 u² B) 3 u² C) 4 u² D) 5 u² E) 6 u²

RESOLUCIÓN:

* Al sumar las desigualdades se tiene:

$$\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)x+2y<12$$

* Nos piden el mayor valor xy con $x\;;\;y\in N$; en tal caso $a^2+\frac{1}{a^2}$ debe ser el menor posible.
* Se sabe que:

$$a^2+\frac{1}{a^2}\geq 2;\ \forall a\neq 0\Rightarrow\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)_{menor}=2$$

* Luego: $2x+2y<12\Rightarrow x+y<6$

x	y
1	4
2	3
3	2
4	1

$$(xy)_{mayor}=2\times 3=6\Rightarrow A_{mayor}=6\,u^2$$

RPTA: "E"

PROBLEMA 22 :
Determine el conjunto solución de la inecuación $4^x-4^{-x}<1$:

A) $\left\langle 0\,;\,Log_4\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\right\rangle$ B) $\langle-\infty;0\rangle$ C) $\left\langle-\infty;Log_4\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\right\rangle$
D) $\left\langle-\infty;\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right\rangle$ E) $\left\langle-\infty;Log_4\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)\right\rangle$

RESOLUCIÓN :

$$4^x-4^{-x}<1\xrightarrow{\times 4^x\ldots\ldots(4^x>0;\forall x\in R)}(4^x)^2-1<4^x$$

$$\Rightarrow(4^x)^2-4^x-1<0\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(I)$$

* Hacemos : $4^x=m$
* En (I) : $m^2-m-1<0$
* Aplicamos el método de los puntos críticos :
* Raíces : $m_1=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$; $m_2=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$



* luego : $\frac{1-\sqrt{5}}{2}<m<\frac{1+\sqrt{5}}{2}$
* Reemplazamos a por 4^x :

$$\frac{1-\sqrt{5}}{2}<4^x<\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

* Solo resolvemos : $4^x<\frac{1+\sqrt{5}}{2}$
* Tomamos logaritmo en base 4 :

$$x<Log_4\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\Rightarrow CS=\left\langle-\infty;Log_4\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\right\rangle$$

RPTA: "C"

PROBLEMA 23 :
La inecuación $x^2-2bx-c<0$ tiene como conjunto solución $\langle-3;5\rangle$. Halle $b+c$.

A) 16 B) 18 C) 20 D) 22 E) 24

RESOLUCIÓN :

* La inecuación $x^2-2bx-c<0$ se verifica , para todo x en $\langle-3;5\rangle$.
* Luego : $x_1=-3$ y $x_2=5$
son raíces del polimonio $P(x)$.
* Aplicando el teorema de Cardano :

$$x_1+x_2=2b\ \wedge\ x_1x_2=-c$$
$$\Rightarrow 2=2b\ \wedge\ -15=-c$$
$$\Rightarrow b=1\ \wedge\ c=15$$
$$\Rightarrow\boxed{b+c=16}$$

RPTA: "A"

PROBLEMA 24 :
¿Para qué valores de x se verifica la inecuación?

$$1<\frac{3x+10}{x+7}<2$$

A) $-1/2<x<7$ B) $-1<x<5$ C) $-3/2<x<4$
D) $3<x<8$ E) $1<x<5$

RESOLUCIÓN:

*De : $\frac{3x+10}{x+7}=3-\frac{11}{x+7}\Rightarrow 1<3-\frac{11}{x+7}<2\Leftrightarrow 1<\frac{11}{x+7}<2$

$$\Rightarrow\frac{1}{2}<\frac{x+7}{11}<1\Rightarrow\frac{11}{2}<x+7<11\Rightarrow-\frac{3}{2}<x<4$$

RPTA: "C"

PROBLEMA 25 :
Dados los números reales A y B tales que $A<B<0$, dé el valor de verdad de las siguientes afirmaciones :

I) $A^k<B^k<0$ si k es par II) $\frac{1}{A^k}<\frac{1}{B^k}<0;\ \forall k\in\mathbb{Z}^+$

III) $\frac{A_k}{B_k}>0;\ \forall k\in\mathbb{Z}^+$

A)FFF B)FVV C) VFF
D)VVF E)FFV

RESOLUCIÓN:

I) FALSA :

Como k es par ,entoces: $k=2n; n \in \mathbb{Z}$

*Luego : $A<B<0 \Rightarrow A^{2n}>B^{2n}>0$

III) FALSA:

Como $A<B<0$ analicemos dos casos :

I) Si $k=2n; n \in \mathbb{Z}^+$ invertiendo $\frac{1}{B}<\frac{1}{A}<0$

elevando a la $2n$: $\frac{1}{B^{2n}}>\frac{1}{A^{2n}}>0$.

ii) Si $k=2m+1 \Rightarrow \frac{1}{B^{2n+1}}<\frac{1}{A^{2n+1}}<0$

III) FALSA:

Como $A<B<0 \Rightarrow \left\{\frac{A}{B}>0 \Leftrightarrow \left(\frac{A}{B}\right)^k>0; \forall k \in \mathbb{Z}^+\right\}$

RPTA: "A"

PROBLEMA 26 :

¿Cuántas de las proposiciones siguientes son verdaderas?

I) Si : $\sqrt{x^2}>1 \Rightarrow x>1$

II) Si : $\sqrt{-x}>1 \Rightarrow x^2>1$

III) Si : $x<-1 \Rightarrow x^2<-1$

IV) Si : $x>1 \Rightarrow x^2>1$

V) Si : $x^2<1 \Rightarrow x<1$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

RESOLUCIÓN:

*Analizando proposición por proposición , tendremos :

I) FALSA: $\sqrt{x^2}>1 \Rightarrow |x|>1 \Rightarrow x>1 \vee x<-1$

II) VERDADERA: $\sqrt{-x}>1 \Rightarrow -x \geq 0 \Rightarrow x \leq 0$

entonces : $-x \geq 1 \Rightarrow x^2>1$

III) FALSA: $x<-1 \Rightarrow x^2>1$

IV) VERDADERA: $x>1 \Rightarrow x^2>1$

V) VERDADERA: $x^2<1 \Rightarrow -1<x<1 \Rightarrow x<1$

RPTA: "C"

PROBLEMA 27 :

La siguiente inecuación $2x-\frac{9}{x-3}>x-\frac{5}{x-3}$ se satisface para :

A) $-2<x<2$ ó $x>3$ B) $-1<x<3$ ó $x>4$

C) $-3<x<1$ ó $2<x<3$ D) $-\infty<x<3$

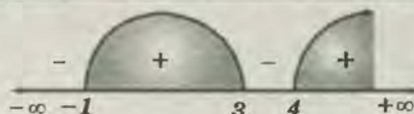
E) Todos los números reales diferentes de 3

RESOLUCIÓN:

* Reduciendo la inecuación dada :

$$x-\frac{4}{x-3}>0 \Rightarrow \frac{x^2-3x-4>0}{x-3} \Rightarrow \frac{(x+1)(x-4)}{x-3}>0$$

*Usando puntos críticos :



$C.S.=\{x \in \mathbb{R} / -1<x<3 \cup x>4\}$

RPTA: "B"

PROBLEMA 28 :

¿Para qué valores de a en la inecuación cuadrática siguiente se cumple que para todo $x \in \mathbb{R}$? $x^2+ax-2<2x^2-2x+2$

A) $a \in \langle -6;2\rangle$ B) $a \in \langle -10;-7\rangle$ C) $a \in \langle 1;3\rangle$

D) $a \in \langle -15;-10\rangle$ E) $a \in \langle 3;6\rangle$

RESOLUCIÓN:

* Por el Teorema del Trinomio Positivo , se sabe:

$Ax^2+Bx+C>0; \forall x \in \mathbb{R}$

* con: $A;B;C \in \mathbb{R} \Rightarrow A>0 \wedge B^2-4AC<0$

* Luego aplicando el teorema , resulta:

$(a+2)^2-4(4)<0$

$\Rightarrow (a+6)(a-2)<0 \Rightarrow a \in \langle -6;2\rangle$

RPTA: "A"

PROBLEMA 29 :

Halle el conjunto solución de la siguiente desigualdad: $\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x} \geq \sqrt{|x|}$

A) $\left[-\frac{4}{5};\frac{4}{5}\right]$ B) $\left[-1;-\frac{4}{5}\right\rangle \cup \left\langle \frac{4}{5};1\right]$ C) $\left[-1;-\frac{4}{5}\right] \cup \left[\frac{4}{5};1\right\rangle$

D) $\langle -1;1\rangle$ E) $[-1;1]$

RESOLUCIÓN:

* Hallando el conjunto de valores admisibles

C.V.A. $1-x \geq 0 \wedge 1+x \geq 0$

$\Rightarrow x \leq 1 \wedge x \geq -1 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1$

* Entonces: $U=[-1;1]$

* Al efectuar se tiene:

$2+2\sqrt{1-x^2} \geq |x| \Rightarrow 2\sqrt{1-x^2} \geq |x|-2$ ......(I)

* Como $|x|-2<0$, pues del C.V.A. $|x| \leq 1$.

* En (I) se verifica $\forall x \in U \Rightarrow C.S.[-1;1]$

RPTA: "E"

PROBLEMA 30 :

si: $-10<a<-5; -2<b<-1; 2<c<5;$ entonces $\frac{ab}{c}$ está comprendido entre.

A) -10 y -1 B) -10 y 1 C) 2 y 10 D) 2 y 20 E) 0 y 10

RESOLUCION:

$\xrightarrow{\times(-1)} \left\{\begin{matrix}5<-a<10\\1<-b<2\end{matrix}\right\}(\times)$ $5<ab<20$..........(I)

*De : $2<c<5$

$\xrightarrow{\text{invirtiendo}} \frac{1}{5}<\frac{1}{c}<\frac{1}{2}$ ....(II)

*De $(I)\times(II)$: $1<\frac{ab}{c}<10$

entonces estará $\frac{ab}{c}$ comprendido entre 0 y 10.

RPTA: "E"

PROBLEMA 31 :

Sea el intervalo cerrado $[a;b]$ el complemento del conjunto solución de la desigualdad $x^2-(\sqrt[3]{2}+\sqrt{2})x+2^{5/6}>0$. Sea también $|w-a^6|\le 3$ y $|z-b^6|\le 5$. Entonces la longitud del intervalo que recorre la variable real $w+z$ es :

A) 6 B) 8 C) 10 D) 13 E) 16

RESOLUCIÓN:

* Como:

$(x-\sqrt[3]{2})(x-\sqrt{2})>0$

$A\equiv x\in\langle-\infty;\sqrt[3]{2}\rangle\cup\langle\sqrt{2};+\infty\rangle$

$A^C\equiv[\sqrt[3]{2};\sqrt{2}]=[a;b]\Rightarrow a=\sqrt[3]{2}, b=\sqrt{2}$

* Luego , reemplazando en las desigualdades:

$|w-4|\le 3\wedge|z-8|\le 5$

Siendo $w,z\in\mathbb{R}$.

$-3\le w-4\le 3\wedge -5\le z-8\le 5$

$\Rightarrow 1\le w\le 7\wedge 3\le z\le 13$

Luego: $4\le w+z\le 20\Rightarrow w+z=16$.

RPTA: "E"

PROBLEMA 32 :

Una empresa contrató a un estudiante como promotor de ventas de un producto y le dieron a elegir dos modalidades de sueldo. Modalidad *A:* Una comisión de *$ 3,20* por cada artículo vendido. Modalidad *B:* Un sueldo fijo de *$ 860* más comisión de *$ 1,80* por cada artículo vendido que exceda las *50* unidades. La suma de las cifras , de la cantidad mínima de artículos que debe vender para que la primera opción sea más conveniente , es:

A) 9 B) 10 C) 11 D) 12 E) 13

RESOLUCIÓN:

* Sea x el número de artículos
* Modalidad *A:* $3,20x$
* Modalidad *B:* $860+1,80(x-50)$
* Por condición del problema tenemos:

$3,20x>860+1,80(x-50)$

$\Rightarrow 1,4x>770 \Rightarrow x>550$

$\Rightarrow x=\{551; 552;....\}$

$\Rightarrow x_{min}=551 \Rightarrow \sum cifras=11$

RPTA: "C"

PROBLEMA 33 :

Sea N un número natural tal que la tercera parte del que la precede disminuida en una decena es mayor que catorce , y la cuarta parte del número que el siguiente aumentada en una decena es menor o igual que veintinueve . Entonces la suma de todos los posibles valores de N es.

A) 74 B) 75 C) 149 D)73 E) 222

RESOLUCIÓN:

* *Planteando lo enunciado :*

* $\frac{N-1}{3}-10>14\Rightarrow N>73$..................(I)

* $\frac{N+1}{4}+10\le 29\Rightarrow N\le 75$...............(II)

* De (I) y (II): $73<N\le 75\Rightarrow N\in\{74;75\}$

*Luego la suma pedida : $74+75=149$

RPTA: "C"

PROBLEMA 34 :

Sean x , z , N enteros no negativos. La cantidad de números N tales que $10<N<35$, que no se pueden expresar en la forma $N=5x+8z$ es igual a :

A) 1 B) 3 C) 7 D) 5 E) 9

RESOLUCIÓN:

* Sabemos: $N=5x+8z$
* Luego por condición: $10<5x+8z<35$, existe *24* valores enteros :

$x\in\{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$

$z\in\{0; 1; 2; 3; 4\}$

$z=0\Rightarrow N=5x$	$x=3; 4; 5; 6$	$\Rightarrow$ 4 valores
$z=1\Rightarrow N=5x+8$	$x=1; 2; 3; 4; 5$	$\Rightarrow$ 5 valores
$z=2\Rightarrow N=5x+16$	$x=0; 1; 2; 3$	$\Rightarrow$ 4 valores
$z=3\Rightarrow N=5x+24$	$x=0; 1; 2$	$\Rightarrow$ 4 valores
$z=4\Rightarrow N=5x+32$	$x=0$	$\Rightarrow$ 4 valores

* Se aprecia que *17* valores que cumplen con dicha combinación lineal.
* Entonces , *7* números no se pueden expresar de dicha forma.

RPTA: "C"

PROBLEMA 35 :

Dada la inecuación $\frac{x-a}{x+a}<\frac{x-b}{x+b}$, con $0<b<a$

Su solución es unión de dos intervalos , siendo uno de ellos.

A) $\langle-\infty;-b\rangle$ B) $\langle-b;0\rangle$ C) $\langle-b;+\infty\rangle$

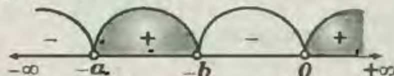
D) $\langle-a;-b\rangle$ E) $\langle-a;+\infty\rangle$

RESOLUCION :

*De lo dado : $1-\frac{2a}{x+a}<1-\frac{2b}{x+b}\Rightarrow\frac{b}{x+b}-\frac{a}{x+a}<0$

$\Rightarrow\frac{x\overbrace{(b-a)}^{(-)}}{(x+a)(x+b)}<0\Rightarrow\frac{x}{(x+a)(x+b)}>0\Rightarrow x(x+a)(x+b)<0$

* Luego por puntos críticos:



$\Rightarrow C.S. x \in \langle -a ; -b\rangle \cup \langle 0 ; +\infty\rangle$

* Nos piden un intervalo

* Por tanto uno de los intervalos es: $\langle -a ; -b\rangle$

RPTA: "D"

PROBLEMA 36 :

Sea la inecuación $\dfrac{a^{2(x-1)} \times a^{5-x}}{a^{5x}} < \dfrac{(a^{2x-1})^x}{a^{4x+2}}$ con $0<a<1$. Entonces , el menor valor entero que satisface la inecuación es x

A) –2 B) –1 C) 0 D) 1 E) 2

RESOLUCION :

* Al afectuar miembro a miembro se obtiene:

$$a^{3-4x} < a^{2x^2-5x-2}$$

* Se sabe que:

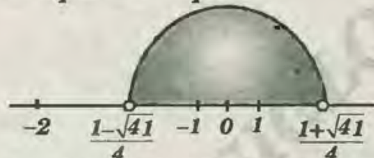
$0< a<1$; entonces

$3-4x>2x^2-5x-2 \Rightarrow 2x^2-x-5<0$

* Luego completando cuadrados resulta:

$(4x-1)^2<41 \Rightarrow -\sqrt{41}<4x-1<\sqrt{41}$

$\Rightarrow \dfrac{1-\sqrt{41}}{4}<x<\dfrac{1+\sqrt{41}}{4}$



* Entonces , el menor valor entero es $x = -1$

RPTA: "B"

PROBLEMA 37 :

Los números x que satisfacen la desigualdad $|x^2+1|^2-3|x^2+1|-4<0$ se encuentran en el intervalo

A) $\langle -\sqrt{2};\sqrt{3}\rangle$ B) $\langle -\infty;\sqrt{3}\rangle$ C) $\langle -\infty;-\sqrt{3}\rangle$

D) $\langle -\sqrt{3};\sqrt{3}\rangle$ E) $\langle -\sqrt{2};\sqrt{2}\rangle$

RESOLUCIÓN:

* Tenemos por dato: $|x^2+1|^2-3|x^2+1|-4<0$

* Aplicando aspa simple se tiene:

$$(|x^2+1|-4)\underbrace{(|x^2+1|+1)}_{(+)}<0$$

* Como: $(x^2+1)\in R^+ \Rightarrow |x^2+1| = x^2+1$

* Entonces tendremos:

$$x^2+1-4<0 = x^2<3 \Leftrightarrow -\sqrt{3}<x<\sqrt{3}$$

* Por tanto: $x \in \langle -\sqrt{3};\sqrt{3}\rangle$.

RPTA: "D"

PROBLEMA 38 :

Halle la intersección de los conjuntos:

$P=\{x \in \mathbb{R}/x^2-2x+a\geq 0\}$ y $Q=\{x\in \mathbb{R}/x^2-ax-2a^2\leq 0\}$

donde $\dfrac{3}{4}\leq a<1$

A) ϕ B) $[-a;1-\sqrt{1-a}]$ C) $\langle -\infty;1-\sqrt{1-a}]$

D) $[1+\sqrt{1-a};\infty\rangle$ E) $[-a;1-\sqrt{1-a}\rangle \cup [1+\sqrt{1-a};2a]$

RESOLUCIÓN:

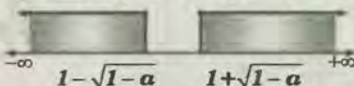
* Analizando el conjunto P se tiene:

$x^2-2x+a\geq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2\geq 1-a$, como $\dfrac{3}{4}\leq a<1$

por lo tanto: $0 < 1 - a$;

* Luego:

$$\sqrt{(x-1)^2}\geq\sqrt{1-a} \Leftrightarrow |x-1|\geq\sqrt{1-a}$$
$$\Leftrightarrow x-1\geq\sqrt{1-a} \lor x-1\leq-\sqrt{1-a}$$
$$\Leftrightarrow x\geq 1+\sqrt{1-a} \lor x\leq 1-\sqrt{1-a}$$



$\Rightarrow P=\langle -\infty ; 1-\sqrt{1-a}]\cup[1+\sqrt{1-a};+\infty\rangle$

* ahora analizando el conjunto Q se tiene:

$$x^2-ax-2a^2\leq 0$$

$x \quad -2a$

$x \quad a$

$$(x-2a)(x+a)\leq 0$$



$Q = [-a;2a]$

* Luego intersecando , se obtiene:

$P\cap Q=[-a;1-\sqrt{1-a}]\cup[1+\sqrt{a-1};2a]$

RPTA: "E"

PROBLEMA 39 :

* Sea $a,b\in\mathbb{R}$ tales que $|x-a|<2b$. Entonces los números p y q para los cuales se tiene $\dfrac{b}{x-a+3b}\in\langle p;q\rangle$ son respectivamente.

A) $\frac{1}{5};1$ B) $\frac{1}{5};\frac{3}{5}$ C) $-1;1$ D) $0;1$ E) $-1;\frac{1}{5}$

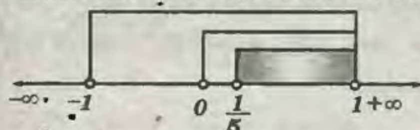
RESOLUCIÓN:

* Dado que $|x-a|<2b$; entonces $b>0$

$\Rightarrow -2b<x-a<2b \Rightarrow b<x-a+3b<5b$

$\Rightarrow \dfrac{1}{5b}<\dfrac{1}{x-a+3b}<\dfrac{1}{b} \Rightarrow \dfrac{1}{5}<\dfrac{1}{x-a+3b}<1$

* Pero $p < \frac{1}{x-a+3b} < q$; (por condición)
* Por lo tanto observamos que hay *3* posibilidades de acuerdo a las claves:



$p=\frac{1}{5} \wedge q=1,\ p=0 \wedge q=1\ \text{y}\ p=-1 \wedge q=1$

* Pero, si consideramos *p* y *q* máxima cota inferiory mínima cota superior respectivamente los valores serían: $p=1/5$ y $q=1$

RPTA: "A"

PROBLEMA 40 :

Determine en qué conjunto de números negativos debe estar contenido *x* para que:

$$\frac{x^4-17x^2+60}{x(x^2-8x+5)}>0$$

A) $\langle -\sqrt{12};-\sqrt{5}\rangle$ B) $\langle -\infty;-\sqrt{12}\rangle$ C) $\langle -\sqrt{12};0\rangle$

D) $\langle -\infty;-\sqrt{5}\rangle$ E) $\langle -\sqrt{5};0\rangle$

RESOLUCIÓN:

* Al factorizar el numerador de la fracción obtenemos lo siguiente:

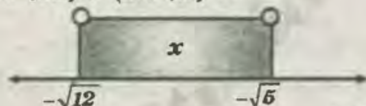
$$\frac{(x^2-12)(x^2-5)}{x(x^2-8x+5)}=\frac{(x+\sqrt{12})(x-\sqrt{12})(x+\sqrt{5})(x-\sqrt{5})}{x(x^2-8x+5)}$$

* Pero como condición $x<0$, entonces:

$x-\sqrt{12}<0$; $x-\sqrt{5}<0$; $x^2-8x+5>0$

* Por lo tanto, la inecuación nos quedaría así:

$(x+\sqrt{12})$; $(x+\sqrt{5})<0$



RPTA: "A"

PROBLEMA 41 :

El conjunto solución de la inecuación :

$$\frac{\sqrt{2-|x|}\,(1-x^2)}{(|x+3|+x-1)(|x|-2)}\geq 0 \text{ es}$$

A) $\langle -2;2\rangle$ B) $[1;2\rangle$ C) $[-1;1]$

D) $\langle -2;-1]$ E) $\langle -2;-1]\cup[1;2\rangle$

RESOLUCIÓN:

* En la inecuación, determinamos el cálculo del *C.V.A.*

$2-|x|\geq 0 \wedge (|x+3|+x-1)(|x|-2)\neq 0$

$-2\leq x\leq 2 \wedge x\neq\{\pm 2;-1\}$

*Luego, obtiene : $C.V.A.=\{x\in\langle -2;2\rangle-\{-1\}...S_1\}$

* Ahora resolviendo la inecuación, se obtiene:

$$\frac{(x+1)(x-1)}{2(x+1)(|x|-2)}\leq 0 \Rightarrow x-1\geq 0 \Rightarrow x\geq 1$$

$S_1=[1;+\infty\rangle$

*Por lo tanto, el C.S. $=\{S_1\cap S_2\};x\in[1;2\rangle$

RPTA: "B"

PROBLEMA 42 :

Sean *a* , *b* , *n* enteros que verifican :

$n-1<a+b<n+1$ ....(I)

$n-7<a-b<n-5$ ....(II)

$10<a+n<12$ ....(III)

luego el valor de $\left(\frac{a^2+b^2+n^2}{a^2+b^2-n^2}\right)$ es :

A) $-\frac{6}{5}$ B) $-\frac{35}{7}$ C) $-\frac{37}{12}$ D) $-\frac{42}{11}$ E) $-\frac{25}{13}$

RESOLUCIÓN :

* De *(I) + (II)* : $2n-8<2a<2n-4$

$\Rightarrow n-4<a<n-2 \Rightarrow a=n-3$

* Reemplazando en *(I)*:

$n-1<n-3+b<n+1 \Rightarrow 2<b<4 \Rightarrow b=3$

* Del mismo modo en *(III)*:

$$10<n-3+n<12 \Rightarrow \frac{13}{2}<n<\frac{15}{2} \Rightarrow \{n=7 \wedge a=4\}$$

* Entonces lo pedido es : $\frac{4^2+3^2+7^2}{4^2+3^2-7^2}=-\frac{37}{12}$

RPTA: "C"

PROBLEMA 43 :

Halle el valor de $P=|x-y|$ donde *x e y* son números enteros positivos que satisfacen las siguientes desigualdades:

$5x-3y>2$; $2x+y<11$; $y>3$

A) –1 B) 7 C) 1 D) 8 E) 0

RESOLUCIÓN :

* Del sistema :

$$\left\{\begin{array}{l} 5x-3y>2 \text{ ....(I)} \xrightarrow{\times 2} \\ \qquad\qquad\qquad (-) \\ 2x+y<11 \text{ ....(II)} \xrightarrow{\times 5} \\ y>3 \text{ ....(III)} \end{array}\right\} \Rightarrow -11y>-51$$

$\Rightarrow 3<y<\frac{51}{11}$

* Como $y\in\mathbb{Z}$ entonces $y=4$

* Reemplazando en *(I)* y *(II)*:

$$(5x>14) \wedge (2x<7) \Rightarrow \frac{14}{5}<x<\frac{7}{2}$$

* Como $x \in \mathbb{Z}$ entonces $x=3$
* Piden : $|x-y|=1$

.RPTA: "C"

PROBLEMA 44 :
Dadas las desigualdades :

$$\sqrt[3]{x^2y^2+2}(x-2)<0$$

$$(y-3)\|1+|axy\|>0; a<0$$

Luego, podemos afirmar que $x-y$ es :

A) menor que -2 *B) menor que 0*
C) menor que 2 *D) menor que -1*
E) menor que 1

RESOLUCIÓN:
*De la primera inecuación :

$$x^2y^2 \ge 0 \Rightarrow x^2y^2+2 \ge 2 \Rightarrow \sqrt[3]{x^2y^2+2} \ge \sqrt[3]{2} > 0$$

$$\underbrace{\sqrt[3]{x^2y^2+2}}_{(+)}(x-2)<0 \Rightarrow x-2<0 \Rightarrow x<2 \ldots\ldots\ldots(\alpha)$$

*Ahora de la segunda inecuación :
$\|1+|axy\|>0$ ....(por definición)

*Luego : $(y-3)\underbrace{\|1+|axy\|}_{(+)}>0 \Rightarrow y-3>0 \Rightarrow y>3 \ldots\ldots(\beta)$

* De α y β : $x-y<-1$

RPTA: "D"

PROBLEMA 45 :
Halle el valor de $E=4x+3y$, donde x e y son los valores enteros que satisfacen el siguiente sistema de inecuaciones.

$$\begin{cases} 5x-3y>2 \ldots\ldots\ldots(I) \\ 2x+y<11 \ldots\ldots\ldots(II) \\ y>3 \ldots\ldots\ldots(III) \end{cases}$$

A) 20 *B) 24* *C) 25* *D) 32* *E) 36*

RESOLUCIÓN:

* Efectuando $I+3(III)$: $5x>11 \rightarrow x>\frac{11}{5}$

* Efectuando $II-III$: $2x<8 \rightarrow x<4$
de donde obtenemos :
* Reemplazando (IV) en
(II) : $2(3)+y<11 \Rightarrow y<5$
* Se tiene $y<5$; pero por (III), $y>3$ luego, se concluye que : $y=4 \Rightarrow 4(3)+3(4)=24$

RPTA: "B"

PROBLEMA 46 :
Señale la alternativa que tiene la secuencia correcta , después de determinar la veracidad *(V)* o falsedad *(F)* de las siguientes proposiciones.

I) $a \in \langle 0;1\rangle \Leftrightarrow \frac{a}{1-a} \in \langle 0,+\infty\rangle$

II) $1 \le x<2 \Leftrightarrow 0 \le \sqrt{\frac{2-x}{2x}}<\frac{\sqrt{2}}{2}$

III) $-2<x<-1 \Leftrightarrow 4<2^{\left|\frac{x^2-1}{x+1}\right|}<8$

A) VVV *B) VVF* *C) VFF*
D) FFV *E) FFF*

RESOLUCIÓN:
* Analizando las tres afirmaciones para verificar su validez o no:
I) Vemos que $a \in \langle 0;1\rangle \Leftrightarrow \frac{a}{1-0} \in \langle 0;+\infty\rangle$
* Luego formando la expresión se tiene:

$$\frac{a}{1-a}=-1+\frac{a}{1-a} \Rightarrow 0<a<1$$

$$\Leftrightarrow 0<1-a<1 \Leftrightarrow 1<\frac{1}{1-a} \Leftrightarrow 0<-1+\frac{1}{1-a}$$

* Luego: $\frac{a}{1-a} \in \langle 0;+\infty\rangle$.......VERDADERA

II) $1 \le x<2 \Leftrightarrow 0 \le \sqrt{\frac{2-x}{2x}}<\frac{\sqrt{2}}{2} 1 \le x$

* Tomando $x=1$ se tiene que:
$\sqrt{\frac{2-x}{2x}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ es *FALSA.*

III) $-2<x<-1 \Leftrightarrow 4<2^{\left|\frac{x^2-1}{x+1}\right|}<8$

* En efecto , como la función exponencial en cualquier base es creciente , se tiene que:

$$2^2<2^{\left|\frac{x^2-1}{x+1}\right|}<2^3 \Rightarrow 2^2<2^{|x-1|}<2^3$$

$$\Rightarrow 2<|x-1|1<3 \Rightarrow 2<x-1<3 \vee -3<x-1<-2$$

$$\Rightarrow 3<x<4 \vee -2<x<-1$$

* Luego se observa que $4<2^{\left|\frac{x^2-1}{x+1}\right|}<8$ no implica que $-2<x<-1$; luego , la afirmación es *FALSA.*

RPTA: "C"

PROBLEMA 47 :
Siendo

$X=\{x \in \mathbb{R} / |x^2-5x|<4\}$ e $Y=\{x \in \mathbb{R} / |x^2-5x+6| \le 2\}$

Entonces , $X \cap Y$ es igual a :

A) ϕ *B)* $[1;4]$ *C)* $\langle -\infty;-1\rangle \cup \langle 4;\infty\rangle$
D) $\left\langle \frac{5}{2}-\frac{\sqrt{41}}{2}, \frac{5}{2}+\frac{\sqrt{41}}{2}\right\rangle$ *E)* $\left\langle \frac{5}{2}-\frac{\sqrt{41}}{2}, 1\right\rangle \cup \left\langle 4, \frac{5}{2}+\frac{\sqrt{41}}{2}\right\rangle$

RESOLUCIÓN:
* Para resolver este problema, utilizaremos el hecho que $X \cap Y=\phi$ si y solo si no existe x que

satisfaga simultáneamente las siguientes inecuaciones :

$X: |a|<4 \Leftrightarrow -4<a<4$

$Y: |a+6|\leq 2 \Leftrightarrow -2\leq a+6\leq 2 \Leftrightarrow -8\leq a\leq -4$

* Siendo $x^2-5x=a$ (a en función de x)
* Luego intersectando los valores de a se tiene:



* Se aprecia que no existen valores de a, entonces, no existen valores de x; esto implica que $X\cap Y=\phi$.

RPTA: "A"

PROBLEMA 48 :

Determine el conjunto solución de la inecuación : $|x-2|-3|x+21|<0$

A) $\langle -\infty;-32,5\rangle\cup\langle -15,25;+\infty\rangle$ B) $\langle -\infty;-11,5\rangle$
C) $\langle -115;-4,5\rangle$ D) $\langle -32,5;-15,25\rangle$
E) $\langle -\infty;-32,5\rangle\cup\langle -4,5;+\infty\rangle$

RESOLUCIÓN :

* $|x-2|<3|x+21| \Rightarrow |x-2|<|3x+63|$

$\Rightarrow (x-2)^2<(3x+63)^2 \Rightarrow 0<(3x+63)^2-(x-2)^2$

$\Rightarrow 0<(4x+61)(2x+65)$

* Luego los puntos críticos son: $-\dfrac{61}{4} \wedge -\dfrac{65}{2}$



$C.S.=\left\langle -\infty;-\dfrac{65}{2}\right\rangle\cup\left\langle -\dfrac{61}{4};+\infty\right\rangle$

* **Entonces :** $C.S.=\langle -\infty;-32,5\rangle\cup\langle -15,25;+\infty\rangle$

RPTA: "A"

PROBLEMA 49 :

Si $\{x_1;x_2\}$ es el conjunto solución de $3^{|x+1|}-\left|3^x-1\right|=3^x+2$ entonces la suma de x_1 y x_2 es:

A) – 4 B) – 2 C) 0 D) 2 E) 4

RESOLUCIÓN:



Si: $x\geq 0$
Eliminando los valores absolutos:

$$3^{x+1}-(3^x-1)=3^x+2$$

Reduciendo: $3^x 3-2.3^x-1=0$

Tenemos: $3=1 \rightarrow$ $\boxed{x=0}$

Si: $-1\leq x\leq 0$
eliminando los valores absolutos:
$3^{x+1}+3^x-1=3^x+2$
Reduciendo: $3^{x+1}=3$
Tenemos: $x+1=1$ de donde: $x=0$
$0\notin -1\leq x<0$

Si: $x<-1$
Eliminando los valores absolutos:

$$3^{-x-1}+3^x-1=3^x+2$$

Reduciendo: $3^{x-1}=3$
Tenemos: $-x-1=1$
de donde: $\boxed{x=-2}$ $\therefore$ C.S. $\{-2;0\}$

* Luego: $C.S.=\{-2;0\} \Rightarrow x_1+x_2=-2$

RPTA: "B"

PROBLEMA 50 :

Sea la función $f(x)=4+3/(4-3^{senx})$, definida en el intervalo $<260°;360°]$. Entonces los valores mínimo y máximo de la función son , respectivamente.

A) -1 y 5 B) -1 y 0 C) $\dfrac{37}{11}$ y 5 D) 5 y 7 E) $\dfrac{53}{11}$ y 5

RESOLUCIÓN:

* Se sabe que:

$f(x)=4+\dfrac{3}{4-3^{senx}}$ ....(I)

* Dado que: $260°<x\leq 360° \Rightarrow -1\leq senx\leq 0$
* Entonces:
3^{senx} es creciente cuando $-1\leq senx\leq 0$
* Por tanto: $\dfrac{1}{3}\leq 3^{senx}\leq 1$
* Por (-1): $-1\leq -3^{senx}\leq -\dfrac{1}{3}$

Sumando 4 :

$3\leq 4-3^{senx}\leq\dfrac{11}{3}$ el recíproco $\dfrac{3}{11}\leq\dfrac{1}{4-3^{senx}}\leq\dfrac{1}{3}$

* Por 3 : $\dfrac{9}{11}\leq\dfrac{3}{4-3^{senx}}\leq 1$

Sumando 4 :

$$\underbrace{\frac{53}{11}}_{mínimo}\leq\underbrace{4+\frac{3}{4-3^{senx}}}_{f(x)}\leq\underbrace{5}_{máximo}$$

* De (I): $f(x)_{máx}=5 \wedge f(x)_{mín}=\dfrac{53}{11}$

RPTA: "E"

PROBLEMA 51 :
Las soluciones reales de la ecuación $Log_5(x^2-20x)=3$ son :

A) no existen B) únicamente $x=25$
C) únicamente $x=5$ D) $x_1=5, x_2=25$
E) $x_1=-5, x_2=25$

RESOLUCIÓN:

$C.V.A: x^2-20x>0 \Rightarrow x<0 \vee x>20$

* Aplicando logaritmo se tiene:

$x^2-20x=5^3 \Leftrightarrow x^2-20x-125=0$

x -25
x 5

* Por tanto: $x=25 \vee x=-5$
* Dado que estos valores satisfacen al *C.V.A*, entonces son las soluciones reales:

$$x_1=-5 \wedge x_2=25$$

RPTA: "E"

PROBLEMA 52 :
El conjunto solución de la inecuación $Log_3|3-4x|>2$

A) $\left\langle -\frac{3}{2};3\right\rangle$ B) $\mathbb{R}-\left[-\frac{3}{2};3\right]$ C) $\mathbb{R}-\left\{-\frac{3}{2};3\right\}$

D) $\mathbb{R}$ E) $\mathbb{R}-\left\langle -\frac{3}{2};3\right\rangle$

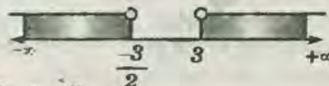
RESOLUCIÓN :

$x\neq\frac{3}{4}$: $Log_3|3-4x|>2 \Leftrightarrow Log_3|3-4x|>Log_3 9$

* Dado que la base es mayor que *1*, se tiene $|3-4x|>9$; de donde :

$$3-4x>9 \vee 3-4x<-9 \Rightarrow -\frac{3}{2}>x \vee 3<x$$

* Finalmente:



$C.S.=\mathbb{R}-\left[-\frac{3}{2};3\right]$

RPTA: "B"

PROBLEMA 53 :
El conjunto solución de la inecuacón $Log_{1/3}(2x^2+1)<-2$ es.

A) $|x|>2\sqrt{2}$ B) $|x|>2$ C) $|x|>\sqrt{2}$
D) $|x|<2\sqrt{2}$ E) $|x|<2$

RESOLUCIÓN :

* *Como : $C.V.A.=2x^2+1>0;\forall x\in\mathbb{R}$*

* Resolvemos: $Log_{1/3}(2x^2+1)<Log_{1/3}\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$

* Entonces , como la base es menor que uno, se tiene: $2x^2+1>\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} \Rightarrow x^2>4 \Rightarrow |x|>2$

RPTA: "B"

PROBLEMA 54 :
Al resolver la desigualdad:

$$Log_5\left(\frac{1}{2}x^2-3x+\frac{35}{8}\right)<0$$

determine la suma de todos los números *x* enteros que la satisfacen.

A) 2 B) 4 C) 6 D) 8 E) 10

RESOLUCIÓN:

* Analizando el problema tenemos:

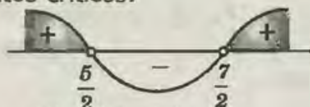
$\frac{1}{2}x^2-3x+\frac{35}{8}>0$

$4x^2-24x+35>0$

2x -7
2x -5

$(2x-7)(2x-5)>0$

* Puntos críticos:



$x\in\left\langle -\infty;\frac{5}{2}\right\rangle\cup\left\langle\frac{7}{2};+\infty\right\rangle$ ....(α)

$Log_5\left(\frac{1}{2}x^2-3x+\frac{35}{8}\right)<log_5 1$

$\frac{1}{2}x^2-3x+\frac{35}{8}<1 \Rightarrow 4x^2-24x+35<8$

$\Rightarrow 4x^2-24x+27<0 \Rightarrow (2x-3)(2x-9)<0$

* Puntos críticos:



$x\in\left\langle\frac{3}{2};\frac{9}{2}\right\rangle$ ....(β)

* De $(\alpha)\cap(\beta)$: $CS=x\in\left\langle\frac{3}{2};\frac{5}{2}\right\rangle\cup\left\langle\frac{7}{2};\frac{9}{2}\right\rangle$

* Nos piden soluciones enteras , entonces : $x=2 \vee x=4$ son aquellas que satisfacen los requerimientos
* Luego la $\sum$ valores enteros es : *6*

RPTA: "C"

PROBLEMA 55 :
El conjunto de los números reales que satisface la inecuación: $Log_6(x+3-3\sqrt{x+1})<1$ es :

A) $\{\alpha/-1\le\alpha<0\}$ B) $\{\alpha/0<\alpha<3\}$

C) $\{\alpha/-1\le\alpha<15\}$ D) $\{\alpha/3<\alpha<15\}\cup\{x/x>30\}$

E) $\{\alpha/-1\le\alpha<0\}\cup\{x/3<x<15\}$

RESOLUCIÓN:

* Haciendo un cambio de variable :

$\sqrt{x+1}=y\ /x\ge-1;y\ge0$ se tiene

$Log_6(y^2-3y+2)<1$

* Analizando el conjunto de valores admisibles

$y^2-3y+2>0\leftrightarrow(y<1\vee y>2)\wedge y\ge0$........(I)

* Resolviendo la inecuación :

$\rightarrow y^2-3y+2<6$

$\rightarrow y^2-3y-4<0\leftrightarrow y\in\langle-1;4\rangle$............(II)

* De $(I)\cap(II)$: $y\in[0;1\rangle\cup\langle2;4\rangle$

* Luego, reponiendo y por $\sqrt{x+1}$

$0\le\sqrt{x+1}<1\vee2<\sqrt{x+1}<4$

$\Rightarrow-1\le x<0\vee3<x<15$

$\Rightarrow$ Los números reales que satisfacen la inecuación son:

$$\{\alpha/-1\le\alpha<0\}\cup\{x/3<x<15\}$$

RPTA: "E"

PROBLEMA 56 :

Si la relación :

$R=\{(1,2a);(2,7);(5,1):(1,3a-5);(7,9)\}$ es una función, la suma de los elementos del rango de dicha función es :

A)22 B) 15 C) 27 D)16 E) 10

RESOLUCIÓN:

*Dado que R es una función :

$(1;2a)=(1;3a-5)\Rightarrow2a=3a-5\Rightarrow a=5$

* Luego : $R=\{(1;10),(2;7),(5;1),(7;9)\}$

* Entonces : Rang$(R)=\{10;7;1;9\}$

*entonces la suma de elementos del Rang(R) es : $10+7+1+9=27$

RPTA: "C"

PROBLEMA 57 :

Dada la relación definida por:

$$S=\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}/|y|<|x|;|x|<3\}$$

Halle el número de elementos del conjunto.

$$P=\{(x,y)\in S/x,z\ Z\}$$

A) 4 B) 8 C) 9 D)13 E) 27

RESOLUCIÓN:

* Sabemos que P es un conjunto de pares ordenados de números enteros.

* Analizando S en los enteros, se tiene:

$|x|<3\Rightarrow x=-2;-1;0;1;2$

$x=-2\Rightarrow|y|<2\Rightarrow y=-1;0;1$

* En:

$(x;y)=(-2;-1);(-2;0),(-2;1)$, resulta 3 pares

$x=-1\Rightarrow|y|<1\Rightarrow y=0$

* En: $(x;y)=(-1;0)$ 1 par

$x=0\Rightarrow\underbrace{|y|<0}_{falso}$ no existe $(x;y)$

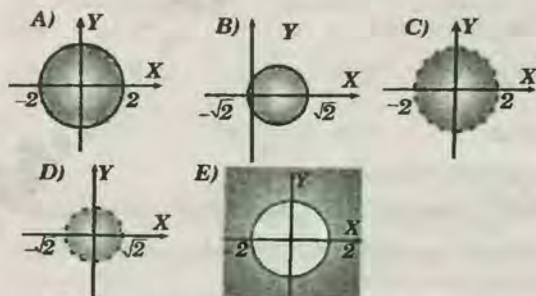
* Luego para $x=1$ y $x=2$, por simetria resulta la misma cantidad de $(x;y)$ que para $x=-1$ y $x=-2$ respectivamente.

* Por tanto, P tiene 8 elementos

RPTA: "B"

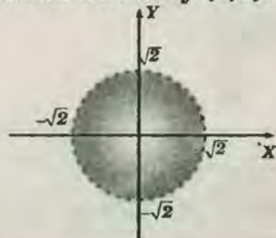
PROBLEMA 58 :

La gráfica de la siguiente desigualdad $x^2+y^2<2$ es :



RESOLUCIÓN :

* Como gráfica de la ecuación $x^2+y^2=2$ es una circunferencia de radio $\sqrt{2}$, entonces la gráfica de la inecuación $x^2+y^2<2$ será la región comprendida por el interior de la circunferencia de centro $C_0=(0;0)$.



RPTA: "D"

PROBLEMA 59 :

La gráfica adjunta corresponde a $y=-x^2+6x-5$. Se inscribe un rectángulo con los lados paralelos a los ejes coordenados. Entonces la expresión para el área de ese rectángulo es.

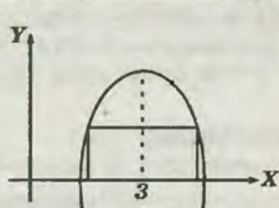
$A)\ 2(3-x)-\left[4-(x-3)^2\right]$

$B)\ (3-x)\left[2-(x-3)^2\right]$

$C)\ (3-x)\left[4-(x-3)^2\right]$

$D)\ (3-x)\left[2-\left(\frac{x-3}{2}\right)^2\right]$

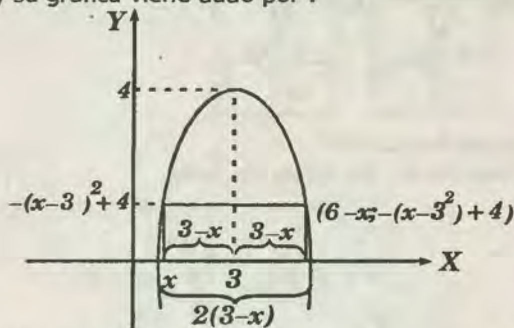
$E)\ (3-x)\left[4-\frac{(x-3)^2}{2}\right]$



RESOLUCION:

* La ecuación dada es : $y=-x^2+6x-5=-(x-3)^2+4$

y su gráfica viene dado por :



* Luego el área del rectángulo es :

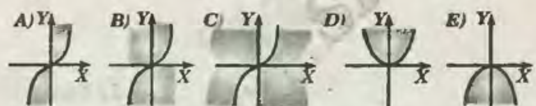
$2(3-x)\left[-(x-3)^2+4\right]=2(3-x)\left[4-(x-3)^2\right]$

RPTA: "A"

PROBLEMA 60 :

La gráfica del conjunto :

$$A=\left\{(x;y)\Big/\frac{x}{|x|}y\le x^2\right\}\cup\{(0;0)\}\ es:$$

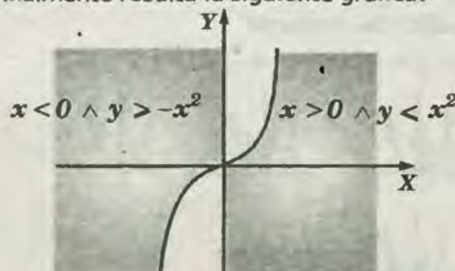


RESOLUCIÓN:

* Analizando tenemos:

$A=\{(x;y)/(x>0\wedge y\le x^2)\vee(x<0\wedge y\ge -x^2)\}\cup\{(0;0)\}$

* Finalmente resulta la siguiente gráfica:



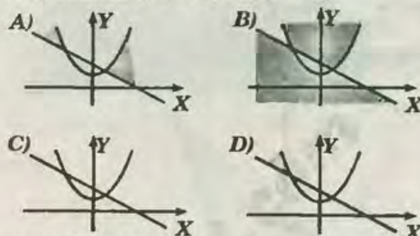
RPTA: "C"

PROBLEMA 61 :

Sea : $A=\{(x;y)/y<2x^2+3\}$

$B=\left\{(x;y)/y\ge -\frac{4}{5}x+4\right\}$

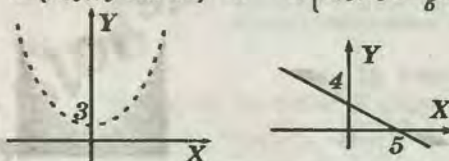
Una de las regiones sombreadas adjunta, representa $(A-B)\cup(B-A)'$



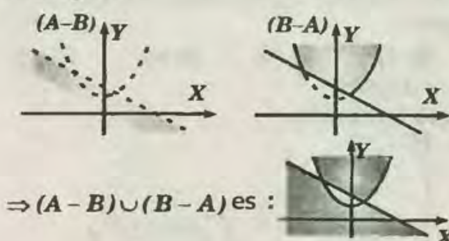
RESOLUCIÓN:

*Graficando cada ecuación :

$A=\{(x;y)/\,y<2x^2+3\}\ \wedge\ B)\left\{(x;y)/\,y\ge -\frac{4}{5}x+4\right\}$



* Luego :

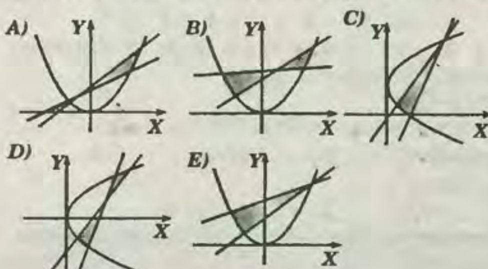


$\Rightarrow(A-B)\cup(B-A)$ es :

RPTA: "B"

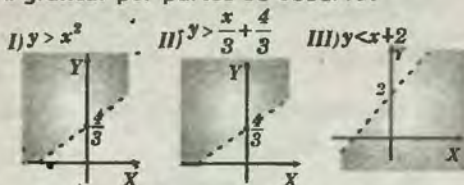
PROBLEMA 62 :

Dadas las siguientes inecuaciones $x^2-y<0;\ x+4<3y;\ y<x+2$, entonces los pares (x,y) que satisfacen estas inecuaciones están representados por la región sombreada .



RESOLUCIÓN:

* Al graficar por partes se observa:



* Luego intersectando obtenemos:



* Por datos los bordes no pertenecen a la región, por lo tanto la alternativa más próxima es la *A*.

RPTA: "A"

PROBLEMA 63 :

Sea *R* la región limitada por las curvas :

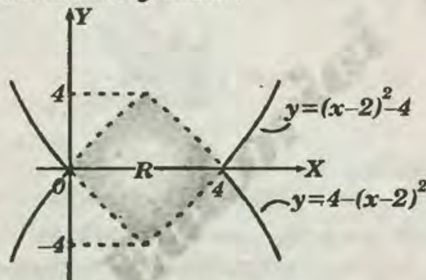
$$\boxed{y=4x-x^2}\,;\,\boxed{y=x^2-4x}$$

Sin considerar los bordes de la región, cuántos pares ordenados con coordenadas enteras tiene dicha región.

A) 18 B) 17 C) 16 D) 14 E) 15

RESOLUCIÓN :

*Realizando los gráficos :



* La región *R* está dada por :

$$y > (x-2)^2 - 4 \wedge y < 4 - (x-2)^2$$

* Los pares ordenados que presentan componentes enteros son :

* Para $x=1$:

$y > -3 \wedge y < 3 \Rightarrow y = \{-2;-1;0;1;2\}$

$\Rightarrow$ los pares son : $(1;-2)(1;-1)(1;0)(1;1)(1;2)$

* Para $x=2$:

$y > -4 \wedge y < 4 \Rightarrow y = \{-3;-2;-1;0;1;3\}$

$\Rightarrow$ los pares son : $(2;-3)(2;-2)(2;-1)(2;0)(2;1)(2;2)(2;3)$

* Para $x=3$:

$y > -3 \wedge y < 3 \Rightarrow y = \{-2;-1;1;2\}$

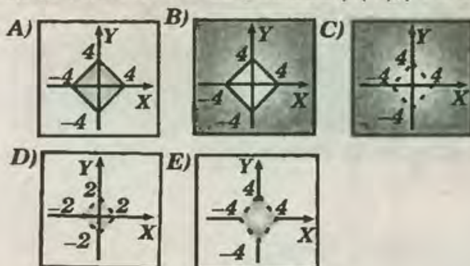
$\Rightarrow$ los pares son : $(3;-2)(3;-1)(3;0)(3;1)(3;2)$

* Por lo tanto, tiene *17* pares ordenados.

RPTA: "B"

PROBLEMA 64 :

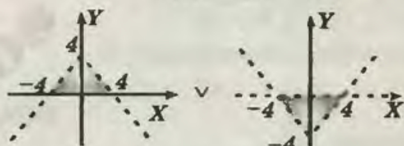
La gráficas de la desigualdad $|x|+|y|<4$ es



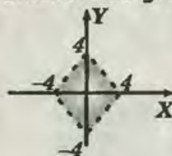
RESOLUCIÓN:

*Analizando dos casos se tiene:

$$\begin{cases} y \geq 0 \\ \wedge \\ y < 4-|x| \end{cases} \vee \begin{cases} y < 0 \\ \wedge \\ y > |x|-4 \end{cases}$$



* Por lo tanto, uniendo las gráficas resulta:



RPTA: "E"

PROBLEMA 65 :

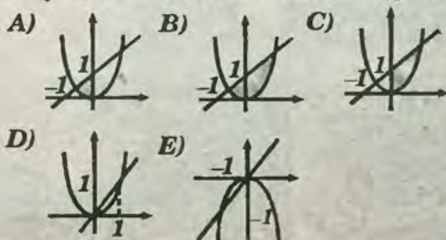
Sean *A* y *B* los conjuntos dados por

$A = \{(x,y) \in R^2 / y \leq x+1\}$

$B = \{(x,y) \in R^2 / y \geq x^2\}$

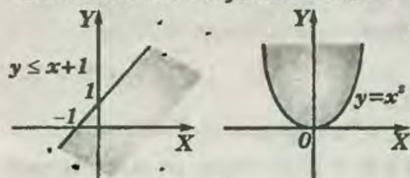
La gráfica del conjunto

$C = \{(x,y) \in R^2 / (x,y) \in A \wedge (x,y) \in B\}$ es:



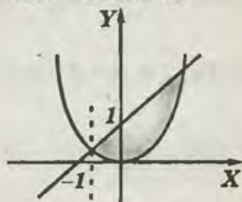
RESOLUCIÓN:

*Graficando los conjuntos dados :



* Nos piden : $C\{(x;y)\in R^2/(x;y)\in /(A\cap B)\}$

* Es decir: $C=A\cap B$



RPTA:"B"

PROBLEMA 66 :

Determine el número de puntos de $A\cap B$, si A y B están dados por

$$A=\{(x;y)\in R^2/|x|+|y|\leq 4\}$$

$$B=\{(x;y)\in R^2/|x|-|y|\leq 4\}$$

A) un punto. B) dos puntos. C) cuatro puntos. D) ocho puntos. E) infinitos puntos.

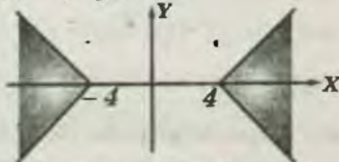
RESOLUCIÓN:

* Como: $A=\{(x;y)\in R^2/|x|+|y|\leq 4\}$



$B=\{(x;y)\in R^2/|x|-|y|\geq 4\}\Rightarrow |y|\leq |x|-4$

$$\Rightarrow\begin{cases} y\leq |x|-4 & ; \quad y\geq 0\\ y\geq -|x|+4 & ; \quad y<0\end{cases}$$



* Se observa que la intersección:

$$A\cap B=\{(4;0)\ ;\ (-4;0)\}$$

* Por lo tanto , el número de puntos de $A\cap B$ es 2.

RPTA:"B"

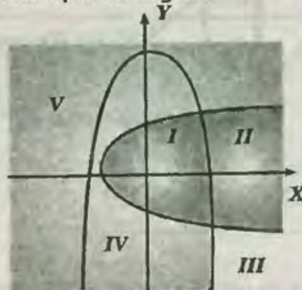
PROBLEMA 67 :

Sea el siguiente sistema de inecuaciones:

$$3x^2+2y<4$$

$$2x+3y^2<-2$$

Entonces, el conjunto solución está representando por la región:

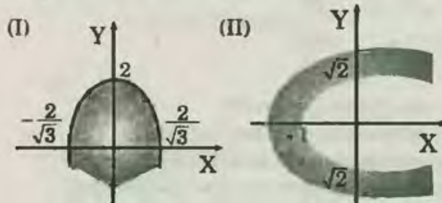


A)I B)II C)III D)IV E)V

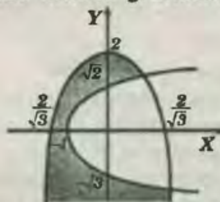
RESOLUCIÓN:

* Se tiene:
$$\begin{cases} y<2-\dfrac{3}{2}x^2 \text{........}(I)\\ y^2>2x+2 \text{..........}(II)\end{cases}$$

* Graficando las desigualdades *(I)* y *(II)*



* Intersectando ambos gráficos:



* Por lo tanto, la gráfica corresponde a la región *IV*

RPTA: "D"

PROBLEMA 68 :

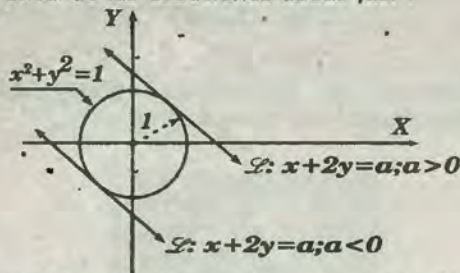
Dada la ecuación de la circunferencia $x^2+y^2=1$.

Para cuál de los siguientes valores de a , la recta: $L:x+2y=a$, es tangente a dicha circunferencia.

A) 1 B) $-\sqrt{3}$ C) -2 D) 2 E) $-\sqrt{5}$

RESOLUCION:

*Graficando las ecuaciones dadas ,así :



* Se observa dos rectas , cumplen tales condiciones y que el sistema :

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \ldots\ldots\ldots (I) \\ x+2y=a \ldots\ldots\ldots (II) \end{cases}$$

Posee solución única (Por ser tangentes)

* De *(II)* : $x= a-2y$.
* En *(I)* : $(a-2y)^2+y^2=1$.

$\Rightarrow 5y^2-4ay+a^2-1=0 \Rightarrow \Delta=(-4a)^2-4(5)(a^2-1)=0$

$\Rightarrow a=-\sqrt{5} \lor a=\sqrt{5}$

RPTA: "E"

PROBLEMA 69 :

El conjunto de soluciones del siguiente sistema

$\begin{cases} x^2+y^2=r^2 \ldots (I) \\ x-y=r \ldots\ldots (II) \end{cases}$ para $r>0$, es:

A) ϕ
B) un conjunto unitario
C) un conjunto con dos elementos
D) un conjunto con tres elementos
E) un conjunto con cuatro elementos

RESOLUCIÓN:

* Reemplazando *(II)* $y=x-r$ en *(I)* se obtiene:

$x^2+(x-r)^2=r^2$

$\Rightarrow 2x(x-r)=0 \Rightarrow x=0 \lor x=r$

* Luego reemplazando en *(II)* se observa:

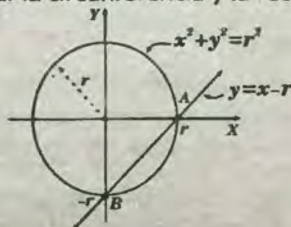
Sí: $x=0$ tenemos $y=-r$
Sí: $x=r$ tenemos $y=0$

* Entonces el conjunto de solución es:

$C.S.=\{(0;-r);(r;0)\}$

Otra forma

* Al graficar la circunferencia y la recta se tiene:



* Luego se observa que los puntos de intersección son:

$A=(r;0) \land B=(0;-r) \Rightarrow C.S.=\{(r;0),(0;-r)\}$

RPTA: "C"

PROBLEMA 70 :

Sean $f(x)=-(x-1)^2+2$. Si $A(x)=bf(x)/(1-x)$, con $b>0$ y $f(x+b)=f(x)$. Halle en que intervalo se encuentra $A(x)$, cuando $0<x<1$

A) $\langle -6;7\rangle$ B) $\langle 2;4\rangle$ C) $\langle 0;1\rangle$ D) $\langle 0;4\rangle$ E) $\langle 1;4\rangle$

RESOLUCIÓN:

* Por dato : $f(x+b)=f(x) \Rightarrow b=2-2x$
* Luego :

$$A_{(x)}=\frac{(2-2x)[-(x-1)^2+2]}{1-x} \Rightarrow A_{(x)}=-2(x-1)^2+4$$

* Pero : $0<x<1$

$\Rightarrow -1<x-1<0 \Rightarrow 1>(x-1)^2>0$

$\Rightarrow 2<-2(x-1)^2+4<4$

$\Rightarrow 2<A_{(x)}<4 \Rightarrow \boxed{A_{(x)} \in \langle 2;4\rangle}$

RPTA: "B"

PROBLEMA 71 :

Determine el conjunto de valores del número real r tal que la función $f(x)=(rx^2-2rx+1)^{-1}$, esté definida en $[0;1]$.

A) $[-\infty;0\rangle$ B) $\langle 0;+\infty\rangle$ C) $[0;1\rangle$ D) $\langle -\infty;1\rangle$ E) $[1;+\infty\rangle$

RESOLUCIÓN:

* Al estar $f(x)=\dfrac{1}{rx^2-2r+1}$ definida en $[0;1]$, se cumple: $rx^2-2rx+1\neq 0;\ \forall x\in[0;2]$

* Si $x=0 \Rightarrow$ (se cumple y $r\in\mathbb{R}$)
* Si $x\in\langle 0;1]$

despejando $r\neq -\dfrac{1}{(x-1)^2-1}$

dado que :

$0<x\le 1 \Rightarrow -1<x-1\le 0$

$\Rightarrow 0\le (x-1)^2<1 \Rightarrow -1\le (x-1)^2-1<0$

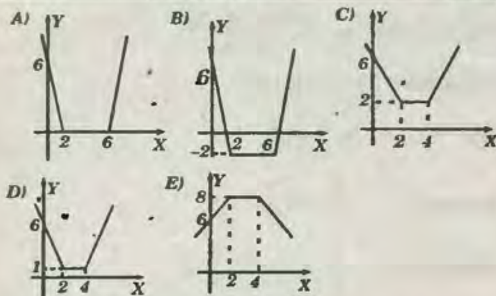
$\Rightarrow \dfrac{1}{(x-1)^2-1}\le -1 \Rightarrow -\dfrac{1}{(x-1)^2-1}\ge 1$

* Luego , f está definida en $[0;1]$ si $r\in\langle -\infty;1\rangle$

RPTA: "D"

PROBLEMA 72:

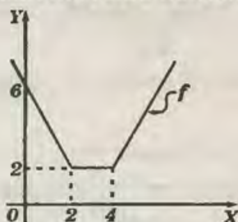
La gráfica de función f definida por $f(x)=|x-2|+|x-4|$ *es*



RESOLUCIÓN:

* Para graficar f, redefiniremos esta función ,y graficando :

$$f(x)=\begin{cases} 6-2x & ; \quad x<2 \\ 2 & ; \quad 2\le x<4 \\ 2x-6 & ; \quad 4\le x \end{cases}$$

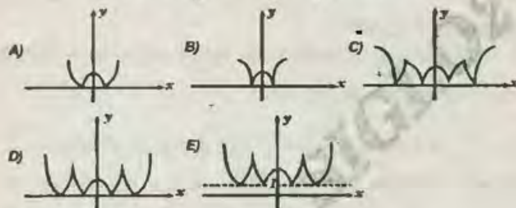


RPTA: "C"

PROBLEMA 73 :

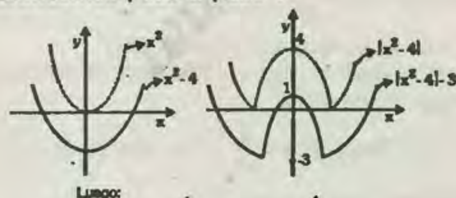
Indique la gráfica que mejor representa a :

$$f(x)=\left\|x^2-4\right|-3\right|;x\in\mathbb{R}$$

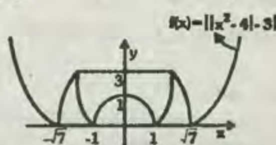


RESOLUCIÓN :

* Graficamos paso a paso :



Luego:



* Si queremos aproximar la gráfica de f a una de las alternativas dadas podría ser la *D*.

RPTA: "D"

PROBLEMA 74 :

Asuma que la función f, dada por :

$$f(x)=\left[x+2a\left[x+2a\left[x+...\right]^{1/2}\right]^{1/2}\right]^{1/2}$$

está bien difinida (los puntos suspensivos indican un proceso infinito). Entonces también podemos escribir.

A) $f(x)=2a+x$ B) $f(x)=2\sqrt{a^2+x^2}$

C) $f(x)=a+\sqrt{x^2+a^2}$ D) $f(x)=a\sqrt{x+a^2}$

E) $f(x)=a+\sqrt{a^2+x}$

RESOLUCIÓN:

* Si: $f(x)=\sqrt{x+2a\underbrace{\sqrt{x+2a\sqrt{x+...}}}_{f(x)}}\;;f(x)\ge 0$

* Expresar: $f(x)=\sqrt{x+2a\times f(x)}$

* Elevando al cuadrado ambos miembros y completando cuadrados resulta:

$$f^2(x)-2af_{(x)}+a^2=x+a^2$$

$$\Rightarrow (f(x)-a)^2=x+a^2$$

* Despejando :

$$(f(x)-a=\pm(\sqrt{x+a^2})\Rightarrow f(x)=a\pm(\sqrt{x+a^2})$$

* Dado que f está bien definido , $x>0$ luego :

$$f(x)=a+\sqrt{x+a^2}>0,\ \forall a\in\mathbb{R}$$

RPTA: "E"

PROBLEMA 75 :

El rango de $f(x)=\frac{x}{|x|}\left[(x-1)^2+2|x|\right]$ es :

A) $\mathbb{R}-[-1;1]$ B) $\mathbb{R}-\langle-1;1\rangle$ C) $\langle 0,\infty\rangle$ D) $\langle-\infty;0\rangle$ E) $\langle-1;\infty\rangle$

RESOLUCIÓN:

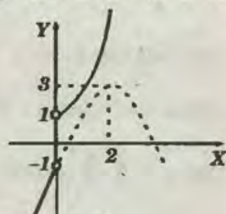
$$f(x)=\frac{x}{|x|}\left[(x-1)^2+2|x|\right]\;;Domf=\mathbb{R}-\{0\}$$

* Si : $x>0$: $f(x)=\frac{x}{x}\left[(x-1)^2+2(x)\right]=x^2+1$

* Si : $x<0$: $f(x)=\frac{x}{(-x)}\left[(x-1)^2+2(-x)\right]=-\left[x^2-4x+1\right]=-(x-2)^2+3$

$$\Rightarrow f(x)=\begin{cases} x^2+1 & ; \; x>0 \\ -(x-2)^2+3 & ; \; x<0 \end{cases}$$

* Al graficar F se observa :



* Por lo tanto:

$$Ran(f)=\langle-\infty;-1\rangle\cup\langle 1;+\infty\rangle=\mathbb{R}-[-1;1]$$

RPTA: "A"

PROBLEMA 76 :

El rango de la función $f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\Rightarrow\mathbb{R}$ definida por $f(x)=x+\frac{1}{x}$ es:

A) $\mathbb{R}-\langle -2;2\rangle$ B) $\mathbb{R}-[-2;2]$ C) $\mathbb{R}-\langle -1;1\rangle$
D) $\mathbb{R}-[-1;1]$ E) $\mathbb{R}-\{0\}$

RESOLUCIÓN:

* Dado que: $x\neq 0$.

$\Rightarrow x>0 \vee x<0 \Rightarrow x+\frac{1}{x}\geq 2 \vee x+\frac{1}{x}\leq -2$

$\Rightarrow\left(x+\frac{1}{x}\right)\in\langle -\infty;-2]\cup[2;+\infty\rangle \Rightarrow Ran(f)=\mathbb{R}-\langle -2;2\rangle$

RPTA: "A"

PROBLEMA 77 :

Dadas las funciones :

$$f(x)=\sqrt{x^2-4}\ ;\ g(x)=\frac{1}{\sqrt{x-2}}$$

halle el rango de $f(x)\,g(x)$

A) $\langle 2;4\rangle$ B) $\langle 2;+\infty\rangle$ C) $\langle -\infty;-2\rangle$
D) $\langle -4;-2\rangle$ E) $\langle 0;+\infty\rangle$

RESOLUCIÓN:

* Analizando las funciones tenemos:

$f(x)=\sqrt{x^2-4}\Rightarrow Dom(f)=\langle -\infty;-2]\cup[2;+\infty\rangle$

$g(x)=\frac{1}{\sqrt{x-2}}\Rightarrow Dom(g)=\langle 2;+\infty\rangle$

* Entonces

- $Dom(f\times g)=Dom(f)\cap Dom(g)=\langle 2;+\infty\rangle$
- $(f\times g)(x)=(f)(x)\times g(x)=\sqrt{x^2-4}\times\frac{1}{\sqrt{x-2}}$

$\Rightarrow (f\times g)(x)=\sqrt{x+2};\ Dom(f\times g)(x)=\langle 2;+\infty\rangle$

* Luego hallando el rango $(f\times g)$, resulta:

$$x\in Dom(f\times g)\Rightarrow x>2\Rightarrow x+2>4$$
$$\Rightarrow\sqrt{x+2}>2\Rightarrow (f\times g)_{(x)}>2$$

* Por tanto , el rango de: $(f\times g)=\langle 2;+\infty\rangle$

RPTA: "B"

PROBLEMA 78 :

Dada la función $f(x)=\frac{5x^2-7x-6}{x+3/5}$, definida sobre $\left\langle -\frac{3}{5};\frac{3}{5}\right]$. Halle el rango de $|f|$:

A) $\left\langle -\frac{13}{5};\frac{-7}{5}\right]$ B) $\left\langle -\frac{13}{5};\frac{-7}{5}\right]$ C) $\left[\frac{7}{5};\frac{13}{5}\right\rangle$
D) $[7;13\rangle$ E) $\langle 7;13]$

RESOLUCIÓN:

*Factorizando : $f(x)=\frac{5(5x+3)(x-2)}{5x+3}$

* Reduciendo: $f(x)=5(x-2)$

* Si: $x\in\left\langle -\frac{3}{5};\frac{3}{5}\right]$

* Entonces: $-\frac{3}{5}<x\leq\frac{3}{5}$

* Restando 2: $-\frac{3}{5}-2<x-2\leq\frac{3}{5}-2$

* Por 5: $-\frac{13}{5}<x-2\leq\frac{7}{5}\Rightarrow -13<\underbrace{5(x-2)}_{f(x)}\leq -7$

$\Rightarrow 7\leq\underbrace{|5x-10|}_{|f_{(x)}|}<13$

* Por lo tanto , el rango de $|f_{(x)}|$ es $[7;13\rangle$.

RPTA: "D"

PROBLEMA 79 :

Sea $f(x)=x^2+\frac{1}{x^2}+1$ una función definida para los que cumplen la siguiente relación: $\sqrt{x^2-1}<\sqrt{3}$. Halle el intervalo donde varía $f(x)$

A) $\langle -2;-1]$ B) $[1;2{,}25\rangle$ C) $[2;5]$
D) $[2;5{,}25\rangle$ E) $[3;5{,}25\rangle$

RESOLUCIÓN:

* Hallando el dominio de la función a partir de $\sqrt{x^2-1}<\sqrt{3}$, se tiene:

I) $x^2-1\geq 0\Leftrightarrow x\in\langle -\infty;-1]\cup[1;+\infty\rangle$ ...$C.S._1$

II) $x^2-1<3\Leftrightarrow x\in\langle -2;2\rangle$ ....$C.S._2$

$Dom(f)=C.S._1\cap C.S._2=\langle -2;-1]\cup[1;2\rangle$

*En: $f(x)=x^2+\frac{1}{x^2}+1;\ f(-x)=f(x);\forall\in Dom(f)$

* Se observa que es: función par.
* Por lo tanto, será suficiente analizar en: $x\in[1;2\rangle$ además ,

$$f'(x)=2\left(x-\frac{1}{x^3}\right)>0;\ \forall x\in[1;2\rangle$$

$\Rightarrow f(x)$ es creciente $\forall x\in[1;2\rangle$

$f(x)\in[f(1);f(2)\rangle\Rightarrow f(x)\in[3;5{,}25\rangle$

RPTA: "E"

PROBLEMA 80 :

La función f, que para todo x diferente de 0 ; 1 y -1 satisface la ecuación.

$$[f_{(x)}]^2 f\left(\frac{1-x}{1+x}\right)=64x \text{ es}$$

A) $f_{(x)}=4\left[\frac{x^2(1+x)}{1-x}\right]^{1/3}$ B) $f_{(x)}=2\left[\frac{x^2(x+1)}{x-1}\right]^{1/3}$

C) $f_{(x)}=4\left[\frac{x(1+x)}{1-x}\right]^{1/3}$ D) $f_{(x)}=4\sqrt{\frac{x^2(1+x)}{1-x}}$

E) $f_{(x)}=4\sqrt{\frac{x(1+x)}{1-x}}$

Sugerencia: tener presente que

$$z=\frac{1-x}{1+x}\Leftrightarrow x=\frac{1-z}{1+z}$$

RESOLUCIÓN:

* De la ecuación:

$$f(x)^2 f\left(\frac{1-x}{1+x}\right)=64x\text{.................................}(I)$$

al cambiar x por $\frac{1-x}{1+x}$ se tiene que:

$$f^2\left(\frac{1-x}{1+x}\right)f(x)=64\left(\frac{1-x}{1+x}\right)\text{.......................}(II)$$

* ***Luego dividiendo $(I)^2 \div (II)$ resulta:***

$$f^3(x)=64\left(\frac{1+x}{1-x}\right)x^2 \Rightarrow f(x)=4\sqrt[3]{\left(\frac{1+x}{1-x}\right)x^2}$$

RPTA: "A"

PROBLEMA 81 :

Sean las funciones :

G = {(3 ; 9) ; (4 ; 16) ; (5 ; 25) ; (6 ; 36)}

G o F = {(1 ; 9) ; (2 ; 16); (3 ; 25) ; (4 ; 36)}

obtenga F.

A) F={(1 ; 4) ; (2 ; 3) ; (3 ; 5) ; (4 ; 6)}
B) F={(1 ; 2) ; (2 ; 4) ; (3 ; 6) ; (4 ; 5)}
C) F={(1 ; 3) ; (2 ; 4) ; (4 ; 6) ; (5 ; 5)}
D) F={(1 ; 3) ; (2 ; 4) ; (3 ; 5) ; (4 ; 36)}
E) F={(1 ; 3) ; (2 ; 4) ; (3 ; 5) ; (4 ; 6)}

RESOLUCIÓN :

* Por dato , tenemos:

G = {(3 ; 9) ; (4 ; 16) ; (5 ; 25) ; (6 ; 36)}

* Luego se sabe que.

$(G\circ F)(1)=9 \Rightarrow G(F(1))=9 \Rightarrow F(1)=3 \Rightarrow (1;3)\in F$

$(G\circ F)(2)=16 \Rightarrow G(F(2))=16 \Rightarrow F(2)=4 \Rightarrow (2;4)\in F$

$(G\circ F)(3)=25 \Rightarrow G(F(3))=25 \Rightarrow F(3)=5 \Rightarrow (3;5)\in F$

$(G\circ F)(4)=36 \Rightarrow G(F(4))=36 \Rightarrow F(4)=6 \Rightarrow (4;6)\in F$

*Por tanto ,F es : F={(1;3);(2;4);(3;5);(4;6)}

RPTA: "E"

PROBLEMA 82 :

En la tabla siguiente aparecen varios valores de dos funciones f y g .

x	5	6	7	8
$f(x)$	8	7	6	5
$g(x)$	7	8	6	5

Determine el valor de : $\left[\frac{(g+f)of-2}{gog}\right](6)$

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

RESOLUCION :

*Nos piden:

$$\left[\frac{(g+f)^\circ f-2}{g\circ g}\right](6)=\frac{[(g+f)^\circ f](6)-2}{g\circ g(6)}$$

* Sebemos que: $(f\circ g)(x)=f(g(x))$

$\frac{(f+g)(f(6))-2}{g(g(6))}$, usando la tabla se tiene

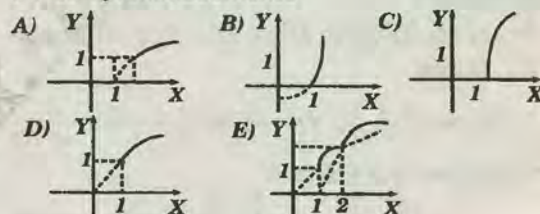
$$\frac{(f+g)(7)-2}{g(8)}=\frac{f(7)+g(7)-2}{g(8)}=\frac{6+6-2}{5}=2$$

RPTA: "C"

PROBLEMA 83:

Sean $f, g:[1;\infty\rangle \Rightarrow R$ funciones definidas por $f(x)=x^2-|x| \ \wedge\ g(x)=\sqrt{x}$.

Entonces la gráfica de la función composición g o f es aproximadamente



RESOLUCIÓN:

* Por datos:

$f(x)=x^2-|x|;\ x\geq 1 \Rightarrow f(x)=x^2-x;\ x\geq 1$

$g(x)=\sqrt{x};\ x\geq 1$

* Se sabe que: $(g\ o\ f)(x)=g(f(x))$

*De donde:

$x\in\{x\in Dom(f)/f(x)\in Dom(g)\}$

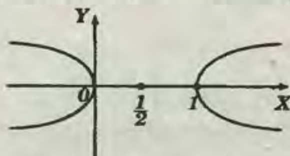
* Entonces:

$$(g\ o\ f)(x)=\sqrt{x^2-x};\ x\in\{x\geq 1/x^2-x\geq 1\}$$

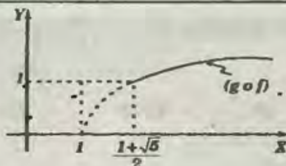
*Sea:

$y=\sqrt{x^2-x};x\in\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2};+\infty\right\rangle \Rightarrow y^2=x^2-x$

$\Rightarrow y^2=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\Rightarrow\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-y^2=\frac{1}{4}$ (hipérbola)



* Finalmente graficando $(g\ o\ f)$ tenemos:



RPTA: "A"

PROBLEMA 84 :

Determine el valor de verdad de las afirmaciones.

I) Si $x_1=x_2 \Rightarrow f(x_1)=(x_2)$ para toda función f.

II) Si $f(x)=\frac{3}{ax-4}; x\in[-2;4\rangle \Rightarrow f$ es una función sobreyectiva sobre $x\in[-2;2\rangle$.

III) Toda función impar es univalente.

A)VVV *B)VVF* *C)FVF*
D)FF *E)VFF*

RESOLUCIÓN:

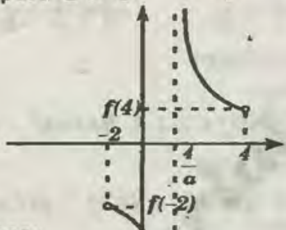
I) VERDADERA : $x_1=x_2$ entonces los pares ordenados

$$(x_1;f(x_1));(x_2;f(x_2)) \Rightarrow f(x_1)=f(x_2)$$

II) FALSA:

* Siendo: $f: [-2\ ;\ 4\rangle \Rightarrow B$ tal que $f(x)=\frac{3}{ax-4}$

* Probando para $a>0$



* Observamos:

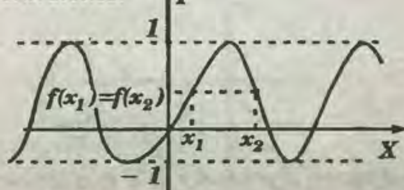
$$Ran\, f=\underbrace{\langle -\infty;f(-2)]\cup\langle f(4);\infty\rangle=B}_{(conjunto\ de\ llegada)}$$

* Restringiendo x a $[-2;2\rangle$ se deduce:

$f(4)\neq f(2)\Rightarrow f$ no es sobreyectiva

III) FALSA:

f(x) = senx es una función impar, pero *f=senx* no es univalente.



$x_1\neq x_2$ pero $f(x_1)=f(x_2)$

RPTA: "E"

PROBLEMA 85 :

¿Cuál de los siguientes enunciados no es una característica de la función $f(x)=Ln|x|$? donde $x\neq 0$

A) f es una función par.

B) Conforme x se acerca a 0, f(x) disminuye.

C) Si x aumenta, siendo positivo, entonces f(x) también aumenta.

D) Si x disminuye, siendo negativo, entonces f(x) también disminuye.

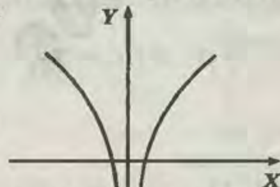
E) Si x disminuye, siendo negativo, entonces f(x) aumenta.

RESOLUCIÓN:

* Si graficamos la función:

$$f(x)=Ln|x|=\begin{cases}Lnx\ ;\ si\ x>0\\ Ln(-x);\ si\ x<0\end{cases}$$

* Se tiene:



A) f (x) es función par, es válido puesto que

$I)\ x\in Dom(f)=R-\{0\}\Rightarrow(-x)\in Dom(f)=R-\{O\}$

$II)\ \forall\in Dom(f)=R-\{0\}: f(-x)=f(-x)$

B) Cuando *x* se acerca a *0, f(x)* disminuye es válido pues : $\lim_{x\to 0} f(x)=-\infty$

C) Si *x* aumenta, para valores positivos, entonces *f(x)* también aumenta, es válido pues

$\lim_{x\to\infty} f(x)=+\infty$

D) Si *x* disminuye, para valores negativos, entonces *f(x)* aumenta, pero según al alternativa:

* Si *x* disminuye, siendo negativo, entonces *f(x)* también disminuye, lo cual falso pues:

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$

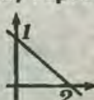
E) Si *x* disminuye cuando *x* es negativo entonces *f(x)* aumenta, es válido pues:

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$

RPTA: "D"

PROBLEMA 86 :

Si la gráfica adjunta, representa a *y= f(x)*



¿cuál de las gráficas, representa a : $y = f(-x)$?



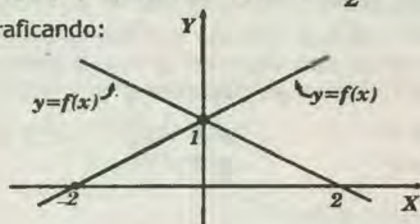
RESOLUCIÓN:

* Analizando la gráfica $y=f(x)$, tenemos:

$$y = f(x) = -\frac{1}{2}x + 1$$

* Luego $y=f(-x)$ será: $y = f(-x) = \frac{x}{2} + 1$

* Graficando:



RPTA: "D"

PROBLEMA 87 :

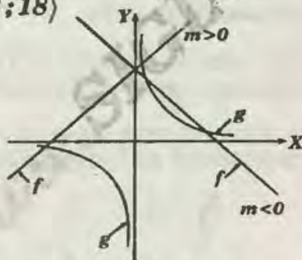
Sean $f: R \Rightarrow R ; g: R/\{0\} \Rightarrow R$ funciones definidas por $f(x)=mx+12;\ m \neq 0$. $g(x)=\frac{2}{x}$

¿Para qué valores de m las funciones f y g admiten dos puntos de intersección?

A) $\langle -2;\infty\rangle$ ***B)*** $\langle -18;0\rangle \cup \langle 0;\infty\rangle$ ***C)*** $\langle -\infty;-18\rangle$
D) $\langle -\infty;\infty\rangle$ ***E)*** $\langle -18;18\rangle$

RESOLUCION:

*Al graficar las funciones se nota que se intersectan en dos puntos :



* Igualando las reglas de correspondencia :

$mx + 12 = \frac{2}{x} \Rightarrow mx^2 + 12x - 2 = 0; C.S.\{x_1;x_2\}$

$\Rightarrow \exists\{x_1;x_2\} \subset \mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta > 0$

* Luego $12^2 + 8m > 0 \Rightarrow m > -18$
* De la gráfica $m>0$ ó $m<0$
* Luego de estas desigualdades obtenemos :

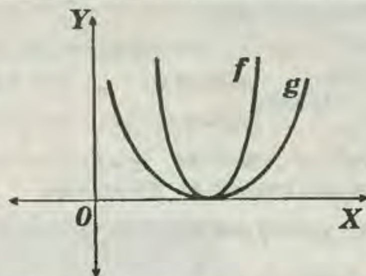
$$m \in \langle -18;0\rangle \cup \langle 0;\infty\rangle$$

RPTA: "B"

PROBLEMA 88 :

En la figura adjunta se muestra las gráficas de las funciones f y g definidas por:

$f(x)=ax^2+bx+c$
$g(x)=mx^2+nx+p$



De las siguientes relaciones:

I) $n^2=4mp$ *II)* $\frac{a}{m} = \frac{b}{n}$

III) $abc=mnp$

¿Cuáles son verdaderas?

A)Solo I ***B)Solo II*** ***C)Solo III***
D)I y II ***E)II y III***

RESOLUCIÓN:

* Del gráfico las funciones f y g.

$(1)...ax^2+bx+c=0$
$(2)...mx^2nx+p=0$ } son equivalentes y tienen solución única

* De(2): $\Delta = 0 \Rightarrow n^2 - 4mp = 0 \Rightarrow n^2 = 4mp$
* Luego , por ser equivalentes tenemos:

$$\frac{a}{m} = \frac{b}{n} = \frac{c}{p} \Rightarrow \frac{a}{m} = \frac{b}{n}$$

*Nótese que $a>m$ por ser la gráfica de f más cerrada que la de g , entonces $\frac{a}{m} \neq 1$

* Finalmente :

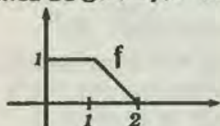
$$\frac{a}{m} = \frac{b}{n} = \frac{c}{p} \neq 1 \Rightarrow \frac{abc}{mnp} \neq 1 \Rightarrow abc \neq mnp$$

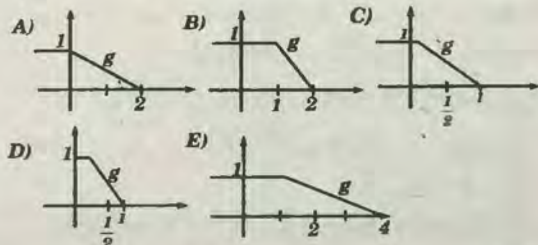
* Luego solo *I* y *II* es correcto

RPTA: "D"

PROBLEMA 89 :

Indique la gráfica de $g(x)=f(x+|x|)$, si la gráfica de f es :





RESOLUCIÓN:

* Se la regla de correspondencia obtenida del gráfico:

$$f(x)=\begin{cases} f_1(x)=1 & , \ 0\le x\le 1 \\ f_2(x)=2-x, & 1<x\le 2\end{cases}$$

* Piden el gráfico de: $g(x)=f(x+|x|)$
* Luego calculando g tenemos:

I) $g_1(x)=f_1(x+|x|)=1; 0\le x+|x|\le 1$

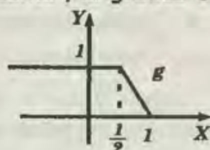
$\Rightarrow g_1(x)=1;\ x\le \frac{1}{2}$

II) $g_2(x)=f_2(x+|x|)=2-(x+|x|); 1<x+|x|\le 2$

$\Rightarrow g_2(x)=2-2x; \frac{1}{2}<x\le 1$

* Entonces: $g(x)=\begin{cases} g_1(x)=1 & , \ x\le\frac{1}{2} \\ g_2(x)=2-2x, & \frac{1}{2}<x\le 1\end{cases}$

* Por lo tanto, la gráfica es:



RPTA: "C"

PROBLEMA 90 :

Dada la siguiente función:
$f(x)=4\sqrt{x}-x\ ;\ x\in[0,1]$. Halle $f^*(x)$, donde f^* es la inversa de f.

A) $f^*(x)=(2-\sqrt{4-x})^2$ B) $f^*(x)=(3-\sqrt{4-x})^2$
C) $f^*(x)=(2+\sqrt{4-x})^2$ D) $f^*(x)=(3+\sqrt{4-x})^2$
E) $f^*(x)=(4-\sqrt{4-x})^2$

RESOLUCIÓN:

* Se sabe que: $f(x)=4\sqrt{x}-x\ ;\ 0\le x\le 1$
* Entonces haciendo $f(x)$, así:

$$y=f(x)=4-(\sqrt{x}-2)^2$$

* Se aprecia que f es decreciente para $x\in[0;1]$, por tanto es inyectiva. Por tanto existe f^*.
* Luego hallando la inversa: $x=f^*_{(y)}$
* De: $y=4-(\sqrt{x}-2)^2$ se tiene $(\sqrt{x}-2)^2=4-y$

$\Leftrightarrow \sqrt{x}-2=\pm\sqrt{4-y} \Leftrightarrow \sqrt{x}=2\pm\sqrt{4-y}$

* Dado que $0\le x\le 1$: $\sqrt{x}=2-\sqrt{4-y}$

*Luego $x=(2-\sqrt{4-y})^2$, es decir $f^*_{(y)}=(2-\sqrt{4-y})^2$

* Finalmente cambiando y por x se tiene:

$$f^*_{(y)}=(2-\sqrt{4-x})^2$$

RPTA: "A"

PROBLEMA 91 :

Señale la alternativa que presenta la secuencia correcta, después de determinar si la proposición es verdadera *(V)* o falsa *(F)*.

I) Sea : $\mathbb{R}\Rightarrow\mathbb{R}$ una función biyectiva y creciente, entonces f^{-1}: $\mathbb{R}\Rightarrow\mathbb{R}$ es decreciente.

II) Sean f, g: $\mathbb{R}\Rightarrow\mathbb{R}$ funciones decrecientes tales que fog existe, entonces fog es decreciente.

III) Si f: $\mathbb{R}\Rightarrow\mathbb{R}$ es una función creciente y definamos una función g: $\mathbb{R}\Rightarrow\mathbb{R}$ mediante $g(x)=f(|x|), \forall x\in\mathbb{R}$, entonces g es creciente.

A) V V V B) V F V C) F V V
D) F V F E) F F F

RESOLUCIÓN:

* Analizando las afirmaciones mediante contra ejemplos se obtiene:

I) Sea $f(x)=2x+3$ creciente, entonces:
$f^{-1}(x)=\frac{x-3}{2}$ es creciente $\Rightarrow$ la afirmación es falsa.

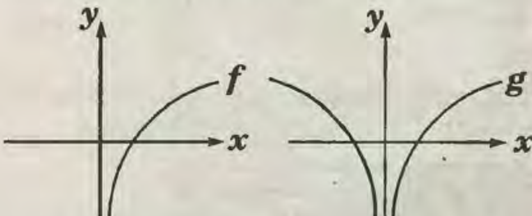
II) Sea $f(x)=-3x+1$ decreciente $g(x)=\sqrt{-x}+1, x\le 0$ decreciente.

* Entonces: $(f\circ g)(x)=-3\sqrt{-x}+1, x\le 0$.

* Observamos que: $f\circ g$ es creciente $\Rightarrow$ la afirmación es falsa.

III) Sea la función $f(x)=Lnx$ creciente, entonces: $g(x)=f(|x|)=Ln(|x|), x\in\mathbb{R}-\{0\}$

* Observamos que: g no es creciente ni decreciente en todo su dominio.



* La afirmación es falsa.
* Entonces tenemos: *FFF*

RPTA: "E"

PROBLEMA 92 :

Diga cuál de las siguientes gráficas representa aproximadamente a las funciones $f,g: \mathbb{R}-\{1\}\Rightarrow\mathbb{R}$ definidas por $f(x)=2^{-x+1}$ y $g(x)=2^{1/(x-1)}$

A) B) C) C) E)

RESOLUCIÓN:

* Para: $f: \mathbb{R}-(1) \Rightarrow \mathbb{R};\ f(x)=2^{-x+1}$

$$\Leftrightarrow f(x)=2\left(\frac{1}{2}\right)^x, x \neq 1$$

$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x \quad \rightarrow \quad f(x)=2\left(\frac{1}{2}\right)^x$

* Para la función g tenemos:

$\mathbb{R}-\{1\} \Rightarrow \mathbb{R};\ g(x)=2^{\frac{1}{x-1}};$

$Df=\langle -\infty;1\rangle \cup \langle 1;+\infty\rangle$

$y=1$

$$\lim_{x\to -\infty} 2^{\frac{1}{x-1}}=1\begin{pmatrix}\text{Asíntota}\\ \text{Horizontal}\end{pmatrix} \Rightarrow y=1\begin{pmatrix}\text{Asíntota}\\ \text{Horizontal}\end{pmatrix}$$

$$\lim_{x\to 1^-} 2^{\frac{1}{x-1}}=0;\ \lim_{x\to 1^+} 2^{\frac{1}{x-1}}=+\infty\begin{pmatrix}\text{Asíntota}\\ \text{Vertical}\end{pmatrix}$$

$g(x)=2^{\frac{1}{x-1}}$

RPTA: "C"

PROBLEMA 93 :

Sea f una función definida por $f(x)=x-\sqrt{-x-1}\,;x<-4$ halle $f^*(x)$ (inversa de f) indicando su dominio.

A) $F^*(x)=\frac{1}{4}(\sqrt{5-4x}+1)^2$, $\langle -\infty;-5\rangle$

B) $F^*(x)=-\frac{1}{4}(\sqrt{4-5x}+1)^2$, $\langle -\infty;-6\rangle$

C) $F^*(x)=-\frac{1}{4}(\sqrt{5-4x}+1)^2$, $\langle -\infty;-5\rangle$

D) $F^*(x)=-\frac{1}{4}(\sqrt{5-4x}-1)^2$, $\langle -\infty;-5\rangle$

E) $F^*(x)=-\frac{1}{4}(\sqrt{4x-5}-1)^2$, $\langle -\infty;-6\rangle$

RESOLUCIÓN :

* Dato:

$$f(x)=x-\sqrt{-x+1} \Rightarrow f(x)=-(-x+\sqrt{-x})+1$$

* Al completar cuadrados se tiene:

$$f(x)=-\left(\sqrt{-x}+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{4}$$

* Veamos que f es inyectiva:

Sean $x_1 ; x_2 \in Dom(f) / f(x_1)=f(x_2)$ tal que:

$$f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow -\left(\sqrt{-x_1}+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{4}=-\left(\sqrt{-x_2}+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{4}$$

$$\Rightarrow -\left(\sqrt{-x_1}-\sqrt{-x_2}\right)\underbrace{\left(\sqrt{-x_2}+\sqrt{-x_2}+1\right)}_{(+)}=0 \Rightarrow x_1=x_2$$

* Luego resulta que f es inyectiva , entonces , existe la inversa de f.

* Hallando : dominio de f^* = rango de f :

* Como : $x<-4 \Rightarrow \underbrace{-\left(\sqrt{-x}+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{4}<-5}_{f(x)<-5}$

$$\Rightarrow Dom(f^*)=\langle -\infty;-5\rangle$$

* Hallando $f^*(x)$:

$$y=f(x) \Leftrightarrow y=-\left(\sqrt{-x}+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{4}$$

* Despejando x : $x=-\frac{1}{4}\left(\sqrt{5-4y}-1\right)^2$

* Finalmente:

$$f^*(x)=-\frac{1}{4}\left(\sqrt{5-4x}-1\right)^2 ;\forall\, x \in \langle -\infty;-5\rangle$$

RPTA: "D"

PROBLEMA 94 :

Halle el número de raíces que tiene la ecuación: $\left|Log_2|x|\right|+x^2-5=0$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

RESOLUCIÓN :

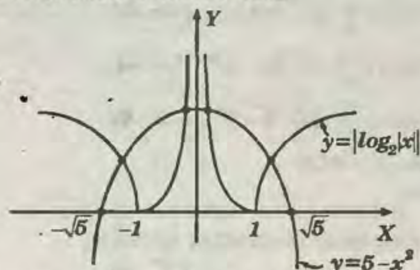
* Esta ecuación es no lineal. Para determinar su número de raíces, igualamos:

$$\left|Log_2|x|\right|=5-x^2$$

* Se define las funciones:

$$y=5-x^2 \wedge y=\left|Log_2|x|\right|$$

* Luego utilizamos el método gráfico:
Se puede observar que existen *4* puntos donde las dos curvas se interceptan , esto significa que la ecuación tiene *4* raíces



* Por lo tanto , el *número* de raíces son: *4*

RPTA: "D"

PROBLEMA 95 :

La población de venados de una región está dada por la función $V(t)=t^4+21t^2+100$, donde t es el tiempo en años. Entonces, el intervalo de tiempo, donde ocurre la poblacion máxima de venados es.

A)[0;1] *B) [1;2]* *C) [2;3]*
D) [3;4] *E)[4;5]*

RESOLUCIÓN :

* Si queremos obtener el máximo valor que toma la función vamos a completar cuadrados. Para ello sumamos y restamos $\frac{441}{4}$

$$V(t)=\underline{\left(t^4-21t^2+\frac{441}{4}-\frac{441}{4}\right)}+100$$

$$\Rightarrow V(t)=-\left(t^2-\frac{21}{2}\right)^2+\frac{441}{4}+100=-\left(t^2-\frac{21}{2}\right)^2+\frac{841}{4}$$

* $V(t)$ será máximo cuando el primer sumando sea nulo , es decir:

$\left(t^2-\frac{21}{2}\right)^2=0$ de donde $t=\sqrt{\frac{21}{2}}\approx 3,24$.

* La máxima población de venados ocurre en el intervalo: $t\in[3;4]$

RPTA: "D"

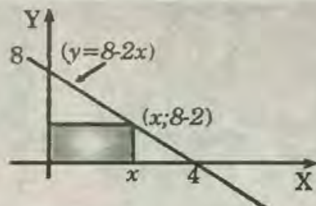
PROBLEMA 96 :

Un rectángulo tiene dos de sus lados sobre los ejes coordenados y el cuarto vértice sobre la recta de ecuación $y = -2x + 8$. El área máxima que puede tener el rectángulo es igual a:

A) 8 *B) 9* *C) 10* *D)11* *E) 12*

RESOLUCIÓN:

* Del enunciado graficamos:



*Área del rectángulo es: $A(x\ ;\ y) = xy$, pero $y = 8 - 2x$

* Completando cuadrados y agrupando:

$$A(x)=x(8-2x)=-2x^2+8x=-2(x-2)^2+8....(I)$$

* La ecuación *(I)* es una parabola cuyo máximo valor es: *8* cuando $x=2 \Rightarrow A(x)_{(máx)}=8$

RPTA: "A"

PROBLEMA 97 :

Dada la función: $f(x)=k+\frac{1}{x-k};\forall x\neq k$

Halle todos los valores que puede tomar k para que la gráfica de la función f y de su inversa sea la misma.

A) $[1;2\rangle$ *B)* $[0;1]$ *C)* $[-1;1]$
D) $[0;+\infty\rangle$ *E)* $\langle-\infty;+\infty\rangle$

RESOLUCIÓN:

$$f(x)=k+\frac{1}{x-k};\quad \begin{matrix} Dom(f)=\mathbb{R}-\{k\} \\ Ran(f)=\mathbb{R}-\{k\}\end{matrix}$$

* Como f es biyectiva existe f^*; hallando f^*

$$y=\kappa+\frac{1}{x-\kappa}\Rightarrow y-\kappa=\frac{1}{x-\kappa}$$

$$\Rightarrow x-\kappa=\frac{1}{y-\kappa}\Rightarrow x=\frac{1}{y-\kappa}+\kappa$$

*Intercambiando x con y :

$$y=\frac{1}{x-\kappa}+\kappa$$
$$\downarrow$$
$$f^*_{(x)}=\frac{1}{x-\kappa}+\kappa\ ;\ Dom(f^*)=\mathbb{R}-\{\kappa\}$$

se observa que $f=f^*$

* Luego f y f^* siempre presentan la misma gráfica $\forall \kappa\in\mathbb{R} \Rightarrow \kappa\in\langle-\infty;+\infty\rangle$

RPTA: "E"

PROBLEMA 98 :

La inversa de la siguiente función

$f(x)=\sqrt{5-x}(|x-5|+1+x)$ es dada por :

A) $\frac{20-x^2}{36};x\in[0;\infty\rangle$ B) $\frac{180-x^2}{36};x\in[0;\infty\rangle$

C) $\frac{x^2-20}{36};x\in\langle 0;\infty\rangle$ D) $\frac{x^2-180}{36};x\in[0;\infty\rangle$

RESOLUCIÓN:

* Determinando el dominio, se tiene:

$$5 - x \ge 0 \Rightarrow x \le 5$$

* Luego redefiniendo la función

$$f(x) = \sqrt{5-x}(5 - x + 1 + x)$$

$$\Rightarrow f(x) = 6\sqrt{5-x} = y$$

* Se sabe que: $x \le 5 \Rightarrow y \ge 0 \Rightarrow Ran(f)=[0;+\infty\rangle$
* Elevando al cuadrado:

$$36(5-x) = y^2 \Rightarrow 5 - x = \frac{y^2}{36} \Rightarrow x = 5 - \frac{y^2}{36}$$

$$\Rightarrow f^*(x) = \frac{180 - x^2}{36}, y \in [0,+\infty\rangle$$

* Intercambiando $x \Leftrightarrow y$ se tiene la función inversa, de donde:

$$Dom(f)^*(x) = Ran(f) = [0,+\infty\rangle$$

* Por lo tanto: $f^*(x) = \dfrac{180 - x^2}{36}; x \in [0;+\infty\rangle$

RPTA: "B"

PROBLEMA 99 :

La función es inversa de :

$$f(x)=Log_2(x-2)+Log_2(x+2)$$

es :

A) $f^*(x)=-x^2+4$ B) $f^*(x)=\sqrt{x^2-4}$ C) $f^*(x)=\sqrt{2^x-4}$

D) $f^*(x)=\sqrt{2^x+4}$ E) $f^*(x)=\sqrt{2^x+4}$

RESOLUCIÓN:

*De lo dado se aprecia que :

$$Df=\{x > 2 \wedge x > -2\}=\langle 2;+\infty\rangle$$

* Luego: $f(x)=Log_2(x^2-4)=y$

$\Rightarrow 2^y=x^2-4 \Rightarrow x^y=2^y+4$

$\Rightarrow x=\sqrt{2^y+4} \Rightarrow \boxed{f^*(x)=\sqrt{2^x+4}}$

RPTA: "E"

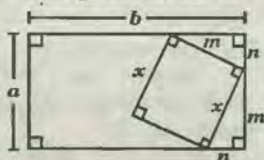
PROBLEMA 100 :

Sea un rectángulo con lados *a, b (a<b)*. Tomando un punto en cada uno de los tres de los lados del rectángulo, y un punto en el inferior de él, se construye un cuadrado. El área mínima que puede tener dicho cuadrado es.

A) $\frac{a^2}{2}$ B) $\frac{a^2}{4}$ C) $\frac{b^2}{2}$ D) $\frac{b^2}{4}$ E) $\frac{a^2}{3}$

RESOLUCION:

* Del enunciado graficamos :



* Asumiendo x como el lado del cuadrado:
* De la gráfica se obtiene:

$$m+n=a \Rightarrow n=a-m$$
$$m^2+n^2=x^2$$

* Luego: $x^2=A_\square \Rightarrow A_\square=m^2+(a-m)^2$

*Entonces:

$$A_\square=A_{(m)}=2m^2-2am+a^2 .....(I)$$

* $A_{(m)}$ será mínima cuando $A'_{(m)}=0$

$\Rightarrow 4m-2a=0 \Rightarrow m=\frac{a}{2}$ reemplazando en (I):

* *Por lo tanto resulta:* $A_{min}=A\left(\frac{a}{2}\right)=\frac{a^2}{2}$

RPTA:"A"

PROBLEMA 101 :

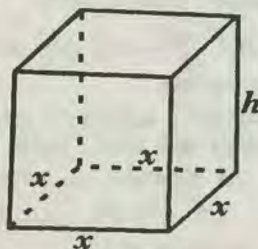
Una caja tiene una altura h y base cuadrada cuyo lado es un número entero, donde $p + h = 60$, siendo p el perímetro de la base. Calcular el volumen de la caja de mayor volumen.

A) 10^3 B) $1,2\times 10^3$ C) $1,5\times 10^3$

D) 2×10^3 E) 3×10^3

RESOLUCIÓN:

* Si graficamos la caja:



*Dato: $4x=p;\ p+h=60;\ x \in Z$

* Nos piden calcular el volumen máximo:

$V=x\times x\times h \Rightarrow V=x^2\times(60-4x)=60x^2-4x^3$

* Luego calculando el volumen máximo:

$$V'=120x-12x^2=0 \Rightarrow \{x=0 \vee x=10\}$$

*Como $x>0$ (lado caja) $\Rightarrow a=10$

**Por lo tanto :* $V_{máx}=60(10)^2-4(10)^3=2\times 10^3$

RPTA: "D"

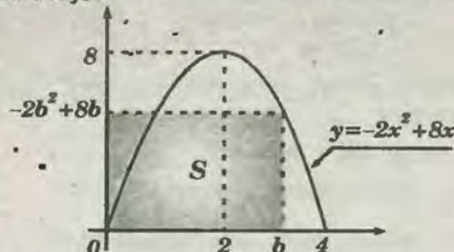
PROBLEMA 102 :

El rectángulo de mayor área , en el primer cuadrante con dimensiones enteras , cuyos lados son paralelos a los ejes , dos de ellos sobre los ejes y una vértice en la parábola de ecuación $y = -2x^2+8x$, tiene como área.

A) 6 B) 12 C) 14 D) 16 E) 18

RESOLUCIÓN:

* Se gráfica la parábola cuyo vértice es *(2 ; 8)* hacia abajo:



$S_{(b)}=b(-2b^2+8b)$

$\Rightarrow S'_{(b)}=-6b^2+16b=0 \Rightarrow \boxed{b=0} \vee \boxed{b=\frac{8}{3}}$

* Se pide dimensiones enteras, entonces considerando el valor entero: $b=3$.
* De aquí se deduce finalmente que el área máxima es: $S_{(3)}=18u^2$

RPTA:"E"

PROBLEMA 103 :

Sea $f:[a;b]\rightarrow \mathbb{R}$; $f(t)=t^2$

El menor valor de k tal que $|f(t)(b-a)|\leq k$, para toda t, siendo $a|b|>0$, es :

A) b^2-a^2 B) $\frac{b^2-a^2}{2}$ C) $(b-a)b^2$ D) $(b-a)^2$ E) a^2+b^2

RESOLUCIÓN:

*De la condición a $a|b|>0 \Leftrightarrow a>0$ $f:[a;b]\rightarrow R$
* Se observa que $b>a$, luego $b>a>0$ *Como $f(t)=t^2$ se cumple $a\leq t\leq b$ elevando al cuadrado : $a^2\leq t^2\leq b^2$..........................(I)

además $(b-a)>0$.........................(II)

* multiplicando $(b-a)\times(I)$ se obtiene :

$$a^2(b-a)\leq |t^2(b-a)|\leq (b-a)b^2$$

como $|t^2(b-a)|\leq k$ el k_{min} será $b^2(b-a)$

RPTA: "C"

PROBLEMA 104 :

Halle el valor mínimo de la función :

$$f(x)=2^{3-(2\cos^2 x+\cos 2x)^2}$$

A) No existe B) 0 C) 1 D) 1/8 E) 1/64

RESOLUCION:

* Sabemos que : $2\cos^2 x+\cos^2 2x=4\cos^2 x-1$
* Luego en el problema :

$f(x)=2^{3-(4\cos^2 x-1)^2}=\dfrac{2^3}{2^{(4\cos^2 x-1)^2}}$.....................(I)

* Como queremos el valor mínimo de f, entonces $(4\cos^2 x-1)^2$ será máximo :
* Pero :

$-1\leq \cos x\leq 1\Rightarrow 0\leq \cos^2 x\leq 1\Rightarrow 0\leq 4\cos^2 x\leq 4$

$\Rightarrow -1\leq 4\cos^2 x-1\leq 3\Rightarrow \underbrace{0}_{mínimo}\leq (4\cos^2 x-1)^2\leq \underbrace{9}_{máximo}$

* Reemplazando en *(I)* :

$Valor_{mínimo}f=\dfrac{2^3}{2^9}=\dfrac{1}{64}$

RPTA: "E"

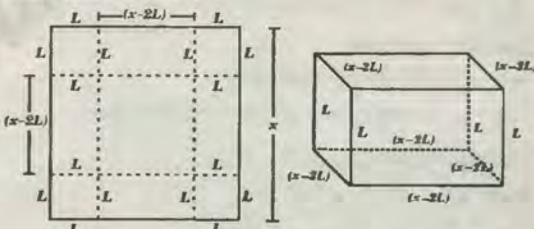
PROBLEMA 105 :

Se desea fabricar una caja de base cuadrada y sin tapa, con una hoja cuadrada de plata pura de lado x, cortando cuadrados de lado ℓ en cada esquina y doblando los lados. El rango en que debe estar x para que, numéricamente, el volumen sea mayor que el área total de la caja es.

A) $\left\langle 0;2\ell\left(\begin{matrix}\ell+1\\ \ell-1\end{matrix}\right)\right\rangle$ B) $\langle 2\ell;\infty\rangle$ C) $\langle 0;2\ell\rangle$

D) $\left\langle 2\ell;2\ell\left(\frac{\ell+1}{\ell-1}\right)\right\rangle$ E) $\left\langle 2\ell\left(\frac{\ell+1}{\ell-1}\right);\infty\right\rangle$

RESOLUCIÓN:



* Según condición del problema tenemos:

$Volumen_{(caja)} > Área_{(caja)}$

* Al reemplazar se obtiene:

$(x-2L)^2L>(x-2L)^2+4(x-2L)L$

$x>2L>2\Rightarrow (x-2L)L>x-2L+4L\Rightarrow x>\dfrac{2L(L+1)}{L-1}$

* Luego efectuando resulta :

$$x\in\left\langle\frac{2L(L+1)}{L-1};\infty\right\rangle$$

RPTA: "E"

PROBLEMA 106 :

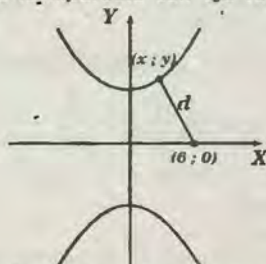
Un avión realiza una maniobra a velocidad supersónica, según la trayectoria. $2y^2-x^2=48$ Halle la menor distancia de la trayectoria al punto *(6; 0)*.

A) 9 B) 8 C) 7 D) 6 E) 5

RESOLUCIÓN:

* De acuerdo a la ecuación se tiene: $\frac{y^2}{24}-\frac{x^2}{48}=1$

(ecuación de la hipérbola con eje focal en eje y)



*Aplicando distancia entre dos puntos:

$d=\sqrt{(x-6)^2+y^2}$ donde $2y^2-x^2=48 \Rightarrow y^2=\frac{x^2}{2}+24$

* Luego reemplazando:

$$d=\sqrt{x^2-12x+36+\frac{x^2}{2}+24}$$

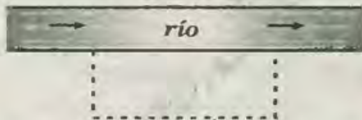
$$\Rightarrow d=\sqrt{\frac{3}{2}(x-4)^2+36}$$

* Pero d es mínimo si $x=4 \Rightarrow d_{min}=6$

RPTA: "D"

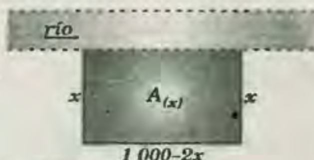
PROBLEMA 107 :

Un agricultor quiere levantar una cerca alrededor de un terreno rectangular que está ubicada en la ribera de un río, usando *1 000 m* de material, ¿cuál es el área más grande que puede cercar, considerando que no va a poner una cerca a lo largo del río?



A) $50\ 000\ m^2$ B) $62\ 500\ m^2$ C) $67\ 500\ m^2$
D) $100\ 000\ m^2$ E) $125\ 000\ m^2$

RESOLUCIÓN:



* Sea: $A(x)$= área de la cerca
* Entonces:

$A(x)=(1\ 000-2x)x=-2x^2+1000x$

* Completando cuadrados, resulta:

$A(x)=-2(x^2-500x+250^2)+250^2\times 2=-2(x-250)^2+125\ 000$

* El valor máximo del $A(x)$ del terreno será $125\ 000\ m^2$ y ocurrirá cuando $x=250$ Por tanto: $A_{máx.}=125\ 000\ m^2$

RPTA: "E"

PROBLEMA 108 :

Halle la suma de números complejos :

$A=(1+i)+(2+i^2)+(3+i^3)+(4+i^4)+....+(4n+i^{4n})$

A) $n(2n+1)$ B) $2n(4n+1)$ C) 0
D) $n(4n+1)$ E) $2n(4n-1)$

RESOLUCIÓN:

* De A tenemos:

$A=(1+2+3+....+4n)+(i+i^2+i^2+...+i^{4n})$

* pero :

• $1+2+3+...+4n=\frac{4n(4n+1)}{2}=2n(4n+1)$

•$i+i^2+i^3+i^4 = i+(-1)+(-i)+1=0$

$i^5+i^6+i^7+i^8 = i+i^2+i^3+i^4=0$

$i^9+i^{10}+i^{11}+i^{12}= i+i^2+i^3+i^4=0$

⋮ ⋮

* De lo anterior se deduce que:

$$i+i^2+i^3+...+i^{4n}=0$$

* Reemplazando en A se tiene:

$$A=2n(4n+1)+0=2n(4n+1)$$

RPTA: "B"

PROBLEMA 109 :

Efectue : $\sqrt{2\sqrt{i-\sqrt{i+\sqrt[5]{i}}}}$

A) $1+i$ B) $1-i$ C) i D) $\sqrt{2}i$ E) $\frac{-1+i}{2}$

RESOLUCIÓN:

* *Número imaginario*, número complejo $a+bi$ en el cual la componente imaginaria, b, es distinta de cero. Es decir, todos los números complejos que no son números reales son imaginarios. Los números complejos sin parte real, bi, $b\neq 0$, se llaman imaginarios puros. Los números imaginarios no representan nada en el mundo real, pero matemáticamente son fáciles de usar y son de gran valor en las ciencias físicas para representar fenómenos periódicos.

*Conocemos que : $i=i^5 \Rightarrow \sqrt[5]{i}=\sqrt[5]{i^5}=i;\boxed{\sqrt{-1}=i}$

*Entonces : $E=\sqrt{2\sqrt{i-\sqrt{i+i}}}=\sqrt{2\sqrt{i-\sqrt{2i}}}$

* También :

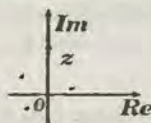
$2i=(1+i)^2 \Rightarrow \sqrt{2i}=1+i \Rightarrow E=\sqrt{2\sqrt{i-(1+i)}}=\sqrt{2\sqrt{-1}}$

$$\Rightarrow E=\sqrt{2i}=\sqrt{(1+i)^2}=1+i$$

RPTA: "A"

PROBLEMA 110 :

Si la gráfica del número complejo $z=\frac{1+ai}{1-ai}; a\in\mathbb{R}$, es el que se muestra en la figura :



Entonces el valor de a es :

A) 4 B) –2 C) 1 D) –1 E) 2

RESOLUCIÓN:

* Del esquema : $Re(z)=0$ como $z=\frac{1+ai}{1-ai}$

*Luego para que sea imaginario puro :

$z=ki / k>0$

$\Rightarrow 1+ai=ki+ak \Big\} \begin{cases} \Rightarrow (a=k) \wedge (ak=1) \\ \Rightarrow k=1 \wedge a=1 \end{cases}$

RPTA : "C"

PROBLEMA 111 :

El número complejo z_0 satisface la ecuación :

$$\frac{5+3i}{-4+1}=\frac{2i}{z_0}-2i$$

Determine el valor de $f(z_0)$,donde $f(x)=x^2-3x+3$.

A) $1+i$ B) $1-i$ C) $-2+i$ D) $2+\sqrt{2}i$ E) i

RESOLUCIÓN:

* Si sumamos 1 miembro a miembro , se obtiene:

$$\frac{5+3i}{-4+i}+1=\frac{2i}{z_0}-2i+1$$

$$\Rightarrow \frac{1+4i}{-4+i}=\frac{2i}{z_0}-2i+1 \Rightarrow -i=\frac{2i}{z_0}-2i+1$$

$$\Rightarrow \frac{-2i}{z_0}=1-i \Rightarrow \frac{(1-i)^2}{1-i}=z_0 \Rightarrow z_0=1-i$$

* Luego reemplazando en $f(x)=x^2+3x+3$ se tiene: $f(z_0)=(1-i)^2-3(1-i)+3 \Rightarrow f(z_0)=i$

RPTA : "E"

PROBLEMA 112 :

En $\mathbb{C}$, los valores de x e y, al resolver la ecuación siguiente : $\frac{xi}{1+yi}=\frac{3x+4i}{x+3y}$, son

A) $x=\pm 1$, $y=\pm 3/4$ B) $x=\pm 2$, $y=\pm 3/2$

C) $x=\pm 3$, $y=\pm 2/3$ D) $x=\pm 3$, $y=\pm 3/2$

E) $x=\pm 2$, $y=\pm 5/4$

RESOLUCIÓN:

*De lo dado , se obtiene :

$x^2i+3xyi=3x+3xyi+4i-4y$

$x^2i+4y=3x+4i$

* Por igualdad de complejos :

$$\begin{cases} x^2=4 \wedge 3x=4y \\ x=\pm 2 \wedge y=\pm \frac{3}{2} \end{cases}$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 113 :

Si $n=8k$ y $k\in \mathbb{Z}^+$, calcule el valor de R.

$$R=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)^n+\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)^n$$

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

RESOLUCIÓN:

$$R=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)^n+\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)^n ;n=8k;k\in\mathbb{Z}^+$$

$$=\left[\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)\right]^{8k}+\left[\frac{1}{\sqrt{2}}(-1+i)\right]^{8k}=$$

$$=\left[\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)\right)^2\right]^{4k}+\left[\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(-1+i)\right)^2\right]^{4k}=$$

$$=\left[\frac{1}{2}(2i)\right]^{4k}+\left[\frac{1}{2}(-2i)\right]^{4k}=(i)^{4k}+(-i)^{4k}=1+1=2$$

$\Rightarrow R=2$

RPTA : "C"

PROBLEMA 114 :

Si $|\bar{z}i|=4$, $Arg[z(1+i)]=\frac{\pi}{2}$, entonces el número complejo z en su forma polar es.

A) $4\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\,sen\frac{\pi}{4}\right)$ B) $2\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\,sen\frac{\pi}{4}\right)$

C) $\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\,sen\frac{\pi}{4}\right)$ D) $-\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\,sen\frac{\pi}{4}\right)$

RESOLUCIÓN

* Nos piden z en su forma polar $|\bar{z}i|=4$

* Por datos y por propiedades:

$$|\bar{z}i|=|\bar{z}||i|=|\bar{z}|=|z| \quad \Rightarrow |z|=4$$

* De la otra condición: $Arg[z(1+i)]=\frac{\pi}{2}$

* Por proporciones:

$$Arg[z(1+i)]=Arg(z)+Arg(1+i)$$

$$\Rightarrow Arg(z)+Arg(1+i)=\frac{\pi}{2}$$

* Como:

$Arg(1+i)=\frac{\pi}{4} \Rightarrow Arg(z)+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow Arg(z)=\frac{\pi}{4} \Rightarrow z=4\left(\cos\frac{\pi}{4}+isen\frac{\pi}{4}\right)$

RPTA : "A"

PROBLEMA 115 :

Dada la región :

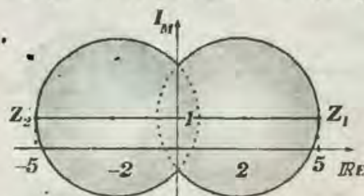
$$A=\left\{Z\in C \Big/ |Z-2-i|\le 3 \vee |Z+2-i|\le 3\right\}$$

Halle Z_1 y Z_2 en A tal que $|Z_1 - Z_2|$ sea el valor máximo. De como respuesta $Z_1 - Z_2$.

A) –29 B) –28 C) –26 D) –20 E) –18

RESOLUCIÓN:

$A=\{Z \in C / |Z-(2+i)| \le 3 \vee |Z-(-2+i)| \le 3\}$



La gráfica anterior muestra al conjunto A

* Nos piden $z_1 ; z_2 \in A$ tal que $|Z_1 - Z_2|$ sea el valor máximo, estos valores gráficamente son:

$Z_1=5+i \wedge Z_2=-5+i$

* Por lo tanto: $Z_1 Z_2=-26$

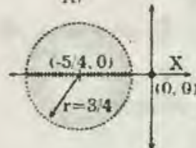
RPTA : "C"

PROBLEMA 116 :

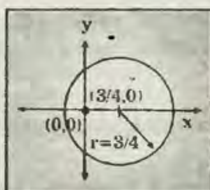
Si $z=x+yi$, grafique todos los puntos en el plano cartesiano que representa el conjunto :

$$\left\{z / \left|\frac{z-1}{z+1}\right| > 3\right\}$$

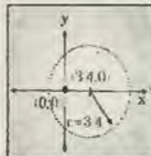
A)



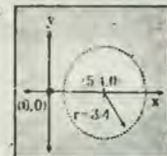
B)



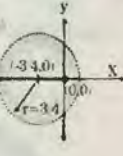
C)



D)



E)



RESOLUCIÓN:

$z = x + yi$ entonces:

$|z-1| = \sqrt{(x-1)^2 + y^2} \wedge |z+1| = \sqrt{(x+1)^2 + y^2}$

* Luego:

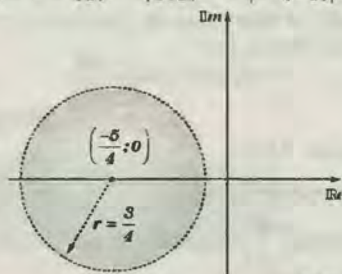
$$\left|\frac{z-1}{z+1}\right| > 3 \Rightarrow \sqrt{\frac{(x-1)^2+y^2}{(x+1)^2+y^2}} > 3 \Rightarrow \frac{x^2-2x+1+y^2}{x^2+2x+1+y^2} > 9$$

$$\Rightarrow x^2-2x+1+y^2 > 9x^2+18x+9+9y^2$$

$$\Rightarrow 0 > 8x^2+20x+8+8y^2 \Rightarrow 0 > x^2+\frac{5}{2}x+1+y^2$$

$$\Rightarrow \frac{25}{16} > \underbrace{x^2+2\times\frac{5}{4}+\frac{25}{16}}+1+y^2 \Rightarrow \frac{9}{16} > \left(x+\frac{5}{4}\right)^2+y^2$$

$$\Rightarrow \left(x+\frac{5}{4}\right)^2+y^2 < \left(\frac{3}{4}\right)^2 \Rightarrow \left|\frac{z-1}{z+1}\right| > 3 \Rightarrow \left|z-\left(-\frac{5}{4}\right)\right| < \frac{3}{4}$$

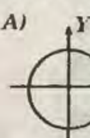


RPTA : "A"

PROBLEMA 117 :

Indique gráficamente todos los puntos de plano que verifican las relaciones $|e^z| \le 1$ y $|z| \le 1$ donde $z=x+iy$

A)



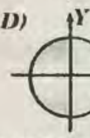
B)



C)



D)



E)



RESOLUCIÓN:

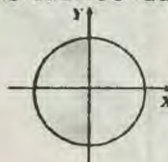
* Por el dato se tiene: $|e^z| \le 1 \wedge |z| \le 1$

* Asumiendo que: $Z=x+yi ; x, y \in R$

$$|e^{x+iy}| \le 1 \wedge \sqrt{x^2+y^2} \le 1 \Rightarrow \underbrace{|e^{x+iy}|}_{|e^x||e^{iy}|} \le 1 \wedge x^2+y^2 \le 1$$

$$\Rightarrow e^x \le e^0 \wedge x^2+y^2 \le 1 \Rightarrow x \le 0 \wedge x^2+y^2+ \le 1$$

* Graficando se observa que forman el semicírculo sombreado de radio 1



RPTA : "D"

PROBLEMA 118 :

Determine la suma de la raíces de la ecuación: $16(z^2-2iz-1)^2=z^4$

A) $\frac{3-4i}{15}$ B) $\frac{2+4i}{5}$ C) $\frac{48i}{15}$ D) $\frac{-2+4i}{5}$ E) $\frac{64i}{15}$

RESOLUCIÓN:

* Resolviendo: $16(z-i)^4=z^4$

$$\Rightarrow 16(z^4-4z^3i+6z^2i^2-4zi^3+i^4)=z^4$$

$$\Rightarrow 15z^4-64iz^3-96z^2+64iz+16=0$$

* Aplicando el teorema de cardano, entonces la suma de raíces es:

$$\Rightarrow z_1+z_2+z_3+z_4=\frac{64i}{15}$$

RPTA : "E"

PROBLEMA 119 :

El número complejo $z=\dfrac{(1+i\tan\theta)^7}{\cos 7\theta+i\,sen 7\theta}$ es igual *a*.

A) $\cos^7(\theta)$ B) $\cos\left(\dfrac{\theta}{7}\right)$ C) $\cos(7\theta)$ D) $\tan^7(\theta)$ E) $\sec^7(\theta)$

RESOLUCIÓN:

* Expresando en senos y cosenos Z se tiene:

$$Z=\frac{\left(1+i\dfrac{sen\theta}{\cos\theta}\right)^7}{\cos 7\theta+isen7\theta}=\frac{\left(\dfrac{\cos\theta+i\,sen\theta}{\cos\theta}\right)^7}{\cos 7\theta+isen7\theta}$$

* Usando la fórmula de Moivre resulta:

$$Z=\frac{(\cos 7\theta+isen7\theta)\times\sec^7\theta}{\cos 7\theta+isen7\theta}\Rightarrow Z=\sec^7\theta$$

RPTA : "E"

PROBLEMA 120:

Halle el argumento de un número complejo que equidista de los complejos:

$$-2;\ -2i\ \text{ y }\ 3\sqrt{2}(\cos\pi/4+i\,sen\pi/4)$$

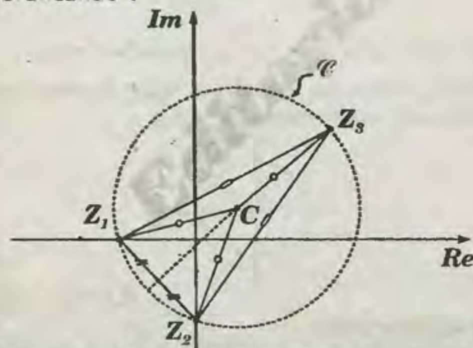
A) $\pi/8$ B) $\pi/6$ C) $\pi/4$
D) $\pi/3$ E) $2\pi/3$

RESOLUCIÓN:

* Sean los números complejos :

$$Z_1=-2;\ Z_2=-2i;\ Z_3=3+3i$$

* Graficando :



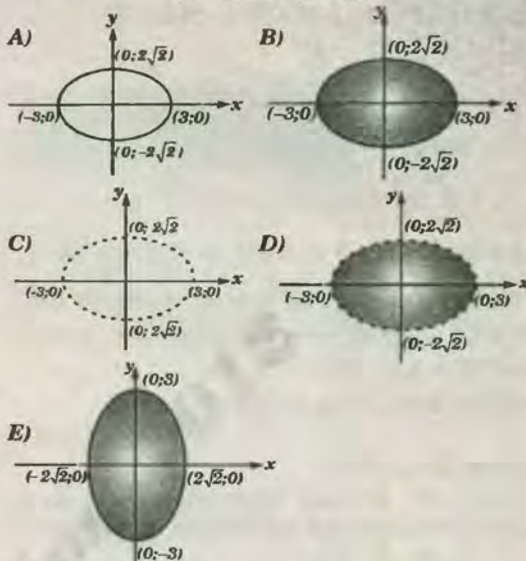
* El complejo que equidiste de Z_1, Z_2 y Z_3 se ubicará en el centro de la circunferencia $\mathscr{C}$; del gráfico ,C está en la bisectriz del primer cuadrante , luego , su argumento es $\pi/4$.

RPTA : "C"

PROBLEMA 121 :

Determine la representación geométrica de todos los puntos del plano complejo que satisfacen la condición:

$$|Z-1|\le 6-|Z+1|$$



RESOLUCIÓN:

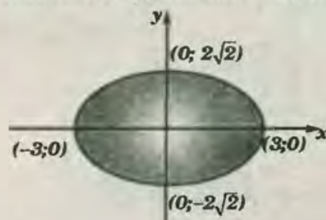
* Haciendo: $z=x+yi;z\in\mathbb{C}$
* Entonces: $|x-1+yi|\le 6-|x+1+yi|$

$$\sqrt{(x-1)^2+y^2}\le 6-\sqrt{(x+1)^2+y^2}$$

* Elevando al cuadrado se obtiene:

$$\frac{x^2}{3^2}+\frac{y^2}{\sqrt{8}^2}\le 1 \text{ (región elíptica)}$$

* Finalmente graficando tenemos:



RPTA : "B"

PROBLEMA 122 :

Si z_1 y z_2 son las raíces cuadradas del número complejo $z\neq 0$, entonces el valor de $(z_1+z_2)^3$ es.

A) z_1z_2 B) z_1z_2z C) 0 D) 1 E) z^3

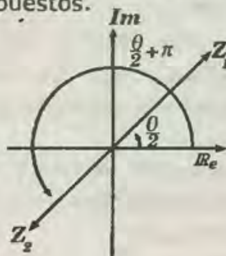
RESOLUCION :

* Se sabe por fórmula D' Moivré:

$$\sqrt{z}=\sqrt{|z|}cis\left(\frac{\theta+2k\pi}{2}\right)/k=0,1$$

$$k=0:\ z_1=\sqrt{|z|}cis\left(\frac{\theta}{2}\right)\Rightarrow k=1:\ z_2=\sqrt{|z|}cis\left(\frac{\theta}{2}+\pi\right)$$

* Se aprecia que poseen igual módulo y sus argumentos difieren en π, por tanto, son complejos opuestos.



$\Rightarrow z_1+z_2=0$

* Entonces el valor $(z_1+z_2)^3$ es: 0

RPTA : "C"

PROBLEMA 123 :

El valor de x en la ecuación :

$$\frac{x-a^2b^2}{a^2+b^2}+\frac{x-b^2c^2}{b^2+c^2}+\frac{x-c^2a^2}{c^2+a^2}=a^2+b^2+c^2$$

es :

A) abc B) $a^2b^2-b^2c^2+a^2c^2$ C) 0
D) $a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2$ E) $a^2b^2+b^2c^2-a^2c^2$

RESOLUCIÓN:

*Evaluando y agrupando convenientemente se obtiene:

$$\left(\frac{x-a^2b^2}{a^2+b^2}-c^2\right)+\left(\frac{x-b^2c^2}{b^2+c^2}-a^2\right)+\left(\frac{x-c^2a^2}{c^2+a^2}-b^2\right)=0$$

* Luego efectuando se tiene:

$$\left(\frac{x-a^2b^2-a^2c^2-b^2c^2}{a^2+b^2}\right)+\left(\frac{x-b^2c^2-a^2b^2-a^2c^2}{b^2+c^2}\right)+\left(\frac{x-c^2a^2-b^2c^2-b^2a^2}{c^2+a^2}\right)=0$$

* Factorizando se obtiene:

$$(x-a^2b^2-a^2c^2-b^2c^2)\underbrace{\left(\frac{1}{a^2+b^2}+\frac{1}{b^2+c^2}+\frac{1}{c^2+a^2}\right)}_{\text{diferente de cero}}=0$$

* Finalmente se tiene:

$$x=a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2$$

RPTA :"D"

PROBLEMA 124 :

Calcule la solución de la ecuación :

$$\frac{1}{\sqrt{11-2\sqrt{x}}}=\frac{3}{\sqrt{7-2\sqrt{10}}}+\frac{4}{\sqrt{8+4\sqrt{3}}}$$

A) 30 B)5 C) 20 D)13 E)10

RESOLUCIÓN :

* Transformando los radicales dobles a simples:

$$\sqrt{7-2\sqrt{10}}=\sqrt{5}-\sqrt{2}\wedge\sqrt{8+2\sqrt{12}}=\sqrt{6}+\sqrt{2}$$

* Luego , racionalizando en el segundo miembro :

$$\frac{1}{\sqrt{11-2\sqrt{x}}}=\frac{3(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{(\sqrt{5}-\sqrt{2})(\sqrt{5}+\sqrt{2})}+\frac{4(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{(\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{6}-\sqrt{2})}$$

$$\Rightarrow\sqrt{11-2\sqrt{x}}=\frac{1}{(\sqrt{6}+\sqrt{5})}\frac{(\sqrt{6}-\sqrt{5})}{(\sqrt{6}-\sqrt{5})}$$

$$\Rightarrow\sqrt{11-2\sqrt{x}}=\sqrt{6}-\sqrt{5}$$

$$\Rightarrow 11-2\sqrt{x}=(\sqrt{6}-\sqrt{5})^2$$

$$\Rightarrow 11-2\sqrt{x}=11-2\sqrt{30}\Rightarrow\boxed{x=30}$$

RPTA : "A"

PROBLEMA 125 :

Sea la ecuación $4x^2-2x+3=0$, cuyas raíces son a y b. Halle otra ecuación cuadrática que tenga por raíces
$(2a-1)$ y $(2b-1)$.

A) $y^2-y+1=0$ B) $y^2-y-2=0$

C) $y^2+y+3=0$ D) $y^2-\frac{1}{2}y-2=0$

E) $y^2-\frac{1}{4}y+3=0$

RESOLUCIÓN:

* Sea : $4x^2-2x+3=0$ .....(raíces a y b)
* Me piden una ecuación cuyas raíces son: $(2a-1)$ y $(2b-1)$.

* Por Cardano : $a+b=\frac{1}{2};\ ab=\frac{3}{4}$

* Construcción de otra ecuación de raíces :

$y_1=2a-1;y_2=2b-1\Rightarrow y^2-(y_1+y_2)y+y_1y_2=0$

$\Rightarrow y^2-[2(a+b)-2]y+[4ab-2(a+b)+1]=0$

* Reemplazando los valores obtenidos :

$$y^2-\left[2\left(\frac{1}{2}\right)-2\right]y+\left[4\times\frac{3}{4}-2\left(\frac{1}{2}\right)+1\right]=0\Rightarrow y^2+y+3=0$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 126 :

Determine los valores de m para que el polinomio $P(x)=x^2+mx+m^2+6m$, tenga valores negativos en $x=0$ y en $x=2$.

A) $m\in\langle-8;0\rangle$ B) $m\in\langle-6;0\rangle\cup\langle4-2\sqrt{3};+\infty\rangle$

C) $m\in\langle-4+2\sqrt{2};+\infty\rangle$ D) $m\in\langle-6;-4+2\sqrt{3}\rangle$

E) $m\in[-4-2\sqrt{3};4+2\sqrt{3}]$

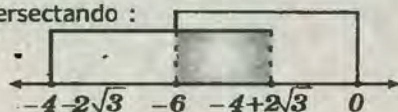
RESOLUCION:

* Se pide los valores de m para los cuales $P_{(0)}<0 \wedge P_{(2)}<0$

* $P_{(0)}=m^2+6m<0 \Rightarrow m(m+6)<0 \Rightarrow m \in \langle -6;0 \rangle$

* $P_{(2)}=m^2+8m+4<0 \Rightarrow m \in \langle -4-2\sqrt{3}\ ;-4+2\sqrt{3} \rangle$

* Intersectando :



$\Rightarrow m \in \langle -6\ ;-4+2\sqrt{3} \rangle$

RPTA : "D"

PROBLEMA 127 :

Si Δ es el discriminante de la ecuación $bx^2+ax+c=0$, $b \neq 0$ tal que $\Delta>0$, entonces la diferencia entre las raíces mayor y menor de esta ecuación es :

A) $\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$ B) $\frac{\sqrt{\Delta}}{|b|}$ C) $\frac{\sqrt{\Delta}}{|c|}$ D) $\frac{\Delta}{|a|}$ E) $\frac{\Delta}{|b|}$

RESOLUCIÓN:

Sea: $bx^2+ax+c=0 \Rightarrow a^2-4bc>0$

$$D=x_1-x_2 \Rightarrow D^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2$$

$$D^2=\left(-\frac{a}{b}\right)^2-4\left(\frac{c}{b}\right) \Rightarrow D^2=\frac{a^2-4bc}{b^2} \Rightarrow D=\frac{\sqrt{\Delta}}{|b|}$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 128 :

¿En qué intervalo debe variar k de modo que una raíz de $9x^2-36x+k^2=0$ se encuentre en el intervalo $\left\langle \frac{4}{3};2 \right\rangle$?

Si el conjunto solución es de la forma $\langle a;b \rangle \cup \langle c;d \rangle$ halle el valor de $ad-bc$.

A) 5 B) 2 C) 0 D) –1 E) –4

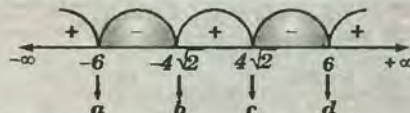
RESOLUCIÓN:

* El polinomio $9x^2-36x+k^2$ por poseer una raíz en el intervalo $\left\langle \frac{4}{3};2 \right\rangle$ aplicamos el teorema del cero :

$$\left[9\left(\frac{4}{3}\right)^2-36\left(\frac{4}{3}\right)+k^2\right]\left[9(2)^2-36(2)+k^2\right]<0$$

$\Rightarrow (k^2-32)(k^2-36)<0 \Rightarrow (k-\sqrt{32})(k-\sqrt{32})(k+6)(k-6)<0$

*Utilizando los Puntos críticos :



* Luego: $ad-bc=-36+32=-4$

RPTA : "E"

PROBLEMA 129 :

Halle todas las raíces del polinomio $P(x)=9x^2-36x^2+44x-16$. Si una raíz del polinomio es igual a la suma de las otras dos, entonces :

A) $x_1=1/3;x_2=2/3;x_3=1$ B) $x_1=1/2;x_2=1/2;x_3=2$

C) $x_1=4/3;x_2=1/3;x_3=2$ D) $x_1=4/3;x_2=2/3;x_3=2$

E) $x_1=5/3;x_2=1/3;x_3=3$

RESOLUCIÓN:

*Como $P(x)$ se anula para $x=2$

$\Rightarrow$ Aplicamos Ruffini :

$x=2$	9	–36	44	–16
	↓	18	–36	16
	9	–18	8	0

* Luego:

$P(x)=(x-2)(9x^2-18x+18)=0$

$\Rightarrow P(x)=(x-2)(3x-4)(3x-2)=0$

$\Rightarrow \boxed{x_1=2};\boxed{x_2=4/3};\boxed{x_3=2/3}$

RPTA : "D"

PROBLEMA 130 :

La condición para que las ecuaciones cuadráticas :

$$x^2+bx+c=0 \wedge x^2+b'x++c'=0$$

tengan una raíz común es :

A) $(b-b')^2+(c-c')(bc'-b'c)=0$

B) $(c-c')^2+(b-b')=0$

C) $(b-b')(bc'-b'c)=0$

D) $(c-c')^2+(bc'-b'c)=0$

E) $(c-c')^2+(b-b')(bc'-b'c)=0$

RESOLUCIÓN:

* Asumiendo que x es la raíz común de las ecuaciones , entonces:

$x^2+bx+c=0$ ....(I)

$x^2+b'x+c'=0$ ....(II)

* Luego restando (I) - (II), se tiene:

$$(b-b')x=c'-c \Rightarrow x=\frac{c'-c}{b-b'}$$

* Reemplazando en (I), resulta:

$$(c-c')^2+(b-b')(bc'-b'c)=0$$

RPTA : "E"

PROBLEMA 131 :

Dada la ecuación $2x^2+mx+30=0$ y x_1, x_2, sus raíces. ¿Para qué valores de m se cumple la relación $\frac{x_1}{x_2}=\frac{3}{5}$?

A) $|m|=16$ B) $|m|=10$ C) $|m|=14$ D) $|m|=8$ E) $|m|=20$

RESOLUCIÓN:

* Siendo x_1 y x_2 las raíces de $2x^2+mx+30=0$
* Usando la propiedad de las raíces tenemos:

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1+x_2=-\frac{m}{2} \\ x_1x_2=15 \end{cases}$$

* Se sabe que: $x_1 \neq 0$ y $x_2 \neq 0$
* De acuerdo dato , sabemos:

$$\frac{x_1}{x_2}=\frac{3}{5} \Rightarrow \begin{matrix} x_1=3K \\ x_2=5K \end{matrix}$$

* Luego:

$$\begin{cases} 8K=-\frac{m}{2} \Rightarrow m=-16K \\ 15K^2=15 \Rightarrow K=1 \vee K=-1 \end{cases}$$

* Resulta que: $m=-16 \vee m=16 \Rightarrow |m|=16$

RPTA : "A"

PROBLEMA 132 :

Las raíces de la ecuación $x+\sqrt{x-2}=4$ son:

A) Solo $x=6$ B) Solo $x=3$ C) $x=3$, $x=6$

D) $x=\sqrt{6}$; $x=3$ E) No existen soluciones

RESOLUCIÓN:

I) Hallamos el *C.V.A.*

$$x-2 \geq 0$$

$$\Rightarrow x \geq 2 \Rightarrow C.V.A.=[2;+\infty\rangle$$

II) De la ecuación $\sqrt{x-2}=4-x \wedge x \leq 4$

* Al elevar al cuadrado se obtiene:

$$x-2=16-8x+x^2 \Rightarrow x^2-9x-18=0$$

$$(x-3)(x-6)=0 \Rightarrow x=3 \vee \underbrace{x=6}_{\text{no es solución, pues no es menor o igual a 4.}}$$

RPTA: "B"

PROBLEMA 133 :

Una ecuación cuadrática tiene como raíces a $\Delta+4$ y $\Delta-2$. Halle la suma de las cifras del producto de estas raíces , siendo Δ el discriminante de la ecuación.

A) 10 B) 11 C) 12 D) 13 E) 14

RESOLUCIÓN:

* Reconstruyendo la ecuación cuadrática de raíces $\Delta+4$ y $\Delta-2$ tenemos :

$$x^2-(2\Delta+2)x+(\Delta+4)(\Delta-2)=0$$

* Es decir : $x^2-2(\Delta+1)x+(\Delta^2+2\Delta-8)=0$
* Calculando la discriminante :

$$\Delta=4(\Delta+1)^2-4(\Delta^2+2\Delta-8) \text{.................}(I)$$

*De donde : $\Delta=36$
* Reemplazando en *(I)* :

$$x^2-74x+1360=0$$

* Producto de raíces 1360

$\Rightarrow$ *suma* cifras de 1360 es 10

RPTA : "A"

PROBLEMA 134 :

¿Qué cantidad es necesaria aumentar a las raíces de la ecuación?

$$\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)x^2+2(a+b)x+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=1$$

Para que las cantidades resultantes sean iguales en magnitud pero de signos opuestos.

A) $\frac{a-b}{ab}$ B) $\frac{ab}{a-b}$ C) $\frac{a+b}{ab}$ D) $\frac{ab}{a+b}$ E) $\frac{a-b}{ab}$

RESOLUCIÓN:

* Suponiendo que: x_1 ; x_2 las raíces de la ecuación.
* Luego sumamos k a cada raíz y por toda la condición se tiene:

$$x_1+k=-(x_2+k) \Rightarrow k=-\frac{(x_1+x_2)}{2}$$

* Aplicando el teorema de Cardano resulta:

$$k=-\frac{-\frac{2(a+b)}{\frac{a}{b}-\frac{b}{a}}}{2}=\frac{ab}{a-b}$$

* Entonces , se debe sumar: $\frac{ab}{a-b}$

RPTA : "B"

PROBLEMA 135 :

El número de raíces de la ecuación $\sqrt{1-9x^2}=2x\sqrt{1-9x^2}$ es igual a :

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

RESOLUCIÓN

* Dado que la ecuación :

$\sqrt{1-9x^2}=2x\sqrt{1-9x^2}$ es irracional , entonces calculamos el *C.V.A* resultará:

$$1-9x^2 \geq 0 \Rightarrow \frac{1}{9} \geq x^2 \Rightarrow \frac{1}{3} \geq |x|$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{3} \leq x \leq \frac{1}{3} \Rightarrow C.V.A=\left[-\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right]$$

* Luego reduciendo la ecuación dada como dato:

$\sqrt{1-9x^2}-2x\sqrt{1-9x^2}=0 \Rightarrow \sqrt{1-9x^2}\times(1-2x)=0$

$\Rightarrow \sqrt{1-9x^2}=0 \vee 1-2x=0 \Rightarrow 1-9x^2=0 \vee 1=2x \Rightarrow \frac{1}{9}=x^2 \vee \frac{1}{2}=x$

$\Rightarrow x=\frac{1}{3} \vee x=-\frac{1}{3} \Rightarrow Sp=\left\{\frac{1}{3};-\frac{1}{3};\frac{1}{2}\right\}$

$\Rightarrow C.S=C.V.A.\cap Sp=\left[-\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right]\cap\left\{\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{2}\right\}=\left\{\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right\}$

* Por lo tanto , existen *2* raíces de la ecuación

RPTA : "C"

PROBLEMA 136 :

El producto de las raíces reales de la ecuación :

$$\sqrt{x^2+3x+6}-3x=x^2+4$$

A) –2 *B) –1* *C) 1* *D) 2* *E) 3*

RESOLUCIÓN :

* De la ecuación dada la expresamos:

$$\sqrt{x^2+3x+6}=x^2+3x+4$$

* Se observa que :

$$x^2+3x+4>0\ ;\ \forall x\in R \Rightarrow C.V.A=R$$

* Sustituyendo : $a=x^2+3x+4\ ;\ a>0$ ....*(I)*

* Se tiene : $\sqrt{a+2}=a$

* Elevando al cuadrado ambos miembros y luego factorizando se obtiene :

$$a^2-a-2=0$$

$$a=2 \vee a=-1 \Rightarrow a=2 (\text{pues } a>0)$$

* Para $a = 1$ la ecuación *(I)* no tiene raíces reales.

* Para $a = 4$ la ecuación *(I)* tiene como raíces:

$$x^2+3x+4=2$$

$$\Rightarrow x_1=-2 \vee x_2=-1 \Rightarrow x_1x_2=2$$

RPTA : "D"

PROBLEMA 137 :

Si *A* es el conjunto solución de la ecuación $2x^2+2x-3\sqrt{x^2+x+3}=3$, entonces la suma de los elementos de *A* es.

A) –3 *B) –1* *C) 1* *D) 3* *E) 4*

RESOLUCIÓN:

* De la ecuación:

$$2x^2+2x-3\sqrt{x^2+x+3}=3$$

$$\Rightarrow 2x^2+2x-3-3\sqrt{x^2+x+3}=0$$

$$\Rightarrow 2\left(x^2+x+3\right)-9-3\sqrt{x^2+x+3}=0......(I)$$

* Sabemos que: $x^2+x+3>0,\ \forall x\in R$

* Luego haciendo: $\sqrt{x^2+x+3}=t;\ t>0$

* Reemplazando en *(I)* , resulta:

$$2t^2-3t-9=0$$

$$\begin{matrix} 2t & & 3 \\ t & & -3 \end{matrix}$$

$$(2t+3)(t-3)=0\ ;\ t>0$$

$$\Rightarrow t-3=0 \Rightarrow t=3$$

* Entonces: $\sqrt{x^2+x+3}=3 \Rightarrow x^2+x-6=0$

$$(x+3)(x-2)=0 \Rightarrow x=-3 \vee x=2$$

$$\Rightarrow C.S.=\{-3\ ;2\}$$

* Por tanto , la suma de estos únicos elementos de *A* será: $-3+2=-1$

RPTA : "B"

PROBLEMA 138:

La función polinomial $P(x) = ax^3 + bx^2 - b + a$, con $a\in Z^+$, y tal que $P(1) < 4$, tiene *2* raíces positivas iguales , entonces un valor de $a - b$ es.

A) 3 *B) 4* *C) 5* *D) 6* *E) 7*

RESOLUCIÓN:

* Se sabe que: $P(1)<4 \Rightarrow a+b-b+a<4$

$$a<2 \Rightarrow a=1 \text{ pues } a\in Z^+$$

* Factorizando $P(x) = x^3 + bx^2 - b + 1$ resulta:

$$P(x)=\underbrace{(x+1)}_{\text{genera raíz negativa}}\underbrace{\left(x^2+(b-1)x+1-b\right)}_{\text{debe generar dos raíces positivas iguales }(\Delta=0)}$$

$$\Delta=(b-1)^2-4(1-b)=0 \Rightarrow \underbrace{\cancel{b=1}}_{\text{genera raíces nulas}} \vee \underbrace{b=-3}_{\text{generar raíces positivas}}$$

* Luego: $a=1 \wedge b=-3 \Rightarrow a-b=4$

RPTA : "B"

PROBLEMA 139 :

Dada la ecuación algebraica. $\frac{x^2-4}{|x+3|}=\frac{3}{2}x$

Determine el número de raíces reales que posee dicha ecuación.

A) 0 *B) 1* *C) 2* *D) 3* *E) 4*

RESOLUCIÓN :

• $x+3>0 \Leftrightarrow x>-3 \Rightarrow \frac{x^2-4}{x+3}=\frac{3}{2}x$

* Al simplificar resulta:

$$x^2+9x+8=0 \Rightarrow (x+1)(x+8)=0$$

$$\Rightarrow x=-1 \vee x=-8$$

* Pero $x > -3$, sólo cumple $x = -1$

• $x+3<0 \Leftrightarrow x<-3$

$$\frac{\overbrace{x^2-4}^{+}}{\underbrace{|x+3|}_{+}}=\underbrace{\frac{3}{2}x}_{-}$$

¡contradicción!

* Entonces , la ecuación solo presenta una raíz real.

RPTA : "B"

PROBLEMA 140 :

Dada la ecuación algebraica. $\dfrac{x^2-4}{|x+3|}=\dfrac{3}{2}x$

Determine el número de raíces reales que posee dicha ecuación.

A) 0 *B) 1* *C) 2* *D) 3* *E) 4*

RESOLUCIÓN :

• $x+3>0 \Leftrightarrow x>-3 \Rightarrow \dfrac{x^2-4}{x+3}=\dfrac{3}{2}x$

* Al simplificar resulta:

$$x^2+9x+8=0 \Rightarrow (x+1)(x+8)=0$$

$$\Rightarrow x=-1 \vee x=-8$$

* Pero $x>-3$, sólo cumple $x=-1$

• $x+3<0 \Leftrightarrow x<-3$

$$\overbrace{\dfrac{x^2-4}{\underbrace{|x+3|}_{+}}}^{+}=\underbrace{\dfrac{3}{2}x}_{-}$$ ¡contradicción!

* Entonces , la ecuación solo presenta una raíz real.

RPTA : "B"

PROBLEMA 141 :

Las raíces de la ecuación $x+\sqrt{x-2}=4$ son:

A) Solo $x=6$ *B) Solo $x=3$* *C) $x=3,\ x=6$*

D) $x=\sqrt{6}\ ;\ x=3$ *E) No existen soluciones*

RESOLUCIÓN:

I) Hallamos el *C.V.A.*

$$x-2\geq 0$$

$$\Rightarrow x\geq 2 \Rightarrow C.V.A.=[2;+\infty\rangle$$

II) De la ecuación $\sqrt{x-2}=4-x \wedge x\leq 4$

* Al elevar al cuadrado se obtiene:

$$x-2=16-8x+x^2 \Rightarrow x^2-9x-18=0$$

$$(x-3)(x-6)=0 \Rightarrow x=3 \ \vee \underbrace{x=6}_{\text{no es solución, pues no es menor o igual a 4.}}$$

RPTA: "B"

PROBLEMA 142:

$(x_1, x_2, ...x_{20})$ es una *20*-upla de números reales. Sea la ecuación

$$(x_1-x_2)^2+(x_2-x_3)^2+(x_3-x_4)^2+...+$$
$$(x_{19}-x_{20})^2+(x_{20}-x_1)^2=1$$

El número de *20*-uplas de números enteros $(x_1,x_2,....x_{20})$ que son soluciones de la ecuación anterior es igual a:

A) 0 *B) 1* *C) 19* *D) 20* *E) ∞*

RESOLUCIÓN:

* Asumiendo que:

$$a=x_1-x_2$$
$$b=x_2-x_3$$
$$c=x_3-x_4$$
$$\vdots$$
$$h=x_{19}-x_{20}$$
$$l=x_{20}-x_1$$

* Al sumar se tiene:

$$a+b+c+...l=0..............(I)$$

Por dato tenemos:

$$a^2+b^2+c^2+...l^2=1..........(II)$$

* Dado que $x_1,x_2,x_3,...,x_{20}\in Z$, entonces:

$a,b,c,....,l\in Z$

$a^2+b^2+c^2+...l^2+2[ab+bc+....+al]=0$

$1+2[ab+bc+....+al]=0$

$ab+bc+...al=-1/2(\Rightarrow\ \Leftarrow)$

* Entonces , la ecuación no tiene solución , puesto que la suma de productos enteros no puede ser un número fraccionario.

RPTA : "A"

PROBLEMA 143 :

Determine el polinomio mónico de menor grado de coeficientes enteros que tenga como raíces a los números reales $\sqrt{2}-3$ y $\sqrt{3}-2$. Dar como respuesta la suma de sus coeficientes.

A) 28 *B) 42* *C) 56* *D) 70* *E) 84*

RESOLUCIÓN:

* Sea $x_1\ ;\ x_2\ ;\ x_3\ ;\ x_4$ las raíces de un polinomio mónico *P*, entonces:

$$P=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)$$

* Luego , si en una raíz del polinomio es de la forma $a+\sqrt{b}$, entonces , otra raíz debe ser $a-\sqrt{b}$ cuando los coeficientes son racionales.

* Según las condiciones del problema:

$$x_1=-3+\sqrt{2} \qquad x_2=-3-\sqrt{2}$$
$$\Rightarrow$$
$$x_3=-2+\sqrt{3} \qquad x_4=-2-\sqrt{3}$$

* Luego, el polinomio mónico de menor grado es:

$P_{(x)}=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)$

$=(x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2)(x^2-(x_3+x_4)x+x_3x_4)$

$=(x^2-(-6)x+7)(x^2-(-4)x+1)$

$=(x^2+6x+7)(x^2+4x+1)$

$\Rightarrow \sum coef(P)=P_{(1)}=(14)(6)=84$

RPTA : "E"

PROBLEMA 144 :

El producto de los coeficientes de la función polinomial de menor grado que pasa por los puntos $(0;0)$; $(1;1)$; $(2;0)$ y $(3;1)$ es.

A) $-\frac{15}{4}$ B) $\frac{14}{9}$ C) $\frac{5}{9}$ D) $-\frac{15}{9}$ E) $-\frac{16}{9}$

RESOLUCIÓN:

* Tomando como $P(x)$ el polinomio:

$\left.\begin{array}{l}(0;0)\in P\Rightarrow P(0)=0\\(2;0)\in P\Rightarrow P(2)=0\end{array}\right\}$ 0 y 2 son raíces

$\Rightarrow x;(x-2)$ son factores

$\left.\begin{array}{l}(1;1)\in P\Rightarrow P(1)=1\\(3;-1)\in P\Rightarrow P(3)=-1\end{array}\right\}$ como datos

$\Rightarrow P(x)$ de menor grado será de la forma

$P(x)=x(x-2)(ax+b)$

* Sabemos que:

$P(1)=1\Rightarrow(-1)(a+b)=1$

$a+b=-1$ ....(I)

$P(3)=1\Rightarrow 3(3a+b)=-1$

$3a+b=\frac{1}{3}$ ....(II)

* De las expresiones (I) y (II) tenemos que:

$$a=\frac{1}{3}\ \wedge\ b=-\frac{4}{3}$$

* Entonces $P(x)=\frac{1}{3}(x^3-6x^2+8x)$

* Se pide el producto de coeficientes: $-\frac{16}{9}$

RPTA : "E"

PROBLEMA 145 :

Sea $P(x)=x^5-ax+b$ un polinomio con coeficientes enteros. Si $P(x)$ es divisible por $(x-c)^2$, entonces el valor de $(a+b+c)$ es

A) 10 B) 7 C) 8 D) 9 E) 14

RESOLUCIÓN:

* Si c es raíz de multiplicidad 2 de $P(x)$

$\Rightarrow P(c)=c^5-ac+b=0$ ....(α)

* Derivando :

$P(c)=5c^4-a=0$..................(β)

* Entonces : $c^4=\frac{a}{5}$

* Reemplazando en (α) se obtiene : $c^5=\frac{b}{4}$

* Como el sistema es dependiente de un parámetro, tenemos:

$c=1\Rightarrow a=5\Rightarrow b=4\Rightarrow a+b+c=10$

$c=1\Rightarrow a=5\Rightarrow b=-4$

$c=0\Rightarrow a=0\Rightarrow b=0$

$c=2\Rightarrow a=80\Rightarrow b=128$

⋮

RPTA : "A"

PROBLEMA 146 :

El polinomio :

$$P(x)=8x^5-60x^4+126x^3+\alpha x^2+\beta x-45$$

tiene sus tres raíces reales en progresión aritmética , las otras dos raíces son complejas y de la forma $\pm bi$.

Si b es entero , calcule b.

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

RESOLUCIÓN:

* Sean x_1, x_2, x_3 sus raíces reales las mismas que por condición cumplen

$\div x_1\ .\ x_2\ .\ x_3\ ;\qquad \div(x_2-r)\ .\ x_2\ .\ x_2+r$

* Además : $x_4=b_i\ \wedge\ x_5=-b_i$

* Usando el teorema de Cardano :

* $\underbrace{x_1+x_2+x_3}_{3x_2}+\underbrace{x_4+x_5}_{cero}=\frac{60}{8}\Rightarrow x_2=\frac{5}{2}$

* $x_1x_2x_3x_4x_5=\frac{45}{8}\Rightarrow\left(\frac{5}{2}-r\right)\frac{5}{2}\left(\frac{5}{2}+r\right)(bi)(-bi)=\frac{45}{8}$

$\Rightarrow (25-4r^2)b^2=9\Rightarrow\begin{cases}b=\pm1\Rightarrow 25-4r^2=9\\b=\pm3\Rightarrow 25-4r^2=1\end{cases}$

* De estas dos posibilidades las raíces que verifican la suma de productos binarios cumplen solo con la primera condición.

$\Rightarrow b=\pm1$; dado que b es entero

RPTA : "A"

PROBLEMA 147 :

Indique la verdad o falsedad de los siguientes enunciados:

I) Sea $P(x)=ax^3+bx^2+cx+d$, $a\neq0$, $d\neq0$ si P tiene tres raíces reales , entonces $P\left(\frac{1}{x}\right)$ tendrá las mismas raíces.

II) Todo polinomio complejo siempre tiene raíces complejas y sus respectivas conjugadas.

III) Si la suma de las raíces de un polinomio es racional , entonces cada una de ellas también es racional.

A) F F F   B) F V V   C) V F V
D) V V F   E) V V V

RESOLUCIÓN:

I) FALSO :
* Haciendo un contraejemplo:
de raíces $x_1; x_2; x_3$,
luego $P(x)=a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$
* Luego cambiamos x por $\frac{1}{x}$, tenemos:

$$P\left(\frac{1}{x}\right)=a\left(\frac{1}{x}-x_1\right)\left(\frac{1}{x}-x_2\right)\left(\frac{1}{x}-x_3\right)$$

* Considerando x como incógnita , resolvemos:

$$P\left(\frac{1}{x}\right)=0 \Rightarrow a\left(\frac{1}{x}-x_1\right)\left(\frac{1}{x}-x_2\right)\left(\frac{1}{x}-x_3\right)=0$$

$$\Rightarrow x=\frac{1}{x_1} \vee x=\frac{1}{x_2} \vee x=\frac{1}{x_3}$$

*Se aprecia que $P\left(\frac{1}{x}\right)=0$ no tiene las mismas raíces de $P(x)=0$.

II) FALSO :
* Haciendo un contraejemplo :

$$P(x)=x^2-(2+i)x+2i$$

* polinomio complejo donde sus raíces son: $2 ; i$
* Por tanto , no podemos asegurar que las raíces son conjugadas.
* Entonces , no todo polinomio complejo tiene raíces conjugadas.

III) FALSO :
* Haciendo un contraejemplo
$P(x)=x^2-2$, polinomio donde sus raíces son: $\sqrt{2}; -\sqrt{2}$ (números irracionales)
* Luego se aprecia que la suma de sus raíces es: 0 (número racional)

RPTA : "A"

PROBLEMA 148 :

Sea a, b, c una terna de números enteros tales que $a+b+c=24$, $a^2+b^2+c^2=210$, $abc=440$. El menor número de esta terna es

A) 1   B) 2   C) 3   D) 4   E) 5

RESOLUCIÓN:

* Se sabe por dato:

$$\underbrace{a+b+c=24 \; ; \; a^2+b^2+c^2=210}_{ab+bc+ac=183}; \; abc=440$$

* Luego formando una ecuación cúbica de raíces $a; b; c$, se tiene:

$$\Rightarrow x^3-24x^2+183x-440=0$$

* Aplicando Ruffini, se obtiene:

	1	-24	183	-440
5		5	-95	440
8	1	-19	88	0
		8	-80	
11	1	-11	0	
		11		
	1	0		

la siguiente ecuación: $(x-5)(x-8)(x-11)=0$
* Por lo tanto , la menor raíz es: 5

RPTA : "E"

PROBLEMA 149 :

Calcule $Q(A)$, si $Q(X)=(1+x)(1-x)$
siendo $A=\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}$

A) $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ B) $\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$ C) $-2\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$
D) $-4\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$ E) $-14\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$

RESOLUCIÓN:

* Piden: $Q(A)$
* Dato: $Q(x)=(1+x)(1-x)$

$$\Rightarrow Q_{(A)}=(I+A)(I-A) \Rightarrow Q_{(A)}=I-A^2$$

$$\Rightarrow Q_{(A)}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow Q_{(A)}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}5&4\\4&5\end{pmatrix} \Rightarrow Q_{(A)}=\begin{pmatrix}-4&-4\\-4&-4\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow Q_{(A)}=-4\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$$

RPTA : "D"

PROBLEMA 150 :

Determine los valores del número real x para que la matriz $A=\begin{bmatrix}\sqrt{x+3}&1\\3&\sqrt{x-5}\end{bmatrix}$ sea invertible.

A) $x \le 5$ B) $x \ge 0$ C) $x \ge 5$
B) $x \ge -3$ E) $x \ge 5$ y $x \ne 6$

RESOLUCIÓN:

* Para que la matriz A sea invertible, se cumple:
$|A| \ne 0$ $|A|=\sqrt{x+3}\sqrt{x-5}-3 \ne 0$
* Resolviendo:

$$x+3 \ge 0 \wedge x-5 \ge 0 \Rightarrow x \ge 5 \ldots\ldots\ldots\ldots (I)$$

* Elevando al cuadrado: $\sqrt{(x+3)(x-5)} \ne 3$

$x^2 - 2x - 24 \neq 0 \Rightarrow x \neq 6 \vee x \neq -4$

* Por lo tanto de *(I)*: $x \geq 5$ y $x \neq 6$

RPTA : "E"

PROBLEMA 151 :

Sea la matriz $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & \frac{bc+x}{a} \end{pmatrix}$, los valores de todos los x para los cuales existe una matriz B tal que $AB=BA=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ son

A) 0 *B)1* *C) todo número real*
D) todo real no nulo *E) todo real positivo*

RESOLUCIÓN:

* Dado que la condición $AB = BA = I$, entonces: $|A| \neq 0$

$$|A| = a\left(\frac{bc+x}{a}\right) - bc \neq 0 = bc + x - bc \neq 0 \Rightarrow x \neq 0$$

* Por lo tanto: $x \in \mathbb{R} - \{0\}$

RPTA : "D"

PROBLEMA 152 :

Sea Y un número real no nulo.
Calcule $(E + L)-(T + U)$, si E, L, T y U satisfacen el siguiente producto de matrices :

$$\begin{pmatrix} Y & 0 \\ T & U \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & L \\ T & U \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} Y & 0 \\ E & L \end{pmatrix}$$

A) 0 *B) 1* *C) 2* *D) 3* *E) 4*

RESOLUCIÓN :

* Al multiplicar las matrices se obtiene:

$$\begin{pmatrix} YE & YL \\ TE+UT & TL+U^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} Y & 0 \\ E & L \end{pmatrix}$$

* Por igualdad de matrices:
• $YE=Y$; como $Y \neq 0 \Rightarrow E=1$
• $YL=0$; como $Y \neq 0 \Rightarrow L=0$
• $TL+U^2=L$; como $L=0 \Rightarrow U=0$
• $TE+UT=E$; como $E=1, U=0 \Rightarrow T=1$

* Finalmente nos piden:

$$(E+L)-(T+U)=(1+0)-(1+0)=0$$

RPTA : "A"

PROBLEMA 153 :

La solución del sistema :

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} es \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}+t\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dé el valor de verdad de.

I) $\det A \neq 0$ y el sistema corresponde a dos rectas que no se intersecan.

II) $\det A \neq 0$ y el sistema corresponde a dos rectas que coinciden.

III) $\det A=0$ y el sistema corresponde a dos rectas que se intersecan en un punto.

A) FVV *B) VFF* *C) VVF*
D) FFV *E) FVF*

RESOLUCIÓN:

* *Del sistema* : $A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \Rightarrow A=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}$

* Luego : $a_1x + a_2y = b_1$
$a_3x + a_4y = b_2$

Dato: $C.S.=\{3-2t;\ t\}$

Como no hay condición para t.

PRIMER CASO :

t parámetro $/ t \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ el sistema tiene infinitas soluciones $\det(A)=0$

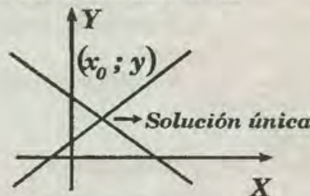
como $F \wedge P = F$; $F \vee P = P$

I) F *II) F* *III) F*

SEGUNDO CASO:

$t \in \mathbb{R} / t$ es fijo

$\Rightarrow$ el sistema tiene solución única



I) F *II) F* *III) V*

*La tabla de verdad final se obtiene uniendo ambos casos : *FFV*

RPTA : "D"

PROBLEMA 154 :

Sea A una matriz de orden 2×2, con $A^2=B$, donde $b_{21}=0$ y $a_{21} \neq 0$. Si $traz(B) = b_{11}+b_{22}$, entonces el valor de $M=traz(B)+2det(A)$ es.

A)-1 *B)0* *C)1* *D)2* *E)3*

RESOLUCIÓN :

**Sea* : $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ y como $A^2=B$

* Entonces :

$$B=\begin{pmatrix} a_{11}^2+a_{12}a_{21} & a_{11}a_{12}+a_{21}a_{12} \\ a_{21}a_{11}+a_{22}a_{21} & a_{22}a_{12}+a_{22}^2 \end{pmatrix}$$

* Por dato :

$a_{21}a_{11}+a_{22}a_{21}=0 \Rightarrow a_{21}(a_{11}+a_{22})=0$

y como $a_{21} \neq 0 \Rightarrow a_{11}+a_{22}=0$

* Se pide :

$M=\underbrace{(a_{11}^2+a_{12}a_{21}+a_{21}a_{12}a_{22}^2)}_{traz(B)}+\underbrace{2(a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12})}_{det(A)} \Rightarrow M=(a_{11}+a_{22})^2=0$

RPTA : "B"

ROBLEMA 155 :

Sean las matrices $A=\begin{bmatrix}1&1\\1&3\end{bmatrix}$ y $B=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$ tales que $AB=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$

Entonces el valor de $a+b+c+d$ es :

A) –1 *B) 0* *C) –2* *D) 1* *E) 2*

RESOLUCIÓN:

* Por dato tenemos : $AB = I$,
* Dado que: $|A| \neq 0$.
* Al multiplicar por la inversa de *A* resulta:

$A^{-1}AB=A^{-1}\times I \Rightarrow B=A^{-1}$

$B=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}3&-1\\-1&1\end{pmatrix} \Rightarrow B=\begin{pmatrix}\frac{3}{2}&-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$

$\Rightarrow a=\frac{3}{2};b=-\frac{1}{2};c=-\frac{1}{2};d=\frac{1}{2}$

$\Rightarrow a+b+c+d=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$.

RPTA : "D"

PROBLEMA 156 :

Sean *A y B* matrices de orden *2×2*. Señale la secuencia correcta , después de determinar si la proposición es verdadera *(V)* o falsa *(F)*:

I) Si $A^2=0 \Rightarrow A=0$

II) Si $AB=0 \Rightarrow A=0$ ó $B=0$

III) $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$

A)V V V *B)V V F* *C)F F V*
D)F F F *E) F V V*

RESOLUCIÓN:

I) FALSO:

Si : $A=\begin{pmatrix}1&-1\\1&-1\end{pmatrix} \Rightarrow A^2=\begin{pmatrix}1&-1\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$

* Luego, $A \neq 0 \Rightarrow A^2=0$

II) FALSO:

Si :

$A=\begin{pmatrix}1&-1\\1&-1\end{pmatrix} \wedge B=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix} \Rightarrow AB=\begin{pmatrix}1&-1\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$

* Luego, $A \neq 0 \wedge B \neq 0 \Rightarrow AB=0$

III) FALSO: pues :

$(A+B)(A-B)=(A+B)A-(A+B)B=AA+BA-AB-BB$

$\Rightarrow (A+B)(A-B)=A^2+BA-AB-B^2 \neq A^2-B^2$

Dado que no siempre : $AB=BA$.

RPTA : "D"

PROBLEMA 157 :

Se tienen las *6* matrices :

$A=\begin{bmatrix}1&2\\2&-6\end{bmatrix};\ B=\begin{bmatrix}2&3\\3&2\end{bmatrix};\ C=\begin{bmatrix}7&1\\x&2\end{bmatrix}$

$D=ABC;\ M=A^2B^3C^4;\ Q=AB^{-1}$

El valor de x para que tres de las seis matrices no sean inversibles es;

A) 0 *B) 3* *C) 4* *D) -14* *E) 14*

RESOLUCIÓN:

* Al analizar las matrices del enunciado, se deduce:
* *A* y *B* son invertibles
* *C* no es invertible si $x = 14$

$D^{-1}=C^{-1}B^{-1}A^{-1}$ ***no invertible***

$M^{-1}=(C^4)^{-1}(B^3)^{-1}(A^2)^{-1}$ ***no invertible***

$Q^{-1}=BA^{-1}$ ***no invertible***

* Por lo tanto, para que existan *3* matrices no invertibles, debe ocurrir que *C* sea no invertible y *x* debe tomar el valor de *14*

RPTA : "E"

PROBLEMA 158 :

Similarmente al caso de los números reales , se dice que la matriz *M* es la raíz cuadrada de la matriz *N* si entonces , el valor de *x* para el cual la matriz $\begin{bmatrix}7&-16\\x&-7\end{bmatrix}$ es la raríz cuadrada de $\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$ es :

A) 0 *B) 3* *C) – 16* *D) 16* *E)no existe*

RESOLUCIÓN :

* Entonces por las condiciones del problema tenemos: $\begin{pmatrix}7&-16\\x&-7\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

* Efectuando:

$\begin{pmatrix}7&-16\\x&-7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7&-16\\x&-7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}49-16x&0\\0&49-16x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

* Aplicando igualdad de matrices se tiene que:

$49-16x=1 \Rightarrow x=3$

RPTA : "B"

PROBLEMA 159 :

Si $A=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & -2\end{pmatrix}$ satisface la ecuación $x^2+3x+2I=0$, donde $I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, entonces el valor de $B-C$, donde B y C son matrices de elementos enteros que satisfacen, $A=B^3+C^3$, es igual a:

A) A-2I B) A-I C) A D) A+I E) A+2I

RESOLUCIÓN:

*Por condición tenemos: $A=B^3+C^3$

* Al descomponer A convenientemente, se obtiene:

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 0 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

* La primera posibilidad que se presenta es:

$$B^3=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}\wedge C^3=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

* Luego por la forma que presentan, asumimos:

$$B=\begin{pmatrix}0 & m\\ 0 & n\end{pmatrix}\wedge C=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}=-I$$

* Entonces: $C^3=(-I)=-I$

* Para calcular m y n, tenemos que:

$$B^3=\begin{pmatrix}0 & mn^2\\ 0 & n^3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}\Rightarrow\{n=-1\wedge m=1\}$$

$$\Rightarrow B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

* Por lo tanto, el valor pedido es:

$$B-C=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}=A+2I$$

RPTA : "E"

COMENTARIO:

se pueden obtener más valores para $(B-C)$ por ejemplo si tomamos : $B=I\wedge C=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}$

entonces : $B-C=-A-2I$

PROBLEMA 160 :

Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones.

I) Si todos los elementos de una fila (o columna) de una matriz cuadrada es cero , entonces , su determinante es cero.

II) Si dos filas (o columnas) no nulas de una matriz cuadrada son iguales , entonces su determinante es diferente de cero.

III) Si en una matriz cuadrada se intercambian dos filas (o columnas) , entonces el determinante de la matriz resultante es igual al determinante de la matriz original salvo el signo.

A) VVV B) VFV C) VVF D) FVV E) FFF

RESOLUCION :

* Se sabe por las propiedades de determinantes que:

I) Si todos los elementos de una fila o columna son ceros , su determinante es cero.

II) Si dos filas (o columnas) no nulas de una matriz cuadrada son iguales , su determinante es cero.

III) Si en una matriz cuadrada se intercambian dos filas (o columnas) , entonces el determinante de la matriz resultante es igual al determinante de la matriz original , salvo el signo.

* Por lo tanto la respuesta es: *VFV*

RPTA : "B"

PROBLEMA 161 :

Definamos la matriz $A_n=\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2^n}\\ 0 & 1\end{pmatrix}$. Entonces la matriz $B=A_1A_2A_3\ldots A_nA_{n+1}\ldots$ es. (Atención: nótese que n no crece indefinidamente)

A) $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ B) $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ C) $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ D) $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ E) $\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2}\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

RESOLUCIÓN:

* Analizando la matriz se deduce lo siguiente:

$n=1\Rightarrow A_1=\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2}\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ $n=2\Rightarrow A_2=\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2^2}\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

$n=3\Rightarrow A_3=\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2^3}\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ $n=4\Rightarrow A_4=\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2^4}\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

⋮

* Luego: $A_{n+1}=\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2^{n+1}}\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

$$B=\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2^2}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2^3}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\ldots\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2^n}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2^{n+1}}\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

* Multiplicamos por partes tenemos:

$$B=\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\cdots\frac{1}{2^{n+1}}\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

* como : $n\Rightarrow\infty$

* ***Se obtiene finalmente :*** $B=\begin{pmatrix}1 & \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

RPTA : "B"

PROBLEMA 162 :
Sean las matrices :

$$A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & 1\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}a & 1\\ c & 5\end{pmatrix}.$$

Tal que $AB = BA$, calcule el valor de $(a + c)$.
A) 1/4 B) 1/2 C) 1 D) 2 E) 3

RESOLUCIÓN:
* Si: $AB = BA$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & 1\\ c & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & 1\\ c & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & 1\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}2a-c & -3\\ 3a+c & 8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2a+3 & -a+1\\ 2c+15 & -c+5\end{pmatrix}$$

* Igualdando matrices resulta:

$$-3=-a+1 \ \wedge \ 8=-c+5$$
$$a=4 \ \wedge \ c=-3$$

* Luego : $a+c=4-3=1$

RPTA : "C"

PROBLEMA 163 :
Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & c\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}2 & b\\ b & c\end{pmatrix}$

Si se cumple que $A+B=I$, donde

$I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, halle $a+b+2c$.

A) –1 B) –1/2 C) 0 D) 1/2 E) 1

RESOLUCIÓN:
* Sabemos que: $A+B=I$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix}a & b\\ 0 & c\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2 & b\\ b & c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}a+2 & 2b\\ b & 2c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

* Entonces: $a+2=1\Rightarrow a=-1$

$2c=1 \ \Rightarrow c=\dfrac{1}{2}$; $b=0$

*Nos piden : $a+b+2c=0$

RPTA : "C"

PROBLEMA 164 :

Sean : $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 8\end{pmatrix}; C=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$

tales que $A^2-2A-B=C$
La matriz A con elementos no negativos que satisface esa ecuación es (dar como respuesta la suma de los elementos de la matriz A)
A) 7 B) 10 C) 8 D) 1 E) 9

RESOLUCIÓN:
* Sabemos además que:

$$A^2-2A-B=C\Rightarrow A^2-2A=B+C$$
$$\Rightarrow A^2-2A+I=B+C+I \ / \ I: \text{ matriz Identidad}$$
$$\Rightarrow (A-I)^2=B+C+I$$

* Luego reemplazando los datos, se obtiene:

$$(A-I)^2=\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & 9\end{pmatrix}\Rightarrow A-I=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}\vee A-I=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}\vee$$
$$\vee A-I=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & -3\end{pmatrix}\vee A-I=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}$$

* Tomando en cuenta el dato, resulta:

$$A-I=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}\Rightarrow A=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}$$

RPTA : "A"

PROBLEMA 165 :

Dada la matriz : $M=\begin{pmatrix}2\cos^2\theta & sen2\theta\\ sen2\theta & 2sen^2\theta\end{pmatrix}$

Entonces la matriz M^3 es igual a.
A) M B) 2M C) 3M D) 4M E) 8M

RESOLUCIÓN:
* Dada la matriz: $M=\begin{pmatrix}2\cos^2\theta & sen2\theta\\ sen2\theta & 2sen^2\theta\end{pmatrix}$

* Luego formamos el polinomio característico de M : $P(x)=x^2-traz(M)x+|M|$
* Hay que tener en cuenta lo siguiente:
$traz(M)=2; |M|=0.$

$$\Rightarrow P(x)=x^2-2x+0 \ ; P(M)=0$$
$$\Rightarrow P(M)=M^2-2M=0\Rightarrow M^2=2M$$
$$\Rightarrow M^3=2M^2\Rightarrow M^3=2(2M)=4M$$

RPTA : "D"

PROBLEMA 166 :
Sea la matriz :

$$X=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

entonces la matriz X^{11} es.

A) $\begin{bmatrix}10 & 0 & 10\\ 0 & 1 & 0\\ 10 & 0 & 10\end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix}100 & 0 & 100\\ 0 & 1 & 0\\ 100 & 0 & 100\end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix}1\,000 & 0 & 1\,000\\ 0 & 1 & 0\\ 1\,000 & 0 & 1\,000\end{bmatrix}$

D) $\begin{bmatrix}1024 & 0 & 1024\\ 0 & 1 & 0\\ 1024 & 0 & 1024\end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix}59\,049 & 0 & 59\,049\\ 0 & 1 & 0\\ 59\,049 & 0 & 59\,049\end{bmatrix}$

RESOLUCIÓN :

$$X^1=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}$$

Formando la recurrencia tenemos :

$$X^2=X.X=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&0&2\\0&1&0\\2&0&2\end{bmatrix}$$

$$X^3=X^2.X=\begin{bmatrix}2&0&2\\0&1&0\\2&0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&0&4\\0&1&0\\4&0&4\end{bmatrix}$$

*En general tenemos:

$$X^n=X^{n-1}.X=\begin{bmatrix}2^{n-1}&0&2^{n-1}\\0&1&0\\2^{n-1}&0&2^{n-1}\end{bmatrix};\ \forall n\in\mathbb{N}$$

* En nuestro caso $n=11$, entonces:

$$X^{11}=\begin{bmatrix}2^{10}&0&2^{10}\\0&1&0\\2^{10}&0&2^{10}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1024&0&1024\\0&1&0\\1024&0&1024\end{bmatrix}$$

RPTA : "D"

PROBLEMA 167 :

El valor de $\begin{pmatrix}1/3&0&0\\0&1/2&1/2\\0&0&1/2\end{pmatrix}^{1000}$ es :

A) $\begin{pmatrix}(1/3)^{1000}&0&0\\0&1/2&(1/2)^{1000}\\0&0&1/2\end{pmatrix}$ B) $\begin{pmatrix}(1/3)^{1000}&0&0\\0&(1/2)^{1000}&1/2\\0&0&(1/2)^{1000}\end{pmatrix}$

C) $\begin{pmatrix}(1/3)^{1000}&0&0\\0&1000/2&1000/2\\0&0&1/2\end{pmatrix}$ D) $\begin{pmatrix}(1/3)^{1000}&0&0\\0&(1/2)^{1000}&1000/2^{1000}\\0&0&(1/2)^{1000}\end{pmatrix}$

RESOLUCIÓN

$$sea: A=\begin{pmatrix}1/3&0&0\\0&1/2&1/2\\0&0&1/2\end{pmatrix}$$

* Nos piden calcular : A^{1000}.

$$A^2=A\times A=\begin{pmatrix}1/3&0&0\\0&1/2&1/2\\0&0&1/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/3&0&0\\0&1/2&1/2\\0&0&1/2\end{pmatrix}$$

* Por inducción se puede hallar el valor matricial:

$$A^2=\begin{pmatrix}(1/3)^2&0&0\\0&(1/2)^2&2\times(1/2)^2\\0&0&(1/2)^2\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A^3=A^2\times A=\begin{pmatrix}(1/3)^2&0&0\\0&(1/2)^2&2\times(1/2)^2\\0&0&(1/2)^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/3&0&0\\0&1/2&1/2\\0&0&1/2\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A^3=\begin{pmatrix}(1/3)^3&0&0\\0&(1/2)^3&3\times(1/2)^3\\0&0&(1/2)^3\end{pmatrix}$$

$\vdots$

$$\Rightarrow A^{1000}=\begin{pmatrix}(1/3)^{1000}&0&0\\0&(1/2)^{1000}&1000\times(1/2)^{1000}\\0&0&(1/2)^{1000}\end{pmatrix}$$

RPTA : "D"

PROBLEMA 168 :

Dada la matriz $M=\begin{pmatrix}0&-\alpha\\\alpha&0\end{pmatrix}$, entonces el valor de M^{1003} es :

A) $\alpha^{1003}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ B) $\alpha^{1003}\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$ C) $\alpha^{1003}\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}$

D) $\alpha^{1003}\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$ E) $\alpha^{1003}\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}$

RESOLUCION:

*De lo dado se tiene:

$$M^2=\alpha^2\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}\Rightarrow M^2=-\alpha^2I$$

$$\Rightarrow M^{1003}=(M^2)^{501}M=(-\alpha^2I)^{501}\alpha\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{M^{1003}=\alpha^{1003}\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}}$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 169 :

Sea la matriz $H=\begin{pmatrix}x^2&-3\\x&1\end{pmatrix}$ tal que $\det(H)=4$

Luego H^2 es :

A) $\begin{pmatrix}1&-3\\1&1\end{pmatrix}$ B) $\begin{pmatrix}16&-3\\-4&1\end{pmatrix}$ C) $\begin{pmatrix}-2&3\\-4&4\end{pmatrix}$

D) $\begin{pmatrix}-2&-6\\2&-2\end{pmatrix}$ E) $\begin{pmatrix}-4&-1\\4&-2\end{pmatrix}$

RESOLUCION:

* De la matriz H dada ,se tiene :

$$\det H=x^2+3x\Rightarrow x^2+3x=4\Rightarrow x^2+3x-4=0$$

de donde $x=-4$ ó $x=1$

* Reemplazando para cada valor obtenido :

i) Si $x=1 \Rightarrow H=\begin{pmatrix}1 & -3\\ 1 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow H^2=\begin{pmatrix}1 & -3\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -3\\ 1 & 1\end{pmatrix}$

$\Rightarrow H^2=\begin{pmatrix}-2 & -6\\ 2 & -2\end{pmatrix}$.

ii) Si $x=-4 \Rightarrow H=\begin{pmatrix}16 & -3\\ -4 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow H^2=\begin{pmatrix}16 & -3\\ -4 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}16 & -3\\ -4 & 1\end{pmatrix}$

$\Rightarrow H^2=\begin{pmatrix}268 & -51\\ 68 & 13.\end{pmatrix}$

*Luego la alternativa que aparece es para $x=1$

RPTA : "D"

PROBLEMA 170 :

Dadas la matrices :

$$C=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix} \text{ y } D=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

Entonces se puede afirmar que C^8D^9 es.

A) $\begin{pmatrix}1 & 9\\ 8 & 73\end{pmatrix}$ B) $\begin{pmatrix}71 & 8\\ 9 & 1\end{pmatrix}$ C) $\begin{pmatrix}72 & 8\\ 9 & 1\end{pmatrix}$

D) $\begin{pmatrix}73 & 9\\ 8 & 1\end{pmatrix}$ E) $\begin{pmatrix}71 & 9\\ 8 & 1\end{pmatrix}$

RESOLUCIÓN:

* Por inducción obtenemos:

- $C^2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}$

  $C^3=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 3 & 1\end{pmatrix};\ldots..C^8=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 8 & 1\end{pmatrix}$

- $D^2=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

  $D^3=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & 1\end{pmatrix};\ldots..D^9=\begin{pmatrix}1 & 9\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

* Con lo obtenido resulta:

$$C^8D^9=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 8 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 9\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 9\\ 8 & 73\end{pmatrix}$$

RPTA : "A"

PROBLEMA 171 :

Sea la matriz :

$$A=\begin{bmatrix}1 & 5 & 1\\ 0 & 2 & 7\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}$$

entonces , la suma de los elementos de la diagonal de A^{10} es:

A) 40230 B) 6^6 C) 60014

D) 60074 E) 10^6

RESOLUCIÓN:

*Como :

$$A=\begin{pmatrix}1 & 5 & 1\\ 0 & 2 & 7\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$$

$$A^2=\begin{pmatrix}1 & 5 & 1\\ 0 & 2 & 7\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 5 & 1\\ 0 & 2 & 7\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 15 & 39\\ 0 & 4 & 35\\ 0 & 0 & 9\end{pmatrix}$$

$$A^3=\begin{pmatrix}1 & 15 & 39\\ 0 & 4 & 35\\ 0 & 0 & 9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 5 & 1\\ 0 & 2 & 7\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & \cdot & \cdot\\ 0 & 8 & \cdot\\ 0 & 0 & 27\end{pmatrix}$$

$\vdots$

$$A^{10}=\begin{pmatrix}1 & \cdot & \cdot\\ 0 & 2^{10} & \cdot\\ 0 & 0 & 3^{10}\end{pmatrix}$$

* Notar: que el producto de matrices triangulares superiores es siempre una matríz triangular superior , y los elementos de las diagonales se multiplican entre sí.

* Luego los elementos de la diagonal de A^{10} son: $1^{10}; 2^{10}; 3^{10}$

* Entonces: $1+2^{10}+3^{10}=60\,074$

RPTA : "D"

PROBLEMA 172 :

Si $\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}=2$ halle el valor de $\begin{vmatrix}2+a & b\\ 2+c & d\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}1 & d\\ 1 & b\end{vmatrix}$

A) –2 B) –1 C) 0 D) 1 E) 2

RESOLUCIÓN :

*Si: $\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}=2 \Rightarrow ad-bc=2$

* Entonces:

$$\begin{vmatrix}a+2 & b\\ c+2 & d\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}1 & d\\ 1 & b\end{vmatrix}=(a+2)d-(c+2)b+2(b-d)=ad-bc=2$$

RPTA : "E"

PROBLEMA 173 :

El valor del determinante de $F=\begin{vmatrix}a^2 & a & 1\\ b^2 & b & 1\\ c^2 & c & 1\end{vmatrix}$ es.

A) $(a-b)(b-c)(c-a)$

B) $(a-b)(c-b)(a+c)$

C) $(b-a)(b+c)(a-c)$

D) $(a+b)(b-c)(a-c)$

E) $(a-b)(b-c)(a-c)$

RESOLUCIÓN:

$$F=\begin{vmatrix} a^2 & a & 1 \\ b^2 & b & 1 \\ c^2 & c & 1 \end{vmatrix}$$ (intercambio columnas *1 y 3*)

$$\Rightarrow F=\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$$ (transpuesta)

* Usando Van der Monde se obtiene:

$$F=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$$

$$F=-(b-a)(c-a)(c-b) \Rightarrow F=(a-b)(b-c)(a-c)$$

RPTA : "E"

PROBLEMA 174 :

Sean a y b números enteros positivos pares ; con estos números se forma la matriz .

$$A=\begin{bmatrix} a & -b & -a \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & b \end{bmatrix}, \text{ si } det(A+I)=12$$

(la matriz identidad) , halle el determinante de la matriz $\begin{bmatrix} a & 2a \\ b^2 & b \end{bmatrix}$

A) –12 *B) –10* *C) 10* *D) 12* *E) 16*

RESOLUCIÓN:

* Matriz de identidad $I=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
* Dado que: $|A+I|=12$
* Al reemplazar tenemos:

$$|A+I|=\begin{vmatrix} a+1 & -b & -a \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & b+1 \end{vmatrix}=12$$

* Al restar la columna *3* de la columna *2* resulta:

$$\begin{vmatrix} a+1 & -b & -a+b \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & b \end{vmatrix}=12$$

* Por menores complementarios en la 2da fila

$$2\begin{vmatrix} a+1 & -a+b \\ 1 & b \end{vmatrix}=12$$

* Al efectuar tenemos.

$$a(b+1)=2\times 3$$ ← $a=2$ ya que $b=2$ a ; b son pares

* Finalmente: $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}=4-16=-12$

RPTA : "A"

PROBLEMA 175 :

Sean las matrices :

$$U=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, V=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$Q=\alpha U+\beta V$ donde $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$

Los valores de α,β para los cuales existen los números p , q tales que , simultáneamente se cumple.

$$Q\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}=p\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix},\ Q\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}=q\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$ son

A) solamente $\alpha=\beta=0$
B) solamente $\alpha=0;\beta$ ***arbitario***
C) solamente $\beta=0;\alpha$ ***arbitario***
D) No existe tales números
E) α ***y*** β ***son arbitrarios***

RESOLUCION:

* Por dato: $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$
* Además:

$$U=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}; V=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Q=\alpha U+\beta V=\begin{pmatrix} \alpha+\beta & 2\alpha & \alpha-\beta \\ 2\alpha & 4\alpha & 2\alpha \\ \alpha-\beta & 2\alpha & \alpha+\beta \end{pmatrix}$$

* Entonces:

$$Q\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6\alpha \\ 12\alpha \\ 6\alpha \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 6\alpha \\ 12\alpha \\ 6\alpha \end{pmatrix}=p\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow 6\alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}=p\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow p=6\alpha \text{ ....(I)}$$

$$Q\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2\beta \\ 0 \\ -2\beta \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2\beta \\ 0 \\ -2\beta \end{pmatrix}=q\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow 2\beta\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}=q\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow q=2\beta \text{ ....(II)}$$

* Se observa que: $p=6\alpha \wedge q=2\beta$,
* Entonces: $\alpha;\beta$ son arbitrarios

RPTA : "E"

PROBLEMA 176:

Sean las matrices $Q=\begin{bmatrix} 2 & 7 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & -4 \end{bmatrix}, P=Q^{101}$

sabiendo que $Q\begin{bmatrix} 8 \\ -3 \\ -5 \end{bmatrix}=\lambda\begin{bmatrix} 8 \\ -3 \\ -5 \end{bmatrix}$, donde λ es

un cierto número real. Entonces, el vector $\bar{u}$ y el número α tales que $P\bar{u} = \alpha\bar{u}$ son:

A) $\begin{bmatrix}8\\3\\5\end{bmatrix};0$ B) $\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix};-1$ C) $\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix};1$ D) $\begin{bmatrix}8\\-3\\-5\end{bmatrix};-1$ E) $\begin{bmatrix}-8\\3\\5\end{bmatrix};0$

RESOLUCIÓN:

* Como :
$$Q\begin{pmatrix}8\\-3\\-5\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix}8\\-3\\-5\end{pmatrix}\ \lambda \in \mathbb{R}\ ....(I)$$

* Multiplicando por Q :

$$Q^2\begin{pmatrix}8\\-3\\-5\end{pmatrix} = \lambda Q\begin{pmatrix}8\\-3\\-5\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{(I) tenemos}]{\text{Reemplazando}} Q^2\begin{pmatrix}8\\-3\\-5\end{pmatrix} = \lambda^2\begin{pmatrix}8\\-3\\-5\end{pmatrix}$$

* Si multiplicamos sucesivamente por Q llegamos a :

$$Q^{101}\begin{pmatrix}8\\-3\\-5\end{pmatrix} = \lambda^{101}\begin{pmatrix}8\\-3\\-5\end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Multiplicando por -1}} Q^{101}\begin{pmatrix}-8\\3\\5\end{pmatrix} = \lambda^{101}\begin{pmatrix}-8\\3\\5\end{pmatrix}$$

* Como $P = Q^{101}$ entonces :

$$P\begin{pmatrix}-8\\3\\5\end{pmatrix} = \lambda^{101}\begin{pmatrix}-8\\3\\5\end{pmatrix}$$

* Comparando con el dato $P\bar{\mu} = \alpha\bar{\mu}$ tenemos

$$\mu = \begin{pmatrix}-8\\3\\5\end{pmatrix} \wedge \alpha = \lambda^{101}$$

* Hallando λ

*Como : $Q = \begin{pmatrix}2 & 7 & -1\\1 & 1 & 1\\-1 & 4 & -4\end{pmatrix}$

* Reemplazando en *(I)* :

$$\begin{pmatrix}2 & 7 & -1\\1 & 1 & 1\\-1 & 4 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}8\\-3\\-5\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix}8\\-3\\-5\end{pmatrix}$$

* De aquí : $\lambda = 0$

* Finalmente : $\bar{\mu} = \begin{pmatrix}-8\\3\\5\end{pmatrix} \wedge \alpha = 0$

RPTA : "E"

PROBLEMA 177 :

Sea $A = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\1 & 1 & 0\\1 & 1 & 1\end{bmatrix}$ una matriz , entonces la matriz A^{49} está representada por :

A) $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\49 & 1 & 0\\989 & 49 & 1\end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\49 & 1 & 0\\1080 & 49 & 1\end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\49 & 1 & 0\\1225 & 49 & 1\end{bmatrix}$

D) $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\49 & 1 & 0\\1127 & 49 & 1\end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\49 & 1 & 0\\1274 & 49 & 1\end{bmatrix}$

RESOLUCIÓN:

* Al deducir primero A^n y después calculando A^{49} obtenemos :

$$A^2 = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\1 & 1 & 0\\1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\1 & 1 & 0\\1 & 1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\2 & 1 & 0\\1+2 & 2 & 1\end{pmatrix}$$

$$A^3 = A\times A = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\2 & 1 & 0\\3 & 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\1 & 1 & 0\\1 & 1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\2 & 1 & 0\\1+2+3 & 3 & 1\end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^3\times A = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\3 & 1 & 0\\6 & 3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\1 & 1 & 0\\1 & 1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\2 & 1 & 0\\1+2+3+4 & 4 & 1\end{pmatrix}$$

* se observa que siempre se forma una matriz triangular inferior , entonces tenemos que:

$$A^n = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\n & 1 & 0\\1+2+3+...n & n & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\n & 1 & 0\\\frac{n(n+1)}{2} & n & 1\end{pmatrix};\ \forall n \in N$$

* Luego para $n = 49$ tenemos:

$$A^{49} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\49 & 1 & 0\\\frac{49(50)}{2} & 49 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\49 & 1 & 0\\1225 & 49 & 1\end{pmatrix}$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 178 :

A es una matriz de orden *3*. Se intercambian la primera y tercera filas y se obtiene la matriz A_0. En A_0 a la primera fila se le multiplica por *3* y a la tercera por *2* obteniéndose la matriz A_1 de manera que $\det(A_1)=66$
Halle $\det(A^{-1})$.

A) -11 B) $-\frac{1}{11}$ C) $\frac{1}{33}$ D) 11 E) $\frac{1}{6}$

RESOLUCIÓN:

* Sea la matriz A : $A = \begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\a_{21} & a_{22} & a_{23}\\a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}$

* De las operaciones indicadas se obtiene la

matriz A_1 : $A_1=\begin{pmatrix} 3a_{31} & 3a_{32} & 3a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 2d_{11} & 2a_{12} & 2a_{13} \end{pmatrix}$.

* Por dato : $|A_1|=66$
* Hallando el determinante de A_1 :

$$|A_1|=6\begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{vmatrix}$$

* Cambiando f_1 por f_3 : $|A_1|=-6|A|$
* Por dato: $-6|A|=66 \Rightarrow |A|=-11$
* Nos piden: $|A^{-1}|=\frac{1}{|A|}=-\frac{1}{11}$

RPTA : "B"

PROBLEMA 170 :

Sea $N=\begin{pmatrix} 0 & -\alpha \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}$ entonces N^5 es:

A) $\begin{pmatrix} \alpha^5 & 0 \\ \alpha & \alpha^5 \end{pmatrix}$ B) $\begin{pmatrix} 0 & -\alpha^5 \\ \alpha^5 & 0 \end{pmatrix}$ C) $\begin{pmatrix} \alpha^5 & 0 \\ 0 & -\alpha^5 \end{pmatrix}$

D) $\begin{pmatrix} 0 & \alpha^5 \\ -\alpha^5 & 0 \end{pmatrix}$ E) $\begin{pmatrix} 0 & \alpha^5 \\ \alpha^5 & 0 \end{pmatrix}$

RESOLUCIÓN :

* Si: $N=\begin{pmatrix} 0 & -\alpha \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
* Asumimos que: $J=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
* Entonces: $N=\alpha J$
* Expresando de la manera siguiente:

$N^5=(\alpha J)^5=\alpha^5 J^5$ ....(I)

* Pero:

$$J^2=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}=-\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=-I$$

* I : identidad
* De aquí $J^2=-I$, se obtiene:

$J^3=J^2\times J=-J$

$J^4=J^2\times J^2=-I$

$J^5=J^4\times J=J$

* Reemplazando en *(I)* ,resulta

$$N^5=\alpha^5\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -\alpha^5 \\ \alpha^5 & 0 \end{pmatrix}$$

RPTA :"B"

PROBLEMA 180 :

¿Para qué valores de K el sistema de ecuaciones $x + Ky = 3$ y $Kx + 4y = 6$ tiene solución única?

A) $K \neq -2$; $K \neq 3$ B) $K \neq -2$; $K \neq 2$
C) $K \neq -3$; $K \neq 3$ D) $K \neq -3$; $K \neq 2$
E) $K \neq -2$; $K \neq -3$

RESOLUCIÓN :

* Aplicando la regla de Cramer : $\Delta_s . X_i=\Delta_{Xi}$
* Para que el sistema de ecuaciones tenga solución única se debe cumplir que:

$$\Delta_s \neq 0 \quad ; \quad \Delta_s=\begin{vmatrix} 1 & k \\ k & 4 \end{vmatrix}\neq 0$$

* Por tanto: $4-k^2\neq 0 \Rightarrow k\neq 2 \wedge k\neq -2$

RPTA : "B"

PROBLEMA 181 :

Si A y B son matrices 3×3 y $r\neq 0$ un número real , indique la secuencia correcta después de determinar si la proposición es verdadera *(V)* o falsa *(F)*.

I) det *(AB)* = det *(A)* det *(B)*
II) det *(A+B)* = det*(A)* + det*(B)*
III) det *(rA)* = *r* det*(A)*

A) V V V B) V V F C) F V V
D) V F F E) F F F

RESOLUCIÓN:

I) VERDADERO :

det *(AB)* = det *(A)* det *(B)*...Es una propiedad

II) FALSO :

CONTRAEJEMPLO :

Pues si $A=I_3,\ B=I_3$

$Det(I_2+I_2)=Det(I_2)+Det(I_2)$

$Det(2I_2) \;=\; 1 \;+\; 1$

$2^2 Det(I_3) \;=2$

$2^2(1)=2$

$4=2$....................(absurdo)

III) FALSO:

CONTRAEJEMPLO :

Pues si: $r=2$, $A=I_2$

$Det(rA) \;=rDet(A)$

$Det(2I_2) \;=2Det(I_2)$

$2^2 Det(I_2)=2(1)$

$2^2(1)=2$

$4=2$..................(absurdo)

RPTA : "D"

PROBLEMA 182 :

Si $x \in \mathbb{R}^2$ es solución del sistema $Ax=b$, calcule $TRAZ(x^t b)$.

Donde : $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$; $b=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 1/2

RESOLUCIÓN:

*Dado que $|A|=-1$ entonces A es invertible.

$$A^{-1}=\frac{1}{(-1)}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \text{ahora de : } Ax=b$$

$$\Rightarrow A^{-1}Ax=aA^{-1}b \Rightarrow Ix=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow x=\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow x^t=(-1\,3) \Rightarrow x^t b=(-1\,3)\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}=(1)$$

$$\Rightarrow traz(x^t b)=1$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 183 :

La solución de un sistema no-homogéneo (x_0, y_0) donde $x_0 = y_0$, dada según la regla de Cramer por.

$$x_0=\frac{\begin{vmatrix} m & -1 \\ n & 2 \end{vmatrix}}{d} \quad y_0=\frac{\begin{vmatrix} -4 & m \\ 5 & n \end{vmatrix}}{d}$$

Si m y n son primos relativos, un valor para $m+n+d$ sería.

A)0 B)–1 C)2 D)–3 E)4

RESOLUCIÓN:

* Sabemos por dato: $\underbrace{\frac{2m+n}{d}}_{x_0} = \underbrace{\frac{-4n-5m}{d}}_{y_0}$

* Lo cual resulta: $7m=-5n$

* Analizando esta última condición y como por dato, m y n son primos relativos tenemos:.

$(m=-5 \wedge n=7) \vee (m=5 \wedge n=-7)$

* Finalmente se obtiene:

$$m+n+d=-1 \vee m+n+d=-5$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 184 :

Dadas las matrices:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix} \wedge B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & b & c \\ a+b & b^2 & c^2 \end{pmatrix}$$

entonces podemos afirmar que :

A) $|A|=|B|$ B) $|A|=ab|B|$ C) $|A|=\frac{a}{b}|B|$

D) $|A|=(a+b)|B$ E) $|A|=(a-b)|B|$

RESOLUCIÓN:

* De las matrices dadas, se obtiene:

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}=(c-a)(c-b)(b-a)..........(I)$$

$$|B|=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & b & c \\ a+b & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{C_2-C_3}|B|=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & b-c & c \\ a+b & b^2-c^2 & c^2 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow |B|=(b-c)[(b+c)-(a+b)]=(b-c)(c-a)....(II)$$

* Luego comparando las expresiones *(I)* y *(II)* se tiene :

$$\frac{|A|}{|B|}=\frac{(c-a)(c-b)(b-a)}{(b-a)(c-a)}=a-b \Rightarrow |A|=(a-b)|B|$$

RPTA : "E"

PROBLEMA 185 :

Sea la matriz $\begin{bmatrix} a & 0 \\ b & a \end{bmatrix}$, donde $a \neq 0; b \in \mathbb{R}$

Entonces los valores x_1, x_2, x_3, x_4 tales que $\begin{bmatrix} a & 0 \\ b & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ son (en ese orden):

A) $\frac{1}{a}, -\frac{b}{a^2}, 0, \frac{1}{a}$ B) $\frac{1}{a}, \frac{b}{a^2}, 0, \frac{1}{a}$ C) $-\frac{1}{a}, \frac{b}{a^2}, 0, -\frac{1}{a}$

D) $\frac{1}{a}, 0, -\frac{b}{a^2}, \frac{1}{a}$ E) $\frac{1}{a}, 0, \frac{b}{a^2}, \frac{1}{a}$

RESOLUCIÓN:

* Según los datos tenemos:

$$\underline{\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; a \neq 0 \wedge b \in \mathbb{R}$$

* Operando se tiene:

$$\begin{pmatrix} ax_1 & ax_2 \\ bx_1+ax_3 & bx_2+ax_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

* Luego:

$$\begin{cases} ax_1=1 & \Rightarrow x_1=\frac{1}{a} \\ ax_2=0 & \Rightarrow x_2=0 \\ bx_1+ax_3=0 & \Rightarrow x_3=-\frac{b}{a^2} \\ bx_2+ax_4=1 & \Rightarrow x_4=\frac{1}{a} \end{cases}$$

* De donde: $x_1=\frac{1}{a}$; $x_2=0$; $x_3=-\frac{b}{a^2}$; $x_4=\frac{1}{a}$

RPTA : "D"

PROBLEMA 186 :

Para qué valor de λ el sistema siguiente

$$\begin{cases}\lambda x+y=0\\ \lambda x+z=1\\ \lambda x+x=\lambda\end{cases}$$

Admite infinitas soluciones.

A) 1 B)0 C)2 D)–1 E) –2

RESOLUCIÓN:

* Sumando las ecuaciones tenemos :

$(\lambda+1)(x+y+z)=\lambda+1$

*Luego tendrá infinitas soluciones si :

$\lambda+1=0 \Rightarrow \boxed{\lambda=-1}$

RPTA : "D"

PROBLEMA 187 :

Sea la tema *(a, b, c)* solución del sistema de ecuaciones :

$7x + 4y - 4z = 7$.........................(I)

$7y + 5z = 12$ ....(II)

$11y + 8z = 19$ ....(III)

entonces, la suma $(a + b + c)$ es igual.

A) –3 B) –2 C) 1 D) 2 E) 3

RESOLUCIÓN:

* Eliminando z de *(II)* y *(III)*: $8(II)-5(III)$

$y = 1$ en *(II)* $z = 1$

* Ahora reemplazando los valores de y y z en *(I)* obtenemos que: $x=1$

* Entonces: $C.S.=\{\{1;1;1\}\}$

* Luego tenemos que:

$a = 1, b = 1, c = 1 \Rightarrow a + b + c = 3$

RPTA : "E"

PROBLEMA 188 :

Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones:

$$-x_1+2x_2+x_3=-2$$

$$3x_1+6x_2+3x_1=6$$

$$3x_1-x_3=4$$

El resultado de $(x_1+x_2+x_3)$ es :

A) 3 B) 4 C) 7 D) 10 E) 15

RESOLUCIÓN:

* Ordenando adecuadamente el sistema :

$-x_1+2x_2+x_3=-2$.................................(I)

$-3x_1+6x_2+3x_3=-6$.............................(II)

$-3x_1-x_3=4$.................................(III)

* Al efectuar $3(I)-(II)$: $-6x_1=-12 \Rightarrow x_1=2$

* Reemplazando en *(III)*: $3\times 2-x_3=4 \Rightarrow x_3=2$

* Reemplazando en *(I)*: $-2+2x_2+2=-2 \Rightarrow x_2=-1$

*finalmente lo deseado: $x_1+x_2+x_3=3$

RPTA : "A"

PROBLEMA 189 :

Al resolver el sistema de ecuación

$$\begin{cases}x^2-y^2-x+y=0\\ x^2-y-2=0\end{cases}$$ Obtenemos

A) Cuatro soluciones con (–2 ; –2) una solución.

B) Tres soluciónes, con (1 ; 1) una solución.

C) Dos soluciones, con (1 ; 1) una solución.

D) No hay soluciones reales.

E) Podemos encontrar muchas soluciones variando x e y.

RESOLUCIÓN:

* Si factorizamos en el sistema de ecuaciones, tenemos:

$$\begin{cases}(x+y-1)(x-y)=0 \text{ ....(I)}\\ x^2+y-2=0 \text{ ....(II)}\end{cases}$$

* De *(I)*: $x-y=0 \vee x+y-1=0$

* Luego tenemos:

$$(I)\begin{cases}x=y\\ x^2+y=2\end{cases} \vee \ (II)\begin{cases}x+y-1=0\\ x^2+y=2\end{cases}$$

* Entonces al resolver el sistema *(I)* resulta:

$x = -2 \wedge y = -2 \Rightarrow S_1=(-2; -2)$

$x = 1 \wedge y = 1 \Rightarrow S_2=(1 ; 1)$

* Y por otro lado resolviendo el sistema *(II)*, se tiene:

$$x=\frac{1+\sqrt{5}}{2} \wedge y=\frac{1-\sqrt{5}}{2} \Rightarrow S_3=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2};\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$$

$$x=\frac{1-\sqrt{5}}{2} \wedge y=\frac{1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow S_4=\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2};\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$$

* Por lo cual, el sistema presenta cuatro soluciones.

RPTA : "A"

PROBLEMA 190 :

Dado el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases}\dfrac{4}{x+y-1}-\dfrac{5}{2x-y+3}=\dfrac{-5}{2} \text{ ....(I)}\\ \dfrac{3}{x+y-1}+\dfrac{1}{2x-y+3}=\dfrac{-7}{5} \text{ ....(II)}\end{cases}$$

el valor de $x+y$ es igual a:

A)–1 B) 0 C)1 D) 2 E) 3

RESOLUCIÓN:

* Multiplicando por 5 en(II) y sumando con *(I)* resulta:

$$\frac{19}{x+y-1}=-7-\frac{5}{2}\Leftrightarrow\frac{19}{x+y-1}=\frac{19}{2}$$

$\Rightarrow x+y-1=-2.\Rightarrow x+y=-1$

RPTA : "A"

PROBLEMA 191 :

La función polinomial :

$F(x;y;z)=[(x-y)(y-z+3)]^2+[(z-y)(y-x+3)]^4+(x+y+z-3)^2$

tiene *N* raíces *(x;y;z)*. Entonces *N* es igual a:

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

RESOLUCIÓN:

* Hacemos : $F(x;y;z)=0$

$\Rightarrow(x-y)(y-z+3)=0\wedge(z-y)(y-x+3)=0\wedge x+y+z=3$

$\Rightarrow[x-y=0\vee y-z+3=0]\wedge[z-y=0\vee y-x+3=0]\wedge x+y+z=3$

De donde:

1 $\begin{cases}x-y=0\\z-y=0\\x+y+z-3=0\end{cases}\Rightarrow C.S=\{(1,1,1)\}$

2 $\begin{cases}x-y=0\\y-x+3=0\\x+y+z-3=0\end{cases}\Rightarrow C.S=\varnothing$

3 $\begin{cases}y-z+3=0\\z-y=0\\x+y+z-3=0\end{cases}\Rightarrow C.S=\varnothing$

4 $\begin{cases}y-z+3=0\\y-x+3=0\\x+y+z-3=0\end{cases}\Rightarrow C.S=\{(2;-1,2)\}$

$C.S.=\{(1;1;1);(2;-1;2)\}$

RPTA : "C"

PROBLEMA 192 :

Dado el sistema $\begin{cases}x^2+4y^2=25\\x+2y=7\end{cases}$

Si $2y>x$, entonces el valor de $\frac{x}{y}$ es.

A) 1 B) $\frac{3}{2}$ C) 2 D) $\frac{8}{3}$ E) 3

RESOLUCIÓN:

* Del sistema tenemos:

$$\begin{cases}x^2+4y^2=25\ldots\ldots\ldots\ldots(I)\\x+2y=7\ldots\ldots\ldots\ldots(II)\end{cases}$$

* Al Completar cuadrados en *(I)*, obtiene:

$(x+2y)^2-4xy=25\ldots\ldots\ldots\ldots(\alpha)$

* Luego reemplazando *(II)* en (α):

$7^2-4xy=25\Rightarrow xy=6\Rightarrow 2xy=12\ldots.(III)$

* Resolviendo *(II)* y *(III)*, se tiene:

$$\begin{cases}x+2y=7\\x(2y)=12\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=4\wedge 2y=3 \text{ se descarta porque } 2y>x\\ \vee\\ x=3\wedge 2y=4\end{cases}$$

$\Rightarrow x=3;y=2$

* Entonces: $C.S.=\{(3;2)\}\Rightarrow\frac{x}{y}=\frac{3}{2}$

RPTA : "B"

PROBLEMA 193 :

Un grupo de estudiantes deciden aportar en cantidades iguales para contratar un profesor de ***Física***. Si hubieran *10* estudiantes más, cada uno pagaría *s/.10* menos. Sin embargo, si el número de estudiantes fuera 2 menos. cada uno pagaría *s/.5* más. ¿Cuántos estudiantes forman el grupo y cuánto se le paga al profesor.

A) 20 ; S/. 120 B) 10 ; S/. 200 C) 8 ; S/.160
D) 8 ; S/. 200 E) 20 ; S/.200

RESOLUCIÓN:

¿Cuántos estudiantes forman el grupo y cuánto se le paga al profesor?

Sea: «a» el número de estudiantes

«b» el pago de cada estudiante

	Cantidad de alumnos	Aporte de c/u	Dinero recaudado
Inicial	a	b	$a\times b$
Si fueran 10 más	$a+10$	$b-10$	$ab+10b-10a-100$
Si fueran 2 menos	$a-2$	$b+5$	$ab-2b+5a-10$

Igualando el dinero recaudado en cada caso, pues el profesor cobró lo mismo en todos los casos , tenemos:

$ab=ab+10b-10a-100=ba-2b+5a-10$

* De donde $a=20;b=10$
* Número de estudiantes: $a=20$
* Pago al profesor: $ab=200$

RPTA : "B"

PROBLEMA 194:

Dos campesinas llevan al mercado 100 manzanas, una de ellas tenía mayor número de manzanas que la otra; no obstante ambas obtuvieron iguales sumas de dinero. Una de ellas dice a la otra: Si yo hubiese tenido la cantidad de manzanas que tú tuviste, y tú la cantidad de manzanas que yo tuve, hubiésemos recibido respectivamente 15 y 20/3 soles. ¿Cuántas manzanas tenía cada una?

A)30 y 70 B)35 y 65 C)40 y 60 D)45 y 55 E)48 y 52

RESOLUCIÓN:

*De acuerdo al enunciado, tenemos:

	#MANZANA	COSTO DE CADA MANZANA
1ra. persona	x	$15/y$
2da. persona	y	$20/3x$

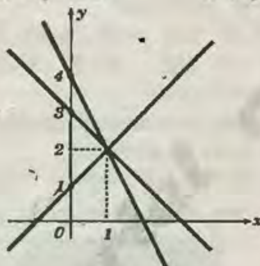
*Como ambos tienen la misma suma de dinero, entonces :

RPTA : "C"

PROBLEMA 195 :

¿Cuáles de los sistemas de ecuaciones está representada por la gráfica adjunta?

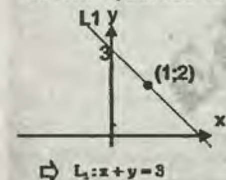
I) $x - y = -1$; $6x + y = 8$; $x + y = 3$
II) $6x + y = 8$; $x + y = 3$; $2x - y = 0$
III) $x - y = -1$; $2x + y = 4$; $x + y = 3$



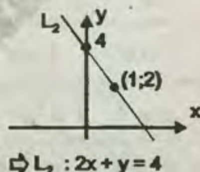
A) Sólo I
B) Sólo I y III
C) Sólo III
D) Sólo I y II
E) Sólo II

RESOLUCIÓN :

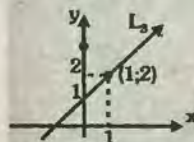
* Identifiquemos las rectas :



⇨ $L_1 : x+y=3$



⇨ $L_2 : 2x+y=4$



⇨ $L_3 : x-y=-4$

Conclusiones

$$\begin{cases} x-y=-1 \\ 2x+y=4 \\ x+y=3 \end{cases}$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 196 :

Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones.

$$2x^2+5xy-18y^2=0 \text{ ....(I)}$$

$$xy+y^2-12=0 \text{ ....(II)}$$

A) (– 4 ; 2) , (– 2 ; 4) B) (– 4 ; – 2) , (– 2 ; 4)
C) (4 ; 2) , (– 4 ; – 2) D) (4 ; 2) , (– 2 ; 4)
E) (4 ; – 2) , (– 4 ; – 2)

RESOLUCIÓN:

* Notar que si $x = y = 0$, entonces sólo se cumple *(I)*, pero no *(II)*.
* Sea $y \neq 0$, entonces en *(I)* tenemos:

$$2\left(\frac{x}{y}\right)^2+5\left(\frac{x}{y}\right)-18=0 \Rightarrow \left(\frac{x}{y}-2\right)\left(\frac{2x}{y}+9\right)=0$$

$$\Rightarrow \frac{x}{y}=2 \text{ ó } \frac{2x}{y}=-9 \Rightarrow x=2y \text{ ó } x=-\frac{9}{2}y$$

* Luego en *(II)* tenemos:

$$2y^2+y-12=0 \text{ ó } \frac{9}{2}y^2+y^2-12=0$$

$$y^2=4 \qquad \text{ó} \qquad -7y^2=24$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$y=\pm 2 \qquad \text{No puede ser}$$

* Por lo tanto: $C.S.=\{(4;2) ; (-4;-2)\}$

RPTA : "C"

PROBLEMA 197 :

Sea N el número de pares de números reales $(x;y)$ que son soluciones de la ecuación

$$\sqrt{y-x}+\sqrt{x-y}=x^2+y^2$$

Entonces N es igual a :

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) ∞

RESOLUCIÓN :

* Dado que la ecuación:

$$\sqrt{y-x}+\sqrt{x-y}=x^2+y^2$$

es irracional, entonces calculando el *C.V.A.* (valores admisibles) resultará:

$$y-x \geq 0 \wedge x-y \geq 0$$

$$y \geq x \wedge x \geq y \Rightarrow x=y$$

* Luego reemplazando en la ecuación irracional se obtiene:

$$\sqrt{y-y}+\sqrt{y-y}=y^2+y^2 \Rightarrow 0=2y^2 \Rightarrow y=0$$

$$\Rightarrow C.S.=\{(0;0)\}$$

* Se sabe que N es el número de soluciones con componentes reales, entonces $N = 1$

RPTA : "B"

PROBLEMA 198 :

Si: $\frac{xy}{5x+4y}=6;\frac{xz}{3x+2z}=8;\frac{yz}{3y+5z}=6$

Determine el valor $E=\frac{y}{x-z}$

A) 5 B) $\frac{15}{2}$ C) 10 D) $\frac{25}{2}$ E) 25

RESOLUCIÓN:

$\frac{xy}{5x+4y}=6\Rightarrow 6(5x+4y)=xy$

$\Rightarrow\frac{5x+4y}{xy}=\frac{1}{6}\Rightarrow\frac{5}{y}+\frac{4}{x}=\frac{1}{6}$..................($\beta$)

* Análogamente de las otras dos ecuaciones :

$\frac{2}{x}+\frac{3}{z}=\frac{1}{8}$..($\alpha$)

$\frac{5}{y}+\frac{3}{z}=\frac{1}{6}$..($\theta$)

* De (β) y (θ) se obtiene: $\frac{4}{x}=\frac{3}{z}\Rightarrow\begin{matrix}x=4K\\z=3K\end{matrix}$

* Sustituyendo en (α):

$K=12\Rightarrow\begin{matrix}x=38\\z=36\end{matrix}$

* Luego de (β) resulta:

$y=60\Rightarrow E=\frac{y}{x-z}=\frac{60}{12}=5$

RPTA : "A"

PROBLEMA 199 :

Al resolver , en el conjunto de los números complejos , el sistema.

$\begin{cases}(1+i)z-w=-1-i\text{ ....(I)}\\2iz+(1-i)w=i\text{ ....(II)}\end{cases}$

El valor de $\frac{z}{w}$ es.

A) $-\frac{1}{2}-\frac{i}{6}$ B) $\frac{1}{2}-\frac{i}{6}$ C) $\frac{1}{2}+\frac{i}{6}$ D) $-\frac{1}{6}+\frac{i}{2}$ E) $\frac{1}{6}-\frac{i}{2}$

RESOLUCIÓN:

* Al multiplicar *(I)* por *(1+i)* :

tenemos: $2iz-(1+i)w=-2i$

de (2) : $2iz-(1-i)w=\ \ i$

$-2w=-3i$

$\Rightarrow w=\frac{3i}{2}$

* Luego reemplazando en *(II)* resulta:

$2iz+(1-i)\frac{3}{2}i=i$

$\Rightarrow 2iz+\frac{3}{2}i+\frac{3}{2}=i\Rightarrow 2iz=-\frac{3}{2}-\frac{i}{2}\Rightarrow z=\frac{3}{4}i-\frac{1}{4}$

* Nos piden: $\frac{z}{w}=\frac{1}{2}+\frac{i}{6}$

RPTA : "C"

PROBLEMA 200 :

Al resolver el sistema siguiente :

$\sqrt[3]{x+y+2}-\sqrt{2x-3y-7}=-3$

$2\sqrt[3]{x+y+2}+3\sqrt{2x-3y-7}=14$

se obtiene que el valor de *(x+y)* es:

A) –2 B) –1 C) 0 D) 1 E) 2

RESOLUCIÓN :

* Piden: $x+y$

Multiplicamos por *3* la primera ecuación y sumamos con la segunda ecuación :

$\left.\begin{matrix}3\sqrt[3]{x+y+2}-3\sqrt{2x-3y-7}=-9\\2\sqrt[3]{x+y+2}+3\sqrt{2x-3y-7}=14\end{matrix}\right\}(+)$

$\Rightarrow \not{5}\sqrt[3]{x+y+2}=\not{5}$

$\Rightarrow\sqrt[3]{x+y+2}=1\Rightarrow x+y+2=1\Rightarrow\boxed{x+y=-1}$

RPTA : "B"

PROBLEMA 201 :

Determine tal que $Log_a\sqrt{27}=\frac{-1}{2}$

A) $\frac{1}{243}$ B) $\frac{1}{81}$ C) $\frac{1}{27}$ D) $\frac{1}{9}$ E) $\frac{1}{3}$

RESOLUCIÓN:

* Dado que *a* es base del logaritmo , entonces $a>0$ y $a\neq 1$.

* Si : $Log_a\sqrt{27}=-\frac{1}{2}$

* Entonces :

$a^{-\frac{1}{2}}=\sqrt{27}=(27^{-1})^{-1/2}\Rightarrow a=\frac{1}{27}$

RPTA : "C"

PROBLEMA 202:

Si $Log_a bc=x^n, Log_b ac=y^n, Log_c ab=z^n$, para todo $n\in N$. Calcule el valor de

$E=\frac{1}{n}\left[\sqrt{\frac{1}{x^n+1}+\frac{1}{y^n+1}+\frac{1}{z^n+1}}\right]$

A) $2n$ B) n C) n^2 D) $1/n$ E) $n/2$

RESOLUCIÓN:

*Agregando 1 a las condiciones :

$Log_a bc+Log_a a=x^n+1\Rightarrow Log_a abc=x^n+1$

$Log_b ac+Log_b b=y^n+1\Rightarrow Log_b abc=y^n+1$

$Log_c ab+Log_c c=z^n+1\Rightarrow Log_a abc=z^n+1$

* Reemplazando e invirtiendo los logaritmos ,se obtendrá :

$$E=\frac{1}{n}\sqrt[n]{Log_{abc}a+Log_{abc}b+Log_{abc}c}$$

$$\Rightarrow E=\frac{1}{n}\sqrt[n]{1}\Rightarrow \boxed{E=\frac{1}{n}}$$

RPTA : "D"

PROBLEMA 203:

Al calcular el logaritmo de $a^m\sqrt[n]{a}$ en base $a^n\sqrt[m]{a}$; donde $m,n>0, a>0$ y $a\neq 1$; obtenemos

A) $\frac{n}{m}$ B) mn C) $\frac{m}{n}$ D) m E) n

RESOLUCIÓN:

* Lo pedido es :

$$Log_{a^n\sqrt[m]{a}}a^m\sqrt[n]{a}=Log_{a^{n+\frac{1}{m}}}a^{m+\frac{1}{n}}$$

$$=\frac{m+\frac{1}{n}}{n+\frac{1}{m}}Log_{a^a}=\frac{\frac{mn+1}{n}}{\frac{mn+1}{m}}=\frac{m}{n}$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 204 :

La suma de los cuadrados de dos números es *29* y la suma de sus logaritmos (en base *10*) es *1*. Dichos números son:

A) –2 y 5 B) 4 y 5 C) 2 y –5
D) 2 y 5 E) 3 y 20

RESOLUCIÓN:

* Sean los números *m* y *n*.
* Datos: $\underbrace{m^2+n^2=29}_{(I)}\wedge\underbrace{Log\,m+Log\,n=1}_{(II)}$
* De *(II)* se tiene que: $mn=10$ y $m>0\,;\,n>0$
* Además : $(m+n)^2=m^2+n^2+2mn$
* Luego reemplazando se tiene:

$$(m+n)^2=49\Rightarrow m+n=7\Rightarrow m=7-n$$

* Dado que: $mn=10\Rightarrow(7-n)n=10$

$$\Rightarrow n^2-7n+10=0\ \Rightarrow(n-2)(n-5)=10$$

* Entonces : $n=2\Rightarrow m=5$ $n=5\Rightarrow m=2$
* Finalmente , dichos números son: *2* y *5*

RPTA : "D"

PROBLEMA 205 :

El valor de x que satisface la ecuación

$$\sqrt{x+Log_{\sqrt{2}}\sqrt[4]{\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{2}}}}=\sqrt{Log_{\sqrt{\sqrt{2}}}\sqrt[4]{\sqrt{2\sqrt{2}}}}$$

es :

A) 2/8 B) 3/8 C) 1/2 D) 5/8 E) 3/4

RESOLUCIÓN:

* Sabemos que la ecuación es equivalente a:

$$x+Log_2\left(2^{\frac{3}{8}}\right)=Log_2\left(2^{\frac{3}{4}}\right)$$

* Luego efectuando tenemos:

$$x+\frac{3}{8}=\frac{3}{4}\Rightarrow x=\frac{3}{8}$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 206:

Dado el siguiente sistema :

$$\begin{cases}a^{Log(ax)}=b^{Log(by)}\\x^{Logx}=y^{Logy}\end{cases}(x\neq y,a>0,b>0)$$

determine el valor de $x-y$.

A) $\frac{a^2+b^2}{ab}$ B) $\frac{a^2-b^2}{ab}$ C) $\frac{b-a}{ab}$ D) $\frac{a-b}{ab}$ E) $\frac{b^2-a^2}{ab}$

RESOLUCIÓN:

* Aplicando logaritmo a la 1ra ecuación:

$$Log\,a[Log+Logx]=Logb[Logb+Logy]$$

$$-Log^2a-Log^2b=(Logy)(Logb)-(Logx)(Loga)............(I)$$

* Aplicando logaritmo a la 2da ecuación :

$$Log^2x=Log^2y\Rightarrow\begin{cases}Logx=Logy\Rightarrow x=y\\Logx=-Log\,y\Rightarrow x=\frac{1}{y}\end{cases}$$

* Como: $x\neq y\Rightarrow x=\frac{1}{y}$
* En (*I*):

$$(Loga+Logb)(Loga-Logb)=(Logy)(Loga+Logb)$$

*Entonces: $y=\frac{a}{b}\Rightarrow x-y=\frac{b}{a}-\frac{a}{b}=\frac{b^2-a^2}{ab}$

RPTA : "B"

PROBLEMA 207 :

El valor de la suma :

$$\sum_{K=1}^{n+1}Log\left[2^{2^K}tan^K(\pi/4+K\pi)\right]\text{ es}$$

A) $(2^n-1)Log(2)$ B) $2(2^{n+1}-1)Log(2)$
C) $2(2^{n+1}+1)Log(2)$ D) $2(2^n-1)Log(2)$
E) $2(2^n+1)Log(2)$

RESOLUCIÓN:

*Como se sabe que:

$tan\left(\frac{\pi}{4}+4K\right)=1;\forall K\in<\mathbb{Z}$, entonces la suma pedida: $S=\sum\limits_{K+1}^{n+1}Log2^{2K}=\sum\limits_{K+1}^{n+1}2^K Log2$

* Aplicando el teorema de la sumatoria:

$S = Log2\sum_{K+1}^{n+1} 2^K = Log\underbrace{(2+2^2+2^3+......+2^{n+1})}_{2\left(\frac{2^{n+1}-1}{2-1}\right)}$

$\Rightarrow S = 2(2^{n+1}-1)Log\,2$

RPTA : "B"

PROBLEMA 208 :

Dada la siguiente ecuación :

$$\left[Log_{sen(x)^2}\right]\left[Log_{sen^2(x)}\left(\frac{1}{256}\right)\right]+1=0$$

calcule : $sen(x)$

A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{3}$ D) $\frac{1}{5}$ E) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

RESOLUCIÓN:

* De lo dado , se obtiene :

$(Log_{senx}2)(Log_{sen^2x}1/256) = -1$

$senx0 \wedge senx \neq 1$ ....(I)

* Transformando la ecuación se reduce a:

$(Log_{senx}2)(Log_{senx}2^{-4}) = -1$

$\Rightarrow (Log_{senx}2)^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow Log_{senx}2 = -\frac{1}{2} \vee Log_{senx}2 = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow senx = \frac{1}{4} \vee senx = 4 \Rightarrow senx = \frac{1}{4} \vee x \in \phi$

* Este último de (I), entonces: $senx = \frac{1}{4}$

RPTA : "A"

PROBLEMA 209 :

El conjunto de soluciones reales de la ecuación

$10\ 000^{Logx} - 4x100^{Logx} + 4 = 0$

A) ϕ B) $\{\sqrt{2}\}$ C) $\{1\ ;\ \sqrt{2}\}$

D) $\{-\sqrt{2}\ ;\ \sqrt{2}\}$ E) $\{1\ ;\ \sqrt{2}\ ;\ -\sqrt{2}\}$

RESOLUCIÓN:

* No se debe olvidar que: $10^{Logx} = x\ ;\ \forall x \in R^+$

* Resolviendo la ecuación, se obtiene:

$(10^{Logx})^4 - (10^{Logx})^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow x^4 - 4 + x^2 + 4 = 0$

$\Rightarrow (x^2-2)^2 = 0^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2 = 0$

$\Rightarrow (x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2}) = 0 \Rightarrow \{x = -\sqrt{2} \vee x = \sqrt{2}\}$

* Sabemos que:

$x \in R^+ \Rightarrow x = \sqrt{2} \Rightarrow C.S. = \{\sqrt{2}\}$

RPTA : "B"

PROBLEMA 210 :

Al resolver la ecuación:

$x + Log_{1424}(1+2^x) = xLog_{1424}712 + Log_{1424}72$

entonces podemos decir , que el número de soluciones es :

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

RESOLUCIÓN:

* Transformando la ecuación tenemos:

$x + Log_b(2^x+1) = xLog_b\left(\frac{b}{2}\right) + Log_b72$,

* De donde: $b=1424$

$x + Log_b(2^x+1) = xLog_bb - xLog_b2 + Log_b72$

$\Rightarrow Log_b(2^x+1) = Log_b72 - log_b2^x$

$\Rightarrow Log_b(2^x+1) = Log_b\left(\frac{72}{2^x}\right)$

$\Rightarrow 2^x + 1 = \frac{72}{2^x} \Leftrightarrow (2^x)^2 + 2^x - 72 = 0$

$\Rightarrow (2^x+9)(2^x-8) = 0;\ 2^x+9>0$

$\Rightarrow 2^x = 8 \Rightarrow x = 3$

* Entonces , $C.S.=\{3\}$, por lo tanto , la ecuación tiene una solución.

RPTA : "B"

PROBLEMA 211 :

Del sistema $3^{x+1} - 2^y = 11 \wedge 3^x + 2^{y+1} = 41$

Halle Log_yx.

A) 1/2 B) 2/3 C) 3/2 D) 2 E) 4

RESOLUCION :

* Dado:

$3(3^x) - 2^y = 11$ ....(I)

$3^x + 2(2^y) = 41$.........(II)

*De (I)× 2 + (II): $7(3^x) = 63 \Rightarrow 3^x = 9 \Rightarrow x = 2$

* Al reemplazar en (I) resulta:

$27 - 2^y = 11 \Rightarrow 2^y = 16 \Rightarrow y = 4$

* Por tanto : $Log_yx = Log_42 = \frac{1}{2}$

RPTA : "A"

PROBLEMA 212 :

Halle las raíces en la siguiente ecuación

$$\sqrt{Log\,x} = Log\sqrt{x}$$

A) $x_1=1;\ x_2=10^4$ B) $x_1=10^{-2};\ x_2=10^2$

C) $x_1=10^{-1};\ x_2=10^3$ D) $x_1=10^{-1};\ x_2=10^2$

E) $x_1=1\ ;\ x_2=10^5$

RESOLUCIÓN:

I) C.V.A.: $Logx \geq 0 \wedge x>0$

$x \geq 1 \wedge x>0$

$\Rightarrow x \geq 1 \Rightarrow C.V.A. = [1;+\infty\rangle$

II) Elevando al cuadrado la ecuación.

$Log\,x=\left(Log\,x^{\frac{1}{2}}\right)^2 \Rightarrow Log\,x=\left(\frac{1}{2}Log\,x\right)^2$

$\Rightarrow 0=Log^2x-4Log\,x \Rightarrow 0=Log\,x[Log\,x-4]$

$\Rightarrow Log\,x=0 \vee Log\,x=4 \Rightarrow x=1 \vee x=10^4$

$Sp=\{1;10^4\}$ (Sp: solución particular)

$C.S.=C.V.A.\cap Sp=\{1;10^4\}$

RPTA : "A"

PROBLEMA 813 :

Dada la siguiente ecuación :

$$Log(2x-1)^n+Log(x-1)^{10^{Log\,n}}=n$$

Halle x , sabiendo que n es cualquier entero positivo y log es el logaritmo en base 10.

A)6 B)3 C)4 D)2 E) $\frac{3}{2}$

RESOLUCIÓN:

* Como: $Log(2x-1)^n+Log(x-1)^{10^{Log\,n}}=n$

* Entonces se tiene:

$Log(2x-)^n+Log(x-1)^n$ ....(I)

* dado que n es cualquier número entero positivo.

$\Rightarrow \underbrace{(2x-1>0 \wedge x-1>0)}_{x>1}$ ....(II)

* De (I) obtenemos:

$\not{n}Log(2x-1)+\not{n}Log(x-1)=\not{n}$

$\Rightarrow Log_{10}(2x-1)(x-1)=1 \Rightarrow (2x-1)(x-1)=10$

$2x^2-3x-9=0$

$2x \quad 3$

$x \quad -3$

$\Rightarrow x=\frac{-3}{2} \vee x=3$

* Finalmente teniendo en cuenta (II) resulta que: $x = 3$

RPTA : "B"

PROBLEMA 814 :

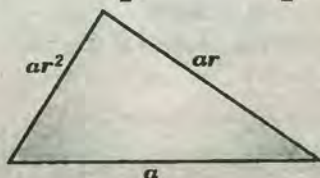
La medida de los lados de un triángulo está en progresión geométrica de razón r, lo verdadero es :

A) $1<r$ B) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}<r<1$ C) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}<r$

D) $0<r<\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ E) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}<r<\frac{\sqrt{5}+1}{2}$

RESOLUCIÓN

* Si: $0<r<1$



$a-ar<ar^2<ar+a$

$\Rightarrow 1-r<r^2<r+1$

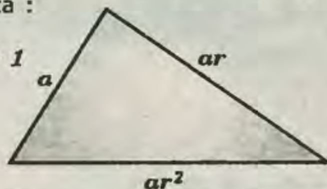
*Resolviendo: $r\in\left\langle\frac{\sqrt{5}-1}{2};\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right\rangle$

* Restringiendo :

$r\in\left\langle\frac{\sqrt{5}-1}{2};1\right\rangle$....$CS_1$

* Cuando $r=1$ no se forma una progresión geométrica :

* Si : $r>1$



$ar-a<ar^2<ar+a \Rightarrow r-1<r^2<r+1$

* Resolviendo : $r\in\left\langle\frac{1-\sqrt{5}}{2};\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\rangle$

* Restringiendo al intervalo analizado :

$r\in\left\langle\frac{\sqrt{5}-1}{2};1\right\rangle$....$CS_2$

* Por haber analizado en secciones disjuntas :

$r\in\left\langle 1;\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\rangle\cup\left\langle\frac{\sqrt{5}-1}{2};1\right\rangle \Rightarrow r\in\left\langle\frac{\sqrt{5}-1}{2};\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right\rangle-\{1\}$

RPTA : "E"

PROBLEMA 815 :

Sean $(a_1\,;\,a_2\,;\,a_3)$ y $(b_1\,;\,b_2\,;\,b_3)$ los tres primeros términos de una sucesión aritmética y geométrica , respectivamente , tales que.

$$a_2-b_2=|a_3-b_3|=0,4$$

Si la razón aritmética es 2 y la razón geométrica es $1/2$, entonces el valor de b_1 asociado al menor valor posible de a_1 es.

A) –4,8 B) –8 C) –11,2 D) –14,4 E) –17,6

RESOLUCION :

$$(a_1\,;a_2\,;a_3)=(a_1\,;a_1+2\,;a_1+4)$$

$$(b_1\,;b_2\,;b_3)=\left(b_1\,;\frac{1}{2}b_1\,;\frac{1}{4}b_1\right)$$

* Si: $a_3-b_3\geq 0$

$a_1+2-\frac{1}{2}b_1=a_1+4-\frac{1}{4}b_1=\frac{4}{10}$

$\therefore b_1=-8$ donde $a_1=-5,6$

* Si: $a_3-b_3<0$

$a_1+2-\frac{1}{2}b_1=-a_1-4+\frac{1}{4}b_1=\frac{4}{10}$

$\Rightarrow b_1=-11,2$ donde $a_1=-7,2$

* Eligiendo $a_1 = -7,2$ es el menor valor de a entonces b_1 será: $-11,2$

RPTA : "C"

PROBLEMA 216 :

La suma de tres términos consecutivos de una progresión geométrica es *13*. Sabiendo que si los dos primeros términos se incrementan en dos unidades y se disminuye en la misma cantidad al tercero, los números forman una progresión aritmética. Determine la razón de la progresión geométrica decreciente.

A) 1/3 B) 1/2 C) 2/3 D) 2 E) 3

RESOLUCION

* Piden: q
* Por ser P.G. Decreciente $0 < q < 1$
* Del dato P.G. $\div t_1 : t_1q : t_1q^2$, donde: q = razón.
* Nos dan: $t_1 + t_1q + t_1q^2 = 13$
* Despejamos t_1: $t_1 = \dfrac{13}{1+q+q^2}$
* Luego: P.A. $\div t_1 + 2 . t_1q + 2 . t_1q^2 - 2$
* Entonces: $t_1q + 2 = \dfrac{t_1 + 2 + t_1q^2 - 2}{2}$
* Efectuando: $t_1(1 - 2q + q^2) = 4$ ... @
* Reemplazando: t_1 en @

$$\left(\frac{13}{1+q+q^2}\right)(1-2q+q^2) = 4$$

* Reduciendo: $3q^2 - 10q + 3 = 0$
* Factorizando: $(3q - 1)(q - 3) = 0$
* Tenemos: $q_1 = \frac{1}{3} \vee q_2 = 3 \therefore q = \frac{1}{3}$ por ser decreciente

* Pero la *P.G.* es decreciente; entonces, $q = \dfrac{1}{3}$

RPTA : "A"

PROBLEMA 217 :

Sea la sucesión $\{a_n\}$ $(n > 0)$ definida por: $a_n = Log\ p$, si existe un primo p y un k entero no negativo tal que $n = p^k$ y $a_n = 0$ en cualquier otro caso. Entonces, la suma de los términos a_m, donde m es un divisor (positivo) de *72*, es igual a :

A) Log 8 B) Log 24 C) Log 36 D) Log72 E) Log 144

RESOLUCIÓN:

* Según las condiciones del problema:
* Nos piden la suma de los términos a_m donde m es un divisor (positivo) de *72*.
* Luego los divisores de *72* son :

1;2 ;3 ;4 ;6 ;8 ; 9 ; 12 ; 18 ; 24 ; 36 ; 72

* Usando la definición de a_n tenemos:

$a_1 = Log\ p$; $(1 = p^0$ para algún o primo$)$

$a_2 = Log\ 2$; $(2 = 2^1)$

$a_3 = Log\ 3$; $(3 = 3^1)$

$a_4 = Log\ 2$; $(4 = 2^2)$

$a_6 = 0$

$a_8 = Log\ 2$; $(8 = 2^3)$

$a_9 = Log\ 3$; $(9 = 3^2)$

$a_{12} = 0 ; a_{18} = 0 ; a_{24} = 0$

$; a_{36} = 0 ; a_{72} = 0$

* Finalmente :

$a_1+a_2+a_3+a_4+a_6+a_8+a_9+a_{12}+a_{18}+a_{24}+a_{36}+a_{72} =$ $Log\ p + 3Log2 + 2Log3 = Log72p$

* Por tanto, para $p = 2$; la suma es *Log 144*.

RPTA: "E"

PROBLEMA 218 :

La solución de la inecuación :

$2e^{-2x} + e^{-3}x < 3e^{-x}$, es el conjunto.

A) $\mathbb{R}$ B) $\mathbb{R} - \{0\}$ C) $\langle 0;\infty\rangle$ D) $\langle 0;\infty\rangle$ E) $\langle -\infty;0\rangle$

RESOLUCIÓN :

* Haciendo que : $y = e^{-x} / y > 0$
* Al reemplazar y operando :

$$y^3 + 2y^2 - 3y < 0 \Rightarrow y(y^2 + 2y - 3) < 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{y(y+3)}_{es\ positivo}\ (y-1) < 0 \Rightarrow y - 1 < 0 \Rightarrow y < 1$$

* Al sustituir el cambio : $e^{-x} < e^0$
* Tomando log en base e : $-x < 0$
* Multiplicando por (-1) : $x > 0$

RPTA : "D"

PROBLEMA 219 :

La suma de la serie : $\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{15} + ... + \dfrac{1}{k^2 - 1} + ...$ tiende a :

A) ∞ B) $\dfrac{1}{4}$ C) $\dfrac{3}{4}$ D) $\dfrac{1}{2}$ E) 1

RESOLUCIÓN:

* Sabemos que:

$$S = \frac{1}{3} + \frac{1}{8} + \frac{1}{15} + \frac{1}{24} + ... + \frac{1}{k^2 - 1} + ...$$

* Luego analizando S , resultará:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{1}{3}=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}\right)\\ \frac{1}{8}=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{8}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)\\ \frac{1}{15}=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{15}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)\\ \frac{1}{24}=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{24}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)\\ \vdots \qquad\qquad \vdots\\ \frac{1}{k^2-1}=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{k^2-1}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k+1}\right)\end{array}\right\}(+)$$

$$\Rightarrow S=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right)\Rightarrow S=\frac{3}{4}$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 220 :

Determine el valor de:

$$S(n)=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{2}{4k^2-1}+\frac{1}{2n+1}\right]$$

A) $\frac{n}{2n+1}$ *B)* $\frac{2n}{3n+1}$ *C)* $\frac{3n}{2n+1}$ *D)* $\frac{2n-1}{2n+1}$ *E)* $\frac{n+1}{2n+1}$

RESOLUCIÓN:

* Separando en sumandos la expresión dada:

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2}{4k_2-1}\right)+\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2n+1}\right)$$

$$\Rightarrow S_n=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{2}{(2k+1)(2k-1)}\right]+n\left(\frac{1}{2n+1}\right)$$

$$\Rightarrow S_n=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{(2k-1)}-\frac{1}{(2k+1)}\right]+n\frac{1}{2n+1}$$

$$\Rightarrow S_n=1-\frac{1}{2n+1}+\frac{n}{2n+1}=\frac{2n+1-1+n}{2n+1}=\frac{3n}{2n+1}$$

RPTA:"C"

PROBLEMA 221 :

Sea $P(x)=x^2+x+1$ y la sucesión $S_n(x)=\sum_{k=0}^{n}[P(x)]^k$

Entonces el menor valor es $S_n(x)$ cuando n es arbitrariamente grande , es :

A) 0 *B) 4* *C) 8*

D) arbitrariamente muy grande *E) no existe*

RESOLUCIÓN :

* $S_n(x)$, cuando $n\Rightarrow+\infty$, toma su mínimo valor si $P(x)$ es mínimo.

* Entonces , completando cuadrados se tiene:

$$P(x)=x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$$

$$S_n(x)=\sum_{k=0}^{n}(P(x))^k=\sum_{k=0}^{n}\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]^k$$

* Luego , el menor valor de S_n , cuando $n\Rightarrow+\infty$, ocurre si $x=-1/2$, es decir :

$$S_n(x)_{mínimo}=\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{3}{4}\right)^k=\underbrace{1+\left(\frac{3}{4}\right)+\left(\frac{3}{4}\right)^2+\left(\frac{3}{4}\right)^3+\ldots}_{suma\ límite}$$

$$\Rightarrow S_n(x)_{mínimo}=\frac{1}{1-\frac{3}{4}}\Rightarrow S_n(x)_{mínimo}=4$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 222 :

El valor de la expresión

$$D=\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{1}{4}-\frac{2}{9}+\frac{1}{8}-\frac{2}{27}+\ldots \text{es}$$

A) −1 *B) −16* *C) 0* *D)* $\frac{1}{6}$ *E) 1*

RESOLUCIÓN:

* Sea: la **P.G.** $\because a_1;a_2;a_3;\ldots$ de razón r
* Además se sabe que:

$$a_1+a_2+\ldots=\frac{a_1}{1-r};|r|<1$$

* Aplicando en el problema , resulta:

$$D=\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{1}{4}+\frac{2}{9}+\frac{1}{8}+\frac{2}{27}+\ldots$$

$$=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\ldots\right)-\left(\frac{2}{3}+\frac{2}{9}+\frac{2}{27}+\ldots\right)=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}-\frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{1}{3}}$$

$$\Rightarrow D=1-1=0$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 223 :

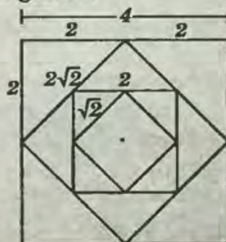
En un cuadrado de lado 4 se inscribe otro cuadrado uniendo los puntos medios de los lados de dicho cuadrado. Repetimos este proceso indefinidamente. Entonces la suma de los perímetros de todos los cuadrados así construidos será:

A) $64(2-\sqrt{2})$ *B)* $48(2-\sqrt{2})$ *C)* $32(1+\sqrt{2})$

D) $16(2+\sqrt{2})$ *E) No se puede calcular*

RESOLUCIÓN:

* Los lados de los cuadrados considerados en el problema tienen las siguientes medidas como se presentan en el gráfico:



* Entonces , la suma de los perímetros es:

$$S=4(4+2\sqrt{2}+2+\sqrt{2}+...)=4\left(\frac{4}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}\right)=\frac{16\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}=16\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)$$

$\left[\text{serie geométrica de razón}\frac{1}{\sqrt{2}}\right]\Rightarrow S=16(2+\sqrt{2})$

RPTA : "D"

PROBLEMA 224 :

Como se indica en la figura adjunta se construye progresivamente circunferencias tangentes de radio cada vez menor , tangentes a dos semicircunferencias de igual radio R. Use dicha construcción para determinar la suma de la serie infinita.

$$\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+...+\frac{1}{n\times(n+1)}+...$$



A) $2R$ B) R C) $\frac{R}{2}$ D) $\frac{1}{2}$ E) 1

RESOLUCIÓN:

* Piden determinar la suma:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{2\times 4}+...+\frac{1}{n(n+1)}+...$$

* Luego hallamos la suma parcial se tiene:

$$S_n=\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+...+\frac{1}{n(n+1)}$$

$$\Rightarrow S_n=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+...+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$\Rightarrow S_n=1-\frac{1}{n+1}$$

* Finalmente tomamos límite:

$$\lim_{n\to+\infty}S_n=\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=1$$

RPTA : "E"

PROBLEMA 225 :

Para la sucesión definida por:

$S_K=\sum_{n=1}^{2^K}\left(\frac{1}{2^K+n}\right),K\geq 1$,se puede afirmar :

A) $1\leq S_K$ B) $\frac{1}{4}\leq S_K<\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{8}\leq S_K\leq\frac{1}{2}$

D) $\frac{1}{2}\leq S_K<1$ E) $\frac{1}{2}<S_K\leq 1$

RESOLUCIÓN:

* Desarrollando la sumatoria se tiene:

$$S_k=\frac{1}{2^k+1}+\frac{1}{2^k+2}+\frac{1}{2^k+3}+\frac{1}{2^k+4}+\frac{1}{2^k+5}+...+\frac{1}{2^k+2^k};k\geq 1$$

* Para números positivos :

Si : $a_1<a_2<a_3<.........<a_n$

$Min_{(a_1;a_2;......a_n)}<M.A.<Máx_{(a_1;a_2;....a_n)}$

$$\Rightarrow\frac{1}{2^{K+1}+1}<\frac{S_K}{2^K}<\frac{1}{2^K+1}\Rightarrow\frac{1}{2}<S_K<\frac{2^K}{2^K+1}$$

* Pero: $K\to\infty$

$\Rightarrow\boxed{\frac{1}{2}<S_K\leq 1}$

RPTA : "E"

PROBLEMA 226 :

Sea la sucesion $s_0, s_1, s_2,..., s_k...$ donde $s_0=49,\ s_1=7,\ s_2=\sqrt{7},...s_k=7^{\frac{1}{k(k-1)}}$,para $k\leq 2$.

Entonces la suma de las cifras del producto de todos los términos de la sucesión será igual a.

A) 3 B) 4 D) 6 C) 5 E) 7

RESOLUCIÓN:

* Como: $S_0=7^2$

$S_1=7^1$

$S_2=7^{\frac{1}{2}}=7^{\frac{1}{1\times 2}}$

$S_3=7^{\frac{1}{3\times 2}}=7^{\frac{1}{2\times 3}}$

⋮

$S_k=7^{\frac{1}{k(k-1)}}=7^{\frac{1}{(k-1)k}}$, para $k\geq 2$

* Nos piden:

$$7^2\times 7^1\times 7^{\frac{1}{1\times 2}}\times 7^{\frac{1}{2\times 3}}\times 7^{\frac{1}{3\times 4}}...7^{\frac{1}{k(k-1)}}...$$

* Entonces el producto de los términos de la sucesión:

$$=7^{2+1+\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+...+\frac{1}{k(k-1)}+...}$$

$$=7^{2+1+\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+...+\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k-1}\right)+...}$$

$$=7^{2+1+1}=7^4=2401$$

* La suma de las cifras de este producto es: 7

RPTA : "E"

PROBLEMA 227 :

En la sucesión de números reales $x_{k+1}=\frac{20,25+x_k^2}{2x_k}$ para $k=0;\ 1;\ 2...$se sabe que $x_5=4,5$; entonces x_{105} será igual a.

A) 4,5 B) 4,55 C) 4,555
D) 4,5555 E) 4,555555

RESOLUCIÓN:

* Dada la suceción: $x_{k+1}=\dfrac{20,25+x_k^2}{2x_k}$

* Por dato: $x_5=4,5$

* Entonces, para $k=5$ resulta:

$$x_6=\frac{(4,5)^2+(x_5)^2}{2x_5}\Rightarrow x_6=\frac{(4,5)^2+(4,5)^2}{2(4,5)}=4,5$$

* Para $k=6$ se obtiene: $x_7=\dfrac{(4,5)^2+x_6^2}{2x_6}=4,5$

* Se deduce que la sucesión es constante , es decir: $x_k=4,5;\forall k\in\mathbb{Z}_0^+\Rightarrow x_{105}=4,5$

RPTA : "A"

PROBLEMA 228 :

Dada la sucesión de término general :

$$S_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$$

entonces se puede decir que.

A) S_n *converge a 0* B) S_n *converge a 1*
C) S_n *converge a 2* D) S_n *converge a n*
E) S_n *diverge*

RESOLUCIÓN:

* Dado $S_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$

* Por la igualdad de la diferencia de cuadrados, expresamos:

$$S_n=\frac{(n+1)-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

* Luego calculando el límite de S_n se tiene:

$$\lim_{x\to\infty}S_n=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=0$$

* Por definición de convergencia:
S_n converge a 0

RPTA : "A"

PROBLEMA 229 :

Sea (a_n) la sucesión cuyo término general es $a_n=\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}$.

Entonces podemos afirmar que.

A) a_n *diverge a* ∞ B) a_n *converge a n*
C) a_n *converge a 1* D) a_n *converge a 0*
E) a_n *converge a* $-\infty$

RESOLUCIÓN:

* $a_n=\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}$ =

$$\lim_{x\to\infty}a_n=\lim_{x\to\infty}(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n})$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to\infty}a_n=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n})(\sqrt[3]{n+1}^2+\sqrt[3]{n+1}\sqrt[3]{n}+\sqrt[3]{n}^2)}{\sqrt[3]{n+1}^2+\sqrt[3]{n+1}\sqrt[3]{n}+\sqrt[3]{n}^2}$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to\infty}a_n=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n+1}^2+\sqrt[3]{n+1}\sqrt[3]{n}+\sqrt[3]{n}^2}=0$$

$$\Rightarrow 0\le a_n=\frac{1}{\sqrt[3]{n+1}^2+\sqrt[3]{n+1}\sqrt[3]{n}+\sqrt[3]{n}^2}\le\frac{1}{\sqrt[3]{n}^2}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{\sqrt[3]{n}^2}\longrightarrow 0,\ cuando\ n\longrightarrow\infty$$

* Por lo tanto , (a_n) converge a 0

RPTA :"D"

PROBLEMA 230 :

Sea la sucesión definida por :

$b_{n+1}=b_n+\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$, $n\in\mathbb{N}$, donde $b_1=-\dfrac{1}{2}$

Entonces la sucesión converge al valor:

A) $-\dfrac{1}{2}$ B) 0 C) $\dfrac{1}{3}$ D) $\dfrac{1}{2}$ E) 1

RESOLUCIÓN :

*Debemos recordar :

Teorema:

$$\lim_{n\to\infty}b_{n+1}=\lim_{n\to\infty}b_n=L$$

Suma límite: $S=\dfrac{t_1}{1-q};|q|<1$

* Se tiene :

$$b_1=-\frac{1}{2}$$

$$b_2=-\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}\right)^1$$

$$b_3=-\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}\right)^1+\left(\frac{1}{3}\right)^2$$

$$b_4=-\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}\right)^1+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^3$$

$\vdots$

$$b_n=-\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}\right)^1+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^3+\dots+\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

* Para determinar el valor de convergancia tomamos límite:

$$\lim_{n\to\infty}b_n=-\frac{1}{2}+\underbrace{\left(\frac{1}{3}\right)^1+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^3+\dots}_{serie\ geométrica}$$

$$\Rightarrow\lim_{n\to\infty}b_n=-\frac{1}{2}+\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=0$$

*Entonces , la sucesión $\{b_n\}$ converge a 0.

RPTA : "B"

PROBLEMA 231 :

Sean las sucesiones :

$b_{n+1} = b_n + 4$ con $b_1=5$

$c_{n+1} = -3c_n$ con $c_1=5$; $n \in N$

Entonces el valor de $\frac{b_n}{c_n}$, para n suficientemente grande, se aproxima a :

A) 4/3 B) -4/3 C) 3/4 D) 0 E) 1

RESOLUCIÓN:

* Hallando la Ley de formación de b_n:

$b_n+1= b_n+4$ $b_1=5$ (dato)

$n=1$ $b_2 = b_1 + 4 = 5 + 4\times 1$

$n=1$ $b_3 = b_2 + 4 = 5 + 4\times 2$

⋮ ⋮

$b_n = b_{n-1} + 4 = 5 + 4(n-1)$

* Se obtiene, término enésimo $b_n=5+4(n-1)$
* Luego hallamos la Ley de formación de C_n:

$n=1....c_2=-3c_1=-3x5=5.(-3)^{2-1}$

$n=2....c_3=-3c_2=-3(-3x5)=5x(-3)^{3-1}$

resulta $:c_n=5(-3)^{n-1}$

* Luego : $\frac{b_n}{c_n}=\frac{5+4(n-1)}{5(-3)^{n-1}}$

*Asumiendo que $a_n=\frac{b_n}{c_n}$ entonces

$a_n=\frac{5+4(n-1)}{5(-3)^{n-1}}$.

* Por el criterio de la razón analizamos la convergencia:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{5+4n}{5\times(-3)^n}}{\frac{5+4(n-1)}{5\times(-3)^{n-1}}}\right| \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-3)^{-1}(5+4n)}{5+4(n-1)}\right| = \frac{1}{3}<1$$

* De aquí resulta, que la sucesión converge a 0

RPTA : "D"

PROBLEMA 232 :

Sean a y b números reales. Si sé cumple que:

$x_{n+1}=ax_n+b$, $n=0;1;2;...,$

entonces:

A) $x_n=n(x_0+b)$, si $a=1$ y $x_n=a^n x_0+\left(\frac{1-a^n}{1-a}\right)b$, si $a\neq 1$

B) $\{x_n=x_0+nb$, si $a=1\}$ y $\left\{x_n=a^n x_0+\left(\frac{1-a^n}{1-a}\right)b, \text{ si } a\neq 1\right\}$

C) $x_n=nx_0+b^n$, si $a=1$ y $x_n=(1-n)x_0+a^n b$, si $a\neq 1$

D) $xn=x_0^n+nb$, si $a=1$ y $xn=ax_0+\left(\frac{1+a^n}{1+a}\right)b$, si $a\neq 1$

E) $xn=(1-n)x_0-nb$, si $a=1$ y $x_n=(1-a)x_0+b$, si $a\neq 1$

RESOLUCIÓN:

* Aplicamos induccion :

*Si $n=0$: $x_1=ax_0+b$

*Si $n=1$: $x_2=ax_1+b$

$\Rightarrow x_2=a(ax_0+b)+b=a^2x_0+b(a+1)$

*Si $n=2$: $x_3=ax_2+b$

$\Rightarrow x_3=a(a^2x_0+b(a+1))+b=a^3x_0+b(a^2+a+1)$

*Si $n=3$: $x_4=ax_3+b$

$\Rightarrow x_4=a^4x_0+b(a^3+a^2+a+1)$

⋮

$\Rightarrow x_n=a^nx_0+b(a^{n-1}+a^{n-2}+...+a^2+a+1)....(I)$

* De (I) :

* Si $a=1 \Rightarrow x_n=x_0+b\underbrace{(1+1+1+...+1)}_{n \text{ veces}}=x_0+nb$

* Si $a\neq 1 \Rightarrow x_n=a^nx_0+\left(\frac{1-a^n}{1-a}\right)b$

RPTA : "B"

PROBLEMA 233 :

Sea la sucesión definida mediante al $a_1=\sqrt{2}, a_n=\sqrt{2+a_{n-1}}$ Podemos entonces afirmar que.

A) a_n *converge para 2*

B) a_n *es decreciente*

C) a_n *está acotada por 1*

D) a_n *no converge*

RESOLUCIÓN :

* De las sucesión , se tiene:

$$(a_n)=\left\{\sqrt{2};\sqrt{2+\sqrt{2}};\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}};...\right\}$$

* Se aprecia que es una sucesión creciente (monótona):

Veamos que es acotada (por inducción)

* Luego probamos que:

$a_n<2;\forall n\in N$ $a_1=\sqrt{2}<2$

* Entonces , supongamos que :

$a_n<2 \Rightarrow 2+a_n<4$

$\sqrt{2+a_n}<2 \Rightarrow a_{n+1}<2$

* Resulta que es acotada , entonces (a_n) es convergente por ser monótona y acotada.
* Asumiendo que el $Lím\ a_n= L$, entonces:

$L=\sqrt{2+L}; L>0 \Rightarrow L^2=2+L \Rightarrow L=2$

* Por tanto, $(a_n)_{n\in N}$ converge a 2

RPTA : "A"

PROBLEMA 234 :

Sean las sucesiones S y P donde:

$S_0=1; S_1=0; S_2=0; S_3=\frac{1}{2}; ...; S_{2k-1}=\frac{1}{k}; S_{2k}=0 \ ; k \geq 2$

$P_0=1; \ P_1=7; P_2=0; P_3=\frac{1}{2}; ....; P_{2k-1}=\frac{1}{k}; P_{2k}=1; \ k \geq 2$

Entonces los limites a los que convergen las sucesiones S y P son respectivamente:

A) 0 ; 0 *B) 0 ; 1* *C) No existe; No existe*
D) No existe ; 1 *E) 0 ; No existe*

RESOLUCIÓN:

* Recordar que si la sucesión converge al punto a , entonces , todas las subsucesiones convergan al punto a.

* En $(S_k)_{k\in N}$, tenemos que :

$S_0=1; S_1=0; S_2=0; \quad S_3=\frac{1}{2};...$

$S_{2k-1}=\frac{1}{k}; S_{2k}=0; \ k \geq 2$

* Tomamos límites para analizar la convergencia:

$$\lim_{k\to\infty} S_{2k-1}=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}=0 \ \text{ y } \ \lim_{k\to\infty} S_{2k}=\lim_{k\to\infty} 0=0$$

* Dado que los límites son iguales de las dos subsucesiones ; entonces , $(S_k)_{k\in N}$ converge a 0. Análogamente , en la sucesión $(P_k)_{k\in N}$ se tiene

$P_0=1; P_1=7; P_2=0; P_3=\frac{1}{2}; ...; P_{2k-1}=\frac{1}{k}$

$P_{2K}=1; k \geq 2$

* De nuevo tomando límite:

$$\lim_{k\to\infty} P_{2k-1}=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}=0 \wedge \lim_{k\to\infty} P_{2k}=\lim_{k\to\infty} 1=1$$

* Dado que los límites son diferentes de las dos subsucesiones , entonces , el límite de la sucesión $(P_k)_{k\in N}$ *NO EXISTE.*

RPTA : "E"

PROBLEMA 235 :

Sea la sucesión $\{u_n\}$ donde $u_{n-1}=\sqrt{k+u_n}$, $k>0$. Suponiendo que la sucesión es convergente, calcule el valor al cual converge.

A) $\frac{1+\sqrt{1+4k}}{2}$ B) $\frac{1+\sqrt{1-4k}}{2}$ C) $\frac{1-\sqrt{1+4k}}{2}$

D) $\frac{2-\sqrt{1+4k}}{2}$ E) $\frac{1-\sqrt{1-4k}}{2}$

RESOLUCIÓN:

* Sea L el valor al cual tiende $\{U_n\}$ cuando n tiende a infinito:

$$\lim_{n\to\infty} U_n=L \Rightarrow \lim_{n\to\infty} U_{n+1}=L$$

*Al tomar límite en la regla de recurrencia $U_{n+1}=\sqrt{K+U_n}$, se tiene :

$$\lim_{n\to\infty} U_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{K+U_n}$$

$$\lim_{n\to\infty} U_{n+1}=\sqrt{\lim_{n\to\infty}(K+U_n)}$$

$$\Rightarrow L=\sqrt{K+L} \Rightarrow L>0 \Rightarrow L^2=K+L \Rightarrow L^2-L-K=0$$

$$\Rightarrow L=\frac{1+\sqrt{1+4K}}{2} \ \vee \ L=\frac{1-\sqrt{1-4K}}{2}$$

* Como: $L>0 \Rightarrow \{U_n\}$ converge a $\frac{1+\sqrt{1+4K}}{2}$

RPTA : "A"

PROBLEMA 236 :

Se sabe que el siguiente sistema de ecuaciones:

$$(y^2+6)(x-1)=y(x^2+1)$$
$$(x^2+6)(y-1)=x(y^2+1)$$

tiene un número finito de soluciones reales. Pruebe que el número de soluciones es par.

RESOLUCIÓN:

Notemos primero que el sistema es simétrico en x e y, es decir, si tenemos un par $(a;b)$ que es solución del sistema entonces el par $(b;a)$ también es solución. Luego cada solución $(a;b)$ del sistema nos generará la solución $(b;a)$, la cual es distinta, cuando a y b son distintos. Por lo tanto tenemos un número par de soluciones en este caso. Resta probar que existe un número par de soluciones $(a;b)$ con $a=b$.

Cuando $x=y$, se tiene que :

$(x^2+6)(x-1)=x(x^2+1)$, que implica $x^3-x^2+6x-6=x^3+x$. Simplificando nos queda la ecuación cuadrática $x^2-5x+6=0$, o equivalentemente, $(x-2)(x-3)=0$ cuya soluciones son $x=2$ y $x=3$, es decir, los pares **(2;2)** y **(3;3)** son las soluciones del sistema en este caso. Así el sistema tiene un número par de soluciones.

PROBLEMA 237 :

Considere ***10*** números enteros positivos, no necesariamente distintos, que sumen 95. Encuentre el menor valor posible de la suma de sus cuadrados.

RESOLUCIÓN:

* Supongamos que la secuencia $x_1; x_2; .....; x_{10}$ tiene suma

$$S=x_1^2+x_2^2+x_3^2+.....+x_{10}^2 \qquad \text{minimal.}$$

Adicionalmente supongamos que los números están ordenados de menor a mayor, es decir, $x_1 \le x_2 \le x_3 \le ..... \le x_{10}$. Si la diferencia entre x_{10} y x_1 es mayor o igual a 2, entonces la secuencia $x_1+1; x_2; .....; x_9; x_{10}-1$, producida al traspasar una unidad de x_{10} a x_1, tiene suma $S-T=2(x_{10}-x_1-1)$. Dado que la diferencia es positiva, obtenemos que $S > T$ lo que da una contradicción al supuesto que S es minimal, en consecuencia $x_{10}-x_1 = 1$ ó 0. Por lo anterior esta sucesión tiene r sumandos iguales a x y $10-r$ sumandos iguales a $x+1$, donde $0 \le r \le 10$. Como además debe cumplirse que $rx+(10-r)(x+1)$, concluímos que $10x-r=85$. Esto implica que 5 divide a r, es decir $r = 0$ ó 5 ó 10, pero se verifica que los casos $r=0$ o 10 son imposibles mientras que $r = 5$ da la solución $x = 9$. En consecuencia la suma minimal es:

$$S=5\times 9^2+5\times 10^2=905$$

PROBLEMA 238 :

Sea a un número entero positivo. Demuestre que la ecuación :

$x^2-y^2=a^3$ siempre tiene soluciones x, y que son números enteros.

RESOLUCIÓN :

Dado que $x^2-y^2=(x+y)(x-y)$, podemos considerar las ecuaciones $x+y=a^2$ y $x-y=a$. Estas ecuaciones tienen solución $x=a(a+1)/2$. Como a ó $a+1$ es par, x es un entero. Similar razonamiento nos dice que y es un entero. En consecuencia la ecuación siempre tiene soluciones enteras.

PROBLEMA 239 :

¿ Existen dos enteros positivos a y b tales que su suma sea 1995 y su producto sea un múltiplo de 1995?

RESOLUCIÓN:

** Supongamos que existen dos enteros x e y tales que* $x+y=1995$ *y* $xy=1995k$ *para algún k entero. Nótese que:* $1995=3\times 5\times 7\times 19$. Dado que 3 divide a 1995, tenemos que 3 divide a xy. Si 3 divide a x, entonces la primera ecuación nos dice que 3 también divide a y. Similarmente si 3 divide a y tenemos que 3 divide a x. Repitiendo el argumento para los primos 5 ; 7 y 19, se obtiene que ambos, x e y son múltiplos de $3\times 5\times 7\times 19=1995$, y por lo tanto su suma no puede ser 1995. En consecuencia no existen números x, y con las condiciones pedidas.

PROBLEMA 240 :

Sea la igualdad :

$$|x-a+b|=|x+a-b| ....(*)$$

entonces la proposición verdadera es:

A)(*) si y sólo si: $x=0 \vee a^2=b^2$

B)(*) si y sólo si: $x=a=b$

C)(*) si y sólo si: $x=0 \wedge a=b$

D)(*) si y sólo si: $x=0 \vee a=b$

E) (*) si y sólo si: $x=a=-b$

RESOLUCIÓN:

Para la resolución del problema utilizaremos el siguiente teorema.

$$|x|=|y| \Leftrightarrow x=y \vee x=-y$$

* Aplicando el teorema :

$|x-a+b|=|x+a-b|$

$\Leftrightarrow x-a+b=x+a-b \vee$

$x-a+b=-(x+a-b)$

* Resolver las ecuaciones obtenidas.

$$2b=2a \vee x-a+b=-x-a+b$$

$$\Leftrightarrow b=a \vee 2x=0$$

$$\Leftrightarrow b=a \vee x=0 \Rightarrow x=0 \vee a=b$$

RPTA : "D"

PROBLEMA 241 :

Si:

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{y^2}+\dfrac{y^2}{x^2}=\dfrac{13}{6}\\ x^2+y^2=5\ ;\ x<0<y\end{cases}$$

y $|y|<|x|$. calcular el valor de: $S=\sqrt{2}y+\sqrt{3}x$

A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 2

RESOLUCIÓN:

*Hallamos el equivalente de la primera ecuación del sistema.

*Dicho equivalente lo relacionamos con la segunda ecuación.

* Restringimos algunos valores por la condición del problema.

* Tenemos el sistema :

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{y^2}+\dfrac{y^2}{x^2}=\dfrac{13}{6}.....(\alpha)\\ x^2+y^2=5..........(\beta)\\ x<0<y;|y|<|x|\end{cases}$$

* De (α) se tiene : $6x^4-13x^2y^2+6y^4=0$

* Factorizamos :

$(3x^2-2y^2)(2x^2-3y^2)=0\Rightarrow 3x^2=2y^2\vee 2x^2=3y^2$

$\Rightarrow\dfrac{x^2}{y^2}=\dfrac{2}{3}\vee\dfrac{x^2}{y^2}=\dfrac{3}{2}............(\lambda)$

* De (β) y (λ) tenemos :

$$(x^2=2\wedge y^2=3)\vee(x^2=3\wedge y^2=2)$$

Como $|y|<|x|$ entonces, solo es posible

$$x^2=3\wedge y^2=2\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{3}\wedge y=\pm\sqrt{2}$$

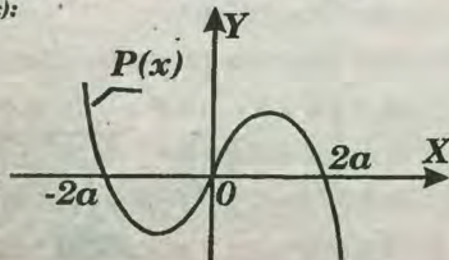
y como $x<0<y$, se tiene finalmente

$x=-\sqrt{3}\wedge y=2\Rightarrow S=\sqrt{2}y+\sqrt{3}x=\sqrt{2}(\sqrt{2})+(\sqrt{3})(-\sqrt{3})=-1$

RPTA : "B"

PROBLEMA 242 :

En la figura se muestra la gráfica del polinomio cúbico *P(x)*:



Sabiendo que $P(a)=20$, calcule: $\sqrt{P(-3a)}$

A) 4 B) 5 C) 8 D) 10 E) 12

RESOLUCIÓN:

* Para la resolución del problema se necesita conocer lo siguiente:

* Gráfica de funciones cúbicas.
* Raíces reales de funciones polinomiales.
* Características de las funciones cúbicas.
* Teorema del factor.

Debemos :

* Identificar las raíces reales de la gráfica.
* Aplicar el teorema del factor.
* Hallar el coeficiente principal de $P(x)$

I) Del siguiente gráfico las raíces son $-2a; 0; 2a$

II) $P_{(x)}=b(x+2a)x(x-2a)$

III) Evaluamos $x=a$

$$P_{(a)}=b(3a)a(-a)=20\Rightarrow b=-\frac{20}{3a^3}$$

* Luego : $P_{(x)}=-\dfrac{20}{3a^3}(x+2a)x(x-2a)$

Similarmente, para $x=-3a$

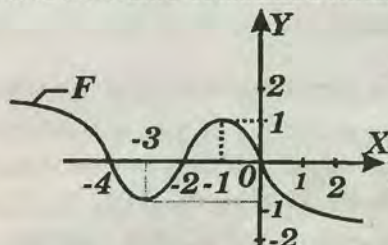
$P_{(-3a)}=-\dfrac{20}{3a^3}(-a)(-3a)(-5a)\Rightarrow P_{(-3a)}=100$

$\Rightarrow\sqrt{P_{(-3a)}}=\sqrt{100}\Rightarrow\sqrt{P_{(-3a)}}=10$

RPTA : "D"

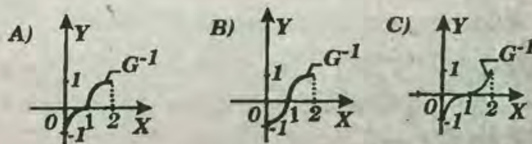
PROBLEMA 243 :

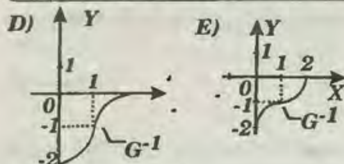
El gráfico de la función F se muestra a continuación:



determine, aproximadamente, gráfico de la inversa de la función:

$$G(x)=|F(x-2)+1|;\ -1\le x\le 1$$





RESOLUCIÓN:

* Para la resolución del problema se necesita conocer lo siguiente:

• Propiedades de las gráficas de funciones.

• Gráfica de la función inversa.

Debemos :

* Identificar la gráfica de f en el dominio indicado.

* Usar las propiedades de gráficas de funciones para construir $g(x)$.

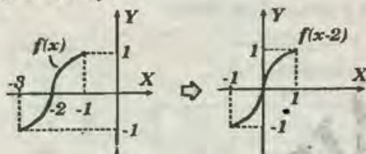
* Graficar la función inversa.

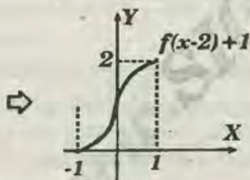
Luego :

I) Como nos interesa la gráfica de

$f(x-2)$, para $-1\le x\le 1 \Rightarrow -3\le x-2\le -1$ es decir, sólo nos interesa la gráfica de f en el intervalo $[-3;-1]\subset Domf$.

II)





como :

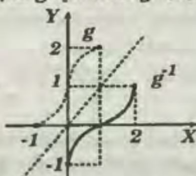
$$f_{(x-2)}+1\ge 0;\forall x\in[-1;1]$$

$$\Rightarrow |f_{(x-2)}+1|=f_{(x-2)}+1$$

luego ;

$g(x)=|f_{(x-2)}+1|=f_{(x-2)}+1;-1\le x\le 1$

III) Por lo tanto, la gráfica de $g^{-1}(x)$ será



La gráfica de g^{-1} se muestra en la alternativa ***C.***

RPTA : "C"

PROBLEMA 244 :

Si a, b y c son constantes positivas y $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & a & 0 & 0 \\ x & 0 & b & 0 \\ x & 0 & 0 & c \end{vmatrix}=0$

determine el valor de «x»

A) $\dfrac{abc}{a+b+c}$ B) $\dfrac{abc}{ab+ac+bc}$ C) $\dfrac{bc}{a}+\dfrac{ac}{b}+\dfrac{ab}{c}$

D) $\dfrac{a+b+c}{abc}$ E) $\dfrac{a}{bc}+\dfrac{b}{ac}+\dfrac{c}{ab}$

RESOLUCIÓN:

* Para el cálculo del determinante de una matriz de orden ***(4×4)***, se utilizará el método de menores complementarios, y es necesario también el método de Sarrus para una matriz de orden ***{3×3}***.

Debemos :

* Identificar la fila o columna que contenga más ceros.

* Aplicar el método de menores complementarios.

* Aplicar el método de Sarrus.

Luego :

I) $\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \boxed{x \; a \; 0 \; 0} \\ x & 0 & b & 0 \\ x & 0 & 0 & c \end{vmatrix}$

II) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & a & 0 & 0 \\ x & 0 & b & 0 \\ x & 0 & 0 & c \end{vmatrix}=-x\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix}+a\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & b & 0 \\ x & 0 & c \end{vmatrix}\ldots(\alpha)$

III) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & 1 \\ 0 & b \\ 0 & 0 \end{matrix}=bc$

$- \; - \; - \; + \; + \; +$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & b & 0 \\ x & 0 & c \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & 1 \\ x & b \\ x & 0 \end{matrix}=bc-(bx+cx)$

$- \; - \; - \; + \; + \; +$

Reemplazamos en ***(α)*** :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & a & 0 & 0 \\ x & 0 & b & 0 \\ x & 0 & 0 & c \end{vmatrix}=-xbc+a(bc-(bx+cx))=0$$

$$\Rightarrow -xbc+abc-abx-acx=0\Rightarrow x=\frac{abc}{ab+bc+ac}$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 245 :

Si el conjunto solución de la inecuación:

$(2^x-x)(3^x-Log_3x)(x^3-9)(3^x-9)>0$ es de la forma

$S=\langle a;b\rangle \cup \langle c;+\infty\rangle$, halle : $a+b+c$

A)0 B) 1 C)2 D) 3 E) 5

RESOLUCIÓN:

Debemos :

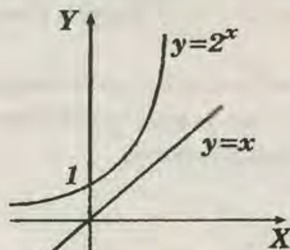
* Graficar las funciones exponenciales y logarítmicas para compararlas.

* Simplificar los factores positivos que aparecen en la inecuación.

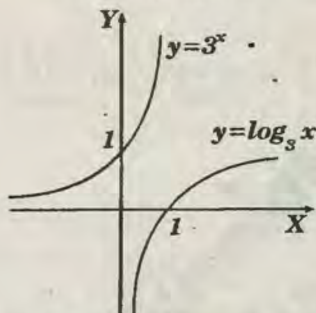
* Usar el criterio de los puntos críticos para determinar los valores de a, b y c.

Luego :

I) Debemos recordar las gráficas de las funciones siguientes:



$$\Rightarrow (2^x - x) > 0; \forall x \in R$$



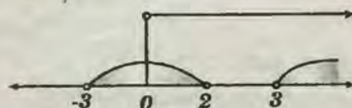
$$\Rightarrow (3^x - \log_3 x) > 0; \forall x \in R^+$$

II) En la inecuación debemos considerar $x>0$ para que $\log_3 x$ exista.

$$\underbrace{(2^x - x)}_{+}\underbrace{(3^x - \log_3 x)}_{+}(x^2-9)(3^x-3^2)>0$$

$$\Rightarrow (x-3)(x+3)(3^x-3^2)>0$$

III) Puntos críticos: -3; 3 y 2



$$\Rightarrow CS = \langle 0;2\rangle \cup \langle 3;+\infty\rangle$$

Comparando con el dato, obtenemos $a=0$, $b=0$ y $c=3$

$$\Rightarrow a+b+c=5$$

RPTA : "E"

PROBLEMA 246 :

De un grupo de *12* profesores; *5* son de la UNI, uno de los cuales es mujer; *4* son de la UNA, uno de los cuales es mujer, y *3* son de la UNMSM, todos varones. ¿Cuál es la probabilidad de seleccionar ternas constituidas por un profesor de cada universidad y que no pueda haber una mujer de la UNA?

A) 0,06 B) 0,15 C) 0,18
D) 0,20 E) 0,24

RESOLUCIÓN

* Cuando se requiere hallar el número de formas en que se puede seleccionar r objetos de un total de n objetos diferentes entre sí, podemos emplear el siguiente cálculo: $C_r^n = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$

Además, el cálculo de la probabilidad de un evento se calcula:

$$P=\frac{\text{Cantidad de casos favorables}}{\text{cantidad de casos totales}}$$

Análisis y procedimiento

universidad \ profesores	varones	mujeres	total por universidad
UNI	4	1	5
UNA	3	1	4
UNMSM	3	0	3

total: 12

Ahora seleccionaremos ternas de profesores:

Piden hallar la probabilidad ***(P)*** de que estas ternas seleccionadas estén constituidas por un profesor de cada universidad y que no pueda haya una mujer de la UNA, entonces: $P=\dfrac{C_1^5 \times C_1^3 \times C_1^3}{C_3^{12}}=\dfrac{9}{44}=0{,}20\widehat{45}$

La probabilidad es ***0,20*** aproximadamente.

RPTA : "D"

PROBLEMA 247 :

Si los números : ***49 ; 4489 ; 444889 ; ....*** , obtenidos colocando el número ***48*** en medio del anterior , son los cuadrados de números enteros, halle la suma de los dígitos del sexto número entero .

A) 36 B) 37 C) 38 D)39 E)40

RESOLUCIÓN:

* Cuando tenemos una sucesión de números, debemos identificar una regla de formación que nos permita encontrar cualquier término de la sucesión.

De los términos de la sucesión :

49; 4489; 444889; ...

nos indican que cada uno de ellos son los cuadrados de números enteros; por lo tanto, analicemos cada término.

	Números	Números enteros elevados al cuadrado
1.er número	49	$=7^2$
2.° número	4489	$=67^2$
3.er número	4448889	$=667^2$
⋮	⋮	⋮
6.° número:		$=\underline{666667^2}$

el sexto número entero elevado al cuadrado es 666667

Piden la suma de los dígitos del sexto número entero; aquí se debe entender que se refieren al sexto número entero que está elevado al cuadrado, esto es

$$6+6+6+6+6+7=37$$

La suma de los dígitos del sexto número entero es **37**.

RPTA : "B"

PROBLEMA 248 :

Determine el conjunto solución del sistema:

$$x^2-4x+y^2=64$$
$$x^3-6x^2+12x+y=8$$

A) {(0; 8), (2; 1)} B) {(0; 8), (4; −8)}
C) {(0; 8), (0; −8)} D) {(4; −8), (2; 8)}
E) {(1; 2), (4; −8)}

RESOLUCIÓN:

* Para resolver el sistema no lineal utilizaremos el método de Gauss; es decir, eliminar una incógnita.

Debemos :

* Completar cuadrados y cubos.
* Eliminamos una incógnita.
* Factorizamos aplicando el método de los divisores binómicos.

Luego :

I)
$$x^2-4x+y^2=64$$
$$\underline{x^2-4x+4}+y^2=64+4$$
$$(x-2)^2+y^2=68 \ldots\ldots\ldots(\beta)$$

$$x^3-6x^2+12x+y=8$$
$$\underline{x^3-6x^2+12x-8}+y=8-8$$
$$(x-2)^3+y^2=0 \ldots\ldots\ldots(\alpha)$$

II) En (α) tenemos: $y=-(x-2)^3$

Reemplazando en (β) obtenemos:

$(x-2)^2+(-(x-2)^3)^2=68 \Rightarrow (x-2)^2+(x-2)^6=68 \ldots\ldots(\theta)$

III) Haremos un cambio de variable para factorizarlo.

sea $(x-2)^2=a$

Reemplazando en (θ) tenemos $a+a^3=68 \Rightarrow a^3+a-68=0$

Se observa que $a=4$ es raíz $\Rightarrow$ $(a-4)$ es un factor.

Aplicamos Ruffini para obtener el otro factor.

	1	0	1	-68
4	↓	4	16	68
	1	4	17	0

$$(a-4)\underbrace{(a^2+4a+17)}_{\Delta<0 \text{ (no tiene solución real)}}=0$$

Entonces $a=4$

Reemplazamos

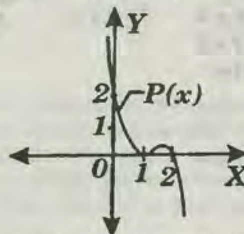
$$(x-2)^2=4 \Rightarrow \begin{cases} x=4 \Rightarrow y=-8 \\ x=0 \Rightarrow y=8 \end{cases}$$

El conjunto solución es **CS={(0;8),(4;-8)}**

RPTA : "B"

PROBLEMA 249 :

Sea $P(x)$ el polinomio de grado «n» donde «n» es el menor posible y cuya gráfica se representa a continuación.



Encuentre el residuo al efectuar la división de $P(x)$ con $Q(x)=x-3$

A) –6 B) – 4 C) –1 D) 1 E) 4

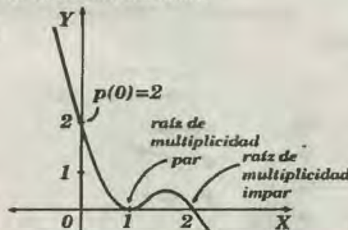
RESOLUCIÓN:

Debemos :

* A partir de la gráfica, hallar la regla de correspondencia de $P(x)$.
* Aplicar el teorema del resto

Luego :

I)



$P(x)=k(x-1)^{2a}(x-2)^{2b-1}; a,b \in Z^+$

Como el grado de $P(x)$ es el menor posible, entonces $a=1$ y $b=1$

Luego tenemos $P(x)=k(x-1)^2(x-2)$

De la gráfica :

$P(0)=2 \Rightarrow P(0)=k(-1)^2(-2) \Rightarrow P(0)=2 \Rightarrow k=-1$

Luego $P(x)=-(x-1)^2(x-2)$

II) Aplicando el teorema del resto tenemos

$$\frac{P(x)}{x-3} \Rightarrow R(x)=P(3) \Rightarrow P(3)=-(2)^2(1) \Rightarrow P(3)=-4$$

El residuo de dividir $P(x)$ entre $x-3$ es -4

RPTA : "B"

PROBLEMA 250 :

Sea «u» el número de decenas de sillas y «v» el número de decenas de mesas que fabrica una empresa al día. Si la utilidad diaria está dada por $200u+300v$ y se tienen las siguientes restricciones:

$$\begin{cases} u+v \le 4 \\ 2u+3v \le 10 \\ 40u+20v \le 120 \end{cases}$$

encuentre el número de decenas de mesas y sillas, respectivamente, a fabricar diariamente de modo que la empresa obtenga la mayor utilidad.

A) 3 y 1 *B) 1 y 3* *C) 2 y 2*
D) 2 y 3 *E) 3 y 2*

RESOLUCIÓN:

• En este tema se requiere determinar la región factible, la cual se obtiene mediante la representación geométrica de las restricciones dadas, para luego calcular las coordenadas de los vértices de la región y poder evaluar el máximo o mínimo valor de la función objetivo.

Debemos :

• Identificar la función objetivo.

• Representación gráfica de las restricciones.

• Evaluar la función objetivo en los vértices de la región factible.

Luego :

I) La función objetivo es $f(u;v)=200u+300v$

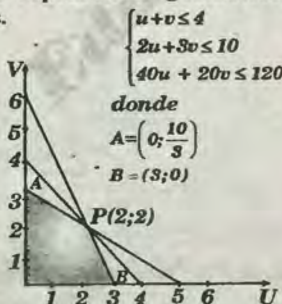
II) Vamos a representar geométricamente las restricciones.

$$\begin{cases} u+v \le 4 \\ 2u+3v \le 10 \\ 40u+20v \le 120 \end{cases}$$

donde

$A=\left(0;\frac{10}{3}\right)$

$B=(3;0)$



Como u y v representan el número de decenas de sillas y mesas, entonces, son cantidades enteras, por lo que evaluaremos la función objetivo solo en $(2;2)$ y $(3;0)$; así:

III) $f(2;2)=200(2)+300(2)$

$\Rightarrow f(2;2)=1000$.....(*máximo*)

$f(3;0)=200(3)+300(0) \Rightarrow f(3;0)=600$

La empresa obtendrá la mayor utilidad cuando fabrique 2 decenas de sillas y 2 decenas de mesas.

RPTA : "C"

PROBLEMA 251 :

El sistema de inecuaciones:

$$\begin{cases} x-3y \le 6 \\ 2x+y \ge 4 \\ x+y \le 6 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$$

determina en el plano una región R . Podemos afirmar que:

A) R es una región triangular.

B) R es una región cuyo borde es un cuadrado.

C) R es una región cuyo borde es un cuadrilátero.

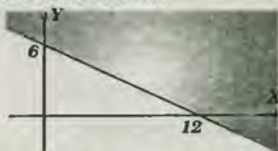
D) R es vacía.

E) R es un cuadrante.

RESOLUCIÓN:

• Una inecuación con dos variables se puede representar geométricamente en un plano cartesiano; por ejemplo , para la inecuación

$x+2y \ge 12$



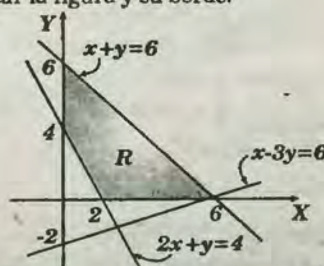
Debemos :

• Graficar las desigualdades.

• Intersecar dichas regiones.

• Identificar la figura y su borde.

Luego :



Se puede afirmar que R es una región cuyo borde es un cuadrilátero.

RPTA : "C"

PRIMER SEMINARIO

01. Si los monomios $\sqrt[a]{x^{a+b}}$; $\sqrt[b]{x^{b+c}}$; $\sqrt[c]{x^{a+c}}$ tienen grado 10; detarmine el grado del monomio:
$M(x, y, z) = \sqrt[a]{x^{b}} . \sqrt[c]{y^{a}} \sqrt[b]{z^{c}}$
A) 26 B) 27 C) 28
D) 29 E) N.A.

02. Determine la suma de los coeficientes del siguiente trinomio
$P(x; y)=(m-3)x^{9-m}+mx^{m-2}y^{m/3}+y^{17-2m}$
A) 10 B) 8 C) 6
D) 4 E) 7

03. Indique uno de los grados absolutos que puede tomar el polinomio:
$P(x; y) = 5x^{n-2} + 6y^{\frac{8}{n}-1} + 9xy^{5-n}$
A) 5 B) 6 C) 7
D) 8 E) 9

04. Determine el grado absoluto del polinomio:
$P(x; y) = \frac{3}{m-n}x^{m-n}y^{m} + 2x^{6-m}y^{n-3} + \frac{10}{n-3}x$
A) 3 B) 4 C) 5
D) 6 E) 7

05. Si $f(x) = b(x^{a}+1)^{a+b} + \left(1-\frac{8}{a-1}\right)x^{-5} + \left(1-\frac{9}{b-2}\right)|x| + a^{2} + a$, es una expresión cuya equivalencia es un polinomio, indique cuál(es) de los siguientes enunciados son correctos.
I. GR(f) = 160
II. El término constante es la mitad del grado.
III. La suma de coeficientes de f(x) es: 101.
A) I, II y III B) solo I C) solo II
D) solo III E) I y III

06. Se define el polinomio
$P(x; y) = 2^{2}x^{a+b-4}y^{a+b+3} + x^{2a+b-3}y^{a+b+1} + x^{2a+b-2}y^{a+b+2}$ de grado absoluto 41, y la diferencia de los grados relativos a x e y es 2.
Determine el valor da $E = \frac{a+b+1}{b-a}$
A) 3 B) 5 C) 6
D) 7 E) 10

07. Sea P(x; y) el polinomio dado por:
$P(x; y) = 2x^{2a-6}y^{5} - 3x^{a+2} . y^{a-4} + x^{3}y^{2a-7} - x^{a-5}y^{a-6}$. Calcule al grado absoluto mínimo que puede tomar P(x; y)
A) 12 B) 13 C) 15
D) 16 E) 17

08. Sea el polinomio:$P(x; y) = 4x^{2n-6}y^{5}a^{n-1} - 12x^{n+2}a^{n-4}y^{n-4} + 6x^{n-5}y^{n-7}b^{n+1} + 2x^{9-n}b^{n}$ a y b constantes no nulas, cuál(es) de los siguientes enunciados son correctos?
I. El mínimo valor de n es 6.
II. El máximo valor de n es 9
III. El mínimo grado absoluto que puede tomar P(x; y) es 13.
A) solo I B) II y III
C) I y II D) solo III
E) I y III

09. El polinomio
$P(x) = (9x^{8}-7)^{n}(2x^{2}+3x^{3}-1)^{n-2}(x^{9}+3)$ tiene como grado 47, entonces se puede afirmar que:
$\sqrt[5]{coef\ principal\ de P(x)}$ es:
A) 3 B) 6 C) 9
D) 12 E) 27

10. Se definen los polinomios:
$P(x; y) = x^{m}y^{n-1} + x^{m-1}y^{2n}$
$Q(x; y) = x^{m-1}y^{n+2} - x^{m}y^{n-2}$
$R(x; y) = P(x; y).Q(x; y)$
Además en al polinomio R se cumple que $GR_x = GR_y$, GA = 14. Determine el grado del polinomio
$S(x; y) = P(x; y) - Q(x; y)$.
A) 3 B) 5 C) 6
D) 7 E) 8

11. Indique cuál(es) de los siguientes enunciados son correctos:
I. $P(x) = 6x^{3} + 5x^{2} + 6|x| + 1$ es un polinomio ordenado.
II. $Q(x) = 1 + x^{2} - x + 3x^{3}$ es un polinomio ordenado.
III. $H(x;y) = x^{3}y + xy^{3} + x^{2}y^{2}$ es un polinomio homogéneo.
A) I, II y III B) I y III C) II y III
D) I y II E) solo III

12. Si el polinomio:
$P(x,y) = 2^{-1}(a + b)x^{a^{2}+n} - y^{b^{2}+12} + 3^{-1}(a - b)x^{b^{2}+n}y^{n}$ es homogéneo. Determine el producto de sus coeficientes.
A) –2 B) –1 C) 0
D) 2 E) 3

13. Si se cumple que:
$A(x-1)(x-3) + B(x-1)(x+5) + C(x-3)(x+5) = 10x^{2} - 44x + 58$, para cada $x \in R$, cuál(es) de los siguientes enunciados son correctos.
I. $A + B + C = 10$
II. $A = B^{2} + C^{2} - 3BC$.
III. $A > C > B$
A) I y II B) II y III C) I y III
D) solo II E) solo III

14. ¿Cuántos términos posee el polinomio homogéneo $P(x; y) = x^{m} + x^{m-2}y^{2} + x^{m-4}y^{4} + \ldots$ para qua sea de grado 40 respecto a la variable "y"
A) 19 B) 20 C) 21
D) 22 E) 23

15. Sea P(x;y; z) un polinomio homogéneo de grado 3 que cumple P(1; 2; –1) = 4. Determine el valor de P(– 4; – 8; 4).
A) –256 B) –128 C) –32
D) –16 E) 64

16. Si el polinomio: $P(x;y) = nx^{m(m-1)}.y - (x^{3})^{m-1}y^{m} + mx^{n^{4}-4}y$, m; n ∈ N es homogéneo, determine P(1; 2).
A) –12 B) – 4 C) 6
D) 14 E) 28

17. Si el polinomio $P(x) = x^{2a+1} + 2x^{b+3} + 3x^{c+2} + \ldots$ es completo y ordenado decrecientemente y posee "2c" términos, determine el valor de a + b + c.
A) 14 B) 15 C) 16
D) 17 E) 18

18. Determine al valor de 2B + 3C, si se cumple:
$\frac{6}{(2x^{2}+1)(3x+1)} = \frac{Ax+B}{x^{2}+D} + \frac{C}{x+E}$
A) $\frac{6}{11}$ B) $\frac{16}{11}$ C) 2
D) 3 E) 6

19. Si el polinomio $P(x; y; z) = ax^{2a+2b-c} + by^{2b+2c-a} + cz^{2c+2a-b}$ es homogéneo, determine el valor de $T = \frac{(a+b)^{n}+(b+c)^{n}}{(c+a)^{n}}$, ∀ n ∈ N (N es el conjunto de los naturales), a ≠ 0.
A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

20. Si $\frac{ab}{a^{2}+b^{2}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$; determine al valor de
$E = \left(\frac{a}{b}\right)^{8} + \left(\frac{b}{a}\right)^{8}$
A) 44 B) 45 C) 46
D) 47 E) 48

21. Sea a > 0, si se cumple que: $(a^{4} + a^{-4} - 5) / (a^{2} + a^{-2}) = 6$, determine $a + a^{-1}$.
A) 2 B) 3 C) 7
D) 12 E) 16

22. Si el polinomio $P(x) = (ab - ac - n^2)x^2 + (bc - ba - 2n)x + (ca - bc - 1)$ es idénticamente nulo, determine el valor de $E = \frac{1}{a} - \frac{2}{b} + \frac{1}{c}$.
A) 0 B) 1 C) 2
D) 3 E) 5

23. Determine el valor de:
$T = \frac{(a-b)^3 + (b-c)^3 + (c-a)^3}{(a-b)(a-c)(b-c)}$, siendo $a \neq b \neq c$.
A) –3 B) 1 C) 2
D) 3 E) 4

24. Si $a^2 + b^2 + c^2 = 2$
$(a + b + c)(1 + ab + ac + bc) = 32$,
determine: $a + b + c$
A) 2 B) $\sqrt[3]{32}$ C) 4
D) 16 E) 64

25. Determine
$E = (a + b)^2(b + c - a)(a + c - b) + (a - b)^2(a + b + c)(a + b - c)$.
A) $-5abc^3$ B) $-2ab$ C) abc
D) $2abc^4$ E) $4abc^2$

26. Determine el valor de:
$E = \frac{3mx - nx - 3my + ny}{ny^2 - nx^2 - 3my^2 + 3mx^2}$, si $x - y = 2n$ $\frac{x}{m+n} + \frac{y}{m-n} = 2$
A) $\frac{1}{m}$ B) $\frac{1}{2m}$ C) $\frac{1}{2n}$
D) $\frac{1}{m+n}$ E) 0

27. Sea $P_n(x; y; z) = x^n + y^n + z^n$
Si: $P_1(x; y; z) = 3$ $P_2(x; y; z) = \frac{3}{2}$ $P_3(x; y; z) = 9$
Calcule el valor de
$J = 3\,P_1(xy; yz; zx) - P_1(x;0;0)\,P_1(0;y;0)\,P_1(0;0;z)$
A) 0 B) 2 C) 5
D) 6 E) 7

28. Un polinomio de grado (n + 1) cuyo 1er coeficiente es la unidad, es divisible entre $(x^n + 2)$. Si el resto de dividirlo separadamente entre $(x - 1)$ y $(x + 2)$ son respectivamente 12 y 258. Determine el valor de n.
A) 8 B) 9 C) 10
D) 11 E) 12

29. Determine n en la división:
$[nx^{n-1} + (2n-1)x^{n-2} + (3n-2)x^{n-3} + \ldots + (n^2 - n+1)] \div (nx - 1)$. Si nueve veces la suma de los coeficientes del cociente entero es igual a cuatro veces el resto de la misma.
A) 7 B) 8 C) 9
D) 12 E) 13

30. En la división por Horner se tiene

1	3	a	2	P
–b				
2				
	3	1	7	7

Determine el valor de a + b + p
A) 6 B) 7 C) 6
D) 9 E) 10

31. Si el esquema:

a	a	b	a	b	a
b		b	c		
c			b	c	
				c	c^2
	b	b	c		

representa la división de dos polinomios en x por el método de William Horner, indique el resto.
A) x + 2 B) 3x + 2 C) 2x + 1
D) 4x + 7 E) 7x + 11

32. Al dividir $x^3 + y^3 - 3xy + 1$ entre $x + y + 1$ se obtiene un cociente q(x; y) que al igualarlo a cero se obtiene:
A) x = 0, y > 0 B) x < 0, y = 0
C) x + y = 0 D) x = y = 1
E) x > 0, y = 0

33. Para que la división de $x^{10} - nx + k$ entre $x^2 - 2x + 1$ sea exacta, entonces el valor de $t = \frac{n+19}{k+1}$ es:
A) 1 B) 2 C) 4
D) 19 E) 38

34. Un polinomio de grado n en la variable x es divisible entre $(x^{n-1} + x^{n-2} + 1)$ y tiene por término independiente 2. Además dicho polinomio disminuido en 9 es divisible entre x – 1 y disminuido en 388 es divisible entre x – 2. Calcule el grado del polinomio.
A) 3 B) 4 C) 5
D) 6 E) 7

35. Se tiene un polinomio P(x) de tercer grado tal que si se divide P(x) entre $x^2 - x + 1$ el residuo es 4x – 4. Si se divide P(x) entre $x^2 + 4x$ el residuo es x + 1. Determine el residuo de dividir P(x) entre (x – 1)(x + 1).
A) $\frac{23}{21}x + \frac{104}{21}$ B) $\frac{22}{21}x + \frac{93}{21}$
C) $\frac{23}{21}x + \frac{107}{21}$ D) $\frac{22}{21}x + \frac{100}{21}$
E) $\frac{22}{23}x + \frac{124}{21}$

36. Determine la relación entre q y r, si la siguiente división es exacta:
$\frac{x^5 - 5qx + 4r}{(x - c)^2}$
A) $r^2 = q^3$ B) $r^4 = q^5$ C) $r^5 = q^4$
D) $r^8 = q^5$ E) $r^3 = q^7$

37. Si al dividir $5x^3 + 6x^4 - 1$ entre $x + 3x^2 - 2$ se obtiene un resto de la forma mx + n, determine el valor de m – n.
A) – 4 B) –1 C) 0
D) 4 E) 5

38. Determine la suma de coeficientes del polinomio cociente que se obtiene de la siguiente división:
$(x-3)^7 + (x-2)^5 + 2x - 1 \div x^2 - 5x + 6$
A) – 69 B) – 65 C) – 63
D) 63 E) 69

39. Determine el residuo de dividir $(x-2)^{1999} + (x-1)^{1998} + 7$ entre (x–2)(x–1)
A) 3 B) 2x – 1 C) 3x + 2
D) 2x – 4 E) 2x + 4

40. Al dividir el polinomio:
$P(x) = 2x^5 - 3x^4 - x^3 + 1$ entre $x^3 + x^2 + bx + b$, se obtiene de resto R(x). Determine el resto de dividir dicho resto entre x + 1.
A) – 6 B) – 3 C) – 1
D) 1 E) 4

41. Determine la suma de los coeficientes del residuo al dividir
$(x^2+x+1)^5(x-1)^{20}$ por $(x-1)^{19}(x^2+x-1)$
A) 0 B) 1 C) 2
D) 32 E) 64

42. Si $n \in Z^+$; determine el resto de la siguiente división : $\frac{(x-1)^{3n+2} + x}{(x-1)^2 + x}$
A) 0 B) x C) x + 1
D) –x + 1 E) – x

43. Determine el resto al dividir $\frac{2x^{119} + 1}{x^2 - x + 1}$
A) x – 3 B) 4 – 2x C) 3 – 2x
D) 2x – 3 E) 3 – x

44. Calcule el residuo de la división
$\frac{x^{4n+7} + (x-1)^{2n+6} + 3}{x^2 - x + 1}$ (n entero positivo)

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) $x^n + 3$

45. Determine el residuo de dividir $(x^{182} + 182)$ entre $x^3 + x^2 + x + 1$.
A) 183 B) $x^2 + 182$
C) $x^2 + 183$ D) $x^2 + 192$
E) $x^2 + 193$

46. Al dividir un polinomio P(x) entre x + 3 se obtuvo por resto –5 y un cociente cuya suma de coeficientes es igual a 3. Determine el residuo de dividir p(x) entre x – 1.
A) 5 B) 6 C) 7
D) 8 E) 9

47. Un polinomio de sexto grado tiene raiz cúbica exacta. Es divisible por x – 1 pero al dividirlo entre x + 1 da como resto 216. Su gráfica corta al eje de las ordenadas en (0,8). Determine la suma de coeficientes del polinomio.
A) –2 B) –1 C) 0
D) 1 E) 2

48. Un polinomio P es tal que es divisible por $(x^{n-1} + 1)$ tiene por término independiente –3 y por grado n, determine n si se sabe que al dividirlo separadamente entre (x – 1) y (x – 3) los restos obtenidos son –2 y 732 respectivamente.
A) 4 B) 5 C) 6
D) 7 E) 8

49. Un polinomio de tercer grado, cuyo primer coeficiente es la unidad, es divisible por (x – 2) y por (x + 1), al dividirlo por (x – 3) da de resto 20 ¿Qué resto daría dicho polinomio al dividirlo entre (x + 3)?
A) –10 B) 0 C) 6
D) 8 E) 12

50. Un polinomio P(x) de cuarto grado es divisible separadamente por: $(x^2 + 1)$ y $(x^2 + 2x + 2)$. Si se divide: P(x) por $(x^3 - 1)$ se obtiene por residuo $6x^2 + 6x + 8$. Luego el término independiente de P(x) es:
A) 2 B) 4 C) 6
D) 8 E) 10

51. Un polinomio P(x) de cuarto grado cuyo coeficiente del término de mayor grado es 3, es divisible por $(x^2 - 9)$ y por (x – 1). Si al dividir P(x) entre (x – 2) se obtiene como residuo – 50, determine el residuo de la división de P(x) entre (x + 1).
A) 12 B) 14 C) 15
D) 16 E) 18

52. Si el polinomio $2x^5 + x^4 + ax^2 + bx + c$ es divisible por $x^4 - 1$, determine el valor de $E = \frac{a+b}{a-b}$.
A) $-\frac{3}{2}$ B) – 1 C) $-\frac{2}{3}$
D) $\frac{2}{3}$ E) $\frac{3}{2}$

53. Si se dividen respectivamente los polinomios: P(x) y S(x) entre $(x^2 + 2)$ y $x^2 - 1$, los residuos hallados son: –19x–1 y 10x + 2 siendo:
$P(x) = bx^3 + cx^2 + dx + e$
$S(x) = (e + 8)x^3 + dx^2 + cx + (b - 9)$
Halle el residuo de dividir:
$[P(x) + S(x)] \div [x^2 - 3x + 1]$
A) –160x – 1 B) 160x – 57
C) 57x – 160 D) –160x + 1
E) –157x + 160

54. Un polinomio P(x) es divisible por tres factores cuadráticos sin término lineal la suma de sus coeficientes es 24, el término independiente es 6, la suma de los términos independiente de sus factores es 6, además es mónico. De el valor de P(2), sabiendo que a, b, c ∈ N, son los términos independiente de cada factor cuadrático
A) 164 B) 180 C) 190
D) 200 E) 210

55. Un polinomio P(x) de 2do grado y coeficiente principal 1 al ser dividido entre x + 3 da como resultando un cociente Q(x) y un resto 12. Si se divide P(x) entre el mismo cociente, aumentado en 4, la división resulta exacta. Determine el residuo de dividor P(x) entre x – 5.
A) 12 B) 13 C) 17
D) 20 E) 21

56. Determine el número de términos del siguiente producto.
$(x^{20m} + x^{19m} + x^{18m} + \ldots x^m + 1)$
$(x^{20m} - x^{19m} + x^{18m} - \ldots - x^m + 1)$.
A) 21 B) 22 C) 27
D) 36 E) 42

57. Determine el número de términos en el desarrollo del cociente notable:
$\frac{x^{5m+10} - y^{5m-50}}{x^{2n+4} - y^{2n+5}}$; m, n ∈ N, m < 32
A) 12 B) 13 C) 14
D) 15 E) 16

58. Si el tercer término del cociente notable $\frac{x^{2n} - y^n}{x^{2\beta} - y^\beta}$ es $x^{16}y^4$, determine el número de términos.
A) 6 B) 7 C) 8
D) 9 E) 10

59. Sabiendo que $n^2 - 31n + 234 = 0$, halle el número de términos de la siguiente división exacta. $\frac{x^{n-1}y - y^n}{xy + y^2}$
A) 11 B) 12 C) 13
D) 17 E) 18

60. Determine el valor numérico del término central del cociente notable originado al dividir:
$\frac{(x+y)^{100} - (x-y)^{100}}{8xy(x^2+y^2)}$; para x = 3, $y = 2\sqrt{2}$
A) 1 B) 2 C) 100
D) 200 E) 1000

61. Determine el término común que presentan los desarrollos de los cocientes notables:
$\frac{x^{150} - y^{200}}{x^6 - y^8}$; $\frac{x^{204} - y^{136}}{x^6 - y^4}$
A) $x^{60}y^{112}$ B) $x^{78}y^{81}$ C) $x^{90}y^{72}$
D) $x^{120}y^{52}$ E) $x^{114}y^{56}$

62. Del cociente notable que se genera de $\frac{x^{a^n - 40} - y^{b^2 \cdot 72}}{x^a - y^b}$, el noveno término es: $x^{40}y^c$; b < 9, además el número de términos del C.N. es 17, determine
$T = \frac{8(a+n)(b+c)}{bc}$
A) 1 B) 3 C) 6
D) 9 E) 12

63. Luego de simplificar y ejecutar la división algebraica en:
$10[(x^{33} - y^{99/2})^2 + (x^{33} + y^{99/2})^2] \div$
$[(x + y^{3/2})^2 + (x - y^{3/2})^2]$; y > 0, indique cuál(es) de los siguientes enunciados son correctos:
I. No es una división exacta.
II. El cociente es un polinómio P(x;y) de grado 64.
III. El término central del cociente es $10x^{32}y^{48}$
A) solo III B) solo II C) solo I
D) I y III E) II y III

64. Los trinomios
$2x^2 + ax + 6$ y $2x^2 + bx + 3$ admiten un factor común de la forma $2x + c$. Determine el valor de $E = (a - b)c$.
A) –3 B) –2- C) 2
D) 3 E) 6

65. Al factorizar en Z el polinomio $P(x) = x^3 + 2x^2 - 2x - 1$ el número de factores obtenidos, es:
A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

66. Determine un factor de
$P(x) = x^5 + x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1$
A) $x^2 - x + 1$ B) $x^3 - x + 1$
C) $x^3 + x^2 + 1$ D) $x^3 + x + 1$
E) $x^3 + x^2 + x + 1$

67. Factorice e indique un factor primo del polinomio.
$P(a;\ b;\ c)=a(b - c)^2+b(c - a)^2+c(a - b)^2 + 8abc$.
A) $a^2 + b^2 + c^2$ B) $a + b + c$
C) $a - b$ D) $a + b$
E) $ab + ac + bc$

68. Se define el polinomio:
$P(x;\ y;\ z) = x^4y^3 + xz^3 + z^3y + x^3y^4 + x^3y^3z + z^4$, indique cuál(es) de los siguientes enunciados son correctos
I. $P(x;\ y;\ z)$ es divisible por $x+ y + z$
II. Un divisor de $P(x;\ y;\ z)$ es $x^2 + y^2$.
III. $P(x;\ y;\ z)$ es divisible entre $xy + z$ ó $x + yz$.
A) I y II B) II y III C) I y III
D) solo I E) solo II

69. Indique el término independiente de uno de los factores primos del polinomio:
$p(x;\ y) = (x + y + 3)^2 + 7x + 7y + 31$
A) 2 B) 7 C) 8
D) 3 E) 39

70. Determine uno de los factores primos del polinomio:
$P(x;\ y;\ z) = x^4 - y^4 - z^4 - 2x^2yz - y^2z^2$
A) $x^2 - y^2 + z^2 - yz$ B) $x^2 + y^2 + z^2 - yz$
C) $x^2 + y^2 + z^2 + yz$ D) $x^2 + xyz + y^2$
E) $x^2 + y^2 + z^2 - xyz$

71. Factorice $P(x;y;z)= 5(x+y)^2 - (x+z)^2 - 5(y - z)^2$ e indique uno de sus factores primos.
A) $(2x + 5y - 3z)$ B) $(x + y - z)$
C) $(2x - y + z)$ D) $(x - 3y)$
E) $(x - z)$

72. Si $P(x) = x^3 + x^2 + \alpha x + \beta$
$Q(x) = x^3 + \gamma x^2 + \mu x + \rho$
$MCD(P,\ Q) = x^2 - 2x + 1$
$MCM(x) : MCM\ (-4) = -75$
Determine: $\alpha\beta + \gamma\mu\rho$
A) –105 B) – 110 C) –210
D) – 305 E) – 470

73. Si el M.C.M de dos polinomios P, Q, tal que:
$P(x) = (x - 2)(x^3 + x^2 + 3x + 3)$
$Q(x) = (x^2 + 1)(x^3 + 3x^2 + 3x + 9)$
Es de la forma: $(ax - 2)(x^2 + b)(x + 1)(dx + 3)(cx^2 + 1)$, entonces $T = a.b.c.d$ es:
A) – 4 B) – 3 C) 3
D) 6 E) 9

74. Halle el resto que se obtiene al extraer la raíz cuadrada de:
$x^4 - 5 + 6x^2 + 4x^3 - 12x$
A) $-13x + 12$ B) $- 6x - 16$
C) $13x - 12$ D) $- 16x -6$ E) $5x$

75. Determine la suma de los coeficientes de la raíz cuadrada de
$P(x) = x^6 + 2x^4 + 2x^3 + x^2 + 2x + 1$ admitiendo que P(x) tiene raíz cuadrada exacta.
A) 3 B) 4 C) 5
D) 6 E) 7

76. Determine $(a + b)$ si la raíz cuadrada del polinomio $ax^4 + (3a - 5)x^3 + (a + 3b)x^2 + 94x + 43$ deja como residuo: $10x + 7$.
A) 12 B) 28 C) 48
D) 53 E) 75

77. En relación a la radicación: $\sqrt{256x^4 + 32x^3 + 33x^2 + 11x + 4}$, indique cuál(es) de los siguientes enunciados son correctos:
I. La raíz cuadrada es: $16x^2 + x + 1$.
II. La suma de coeficientes del residuo es 12.
III. La suma de los términos lineales de la raíz cuadrada y el residuo es 10x.
A) solo II B) solo III C) solo I
D) I y III E) I, II y III

78. Si el polinomio $P(x) = 1 + \alpha x + 9x^2 + \beta x^3 + 16x^4$ posee raíz cuadrada exacta, determine el valor de $E = \alpha.\beta$.
A) –16 B) – 8 C) 0
D) 8 E) 16

79. Si el radical doble:
$$\sqrt{\frac{y}{4x} + \frac{1}{5y} + \sqrt{\frac{x}{2y}}};\ x,\ y \in Q^+.$$
Se transforma en radicales simples, determine la condición que relaciona a x e y.
A) $x = \sqrt{0,4y}$ B) $y = \sqrt{0,1x}$ C) $x = 2y$
D) $\sqrt{x} = 3\sqrt{y}$ E) $x = 0,3y$

80. Simplifique:
$$T = -\frac{1}{\sqrt{15} + 3\sqrt{2} + \sqrt{10} + 2\sqrt{3}} - 3\sqrt{2} - \sqrt{10}$$
A) $-\sqrt{15} - 2\sqrt{3}$ B) $-\sqrt{15} + 2\sqrt{3}$
C) $-2\sqrt{15} + 2\sqrt{3}$ D) $-2\sqrt{15} - \sqrt{3}$
E) $-\sqrt{15} - \sqrt{3}$

81. Si A es una expresión definida por:
$$A = \frac{1}{\left(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}\right)^3 - 2\sqrt{2} - 3\sqrt{3} - 5\sqrt{5}}\ ,$$
entonces al racionalizar y simplificar A, el denominador resultante, es:
A) 12 B) 15 C) 18
D) 32 E) 42

82. Racionalice:
$$E = \frac{3}{\sqrt[3]{a - b} + \sqrt[3]{b - c} + \sqrt[3]{c - a}}$$
de cómo respuesta el número de factores lineales que se obtiene en su denominador.
A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

83. El factor racionalizante para hacer racional el denominador de:
$\dfrac{a}{\sqrt[15]{x} + \sqrt[15]{y}}$; es:
A) $\sqrt[15]{x^{14}} - \sqrt[15]{x^{13}y} + \sqrt[15]{x^{12}y^2} - \ldots + \sqrt[15]{y^{14}}$
B) $\sqrt[15]{x} + \sqrt[15]{y}$
C) $\sqrt[15]{x} - \sqrt[15]{y}$
D) $\sqrt[15]{x} - \sqrt[15]{xy} + \sqrt[15]{y}$
E) $\sqrt[15]{x^{12}} - \sqrt[15]{x^{11}y} + \sqrt[15]{x^{10}y^2}$

84. Si el radical doble $\sqrt{ax + by + \sqrt{xy(ab + c)}}$ se expresa como una suma de radicales simples, determine el valor de $E = \dfrac{ab}{c}$.
A) $\dfrac{1}{3}$ B) $\dfrac{1}{2}$ C) 1
D) 2 E) 3

85. Simplifique
$T = \left(\sqrt[4]{27} - \sqrt[4]{3}\right)\sqrt{6 + 4\sqrt{3}}$
A) 1 B) 2 C) 3
D) $2\sqrt{3}$ E) $3\sqrt{3}$

86. Halle la raíz cuadrada de:
$$(x + 1)^2 - 2\left[x + \sqrt{x^2 - x - 6} + \frac{1}{2}\right] - (x - 1)^2$$
Siendo $x > 3$

A) $\sqrt{x+3}-\sqrt{x-2}$ B) $\sqrt{x+3}+\sqrt{x-2}$

C) $\sqrt{x+2}-\sqrt{x+3}$ D) $\sqrt{x-2}-\sqrt{x+3}$

E) $\sqrt{x+2}-\sqrt{x-3}$

87. Determine el valor de:

$$E=\frac{\sqrt[3]{\sqrt{2}-1}\ \sqrt[6]{3+2\sqrt{2}}}{\sqrt[6]{\sqrt{2}+1}\ \sqrt[12]{5\sqrt{2}-7}}$$

A) –10   B) – 2   C) – 1
D) 0   E) 1

88. Efectuar:

$$J=\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}-\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

A) $-\frac{\sqrt{6}}{3}$ B) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ C) $-\frac{\sqrt{6}}{6}$

D) $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ E) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

89. El valor de: $\frac{8}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-1}+\frac{12}{\sqrt{2}-\sqrt{3}+1}$

es:

A) $2\sqrt{2}-2\sqrt{3}-9$ B) $2\sqrt{2}+\sqrt{3}-10$
C) $2\sqrt{2}+2\sqrt{3}-9$ D) $2\sqrt{2}+2\sqrt{3}+9$
E) $5\sqrt{2}+5\sqrt{6}+2$

90. Después de racionalizar la expresión

$T=\frac{2\sqrt[4]{8}}{\sqrt{2\sqrt{2}-2\sqrt{3}-\sqrt{5}}}$, se obtiene.

A) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ B) $\sqrt{5}-1$ C) $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$

D) $\sqrt{5}+1$ E) $2\left(\sqrt{5}+1\right)$

91. Racionalizar: $E=\frac{4}{\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{3}+1}$

A) $\sqrt[3]{3}+1$ B) $\sqrt[3]{3}+2$ C) $\sqrt[3]{3}+3$
D) $\sqrt[3]{3}+4$ E) 12

92. Sean

$p(x): x^2+x+1>2^x \wedge x<-x^2$

$q(x): x^2-3x>0 \vee x<\frac{1}{x}$

obtenga el valor de verdad de las proposiciones siguientes:

I. $p(0)\leftrightarrow q(0)$
II. $p(1)\,\Delta\, q(-1)$
III. $\sim[p(-1)\rightarrow q(1)]\wedge p(-1/2)$

A) VFV   B) VVF   C) VVV
D) FVV   E) VFF

93. Si f es una función lógica definida mediante:

$$f(x)=\begin{cases}10 \text{ si x es verdadero}\\ -2 \text{ si x es una proposición abierta}\\ -5 \text{ si x es falso}\end{cases}$$

Determine el valor de:

$f(a^0=1)+f(b^2\geq 0)+f(c=1)+f(1=2)$.
$f(0=-0)$

A) – 56   B) – 46   C) –36
D) – 30   E) – 20

94. Si p, q, r, t y u son proposiciones lógicas, tal que $(p\vee r)\rightarrow(q\rightarrow p)$ es falsa. Indicar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. $(q\leftrightarrow p)\leftrightarrow(t\wedge\mu)$
II. $(t\vee\sim t)\,\Delta\,(p\wedge q)$
III. $(p\wedge r)\wedge t$

A) VVF   B) FFF   C) VFV
D) FVF   E) VFF

95. Sean p, q, r, s, t proposiciones lógicas simples y se cumple:

$(\sim p\wedge q)\rightarrow(p\vee r)\equiv(s\wedge t)\leftrightarrow(\sim s\vee\sim t)$

entonces, simplifique:

$[(p\wedge r)\rightarrow(s\vee t)]\wedge(q\wedge t)$

A) $s\vee t$ B) ~ t   C) ~ s
D) t   E) s

96. Si $[(p\rightarrow q)\wedge\sim q]\vee[(\sim p\vee r)\rightarrow q]$ es falsa, determine el valor de verdad de:

I. $[r\rightarrow\sim(p\vee q)]\wedge p$
II. $[(p\leftrightarrow q)\wedge r]\rightarrow t$
III. $(p\wedge q)\leftrightarrow\sim r$

A) VFV   B) VVF   C) FFF
D) FVV   E) VVV

97. Se definen los operadores • y Θ mediante:

$p\bullet q\equiv\sim p\rightarrow\sim q$
$p\,\Theta\,q\equiv\sim p\wedge q$

Determine a qué es equivalente
$T\equiv((\sim q)\,\Theta\,p)\bullet((\sim p)\,\Theta\,q)$.

A) p   B) q   C) $p\wedge q$
D) V   E) F

98. Si $p\leftrightarrow q$ es falsa y $r\rightarrow(p\wedge q)$ es falsa, determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. $(p\wedge q)\rightarrow r$
II. $r\leftrightarrow(p\vee q)$
III. $(p\leftrightarrow\sim q)\wedge r$

A) FVF   B) FFV   C) VVV
D) FFF   E) VVF

99. Se define $p\,\square\,q\equiv(p\wedge\sim q)\vee(q\vee\sim p)$

Simplifique:

$[(\sim p\,\square\,q)\rightarrow q]\rightarrow[p\rightarrow(q\,\square\,p)]$

A) p   B) q   C) ~ p
D) ~q   E) V

100. Simplifique:

T = p # (~ p v q) si:

p q	p # q
VV	F
VF	V
FV	F
FF	F

A) p   B) q   C) $p\wedge q$
D) $\sim p\wedge q$ E) $p\wedge\sim q$

101. Determine la forma más simple de
T = p•(p•q) si:

p	q	p • q
V	V	F
V	F	F
F	V	F
F	F	V

A) $p\vee q$ B) $p\wedge q$ C) $\sim p\wedge q$
D) $p\wedge\sim q$ E) $\sim p\vee q$

102. Si $p\bullet q=p\wedge\sim q$, entonces e equivalente de: $(p\bullet\sim p)\rightarrow\{(\sim p\bullet\sim q)\wedge(p\bullet p)\}$ es:

A) V   B) $\sim p\vee q$ C) ~q
D) F   E) ~p

103. Si # es un operador lógico definido por: $p\ \#\ q\equiv(p\wedge q)\rightarrow(p\vee q)$ entonces p # q es equivalente a:

A) tautologia B) contradicción C) p
D) $p\vee q$ E) q

104. De la simplificación de la siguiente proposición:

$[p\leftrightarrow(q\vee\sim r)]\wedge\{[p\rightarrow(q\wedge\sim r)]\wedge[p\wedge(q\rightarrow r)]\}$ se puede afirmar que:

A) Es equivalente a p.
B) Es equivalente a r.
C) Es equivalente a q.
D) Es una contradicción.
E) Es una tautologia.

105. Simplifique la fórmula lógica

$[(p\wedge q)\vee(p\wedge\sim q)]\vee(\sim p\wedge\sim q)$

A) $p\rightarrow q$ B) $q\rightarrow p$ C) p
D) q   E) V

106. Simplifique la fórmula lógica:

$p\wedge\{[(p\vee\sim q)\wedge q]\vee[(\sim p\wedge q)\vee p]\}$

A) p   B) q   C) $p\wedge q$
D) $p\vee q$ E) $p\rightarrow q$

107. Simplifique la fórmula lógica

$(p\wedge q)\vee\sim\{(p\vee q)\rightarrow(p\wedge q)\}\vee(p\vee q)$

A) $p\rightarrow q$ B) $p\wedge q$ C) $p\vee q$
D) $q\rightarrow p$ E) $\sim p\wedge q$

108. Simplifique la siguiente proposición:

$\sim[q\rightarrow(p\rightarrow\sim q)]\rightarrow[(\sim p\rightarrow q)\leftrightarrow\sim p]$

A) $p\wedge\sim q$ B) $\sim p\wedge q$ C) $\sim(p\wedge q)$
D) $\sim(p\vee q)$ E) $p\vee q$

CLAVES DEL SEMINARIO 01

01	02	03	04	05	06	07	08	09	10
E	E	D	D	B	C	E	B	C	B
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
E	B	B	C	A	E	A	E	B	D
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
B	A	D	C	E	B	D	A	C	E
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
E	D	[illegible]	E	A	B	C	C	E	B
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
A	A	C	C	B	C	C	C	A	B
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
D	B	B	E	D	A	D	B	C	A
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
C	D	A	E	C	D	D	C	C	B
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
A	C	C	D	A	D	E	E	A	A
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
C	C	A	A	D	E	E	C	E	D
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
A	B	B	A	D	D	D	C	E	E
101	102	103	104	105	106	107	108		
C	E	A	E	B	A	C	C		

SEGUNDO SEMINARIO

01. Sean los conjuntos:
$A = \{\{\phi\}, \{\{\phi\}\}, \phi\}$ y
$B = \{\{\phi\}, \phi\} - \{\phi\}$, indique cuál (es) de los siguientes enunciados son correctos.
I. $B - A \neq \phi$
II. $\phi \in A - B$
III. $A \cap A = \{\phi\}$

A) sólo I B) sólo II C) sólo III
D) I y II E) I y III

02. Determine cuántos de los siguientes enunciados son correctos:
I. $\{1, \{1\}\} \subset R \rightarrow \phi \in \{1\}$
II. $\{1\} \Delta \{\{1\}\} \neq \phi$
III. $A \cap \{A\} = \phi$, donde $A \subset R$
IV. $A \Delta (B \cup C) \subset A \Delta B$

A) 0 B) 1 C) 2
D) 3 E) 4

03. Dado el conjunto
$E = \{x \in R / x^2 - 2(9k-20)x + 7(6k-11) = 0; \quad k \in N\}$, determine k; para que E sea un conjunto unitario.
A) 1 B) 3 C) 5
D) 7 E) 9

04. Dado los conjuntos
$A = \{x \in R / 2x - 5 < 4 \rightarrow 6x + 3 > 1\}$
$B = \{x \in R / 4x - 1 < 2x - 3 < 5x + 2\}$, determine $A \Delta B$
A) $\left\langle -\frac{1}{3}; \infty \right\rangle$ B) ϕ C) R
D) $\left\langle -\frac{5}{3}; -1 \right\rangle$ E) $\left\langle -\frac{5}{3}; -1 \right\rangle \cup \left\langle -\frac{1}{3}; \infty \right\rangle$

05. Determine el conjunto por extensión:
$A = \{x \in R / (x^2 + x > 6) \rightarrow (x^3 - 6x^2 + 11x \leq 6)\}$

A) $\langle 3; \infty \rangle$ B) $\langle 2; \infty \rangle$ C) $[2; \infty \rangle$
D) $[3; \infty \rangle$ E) $\langle -\infty, 3]$

06. Sean los conjuntos
$A = \{a \in Z / a^5 + 4a = 5a^3\}$ y
$B = \{a \in A / \exists\ b \in Z : a = b^2\}$

Determine la suma de los elementos del conjunto A – B.
A) 1 B) – 1 C) 2
D) – 2 E) 3

07. Dados a, b ∈ Q, A y B conjuntos tales que $B \neq \phi$, $A \cup B$ es unitario, $A = \{a^2 + 2b, b^2 + 1\}$ y $A \cup B = \{a + 4b, b + 1 - 3a\}$, determine $A \cap B$.
A) {10} B) {–10} C) $\left\{\frac{74}{49}\right\}$
D) $\left\{\frac{18}{7}\right\}$ E) {11}

08. Determine cuántos de los siguientes enunciados son correctos:
I. $A \subset B \rightarrow B^C \subset A^C$, $A, B \subset U$
II. $A, B \subset U$, $A \cap B = \phi \rightarrow (A \subset B^C \wedge B \subset A^C)$
III. $A \subset U$, $A \subset A^C \rightarrow U = \phi$
IV. $A, B \subset U$, $A \Delta B = \phi \rightarrow (A = B = \phi)$

A) 0 B) 1 C) 2
D) 3 E) 4

09. Indique cual de los siguientes enunciados son correctos:
I. Si $A^C \cap B = A \cap B \rightarrow B = \phi$
II. Si $A \Delta B^C = B \rightarrow A \subset B$
III. Si $A^C \Delta B = A \rightarrow B \subset A$
A) solo I B) solo II C) solo III
D) I y II E) II y III

10. Dados los conjuntos A, B y C. Si se tiene que: $x \notin (A \cap B^C) \cup C^C$. ¿Cuál o cuáles de los enunciados siguientes son verdaderos?
I. $(x \notin A \wedge x \in B) \wedge x \in C$
II. $x \in (C - A) \vee x \in (B \cap C)$
III. $x \in [(A^C \cup B) - C^C]$
A solo I B) solo II C) solo III
D) I y II E) II y III

11. Si $A \subset B$, simplifique:
$\{[(A \cap B) \cup (B \cup (A - B))] \cap [(A^C - A) \cap (B^C - B)]\} \cup (B \Delta A)$

A) B – A B) ϕ C) B
D) A E) U

12. Sean A, B, M subconjuntos de un conjunto universal E, entonces
$(A \cap B \cap M) \cup (A \cap B^C \cap M) \cup (A \cap B \cap M^C) \cup (A \cap B^C \cap M^C)$ es igual a:
A) B – A B) A – B C) B
D) M E) A

13. Al simplificar $(A \cup B)^C \cup [(B \cap A^C) \cup (A \cap B)]$; obtenemos.
A) $A \cup B$ B) $(A \cup B)^C$ C) $A \cup B^C$
D) $(A \cap B^C)^C$ E) ϕ

14. Aplicando leyes de conjuntos siendo A y B subconjuntos no vacios de un conjunto universal U simplificar:
$M = \{[(B \cup A) \cap (B^C \cap C)] \cup A^C\} \cup B^C$
Si $A \subset B$.
A) A B) A^C C) B
D) B^C E) C

15. Dados los conjuntos A, B y C tales que: $A \subset B$ y $C \cap A = \phi$.
Simplifique:
$[A \cup (B - C)] \cap [B \cup (C - A)]$

A) $A \cap B$ B) A – B C) B – A
D) B – C E) C – B

16. Si $M = [2, 4\rangle$ y $P = \langle 3, 8\rangle$, determine $S = [M^C - (M \cap P)^C]^C$, siendo el conjunto de los números reales el universo.
A) $[2, 3\rangle$ B) $\langle 3, 4\rangle$ C) R
D) ϕ E) $[0, +\infty\rangle$

17. Sea $A = \{\phi, B, C\}$ y P(A) es el conjunto potencia de A. De los enunciados
I. $\{\phi\} \in P(A)$
II. $\{\{\phi\}\} \in P(A)$
III. $\phi \subset P(A)$
IV. $\phi \in P(A)$
V. $\{\phi\} \subset P(A)$
¿Cuántos son correctos?
A) 0 B) 1 C) 2
D) 3 E) 4

18. Dados los siguientes enunciados:
I. $P(A) - A = \phi \leftrightarrow A = \phi$
II. $P(A) - \{A\} \neq \phi$
III. Sean $A = \{a\}$, $B = \{b\}$, $a \neq b$, entonces $P(A - B) = P(A)$
¿Cuál(es) son correctos?
A) sólo I B) sólo II C) sólo III
D) I y II E) II y III

19. Dados los conjuntos:
$A = \{3; \phi; \{5; 7\}; \{3\}\}$
$B = \{\phi; \{3; 5\}; \{7\}\}$
C = {x / x es el número de elementos de A ∨ x es el número de elementos de B}
¿Cuántos de los enunciados son correctos?
I. $\{3; \{3\}\} \subset P(A)$
II. $\{3; 7\} \in P(C)$
III. $\phi \in P(A \cup B \cup C)$
IV. $\{\{3; 5\}\} \subset B$
V. $\{\phi; 3\} \in P(A \cup B)$
A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

20. Siendo A y B dos conjuntos y, $\eta(A \cup B) = 11$, $\eta(P(A)) + \eta(P(B)) = 192$. Determine $\eta[P(A \cap B)]$
A) 1 B) 9 C) 16
D) 4 E) 32

21. Si $\eta[P(A)] = 128$; $\eta[P(B)] = 16$; $\eta[P(A \cap B)] = 8$, determine $\eta[P(A \cup B)]$
A) 4 B) 16 C) 64
D) 128 E) 256

22. Sea el conjunto:
$A = \{x \in [-15, 20] / \exists\, y \in [-10, 12]$ con $x + y = 26\}$. Determine el número de elementos de $A \cap Z$. Si Z es el conjunto de los números enteros.
A) 5 B) 6 C) 7
D) 8 E) 9

23. Sean los conjuntos A, B, $C \subset U$ que cumplen:
1) $\eta(A) = 44$
2) $\eta(B) = 41$
3) $\eta(C) = 45$
4) $\eta(A \cap B \cap C) = 5$
5) $\eta(U) = 100$
6) $\eta[A - (B \cup C)] = 20$
7) $\eta[B - (A \cup C)] = 15$
8) $\eta[C - (A \cup B)] = 20$
9) $\eta[(A \cap B) - C] = \eta[(A \cap C) - B] + 1$

Determine $\eta[(B \cap C) - A]$

A) 11 B) 12 C) 13
D) 14 E) 15

24. Los conjuntos A y B que tienen 3 elementos comunes se inscriben en un universo U. Si $\eta(A \cup B) + \eta(A \cap B) = 33$; $\eta(A) - \eta(B) = 17$ y $\eta(B - A) = \eta[(A \cup B)^C]$, entonces $\eta(U)$ es:
A) 33 B) 35 C) 37
D) 39 E) 40

25. Sean los conjuntos:
$A = \{x \in R / x \in B \to x \in [0; 5]\}$
$B = \{x \in R / x = 2n + 1, n < -1 \vee n > 1\}$, determine el número de elementos del conjunto $A \cap Z$, donde Z es el conjunto de los números enteros.
A) 6 B) 7 C) 8
D) 9 E) 10

26. Sean los conjuntos:
A = {P(x) / P es un polinomio mónico de grado 3}
B = {P(x) / P es un polinomio cuyas raices son las raices de la ecuación $x^2 - 7x + 12 = 0$}
C = {P(x) / P es un polinomio con coeficientes reales que cumple $P(1) = 36$}.
$D = \{a \in R \;/\; P(x) \in A \cap B \cap C \wedge P(a + 1) = 0\}$.

Determine el conjunto D.

A) {3; 4; –5} B) {2; 4; – 3}
C) {2; 3; – 5} D) {2; 3; – 8}
E) {2; 3; – 6}

27. Si $\dfrac{\eta(A)}{\eta(B)} = \dfrac{3}{4}$ y el número de subconjuntos de A y el número de subconjuntos de B suman 320 subconjuntos. Además A y B tienen 2 elementos comunes, determine $\eta(A \cup B)$.
A) 10 B) 11 C) 12
D) 13 E) 14

28. Si los conjuntos A y C; B y C son conjuntos disjuntos, además:
$\eta(A - C) = \eta(B - C) = 12$
$\eta\,[P(A) \cap P(B)] = 16$
$\eta\,(A \cup B \cup C) = 23$
Calcule: $\eta(C) + \eta(A \cap B)$

A) 6 B) 7 C) 8
D) 12 E) 20

29. Sean A, B y C conjuntos no vacios; que cumple $\eta(A \,\Delta\, B) = 22$, $\eta\,(B \,\Delta\, C) = 16$; $\eta\,(C \,\Delta\, A) = 14$, $\eta(A \cup B \cup C) + \eta(A \cap B \cap C) = 30$.
Determine $\eta[P(A \cap B \cap C)]$
A) 2 B) 4 C) 8
D) 16 E) 32

30. De los 96 asistentes a una fiesta se sabe que el número de hombres es igual al número de mujeres solteras. Si hay 18 hombres casados y más de 29 mujeres casadas. ¿Cuántas personas son solteras si entre ellas hay más de 14 hombres?
A) 28 B) 32 C) 38
D) 45 E) 48

31. En una encuesta de 150 estudiantes, se sabe que 60 son mujeres; 80 estudiaban biologia; 20 son mujeres que no estudian biologia ¿Cuántos hombres no estudian biología?
A) 10 B) 20 C) 40
D) 50 E) 80

32. En cierta población de 2180 personas y de los cuales se conoce lo siguiente:
20 consumen solo el producto α
40 consumen solo el producto β
60 consumen solo el producto γ
El número de personas que consumen solo "α" y "β" es la mitad del número de personas que consumen los tres productos. El número de personas que solo consumen "β" y "γ" es igual que el número de personas que consomen "α". ¿Cuántos consumen solamente "β" y "γ"?
A) 1020 B) 1040 C) 1060
D) 1100 E) 1080

33. Sea $U = \{1; 2; 3; 4; \ldots\ldots; 20\}$
$A = \{4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12\}$, determine el número de elementos de $E = \{x \in U / x \in A \leftrightarrow 2x \in A^C\}$
A) 3 B) 4 C) 5
D) 6 E) 7

34. Dado el conjunto
$A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$, determine que enunciados son correctos
I. $\exists\, x \in A / x + 7 < 15$
II. $\exists\, x \in A / x + 7 = 7$
III. $\forall\, x \in A : x + 7 \leq 16$
A) solo I B) solo II C) solo III
D) I y III E) II y III

35. Dado el conjunto $A = \{-2; -1; 0; 1; 2\}$, indique cuál(es) de los siguientes enunciados son correctos.
I. $\forall\, x \in A, \forall\, y \in A : x^2 + 2 > y$
II. $\exists!\, x \in A, \exists!\, y \in A / x \neq y \wedge x^2 = y^2$
III. $\forall\, x \in A, \forall\, y \in A : x^2 + y^2 \geq 0$
A) solo I B) solo II
C) I y III D) II y III
E) solo III

36. Dados los conjuntos $A = \{2; 3; 8\}$, $B = \{1; 2; 7\}$ y los siguientes enunciados
I. $\exists\, x \in A / \forall\, y \in B : x + y \geq 9$
II. $\exists\, x_1, x_2 \in A \wedge \exists\, y_1, y_2 \in B / 2(x_1 + x_2) = y_1 + y_2$
III. $\forall\, x \in A, \forall\, y \in B: x + 2y < 3$
Determine cuál(es) son correctos
A) solo I B) I y II C) I y III
D) I, II y III E) II y III

37. Determine el conjunto:
$A = \{b \in R / b^3x^2 + bx = b^2 + b, \forall\, x \in R\}$ por extensión:
A) {0} B) R C) R – {0}
D) R^+ E) R^-

38. Dados los conjuntos $A = \{-2; 0; 1\}$, $B = \{-1; 1; 2\}$, indicar cuál(es) de los siguientes enunciados son correctos:
I. $\forall\, x \in A, \exists\, y \in B / x + y \in N$
II. $\exists\, x \in A, \forall\, y \in B : x + y \in A$
III. $\exists\, x \in P(A), \exists\, y \in P(B), x \neq \phi, y \neq \phi$ tal que $x \,\Delta\, y = \{0, 1\}$
A) solo I B) solo II C) solo III
D) I y II E) II y III

39. Determine que enunciados son correctos:
I. $xy = 1; x > 0; y > 0 \Rightarrow x + y \geq 2$
II. $x + \dfrac{1}{x} \geq 2; \forall\, x \in R^+$
III. $\dfrac{x + y}{2} \geq \sqrt{xy}; \forall\, x, y \in R^+$
A) solo I B) solo II C) solo III
D) II y III E) I, II y III

40. Dados los siguientes enunciados:
I. $\forall a, b \in R: a + b = b + a$
II. $\forall a \in R \quad : a.0 = 0$
III. $\forall a, b \in R: (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
IV. $\forall a, b, c \in R: ab + ac = a(b + c)$

Si M representa el número de enunciados que son axiomas y N representa el número de enunciados que son propiedades en el sistema de los números reales (R).
La relación correcta entre M y N es:
A) M > N B) M < N C) M = N
D) M = 3N E) N = 3M

41. Si $a \in R^+$ y $(-b) \in R^+$ cuál(es) de los enunciados son correctos
I. $(b - a).(ab)^{-1} \in R^+$
II. $[a(-b)]^{-1} \in R^+$
III. $[(-a)(b^{-1})(-b)] \in R^+$
A) solo I B) solo II C) I y II
D) II y III E) I, II y III

42. Indique cuál(es) de los siguientes enunciados son correctos:
I. $\forall a \in R^+ \quad : \frac{a^2+1}{a+1} \geq 2\sqrt{2} - 2$
II. $\forall a, b, c \in R^+ : \frac{b}{ab^2+c} \leq \frac{1}{2\sqrt{ac}}$
III. Si $a\sqrt{b} + b\sqrt{a} = 2\sqrt{2}$ el mínimo valor de "ab" es $\sqrt[3]{4}$

A) solo I B) solo II C) solo III
D) I y II E) I, II y III

43. Indique cuál(es) de los siguientes enunciados son axiomas de los números reales.
I. $\forall x \in R: x^2 \geq 0$
II. $\forall x, y \in R: x.y = 0 \rightarrow x = 0 \vee y = 0$
III. $\forall x, y \in R: x < y \vee x = y \vee x > y$

A) solo I B) solo II C) solo III
D) I y II E) II y III

44. Determine $E = 2^{-1} \# (3^{-1} \# 4^{-1})$, donde # es una operación definida por: $a \# b = a + b - 5$, a^{-1} denota el elemento inverso en la operación definida.
A) 8 B) 9 C) 10
D) 11 E) 12

45. Se define la operación $*$ en R mediante:
$a * b = 2(a + b) + 3$, $\forall a, b \in R$
Determine que enunciado son correctos:
I. La operación * es conmutativa
II. La operación * es asociativa.
III. La operación * tiene elemento neutro.

A) I y II B) solo I C) solo II
D) II y III E) solo III

46. En R, se define la operación Δ, mediante $a \Delta b = a + b - 8$, $\forall a \in R$, según esta operación, determine la suma del elemento neutro con el inverso de -25
A) 3 B) 9 C) 27
D) 41 E) 49

47. Determine el conjunto por extensión:
$$A = \left\{ x \in R / \sqrt[5]{1+x} + \frac{\sqrt[5]{1+x}}{x} = \sqrt[5]{\frac{x}{64}} \right\}$$
A) {1} B) { } C) $\left\{-2; -\frac{2}{3}\right\}$
D) {3} E) {4}

48. Determine el conjunto solución de la ecuación:
$$\frac{b(x-b)}{a} + \frac{a(x-a)}{b} = x \ ; a \neq 0, \ b \neq 0$$
A) {a – b} B) {b} C) {a + b}
D) {a} E) $\{a^2 + b^2\}$

49. Determine la solución de la ecuación:
$$9[6(3x - 3)] + 8(4x - 3) = 72(x - 3)$$
A) $-\frac{13}{61}$ B) $-\frac{14}{61}$ C) $-\frac{15}{61}$
D) $-\frac{16}{61}$ E) $-\frac{17}{61}$

50. Determine el conjunto solución de la siguiente ecuación de primer grado en "a": $3a\left(\frac{2}{x} - \frac{7}{x^2}\right) + x = \frac{19a^2(3-x)}{x^2}$
A) {–2} B) {2} C) {3}
D) {4} E) {9}

51. Resolver para x:
$$\left(x - 1 + \frac{\frac{1}{ab} + \frac{1}{b}}{1 + \frac{1}{ab}}\right) + \left(1 - x + \frac{\frac{1}{a} + 1}{\frac{1}{a} + b}\right) = a$$
A) $\frac{a+b}{ab}$ B) $\frac{a+b}{a-b}$ C) $\frac{2a+b}{a-b}$
D) $\frac{a+ab}{ab+1}$ E) $\frac{ab}{ab+1}$

52. Resolver la ecuación en x:
$$\frac{x+1}{x+a+b} + \frac{a-b+1}{x+a-b} = 1$$
A) $x \in \left\{\frac{b-1}{a}\right\}$ B) $x \in \left\{\frac{a-1}{b}\right\}$
C) $x \in \{a\}$ D) $x \in \{b\}$
E) $x \in \left\{\frac{a}{b-1}\right\}$

53. Se considera la ecuación de raíces reales: $x^2 + mx + n = 0$ y $cs = \{r_1, r_2\}$, determine que enunciados son correctos:
I. $x^2 - mx + n = 0$, posee $c.s = \{-r_1; -r_2\}$
II. $nx^2 + mx + 1 = 0$, posee $c.s = \left\{\frac{1}{r_1}; \frac{1}{r_2}\right\}$
III. $(x + 1)^2 + m(x + 1) + n = 0$, posee $c.s = \{r_1 - 1; r_2 - 1\}$
A) I y II B) I y III C) I, II y III
D) solo I E) solo II

54. Determine la ecuación de 2do grado de coeficiente principal 1 y de raíces m y n si se sabe que:
$x^2 + (m - 1)x + m - 2 = 0$; tiene solución única real;
$x^2 - (n + 1)x + 2n = 0$ tiene una raíz igual a 3.
A) $x^2 - 9x + 18 = 0$
B) $x^2 + 9x + 16 = 0$
C) $x^2 + 10x + 18 = 0$
D) $x^2 - 9x - 16 = 0$
E) $x^2 - 9x + 20 = 0$

55. Dadas las ecuaciones cuadráticas:
$x^2 - 5x + n = 0$ .... (1)
$x^2 - 7x + 2n = 0$ .... (2)

Determine el valor de n, si una de las raíces de la 2da ecuación es el doble de una de las raíces de la 1era ecuación.
A) 3 B) 4 C) 5
D) 6 E) 8

56. Señale una de las raíces de la ecuación cuadrática:
$(x^2 + ax - 10)(1 - a) = (2a + 6)(1 - x)$

A) a + 2 B) 2 C) 2 – a
D) a E) a – 2

57. Se tienen las ecuaciones: $x^2 + bx + c = 0$; $x^2 + px + q = 0$, donde las raíces de la primera ecuación son la suma y el producto de las raíces de la segunda y las raíces de la segunda son la suma y el producto de raíces de la primera, entonces T = pb es:
A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{2}$ C) 1
D) 2 E) 4

58. Determine "a" de tal manera que la suma de los cuadrados de las raíces de la ecuación:
$x^2 - (a - 1)x + a - 2 = 3$ sea mínima.
A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 7

59. Se define la ecuación de segundo grado en x:

$2x^2 - 5x + 4 = 0$, siendo sus raíces r y s, determine el valor de
$E = r^6 + s^6$

A) $\frac{9^3}{4^3}$ B) $\frac{12^3}{4^3}$ C) $\frac{9^3 - 12^3}{4^3}$
D) 9^6 E) 12^6

60. Si a y b son las raíces de la ecuación $x^2 - 10x + 1 = 0$, determine el valor de $E = \sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b}$
A) $\sqrt{3\sqrt{3}+2}$ B) $\sqrt{2\sqrt{3}+3}$
C) $\sqrt{2\sqrt{3}+1}$ D) $\sqrt{\sqrt{3}+2}$
E) $\sqrt{2\sqrt{3}+2}$

61. Sabiendo que $(p + q)^2$ y $(p - q)^2$; son las raíces de cierta ecuación cuadrática recíproca, donde p y q son raíces de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$, $a > b > 0$ halle $a^4 - b^4$.
A) 2abc B) $-2abc^2$ C) $4abc^2$
D) $-4ab^2c$ E) $-4abc^2$

62. Halle el valor absoluto de la diferencia entre las raíces de $P(x) = c + bx - x^2$, si el mayor valor de P(x) es 9.
A) 4 B) 5 C) 6
D) 7 E) 12

63. Determine k para que las raíces de la ecuación $\frac{x^2+3x}{5x+2} = \frac{2k-7}{2k-5}$; sean simétricas.
A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

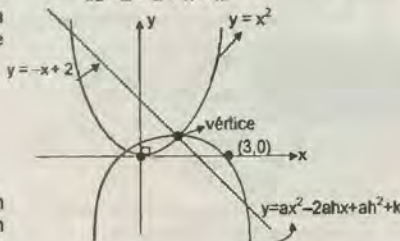
64. Determine la suma de los cuadrados de las raíces de la ecuación: $(2k + 2)x^2 + (4 - 4k)x + k - 2 = 0$; sabiendo que las raíces son recíprocas.
A) 5 B) $\frac{82}{9}$ C) 10
D) 13 E) 15

65. Determine todos los valores de m de manera que las raíces de la ecuación: $x^2 - 2mx + m^2 - 1 = 0$ tenga una raíz menor que 2 y otra mayor que 2.
A) $\langle -1; 2\rangle$ B) $\langle 0; 3\rangle$ C) $\langle 1; 3\rangle$
D) $\langle 3; 10\rangle$ E) $[3; \infty\rangle$

66. Halle los puntos de la parábola $y = x^2 + 2x + 25$ en los que las rectas tangentes a dicha parábola pasan por el origen. De como respuesta la suma de las coordenadas de dichos puntos.
A) 40 B) 60 C) 100
D) 110 E) 120

67. Determine la recta tangente a la parábola $y = 2x^2$, si la recta es $y = mx - 8$.
A) $y = 8x + 8$ B) $y = 8x - 8$
C) $y = 6x - 8$ D) $y = 6x + 8$
E) $y = 6x$

68. De las gráficas, determine el valor de $E = a + h + k$.



A) $-\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{4}$ C) 2
D) $\frac{7}{4}$ E) $-\frac{7}{4}$

69. Indique en que intervalo debe variar "m" para que la ecuación $2x^2 + (2m + 3)x + 8 = 0$ tenga una raíz en $\langle 3, 8\rangle$.
A) R^+ B) R^- C) $\langle 1, 2]$
D) $\left\langle -10, -\frac{35}{6}\right\rangle$ E) $\left\langle 0, \frac{1}{2}\right\rangle$

70. Si $x \in R^+$ y $A = \left\{k / k = \frac{x}{x^2 - 3x + 4}\right\}$ entonces indique cuál es el enunciado correcto.
A) $A \cap [1/2, 2] = \phi$
B) $A \subset \langle 11/10, 15/10\rangle$
C) $A \subset \langle 0, 1]$
D) $A \cap \langle 4, 7] \neq \phi$
E) $A - \langle 1/2, 1] = \phi$

71. Determine el conjunto A por extensión:
$A = \left\{x \in R / \sqrt[4]{x+27} + \sqrt[4]{55-x} = 4\right\}$
A) {54} B) {–26} C) {54; –26}
D) ϕ E) {1}

72. Si x_1, x_2, x_3 y x_4 son las raíces de la ecuación $ax^4 + 48x^2 + b = 0$, donde $(x_1 . x_2)^{-1} + (x_3 . x_4)^{-1} = 12$, indique el valor de "b" ($x_2 = -x_1$, $x_4 = -x_3$)
A) $\frac{1}{2}$ B) 0 C) –1
D) 1 E) 4

73. Determine el conjunto de valores de "a" para que la ecuación bicuadrada $x^4 + (a + 2)x^2 + (a + 4) = 0$ tenga solamente raíces reales.
A) $[-4; -1]$ B) $[-4; -2]$
C) $[-4; +\infty\rangle$ D) $[-4; -\sqrt{12}]$
E) $\langle -\infty; -2]$

74. Determine la ecuación bicuadrada si una de sus raíces es el doble de otra de sus raíces, si además al coeficiente principal es 1 y la suma de sus coeficientes es 45. Como respuesta da el término independiente.
A) 44 B) 45 C) 50
D) 60 E) 64

75. Si el producto de las raíces de la ecuación bicuadrada: $(5n^2 + 2)x^4 - (4n^4 + 9)x^2 + 3(n^2 + 2) = 0$ es igual a la unidad. Determine la mayor raíz en valor absoluto
A) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C) $\sqrt{2}$
D) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ E) 5

76. Si una raíz de la ecuación: $9x^4 - 37x^2 + m = 0$ es 1/3, determine m.
A) –4 B) –3 C) 3
D) 4 E) 5

77. Si la suma de las raíces positivas de $x^4 - (m + 1)x^2 + m = 0$; es el 75% del producto de las raíces; determine la menor raíz.
A) –2 B) 0 C) 1
D) 2 E) 4

78. En relación al conjunto:
$A = \{x \in R / 4x^4 - 9x^3 - 26x^2 - 9x + 4 = 0\}$, indicar cuál(es) de los siguientes enunciados son (es) correctos:
I. $\eta(A) = 3$
II. $A - \{-1; -2; -3\} = \{4; 1/4\}$
III. $A \Delta Z = \{1/2\}$
A) I y II B) I y III C) I, II y III
D) solo I E) solo III

79. Si $A = \{x_1, x_2, x_3\}$ es el conjunto formado por las raíces reales de la ecuación. $2x^5 - 7x^4 + 6x^3 - 6x^2 + 7x - 2 = 0$, halle $x_1x_2x_3$.
A) –1 B) $-\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{2}$
D) 1 E) 0

80. Determine la menor raíz de: $6x^6 - 13x^5 - 6x^4 + 26x^3 - 6x^2 - 13x + 6 = 0$
A) $-\frac{3}{2}$ B) –1 C) $-\frac{2}{3}$
D) $\frac{2}{3}$ E) 1

81. Dar la menor solución de la ecuación:
$6x^4 - 35x^3 + 62x^2 - 35x + 6 = 0$
A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{1}{2}$ C) 1
D) 2 E) 3

82. Dada la ecuación reciproca $x^4+x^3-x^2+x+1=0$, determine la parte imaginaria de una de sus raices.

A) $\sqrt{2+2\sqrt{13}}$ B) $\frac{\sqrt{2+2\sqrt{3}}}{4}$

C) $\frac{\sqrt{2+2\sqrt{13}}}{2}$ D) $\sqrt{\frac{1+\sqrt{13}}{2}}$

E) $\sqrt{\frac{1+\sqrt{13}}{4}}$

83. Determine la menor raiz irracional de la ecuación:
$x^4-6x^3+10x^2-6x+1=0$

A) $5-\sqrt{3}$ B) $4-\sqrt{2}$ C) $3-\sqrt{2}$
D) $2-\sqrt{3}$ E) $2-\sqrt{5}$

84. Determine el conjunto A:
$A=\{x\in Z\ /\ 15x^5+13x^4-258x^3+258x^2-13x-15=0\}$, indique $\eta(A)$.

A) 0 B) 1 C) 2
D) 3 E) 5

85. Determine cuántas de las proposiciones son verdaderos

I. $\forall a\in R: a^2>0$
II. $\exists a\in R\ /\ a^2<a$
III. $a\le b\rightarrow a+c\le b+c,\ c\in R$
IV. $a\le b\wedge c\le d\rightarrow a+c\le b+d$
V. $\forall a, b\in R: a<b\rightarrow a\le b$

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

86. Sea $x\in[1/4;\ 5/4]$ y sean M el menor valor y m el mayor valor que satisfacen $m\le\frac{x+5}{x-2}\le M$. Entonces $T=Mm$ es:

A) 24 B) 20 C) $\frac{25}{3}$
D) 25 E) -25

87. Determine el mayor valor de k con la propiedad $\frac{2a^2+3(b^2+c^2)}{a\sqrt{3bc}}\ge k$
$\forall a, b, c\in R^+$

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 6

88. Resolver para x; a, b, c $\in R^+$;
$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^7}+\frac{1}{c^5}>\frac{4}{a^2+b^7+c^5}$

$\frac{a^2+b^7-x}{c^5}+\frac{a^2+c^5-x}{b^7}+\frac{b^7+c^5-x}{a^2}+\frac{4x}{a^2+b^7+c^5}<1$

A) $\langle a^2+b^7+c^5;\ \infty\rangle$
B) $\langle-\infty;\ a^2+b^7+c^5\rangle$
C) $\langle 0;\ a^2+b^7+c^5\rangle$
D) $\langle a^2+b^7+c^5;\ 1\rangle$
E) $\langle 1;\ \infty\rangle$

89. Sabiendo que: $0<a<b$, determine el valor de "x" en: $\frac{x}{b}-\frac{b^2}{a}<\frac{x}{a}-\frac{a^2}{b}$

A) $x>-(b^2+ab+a^2)$
B) $x>a^2+b^2$
C) $x>2a+a^2+b^2$
D) $x>-(a^2-b^2+ab)$
E) $x<a^2-ab+b^2$

90. Determine el conjunto solución de la inecuación cuya variable es x:
$\frac{a}{b}(x-a)\le x-\frac{b}{a}(x-b);\ a>0,\ b>0$

A) $\langle-\infty;\ a]$ B) $\langle-\infty;\ b]$
C) $\langle-\infty;\ 0]$ D) $\langle-\infty;\ a+b]$
E) $[0;\ +\infty\rangle$

91. Resolver la inecuación en x:
$\frac{(2m-n)x}{m-n}+\frac{2m-n}{m+n}<\frac{(2m+n)x}{m+n}+\frac{2m+n}{m-n}$; $m<n<0$
Determine la suma de todos los valores enteros positivos que verifican la desigualdad.

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

92. Al calcular A se obtiene (a; b), siendo : $A=\left\{3x-1\ /\ 2<\frac{x-2}{x+1}<4\right\}$.
Determine $T=a+b$.

A) -20 B) -17 C) -13
D) 4 E) 7

93. Determine el conjunto solución de:
$\frac{x-b}{x-a}<\frac{a}{b}$, si $0<a<b$.

A) $\langle a;\ b\rangle$ B) $\langle b;\ a+b\rangle$
C) $\langle a;\ a+b\rangle$ D) $\langle a-b;\ a+b\rangle$
E) $\langle 0;\ b\rangle$

94. Determine el conjunto A,
$A=\left\{x\in R/\frac{(x-19)^3-2}{(x-19)^2+1}<\frac{(x-19)^3-4}{(x-19)^2+2}\right\}$

A) $x<17$ B) $0<x<17$
C) $0<x<19$ D) $7<x<19$
E) $x>19$

95. Determine el menor de los números reales M que satisface la inecuación.
$4+6x-3x^2\le M,\ \forall x\in R$

A) 6 B) 7 C) 8
D) 9 E) 10

96. Determine los valores de k para que la inecuación se cumpla para cualquier valor de x en R.
$\frac{x^2+kx+1}{x^2+1}<2$

A) $\langle 0;\ \infty\rangle$ B) $\langle-1;\ 1\rangle$ C) $\langle-3;\ 3\rangle$
D) $\langle-2;\ 2\rangle$ E) $\langle 2;\ \infty\rangle$

97. Si $M=\left\{x\in Z/\frac{x}{x+1}<\frac{12}{19}<\frac{x+1}{x+2}\right\}$
indique $\eta(M)$

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

98. Se define el conjunto:

$A=\left\{a\in Z/\forall x\in R: -3<\frac{x^2+ax-2}{x^2-x+1}<2\right\}$

determine el número de elementos del conjunto A.

A) 0 B) 1 C) 2
D) 3 E) 4

99. Determine el conjunto solución de la inecuación $\frac{x^4-x^2-6}{x^2-1}\le 0$

A) $\langle-1;\ 1\rangle$ B) $[3;\ +\infty\rangle$ C) $\langle-\infty;\ -2]$
D) $[-\sqrt{3};\sqrt{3}]$ E) $[-\sqrt{3};\ -1\rangle\cup\langle 1;\ \sqrt{3}]$

100. Sean:
$A=\left\{x\in R/\frac{x(8-x)^2}{x^3+x^2}\ge 0\right\}$ y
$B=\left\{x\in R/\sqrt{x^2-16x+68}>-2\right\}$, halle el conjunto $B-(A\cap B)^C$.

A) $\langle-\infty;\ -1\rangle\cup\langle 0;\ +\infty\rangle$
B) $\langle-\infty;\ -1\rangle$
C) $\langle 0;\ +\infty\rangle$
D) $\langle-\infty;\ -1]\cup[0;\ +\infty\rangle$
E) $\langle-\infty;\ -1\rangle\cup[0;\ +\infty\rangle$

101. Resolver:
$x(2x+1)(x-2)(2x-3)>63$

A) $\langle-\infty;\ 2\rangle\cup\langle 3;\ \infty\rangle$
B) $\left\langle-\infty;-\frac{3}{2}\right\rangle\cup\langle 3;\ \infty\rangle$
C) $\langle 0;\ \infty\rangle$
D) $\left\langle-\infty;-\frac{1}{2}\right\rangle\cup\langle 2;\ \infty\rangle$
E) $\langle-\infty;-1\rangle\cup\langle 1;\ \infty\rangle$

102. Si $\forall$ a,b$\in R^+$, se verifica $(a+b)^3 \le k\,(a^3+b^3)$, el mínimo valor que puede admitir k es:
A) 3 B) 4 C) 5
D) 6 E) 8

103. Determine el conjunto solución de la inecuación:
$(x^2+1)(x-5)(x^2-13x+40) \le 0$
A) [5; 8] B) $\langle 5; +\infty\rangle$
C) $\langle -\infty; 5]$ D) $[5; +\infty\rangle$
E) $\langle -\infty; 8]$

104. Sea S = {a} $\cup$ [b, c] el conjunto solución de la inecuación $x(x-2)^2(x-3)^5(x+1)^6 \le 0$, determine el valor de E = a + b + c.
A) 0 B) 1 C) 2
D) 3 E) 4

105. Si el conjunto solución de la inecuación:
$$\frac{(x^3-8)(x^2-9)^2(x^2-7x+13)}{(1-x)(4-x^2)} \le 0 \quad \text{es}$$
$S = \langle -a; b\rangle \cup \{-c; c\}$, $c < 0$
Determine el valor de E = a + b + c.
A) – 2 B) – 1 C) 0
D) 1 E) 3

106. Si
$$A = \left\{ x \in R \;/\; \frac{(x^3-1)(x^2+3+x)}{\sqrt{x-3}.\sqrt[3]{x-2}} \le 0 \right\},$$
indique A^C.
A) R B) ϕ C) $\langle 1; \infty\rangle$
D) $\langle 0; 1]$ E) $\langle -\infty; 0]$

107. En relación al conjunto S de los siguientes enunciados:
$\forall x \in S$: $|x^2-9| + |x^2-4| = 5$
Indicar cual(es) son correctos.
I. $S \cap Z = \{3, 2, -3, -2\}$
II. $S \subset \langle -\sqrt{14} \le x \le -2 \vee 2 \le x \le \sqrt{14}\rangle$
III. S – N = {1, 2, 3}
A) solo I B) solo II C) I y II
D) I y III E) II y III

108. En relación al conjunto solución S de la ecuación:
$$\frac{|x^2-3x|+5}{x^2+|x+3|} = 1$$
Cuál(es) de los siguientes enunciados son correctos:
I. $S \subset \langle -\infty; -2] \cup [1; \infty\rangle$
II. Si $x = \frac{1+\sqrt{b}}{c}$ entonces b + c = 7
III. $S \cap R = \left\{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}\right\}$
A) solo I B) solo II C) I y II
D) I y III E) II y III

109. Si $\forall x \in H$:
$|x^2-3x+2| = 4 - x^2 + |x|$
Indicar cuál(es) de los siguientes enunciados son correctos:
I. η (H) = 3.
II. $H \cap I = \left\{\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right\}$; I conjunto de los irracionales.
III. $\eta\,[H \cap Q] = 2$; Q conjunto de los racionales.
A) solo III B) I y III C) solo I
D) solo II E) II y III

110. En relacion al conjunto solución "S" de la ecuación:
$$\left|\frac{x^2-6|x|+7}{x^2+6x+7}\right| = 1$$
Indique cuál(es) de los siguientes enunciados son correctos:
I. $S = R - Z$
II. $S = R^+ \cup \{0\}$
III. $S \cup R^+ = R$
A) I y II B) I y III C) II y III
D) solo I E) N.A.

111. Si $\forall x \in \langle -\infty; a\rangle \cup \langle b; c\rangle \cup \langle c; d\rangle \cup \langle d; \sqrt{3}-2\rangle$ es el conjunto de solución de la inecuación:
$$\frac{3}{|x+3|-1} < |x+2|$$
Determine el valor de a + b + c + d
A) – 8 B) – 9 C) – 12
D) – 14 E) N.A.

112. Si se resuelve la desigualdad:
$$x^2 + 4 \ge |3x+2| - 7x$$
Se obtiene: $x \in \langle -\infty; p] \cup [q, \infty\rangle$, cuál(es) de los enunciados siguientes son correctos:
I. pq > 0
II. $p + q = -7 - \sqrt{19} + \sqrt{2}$
III. $p^2 + q^2 = 10$
A) solo I B) solo II C) solo III
D) I y II E) II y III

113. Al resolver: $\frac{|x^2-2x|+4}{x^2+|x+2|} \le 1$, se obtiene $x \in \langle -\infty, a] \cup [b, +\infty\rangle$, cuál (es) de los siguientes enunciados son correctos:
I. a + b = 0
II. ab = – 4
III. a – b = 6
A) solo I B) solo II C) solo III
D) I y II E) N.A.

114. Resolver:
$|x-2|^2 - 3|x-2| - 28 < 0$
A) $\langle -4; 9\rangle$ B) $\langle -5; 9\rangle$ C) $\langle -3; 6\rangle$
D) $\langle -5; 6\rangle$ E) $\langle -2; 3\rangle$

115. El conjunto solución de la inecuación:
$$\frac{|2x+6|-|x|}{|x+2|-|x-3|} \le 0$$
Se puede expresar como:
$\langle -\infty; a] \cup [b; c\rangle$, entonces es verdad que:
A) bc = 1 B) ab < 0 C) ac > 0
D) $b^2 = 8c$ E) a = bc

116. El conjunto solución de la inecuación: $\big|1 - |x-8|\big| \ge \sqrt{25-x^2}$, se puede expresar como : [a; b] $\cup$ [c; d], indique el valor de:
T = |a| + |b| + |c| + |d|
A) 18 B) 17 C) 15
D) 13 E) 11

117. El conjunto solución de la inecuación:
$$\frac{\sqrt{2-|x|}(1-x^2)}{(|x+3|+x-1)(|x|-2)} \ge 0 \quad \text{es } [a; b\rangle$$
Halle a + b.
A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

118. Si $\forall x \in M$: $\frac{4}{|x+1|-2} \ge |x-1|$
Cuál(es) de los siguientes enunciados son correctos:
I. $M \subset R^-$
II. $M - \langle 1; 3] \subset \langle -2\sqrt{2} - 1; -3\rangle$
III. $M - \langle -2\sqrt{2} - 1, -3\rangle = \{1\}$
A) I y II B) II y III C) solo III
D) solo II E) solo I

CLAVES DEL SEMINARIO 02

01	02	03	04	05	06	07	08	09	10
B	D	B	E	E	B	A	C	A	E
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
A	E	D	E	D	C	E	C	C	D
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
E	C	A	B	B	E	C	B	B	E
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
D	B	C	D	E	B	A	E	E	C
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
E	D	C	D	B	E	C	C	A	C
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
D	D	C	A	D	C	C	B	C	D
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
D	C	E	B	C	C	B	D	D	C
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
C	E	D	E	A	D	A	A	D	B
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
A	B	D	D	D	D	D	A	A	D
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
C	A	C	A	B	D	A	C	E	A
101	102	103	104	105	106	107	108	109	110
B	B	E	C	C	A	C	C	A	E
111	112	113	114	115	116	117	118		
E	D	E	B	D	B	C	D		

TERCER SEMINARIO

01. Dada la función:
$f = \{ (2; 5), (m + n^2; m), (-1; -3), (2; 2m - n), (-1; n - m) \}$. Determine $Dom(f) \cap Ran(f)$

A) ϕ B) $\{-1\}$ C) $\{2\}$
D) $\{3\}$ E) $\{5\}$

02. Sea el conjunto $A = \{1; 2; 3; 4\}$. Se define en A las funciones $f = \{(1;1), (2; 3), (4; 2), (3; 3), (4; m)\}$ y $g(x) = mx^2 + bx + c$. Si $f(1) = g(1)$ y $g(2) = 4$, determine la suma de los elementos del rango de g.
A) 26 B) 32 C) 38
D) 42 E) 56

03. Sea f una función tal que $f(x + 3) = f(x) + f(3)$, $\forall\, x \in Z$. Indique cuál(es) de los siguientes enunciados son correctos:
I) $f(0) = 0$ II) $f(12) = 4f(3)$
III) $f(-3) = -f(3)$

A) solo I B) solo II C) solo III
D) I y III E) I, II y III

04. Sea $f: N \to N$ una función tal que $f(x) = 2x + 3$, indique cuál(es) de los siguientes enunciados son correctos
I) $\forall\, y \in N, \exists\, x \in N / f(x) = y$
II) Si $f(a) = f(b)$ entonces $a = b$
III) Si $f(ax) = af(x)$ y $f(b + x) = b + 2 + f(x)$, $\forall\, x \in N$, entonces $a + b = 3$
A) solo I B) solo II C) solo III
D) II y III E) I y III

05. Dada la función $f: A \to R$ tal que $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^3 + 2x^2 + x}{x-2}}$, determine su dominio máximal A de f.

A) $R - \{2\}$ B) $\langle -\infty; 0\rangle$ C) $\langle 2; +\infty\rangle$
D) $\langle 0; 2\rangle$ E) $\langle -\infty; 0] \cup \langle 2; +\infty\rangle$

06. Sea $f(x) = \sqrt{x - \sqrt{x+2}}$, determine su dominio maximal
A) $[2; +\infty\rangle$ B) $[-2; \infty\rangle$ C) $[-2; 0]$
D) $[1; +\infty\rangle$ E) $[-1; +\infty\rangle$

07. Determine los valores de x para los cuales existe $f(x) = \sqrt{-x\sqrt{4-x^2}}$.
A) $[1; 2]$ B) $[0; 2]$ C) $[-1; 0]$
D) $[-2; 0]$ E) $\langle -\infty; 0]$

08. Sea f una función definida por:
$f(x) = \sqrt{\dfrac{x-b}{a-x^2}}$ tal que $f(-2) = \sqrt{\dfrac{4}{3}}$; $f\left(\dfrac{3}{2}\right) = \sqrt{\dfrac{2}{5}}$; determine el dominio de f(x)

A) $\langle -\infty; -1\rangle \cup \langle 1; 2]$
B) $\langle 0; \infty\rangle$
C) $\langle -\infty; -2\rangle \cup \langle 1; \infty\rangle$
D) $\langle 1; 2] \cup \langle 3; 5]$
E) $\langle -\infty; -1\rangle$

09. Al determinar el dominio de la función cuya regla de correspondencia es:

$$f(x) = \sqrt[8]{\frac{x}{x-1} + \frac{8}{1-x^2} + \frac{2}{-x-1}} - \sqrt[16]{1 + \sqrt[2]{\frac{1}{x} + \frac{2}{x+2} - \frac{3}{x+1}}}$$

Se obtiene:
$x \in \langle -\infty, p\rangle \cup \langle q; r\rangle \cup \langle s; \infty\rangle$
Calcule:
$J = p^2 + q^2 + r^2 + s^2$

A) 14 B) 16 C) 19
D) 21 E) N.A.

10. Determine el dominio de la siguiente función:

$$f(x) = \frac{\sqrt[5]{1 - \sqrt{4x|x| - 9}}}{\sqrt{6 + 5|x| - x^2}}$$

A) $\langle -6; 6\rangle$ B) $\left\langle -6; -\dfrac{3}{2}\right]$
C) $\left[\dfrac{3}{2}; 6\right\rangle$ D) $\left\langle 1; \dfrac{3}{2}\right]$ E) $\langle 0; 6\rangle$

11. Sea la función f tal que:
$f(x) = \sqrt[8]{15 - |x + 2|}$ si el $Dom(f) = [-a; b]$, entonces $T = a + b$ es:
A) -4 B) 12 C) 15
D) 17 E) 30

12. Sea la función f tal que:
$f(x) = \sqrt{\dfrac{1}{\sqrt{x^2 + 4x + 4} - \dfrac{3}{|x+3| - 1}}}$, si el $Dom(f) = \langle -\infty, a\rangle \cup \langle b, c\rangle \cup \langle c, d\rangle \cup \langle d, e\rangle$
Calcule: $J = a + b + c + d + e$
A) $-16 - \sqrt{3}$ B) $-14 - \sqrt{3}$
C) $-12 - \sqrt{3}$ D) $-10 - \sqrt{3}$
E) N.A.

13. Sea
$$f(x) = \sqrt[4]{x^2 - 16} + \frac{\sqrt[6]{x^2 + x - 12sgn(x^2 + 12)}}{\sqrt{|x-3| - sgn(x^4 - 16)}}$$

Si $Sgn(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$, determine el dominio de f

A) $R - \langle -4; 4\rangle$ B) $R - \langle -4; 4]$
C) $\langle -\infty; -4\rangle$ D) $\langle 4; +\infty\rangle$
E) $\langle -4; 4\rangle$

14. Determine el rango de la función f definida por:
$f(x) = \begin{cases} x^2; & -2 \le x \le -1 \\ 1/2; & 1 \le x \le 5 \end{cases}$

A) $\langle 1; 4]$ B) $\{1/2\} \cup [1; 4]$
C) $\{1/2\} \cup \langle 2; 4]$ D) $\langle 0; 1/2\rangle$
E) $\langle 1; 4\rangle$

15. Sea f una función cuya regla de correspondencia:
$f(x) = \begin{cases} 2x - 2f(x); & x \ge 1 \\ 4xf(x) - 4x + 1; & 0 < x < 1 \wedge x \ne \dfrac{1}{4} \end{cases}$
Determine el rango de la función:

A) $\left[-\dfrac{1}{2}, +\infty\right\rangle$ B) $[-1, +\infty\rangle$
C) $\left[\dfrac{2}{3}, \infty\right\rangle$ D) $\left[\dfrac{3}{2}, \infty\right\rangle$ E) R^+

16. Dadas las funciones $f: R \to R$, $g: R \to R$ definidas, respectivamente por:
$f(x) = -x^2 + 3x + 1$; $g(x) = 3x^2 + 2x + 1$
Si $Ran(f) \cap Ran(g) = [a, b]$ entonces $T = 12(b - a)$ es igual a:
A) -27 B) -25 C) 31
D) 30 E) 36

17. Se define la función f por:
$f: R \to R \;/\; f(x) = \dfrac{4x^2 - 4x + 9}{12x^2 - 12x + 8}$ el rango tiene la forma : $[a; b]$, determine el valor de $J = 1 + 3a + 15b + 45ab$.

A) 12 B) 16 C) 18
D) 22 E) 50

18. Determine el rango de $f(x) = \left|x + \dfrac{1}{x}\right|$, $x \ne 0$.
A) $\langle 0; \infty\rangle$ B) $\left\langle \dfrac{1}{2}; \infty\right\rangle$ C) $\left[\dfrac{1}{2}; \infty\right\rangle$
D) $[1; \infty\rangle$ E) $[2; \infty\rangle$

19. Dada la función
$f: [-2; 4\rangle \to R \;/\; f(x) = \dfrac{|x+1| - 3}{1 + |x-3|}$,
determine el rango de f.
A) $\left[-\dfrac{3}{5}, 1\right]$ B) $\langle 1; \infty\rangle$ C) $\left[-\dfrac{3}{5}, 0\right]$
D) $\left[-\dfrac{3}{5}; -\dfrac{1}{5}\right]$ E) R

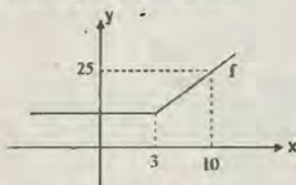
20. Si f es una función constante, determine $T = a^2 + b^2$
$f = \{(ab; a - b), (a + b, b), (a ; 1), (3b; a - 1)\}$
A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

21. Si $f : R \to R$ es una función constante no nula, calcule el valor de:

$$E = \frac{f(f(20)) + 4f(2005)}{3f(0) + 17f(f(3))}$$

A) $\frac{1}{4}$ B) 4 C) 5
D) 6 E) 8

22. Dada la gráfica de la función:



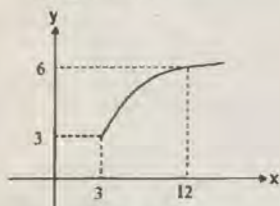
Donde $f(5) - f(1) = 4$
Determine $f(\sqrt{2})$

A) 2 B) 4 C) 5
D) 9 E) 11

23. Sea g una función cuadrática definida en R tales que $g(0) = 1$ y $g(x + ½) - g(x - ½) = 4(2x - 1)$. $\forall\, x \in R$, determine el único valor de $x \in R$ tal que $g(x) = 0$.

A) $-\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{2}$ C) 0
D) 1 E) 2

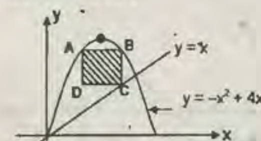
24. Si la gráfica de la función f, tal que $f(x) = a + \sqrt{x+b}$, $x \in [3; \infty\rangle$, cuya gráfica es:



Determine M = a.b

A) −9 B) −6 C) 2
D) 6 E) 9

25. Determine la medida de la región rectangular ABCD en términos de "x" descrita mediante la gráfica, donde la abcisa de B es x.



A) $-2x^3 + 8x^2 - 14x$
B) $-2x^3 + 10x^2 - 12x$
C) $-2x^3 + 12x^2 - 10x$
D) $-2x^3 + 14x^2 - 8x$
E) $-2x^3 + 16x^2 - 10x$

26. Si $f(x) = \begin{cases} 1, & x \leq 1 \\ \frac{x+1}{2x+3}, & x > 1 \end{cases}$

Determine los valores de x; para que $x - 1 \leq f(x)$.

A) $\langle -\sqrt{2}\,;\, \sqrt{2}]$ B) $\langle -\infty\,;\, 1]$
C) $\langle 1;\, \sqrt{2}\rangle$ D) $\langle -\infty;\, \sqrt{2}\rangle$
E) $\langle -\infty;\, \sqrt{2}]$

27. Si $f: R \to R$ es una función, cuya regla de correspondencia es $f(x) = ax^2 + bx + c$, $x \in R$, a, b, c son constantes suponiendo que $f(2) = 4$, $f(-1) = 1$ y $f(x + y) = f(x) + f(y)$, $\forall x, y \in R$. Determine el valor de $T = f(3) - f(2)$:

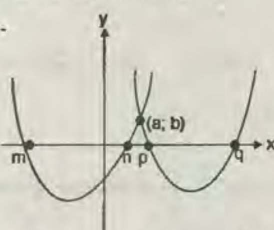
A) 4 B) 5 C) 6
D) 7 E) N.A.

28. Dada la función $f: A \to B$ tal que $f(x) = \frac{\sqrt{3x-1}}{[\![x-2]\!]}$, si el dominio de f es $Dom(f) = [a;\, b\rangle \cup [c;\, \infty\rangle$, entonces el valor de $T = 12a + 4b - c$ es:

Nota: $[\![x]\!] = n \leftrightarrow n \leq x < n + 1,\ n \in Z \wedge x \in R$.

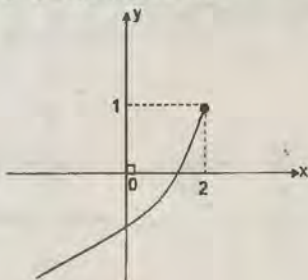
A) 5 B) 6 C) 9
D) 16 E) 17

29. Dadas las funciones: $f(x) = x^2 + 2x - 3$, $g(x) = x^2 - 10x + 21$, cuyos gráficos se muestran, determine el valor de $E = a + b + m + n + p + q$.



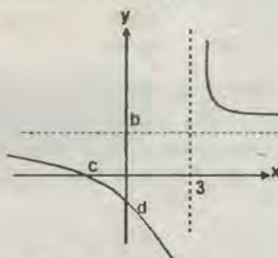
A) 4 B) 8 C) 12
D) 15 E) 17

30. El gráfico adjunto corresponde a la función $f(x) = b - 2\sqrt{a-x}$ con $a > b > 0$, determine a + b.



A) 3 B) 4 C) 5
D) 6 E) 7

31. Si la gráfica de la función $f: R \to R$ definida por: $f(x) = \frac{x+4}{x-a}$ es:



Halle $T = a + b + c + d$

A) $-\frac{4}{3}$ B) $-\frac{1}{2}$ C) 1
D) $\frac{5}{3}$ E) 3

32. Dados los siguientes enunciados:

I. $f = \{(t;\, t^2) / 0 \leq t < 4\}$ es una función par.
II. $g = \{(x;\, y) / y = |x + 2|\}$ es una función par.
III. $\forall\, x \in \langle -2;\, 2\rangle$, la función h; es impar, donde : $h(x) = x^3$.

Indique cuál(es) son correctas

A) solo I B) I, II y III C) solo III
D) solo II E) I y III

33. Sean las funciones:

$f(x) = \sqrt{1 + x + x^2} - \sqrt{1 - x + x^2}$
$g(x) = 2|x| - x^2$

¿Cuál de las siguientes alternativas es la correcta?

A) f y g son pares.
B) f y g son impares.
C) f y g no son pares ni impares.
D) f es impar, g es par.
E) f es par, g es impar.

34. Indique cuál(es) de los siguientes enunciados son correctos:

I. Si f es una función constante entonces la gráfica de f es una recta.
II. Si f es una función creciente entonces f no es par.
III. Si f es creciente entonces f es impar.

A) solo I B) solo II C) solo III
D) I y II E) II y III

35. Sea $f(x) = \frac{x}{1 + |x|}$

Indique cuál(es) de los siguientes enunciados son correctos

I. Ran (f) = $\langle -1;\, 2]$
II. Ran (f) = $\langle -1;\, 1)$

III. f es creciente en R.

A) solo I B) solo II C) solo III
D) I y II E) II y III

36. Dada la función $f(x) = ax + b$ y los siguientes datos: $f(x)$ es creciente, $f([1; 2]) = [107; 901]$, calcule $T = a - b$.

A) 481 B) 687 C) 794
D) 1008 E) 1481

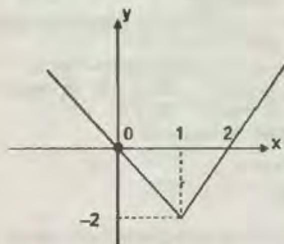
37. Dada la función f cuyo dominio es: $[1; 2\sqrt{2}]$ y tal que su regla de correspondencia es $f(x) = \sqrt{x^2+1} + x$, si el rango $R(f) = [a; b]$ determine el valor de $T = a + b$.

A) $\sqrt{2}+1$ B) $\sqrt{2}+3$ C) $\sqrt{3}+2$
D) $3\sqrt{2}+1$ E) $3\sqrt{2}+4$

38. Demuestre que $f(x) = x + \sqrt{x^2+1}$ es una función creciente en $[\sqrt{3}; \infty\rangle$, determine el rango de f.

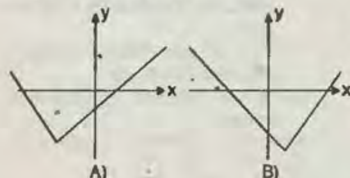
A) $[0; \infty\rangle$ B) $[1; \infty\rangle$ C) $[\sqrt{3}; \infty\rangle$
D) $[2+\sqrt{3}; \infty\rangle$ E) $[2-\sqrt{3}; \infty\rangle$

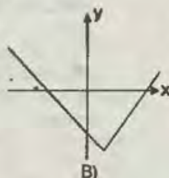
39. Indique la función que corresponde a la siguiente gráfica adjunta:

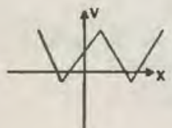


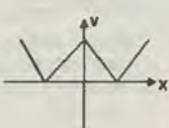
A) $f(x) = |x-1| - 2$
B) $f(x) = |x+1| - 1$
C) $f(x) = 2|x-1| - 2$
D) $f(x) = 2|x| - 2$
E) $f(x) = |2x-1| - 1$

40. ¿Cuál de los siguientes gráficos corresponde a la función definida por: $g(x) = ||x+1| - 2|$

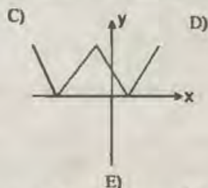






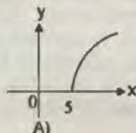


C) D)

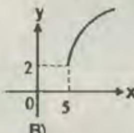


E)

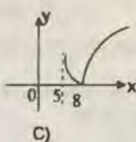
41. Determine el gráfico de $y = \left|\sqrt{x-5} - 2\right|$



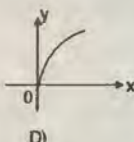
A)



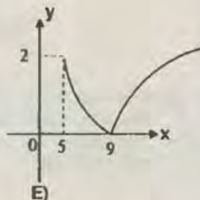
B)



C)



D)

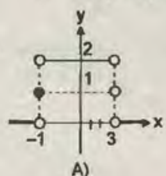


E)

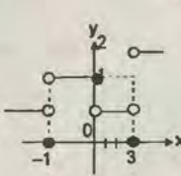
42. Se definen las funciones

$$\text{Sgn}(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

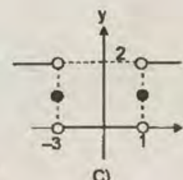
$f(x) = \text{Sgn}\left(\dfrac{|x|-2}{|x|+1}\right)$, entonces la gráfica de: $1 - f(1-x)$ es:



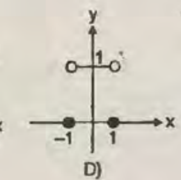
A)



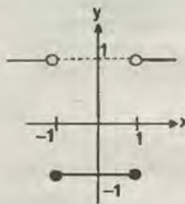
B)



C)

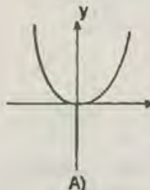


D)

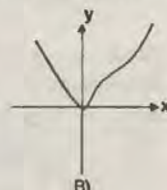


E)

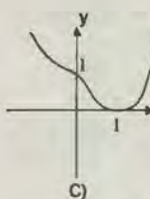
43. Dada la función:
$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$. La gráfica que mejor representa a $|1 - f(1+x)|$ es:



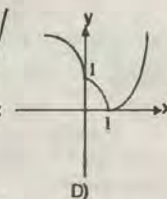
A)



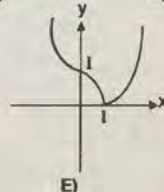
B)



C)

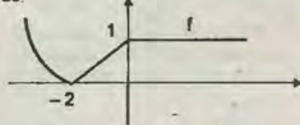


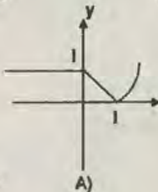
D)



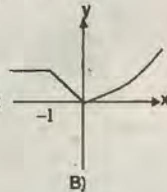
E)

44. Graficar $g = f(2 - x)$, si la gráfica de f es:

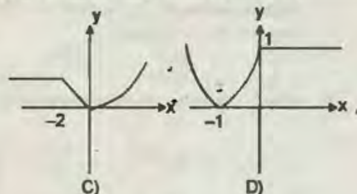


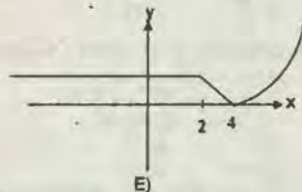


A)

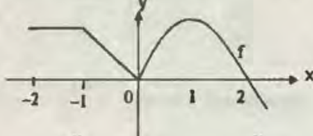


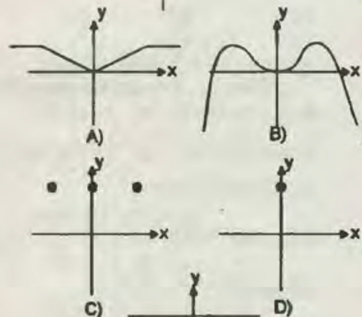
B)


C) D)


E)

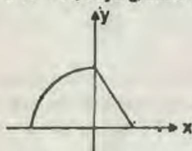
45. Determine la gráfica de
$g(x) = f(-2-|x|)$. si la gráfica de f es:



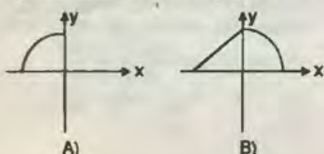

A) B) C) D)

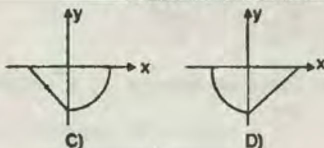


46. Sea f: $R \to R$, cuya gráfica es:



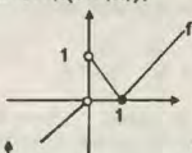
¿Cuál de las siguientes gráficas representa a la función $-f(-x)$?

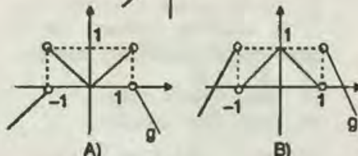

A) B)

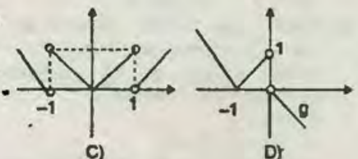

C) D)

E

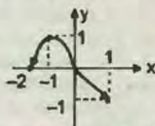
47. Se muestra la gráfica de la función f, determine la gráfica de
$g(x) = 1 - |f(1 - |x|)|$



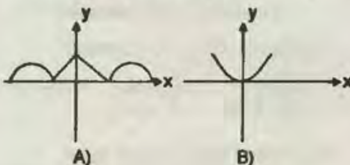

A) B)

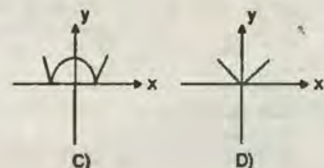

C) D)

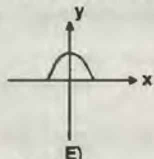
48. Si la gráfica de f(x) es:



Obtenga la gráfica de $y = |f(1-|x|)|$


A) B)


C) D)


E)

49. Dadas las funciones:
$f(x) = 2x + 3$; $x \in \langle -2; 5\rangle$
$g = \{(1; 3), (2; 7), (3; 9), (7; 12), (0; 10)\}$
Determine el número de elementos de $Ran(f + g)$.
A) 0 B) 1 C) 2
D) 3 E) 4

50. Dadas las funciones :
$f(x) = 2\sqrt{x}$; $x \geq 0$
$g = \{(-2; 4), (0; 2), (2; 3), (1; 5), (4; -2), (-1; 3)\}$
Halle la suma de los elementos del rango de: $f^2 - 3g$.
A) – 11 B) – 6 C) – 1
D) 4 E) 10

51. Sean las funciones
$f = \{(0; 0), (1; 0), (2; 1), (3; 2), (4; 3)\}$
$h(x) = (x + 3)^{1/2}$, $x \in \langle -3; 3)$. Determine α, si : $(f + h^2)(\alpha) = 3\,f(2)$
A) 0 B) 1 C) 2
D) 3 E) 4

52. La función $f(x) = \begin{cases} 1, & x \leq -1 \\ -x, & -1 < x \leq 0 \\ 1-(x-1)^2, & x > 0 \end{cases}$

se expresa como $f = h + g$, h par y g impar, determine g(x).

A) $g(x) = f(x) + f(-x)$
B) $g(x) = f(x) - f(-x)$
C) $g(x) = \dfrac{1}{2}(f(x) + f(-x))$
D) $g(x) = \dfrac{1}{2}((f(x) - f(-x)))$
E) $g(x) = f(x)$

53. Dadas las funciones:
$f(x) = 5x(x + 2) + 9$; $x \in \left\langle -\infty; \dfrac{4}{3}\right]$
$g(x) = 4x^2 + 7(2x + 1)$; $x \in \left[-\dfrac{4}{3}; \infty\right\rangle$,
determine el rango de $h(x) = \sqrt{f(x) + g(x)}$.

A) [0; 8] B) $\langle 0; 3]$ C) $\langle 0; 8\rangle$
D) $\langle 1; 4\rangle$ E) $\langle 1; 6]$

54. Sean las funciones :
$f(x) = |x - 1| - x^2$
$g(x) = \begin{cases} x^2; & x \geq 1 \\ x; & x < 1 \end{cases}$

Determine el rango de f + g

A) $[0; +\infty\rangle$ B) $[1; +\infty\rangle$ C) R
D) $\langle -\infty; 1]$ E) $\langle -\infty; 10]$

55. Sean $f(x+1)=\dfrac{1}{3x+1}$ $g(x-2)=\dfrac{x}{\sqrt{x+2}}$, determine f + g y su dominio. Dar como respuesta T = (f + g) (−2)

A) $-\frac{1}{8}$ B) $-\frac{1}{2}$ C) 0
D) $\frac{1}{2}$ E) $3\frac{1}{2}$

56. Sean f y g dos funciones definidas por: $f(x)=|x^2+|x||+|x-|x||+1; x \in \langle -3; 5]$
$g(x) = x(|x| + 1);\ x \in [-5;\ 0]$, entonces la función f + g es:

A) $-4x + 1; x \in [-5; 0]$
B) $-2x + 1; x \in \langle -3; 0]$
C) $-x + 1; x \in [-5; 5]$
D) $1; x \in \langle -3; 0]$
E) $2x + 1; x \in \langle -5; 0\rangle$

57. Dados los siguientes enunciados:
I. Si f; g : R → R son pares, entonces f + g es par.
II. Si $f(x)=\left(\sqrt{x}\right)^2$ y $g(x)=\sqrt{x^2}$ entonces son funciones iguales.
III. Si f; g; R → R, f es impar y g es par entonces fg + 2f es impar , indique cuál(es) son correctas

A) I, II y III B) I y III C) I y II
D) II y III E) solo I

58. Dada las funciones
g = {(1; 1), (2; 2), (3; 3), (4; 4), (5; 5)} y
f = {(x; 1) x ∈ N ∧ 1 < x < 5},
determine el valor de
[(f + g) + fg − g / f − (g − f)](x), con respecto al mayor x.

A) 2 B) 4 C) 5
D) 6 E) 8

59. Sean las funciones:
$g = \{(2; 2^2), (3; 3^2)\}$
f = {(1; g(2), (2; g(3)), (3; 8)}
$h(x)=\begin{cases} 9\sqrt{x-2}; & x\geq 2 \\ x+1; & x<2 \end{cases}$

Determine el rango de $f-\dfrac{h}{g}$.

A) {0; 1} B) {4; 9} C) {0; 1; 4}
D) {4} E) {9; 7}

60. Sean las funciones f y g definidas por:
f = {(−1; 1), (2; 0), (1; −1), (5; − 1), (3; 1)}
g = {(3; 0), (5; 4), (1; 0), (−1; 2)}
Determine cuantos valores toma y_o, si $\left(\dfrac{f^2.g}{g}\right)(x_o)=y_o$

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

61. Dadas las funciones f y g definidas por:
f : {(−x; 1 + x) / x ∈ R} ∧ g = {(x; x^2 − 1) / x ∈ R}, entonces la función g/f es:
A) {(x; x − 1) / x ∈ R}
B) {(x; x + 1) / x ∈ R ∧ x ≠ − 1}
C) {(x; −x − 1 / x ∈ R ∧ x ≠ 1}
D) {(x ; −x − 1) / x ∈ R ∧ x ≠ −1}
E) {(x ; x − 1) / x ∈ R ∧ x ≠ − 1}

62. Sean las funciones:
f = {(2; 3), (4; 9), (8; 27), (16; 81)}
g = {(2; 1), (4; 3), (6; 5), (8; 9)}
Determine el rango de f / g.

A) {1} B) {3} C) {2; 4; 6}
D) {2; 4; 8} E) {2; 4}

63. Dada la función f : R → R, tal que f(x) = f(−x) ∧ f(x + y) = f(x) + f(y) + 6xy + 35, determine cuál(es) de los siguientes enunciados, son correctos
I. f(1) = − 32
II. 4f(a) − f(2a) = − 105
III. f(b) = f(3b) → b = 0

A) solo I B) I, II y III C) II y III
D) I y II E) solo III

64. Dada f una función definida por: f: R − {0}→ R,tal que x^{-1} f(−x)+f(x^{-1})= x
Indique cuál(es) de los siguientes enunciados son correctos.
I. f(1) = 1
II. f(3) + f(− 3) = 9
III. La gráfica de f(x) corta al eje x en −1.

A) solo I B) II y III C) I, II y III
D) I y II E) solo II

65. Dados los siguientes enunciados:
I. Sea f y g decrecientes en R, entonces f o g es creciente.
II. Sea f y g crecientes en R, entonces f o g es creciente.
III. Sea f creciente y g decreciente en R, entonces f o g es creciente.

Indique cuál(es) son correctas.

A) I y II B) solo I C) solo III
D) I, II y III E) solo II

66. Halle el rango de f o g, para:
f = {(1; −2), (2; − 5), (3; 0), (4; − 1)}
g = {(0; 1), (1; 0), (3; 3), (−1; 4), (2; 1)}

A) {−1; 0} B) {−2; −1; 0}
C) {− 5; −2} D) {−2; 0}
E) {−5; 0}

67. Sean las funciones:
f = {(x; y) / y = 2x − 1} y
g = {(0; 3), (1; 4), (2; 0), (3; 8), (−4; 1)}
Halle la suma de los elementos del conjunto {w / (f o g)(w) ≥ 1}

A) 3 B) 4 C) 6
D) 8 E) 9

68. Halle el producto de los elementos de x.
{x / f(x) = 72} si $f\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)=\dfrac{6x}{(x-1)^2}$

A) − 49 B) − 9 C) 10
D) $\frac{25}{12}$ E) 29

69. Determine: E = (f o g) (a) + (f o g)(b)
Si f(x) = $2\sqrt{x}$ + 3, x ∈ [1; 4]
g(x) = $(x-1)^2$, x ∈ [1; 6]
y Dom(f o g) = [a, b]

A) 7 B) 12 C) 14
D) 20 E) 31

70. En la tabla solo aparecen varios valores de las funciones f y g

X	5	6	7	8
f(x)	8	7	6	5
g(x)	7	8	6	5

Determine el valor de $\left(\dfrac{((f+g)of)-2}{fog}\right)(6)$

A) 0 B) 1 C) 2
D) 3 E) 4

71. Si f(x) = 2x − x^2, Dom(f) = [1; 10]
g(x) = x^3; x ∈ [−8; 8] determine g o f
A) (g o f)(x) = $x^3(2 + x)^3$, x ∈ [2; 6]
B) (g o f)(x) = $x^3(2 - x)^3$, x ∈ [−2; 4]
C) (g o f)(x) = x^3(2 + x), $x \in [1+\sqrt{7}; 3+\sqrt{7}]$
D) (g o f)(x) = $x^3(2 + x)^3$, $x \in [1+\sqrt{7}; 3+\sqrt{7}]$
E) (g o f)(x) = $x^3(2 - x)^3$, $x \in [1-\sqrt{7}; 2+\sqrt{7}]$

72. Sea la función: $f(x)=\begin{cases} 1; & x<1 \\ x^2; & x>1 \end{cases}$

Determine el dominio de f o f
A) R − {1} B) $\langle -\infty; -1) \cup \langle 1; +\infty\rangle$
C) $\langle 1; +\infty\rangle$ D) R E) $\langle -\infty; -1\rangle$

73. Sea $f(x) = \sqrt{x^2-16x+64}+\sqrt{x^2-2x+1}$ si g(x) es constante en [a,b] determine T = 2a + b sabiendo que g(x) = f(x^3)

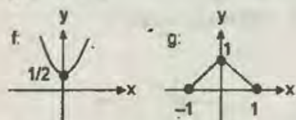
A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 6

74. Si 4.f(x − 3) = x^2 + 4 y Ran(g) = ⟨−3, 3).
Indique los valores que puede tomar "a", siendo: $g(x)=\dfrac{f(2x-3)-ax}{f(2x-3)+x}$

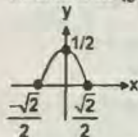
A) ⟨−1; 0] B) [−5; 0] C) ⟨−5; 1⟩
D) R E) ⟨2; ∞⟩

75. Sea $f(x)=\left(\sqrt{x+1}+1\right)^2$, $x \geq 3$, calcule $f(x-2\sqrt{x})$
A) x^2-1 B) x C) $\sqrt{x-1}$
D) $-x+1$ E) $\sqrt{x}-1$

76. Sean f y g dos funciones cuyas gráficas son:



Si el coeficiente principal de f es 1.
En relación (gof)(x) indique cuáles de los siguientes enunciados son correctos.
I. $g(f(x)) = ½ - x^2$
II. $\text{Dom}(gof)=\left[-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ y
$\text{Rang}(gof) = [0; ½]$
III. Gráfica de (gof)(x) :



A) solo I B) solo II C) solo III
D) I y II E) I, II y III

77. Dados los siguientes enunciados cuántos son correctos.
I. f: A → B, A, B ⊂ R si es creciente, entonces es inyectiva
II. Si f: R → R es decreciente, entonces f no es inyectiva.
III. Si f, g : R → R ambas inyectivas, entonces f + g es inyectiva.
IV. Si f : R → R es inyectiva, entonces f^2 es inyectiva
V. Si f^2 : R → R es inyectiva, entonces f es inyectiva.
A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

78. Indique cuál(es) de los siguientes enunciados son correctos:
I. Si f es una función definida por: $f(x)=\frac{2x-5}{x-2}$ con x > 3, entonces f es inyectiva.
II. Si g es una función definida por: $g(x)=\sqrt{x^2-16}-1$ con $x \in \langle -5; -4\rangle$, entonces g es inyectiva.
III. Si h es una función definida por: $h(x)=-x^2+2x+2$ con $x \in \langle 0; 2]$, entonces h es inyectiva.
A) I y III B) II y III C) solo III
D) I, II y III E) I y II

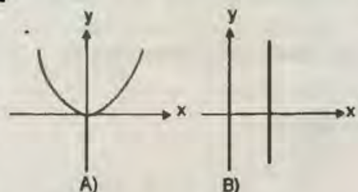
79. Sean A = {1, 2, 3}, B = {1, 2, 3, 4}. Si f = {(3; 1), (x; 3), (2; 3)} es una función de A en B, g = {(3; 1), (y, z), (1; 3)} es una función inyectiva de A en A y si h = {(1; 1), (2; w), (3; 2), (4; 2)} es una función suryectiva de B en A. Halle el valor de T = yz – (x – w).
A) – 6 B) – 5 C) 5
D) 6 E) 8

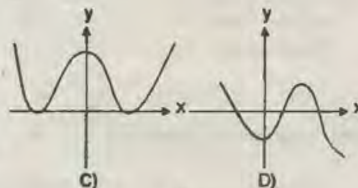
80. Determine el conjunto A si $f:[0;\infty\rangle \to A$ tal que $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$ es suryectiva.
A) [0; 4] B) [0; 2] C) [0; 1]
D) [0; ½] E) [0; ¼]

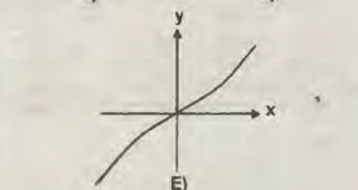
81. Si f: R → B es una función sobreyectiva, cuya regla de correspondencia es
$f(x) = |x-3| - x + 1$. Determine el conjunto B.
A) $\langle -3; +\infty\rangle$ B) $\langle 0; +\infty\rangle$ C) $[-2; +\infty\rangle$
D) $\langle -8; +\infty\rangle$ E) $\langle -1; +\infty\rangle$

82. Si f: R → B; es una función suryectiva tal que: $f(x)=|x^2-x+1|-|x^2+x-2|$, entonces el conjunto B es:
A) $[-1; +\infty\rangle$ B) $\langle -\infty; 7]$
C) $\langle -\infty; -1\rangle \cup \langle 7; +\infty\rangle$ D) $[-1; 7]$
E) R

83. ¿Cuál de las siguientes gráficas representa una función biyectiva?

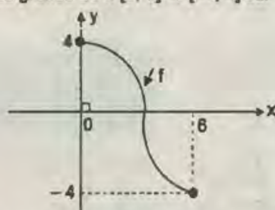






84. Sea la función f tal que f: ⟨–1; 3] → ⟨m; m + n] definida por $f(x)=x^2+4x-3$, la cual es suryectiva, entonces (n – m) es:
A) 9 B) 16 C) 17
D) 18 E) 30

85. La gráfica de f: [0; 6] → [–4; 4] es:



Indique cuál(es) de las siguientes enunciados son correctos
I. f es biyectiva
II. |f| no es biyectiva
III. |f| – 1, no es monotona (creciente o decreciente)
A) I, II y III B) I y II C) I y III
D) solo I E) II y III

86. Sabiendo que la función:
f:[5; b]→[a; 72] tal que $f(x)=x^2-8x+7$ es biyectiva, indique el valor de T = a + b es:
A) 5 B) 7 C) 9
D) 11 E) 13

87. Sean f, g, h: R → R determine el valor de verdad de los siguientes enunciados e indique como respuesta el número de enunciados verdaderos
I. f ∧ g biyectivas entonces f o g ∧ g o f es biyectiva.
II. f biyectiva entonces f + k, k = constante es biyectiva.
III. f + g biyectiva entonces f ∧ g es biyectiva.
IV. fg biyectiva, siempre que f ∧ g sean biyectivas.
V. h o h es biyectiva
A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

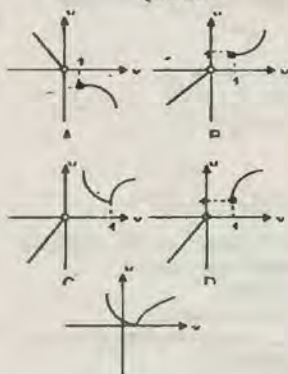
88. Dada la función f biyectiva, tal que f: [m; 4] → [6; n], $f(x)=-2x^2+16x-24$.
Determine el valor de $T=\frac{m+5}{n}$
A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

89. ¿Cuáles de los siguientes enunciados son correctos?
I. $f(x)=|3x|-x$ es una función inyectiva.
II. g: $[-3; +\infty\rangle \to [1; +\infty\rangle$ definida por $g(x)=x^2+6x+10$ es biyectiva.

III. $h(x) = \sqrt{3x^2+5x+3}$ es inyectiva, $\forall x \in \langle -\infty; -1 \rangle$.

A) sólo I B) solo II C) I y II
D) II y III E) I, II y III

90. Indique el gráfico de la función inversa de f, si $f(x)=\begin{cases}3x, & x<0\\ x^3, & x\geq 1\end{cases}$



91. Si la función f: [2; 5] → [1; 4] es lineal; biyectiva y decreciente. Determine $f^*(3)$.

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

92. Indique cuál(es) de los siguientes enunciados son verdaderos:

I. Si f es creciente y g decreciente entonces g o f es creciente.

II. Si f es creciente entonces $-f^*$ es decreciente

III. Si f es inyectiva entonces f^2 es una función par.

A) solo I B) solo II C) solo III
D) I y II E) II y III

93. Indique cuál(es) de los siguientes enunciados son verdaderos:

I. Si f es biyectiva entonces: $f \circ f^* = I_{Dom(f)}$.

II. Si f es biyectiva entonces: $f \circ f^* = I_{Ran(f)}$.

III. Si f o g es biyectiva entonces f y g también lo son.

A) solo I B) solo II C) solo III
D) I y II E) II y III

94. Sean f y g funciones inyectivas tales que: $f^*(x)=\dfrac{2x}{x-3}$, $g(x)=\dfrac{x+3}{x-2}$,

si $(g^* \circ f)(a) = 3$, halle $(f^* \circ g)(a+2)$

A) – 6 B) – 4 C) 0 D) 1 E) 3

95. Dada la función

$f(x) = mx + n, x \in [-3; 3]; m > \dfrac{1}{2}$, si

$h(x) = f(x) + f^*(x) = \dfrac{5}{2}x+\dfrac{3}{2}$, halle "m+n"

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

96. Determine la función inversa de f, $f(x) = x+\sqrt{x^2+16}$; $x \geq 3$

A) $f^*(x)=\dfrac{x^2+16}{2x}$ B) $f^*(x)=\dfrac{x^2-16}{2x}$

C) $f^*(x)=\dfrac{x^2+8}{2x}$ D) $f^*(x)=\dfrac{x^2-8}{2x}$

E) $f^*(x)=\dfrac{x^2-14}{2x}$

97. Sea f una función definida por: $f(x)=x+1-\sqrt{-x}$, si $x < -4$, determine f^* indicando su dominio.

A) $f^*(x)=-\dfrac{1}{4}\left(\sqrt{5-4x}-1\right)^2, x\in\langle-\infty;-5\rangle$

B) $f^*(x)=2\left(\sqrt{3-x}-2\right)^2, x\in\langle 0;\infty\rangle$

C) $f^*(x)=-\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{3-2x}-2\right)^2, x\in\langle 1;\infty\rangle$

D) $f^*(x)=\left(2-\sqrt{x-1}\right)^2-1, x\in\langle 1; 4]$

E) $f^*(x)=-\dfrac{1}{3}\left(1-\sqrt{5-x}\right)^2, x\in\langle 2; 8\rangle$

98. Si $f(x)=\dfrac{p.x-6}{q-5x}$ tal que $Dom(f^*) = R-\left\{-\dfrac{2}{5}\right\}$ y $f = f^*$, determine p y q (en ese orden).

A) –2; 2 B) 2;1C) –2; 3 D) 2; – 2E) 0; 1

99. Determine la función inversa de:

$f(x)=-\sqrt{x^2+6x-7}$; $x \in \langle-\infty; -7]$

A) $f^*(x)=-3-\sqrt{16+x^2}$; $x\in\langle-\infty; 0]$

B) $f^*(x)=-3+\sqrt{16+x^2}$; $x\in\langle-\infty; 0]$

C) $f^*(x)=-3-\sqrt{16+x^2}$; $x\in\langle-\infty; 0\rangle$

D) $f^*(x)=-3+\sqrt{16+x^2}$; $x\in\langle-\infty; 0\rangle$

E) $f^*(x)=\sqrt{16+x^2}$; $x\in\langle-\infty; 0\rangle$

100. Dadas las siguientes funciones:

$f(x) = x^2 + bx + b; \quad x \geq -\dfrac{b}{2}$

$g(x) = x + b$

$h(x) = c+\sqrt{x+1}$

Halle $T = b + c$ tal que $f^* \circ g = h$

A) 1 ó – 1B) 2 ó – 2 C) 3D) – 3E) 0

101. Dada la función f(x) = 4 x + m, si se cumple $f^*(2m) = f(m^2)$, $m \neq 0$, determine el valor de $E = f(o).f^*(o)$.

A) $\dfrac{5}{21}$B) $-\dfrac{3}{17}$C) $-\dfrac{9}{1024}$D) $-\dfrac{3}{47}$E) $\dfrac{1}{68}$

102. Sea f: R → R tal que $\dfrac{1}{3}f\left(\dfrac{p+11}{p}\right)=h$,

$f^*(3h) = \dfrac{5p}{5p+4}$, $p \neq 0$, $p \neq -\dfrac{4}{5}$, calcule el valor de: S = – 59 p + 6

A) 32 B) 38 C) 42 D) 48 E) 50

103. Dadas las funciones f y g cuyas reglas de correspondencia son:

$f(x) = \dfrac{8}{x-2}$, $x \in ([0, 4] - \{2\})$;

$g(x) = \begin{cases}(x-3)^2, & 1\leq x<5\\ x+3, & -6\leq x<1\end{cases}$

halle el rango de f^* o g.

A) {4} B) {2; 4}C) {– 4} D) {2} E) {3}

104. Se define la función f por:

f : R → R tal que $(x-y)\,f(x+y) - (x+y)\,f(x-y) = 4xy(x^2-y^2)$; x, y, ∈ R, cuál(es) de los siguientes enunciados son correctos:

I. f es una función inyectiva

II. $f \circ f = 2x^9 + x^3 + 1$

III. $f^*(x)$ posee la gráfica:



A) solo IB)soloIIC)solo IIID) I y IIE) I y III

105. Halle el menor número real M tal que $|f(x)| \leq M$ si f: R → R es definida por $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+4}$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

106. Sea la función f: R → R tal que: $f(x)=\dfrac{12}{x^2+4}$, indique la menor cota superior siendo f acotada.

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

107. Se define la función f por:

f: R – {1} → R tal que

$f(x) = \dfrac{x^3}{1-x^3} \wedge f(x)\in[1; 2]$, si $x \in [\alpha; \beta]$.

Determine el valor de $J = \alpha^3 \div \beta^6$

A) 1 B) $\dfrac{8}{9}$ C) $\dfrac{9}{5}$ D) $\dfrac{9}{8}$ E) $\dfrac{8}{5}$

CLAVES DEL SEMINARIO 03

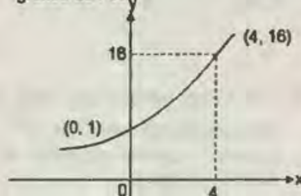
01	02	03	04	05	06	07	08	09	10
C	C	E	D	E	A	D	A	E	C
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
E	E	B	B	C	C	E	E	A	E
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
A	E	B	A	B	E	E	C	D	A
31	22	33	34	35	36	37	38	39	40
A	C	D	D	E	E	EA	D	C	E
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
E	A	E	E	D	C	B	A	E	D
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
A	D	A	C	A	B	B	[illegible]	[illegible]	A
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
C	B	B	C	A	B	A	A	B	C
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
B	C	C	C	B	F	B	E	D	C
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
C	[illegible]	E	E	A	A	B	A	D	D
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
B	B	E	A	E	B	A	D	A	A
101	102	103	104	105	106	107			
C	F	A	E	A	D	A			

CUARTO SEMINARIO

01. Determine el máximo valor de la función $f(x) = 5^{2x-x^2}$.
A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

02. Sea f una función dada por: $f(x)=\dfrac{\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{5^x-7^x}}$, determine el dominio maximal.
A) $[-2; 0\rangle$ B) $\langle 0; 2]$
C) $[-2; 0\rangle \cup \langle 0; 2]$ D) $\langle -1; 1\rangle$
E) $[-2; 0]$

03. Sea la función f: R → R definida por $f(x) = b^x$, $b > 1$, calcule b^2 si la gráfica de f es:



A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

04. Dada la función f: R → R definida por: $f(x) = \pi^{-x}$ y los siguientes enunciados
I. Su rango es $\langle -\infty, 0\rangle$
II. f es una función decreciente.
III. La ecuación $f(x) = x$ tiene una solución, indique cuál(es) son correctos
A) I, II y III B) solo II C) II y III
D) solo I E) solo III

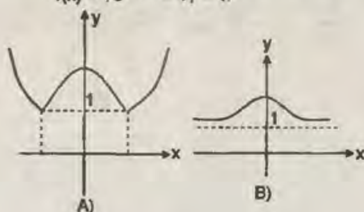
05. Dada la función $f(x)=\left(\dfrac{a}{b}\right)^{cx+a}$ y $c < 0 < a < b$, indique cuál(es) de los enunciados siguientes son correctos.
I. f es creciente.
II. f es decreciente.
III. f es constante.
A) solo I B) solo II C) solo III
D) I y III E) II y III

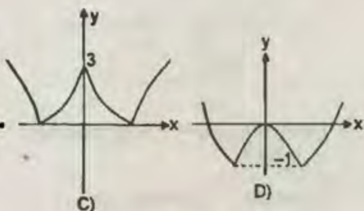
06. Sea las funciones $f(x) = x^2$, $\forall\, x > 0$ y $g(x) \doteq \left(\dfrac{1}{2}\right)^{x-6}$, $\forall\, x \in R$, si $f(x) \geq g(x)$, $\forall x \geq a$.
Determine el menor valor entero que puede tener "a".
A) 0 B) 2 C) 4
D) 7 E) 10

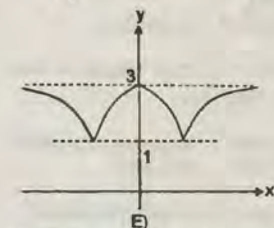
07. Determine f(4) de modo que f(x) sea independiente de "a" y "b"; f(1) = 1, f(2) = 2 si f: Z → R tal que $f(x) = a^x + b^x$.
A) $3\frac{1}{2}$ B) $4\frac{1}{2}$ C) $5\frac{1}{2}$
D) $6\frac{1}{2}$ E) $7\frac{1}{2}$

08. Dada la función f tal que $f(x) = e^{-x} + x - 2$ y los siguientes enunciados:
I. Tiene una raiz única.
II. En el intervalo [–2; –1] existe una sola raiz.
III. En el intervalo [1; 2] existe solo una raiz.
¿Son correctos?
A) solo I B) solo II C) solo III
D) II y III E) I y III

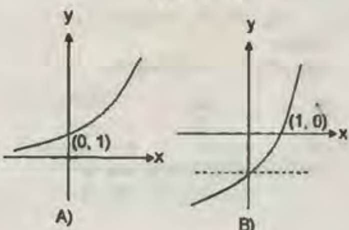
09. ¿Cuál de los gráficos corresponde a $f(x) = \left|3^{1+|x|} - 4\right| - 1$.

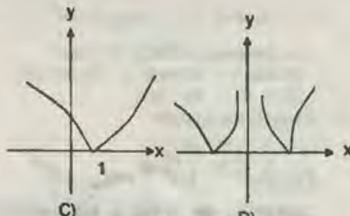


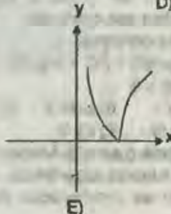




10. Graficar la función f: R → R dada por:
$$f(x) = \left|e^x - e\right|$$







11. Determine el dominio de la función f, cuya regla de correspondencia es:
$$f(x)=\log_3\left(\sqrt{\frac{9-x^2}{9}}+3\right)+\log_5(2x+1)$$
A) $\left\langle -\frac{1}{2}; 1\right]$ B) $\left\langle -\frac{1}{2}; 3\right]$ C) $\langle 3; 4]$
D) $\langle -1; 3]$ E) $\left\langle \frac{1}{2}; \infty\right\rangle$

12. Sea $f(x)=\log_{(x+4)}(x^2-1)$
Determine el dominio maximal
A) $\langle -4; -1\rangle \cup \langle 1; +\infty\rangle - \{-3\}$
B) $\langle -\infty; -1\rangle \cup \langle 1; +\infty\rangle$
C) $\langle 1; +\infty\rangle$
D) $\langle 1; 4\rangle$
E) $\langle -4; -1\rangle$

13. Sea $f(x)=\dfrac{2^x}{2^x+4}$, determine $f^*(x)$ indicando su dominio.
A) $f^*(x)=\log_2\left(\dfrac{4x}{1-x}\right), x\in\langle 0, 1\rangle$
B) $f^*(x)=\log_2\left(\dfrac{4x}{1-x}\right), x\in\left\langle 0, \dfrac{1}{2}\right\rangle$
C) $f^*(x)=\log_2\left(\dfrac{4x}{2-x}\right), x\in\langle 0, 2\rangle$
D) $f^*(x)=\log_2\left(\dfrac{x}{2-x}\right), x\in\langle 0, 2\rangle$
E) $f^*(x)=\log_2\left(\dfrac{3x}{3-x}\right), x\in\langle 0, 3\rangle$

14. Determine cual(es) de los siguientes enunciados son correctos:
I. El logaritmo en base $\sqrt{2}$ de 16 es 24
II. Si $\lg_x\left(\dfrac{9}{4}\right)=-\dfrac{2}{3}$ entonces $x=\dfrac{8}{15}$.

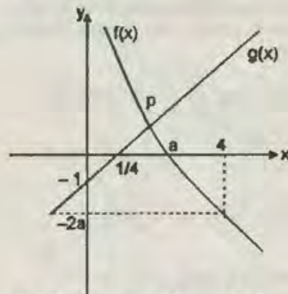
III. La gráfica de $y=\log_a\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ es simétrica respecto al origen.

A) solo I B) solo II C) solo III
D) I y II E) I y III

15. Se define la función:
$f: A \to R$ tal que
$$f(x)=\left(3\sqrt{2^{x-31}}-5\sqrt{2^{x-35}}+\log_{35\sqrt{2}} 1/2\right)^{1/2}$$
Cuál(es) de los siguientes enunciados son correctas:
I. f es creciente.
II. $Dom(f) = [35 + \log_2 25; +\infty)$
III. $f(x) \geq 0$

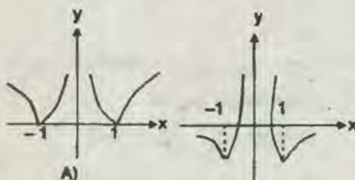
A) solo I B) solo II C) solo III
D) I, II y III E) I y II

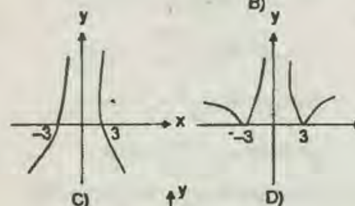
16. En la figura g es una función lineal, f es una función logarítmica, halla la suma de las coordenadas del punto P.

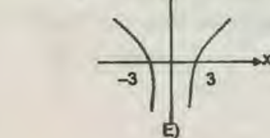


A) 3/2 B) 2/3 C) 1
D) 1/2 E) 2

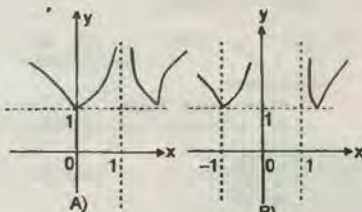
17. El gráfico aproximado de $f(x) = |\log_3|x| - 1|$ es:

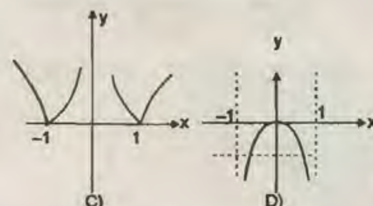


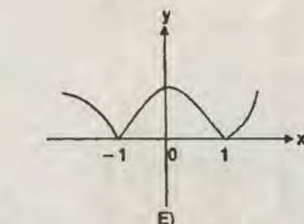




18. Graficar $f(x) = |\log_3|x-1|| + 1$







19. Conociendo log2 = 0,30103 determine $x=\sqrt[4]{781{,}25}$

A) 0,72316 B) 0,72317 C) 0,72318
D) 0,72315 E) 0,72320

20. Si log2 = 0,30103, calcule el valor de $E=\log_5^2 \sqrt[3]{500}$

A) 1,6566 B) 2,6566 C) 3,6566
D) 0,6566 E) 4,6566

21. Si $\log_{12}(3) = m$, determine : $\lg_{12}(8)$

A) $\frac{4}{3}(m+1)$ B) $\frac{3}{2}(1-m)$ C) $\frac{2m-1}{3}$
D) $\frac{4}{9}(1-m)$ E) $4m-3$

22. Si $\log_a(\log_a b) - \log_a(\log_a c) = 1$, calcule
$\log_a(\log_b N) - \log_a(\log_c N)$

A) –2 B) –1 C) 0
D) 1 E) 2

23. Si $\alpha = \log_{12}18$ y $\beta = \log_{24}54$, entonces determine el valor de
$$E = \alpha\beta + 5(\alpha - \beta) - 1$$

A) 0 B) 1 C) 2
D) 3 E) 4

24. Si $\log_p m = a \wedge \log_q m = b$, entonces determine $\log_{pq} m$, en función de a y b.

A) $\frac{a}{b}$ B) $\frac{ab}{a+b}$ C) $\frac{a+b}{ab}$
D) $\frac{a}{a+b}$ E) $\frac{b}{a+b}$

25. Sabiendo que a + b > 0, simplifique para que obtenga el valor de
$$L=\frac{\log_3\log_9(a+b)^{18}}{1+\log_9\log_3(a+b)}$$

A) 2 B) $\frac{3}{2}$ C) 1
D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{1}{4}$

26. Sea f una función cuya regla de correspondencia es: $f(x)=3^{\log_2 x}$, $x \in [2, \infty)$. Calcule la inversa de la función f, si existe.

A) $f^*(x)=2^{\log_3 x}$, $x \in [3, \infty)$.
B) $f^*(x)=2^{\log_3 x}$, $x \in [2, \infty)$.
C) $f^*(x)=3^{\log_2 x}$, $x \in [1, \infty)$.
D) $f^*(x)=2^{\log_3 x}$, $x \in [4, \infty)$.
E) No existe función inversa

27. El equivalente de:
$$E=\frac{1}{1+\log_3(10e)}+\frac{1}{1+\text{Ln}30}+\frac{1}{1+\log(3e)}$$
es:

A) 1 B) Log3 C) Ln10
D) Ln30 E) Log(3e)

28. Indique el conjunto de valores de x que definen la función f por $f(x) = \text{Ln}[\log_{1/3}(\log_2(9-x))]$.

A) $\langle 7; 9\rangle$ B) $\langle 7; 8\rangle$ C) $\langle 7; 10\rangle$
D) $\langle 1; 8\rangle$ E) $\langle 1; 9\rangle$

29. En la escala de Richter, la intensidad M de un terremoto, se relaciona con su energía E (en ergios) por medio de la fórmula:
$$\text{Log}E = 11{,}4 + 1{,}5M$$
Si un terremoto tiene 1000 veces más energía que otro, ¿cuántas veces mayor es su Indice de Richter M?

A) Dos unidades mas que el primero
B) Tres unidades más que el primero
C) Cuatro unidades mas que al primero.
D) Cinco unidades mas que el primero
E) Seis unidades mas que el primero

30. Considera la función :

$f(x) = e^{1+Ln(1-|x|)},\ x \in \left\langle -\frac{1}{2}; \frac{1}{4} \right\rangle$,

determine el rango de f.

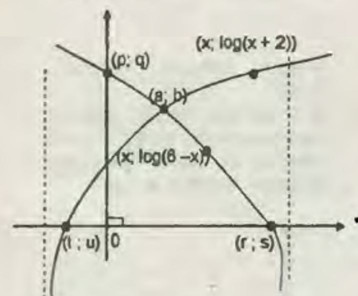
A) $\left\langle \frac{e}{4}; \frac{e}{2} \right\rangle$ B) $\left\langle 0; \frac{e}{2} \right]$ C) $\langle 0 ; e]$

D) $\left\langle \frac{e}{2}; e \right]$ E) $\left\langle 0; \frac{1}{2} \right]$

31. Sea f una función cuya regla de correspondencia es $f(x) = \ln\left(\frac{1}{\ln x - 1}\right)$; si $x \in \langle e ; \infty\rangle$. Determine el rango de la función.

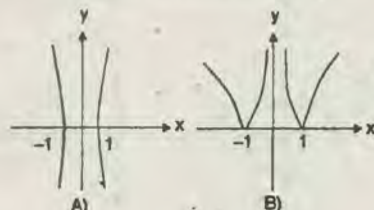
A) $\langle 0 ; \infty\rangle$ B) $\langle e ; \infty\rangle$ C) $\langle 1 ; \infty\rangle$
D) R E) R_0^-

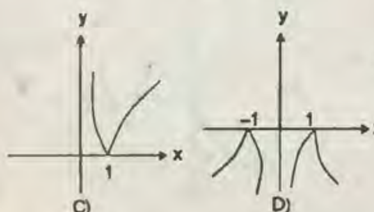
32. En el siguiente gráfico de las funciones logarítmicas, determine el valor de: $a + b + p + q + r + s + t + u$

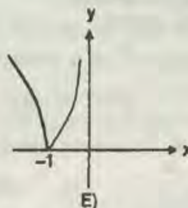


A) 3 + log4 B) 6 + log6 C) 6
D) 6 + log24 E) 24

33. Dada la función f definida por $f(x) = |Ln|x||$ ¿Cuál es su gráfica?







34. Reducir:

$$\pi^{\sqrt{3}\left|\frac{\log[\log_{\pi}(\text{antilog}_3(\text{colog}_3 5))]}{\log\sqrt{3}}\right|}$$

A) $\frac{1}{5}$ B) $\frac{1}{2}$ C) 1
D) 2 E) π

35. Si $\dfrac{1+2\log_{\frac{a}{b}} b}{1+2\text{colog}_{ab} b} = 9,\ 1 > a > b > 0.$

Calcule: $E = \log_{ab}\left(\frac{a}{b}\right) + \text{colog}_{\frac{b}{a}}(ab)$

A) $-\frac{9}{2}$ B) $-\frac{10}{3}$ C) $-\frac{1}{3}$

D) $\frac{5}{2}$ E) $\frac{10}{3}$

36. Simplificar:

$$E = \left[\frac{\sqrt[3]{\log 2} + \sqrt[3]{\log 3} + \sqrt[3]{\log 4} + ... + \sqrt[3]{\log 100}}{\sqrt[3]{\log_5 2} + \sqrt[3]{\log_5 3} + \sqrt[3]{\log_5 4} + ... + \sqrt[3]{\log_5 100}}\right]^3$$

A) log1 B) log2 C) log3
D) log5 E) log10

37. Si : $\log(\log(\log x)) = 0$, entonces el valor de $E = \log(x \log(x \log x)) - \log 11$.

A) 0 B) 8 C) 10
D) 11 E) 20

38. Determine el conjunto A por extensión, tal que:

$A = \left\{x \in R / 4^x = 3\left(2^{\sqrt{x}+x}\right) + 4^{1+\sqrt{x}}\right\}$

A) {0} B) {4} C) {0; 4}
D) {0; 1; 2; 3; 4} E) {0; 2; 4}

39. Si $\forall\ x \in M : 3(10^x - 6^{x+2}) + 4(10^{x+1}) = 5(10^{x-1} + 6^{x-1})$, indique cuál(es) de los siguientes anunciados son correctos.

I. $n(M) = 1$ II. $M \subset Z$

III. $M \cap R = \text{Log}_{5/3}\left(\frac{653}{255}\right)$

A) solo I B) solo II C) solo III
D) I y II E) I y III

40. Resolver $5^{1+2x} + 6^{1+x} = 30 + (150)^x$, si x_1 y x_2 son sus soluciones, entonces el valor de $R = \log_2(x_1\ x_2)$ es:

A) – 2 B) – 1 C) 0
D) 1 E) 2

41. Resolver: $\left(3+\sqrt{8}\right)^x + \left(3-\sqrt{8}\right)^x \leq 34$

A) $-3 \leq x \leq 3$ B) $-4 \leq x \leq 4$
C) $-\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3}$ D) $\sqrt{8} \leq x \leq 2\sqrt{8}$
E) $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$

42. Si $x^{x^2-5x+6} = 1$, determine el número de raíces reales.

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

43. Determine x en:

$\log_2(\log_4(\log_2 x)) + \log_4(\log_2(\log_2 x)) = 2$

A) 2 B) 2^2 C) 2^3
D) 2^8 E) 2^{16}

44. Si $x - \log_2 x = 2$

Calcule : $x + \log_2 x$

A) 4 B) 6 C) 8
D) 10 E) 12

45. Indicar el producto de las cifras del valor de x que satisfacen la ecuación: $x^2 = 9^{\sqrt[3]{x}}$

A) 6 B) 9 C) 14
D) 18 E) 27

46. Resolver: $\log_2 x - 8\log_{x^2} 2 - 3 = 0$

determine la suma de raíces

A) $\frac{17}{3}$ B) 6 C) 8

D) $\frac{33}{2}$ E) $\frac{47}{2}$

47. Determine la suma da los cuadrados de las soluciones posibles de la ecuación $\log_3\left(3x^2 + 2x + 11\right) = 3$

A) $\frac{4}{9}$ B) $\frac{100}{9}$ C) 16

D) $\frac{225}{4}$ E) $\frac{289}{4}$

48. Calcule el número de soluciones de la ecuación:

$-|x-4| + 3 = |\log|x-4||$

A) 0 B) 1 C) 2
D) 4 E) 6

49. Dada la siguiente ecuación:

$(\text{Ln}x + 1)^{\text{Ln}\,e.x^2} = 2$, determine el valor de $T = e.x^4$

A) e^{-2} B) e^{-3} C) e^{-4}
D) e^{-5} E) e^{-6}

50. Si α es la raíz real de la ecuación:
$(\log 2)x^3 + (\log 12)x^2 + (\log 27)x + \log 9 = 0$
entonces se cumple:

A) $-1 < \alpha < 0$ B) $\alpha < -1$
C) $\alpha = 2$ D) $2 < \alpha < 3$
E) $\alpha > 3$

51. Halle el conjunto solución de:

$(\log(\log x))^{\frac{5\log x}{\log(\log x)}} = -15$

A) ϕ B) $\langle 0, +\infty\rangle$
C) $[10, +\infty)$ D) $\langle 1; +\infty\rangle$
E) $\langle 10, +\infty\rangle$

52. Indique un intervalo del conjunto solución, al resolver:
$$4^{x-1} + 1 \geq 17(2^{x-3})$$
A) $\langle -1, 0]$ B) $\langle -3, -2\rangle$ C) $[3, \infty\rangle$
D) $\langle -1, 0\rangle$ E) $\langle -3, -1\rangle$

53. Al resolver: $3(9^x) - 10(3^x) < -3$
Se obtiene el conjunto solución: $\langle a, b\rangle$, determine $M = a + b$.
A) -1 B) 0 C) 1
D) 2 E) 4

54. Resolver $2(4^x) - 2^x(5) + 2 < 0$
A) $\langle 0; \infty\rangle$ B) $\langle 1; \infty\rangle$ C) $\langle -2; 2\rangle$
D) $\langle -1; 1\rangle$ E) $\langle 2; \infty\rangle$

55. Determine el intervalo solución positivo de la inecuación
$$2^{|x|-1} \geq \sqrt{2^{|x|}}$$
A) $x \geq 2$ B) $x \leq \frac{1}{2}$ C) $x \geq \frac{1}{2}$
D) $x \leq 2$ E) $-2 \leq x \leq 2$

56. Al resolver: $2^{|x+2|} + |2^{x+1}+1| \leq 2^{x+1}+3$, se obtiene:
A) $[2, 3]$ B) $[-1, 1]$ C) $[-3, -1]$
D) $[1, +\infty)$ E) $\langle 0, +\infty\rangle$

57. Resolver la inecuación exponencial
$$|x|^{x^2-2x-3} < 1$$
A) $\langle 1; 3\rangle$ B) $\langle 1; 3]$ C) $[1; 3\rangle$
D) $\langle 0; 1\rangle$ E) $\langle 0; 1]$

56. Si el conjunto
$$A = \left\{ x \in \langle 1; \infty\rangle / x^{2^{-\log_2^2 x - \log_2 x^2}} - \frac{1}{x} > 0 \right\}$$
tiene la forma $\langle m; \infty\rangle$. Determine el valor de m.
A) 1 B) 3 C) 4
D) 5 E) 6

59. Determine el conjunto solución de la inecuación $(4^x - 8)(\log_3 x - 2) \leq 0$.
A) $\frac{3}{2} \leq x \leq 9$ B) $x \geq \frac{2}{3}$ C) $x \leq -\frac{3}{2}$
D) $0 \leq x \leq \frac{2}{3}$ E) $x \geq 1$

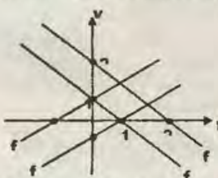
60. Resuelva la siguiente inecuación: $\text{Log}_{2/5}(3x - 2) > -2$, el conjunto solución es: $\langle a; b\rangle$. Determine el valor de $T = 3a + 4b$.
A) 11 B) 12 C) 13
D) 15 E) 17

61. Si $a > 1$ al resolver la inecuación $\log_a x + \log_a(x+1) < \log_a(2x+6)$ se obtiene como conjunto solución el intervalo $\langle a, b\rangle$ entonces $b - a$ es:
A) -3 B) -1 C) 1
D) 3 E) 4

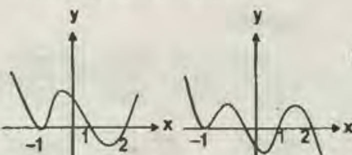
62. Al resolver la inecuación:
$$\log_{b^2}\left[(|x|-3)(|x|+1)\right] > \log_{\sqrt{b}} \sqrt{x+3}$$
sabiendo que $b^2 < b$, se obtiene:
A) $\langle -3, 3\rangle$ B) $\langle -3, \infty\rangle$ C) $\langle 3, \infty\rangle$
D) $\langle -3, -3/2\rangle$ E) $\langle -3, 3\rangle \cup \langle 3, \infty\rangle$

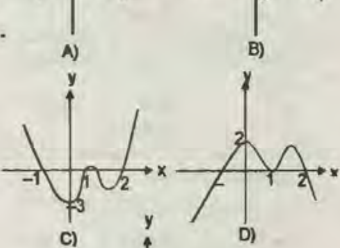
63. Al resolver la inecuación logarítmica $x^{4\log x} < \frac{10^9}{x^{-5}}$, se obtiene $x \in \left\langle \frac{1}{a}; b^2\sqrt[4]{b} \right\rangle$ halle $a + b$.
A) 10 B) 20 C) 30 D) 40 E) 60

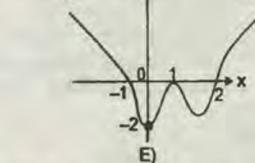
64. En relación a la gráfica mostrada referida a las funciones f_1, f_2, f_3, f_4:



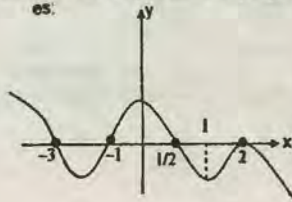
Indique cuál de las siguientes gráfica corresponde a: $P(x) = f_1(x).f_2(x).f_3(x).f_4(x)$.





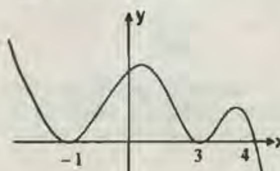


65. Si P es un polinomio cuya gráfica es:



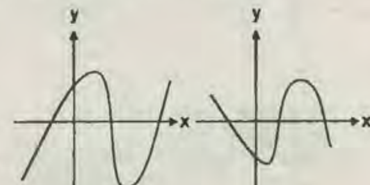
De las raíces de $P(1 - |x|)$ se puede afirmar:
A) Son seis, tres positivas y tres negativas
B) Todas son positivas
C) Son cuatro, dos positivas y dos negativas.
D) Todas son negativas
E) Son ocho, cuatro positivos y cuatro negativos

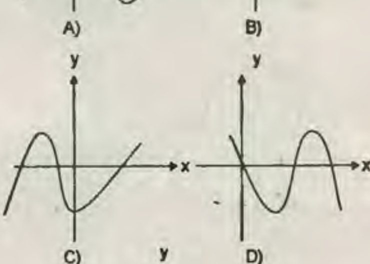
66. Si P es una función polinomial de raíces reales de grado 7 con coeficiente principal -1 y cuya gráfica se muestra en la figura adjunta, si $P(2) = 18$, entonces el término independiente es:

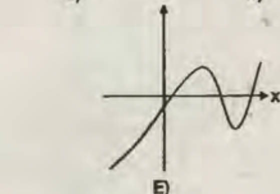


A) 282 B) 292 C) 324
D) 325 E) 372

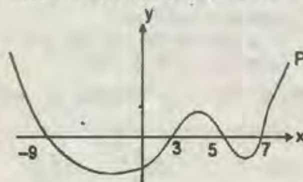
67. Si P es una función polinomial definida por: $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$, entonces la figura que mejor represente la gráfica de P es:





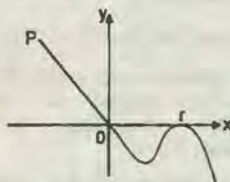


68. En la figura adjunta se muestra la gráfica de una función polinomial mónica de cuarto grado.
La suma de las raíces reales de la ecuación $P(2|x+7|+1)=0$ es:



A) – 42 B) – 40 C) – 39
D) – 38 E) – 37

69. Sea P es una función polinomial definida por $P(x)=ax^3+x^2-2x+b$ con $a \neq 0$, cuya gráfica se muestra en la figura adjunta. Indicar el valor de verdad de las siguientes afirmaciones:



I. El coeficientes principala$=-\frac{1}{6}$
II. La raiz $r \in \left\langle b; -\frac{2}{3a} \right\rangle$.
III. El valor de $P(2)=-3$

A) VVF B) FVF C) VVV
D) FFV E) VFF

70. Determine el mayor valor de n tal que una de las raíces de la ecuación $x^3-13x+n=0$ es el triple de la otra raíz.
A) 3 B) 6 C) 10
D) 16 E) 12

71. Si las ecuaciones polinómicas con coeficientes racionales: $3x^3-(a+5)x^2-(3a-12)x+8=0 \wedge x^3-6x-4=0$, tienen una raíz irracional común determine el valor de a.
A) – 5 B) – 2 C) 4
D) 6 E) 8

72. Si a, b, c son las raíces de: $x^3+2x+5=0$; determine
$$E=\frac{a^4+b^4+c^4}{a^2+b^2+c^2}$$
A) – 3 B) – 2 C) 1
D) 2 E) 4

73. En un polinomio mónico de coeficientes racionales, se sabe que una de sus raíces es: $\sqrt[3]{5\sqrt{5}}+\sqrt[4]{2\sqrt[3]{2}}$, determine el coeficiente del término lineal de este polinomio, si es de grado mínimo.

A) – 71 B) – 60 C) – 15
D) – 4 E) 75

74. Determine la menor raíz irracional de la ecuación: $2x^3-x^2-7x-3=0$; si dos de sus raíces suman uno.

A) $\frac{1-\sqrt{13}}{2}$ B) $\frac{1+\sqrt{13}}{2}$ C) $\frac{1+\sqrt{17}}{2}$
D) $1+\sqrt{17}$ E) $3\sqrt{17}$

75. Sabiendo que a, b, $\frac{1}{a}$ y $\frac{1}{b}$ son las raíces de la ecuación:
$$x^4+x^3+nx^2+x+1=0$$
Halle el valor de $R=ab+\frac{1}{ab}+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$

A) n B) n – 1 C) n – 2
D) n + 1 E) n + 2

76. ¿Para que valor de "n" el producto de las raíces de la ecuación. $(5n^2+2)x^4-(4n^2+9)x^2+3(n^2+2)=0$, sea igual a 1?

A) $\pm\sqrt{2}$ B) $\pm\sqrt{3}$ C) ± 2
D) ± 3 E) $\pm\sqrt{5}$

77. Se define la función:
$f: R \to R \,/\, f(x)=4x^4+2x^3-qx^2+2x+r$ la gráfica de dicha función es tangente al eje horizontal en x = 1 y corta al mismo eje en otros dos puntos distintos. Calcular rq.

A) 34 B) 38 C) 44
D) 48 E) 54

78. Sean las funciones polinomiales de coeficientes en Q:
$f(x)=x^5+4x^4+4x^3-x^2-18x+m$
$g(x)=x^4+6x^3+5x^2+nx-4$

MCD(f, g) acepta como raíz $a-1+\sqrt{5}$
Indique el valor de mn.

A) – 38 B) – 40 C) – 46
D) – 52 E) – 56

79. Determine n(A), si :
$A=\{x \in Q \,/\, x^5+5x^3-3x^4-7x^2+6x-2=0\}$

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

80. Sea $P(x)=x^7+3x^6+7x^4+5x^3+5x^2+3x+1$, indique cual(es) de los siguientes enunciados son correctos:
I. El polinomio P(x) es tangente al eje x en x = – 1.
II. El polinomio P(x) tiene 2 raíces complejos y 5 reales.
III. El polinomio P(x) es secante al eje x en $x_0=-1$.
A) solo I B) solo II C) solo III
D) I y II E) II y III

81. Halle la mayor raíz real de la función polinómica:
$f(x)=x^4-2x^3+4x^2+6x-21$
sabiendo que dos de ellas son opuestas.
A) $1+3\sqrt{2}$ B) $1+\sqrt{3}$ C) $1+2\sqrt{2}$
D) $1-3\sqrt{2}$ E) $\sqrt{3}$

82. Si A es un conjunto definido por
$A=\{x \in R \,/\, x^5-8x^3+16x-x^4+8x^2-16 \leq 0\}$, entonces el conjunto A^C es:

A) $\langle -\infty; 0\rangle \cup \{1\}$ B) $\langle 1; \infty\rangle$
C) $\langle -1; \infty\rangle - \{2\}$ D) R^+
E) $\langle 0; 1\rangle$

83. En la siguiente ecuación:
$8x^4+30x^3+29x^2-2x-30=0$, determine la suma de las raíces racionales.

A) $-\frac{13}{4}$ B) $-\frac{7}{4}$ C) $-\frac{1}{4}$
D) $\frac{7}{4}$ E) $\frac{13}{4}$

84. Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones:
I. Si a > 0 y b > 0, entonces $(a-bi)i^{-425}$. Esta en el tercer cuadrante.
II. Si $Z=e^{ix}\ \forall\ x \in R$, entonces $|Z|=1$.
III. Si $Z=(1+i)^{10}-(1-i)^{10}$, entonces su equivalente es $Z=64e^{\frac{i\pi}{2}}$.
A) VFV B) FVV C) VVV
D) FVF E) VVF

85. Si Z es un número complejo, tal que $|Z|^2=5\text{Re}(Z)$, entonces el valor de $|Z-2{,}5|$ es:
A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{3}{2}$ C) 2
D) $\frac{5}{2}$ E) 3

86. Sean Z_1 y Z_2 son dos números complejos definidos por
$Z_1=(m-1)+3i$
$Z_2=\frac{1}{2}-\frac{i}{m}$
Si Z_1Z_2 es un complejo real, entonces Z_1Z_2 es:
A) – 3 B) – 1 C) 0
D) 1 E) 3

87. Si Z_1 y Z_2 son dos números complejos no nulos que cumplen la condición $\sqrt[3]{Z_1}=Z_2^3$, entonces el valor de la

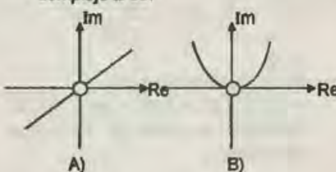
expresión:

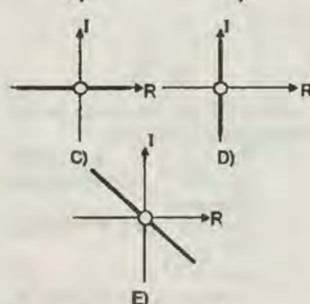
$$T=\left(1-\frac{Re(Z_1)}{Re^3(Z_2)}\right)\left(1+\frac{Im(Z_1)}{Im^3(Z_2)}\right)$$ es:

A) 16 B) 13 C) 9 D) 5 E) 1

88. Sean a y b de $R-\{0\}$. Si $E=\frac{a+bi}{b+ai}$ tal que $E<0$, entonces el valor de E – 1 es:
A) – 3 B) – 2 C) – 1 D) 0 E) 2

89. Si Z es un número complejo definido por $Z=(x, y)$ y $Z^{-1}=\left(\frac{1}{x}, y\right)$ es su complejo recíproco, entonces la gráfica que mejor representa al complejo Z es:





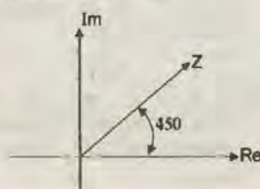
90. Determine el valor de:
$E=i+i^2+i^3+\ldots\ldots+i^{2(2k+1)}$

A) 2 – i B) i – 1 C) 2ki D) 4k + i E) 2k + k^2i

91. Dado $S_n=i^n+i^{-2n}$
Determine:
$E=S_1+S_2+S_3+\ldots+S_{2006}$
A) 1 B) 1 + i C) – 1 D) i E) i – 1

92. Determine el valor de m en la igualdad:
$$\sqrt[3m]{2i-2}+\sqrt[2m]{2i}+\sqrt[m]{1+i}=96i$$
A) $-\frac{1}{5}$ B) $\frac{1}{10}$ C) $\frac{1}{5}$ D) 5 E) 10

93. Si $Z = 4 - 2i - m(1 - i)$, cuya representación es



Siendo $Z+\overline{Z}=2k$, $k\in Z$ (enteros). Determine : Z^4
A) – 5 B) – 4 C) 1 D) 2 E) 3

94. Sea $z\in C$, tal que $|z|-z=1+\sqrt{3}i$, entonces el valor de:
$E=\frac{\overline{z}-1}{z^*-1}$, donde $z\in IV\,C$.
Nota: z^* opuesto de z.
A) – 2 B) – 1 C) 1 D) 2 E) 2i

95. Determine una expresión equivalente al reducir
$$E=(|z+2|+|2-iz|)(|\overline{z}-2i|)$$
A) $4|z+1|$ B) $4|z+i|^2$
C) $2|z+2i|$ D) $2|z+2i|^2$
E) $3|z+i|^2$

96. Si z es un complejo y satisface $\left|\frac{1-z}{1+z}\right|=1$, dados los siguientes enunciados:
I. $z=1+i$
II. $z=2$
III. z es imaginario puro
Cuáles son correctos
A) solo III B) I y II C) I, II y III
D) solo II E) I y III

97. Si $z\in C$ tal que $z^2=\overline{z}$, determine el mayor módulo de z.
A) 0 B) 1 C) ½ D) 1/4 E) 1/3

98. Determine el número complejo z, en su forma exponencial, si
$|\overline{z}i|=8$, $Arg[z(1+i)]=\frac{\pi}{6}$
A) $8e^{i\left(-\frac{\pi}{12}\right)}$ B) $2e^{i\left(-\frac{\pi}{12}\right)}$ C) $16e^{i\left(-\frac{\pi}{12}\right)}$
D) $4e^{i\left(\frac{\pi}{12}\right)}$ E) $e^{i\left(-\frac{\pi}{12}\right)}$

99. Determine un complejo z que verifica que su inverso es igual al conjugado e igual a su opuesto.
A) 3 i B) ± i C) $\sqrt{2}$+i
D) $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ E) 2 i

100. Si $z_1, z_2\in C$, (z_1+z_2) y $z_1.z_2$ son reales. Determine cual(es) de los siguientes enunciados son correctos
I. $z_1=z_2$
II. $z_1=-\overline{z}_2$
III. $z_1=\overline{z}_2$
A) solo I B) solo II C) solo III
D) I y II E) II y III

101. Determine el módulo del número complejo
$Z=(3+4i)(5-12i)(2\sqrt{2}+i)(1+\sqrt{3}i)$
A) 390 B) 400 C) 450 D) 560 E) 630

102. El cociente de dos números complejos, conjugados entre sí, tiene argumento π/3, y el conjugado del cuadrado de su producto tiene modulo 16. Determine la suma de ellos.
A) $2\sqrt{3}$ B) $\sqrt{3}$ C) 0 D) $-2\sqrt{3}$ E) $2\sqrt{3}i$

103. Sabiendo que $|z+ai|=|z+bi|$, con $a\neq b$ ambos reales, entonces el valor de $E=z-\overline{z}$ es:
A) (a + b) i B) 2(a + b) i C) –(a + b) i
D) (a – b) i E) (a^2-b^2) i

104. Si $|z|<\frac{1}{2}$ entonces un valor para M en $|(1+i)z^3+iz|<M$ es:
A) – 1 B) $\frac{3}{4}$ C) $\frac{1}{2}$
D) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{1}{6}$

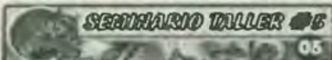
105. Dado $Z\in C$ tal que:
$$\left|1+\frac{1-i}{z-1}\right|=1$$
Determine el valor de verdad de las proposiciones
I. $Re(z)=-Im(z)$
II. $Re(z)=Im(\overline{z})$
III. $Re(z)=Im\left(\frac{z}{1+i}\right)$
A) VVF B) VVV C) FVF D) FFV E) FFF

106. Determine cuál(es) de los siguientes enunciados son verdaderos.
I. $\forall z\in C-\{(0,0)\}:\left|\frac{z}{|z|}-1\right|\leq|arg(z)|$
II. $\forall z_1; z_2\in C: |z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2(|z_1|^2+|z_2|^2)$
III. $\forall x\in R: \left|e^{ix^2}\right|=1$
A) solo III B) I, II y III C) I y III
D) II y III E) I y II

107. Dado el complejo:
$$Z=\sqrt{6a-\sqrt{36a^2-36b^2}}+\left(\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}\right)i$$
a > b > 0. Calcule: Arg(z)
A) $\frac{\pi}{6}$ B) $\frac{\pi}{3}$ C) $\frac{2\pi}{3}$ D) $\frac{3\pi}{2}$ E) $\frac{3\pi}{4}$

CLAVES DEL SEMINARIO 04

01	02	03	04	05	06	07	08	09	10
E	A	D	C	A	C	A	D	D	C
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
B	A	A	C	D	A	D	A	E	A
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
B	B	A	B	A	A	[illegible]	B	A	D
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
D	D	B	[illegible]	B	D	C	B	A	B
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
A	D	E	B	C	D	B	D	A	B
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
A	C	B	D	A	C	A	B	A	C
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
D	C	B	E	A	C	E	A	B	E
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
C	B	B	A	C	A	D	E	A	B
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
E	C	B	C	D	A	C	B	C	B
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
E	B	B	B	D	A	B	A	B	C
101	102	103	104	105	106	107			
A	A	C	B	A	B	A			



01 Si: f es una función definida por:

$f(x)=\dfrac{x}{x+4}$; $x\in[-1,2]$, determine el máximo valor de m.

A) $\dfrac{1}{3}$ B) $\dfrac{2}{3}$ C) $\dfrac{1}{5}$ D) $\dfrac{2}{5}$ E) $\dfrac{3}{5}$

02 Si f es una función definida por:

$f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+1}$. determine el menor $m\in R$ tal que $f(x)\le m$.

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 6

03 Dada la función f definida por:

$f(x)=\dfrac{1}{9x^2+12x+11}$; s i $|f(x)|/\le\dfrac{2}{3}M-1$; $\forall x\in R$: determine el menor valor de M.

A) $\dfrac{1}{7}$ B) $\dfrac{2}{7}$ C) $\dfrac{8}{7}$ D) $\dfrac{10}{7}$ E) $\dfrac{12}{7}$

04 Dada la función f definida por: $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$

Cuál(es) de los siguientes enunciados son correctos.

I. f es función acotada en $R-\{0\}$

II. f no es función acotada en $R-\{0\}$

III. f es función acotada y es una función impar.

A) Sólo I B) Sólo II C) Sólo III
D) I y II E) II y III

05 Cuál(es) de los siguientes enunciados son correctos:

I) $f: R-\{0\}\to R$. $f(x)=\cos\left(\dfrac{2}{x}\right)$ es función acotada.

II) $g:\langle 10^{-5},10\rangle\to R$. $g(x)=1+\dfrac{1}{x}$ no es función acotada

III. Si h_1 y h_2 son funciones acotadas en un mismo dominio entonces h_1+h_2 es función acotada.

A) Sólo I B) Sólo II C) II y III
D) I y II E) I y III

06 Cuál(es) de los siguientes enunciados son correctos:

I. S.: $h(x)=\dfrac{x}{x^2+x+1}$ entonces h es función acotada en R.

II Si f es función biyectiva entonces f es función acotada.

III Si f y g son funciones acotadas entonces g o f es función acotada

A) solo II B) solo I C) II y III
D) I y II E) I y III

07 Se define la función f por:

$f(x)=\dfrac{x}{x^2+2x+4}$; $x>0$ y dados los siguientes enunciados:

I. $\forall\, x>0$: $f(x)>0.5$

II. f es función acotada superiormente

III. f es función acotada

Cuál(es) son correctos:

A) Solo I B) Solo II C) Solo III
D) II y III E) I y III

08 Sea f una función definida por:

$f(x)=\dfrac{1}{x-1}$, $x\in\langle -1,1\rangle$ y dados los siguientes enunciados:

I. f es función acotada superiormente.

II. f es función acotada inferiormente.

III. f es función acotada.

IV. El máximo valor de f(x) es 1.

Cuál(es) son correctos.

A) Solo I B) Solo II C) I y IV
D) solo IV E) I, II y III

09 Dada la función f cuya regla de correspondencia es: $f(x)=\begin{cases}3-3x, & x\le 2\\ 5x-5, & x\ge 3\end{cases}$; si $x\in[-4,5]$.

determine el mínimo valor de f.

A) −5 B) −4 C) −3
D) 0 E) 5

10 Se define la función f tal que:

$f(x)=\dfrac{1}{(a-1)x^2+ax+a+1}$. halle el menor valor positivo "k" tal que $|f(x)|\le k$, $\forall x\in R$. si $f(1)=\dfrac{1}{9}$.

A) $\dfrac{2}{3}$ B) $\dfrac{3}{11}$ C) $\dfrac{7}{22}$ D) $\dfrac{31}{41}$ E) $\dfrac{8}{23}$

11 Sea f una función definida por $f: R\to R$ tal que: $f(x)=\dfrac{1}{x^2-2x+3}+\dfrac{1}{x^2-2x+5}$

cuál (es) de los siguientes enunciados son correctos:

I. $\forall x\in R: |f(x)|\le\dfrac{3}{4}$.

II. $\forall\, x>0$: f(x) es acotado.

III. $\forall\, x>1$: $|f(x-1)|\le 1$.

A) Solo I B) Solo II C) Solo III
D) I y II E) I, II y III

12 Se define la función f por: $f: R\to R$

tal que: $f(x)=\begin{cases}x^3+2; & 0\le x<2\\ 10 & ; 2\le x\le 5\\ \dfrac{10}{x} & ; x>5\end{cases}$

y dado los siguientes enunciados:

I. $\forall x\ge 0: 2<f(x)\le 10$

II. f es función acotada inferiormente.

III. f es función acotada.

Cuál(es) son correctos.

A) II y III B) Solo I C) Solo III
D) I y III E) Solo III

13 Sea f la función definida por:

$$f(x)=\sqrt{9-x^2-|x^2-1|}$$

Cuál(es) de los siguientes enunciados son correctos:

I. f es función acotada. $\forall x\in[-1,1]$

II. $|f(x)|\le 2\sqrt{2}$. $\forall x\in[-\sqrt{5},\sqrt{5}]$

III. f es función acotada solo inferiormente.

A) I y II B) II y III C) I, II y III
D) Solo I E) Solo III

14 Cuál(es) de los siguientes enunciados son correctos:

I. La función $f(x)=2|x|-x^2$: $x\in\langle -2;2\rangle$ es función acotada.

II. La función $g(x)=\begin{cases}\dfrac{x-1}{x+1}; & x\in[0;4]\\ -1 & ; x<0\end{cases}$ es función acotada

III. La función $h(x)=\dfrac{-1}{x-1}$. $x\in[0;3]-\{1\}$ es función acotada.

A) Solo III B) I y III C) II y III
D) I y II E) I, II y III

15 Se define la función f mediante:

$f(x)=\dfrac{16-2^{x+3}}{8}$

Cuál(es) de los siguientes enunciados son correctos:

I. $\forall x\in$: $f(x)>0$.

II. f es función creciente.

III. La gráfica de f tiene una asíntota horizontal: y=2.

A) Solo I B) Solo II C) Solo III
D) I y II E) I y III

16 Se define la función f mediante

$f(x)=\dfrac{7^x}{1+7^x}$, $x\in[1;\infty\rangle$: d e t e r m i n e $Dom\left(\dfrac{1}{f}\right)\cup Ran(f)$.

A) $\left[\dfrac{1}{7};\infty\right\rangle$ B) $\left\langle 0;\dfrac{1}{2}\right\rangle$ C) $\left[\dfrac{7}{9};\infty\right\rangle$ D) $\left\langle 0;\dfrac{7}{2}\right]$ E) $\left[\dfrac{7}{8};\infty\right\rangle$

17 Determine el rango de la función definida por: $f(x)=2^x-2^{-x}$, $x\in R$

A) R B) $R^+=\langle 0,\infty\rangle$ C) $R^-=\langle -\infty,0\rangle$
D) $R^+\cup\{0\}=[0,\infty\rangle$ E) $R^-\cup\{0\}=\langle -\infty,0]$

18 Se define la función f mediante:

$f(x)=\sqrt[3]{2^{x^2}-2^9}$: determine el dominio maximal de f(x).

A) $\langle -\infty,-3] \cup [3,+\infty\rangle$ B) $\langle -\infty,-1] \cup [1,+\infty\rangle$

C) $\langle -\infty,-2] \cup [2,+\infty\rangle$ D) $\langle -\infty,-5] \cup [5,+\infty\rangle$

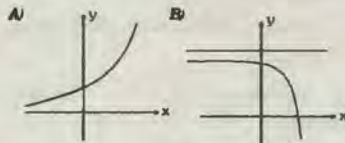
E) $\langle -\infty,-4] \cup [4,+\infty\rangle$

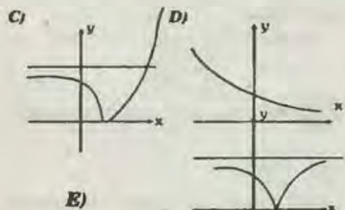
19 Se define la función f mediante: $f(x)=\sqrt{2^x+x-3}$; determine el dominio maximal de f(x).

A) $[1,+\infty\rangle$ B) $[2,+\infty\rangle$ C) $\langle -1/2,+\infty\rangle$

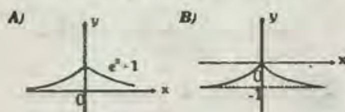
D) $[1/2,2\rangle$ E) $[-2,+\infty\rangle$

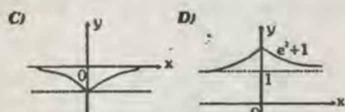
20 Grafique la función f: $R \to R$ definido por: $f(x)=|3-2^x|$.

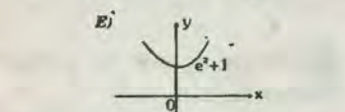




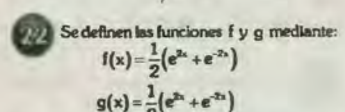
21 ¿Cuál de los gráficos representa mejor la función f definida por: $f(x)=|e^{2-x}+2|-1$.







22 Se definen las funciones f y g mediante:



$$f(x)=\frac{1}{2}\left(e^{2x}+e^{-2x}\right)$$

$$g(x)=\frac{1}{2}\left(e^{2x}+e^{-2x}\right)$$

Cuál(es) de los siguientes enunciados son correctos:

I. El rango de $f^2(x)-g^2(x)$ es: {4}

II. f(x) . g(x) es una función monótona.

III. $f^2(x)+g^2(x)=f(2x)$

A) Solo II B) I y II C) Solo I
D) I y III E) I, II y III

23 Se definen las funciones f y g por: $f(x)=\log_a x$; $g(x)=\log_{\frac{1}{a}} x$; $0<a<1$.
Cuál(es) de los siguientes enunciados son correctos:

I. Si: b>1, entonces f(b) + g(b)>0.

II. Si: b>1, entonces g(b) − f(b)>0.

III. Si $b \in \langle 0;a\rangle$, entonces $(f(b)>1 \vee g(b)<-1)$.

A) Solo I B) Solo II C) I y II
D) I y III E) II y III

24 Sea: $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}(\log_2(x-3))$ cuál(es) de los siguientes enunciados son correctos:

I. Si: $x \in \langle 4,+\infty\rangle$, entonces $x \in \langle -2,+\infty\rangle$.

II. Si: $x \in \langle 4,+\infty\rangle$, si y solo si x es solución de $x^2(x-4)>0$.

III. $x \in \langle -4,\infty\rangle$.

A) Solo I B) Solo II C) Solo III
D) I y III E) I, II y III

25 Sea: $f(x)=\sqrt[4]{\log\sqrt{\log\left(14-|x^2-5|\right)}}$.
determine el dominio maximal.

A) $\langle 1;2]$ B) $[1;3] \cup [-3;-1]$ C) [2;3]

D) $\langle 0;1\rangle$ E) $[1;2\rangle \cup \langle 2;3]$

26 Se define la función f por:

$$f(x)=\frac{\log\left(\frac{|x-1|}{|x+2|-2}\right)}{1+\log|x-2|-|x-2|}$$, determine el dominio de f; e indique $(D^c om(f) \cap Z)$.

A) {−3, −2, −1, 0} B) {−4, −3, −2, −1, 0, 1, 2}
C) {−4, −3, −2, −1} D) {−4, −2, 2}
E) {−3, −2, −1, 0, 1}

27 Sea f una función definida por:
$f(x)=\log_{-4x-x^2}(x-2|x|+1)+\log_{1+\log_2 x}(1-|\log_2 x|)$
tal que su dominio maximal es de la forma: $\langle a;b\rangle-\{c\}$.

Calcule el valor de T=a+b+c.

A) 3 B) 4 C) 5
D) 6 E) 7

28 Se define la función f por: $f(x)=2^{\log_3 x}$ tal que $Dom(f)=R^-$. Determine la inversa de f.

A) $f^*(x)=\log_3(\log_2 x)$, $x>2$

B) $f^*(x)=\log_2(\log_3 x)$, $x>3$

C) $f^*(x)=3^{\log_2 x}$; $x \in R^+$

D) $f^*(x)=2^{3^x}$; $x \in R^-$

E) $f^*(x)=2^{(3^x)}$; $x \in R^-$

29 Se define la función f por: $f(x)=\sqrt[4]{\log_7\left(x^2-2x-8\right)-1}$. determine el dominio maximal.

A) $\langle -\infty;-3]$ B) $\langle 5;\infty\rangle$ C) [−3;5]

D) $\langle -\infty;-3] \cup [5;\infty\rangle$ E) $\langle -\infty;-2\rangle \cup \langle 4;\infty\rangle$

30 Se define la función f de la siguiente manera: $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}|x-12|$, de los siguientes enunciados

I. f es función creciente

II. La gráfica de f corta al eje x en un sólo punto.

III. La gráfica de f tiene una asíntota vertical: $x=\frac{1}{2}$.

Cuál(es) son correctos:

A) Solo I B) Solo III C) I y II
D) I y III E) II y III

31 Cuál(es) de los siguientes enunciados son correctos:

I. Si: 0<b<1 y 0<x<y entonces $\log_b x<\log_b y$

II. Si: b>1 y 0<x<y entonces $\log_b x<\log_b y$

III. Si: 0<b<1 y 0<x<y entonces $b^x<b^y$

A) Solo I B) Solo II C) Solo III
D) I y II E) II y III

32 Si: $\log_2 6=a$ $\log_{12} 3=b$. Calcule $\log_3^3$.

A) $\frac{2ab}{a+1}$ B) $\frac{2ab}{a-1}$ C) $\frac{2ab}{b+1}$

D) $\frac{2ab}{b-1}$ E) $\frac{b-1}{2ab}$

33 Dada la siguiente relación:

$$2\log_a^2 n^2+\log_n^2 a^3-15\log_n a+4=18(\log_a n-\log_n a)$$

Si: a > 1, b > 1, n > 1, entonces

$M=\log_a n^2+\log_n a^3$ cuyo valor es:

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 6

34 Dados los siguientes enunciados:

I. $\text{antilog}_x(\log_x x)=\log_x(\text{antilog}_x x)$; $\forall x \in R$.

II. Si: $a^x=b^x \wedge x \neq 0$, entonces a=b

III. Si: $f(x)=a^x$ entonces f es función creciente $\forall a \neq 1$.

A) Solo I B) Solo II C) Solo III
D) I y II E) II y III

35 Se da la siguiente ecuación:

$$\frac{1}{x}\text{antilog colog}\,x^{-1}+\log_x\left(\frac{4-x}{10}\right)=(\log\log n-1)$$

colog 10^{-x}, determine el ó los valores que debe tomar n para que solo exista una raíz real.

A) 10 000 B) 20 000 C) 15 000
D) 45 000 E) 60 000

36 Sea: $a;b \in R^{+}-\{1\}$ tal que:

$$\log_{ab}\left[\operatorname{colog}_{ab}\left(\frac{\sqrt{a}}{a}\right)+\frac{1}{2}\log_{ab} b\right]=\log_{ab}^{2} a-\log_{ab}^{2} b$$

y se define la función f de modo que:

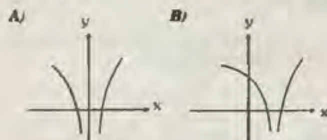
$f(x)=\operatorname{antilog}_{x} x+\log_{x} x$. determine el valor de $f\left(\frac{b}{a}\right)$

A) 3 2 B) 5 2 C) 9 2
D) 11 2 E) 13 2

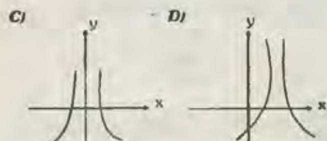
37 Determine la gráfica de

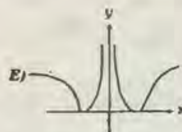
$f(x)=\frac{1}{2}\operatorname{colog}_{2}\left(x^{2}\right)$

A) B)



C) D)





38 ¿Cuántos ceros. entre la coma decimal y la primera cifra significativa tiene el número 0.006^{6}.?. si: $\log 2=0.301030$ y
$\log 3=0.477121$

A) 130 B) 131 C) 132
D) 133 E) 134

39 Calcule el número de cifras del producto $7^{12}\times 12^{i}$ conociendo:
$\log 7=0.84509$ y $\log 2=0.301030$.
$\log 3=0.477121$

A) 17 B) 18 C) 19
D) 20 E) 21

40 Si x es un número positivo que tiene en su escritura 6 dígitos en la parte entera. entonces logx es un valor que pertenece al intervalo:

A) $\langle 3;4\rangle$ B) $\langle 5;6\rangle$ C) $\langle 6;7\rangle$

D) $\langle 7;8\rangle$ E) $\langle 2;3\rangle$

41 Dado los siguientes enunciados.

I. La característica del logaritmo decimal de un número mayor o igual a la unidad es positiva.

II. La mantisa del logaritmo de un número positivo de tres cifras es tres unidades menor que la mantisa del logaritmo de la milésima parte del número.

III. Si la característica del logaritmo decimal de "n" es 1. entonces $10\le n<100$.

Cuál(es) son correctos.

A) Sólo I B) Sóo II C) Sólo III
D) I y II E) I y III

42 Si: $4^{x}-4^{x-1}=24$: calcule el valor de $T=(2x)^{x}$

A) $\sqrt{5}$ B) $5\sqrt{5}$ C) 25

D) 125 E) $25\sqrt{5}$

43 Los valores de "x" que satisface a la ecuación $2^{x-1}+4^{x}=80$. son:

A) 3 y $\frac{1}{\log 2}$ *B) solo 3* *C) solo* $\frac{1}{\log 2}$

D) -3 y $\frac{-1}{\log 2}$ *E) solo −3*

44 Determine el valor de "x" en la ecuación.

$$\left[{}_{4}\log_{8}\sqrt{3}\right]^{9^{\log_{3} x}}-27^{x}=0$$

A) $\sqrt[3]{4}$ B) 5 C) $\sqrt[3]{6}$

D) 8 E) $\sqrt[4]{3}$

45 Sea: a>0. x>0 y. además.

$(7x)^{\log_{a}7}-(5x)^{\log_{a}5}=0$. determine el valor de x.

A) $\frac{1}{37}$ B) $\frac{1}{27}$ C) $\frac{1}{25}$

D) $\frac{1}{35}$ E) $\frac{1}{36}$

46 Determine el valor de "x" en:

$$\log_{3}^{-1}(x-1)=2+\log_{3}(x-1)^{-1}$$

A) 2 B) 4 C) 6
D) 7 E) 8

47 Se define la función f mediante:

$f(x)=\log_{2}\left(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}\right)$. entonces el Ran(f). es:

A) [1: 2] B) [1: 3 2] C) [0: 3 2]

D) [0: 2] E) $\left[2;2\sqrt{2}\right]$

48 Determinar la solución de la inecuacion $\sqrt[x+1]{8^{x+3}}<\sqrt[x-1]{32^{2x+5}}$.

A) $\langle 0;\infty\rangle$ *B)* $\langle -1;1\rangle$ *C)* $\langle -1;\infty\rangle$

D) $\langle -\infty;-1\rangle\cup\langle 1;\infty\rangle$ *E)* $\langle -\infty;-2\rangle\cup\langle 2;\infty\rangle$

49 Al resolver: $\pi^{\sqrt{x^{2}+1}}>\pi^{2x-1}$ y $\pi^{-\sqrt{2x-1}}<\pi^{x^{2}-1}$, se obtiene $x\in\left[a;b\right\rangle$. determine T=ab.

A) 2 3 B) 1 5 C) 5 3
D) 2 5 E) 7 3

50 Al resolver la siguiente inecuación:

$$(x-1)^{\sqrt{x-2}}<\sqrt[3]{(x-1)^{(x-2)}}$$

El conjunto solución es $\langle m;+\infty\rangle$. Determine m^{2}

A) 25 B) 49 C) 114
D) 121 E) 144

51 Sea la inecuación: $2^{-x}<x^{2}$. Determine el conjunto solución

A) $\langle 1;+\infty\rangle$ B) $\langle 0;1\rangle$ C) $\langle 1;2\rangle$

D) $\langle 2;4\rangle$ E) $\langle 3;+\infty\rangle$

52 Dada la inecuación $(e^{-2x}-4)(x-2)>0$. Determine el conjunto solución.

A) $\langle -\ln 2;1\rangle$ *B)* $\langle -\ln 2;2\rangle$ *C)* $\langle \ln 2;3\rangle$

D) $\langle \ln 2;\ln 8\rangle$ *E)* $\langle \ln 2;\infty\rangle$

53 Determine el conjunto solución de la inecuación: $\left(\frac{3}{2}\right)^{1-\log_{2}^{2}x}\ge\left(0;\bar{4}\right)^{2+2\log_{2}x}$

A) $\langle 0;32]$ B) [1 2: 32] C) $\left[1/2;32\right\rangle$
D) [1 4: 16] E) [1 4: 32]

54 Determine el conjunto solución de la siguiente inecuación: $\operatorname{Log}_{2}(2^{x}-2)\log_{2}(2^{x+1}-4)>-2$

A) $\langle \log_{2}(9/4);2\rangle$ *B)* $\langle \log_{2}3/2;4\rangle$ *C)* ϕ

D) $\langle 2;8\rangle$ *E)* $\langle 2;5\rangle$

55 Sea A el conjunto solución de la inecuación $\log_{\varepsilon}(3-|x|)<\log_{\varepsilon}(|x|-1)$. y los siguientes enunciados:

I. $\exists x_{1}\in A/|x|=5/2$

II. $\forall x\in A, 9<x^{2}<16$

III. $\eta(A\cap Z)=2$

Cuál(es) son correctos.

A) Solo I B) Solo II C) Solo III
D) I y II E) I y III

56 Determine el conjunto solución de la inecuación: $(1,25)^{1-\log_{2}^{2}x}<(\dot{0},64)^{2+\log_{\sqrt{2}}x}$

A) $\langle 5;+\infty\rangle$ *B)* $\langle 0;1\rangle$ *C)* $\langle 0;2\rangle\cup\langle 3;+\infty\rangle$

D) $\langle 0;1/2\rangle\cup\langle 32;\infty\rangle$ *E)* $\langle 1;3/2\rangle\cup\langle 5;\infty\rangle$

57 El conjunto solución de la inecuación $\log_{\frac{1}{2}}|3-4x|>2$. es:

A) $\left\langle -\frac{3}{2};3\right\rangle$ *B)* $R-\left[-\frac{3}{2};3\right]$ *C)* $R-\left\{-\frac{3}{2};3\right\}$

D) *R* *E)* $R-\left\langle -\frac{3}{2};3\right\rangle$

58 Sea: $S=(a;b)\cup(c;d)$ el conjunto solución de la inecuación: $(\log_2|x|-3+x)(x+2)\le 0$. determine el valor de $T=ad+bc$.

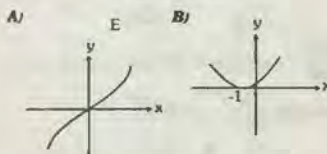
A) 3 B) 2 C) 0
D) −2 E) −4

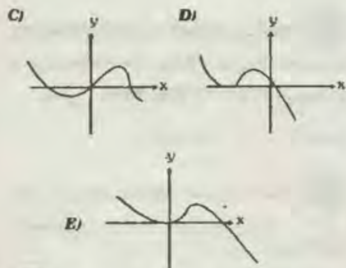
59 Si: $\forall x\in\mathbb{R}: x^2\log_2\left(\frac{4(y+1)}{y}\right)+2x\log_2\left(\frac{2y}{y+1}\right)+\log_2\frac{(y+1)^2}{4y^2}>0$, el intervalo de y es: $(a;b)$. obtener: $a+b$

A) $-\frac{33}{31}$ B) $-\frac{32}{31}$ C) $-\frac{37}{31}$ D) $-\frac{35}{31}$ E) 1

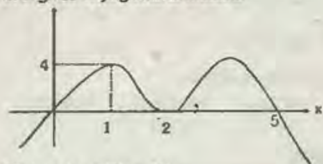
60 Determine cuál de las gráficas representa mejor a la función polinomial:

$$P(x)=3x^5+24x^3+48x.$$



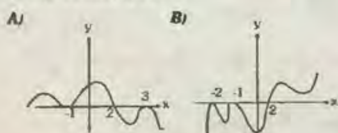


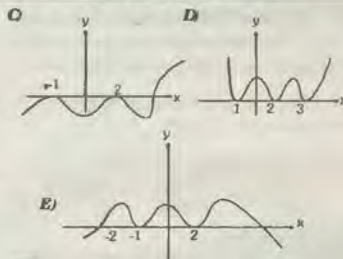
61 Determine la función polinomial f(x) de menor grado: cuya gráfica se muestra.



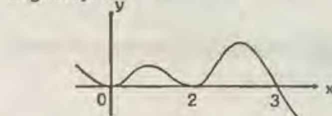
A) $f(x)=x(x-2)^4(x-5)^2$
B) $f(x)=-x(x-2)^2(x-5)$
C) $f(x)=-x(x-2)^3(x-5)^2$
D) $f(x)=x(x-2)^3(x-5)$
E) $f(x)=x(x-2)^2(x-5)^2$

62 Determine la gráfica de la función polinomial: $f(x)=(x^2+x-66)^2(x+2)^5$.





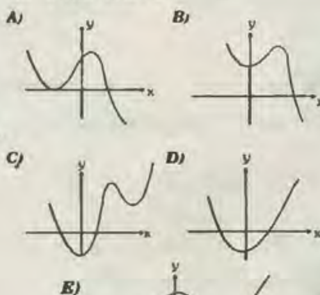
63 Sea P una función polinomial de grado n. de coeficiente principal −1 y cuya gráfica se muestra en la figura adjunta:



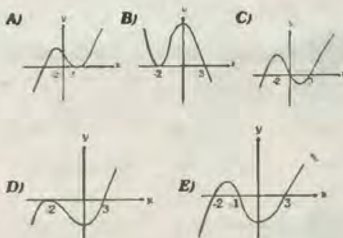
Si: $P(5)=-1800$. determine la suma de coeficientes de P.

A) 8 B) 10 C) 12
D) 14 E) 32

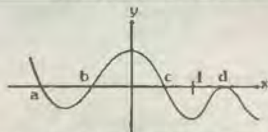
64 Determine cual de las alternativas representa mejor la gráfica de la función polinomial: $h(x)=x^3+mx+n$. $m\neq 0$.



65 Si: x_1, x_2, x_3 y x_4 son la raíces de la ecuación $2x^4-3x^3-12x^2+7x+6=0$. tal que $x_1<x_2<x_3<x_4$. entonces la figura que mejor representa la gráfica de la función $P(x)=(x-x_1)(x-x_3)(x+2)$. es:



66 En la figura adjunta se muestra la gráfica de la función polinomial $y=P(x)$.



Con respecto a la ecuación $P(1-|x|)=0$. cuál(es) de los siguientes enunciados son correctos:

I. Tiene 6 raíces: 2 son positivos. 2 son negativos y 2 complejos conjugados.

II. Tiene 8 raíces: 4 son positivos. 2 negativos y 2 complejos conjugados.

III. Tiene 6 raíces: 3 son positivos y 3 son negativos.

A) Sólo I B) Sólo II C) Sólo III
D) I y II E) II y III

67 La ecuación $P(x)=x^n-nx+n-1=0$. $n\in\mathbb{Z}^+$ y $n>1$. admite como raíz a $x=1$: determine la multiplicidad de dicha raíz.

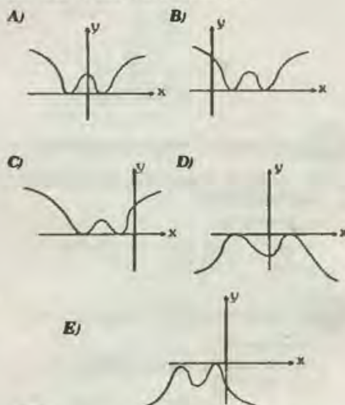
A) 3 B) 2 C) 4
D) n E) raíz simple

68 Si: $a^{1/3}-a^{-1/3}$ es una de las raíces de: $x^3=-3x-b$. Determine el equivalente de:

$$E=a+b.$$

A) 5 B) $2a^2$ C) 2a
D) a^{-1} E) 1 2

69 Determine la gráfica aproximada de $f(x)=36x^4+60x^3+37x^2+10x+1$.



70 Si: x_1, x_2 y x_3 son raíces de la ecuación: $x^3+8x-24=0$. entonces el valor de $x_1^5+x_2^5+x_3^5$. es:

A) 120 B) 240 C) 480
D) −480 E) −960

71 Si: x_1, x_2 y x_3 son las raíces de la ecuación: $2x^3-6x^2+8x-5=0$. calcule el valor de :

$$E=\frac{1}{x_1^2-3x_1+4}+\frac{1}{x_2^2-3x_2+4}+\frac{1}{x_3^2-3x_3+4}$$

A) $\frac{2}{5}$ B) $\frac{4}{5}$ C) $\frac{6}{5}$

D) $\frac{1}{5}$ E) $\frac{3}{5}$

72 Si: a; b; c son las raíces de la ecuación: $2x^3 + x^2 - 3x + 2 = 0$; determine el valor de:

$$E = \frac{1}{ab} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{bc}$$

A) –2 *B) $-\frac{1}{2}$* *C) 0* *D) $\frac{1}{2}$* *E) 1*

73 Siendo a, b y c las raíces de la ecuación: $x^3 + x + 3 = 0$, determine el valor de $T = a^3 + b^3 + c^3$

A) –9 B) –7 C) –5
D) –4 E) –2

74 Determine el valor de a, si se sabe que las raíces de la ecuación $4x^4 - 28x^3 + (2a+5)x^2 - 14x - a = 0$, satisfacen la relación:

$$\frac{1}{x_1x_2} + \frac{1}{x_3x_4} + \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}\right)\left(\frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4}\right) = -\frac{53}{24}$$

A) 12 B) 16 C) 18
D) 24 E) 28

75 Determine el producto de las raíces de la ecuación: $x^3 - ax^2 + 2ax - b = 0$; $a > 0$, sabiendo que su $c.s. = \{x_1;\ x_2;\ x_3\}$. $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 21$ y $x_2 = 2x_1 \neq 0$

A) 1 B) 2 C) 6
D) 8 E) 12

76 Dado el polinomio: $P(x) = x^3 + 3x^2 - 9$ si $P(m) = P(n) = P(r) = 0$. Determine el valor de $P\left(\frac{m}{nr} + \frac{n}{mr} + \frac{r}{mn}\right)$

A) –6 *B) –2* *C) –1* *D) 2* *E) 4*

77 Si las raíces de la ecuación: b $2x^3 + 9x^2 + 10x + 3 = 0$, están en la proporción 1: 2: 6, de los siguientes enunciados:

I. Una raíz positiva.
II. Todas las raíces son enteras.
III. La suma de dos de sus raíces es –4.

A) Solo I B) I y II C) Solo II
D) I y III E) Solo III

78 Sea P una función polinomial mónica de grado 5; además: $P(1) = 3$, $P(2) = 5$, $P(3) = 7$, $P(4) = 9$, $P(5) = 11$, además si $G(x) = P(x) - 2x - 1$, determine el número de raíces reales de $G(x) = 0$

A) 1 *B) 2* *C) 3* *D) 4* *E) 5*

79 La ecuación $x^4 - 12x - 5 = 0$, posee 2 raíces cuya suma es 2. Determine la suma de las inversas de las otras 2 raíces.

A) –0,6 *B) –0,4* *C) –0,2* *D) 0,2* *E) 0,1*

80 Sea la ecuación $2x^3 - x^2 - 7x - 3 = 0$. Si dos de sus raíces suman 1, entonces determine la suma de las raíces negativas.

A) $-\sqrt{13}$ B) $\frac{-1-\sqrt{13}}{2}$ C) $-\frac{\sqrt{13}}{2}$

D) $\frac{1-\sqrt{3}}{2}$ E) $-\frac{1}{2}$

81 Dados los siguientes polinomios:

P(x) de grado 2 y término independiente 1
$Q(x) = (x-1)\,P(x) + 3x + 1$
Si: $Q(2) = 7$ y $P(1) = 2$, entonces determine la suma de los cuadrados de las raíces de la ecuación $Q(x) = 0$.

A) $\frac{5}{3}$ *B) $\frac{7}{3}$* *C) $\frac{82}{9}$* *D) $\frac{10}{3}$* *E) $\frac{11}{3}$*

82 El polinomio:

$P(x) = x^5 - 3x^4 - 6x^3 + 10x^2 + 21x + 9$; presenta:

A) 5 raíces diferentes
B) 2 raíces de multiplicidad
C) 2 raíz de multiplicidad 2 y otra de multiplicidad 3.
D) 1 raíz de multiplicidad 4.
E) 1 raíz de multiplicidad 5.

83 Si la suma de las raíces de la ecuación $x^3 + px^2 + 23x + 15 = 0$ es –9. Determine la menor raíz de dicha ecuación.

A) –5 B) –4 C) –3
D) –2 E) –1

84 Se define la función f por: $f(x) = x^3 - x - 1$. Determine el número de raíces reales.

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

85 Se define la función polinomial f como:

$p(x) = x^2 + x - 66$.
cuál(es) de los siguientes enunciados son correctos:

I. p(x)=0 tiene dos raíces reales del mismo signo
II. p(x)=0 tiene dos raíces reales del mismo signo
III. Si: x_1, x_2 son raíces reales de p(x)=0, entonces $x_1 \in \langle -3, -2 \rangle \wedge x_2 > 0$.

A) II y III B) I y II C) I y III
D) Solo III E) Solo II

86 Determine la suma de las raíces racionales de $p(x) = 3x^4 - 2x^3 - x^2 - 12x - 4$.

A) $\frac{5}{3}$ *B) $\frac{1}{3}$* *C) $\frac{2}{3}$* *D) $\frac{1}{4}$* *E) $\frac{1}{5}$*

87 En la ecuación polinomial:

$4x^5 - 16x^4 - 31x^3 + 145x^2 - 66x - 72 = 0$; indique el número de raíces negativas que posee.

A) 1 *B) 2* *C) 3* *D) 4* *E) 5*

88 Dados los complejos z, w, u, v de módulos iguales a 2, entonces: $E = |zu + wv|^2 + |\overline{zv} - \overline{wu}|^2$ es:

A) 4 B) 2 C) 32
D) 64 E) 8

89 Sean los números complejos:

$m = 1 + yi$, $n = u + vi$; $(y, u, v) \subset \mathbb{Z}^+$,
si además se cumplen:
$m + n = a + 5i$
$m.n = -1 + 13i$
siendo "a" un número entero comprendido entre 1 y 9. Determine el mayor valor de "u".

A) 3 B) 4 C) 5
D) 6 E) 7

90 Si $Z \in \mathbb{C}$ y está definido por:

$$Z = \frac{(1;1)^2 \cdot (2;2)^2 \cdot (3;3)^2}{(0;6)^2}$$

, entonces el complejo equivalente a Z es:

A) 4i B) 8i C) 8
D) 4 E) 1+i

91 Si $Z \in \mathbb{C}$ $\left|Z + \frac{1}{Z}\right| = 1$ determine el mayor $|Z|$

A) 2 *B) $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$* *C) 1* *D) $\sqrt{5}$* *E) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$*

92 Cuál (es) de los siguientes enunciados son correctos:

I. Si z se localiza en el segundo cuadrante, –iz se localiza en el segundo cuadrante.

II. Si z se localiza en el tercer cuadrante, (1+i)z se localiza en el cuerto cuadrante.

III. $a = -1$, siempre que $\text{Re}\left(\frac{1+ai}{1+i}\right) = 0$.

A) Solo I B) Solo II C) I y III
D) II y III E) I y II

93 Si el complejo $Z = \frac{1}{a+bi} + \frac{1}{b+ai}$, a y b $\in \mathbb{R}$ es el conjugado de $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$, determine el valor de.

$E = (a-1)^2 + (b-1)^2$

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 6

CLAVES DEL SEMINARIO 05

01	02	03	04	05	06	07	08	09	10
A	A	E	B	E	E	D	A	C	E
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
D	A	A	D	C	E	E	A	A	C
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
D	D	B	B	B	B	E	C	D	B
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
B	C	D	B	A	C	C	D	C	B
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
E	E	B	A	D	B	E	D	A	D
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
A	B	B	A	A	D	E	E	E	A
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
B	*	A	E	*	C	B	D	C	E
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
C	D	A	D	D	A	E	E	B	C
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
C	C	A	A	A	A	B	D	C	B
91	92	93							
B	C	B							

PRACTICA DE REPASO 06

01 Simplifique el número complejo

$$z=\frac{(6;8)^4}{(4-3i)^4}\left(1;\sqrt{3}\right)^{27}+\left(1;\sqrt{3}\right)^{30}$$

A) $2^{27}(1+i)$ B) $2^{2}(1+i)$ C) $2^{22}(1-i)$
D) 2^{2} E) 0

02 Determine: $M=4\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{i}}{\sqrt{2}-\sqrt{i}}\right)-\frac{(\sqrt{3}+i)^4}{(1+\sqrt{3}i)^2}$

A) 4 + 1 B) 2i C) $\frac{1}{3}$
D) $\frac{1}{2}$ E) 1

03 Determine el valor de "a" de manera que se cumpla $2 = e^{a...}$

A) $\frac{1}{5}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{1}{3}$
D) $\frac{1}{2}$ E) 1

04 Determine el valor de $\bar{z}$, si se cumple:

$$\left(\bar{z}-1\right)^4=\left(\bar{z}^2-2i\bar{z}-1\right)^2$$

A) $\frac{1-ie^{ik\frac{\pi}{2}}}{1-ie^{ik\frac{\pi}{2}}}$ B) $\frac{e^{ik\frac{\pi}{2}}}{1+ie^{ik\frac{\pi}{2}}}$ C) $3e^{ik\frac{\pi}{2}}$

D) $1-e^{ik\frac{\pi}{2}}$ E) $1+2e^{ik\frac{\pi}{2}}$

05 Sea z en C tal que: $z = (\sqrt{3}-1) - i(\sqrt{3}+1)$. determine el valor $Re(z^{-2})$

A) 2^{12} B) -2^{16} C) 2^{14} D) -2^{18} E) 2^{16}

06 Al resolver: $x^5 = -4\sqrt{2} + 4\sqrt{2}i$. indique cuál(es) de los siguientes enunciados son correctas:

I. La raíz principal esta en el 2° cuadrante.

II. Una de sus raíces posee argumento 285°

III. Sus raíces están ubicadas en el 1°, 3° y 4° cuadrante.

A) sólo I B) sólo III C) I y II
D) sólo II E) II y III

07 Simplifique $\frac{(1+i)^{51}(\sqrt{3}-1)^{28}}{(-1+i)^{29}(-1-\sqrt{3})^{36}}$

A) $1+2^{\cdot}$ B) $2i^{\cdot}$ C) 0
D) – 1 E) 4n – 1

08 Determine la siguiente suma compleja:

$$\left(\frac{1+3i}{i-3}\right)^2+\left(\frac{1+5i}{3i-5}\right)^4+\left(\frac{5+7i}{5i-7}\right)^6+\ldots..$$

"2n" entonces

A) $1+2^{\cdot}$ B) $2i^{\cdot}$ C) 0
D) – 1 E) 4n – 1

09 Determine x. si el complejo:

$z = (1-i)^5 [\cos(x+180°) + i\text{sen}(x+180°)]^{-2}$.
$0 \le x < 360°$ es imaginario puro. indique cuál(es) de los siguientes enunciados son correctos:

I. $x \in \phi$

II. $x \in \{0°; 90°\}$

III. $x \in \{240°; 270°\}$

A) I y II B) I y III C) II y III
D) sólo II E) sólo III

10 Dados los siguientes enunciados. indique cuál(es) son correctos:

I. Si $z = (-2+2\sqrt{3}i)^6 \Rightarrow z = 2^{12}$

II. Si $z = 4e^{\pi i/6} \Rightarrow \left|e^{iz}\right| = e^{-2}$

III. $|z+1|<1 \leftrightarrow |\bar{z}+1|<1, \forall z \in C$

A) sólo I B) sólo II C) I y III
D) III y II E) I, II y III

11 Si ε es un raíz compleja de $z^5 - 1 = 0$ y

$$w=\frac{1}{1-\varepsilon}-\frac{1}{1-\varepsilon^3}+\frac{\varepsilon^2}{1-\varepsilon^4}$$

determine: Re (w)

A) –2 B) –1 C) 0
D) 1 E) 4

12 Al ubicar las raíces de la ecuación $x^{2\cdot}-i = 1$. en el plano complejo. determine cuántas de estas se encuentran en el tercer cuadrante.

A) 22 B) 13 C) 24
D) 25 E) 26

13 Determine una de las raíces cúbicas del número complejo z = i.

A) $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}$ B) $-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}$ C) $-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}$

D) $\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}$ E) – i

14 Sea z = 1 + i y con respecto a las raíces de $\sqrt[9]{z}$ se proponen los siguientes enunciados:

I. En el 1er cuadrante están ubicadas dos de tales de raíces.

II. En el 2do cuadrante están ubicadas tres de las tales raíces

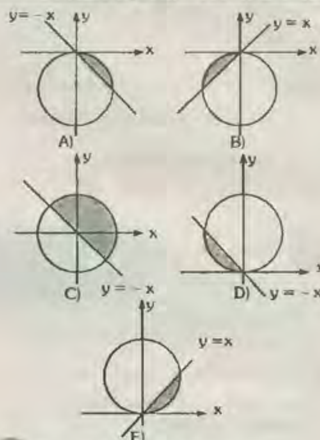
III. En el 3er cuadrante están ubicadas dos de tales raíces.

Indique cuál(es) son correctos.

A) sólo I B) sólo II C) sólo III
D) I y II E) II y III

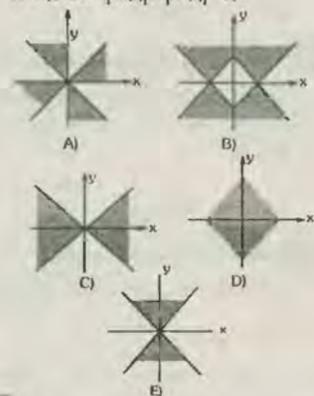
15 La figura que mejor representa la gráfica del conjunto.

$A = \{Z \in C \; 1 < Im(1\,z) \le Re(1\,z)\}$ es:



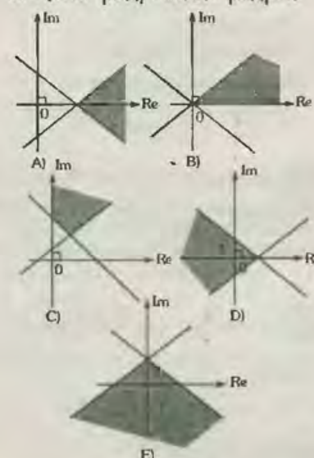
16 Determine la gráfica del conjunto:

$A = \{z \in C \; |Im(z)| \ge |Re(z)| - 1\}$



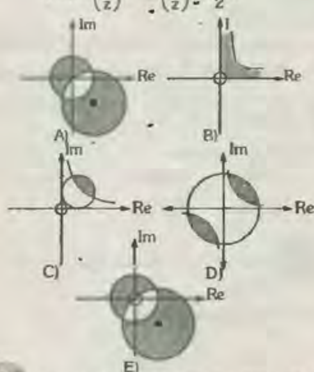
17 ¿Cuál de las gráficas representa mejor al conjunto?

$A = \{z \in C \; |Re(z)| + Re(\bar{z}) - |Im(z)| \ge 1\}$



18 Indique la región que le corresponde al conjunto: $M = \{z \in C \ (|z| \le 1 - Im(Re(z)) \le 1)\Delta$

$$(Re[Re\left(\frac{1}{z}\right) + Im\left(\frac{1}{z}\right) \ge \frac{1}{2}])$$



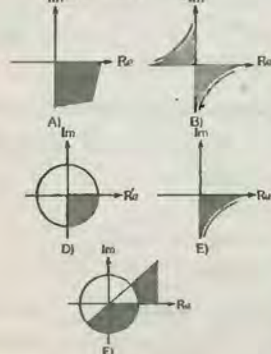
19 Determine la región de los números complejos "z" definidos por el conjunto: (z* opuesto de z)

$$A = \left\{\bar{z} + 2iz^{*} / Re(1+z) + Im(\overline{z-i}) \le 1\right\}$$



20 Si A es un conjunto definido por

$$A = \left\{z \in C / Im(\bar{z}^{2}) \le 2 \wedge \left|\frac{z-2}{z+2}\right| \le 1 \wedge \ldots \frac{3\pi}{2} \le Arg(z) < 2\pi\right\}$$



21 Determine el número de elementos de E que tengan parte real e imaginaria entera

$$E = \left\{z / |z| \le 4, \left|e^{iz^{2}}\right| \le 1\right\}$$

A) 32 B) 33 C) 34
D) 35 E) 36

22 Determine una de las raíces de la ecuación:

$z^2 - (2+i)z - (13 - 13i) = 0$

A) $3 + 5i$ B) $1 + 2i$ C) $3 - 2i$
D) $1 + i$ E) $2 + 3i$

23 Resuelva la ecuación:

$3x^3 - (7 - 5i)x^2 + (3 - 8i)x + 1 + 3i = 0$. si se sabe que una de sus raíces es real. Indique una de las raíces complejas no reales

A) $-1-i$ *B) $1+i$* *C) $\frac{2i-1}{3}$* *D) $\frac{1-2i}{3}$* *E) $2-3i$*

24 Dada la matriz A definida por:

$A = (a_{ij})_{3\times 4}$ tal que:

$$a_{ij} = \begin{cases} i - j \ ; \ si \ i \ne j \\ i + j \ ; \ si \ i = j \end{cases}$$

Determine la suma de todos los elementos de A

A) 6 B) 12 C) 0
D) 8 E) 4

25 Dados los siguientes enunciados:

I. Si A es una matriz cuadrada tal que $A^2 = 0$, entonces $A = 0$.

II. Si A y B son matrices antisimétrica, entonces la matriz AB – BA es ansimétrica.

III. Dada las matrices A y B, si la matriz transpuesta del producto AB es una matriz columna, entonces A es una matriz fila.

Cuáles son correctas

A) sólo I B) I y II C) II y III
D) sólo II E) I, II y III

26 Si $A = \begin{bmatrix} 1 & a+b & 0 \\ 2 & 3 & a \\ b & x & 3 \end{bmatrix}$ es una matriz simétrica, determine la matriz $B = aA + bA + xA$

A) 3A B) 4A C) 5A
D) 6A E) 7A

27 Se define $P(x, y) = 2x^2 - 3xy + y^2$

$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}$. Halle P(A, B), e indique la suma de los elementos de la diagonal de P.

A) –33 B) –81 C) 33
D) 81 E) 13

28 Se define las matrices

$$A = \begin{bmatrix} x - 2y & y - z \\ 2x - 2y & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{cases} b_{ij} = i - j, & i = j \\ b_{ij} = i + j, & i \ne j \end{cases}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$$

Si A + B = C, entonces determine T = x + y + z

A) 0 B) 1 C) 2
D) 3 E) 4

29 Se define la matriz A mediante $A = (a_{ij})_{2\times 3}$,

$a_{ij} = \begin{cases} i - j, i < j \\ i + j, i \ge j \end{cases}$ y la matriz B como: $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ si x es una matriz que satisface la ecuación: $(2B - AA^T)^T - 2x = (x + B)^T$, determine tr(x).

A) $\frac{32}{3}$ *B)* $\frac{11}{3}$ *C)* $-\frac{23}{3}$ *D)* $-\frac{59}{3}$ *E)* $-\frac{35}{3}$

30 Si $A = \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ y $B^t = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$ determine x, si se sabe que: $(2x)^T + A^T = 2B$, indique la traza de x.

A) 5 B) 6 C) 7
D) 8 E) 9

31 Se definen la matriz $A = [a_{ij}]_{3\times 3}$ como

$a_{ij} = \begin{cases} 2i - j; \ si \ i \le j \\ i - 2j; \ si \ i > j \end{cases}$ y la matriz $B = [b_{ij}]_{3\times 4}$, como: $b_{ij} = i + j - 1$ sea C = AB. Determine el valor de C_{22}.

A) 11 B) 18 C) 25
D) 32 E) 43

32 Considere las matrices

$$A = (a_{ij})_{3\times 3} \text{ tal que } a_{ij} = \begin{cases} i_2, i < j \\ 2, i = j \\ i - j, i > j \end{cases}$$

$$B = (b_{ij})_{3\times 3} \text{ tal que } b_{ij} = \begin{cases} 0, i < j \\ n, i = j \\ i + j, i > j \end{cases}$$

Si $M = (m_{ij})_{3\times 3}$ tal que $M = A \cdot B$ entonces determine el valor de: T = m[illegible] + m[illegible] + m_{22} – m_{23}

A) 12 B) 15 C) 17
D) 21 E) 42

33 Se define la matriz $A_{8\times 8} = \begin{cases} a_{ij} = -1; i = j \\ a_{ij} = 1; i \ne j \end{cases}$

Si $B = A \cdot A^T$, entonces determine la suma de los elementos b_{22} + b[illegible] de la matriz B.

A) 12 B) 14 C) 18
D) 16 E) 20

34 Dadas las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} x & 1 \\ y & 5 \end{bmatrix}$$

Si A y B son matrices conmutables, determine el valor de $T = 2x - 3y$

A) –1 *B) 0* *C) 2* *D) 5* *E) 7*

35 Sean A y X dos matrices definidas por

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ y el conjunto definido por: M = {(a; b; c; d) / XA = AX}, determine por extensión el conjunto M.

A)M = {(1; 0; 0; 0)} ***B)M = {(0; 0; 1; 2)}***

C)M = {(a; 0; 0; d)/ a y d ∈ R}

D) $M = \{(0; 1; 0; 0) / c \in R\}$

E) $M = \phi$

36 Dado el sistema de matrices.

$$A + B - C = I$$
$$A - B + 2C = 3I$$
$$2A + B + C = 5I$$

Determine la matriz B

A) I B) 2I C) –I
D) 3I E) ½I

37 Acerca de las matrices A. B y C. se dan los siguientes enunciados:

I. Si A no es nula. entonces A^2 no es nula.

II. Si B es una matriz simétrica. entonces $(B+B^T) = 2B$.

III. Si $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$. entonces $C^3 = I$.

Indique cuál(es) correctas:

A) I y II B) II y III C) I y III
D) sólo III E) I. II y III

38 Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & x - x^2 \\ x^2 - x & 0 \end{pmatrix}$ y $n \in N$

entonces halle la $Tr(A + A)$

A) 0 *B)* $(x^2 - x)^{4n} (x^2 - x + 1)$
C) $(x^2 - x)^{4n} (-x^2 + x + 1)$ *D)* $2(x^2 - x)^{4n}$
E) $-2(x^2 - x + 1)^{4n-1}$

39 Dada la matriz $M = \begin{pmatrix} 0 & -x \\ x & 0 \end{pmatrix}$. halle M

A) $x^{1003} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *B)* $x^{1002} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ x & 0 \end{pmatrix}$

C) $x^{1003} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ *D)* $x^{1003} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

E) $x^{1003} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

40 Dada la matriz. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$: determine la suma de los elementos de A

A) 6 B) 6 C) 6
D) 6 E) 6

41 Determine la matriz $E = A + A$. si $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

A) $\begin{bmatrix} 100 & -100 \\ 100 & -100 \end{bmatrix}$ *B)* $\begin{bmatrix} -200 & -100 \\ -100 & -200 \end{bmatrix}$ *C)* $\begin{bmatrix} 200 & -100 \\ -100 & 200 \end{bmatrix}$

D) $\begin{bmatrix} 384 & -384 \\ -384 & 384 \end{bmatrix}$ *E)* $\begin{bmatrix} 200 & 100 \\ 100 & 200 \end{bmatrix}$

42 Se define la matriz: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ tal que $A^n = \begin{pmatrix} 1 & a_n & b_n \\ 0 & 1 & c_n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. $n \in Z^+$ y dado los siguientes enunciados:

I. $a_n = c_n$
II. $a_{n+1} - a_n = 1$
III. $b_{n+1} - b_n = a_n$
IV. $b_n = \dfrac{n(n-1)}{2}$

Determine cuál(es) son correctas:

A) I. III y IV B) sólo I C) II y III
D) I. II. III y IV E) Sólo II

43 Si x es una matriz que satisface la siguiente ecuación matricial. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} x \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \log_\pi \pi & 0 \\ \log_5 1 & 1 \end{pmatrix}$. determine el valor de la $Tr(x^{-2})$.

A) $\dfrac{1}{9}$ *B)* $\dfrac{1}{3}$ *C)* $\dfrac{5}{3}$ *D)* $\dfrac{17}{9}$ *E)* 2

44 Determine la traza de matriz x tal que se cumple la siguiente igualdad.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 8 \end{pmatrix} x \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

A) 26 *B)* 27 *C)* 28 *D)* 29 *E)* 30

45 Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ Calcule la traza de la matriz inversa de A.

A) –1 *B)* 0 *C)* 1 *D)* 2 *E)* 3

46 Si A es una matriz definida por

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

X es una matriz que satisface la ecuación: $A = AX$. determine la traza de la matriz X:

A) –19 B) –13 C) –6
D) 5 E) 12

47 Sea la matriz: $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ y dado los siguientes enunciados:

I. $D + D^{-1} = \begin{pmatrix} 9/2 & -1 & 7/2 \\ 1/2 & 3 & 9/2 \\ 1/2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$

II. $Trz\, D^{-1} = 3$

III. $D - D^{-1} = \begin{pmatrix} -5/2 & 5 & 5/2 \\ 3/2 & 3 & 7/2 \\ 3/2 & 3 & 7/2 \end{pmatrix}$

Cuál(es) son correctas:

A) sólo I B) sólo II C) sólo III
D) I y II E) II y III

48 Dadas las matrices A y B tales que

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1/2 & -1 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ o & d & e \\ o & o & f \end{pmatrix}$$

si B es la inversa de A.
Calcule $T = a + b + c + d + e + f$

A) 25 B) 26 C) 28
D) 29 E) 30

49 Dados los siguientes enunciados (con A y B)

I. Si A y B conmutan entonces A y B^{-1} conmutan.

II. Si A y B conmutan entonces A^{-1} y B^{-1} conmutan.

III. Si $M = A^{-1}BA$. A inversible entonces $M^2 = A^{-1}B^2A$.

¿Cuál(es) son correctas?

A) sólo I B) sólo II C) sólo III
D) I y II E) I y III

50 Sea $A = (a_{ij})_{5 \times 5}$ tal que $a_{ij} = \begin{cases} j & i < j \\ 0 & i = j \\ -i & i > j \end{cases}$

Calcule el determinante de A.

A) 0 B) 1 C) 120
D) 1024 E) 2040

51 Si $B = (b_{ij})$ es una matriz cuadrada de orden n tal que $b_{ij} + b_{ji} = \begin{cases} 2 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$ tal que $A \cdot B + AB^T = 6I$. Calcule $|A|$

A) 3 B) 4 · 3 C) –2
D) 0 E) 3

52 Si A es de orden 4 × 4 y $|A| = \sqrt[50]{2}$ determine el valor de $T = |A^2||A^t||A|$

A) 1 B) 2 C) $\sqrt{2}$
D) $\sqrt[3]{2}$ E) $\sqrt[5]{2}$

53 Si A es una matrizx de orden 5 tal que $(|A^3| + 1)(|A^{-1}|^3 + 2) = 42$. determine el valor de "h" de modo que:

$(1 - h)|A| + 8|A^2| = -15 \wedge |A| \in Q$

A) –33 B) –35 C) –39
D) –41 E) –43

54 Sea $C = HAH^{-1}$ $|C| \neq 0$. $k \in R$

Simplificar:

$E = (|kI - A| + |kI - C|)(|kI - A| - |kI - C|)$

A) 0 B) $|A + C|$ C) $2|A - C|$
D) $|A + I|$ E) $|A - C|$

55 Sean A y B dos matrices de orden 3 × 3 donde $|A| = 5$. $|B| = 2$. Determine el valor de:

$$E = \frac{\left\| A^T \cdot 2B^T \right| A^T \right|}{|AB|}$$

A) 250 000 B) 256 000 C) 100 000
D) 120 000 E) 300 000

56 Sea A una matriz cuadrada de orden 4 × 4 con $|A| = 2$. Determine el valor de $|(A \cdot A)(2A)|$

A) 2 B) 4 C) 8
D) 16 E) 32

57 Determine la matriz inversa de $A^{\cdot} + I$, si A cumple $A^{-} + A^{'} + 2A^{2} + A = 0$ donde $|A| \neq 0$.

A) $A^{2} - A + I$ B) $A^{2} + A - I$ C) $A^{2} - A + I$
D) $A^{2} + 2A + I$ E) $A^{2} - 2A + I$

58 Si $H = \begin{pmatrix} x^2 & 3 \\ x & 1 \end{pmatrix}$ su valor del det(H) = 4, determine H^{2}, de cómo respuesta la suma de dichos elementos de H^{2}.

A) –8 B) –6 C) 0 D) 1 E) 2

59 Determine los valores de "x" para los cuales la matriz dada es singular.

$$A = \begin{pmatrix} \log(35 - x^3) & \log(5 - x) \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

De cómo respuesta la suma de estos valores.

A) 0 B) 2 C) 5 D) 6 E) 35

60 Para $A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & 1 \\ 1 & \cos\alpha \end{pmatrix}$, $\cos \neq \pm$ cuál(es) de los siguientes enunciados son verdaderos

I. $\text{traz}(A^{-}) = 2\cos\alpha + 3$

II. $|A^{'}| = (\cos^{2}\alpha - 1)^{2}$

III. $|(At)^{-} A^{2}| = \cos^{2}\alpha + 1$

A) sólo II B) I y II C) I y III
D) sólo III E) II y III

61 Se define las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & x & 0 \\ 0 & 2x & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ x-1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Determine el valor de x, tal que $|2A - B| = 8x^{2} - 20x - 4$.

A) 2 B) 1 C) –2
D) 3 E) –3

62 Los polinomios

$P(x) = ax^2 + bx + c$
$Q(x) = x^3 - 1$

Tienen una raíz común. Indique cuál(es) de los siguientes enunciados son correctos:

I. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} = 0$ II. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a & c & b \\ a & a & a \end{vmatrix} = 0$

III. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & a & c \\ c & b & a \end{vmatrix} = 0$

A) sólo I B) I y II C) sólo II
D) I y III E) I, II y III

63 Determine el mayor valor que debe tomar "k", para que la matriz $A = \begin{pmatrix} k & 1 & -1 \\ 0 & 2 & k \\ 4 & 0 & -k \end{pmatrix}$ no tenga inversa.

A) $1 - \sqrt{5}$ B) $1 - \sqrt{3}$ C) $1 + \sqrt{2}$
D) $1 + \sqrt{3}$ E) $1 + \sqrt{5}$

64 Determine los valores de x para los cuales la matriz: $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 7 \\ x & x+2 & x-2 \\ 4 & x & 8 \end{pmatrix}$ es singular:

A) $\left\{-3; \frac{4}{3}\right\}$ B) $\left\{-\frac{4}{3}; 3\right\}$ C) $\left\{-\frac{1}{3}; 3\right\}$

D) $\left\{-\frac{2}{3}; 1\right\}$ E) $\left\{-4; \frac{3}{2}\right\}$

65 Se define el conjunto A, mediante:

$$A = \left\{ x \in Z / \begin{vmatrix} 2x & x+1 & -1 \\ 3x+1 & 2x+2 & -x-2 \\ 2x & x+1 & 2x-1 \end{vmatrix} = 0 \right\}$$

Determine el número de elementos de A:

A) 0 B) 1 C) 2
D) 3 E) 4

66 De la siguiente igualdad:

$$\sqrt{\begin{vmatrix} -3 & 6 & -1 & -5 \\ -4 & -3 & -2 & -20 \\ 5 & -4 & 1 & -15 \\ -1 & -5 & 0 & -5 \end{vmatrix} + 6} = \overline{ab}$$

Determine: $a + b + a^2 + b^2$

A) 40 B) 41 C) 42 D) 43 E) 44

67 Determine el valor del siguiente determinante:

$$\begin{vmatrix} 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 6 & 9 \\ 7 & 6 & 7 & 2 \\ 8 & 4 & 5 & 5 \end{vmatrix}$$

A) 0 B) 62 C) 154
D) 208 E) 242

68 Determine el valor del siguiente determinante:

$$\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-b \end{vmatrix}$$

para $a = \sqrt[5]{72} = \sqrt[5]{108}$

A) 6 B) 36 C) 216
D) 1296 E) 6^{2}

69 Si B es la matriz definidad por:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & 6 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \text{ calcule el } |B|$$

A) –189 B) –180 C) 180 D) 189 E) 200

70 Si A es una matriz definida por:

$$A = \begin{bmatrix} x-y & x+y & x+y & x+y \\ x-y & x+y & x+y & x-y \\ x-y & x+y & x-y & x-y \\ x+y & x-y & x-y & x-y \end{bmatrix}$$

Entonces el valor del det(A) es:

A) x^3y B) xy^3 C) x^2y^2 D) $8x^3y$ E) $16xy^3$

71 Calcule el valor del siguiente determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 20 & 10 \end{vmatrix}$$

A) –40 B) –39 C) 0 D) 18 E) 26

72 Calcule el valor del siguiente determinante:

$$\begin{vmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 8 & 8 & 6 & 4 & 2 \\ 9 & 9 & 9 & 6 & 3 \\ 8 & 8 & 8 & 8 & 4 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \end{vmatrix}$$

A) 90 B) 100 C) 110 D) 120 E) 180

73 calcule el valor del siguiente determinante:

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 & -4 & -6 & -8 \\ 3 & 1 & 0 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & -1 & -2 & -3 \\ 4 & 2 & 1 & 0 & -3 \\ 5 & 3 & 2 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

A) 6 B) 4 C) 64 D) 128 E) 240

74 Calcule el valor del siguiente determinante:

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 4 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

A) 6 B) 64 C) 16 D) 10 E) 8

75 Indicar el valor del determinante.

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \log 2 & \log 20 & \log 200 & \log 2000 & \log 20000 \\ \log^2 2 & \log^2 20 & \log^2 200 & \log^2 2000 & \log^2 20000 \\ \log^3 2 & \log^3 20 & \log^3 200 & \log^3 2000 & \log^3 20000 \\ \log^4 2 & \log^4 20 & \log^4 200 & \log^4 2000 & \log^4 20000 \end{vmatrix}$$

A) 12 B) 36 C) 72 D) 44 E) 288

76 Si $A = (a_{ij})_{n \times n}$ definido por:

$$A = \begin{bmatrix} a & b & o & o & \ldots & o & o \\ o & a & b & o & \ldots & o & o \\ o & o & a & b & \ldots & o & o \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ o & o & o & o & \ldots & a & b \\ b & o & o & o & \ldots & o & a \end{bmatrix}$$

A) $a^4 \times x^4$ B) $a(a \times x)^4$ C) $a^3(a + x)^4$
D) $(a + x)x^4$ E) $(a - x)(a + x)^4$

77 Calcule el valor del siguiente determinante:

$$\begin{vmatrix} a & -1 & 0 & 0 & 0 \\ ax & a & -1 & 0 & 0 \\ ax^2 & ax & a & -1 & 0 \\ ax^3 & ax^2 & ax & a & -1 \\ ax^4 & ax^3 & ax^2 & ax & a \end{vmatrix}$$

A) $a^4 \times x^4$ B) $a(a \times x)^4$ C) $a^3(a + x)^4$
D) $(a + x)x^4$ E) $(a - x)(a - x)^4$

78 Sea A una matriz cuadrada de orden n cuyo determinantes es d ($d \neq 0$). Si $B = A^{t}$ y la matriz C se obtiene multiplicando por d a la tercera y cuarta fila de la matriz B. Calcule el valor del det(ABC).

A) d^{n} B) d^{n+5} C) d^{2n+1} D) $d^{n(n+3)}$ E) $d^{2n(n+1)}$

79 Indique cuál(es) de los siguientes enunciados son correctos:

I. Cualquier determinante $|a_{ij}|$ de orden superior a 2 y tal que $a_{ij} = i - j$, es cero.

II. Si A, B y C son tres matrices de orden n tales que $|B| \neq 0$ y $|AB - CB| = 0$ entonces A=C

III. Sean A y B dos matrices cuadradas de orden n con $AB \neq BA$ se cumple que $|AB| = |BA|$

A) sólo I B) II y III C) sólo III
D) I y III E) I, II y III

80 Sean A, B y C matrices de orden $n \times n$. Dados los siguientes enunciados:

I. Si $|A| = |B| \rightarrow Tr(A) = Tr(B)$

II. Si $A^{t} \cdot B^{-1}$ es no singular $\rightarrow A^{-1}$ es no singular.

III. Si $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 7 & 5 \\ 5 & 2 & 3 & 6 \\ 5 & -3 & -5 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow |A| = 0$

Indique cuál(es) son correctos

A) sólo I B) sólo II C) sólo III
D) II y III E) I y III

81 Calcule $|A_{n \times n}|$

si $A = (a_{ij})$ $(a_{ij}) = \begin{cases} i, & i = j \\ n, & i \neq j, n \in N \end{cases}$

A) n! B) $(-1)^{n} n^{n}$ C) $(-1)^{n-1} \cdot n^{n}$
D) $(-1)^{n}(n+1)!$ E) 0

82 Sea el sistema: $\begin{cases} ax + y = 3 \\ x - by = 4 \end{cases}$

Determine el valor de a + b si el sistema tiene como conjunto solución:

A) {(1; 1)} B) 2 C) –1 D) 3 E) –2

83 Determine los valores de a, de manera que el sistema $\begin{cases} x + ay = 1 \\ ax + y = a^2 \end{cases}$ tenga solución.

A) $a \in R$ B) $a \in R - \{-1\}$ C) $a \in R - \{1\}$
D) $a \in R - \{-1, 1\}$ E) $a \in R^{+}$

84 Determine los valores de a, para que el sistema lineal $\begin{cases} x + ay = 1 \\ x - y = 2 \end{cases}$ tenga soluciones positivas:

A) R B) $\langle -\infty, 0 \rangle$ C) $\langle -\infty, -1 \rangle$
D) $\langle -\infty, 1 \rangle$ E) $\langle -\infty, 1/2 \rangle$

85 Si el sistema lineal $\begin{cases} (a+b)x + (a-b)y = 42 \\ (2a+b)x + (3a-2b)y = 113 \end{cases}$ admite como solución a: $x = -2 \wedge y = 5$, determine el valor de $T = a + b$

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

86 Al resolver el sistema lineal:

$$\begin{cases} (m^2+1)x + (m+1)^2 y = m - 1 \\ (m+1)x + (m-1)y = m + 1 \end{cases}$$

De los siguientes enunciados:

I. $\Delta s + \Delta x + \Delta y = 2m(3m + 5)$

II. Si m = 0 el sistema es incompatible

III. Si m = –1 el sistema es indeterminado.

Cuál(es) son correctos:

A) sólo I B) sólo II C) sólo III
D) I y II E) II y III

87 Dado el sistema lineal:

$$\begin{cases} ax - y = 2 - a \\ 2x - (a+1)y = 2, a \in R \end{cases}$$

y dados los siguientes enunciados

I. Si a = 1 el sistema es indeterminado

II. Si a = –2 el sistema es incompatible

III. Si $a \neq 0$ el sistema es compatible

Cuál(es) son correctos:

A) sólo I B) I y II C) sólo II
D) I y III E) I, II y III

88 El siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$(m+1)x - 3y = 2m \Rightarrow 4x - my = m + 3$ es indeterminado para $m = k_1$ e incompatible para $m = k_2$. Determine el valor de $J = 2k_1 + 3k_2$

A) –6 B) –8 C) –10
D) 4 E) 2

89 Un tanque tiene dos orificios de desague. Se abren los dos y cuando llevan una hora vaciando, se obstruye uno de ellos y tarde el otro 2h12m en vaciar el resto. Pero si hubiera sido este orificio el obstruido, el otro hubiera terminado de vaciar el estanque en 2h45m. ¿En cuántas horas hubiera podido vaciar el estanque cada uno de los orificios?

A) 2h; 3h B) 4h; 5h C) 3h; 4h
D) 5h y 6h E) 4h y 6h

90 Que valor debe tomar "k", en el sistema lineal:

$$(k+1)x + 2y = 3$$
$$k^2x - (k-2)y = 4$$

para que sea inconsciente

A) 0 B) $\frac{3}{4}$ C) 1 D) $\frac{3}{2}$ E) 2

91 Un inversionista tiene S80,000 en inversiones al 10% y 12% anual. ¿cuanto invierte en cada una si obtiene ingresos anuales de S9000?

A) $50,000 al 12% $30,000 al 10%
B) $45,000 al 10% $35,000 al 12%
C) $25,000 al 10% $55,000 al 12%
D) $60,000 al 10% $20,000 al 12%
E) $35,000 al 10% $45,000 al 12%

92 Si $A = \{(a, b) \in R^2$ el sistema lineal:

$$\begin{cases} x + y + 2z = 3 \\ x + 2y - z = 1 \\ by + z = a \end{cases}$$

tenga infinitas soluciones}, determine el número de elementos del conjunto A(n(A))

A) 1 B) 2 C) 0 D) 3 E) 4

93 Sea el sistema lineal:

$$\begin{cases} bx + ay = c \\ cx + az = b \\ cy + bz = a \end{cases}, a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$$

Determine el valor de x:

A) $\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2bc}$ B) $\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ C) $\frac{b^2 - c^2 - a^2}{2bc}$

D) $\frac{-a^2 - b^2 - c^2}{2bc}$ E) $\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2bc}$

94 Si el sistema lineal

$$\begin{cases} 2x + y + 3z = 3 \\ x - y - 2z = 2a \\ x + 2y + 2z = 4a \\ x + y + z = 3 \end{cases}$$

es consistente, entonces $x \cdot y \cdot z \cdot a$ es:

A) 4 B) –4 C) 8 D) –8 E) 16

95 Determine los valores del parámetro m de manera que el sistema homogéneo:

$$\begin{cases} (1-m)x + y - z = 0 \\ 2x - my - 2z = 0 \\ x - y - (1-m)z = 0 \end{cases}$$

presenta soluciones diferentes a las triviales:

A) $m = 0 \vee m = 1$ B) $m = -1 \vee m = 1$
C) $m = 0 \vee m = 2$ D) $m = 1 \vee m = 1$
E) $m = 0 \vee m = 3$

96 Al resolver el sistema:

$$x - 3y + z = 1$$
$$-x - 2y + z = 0$$
$$12x - y - z = 2$$

usando el método de cramer.

Determine el valor de $E = 3x + y - z$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

97 A partir del sistema lineal

$$\begin{cases} 3x + y - 9z = 0 \\ 4x - 3y + z = 0 \\ 6x - 11y + 21z = 0 \end{cases}$$

De los siguientes enunciados:

I. El sistema posee solución única.

II. El sistema es incompatible

III. El sistema es indeterminado

Cuál(es) son correcto:

A) sólo I B) sólo II C) I y II
D) sólo III E) sólo II y III

98 Calcule z al resolver el sistema

$$\frac{x + y}{a - b} = a + b \ldots\ldots(1)$$

$$\frac{x - z}{a + b} = a - b \ldots\ldots(2)$$

$$\frac{x - z}{z - y} = \frac{a + b}{a - b} \ldots\ldots(3)$$

A) ab B) $(a-b)^2$ C) a^2-b^2

D) $\frac{(a-b)^2}{2}$ E) a + b

99 Resolver el sistema:

$$\frac{5}{2x+y}+\frac{4}{2x-3y}=5 \Rightarrow \frac{15}{2x+y}+\frac{2}{2x-3y}=5$$

Si el C.S. = $\{(x_o ; y_o)\}$ entonces $4x_o + 9y_o$ = es:

A) 17 B) 21 C) 22
D) 26 E) 31

100 Resolver el sistema en R^+

$$x+y=\frac{1}{15}xyz \Rightarrow x+z=\frac{11}{120}xyz \Rightarrow z+x=\frac{13}{120}xyz$$

Entonces el valor de T = x + y + z es:

A) 3 B) 8 C) 12
D) 14 E) 16

101 Resolver el sistema x+y=y + z +4z +x−8= 6y determine (x − y + z)

A) 15 B) 16 C) 17
D) 20 E) 25

102 Si A = $\{(x_o ; y_o ; z_o)\}$ es el conjunto solución del siguiente sistema:

$$\begin{cases} \frac{xy}{5x+4y}=6 \\ \frac{xy}{3x+2z}=8 \\ \frac{zy}{3y+5z}=6 \end{cases}$$

Entonces, calcule el valor de $T=\frac{2y}{x_0-y_0}$

A) 5 B) $\frac{15}{2}$ C) 10 D) $\frac{25}{2}$ E) 25

103 Al resolver el sistema.

$$\begin{cases} 2x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=2 \\ x_1+2x_2+x_3+x_4+x_5=0 \\ x_1+x_2+3x_3+x_4+x_5=3 \\ x_1+x_2+x_3+4x_4+x_5=2 \\ x_1+x_2+x_3+x_4+5x_5=5 \end{cases}$$

Indique el valor de x_1:

A) −4 B) −2 C) −1
D) 1 E) 2

104 Si:

$$A_{n\times n}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ 1 & 1 & & & & 0 \end{bmatrix}$$

además $\bar{b} \in R^n$, $\bar{x} \in R^n$ respecto al sistema lineal: $A\bar{x}=\bar{b}$ y Dados los siguientes enunciados

I. No tiene solución
II. Tiene solución única
III. Tiene infinitas soluciones

Cuál(es) son correctos

A) sólo I B) sólo II C) sólo III
D) I y III E) I y II

105 Determine el mínimo valor de z que satisface el sitema de ecuaciones siguiente:

$x + y = 12$
$x^2 + y^2 = z$

A) 6 B) 36 C) 45
D) 72 E) 80

106 Determine cuantas soluciones reales tiene el sistema: $\begin{cases} x^5-y^5=992 \\ x-y=2 \end{cases}$

A) 0 B) 1 C) 2
D) 3 E) 4

107 Determine la suma de sus soluciones enteras en el siguiente sistema de ecuaciones no lineales:

$x^2-y^2-x+y=0$ .... (1)
$x+y^2-z=0$ .... (2)

A) −4 B) −3 C) −2
D) −1 E) −5

108 Sea el sistema $\begin{cases} x^2+xy+y^2=13 \\ x+y=4 \end{cases}$

Determine el valor de T = x + 3y

A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 6

109 Determine cuántas soluciones racionales presenta el sistema: $\begin{cases} x^2-xy+y^2=3 \\ 2x^2-xy-y^2=5 \end{cases}$

A) 0 B) 1 C) 2
D) 3 E) 4

110 Determine la solución real x e y del sistema:

$$\begin{cases} x^3+x^2(y+1)+y^2+xy+2y+1=0 \\ 2x+y=2 \end{cases}$$

Calcule el valor de $T = x - 2y^2$

A) −125 B) −131 C) 125
D) 131 E) −124

111 Al resolver el sistema:

$$\begin{cases} \frac{x+\sqrt{x^2-y^2}}{x-\sqrt{x^2-y^2}}+\frac{x-\sqrt{x^2-y^2}}{x+\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{17}{4} \\ x(x+y)+\sqrt{x^2+xy+4}=52 \end{cases}$$

Dados los siguientes enunciados:

I. El sistema posee 4 soluciones reales.
II. El sistema es inconsistente
II. El sistema posee solución única.

Cuál(es) son correcto:

A) sólo I B) I y III C) I, II y III
D) I y II E) II y III

112 El par ordenado que cumple en el sistema:

$$(x+y)^{1/2}-(x-y)^{1/2}=\left(\frac{5}{14}\right)(x^2-y^2)^{1/2}$$

$$(x+y)^{-1/2}-(x-y)^{-1/2}=\left(\frac{9}{14}\right)$$

es $(x_o ; y_o)$ determine: $4x_o - 2y_o$

A) $\frac{25}{2}$ B) 28 C) 5 D) 61 E) 72

113 Al resolver el sistema no lineal.

$$\begin{bmatrix} x^3 & y^3 & z^3 \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ x & y & z \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 176 \\ 100 \\ 0 \end{bmatrix}$$

determine el valor de la suma de las cuartas potencias de una solución:

A) 81 B) 16 C) 1250
D) 625 E) 0

114 Resolver el sistema: $a=\frac{x^2-y}{1-xy}$, $B=\frac{y^2-x}{1-xy}$, indique el valor de "y"

A) $\frac{b-a^2}{ab-1}$ B) $\frac{a-b^2}{ab-1}$ C) $\frac{a-b}{ab-1}$

D) $\frac{b-a}{ab-1}$ E) $\frac{1}{ab-1}$

115 Dado el sistema: $\begin{cases} x^2+y\sqrt{xy}=70 \\ x\sqrt{xy}+y^2=105 \end{cases}$

Determine el valor de $T = x \cdot y$

A) 36 B) 12 C) 18
D) 32 E) 0

116 Al resolver el siguiente:

$$\begin{cases} \log_2 x+\log_8 y+\log_8 z=5 \\ \log_3 y+\log_{27} z+\log_{27} x=5 \\ \log_4 z+\log_{64} x+\log_{64} y=5 \end{cases}$$

Determine el valor de x:

A) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ B) $\frac{8\sqrt{2}}{9}$ C) 2 D) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ E) 3

117 Sean a, y, z $\in R^+$ tal que satisfacen el siguiente sistema:

$$\begin{cases} z^x=y^{2x} \\ 2^z=2(4^x) \\ x+y+z=16 \end{cases}$$

Entonces determine el valor de:

$T = \text{antilog}_z \sqrt{x} + 3\text{colog}_x y + \log x(\log_y z)$

A) 6 B) 8 C) 9 D) 10 E) 12

CLAVES DEL SEMINARIO 05

01	02	03	04	05	06	07	08	09	10
E	E	C	A	D	D	D	C	E	C
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
C	B	E	C	A	B	A	E	D	D
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
B	C	D	A	C	B	C	B	D	C
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
C	C	D	A	C	A	B	D	B	C
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
E	D	C	B	C	A	E	D	D	A
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
A	E	A	A	B	C	C	A	C	A
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
A	D	E	B	D	E	C	B	A	E
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
B	D	A	C	E	D	B	C	C	D
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
C	C	D	C	E	A	B	A	B	C
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
A	A	B	B	C	A	D	D	A	E
101	102	103	104	105	106	107	108	109	110
C	C	C	A	D	C	C	E	C	D
111	112	113	114	115	116	117			
A	D	C	B	A	B	B			

SEPTIMO SEMINARIO

01. Sean los números complejos: $z_1 = 1 - i$; $z_2 = -i$; $z_3 = -\sqrt{3} - 2i$. Determine el número complejo z y dé como respuesta su parte real:
$z = [z_1^3 + 2z_2^2 - 3z_3^2] + 2[z_1 . z_2 . z_3]$
A) 4 B) – 3 C) $2\sqrt{3} - 5$
D) – 1 E) 0

02. Determine "α" en la siguiente igualdad: $\alpha^{1} = \sqrt[\pi/2]{i^{\left(\frac{1+i}{1-i}\right)}}$
A) 1 B) $\frac{1}{2}$ C) e
D) 3e E) e^2

03. Determine en forma polar el número complejo:
$$z = \left[\frac{\left(\sqrt{2}i\right)^3 + \sqrt{8}i^8}{i^8 - i^4}\right]^2$$
A) 4(senπ + isenπ)
B) 8(cosπ + isenπ)
C) 8(senπ + icosπ)
D) 4(cosπ + i senπ)
E) 8(senπ + i senπ)

04. Determine un número real x que satisface la ecuación:
$(\text{sen}x + i\cos x)^4 = \text{sen}x - i\cos x$
A) – π B) $-\frac{\pi}{10}$ C) $\frac{\pi}{5}$
D) $\frac{\pi}{2}$ E) π

05. Si n = 3k, k natural, calcule
$$E = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^n + \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^n$$
A) – 3 B) – 2 C) 0
D) 2 E) 3

06. Determine:
$$M = \frac{\left(1 - i\sqrt{3}\right)^5 .(\cos\theta + i\text{sen}\theta)^7}{2(1-i)^6 .(\cos\theta - i\text{sen}\theta)^8}$$
A) $2e^{(\pi+8\theta)i}$ B) $3e^{(\pi-\theta)i}$
C) $2e^{i\left(-\frac{13\pi}{6} + 15\theta\right)}$
D) $2e^{i\left(-\frac{13}{6}\pi + 15\theta\right)}$
E) $4e^{2i(\pi-\theta)}$

07. Sea z un número complejo que cumple:
$z^2 + 1 = z$, calcule $\frac{z^{42} + 3}{z^{21}}$, z en el primer cuadrante.
A) – 4 B) – 2 C) – 1
D) 2 E) 4

08. Indique una raiz de la ecuación siguiente $\left(\frac{2z + 2i}{z - i}\right)^6 = 1$, $z \in C$
A) $\frac{cis300 + 1}{cos300 - 2}$ B) $\left(\frac{cis300 - 2}{cis300 + 1}\right)i$
C) $\left(\frac{cis300 + 1}{cis300 - 2}\right)i$ D) $\left(\frac{cis300 + 1}{cis300 - 1}\right)i$
E) $\left(\frac{cis300 + 2}{cis300 - 2}\right)i$

09. Se proponen los siguientes enunciados:
I. Si $z_1 = 1 + i$ y $z_2 = (1 + i)e^{i\pi/4}$, entonces el ángulo entre sus radios vectores es $\frac{\pi}{4}$.
II. $\exists x \in R$ / $|e^{ix}| < 1$.
III. En la ecuación $Z^{30} = -i$, la raiz principal es $e^{i\pi/20}$. Entonces, el (los) enunciado(s) verdadero(s) es(son):
A) solo I B) solo II C) solo III
D) I y II E) I y III

10. Si $z \in C$ tal que $z^{30} + i = 0$, indique cuál(es) de los siguientes enunciados son correctos.
I. La raiz principal es cis(15°)
II. Una raiz es cis(123°)
III. En el IIIC existen 7 raices.
A) solo III B) I, II y III C) I y II
D) solo II E) solo I y II

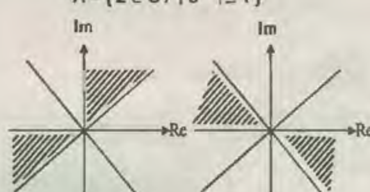
11. Si z_1; z_2; z_3 son las raices cúbicas de un número complejo tales que sus afijos forman un triángulo equilatero, entonces determine el valor de $T = \frac{z_1^2 \cdot z_2^2 \cdot z_3^2}{z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3 + 1}$
A) – 2 B) $-\frac{1}{2}$ C) 0
D) $\frac{1}{2}$ E) 2

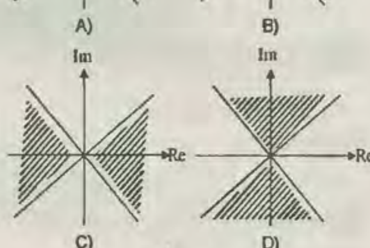
12. Si 1, w, w^2 son las raices cúbicas de la unidad, determine el valor de:
$E = (1 + w - w^2)(1 + w^2 - w^4)(1 + w^4 - w^8)(1 + w^8 - w^{16})$..... 18n factores.
A) 2^{18n} B) 2^{40n} C) 2^{16n}
D) 2^{10n} E) 2^{9n}

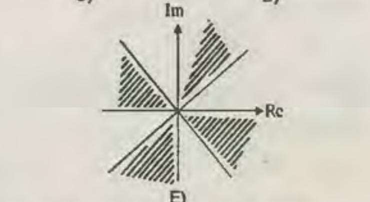
13. ¿Qué valor natural de n verifica la ecuación en los complejos, siendo w una de las raices cúbicas de 1.
$$\left(\frac{1 - 3w + 5w^2}{1 - w}\right)^n - \left(\frac{16}{w}\right)^2 = 0$$
A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 6

14. Reducir
$$E = \frac{(1+w)(1+w^2)(1+w^3)(1+w^4)(1+w^5)}{(1+w-w^2)^3 + (1-w+w^2)^3}$$
A) $-\frac{1}{8}$ B) $-\frac{1}{2}$ C) – 1
D) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{1}{2}$

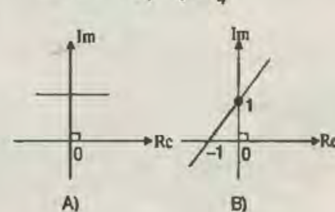
15. Graficar la región
$A = \{z \in C \,/\, |e^{z^2}| \leq 1\}$

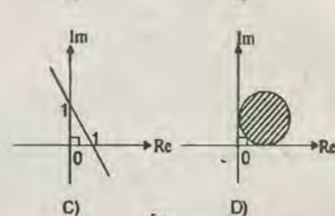


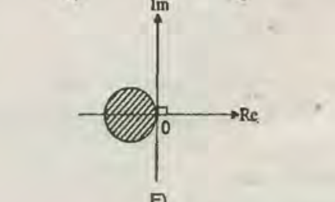




16. Si z = x + y i. Determine cual de las siguientes gráficas representa menor a $\arg\left(\bar{z} + 1\right) = -\frac{\pi}{4}$

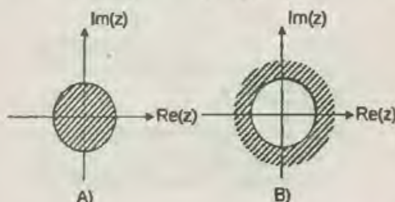


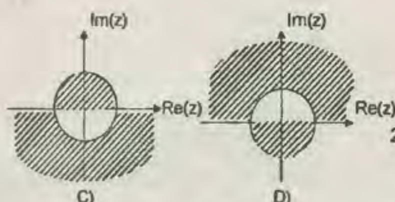


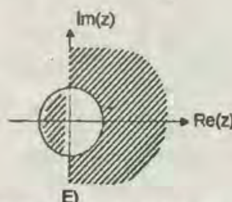


17. Determine el valor del área definida por la región
$E = \{ z \in \mathbb{C} \,/\, |Re(z)| + |Im(z)| \le 1 \,;\, |z - i| \le 1 \}$
A) $\frac{\pi}{8}u^2$ B) $\frac{\pi}{4}u^2$ C) $\frac{\pi}{2}u^2$
D) πu^2 E) $2\pi u^2$

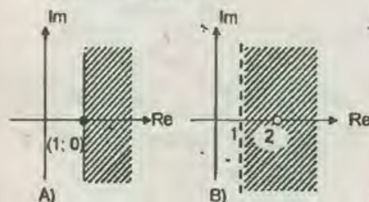
18. Grafique $\left\{ z \in \mathbb{C} / Im\left(z + \frac{1}{z}\right) \ge 0 \right\}$

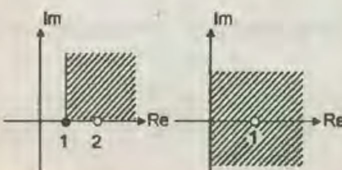




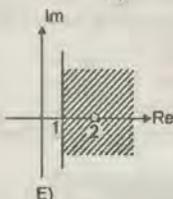


19. Determine la región de todos los números complejos z = x + yi para los cuales se cumple que:
$\log_{1/2}|z-2| > \log_{1/2}|z|$





C) D)



E)

20. Se proponen los siguientes enunciados:
I. Sea $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $a \ne 0$, $d \ne 0$. Si $P(x) = 0$ tiene tres raíces reales, entonces $P\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ tendrá las mismas raíces.
II. Todo polinomio complejo siempre tiene raíces complejas y sus respectivas conjugadas.
III. Si la suma de las raíces de una ecuación polinomial es racional, entonces cada una de las raíces, también es racional.
¿Cuántas son falsas?
A) solo I B) solo II C) solo III
D) I y II E) I, II y III

21. Sea P un polinomio complejo cuya regla de correspondencia esta dada por:
$P(z) = az^3 + bz^2 + cz + d$, indique cuál(es) de los siguientes enunciados son correctos:
I. P puede tener una raíz compleja y 2 reales.
II. P puede tener 2 raíces complejas diferentes y una raíz real.
III. P puede tener 3 raíces complejas.
A) solo I B) solo II C) solo III
D) I y II E) I, II y III

22. Halle "a + b" si $P(x) = x^2 + 6x + 2i\,x + a - bi$ tiene raíz cuadrada exacta.
A) 2 B) 4 C) 6
D) 8 E) 10

23. Halle la raíz cuarta de $-8 - 8\sqrt{3}\,i$ que esta en el segundo cuadrante
A) $-1 + \sqrt{3}i$ B) $-\sqrt{2} + i$
C) $-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{13}i}{2}$ D) $-\sqrt{3} + i$
E) $-\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{\sqrt{11}}{2}i$

24. Determine "x + y" si el complejo: $z = a^2 + 3ai + 6a + x - yi$ tiene raíz cuadrada exacta
A) $-\frac{9}{4}$ B) $-\frac{1}{4}$ C) $\frac{1}{4}$
D) $\frac{9}{4}$ E) 2

25. Dado el siguiente polinomio $P(x) = x^4 - x^3 + 2x - 5$, determine el valor de $P(1 - i)$.
A) − 6 B) − 6 C) − 5
D) 2 E) 4

26. Sea la matriz
$A = \left[a_{ij}\right]_{5x4} / a_{ij} = \begin{cases} 8 - a_{ij} \;;\; \text{si } i = j \\ -a_{ij} \;;\; \text{si } i \ne j \end{cases}$
Determine el valor de
$E = a_{22} + a_{32} - a_{54} - 2$
A) 0 B) 1 C) 2
D) 3 E) 4

27. Dada la matriz simétrica:
$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & b \\ x & 5 & a \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, determinar la $tr(AA^t)$
A) 20 B) 32 C) 51
D) 62 E) 73

28. Determine la traza de la matriz simétrica
$A = \begin{pmatrix} a & 5 & 7 \\ a+2b & 2b & 3c+a \\ 2b+3c & 20 & 3c \end{pmatrix}$
A) 13 B) 14 C) 15
D) 16 E) 18

29. Determinar traza(M) si se definen las matrices
$T = (t_{ij})_{3x3} / t_{ij} = 2j - i$, si $j > i$;
T es antisimétrica.
$W = -\begin{pmatrix} 0 & -1 & y-1 \\ y & 6 & z-1 \\ 0 & z-1 & 2 \end{pmatrix}^t - \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ z & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^t$;
W es simétrica
$-12W + W^t + 29T^t = (M^t)^t - 13(W^t)^t - 29(T^t)^t + I.$
A) 9 B) 11 C) 13
D) 15 E) 18

30. Definimos las matrices
$M = (m_{ij})_{4x5} / m_{ij} = \begin{cases} i - j \,;\, j > i \\ i + j \,;\, j \le i \end{cases}$
$H = (h_{ij})_{5x9} / h_{ij} = \begin{cases} i + j \,;\, j = i \\ i/j \,;\, j \ne i \end{cases}$
$P = MH = (p_{ij})_{4x9}$
Calcule:
$(p_{25} + 25)(p_{11} + 11)$
A) 130 B) 125 C) 115
D) 110 E) 100

31. Dadas las matrices
$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \end{bmatrix}$
$C = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$
Determine tr(X), si la matriz X, satisfacen la ecuación matricial: $CX + AB^t = BB^t$.
A) − 36 B) − 30 C) − 22
D) − 20 E) − 18

32. Dado

$A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}4&3\\2&1\end{pmatrix}$; $C=\begin{pmatrix}2&3\\4&5\end{pmatrix}$

Determine X en la ecuación matricial $2(X-3A)=(B-C)+4(X-A-B)$

A) $\begin{pmatrix}2&-1\\1&0\end{pmatrix}$ B) $\begin{pmatrix}6&4\\2&0\end{pmatrix}$ C) $\begin{pmatrix}-5&3\\0&1\end{pmatrix}$

D) $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ E) $\begin{pmatrix}4&3\\2&1\end{pmatrix}$

33. Si M, C y S son matrices cuadradas de igual orden ¿cuál(es) de los siguientes enunciados son correctos.

I. Si $(M+S)^2=M^2+2MS+S^2$ entonces M y S son conmutativas.

II. Si C.S = 0, entonces C = 0 ó S = 0.

III. Si MC = MS entonces C = S.

A) solo III B) solo II C) I y II
D) solo I E) II y III

34. Determine x,y en la ecuación matricial

$\begin{pmatrix}7&0&3\\4&5&2\\3&0&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x&0&5\\0&3&4\\3&0&y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}51&0&2\\3&15&18\\36&0&-51\end{pmatrix}$

A) – 66 B) 66 C) 21
D) 42 E) 46

35. Dada la matriz

$A=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-1&-1&-1\end{bmatrix}$

Determinar : A^{25}

A) – A B) 0 C) I
D) A E) A^2

36. Dada la matriz $A=\begin{bmatrix}1&0&-2\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$

Determine la matriz A^{215}

A) $\begin{bmatrix}1&0&-215\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix}1&0&-430\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$

C) $\begin{bmatrix}1&0&430\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$ D) $\begin{bmatrix}1&0&215\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$

E) $\begin{bmatrix}1&0&(-2)^{215}\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$

37. Sea la matriz $A=(a_{ij})_{2x2}$ tal que $a_{ij}=\begin{cases}1, & si\ i\neq j\\2, & si\ i=j\end{cases}$, hallar la suma de los elementos de la matriz A^n.

A) 2^{n+1} B) $5(2^n)$ C) $2(3^n)$
D) $4(3^n)$ E) 5^n

38. Si $A=(a_{ij})_{nxn}$, $a_{ij}=1$; $1\le i\le j\le n$, determine la suma de los elementos de A^n.

A) n^{2n} B) n^{n+1} C) n^{n+2}
D) n^{n-1} E) n^{n-2}

39. Determine el menor $n\in N$ tal que $A^n=0$, 0 matriz nula y donde

$A=\begin{bmatrix}0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$

A) 3 B) 4 C) 5
D) 6 E) 7

40. Si X es una matriz solución del sistema Ax = B, donde $A=\begin{bmatrix}1&1\\2&1\end{bmatrix}$ y $B=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$, determine X^t B, dar como respuesta la suma de sus elementos.

A) – 1 B) 0 C) 1 D) 2 E) N.A.

41. Si $B=P^{-1}AP$, donde $A=\begin{pmatrix}5&4\\3&1\end{pmatrix}$ y $P=\begin{pmatrix}1&8\\6&-7\end{pmatrix}$, calcule la traza de B.

A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 6

42. Sea la matriz $B=\begin{bmatrix}0&-1\\1&1\end{bmatrix}$, halle la suma de los elementos de la matriz. $(B^{34}-2B^9+I)^{-1}$

A) $-\frac{5}{7}$ B) $-\frac{6}{7}$ C) $\frac{5}{7}$ D) $\frac{6}{7}$ E) 3

43. Al determinar A^{-1}, se obtiene: $\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\\gamma&\mu\end{pmatrix}$ calcular : $\alpha+\beta+\gamma+\mu$ si :

$A=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}^{16}-\begin{pmatrix}0&2\\0&0\end{pmatrix}^{15}-\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}^{15}$

A) -2^{-14} B) -2^{-12} C) -2^{-10}
D) -2^{-8} E) -2^{-6}

44. Si $(A+I)^t=\begin{bmatrix}2&5\\1&3\end{bmatrix}$; I: matriz identidad de orden 2, determine X a partir de $(AXA^{-1})^t=3(A-I)$, e indique la traza de X.

A) – 20 B) – 15 C) – 10
D) – 5 E) 3

45. Si $A=\begin{bmatrix}1&0&0\\-1&2&0\\1&2&3\end{bmatrix}$ calcule traz A^{-1}

A) $\frac{1}{5}$ B) $\frac{11}{6}$ C) $\frac{1}{6}$

D) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{2}{5}$

46. Resolver la ecuación matricial: $(AX^{-1}B)^t=AB$, donde

$A=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&2\\3&1&0\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}0&0&1\\1&2&0\\1&1&0\end{bmatrix}$ dando como respuesta la traza de la matriz incógnita

A) 10 B) 12 C) 11
D) 14 E) 0

47. Si $A=\begin{pmatrix}a&b&c\\d&e&f\\o&o&h\end{pmatrix}$ y cumple:

$A^2-5A+5I=0$, determine $traz(A-3I)^{-1}$ siendo a + b + c = 15.

A) 7 B) 8 C) 9
D) 10 E) N.A.

48. Si A es una matriz cuadrada no singular que cumple $A^3=2I$, determine la matriz inversa de A^2+A+I

A) A + I
B) A – I
C) A + 2I
D) A – 2I
E) A + 3I

49. Si A, B son matrices cuadradas del mismo orden e invertibles, despeje X, a partir de:
$A(XB+B^{-1})B=BA(A^{-1}B^{-1}+A^{-1})$; si $B-A=I$.

A) $A^{-1}B^{-2}$ B) $2A^{-2}B^{-1}$ C) $A^{-2}B^{-1}$
D) $2A^{-1}B^{-2}$ E) $2(AB)^{-1}$

50. Si $\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}=-10$ calcular $\begin{vmatrix}a+b&a-b\\c+d&c-d\end{vmatrix}$

A) – 40 B) – 30 C) – 20
D) 10 E) 20

51. Sea $P(x)=|A|$, donde $A=\begin{pmatrix}a^x+2b^x&-c^x\\4&2\end{pmatrix}$, además P(1) = 0 y $abc\neq 0$.

Determine el valor de .

$$E=\frac{5}{6}\left(\frac{a^3+8b^3+8c^3}{abc}\right)$$

A) 2 B) 3 C) 5
D) 7 E) 10

52. Sea $A=\begin{pmatrix}27x^2&3\\9x&6\end{pmatrix}$, donde $|A|=27$, entonces determine el valor de $E=36x^2+\frac{1}{x^2}$

A) 12 B) 13 C) 15
D) 16 E) 17

53. Sea A una matriz de orden 4 x 4 con $|A|=2$, determine el valor de $E=||A|A^2||A^3|$

A) 2^{12} B) 2^{13} C) 2^{14}
D) 2^{15} E) 2^9

54. Sea $A = (a_{ij})_{nxn}$. Determine el valor de:

$\left|A^{-1}\left|\frac{2}{|A|}A^{T}\right|\right|$, si $|A| \neq 0$

A) $2^{n^2}|A|^{n^2-n}$ B) $2^{n}|A|^{1-n^2}$
C) $2|A|^{n^2+n-1}$ D) $2^{n^2}|A|^{n^2+n}$
E) $2^{n^2}|A|^{-n^2+n-1}$

55. A es una matriz cuadrada de orden 3x3. Si se intercambian la primera y tercera fila se obtiene una matriz A_1. En A_1 a la primera fila se le multiplica por 3 y a la tercera por 2 obteniéndose la matriz A_2, de manera que $\det(A_2) = 66$. Hallar el $\det(A^{-1})$.

A) -11 B) $-\frac{1}{11}$ C) $\frac{1}{33}$
D) $\frac{1}{6}$ E) 11

56. Si $abc \neq 0$, hallar en valor de $T = \frac{|A|}{abc|B|}$, sabiendo que

$$A = \begin{pmatrix} -2bc & c^2 & b^2 \\ c^2 & -2ac & a^2 \\ b^2 & a^2 & -2ab \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{pmatrix}$$

A) -6 B) -4 C) -2 D) 2 E) 4

57. Determine el valor de la constante "k" si:

$$\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ p+q & q+r & r+p \\ x+y & y+z & z+x \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

A) $-\frac{1}{2}$ B) -1 C) $\frac{1}{2}$ D) 1 E) 2

58. Si $M = \begin{pmatrix} \ln 2 & \ln 4 & \ln 8 \\ \ln 8 & \ln 256 & \ln 512 \\ \ln 4 & \ln 16 & \ln 64 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \ln 1/2 & \text{coln}\,4 & \text{coln}\,16 \\ \ln 1/4 & \text{coln}\,256 & \text{coln}\,1024 \\ \ln 1/8 & \text{coln}\,32 & \text{coln}\,128 \end{pmatrix}$

Nota: coln (x) = $\text{colog}_e(x)$

A) 3ln2 B) 4ln2 C) 5ln2
D) $\ln^3 2$ E) $\ln^2 2$

59. Determine $|A|$, si

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{bmatrix}$$

A) (a + b) (a + c) (b + c)
B) (a – b) (b – c) (a + c)
C) (a – b) (b – c) (c – a)
D) (a + b) (b – c) (c – a)
E) (a – b) (b + c) (c – a)

60. Sea M = { A / det(A) = 0 }

Donde: $A = \begin{bmatrix} 70 & 72 & z \\ 105 & 108 & z+3 \\ 140 & 144 & z-3 \end{bmatrix}$

Determine $\eta(M)$

A) -3 B) 0 C) 1
D) 2 E) N.A.

61. Dada la matriz $A = [a_{ij}]_{4x4}$, donde

$a_{ij} = \begin{cases} i; & i > j \\ 1; & i = j \\ j; & i < j \end{cases}$, determine $|A|$:

A) -99 B) -98 C) -97
D) -63 E) -45

62. Evalué

$$E = \begin{vmatrix} 6 & 5 & 3 & 4 \\ 4 & 7 & 4 & 7 \\ 2 & 6 & 5 & 7 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$$

A) 40 B) 44 C) 45
D) 48 E) 49

63. Dada la matriz

$$A = \begin{vmatrix} a & 2a-1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 3 & a \end{vmatrix}$$

Determine el valor de verdad de los siguientes enunciados

I. $\nexists\, a \in N / |A| > 0$
II. $\exists!\, a \in R / |A| = 0$
III. $\forall \in N$: $|A| < 0$

A) VFV B) FVV C) FFF
D) VFF E) VVV

64. Calcule el determinante de la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & d & -c \\ -c & -d & a & b \\ -d & c & -b & a \end{bmatrix}$$

A) abcd
B) 0
C) $(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2$
D) $(ab + cd)^2$
E) 4abcd

65. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, calcule $|B|$ si $B = 3A^2$.

A) 115 B) 232 C) 324
D) 410 E) 512

66. Determine el valor de

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix}$$

A) 0 B) 1 C) 2
D) 3 E) 24

67. Calcule

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 4 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

A) 2 B) 4 C) 8
D) 16 E) 32

68. Si $A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 & a^3 & a^4 \\ 1 & a^2 & a^4 & a^6 & a^8 \\ 1 & a^3 & a^6 & a^9 & a^{12} \\ 1 & a^4 & a^8 & a^{12} & a^{16} \end{vmatrix}$, $a \neq 1$, $a \neq -1$

Determine $\frac{A}{(1-a)^9(1+a)^3(1+a+a^2)^2}$

A) a^{10} B) a^{13} C) a^{15}
D) a^{18} E) N.A.

69. Indique la suma de las raíces de la ecuación:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3-x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 4-x \end{vmatrix} = 0$$

A) 2 B) 3 C) 6
D) 10 E) 24

70. Si $B = (b_{ij})_{nxn}$, tal que $b_{ij} + b_{ji} = \begin{cases} 2, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$ y $AB + AB^t = 6I$, halle $|A|$.

A) 3 B) 2 C) 2^n
D) 3^n E) 6^n

71. Sea $A = [a_{ij}]$ una matriz de orden "n", si $a_{ij} = \begin{cases} x+m; & i = j \\ x & ; i \neq j \end{cases}$, determine $|A|$.

A) $(nx + m)m^2$ B) $(nx - 2m)m^3$
C) $(nx + 3m)m^4$ D) $(nx)m^n$
E) $(nx + m)m^{n-1}$

72. Determine el valor de "a" de manera que el sistema

$\begin{cases} x + ay = 9 \\ 2x + 3y = 10 \end{cases}$ sea inconsistente.

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{3}{2}$
D) 3 E) 5

73. Determine los valores del parámetro "n" real para que el sistema

$\begin{cases} 5x = 7 - ny \\ \frac{n}{5}x + y = \frac{9}{5} \end{cases}$, tenga solución única

A) $n \in R - \{-5; 5\}$
B) $n \in R - \{-1\}$
C) $n \in R - \{2; -2\}$
D) $n \in R - \{0; 1\}$
E) $n \in R$

74. Para qué valores del parámetro "k" el sistema

$$\begin{cases}(k+1)x+(k+3)y=k+12\\(k+17)x+30y=k+72\end{cases}$$

Tiene infinitas soluciones

A) $k=3$ B) $k=3 \vee k=7$
C) $k=1$ D) $k=2 \vee k=-1$
E) $k=4 \vee k=1$

75. Para qué valor de "n" el conjunto solución del sistema:

$$\begin{cases}13x-ny=17\\7y+nx=51\end{cases}$$

es { (b; b) }

A) 2 B) 4 C) 6
D) 8 E) 10

76. En el sistema $\begin{cases}mx+2y=5\\3x+(5-m)y=2+m\end{cases}$

Si N es el valor de m para que el sistema tenga infinitas soluciones, P es el valor de m para que el sistema no tenga solución. Determinar N – P.

A) –1 B) 0 C) 1
D) 2 E) 3

77. ¿Qué valor debe tener "a" para que "x" sea igual a "y" en el siguiente sistema?

$ax + 4y = 119$
$5x - ay = 34$

A) –1 B) 1 C) $\frac{-559}{133}$ D) $\frac{559}{133}$ E) 3

78. Sean las matrices

$$M=\begin{pmatrix}2\cos^2\theta & \text{sen}2\theta\\ \text{sen}2\theta & 2\text{sen}^2\theta\end{pmatrix} \quad y$$

$$N=\begin{pmatrix}2\text{sen}^2\theta & -\text{sen}2\theta\\ -\text{sen}2\theta & 2\cos^2\theta\end{pmatrix}$$

Entonces, los números λ, x, e y que satisfacen la ecuación:

$$(M+N)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \quad \text{son}$$

respectivamente:

A) 0, arbitrario, arbitrario
B) 1, arbitrario, arbitrario
C) 1; 1; 1
D) 1; 1; 0
E) 2; arbitrario, arbitrario

79. Determine a.b si los siguientes sistemas determinados:

I) $\begin{cases}ax+3y=16\\bx+4y=18\end{cases}$

II) $\begin{cases}3x+ay=14\\4x+by=12\end{cases}$

Son equivalentes

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 6

80. En el año 2050 habrá viajes a la luna en excursión. Usted tendrá un hijo quien será adulto para aquella época y este tendrá un hijo que será un niño para aquella época.
En una de esas excursiones viaja usted en compañía de 9 adultos y 5 niños más. El organizador de la excursión recibió 500 "supersoles" por la excursión. Si usted hubiera llevado a su nieto a la excursión, ud habría tenido que pagar 60 "supersoles" por el pasaje de los dos ¿cuál sería el precio de cada pasaje en "supersoles".

A) 45 y 15 B) 55 y 5 C) 50 y 10
D) 40 y 20 E) 35 y 25

81. Si el siguiente sistema :

$$\begin{cases}ax+y=3\\2x+ay=4\\2ax-3y=1\end{cases}$$

tiene solución única, entonces determine el valor de a.

A) –2 B) –1 C) 1
D) 2 E) 3

82. Al resolver el siguiente sistema

$$\begin{cases}2x+y-z=3\\5x-y+2z=1\\x+2y-3z=-2\end{cases}$$

Determine el valor $M=x-y-z$

A) –28 B) –20 C) 30
D) 38 E) 45

83. Determine el valor de "x" en el siguiente sistema:

$$\begin{cases}(m+p)y+(m+n)z-(n+p)x=2m^3\\(m+n)z+(n+p)x-(m+p)y=2n^3\\(n+p)x+(m+p)y-(m+n)z=2p^3\end{cases}$$

A) $x=m+2p+n$ B) $x=p^2+2$
C) $x=m^2+p$ D) $x=n^2+p$
E) $x=n^2-np+p^2$

84. Determine "x" en el sistema

$2x-y-z=2a$
$2y-x-z=4a$
$2z-x+y=6a$

A) $\frac{11}{3}a$ B) $\frac{16}{3}a$ C) $\frac{25}{3}a$
D) $\frac{31}{3}a$ E) $\frac{41}{3}a$

85. Determine el valor de "k" para que el sistema (*) tenga infinitas soluciones.

$$(*)\begin{cases}2x-5y+3z=0\\x-y+z=0\\3x+ky+z=0\end{cases}$$

A) –8 B) 7 C) 2
D) 3 E) 1

86. Determine el conjunto de valores que admite "m" para que el sistema

$x+y+(m-1)z=2$ .... (1)
$x+(m-1)y+z=3$ .... (2)
$(m-1)x+y+z=4$ .... (3)

tenga solución única

A) $m \in R-\{2\}$
B) $m \in R-\{1\}$
C) $m \in R-\{1, 2\}$
D) $m \in R-\{-1, -2\}$
E) $m \in R-\{-1, 2\}$

87. Considere el sistema:

$$\begin{cases}x+ny+z=m+n & ....(1)\\2x+my+(n+1)z=2n & ....(2)\\x+y+nz=n & ....(3)\end{cases}$$

Si y, m, n $\in$ N, entonces de la expresión $\frac{m}{n+1}$ se puede afirmar que :

A) Es igual a 1
B) Es menor que 1
C) Es mayor que 1
D) Es igual a 2n
E) Es igual a 2m

88. Si el sistema:

$$\begin{cases}x+2y-z=1\\3x-y+az=14\\x+y-2z=-6\end{cases}$$

Tiene solución única, entonces determine el conjunto de valores que admite "a"

A) $\left\{\frac{50}{13}\right\}$ B) $\{-10\}$ C) $R-\{10\}$
D) $R-\{-10\}$ E) $R-\left\{\frac{50}{13}\right\}$

89. Si {(a; b; c)} es el conjunto solución del sistema:

$$\begin{cases}2x_1-x_2-3x_3=5\\x_1+x_2-x_3=6\\2x_1+nx_2+2x_3=-n\\-x_1+x_3=-4\end{cases}$$

Determine el valor de $a+b+c+n$.

A) –2 B) –1 C) 0
D) 3 E) 4

90. En el siguiente sistema :

$$\begin{cases}cx+az=b\\bz+cy=a\\ay+bx=c\end{cases}, \quad abc \neq 0$$

Determine z en términos de a, b y c.

A) $(a^2-b^2+c^2)/ac$
B) $(a^2+b^2-c^2)/ab$
C) $(b^2+c^2-a^2)/2bc$
D) $(a^2-b^2+c^2)/2ac$
E) $(a^2+b^2-c^2)/2ab$

91. ¿Para que valor de a, el sistema (*) tiene solución única?

$$(*)\begin{cases}x^2+(y-1)^2=1\\y=a-x^2\end{cases}$$

A) –1 B) 0 C) 1
D) 2 E) 3

92. Halle la relación entre a y b para que el siguiente sistema tenga 2 soluciones:

$$\begin{cases} y=\dfrac{a}{x},\ a>0 \\ x^2+y^2=b \end{cases}$$

A) a = b B) a = 2b C) 2a = b
D) 3a = b E) a = – b

93. Resuelva el sistema:

$$\begin{cases} (x-y)(x+y+1)=50 \\ x(x+1)+y(y+1)=62 \end{cases}$$

Indique el menor valor entero de y.

A) – 16 B) – 14 C) – 3
D) – 1 E) 4

94 Determine el valor negativo del x + y + z del sistema:

$2x + y + z = xy + yz$
$2y + x + z = xz + xy$
$2z + x + y = xz + yz$
$x^2 + y^2 + z^2 = 2$

A) $2-\sqrt{8}$ B) $1-\sqrt{8}$ C) $-1-\sqrt{8}$
D) $-2-\sqrt{8}$ E) $-3-\sqrt{8}$

95. Resolver al sistema : (a > 0)

$$\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a} \\ \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=\sqrt[3]{2a} \end{cases}$$

Indique el valor de : $\sqrt{xy}$

A) $\dfrac{a}{4}$ B) a C) 3a
D) 4a E) 5^a

96 Determine la suma de todos los valores de x ∈ y que verifican el sistema:

$$\begin{cases} x+y+6x^2-3y^2=-17 \\ x-y-4x^2+2y^2=12 \end{cases}$$

A) 1 B) $\dfrac{40}{23}$ C) $\dfrac{7}{2}$
D) $\dfrac{19}{4}$ E) 7

97 Dado el sistema de ecuaciones en x, y, z:

$\dfrac{x+y}{a-b}=a+b$ .....(1)

$\dfrac{x-z}{a+b}=a-b$ .....(2)

$\dfrac{x-z}{z-y}=\dfrac{a+b}{a-b}$ .....(3)

Determine z

A) ab B) $(a-b)^2$ C) a^2+b^2
D) $\dfrac{(a-b)^2}{2}$ E) a + b

98 Sea el conjunto

$A=\{(x,y)\in R\times R\ /\ 2|x|-y=1\ \wedge\ x-|y|=3\}$, entonces el cardinal del conjunto A es:

A) 0 B) 1 C) 2
D) 3 E) 4

99 Determine el número de soluciones del sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x^2+y^2=4\left(\dfrac{x}{|x|}+\dfrac{y}{|y|}\right) \\ y=x+1 \end{cases}$$

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

100. Resolver el sistema:

$4^{x+2y}=8$
$9^{z-y}=27$
$\log_z(2x+4z)=2$

Dar el valor de x.

A) $-\dfrac{5}{2}$ B) $-\dfrac{3}{2}$ C) $-\dfrac{1}{2}$
D) $\dfrac{1}{2}$ E) $\dfrac{3}{2}$

101. Sea el sistema:

$x^2=1+\log_4 y$
$y^2=y2^x+2^{2x+1}$

Halle el mayor valor de "y" que satisfaca el sistema

A) 1 B) 2 C) 4
D) $2\sqrt{2}$ E) $4\sqrt{2}$

102. Si x e y son variables enteras que satisfacen las condiciones:

$5x-3y>2$
$2x+y<11$
$y>3$

Entonces el valor de T = x.y es:

A) 6 B) 12 C) 15
D) 20 E) 8

103. Al representar gráficamente el siguiente sistema

$$\begin{cases} x+y\le a \\ -x+y\le a \\ -x-y\le a \\ x-y\le a \end{cases}$$

Se obtiene una región cerrada, cuya área es 32 u^2, entonces el valor de a es:

A) 2u B) 4u C) 6u
D) 8u E) 10u

104. Resolver el sistema en Z^+

$2x+3y+5z>23$
$2x-y+5z<13$
$z-y<-1$
$y<4$

Indique el valor de T = x.y.z

A) 6 B) 10 C) 12
D) 15 E) 24

105. Entre 3 criadores de conejos ocurre lo siguiente dialogo: "el número de mis conejos es mayor que el doble de los tuyos; pero el cuádruple de los tuyos es mayor que siete veces los de mi cuñado; mañana mataré 4 de los mios y los restantes serán menores que el doble de los que tiene mi cuñado ¿Cuántos conejos tiene mi cuñado?. Cada uno tiene al menos un conejo.

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

106. Al representar gráficamente el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x^2+y^2-6y\le -7 \\ y-x-3\le 0 \end{cases}$$

Se obtiene una región cerrada, entonces la mayor distancia que existe entre un punto de la región y el origen coordenadas es:

A) $\sqrt{8}$ B) 3 C) 4
D) $\sqrt{17}$ E) $\sqrt{20}$

107. Si A es un conjunto definido por

$A=\{(x;y)\in Z\times Z/\ y-x^2+x+6>0\ \wedge\ y-x<-3\}$

. Entoncas el número de elementos del conjunto A es:

A) 5 B) 6 C) 7
D) 8 E) 9

108. Si M es un conjunto definido por:

$M=\{(x;y)\in Z\times Z/2y+x^2+4x\le 2\ \wedge\ x^2+6x+3<3y\}$

Entoncas el número de elementos del conjunto M es:

A) 8 B) 9 C) 11
D) 12 E) 15

CLAVES DEL SEMINARIO 07

01	02	03	04	05	06	07	08	09	10
C	C	B	D	D	C	A	D	E	A
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
C	A	C	A	D	B	B	D	B	E
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
E	A	D	A	C	C	C	D	B	B
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
E	B	D	A	D	B	C	B	C	E
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
E	C	A	E	B	C	E	B	D	C
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
E	B	C	E	B	C	E	D	C	E
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
C	D	C	C	C	B	D	E	C	D
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
E	C	A	A	D	C	E	E	B	C
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
D	A	E	B	D	E	B	D	E	E
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
B	C	C	A	A	B	D	A	A	B
101	102	103	104	105	106	107	108		
E	B	B	D	B	D	[illegible]	E		



01 Indique el número de soluciones naturales d3l sistema: $x + 2y < 5$

$x - y < 3$

A)1 *B)2* *C)3* *D)4* *E)5*

02 Resolver en Z, .el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 3x+2y<20 \\ 2x-y<2 \\ 3x-y>3 \end{cases}$$

y determine $T= x + y$

A)3 *B)2* *C)0* *D)4* *E)7*

03 Sean x; y números enterros. Al resolver el sistema $3x - 4y > 10$

$x + 2y < -12$

$y > -6$

Determine $T = x + y$

A)- 5 *B)- 8* *C)- 10* *D)0* *E)2*

04 Un escolar encola de nuevo todos sus sellos en otro álbum similar. Si pega 20 sellos en cada hoja entonces no le alcanza el álbum, si pega 23 sellos, le sobrará por lo menos, una hoja vacía y si eol escolar se le regala igual álbùm con 21 sellos en cada hoja, el escolar tendrá en total 500 sellos. ¿Cuántas hojas tiene el álbum?

A)18 *B)15* *C)14* *D)13* *E)12*

05 Resuelva el sistema lineal de:

$$\text{inecuaciones}\begin{cases} x+y+z\le 6 \\ x+y\ge 3 \\ x+z\ge 5 \\ x+z\ge 4 \\ x+z\in Z^{+} \end{cases}$$

Indique el valor de $T = x y z$.

A)6 *B)8* *C)10* *D)12* *E)14*

06 Determine el valor de $E= \frac{x+y}{2}$, en el siguiente sistema de inecuaciones lineales.

$z - 1 < x + y < z + 1$

$z - 7 < x - y < z - 5$

$10 < x + z < 12$: $x, y, z \in Z^{+}$

A) $\frac{1}{2}$ *B)* $\frac{2}{3}$ *C)2* *D)1* *E)3*

07 determine el conjunto solución de:

$$\begin{cases} \log_{1/2}(5x-12)<-3 \\ 8<2^{x}<32 \end{cases}$$

A) $\{4,\infty\rangle$ *B)* $\langle 3,\infty\rangle$ *C)* $\langle 3.4\rangle$ *D)* $\langle 4.5\rangle$ *E)* $\langle 5.\infty\rangle$

08 determine el mayor valor que toma "x + y" al resolver el siguiente sistema:

$$\begin{cases} y-x^{2}+6x-12\ge 0 \\ 2y-x\le 4 \\ x,y\in Z \end{cases}$$

A)8 *B)6* *C)- 7* *D)9* *E)0*

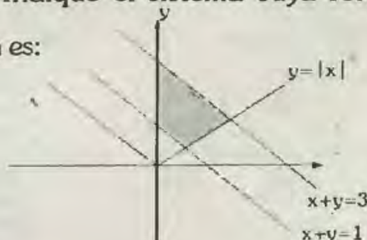
09 Al resolver: $\log x^{3} > \log x^{2} - 1$

$\ln x^{3} < \ln x^{3} - 1$

El conjunto solución de este sistema es (a, b), determine $T = 10a + b$. e

A)2 *B)3* *C)8* *D)10* *E)15*

10 Indique el sistema cuya solución gráfica es:



A) $\begin{cases} x+y\geq 1 \\ x-y\leq 3 \\ y<x^2; x\geq 0; y\geq 0 \end{cases}$ *B)* $\begin{cases} x+y\geq 1 \\ x+y\leq 3 \\ y\geq x^2; x\geq 0; y\geq 0 \end{cases}$

C) $\begin{cases} x+y\geq 1 \\ x-y\leq 3 \\ y\geq |x|; x\geq 0; y\geq 0 \end{cases}$ *D)* $\begin{cases} x+y\geq 1 \\ x-y\leq 3 \\ y<|x|; x\geq 0; y\geq 0 \end{cases}$

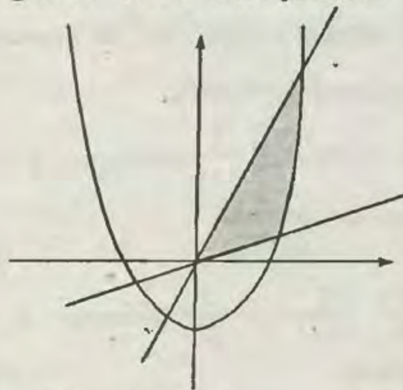
E) $\begin{cases} x+y\geq 1 \\ x+y\leq 3 \\ y\leq |x|; x\geq 0; y\geq 0 \end{cases}$

11 Dados los conjuntos:

$A=\{x;y\}\in R^2 / y/4\leq x/2\leq y\}$

$B=\{(x;y)\in R^2 / y\leq (x-1)(x+1)\}$

La región sombreada corresponde a:

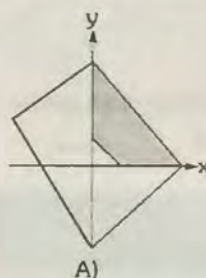


A) $(A\cap B)^c$ *B)* $A\cap B$ *C)* $A\cup B$

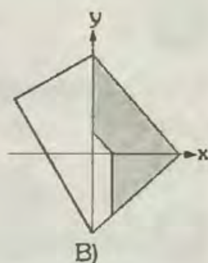
D) $A-B$ *E)* $B-A$

12 Determine la solución del sistema:

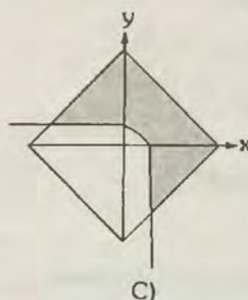
$$\begin{cases} |x|+|y|\leq 4 \\ x+|x|+y+|y|\geq 2 \end{cases}$$



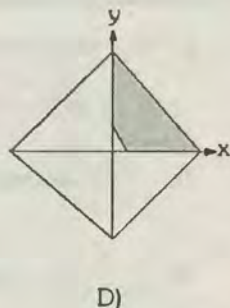
A)



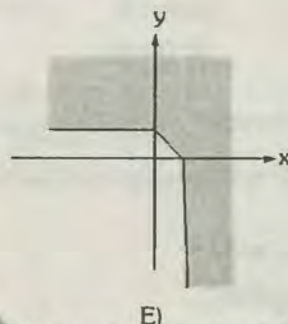
B)



C)



D)



E)

13 Determine el valor del área definida por: $A=\{(x;y)\in R \times R / x^2+y^2\leq 9 \wedge |x|+|y|\geq 3\}$

A) $5(\pi-2)u^2$ *B)* $7(\pi-1)u^2$ *C)* $8(\pi-2)u^2$

D) $9(\pi-2)u^2$ *E)* $6\pi u^2$

14 En la sucesión: $\{a_n\}_{n\in N}=\left\{\frac{4}{5};\frac{11}{25};\frac{31}{125};\frac{89}{625};\ldots\right\}$ el término de lugar 5 es:

A) $\frac{240}{5^5}$ *B)* $\frac{247}{5^5}$ *C)* $\frac{250}{5^5}$ *D)* $\frac{259}{5^5}$ *E)* $\frac{260}{5^5}$

15 Si la $a_1 = 1$, $a_{n-1} = 10^{1}a_n$, $\forall n \geq 1$, determine el término enésimo.

A) $10^{-(n-1)}$ *B)* $10^{-(n-2)}$ *C)* $10^{-(n+1)}$
D) 10^{n} *E)* 10^{-n}

16 Indique cuál(es)de los siguientes enunciados son correctos

I. $\{a_1\}$ es creciente, $a_1 = \sqrt{2}$
$a_1 = \sqrt{2a_{n-1}}, n \geq 2$

II. $\left\{\frac{n}{n-1}\right\}$ es decreciente

III. $\left\{\frac{n}{n^2+1}\right\}$ es una sucesión acotada

A)sólo II *B)I y II* *C)I y III*
D)I, II y III *E)IIo III*

17 Sea la sucesión: $\left\{\frac{1}{5};\frac{7}{25};\frac{37}{125};\frac{175}{625};...\right\}$

In dique cuál(es) de los siguientes enunciados son correctos.

I. Es decreciente
II. Es covergente
III. Es divergente

A)sólo I *B)sólo II* *C)sólo III*
D)I y II *È)II y III*

18 Si $\{a_n\}_{n \in N}$ es una sucesión tal que $a_n = \sqrt{4 - \frac{9}{n} + \frac{12}{\sqrt{n}}}$. Indique cuál(es) de los siguientes enunciados son correctos.

I. La sucesión $\{a_n\}_{n \in N}$ es creciente.
II. La sucesión $\{a_n\}_{n \in N}$ es acotada.
III. $/a_n - 2/ < 4 \Rightarrow n > \frac{9}{16}$

A)sólo II *B)sólo I* *C)I y II*
D)II y III *E)I, II y III*

19 Se definen las sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$:

$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$ y $b_{n-1} = \sqrt{\frac{a_n^2 + b_n^2}{2}}$

$a_1 = a$; $b_1 = b$; $0 < a < b$

Indique cuál(es) de los siguientes enunciados son correctos

I. $\{a_n\}$ es creciente.
II. $\{b_n\}$ es decreciente.
III. $\forall n: a_n < b_n$
IV. $\{a_n\}$ y $\{b_1\}$ convergen hacia el mismo punto.

A)sólo IV *B)sólo III* *C)I, II y IV*
D)sólo I *E)sólo II*

20 Indique cuál(es) de los siguientes enunciados son correctos:

I. Si $\{a_n\}/a_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}$ entonces $\{a_n\}$ es decreciente y acotada

II. Si $\{a_n\}$es tal que $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} + ... + \frac{1}{\sqrt{2n}}$ entonces $\{a_n\}$es decreciente.

III. Si $\{a_n\}$ es una sucesión creciente y acotada entonces $\{a_n\}$ es convergente.

A)sólo I *B)I y II* *C)II y III*
D)sólo I *E)sólo III*

21 Si $\{a_n\}_{n \in N}$es una sucesión tal que $a_n = \frac{2^{n-1} + 3^{n-1}}{2^n + 3^{n-3}}$ entonces la sucesión converge a:

A) $\frac{1}{81}$ B) $\frac{1}{27}$ C) $\frac{1}{82}$ D) $\frac{1}{84}$ E) 81

22 A qué valor converge la siguiente sucesión: $\left\{\left(\frac{3}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^5 \cdots\right\}$

A) 0 B) 1 C) e D) e^3 E) e^6

23 Determine el valor de convergencia de la sucesión: $\left\{\frac{(n-1)(n-2)}{(n+1)(n+2)}\right\}_{n\in N}^{n+3}$

A) e^{-6} B) e^{-3} C) e^{-1} D) e^2 E) e^3

24 Se define la sucesión S_1 por: $S=\left\{\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n\right\}$;la sucesión converge el valor de:

A) 1 B) e^{-1} C) e^{-2} D) e E) 2

25 Sea la sucesión $\{a_n\}_{n\geq 1}$ definida por $a_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$, con relación e esta sucesión podemos decir que converge hacia:

A) – 2 B) – 1 C) 0 D) 1 E) 2

26 Calcule el valor de convergencia de la sucesión $\left\{\frac{1^3+2^3+...+n^3}{(2n+1)^2(3n-1)^2}\right\}$

A) $\frac{1}{136}$ B) $\frac{1}{55}$ C) $\frac{1}{144}$ D) $\frac{5}{144}$ E) $\frac{9}{136}$

27 Si $\{a_n\}_{n\in N}$ es una sucesión definida por. $(a_n)=\left\{\frac{11}{30};\frac{111}{300};\frac{1111}{3000};\cdots\right\}$; determine el valor de convergencia de la sucesión $\{a_n\}$.

A) $\frac{10}{27}$ B) $\frac{15}{27}$ C) $\frac{17}{27}$ D) $\frac{21}{27}$ E) $\frac{41}{27}$

28 Determine el valor donde la sucesión es convergente. $\left\{\frac{12}{4},\frac{24}{7},\frac{44}{12},\frac{72}{19}\cdots\right\}$

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 7

29 Si la serie: $S=\frac{1}{a}+\frac{11}{a^2}+\frac{111}{a^3}+\frac{1111}{a^4}+\cdots$ converge a $\frac{13}{36}$, determine el valor de "a".

A) 18 B) 13 C) $\frac{10}{13}$ D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{3}{4}$

30 Sea $\{x_n\}$ una sucesión tal qué $x_1=3$ y $x_{n+1}=\frac{3(1+x_n)}{3+x_n}$. Determine el valor de convergencia:

A) $\sqrt{3}$ B) 2 C) 3 D) 1 E) 5

31 Determine el valor de $E=\sum_{n=1}^{50}\frac{1}{4n^2-1}$

A) $\frac{58}{101}$ B) $\frac{150}{101}$ C) $\frac{50}{101}$ D) $\frac{100}{101}$ E) $\frac{200}{101}$

32 Determine el valor de "x" en la igualdad $\sum_{n=2}^{100}\frac{nx-(n+2)}{n(n+1)(n+2)}=\frac{103}{202}$

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{99}{102}$ C) $\frac{102}{99}$ D) $\frac{34}{11}$ E) $\frac{3}{2}$

33 En la expresión siguiente encontrar el valor de la constante A.

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{3^k}=A\left[3-\frac{2n+3}{3^n}\right]$$

A) $-\frac{1}{4}$ *B)* $\frac{1}{2}$ *C)* $-\frac{1}{2}$ *D)* $\frac{1}{4}$ *E)* $\frac{3}{2}$

34 Calcule el valor de:

$$\forall=\sum_{i=4}^{13}\left\{\sum_{k=1}^{64}\left(\sqrt{5k-1}-\sqrt{5k+4}\right)(2i-11)\right\}$$

A)- 906 *B)- 960* *C)- 968*
D)- 986 *E)- 976*

35 Si: $\sum_{k=1}^{2n+1}\left\{k+\sum_{r=1}^{n}(2r-1)\right\}=(n+1)^3+x$,

determine el valor de x

A)0 *B)1* *C)n* *D)n^2* *E)n^3*

36 Determine el valor de la suma finita:

$$\sum_{k=1}^{20}\frac{k^4+1+k^3}{k+k^2}$$

A) $200-\frac{1}{21}$ *B)* $2071-\frac{1}{21}$ *C)* $2871-\frac{1}{21}$

D) $3000-\frac{1}{31}$ *E)* $2801-\frac{1}{21}$

37 Determine la suma finita

D = 3 + 10 + 29 + 66 + . . . + 1002

A)3045 *B)2025* *C)5025*
D)70025 *E)6025*

37 Determine el valor de la suma:

$$E=\frac{1}{2x4}+\frac{1}{4x6}+\frac{1}{6x8}+...+\frac{1}{48x50}$$

A) $\frac{6}{25}$ *B)* $\frac{7}{25}$ *C)* $\frac{8}{25}$ *D)* $\frac{11}{25}$ *E)* $\frac{21}{25}$

39 Determine la siguiente suma:

$$S=1+\frac{2}{9}+\frac{26}{3^6}+\frac{242}{3^{10}}+...$$

A) $\frac{101}{80}$ *B)* $\frac{215}{73}$ *C)* $\frac{121}{80}$ *D)* $\frac{215}{101}$ *E)* $\frac{425}{80}$

40 Determine la siguiente suma:

$$\sum_{n=1}^{40}\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$$

A)1 *B)2* *C)3* *D)4* *E)5*

41 Calcule la siguiente suma:

$$\sum_{k=4}^{\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)^{k+2}$$

A) $\left(\frac{1}{6}\right)^4\frac{1}{5}$ *B)* $\left(\frac{2}{3}\right)^5\frac{1}{6}$ *C)* $\left(\frac{1}{6}\right)^5\left(\frac{1}{5}\right)$

D) $\left(\frac{3}{4}\right)^3\left(\frac{1}{6}\right)^2$ *E)* $\left(\frac{1}{6}\right)^3\frac{2}{5}$

42 Determine $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n^2+3n}.2^{-n}$

A)1 *B)* $\frac{1}{2}$ *C)* $\frac{1}{4}$ *D)* $\frac{1}{8}$ *E)* $\frac{1}{16}$

43 Determine la suma de la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+n}}\right)$$

A)1 *B)2* *C)3* *D)4* *E)5*

44 Determine la suma de la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2^{n+1}}{(1+2)(1+2^{n+1})}\right)$$

A) $\frac{1}{8}$ *B)* $\frac{1}{4}$ *C)* $\frac{1}{2}$ *D)1* *E)2*

45 Halle el valor de lña convergencia de la serie:

$$\sum_{k=3}^{\infty} 3^{k-4}\left(\frac{1}{6}\right)^{k-6}$$

A)14 *B)28* *C)18*
D)72 *E)36*

46 Determine la suma de la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}$$

A) $\frac{1}{4}$ *B)* $\frac{1}{3}$ *C)* $\frac{1}{2}$ *D)1* *E)2*

47 Sea $\sum a_n$ ubnã serie de términos positivos que no cumple con la condición $a_n \to 0$.

Con respecto a la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$, podemos afirmar:

A)converge a 0 ***B)converge a 1***
C)converge a 3 ***D)converge a 1 /2***
E)es divergente

48 Determine el valor de convergencia de la serie: $\sum_{k=1}^{\infty} (2k-1)5^{-k}$

A) $\frac{1}{8}$ *B)* $\frac{1}{4}$ *C)* $\frac{3}{8}$ *D)* $\frac{5}{8}$ *E)1*

49 Indique el valor de convergencia de la serie: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2+3k+3}{k^4+6k^3+11k^2+6k}$

A)1 *B)* $\frac{1}{3}$ *C)* $\frac{2}{3}$ *D)* $\frac{4}{3}$ *E)2*

50 Halle M + N +D si los sumandos representan los puntos de convergencia de las series:

$$M:\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n}\right\};\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{9n^2+3n-2}\right\}$$

$$D:\left\{\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\pi}\right)^{k^2+1}\left[1-\left(\frac{1}{\pi}\right)^{2k+1}\right]\right\}$$

A) $\frac{6\pi+7}{\pi}$ *B)* $\frac{7\pi+6}{6\pi}$ *C)* $\frac{\pi+1}{\pi}$

D) $\frac{2\pi+3}{\pi}$ *E)* $\frac{2\pi+3}{6\pi}$

51 Determine la edad de la persona menor, sabiendo que estás forman una progresión aritmética creciente, cuya suma es 63 y la suma de sus cuadrados es 1395 (son 3 personas)

A)14 *B)1* *C)18* *D)21* *E)27*

52 Dadas las progresiones aritméticas:

$$P_1 \div \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \ldots - \frac{94}{3}$$

$$P_2 \div \frac{4}{3} - \frac{31}{6} \ldots - \frac{41}{2}$$

Determine la suma de los elementos de P_1 que también pertenecen a P_2.

A) $-\frac{4}{3}$ *B)* $-\frac{41}{2}$ *C)* $-\frac{131}{6}$ *D)* $-\frac{75}{2}$ *E)* $-\frac{31}{6}$

53 Tres nñumeros enteros en PA cumple la siguiente relación: la suma de los tres al cuadrado es igual a su producto. Determine la suma de estos números.

A)26 *B)36* *C)46* *D)56* *E)76*

54 Se prepara una cantidad de reserva de comida para 31 conejos , sabiendo que estos consumen 6 1/2 kg semanales cada

uno. Dicha reserva número de animales permaneciera fijo pero cada semana disminuye un conejo, la comida reservada duró el doble del tiempo previsto. ¿Qué cantidad de comida se preparó?

A)3224 kg   B)3324 kg   C)3234 kg
D)3432 kg   E)3424 kg

55 Determine el valor de cuatro nimeros a, b, c, d, si los tres primeros de términos están en progresión aritmética y los tres últimos en progresión geometría. siendo la suma de lso extremos 14 y la suma de los medios igual a 12. Indique el mayor de ellos

A)2   B)4   C)8   D)12   E)16

56 Si los números positivos x_1, x_2 y x_3 están en P.A y los números positivos y_1, y_2 y y_3 están en P.G y se sabe que:

$$x_1 = y_1 = 3.\ x_2 - y_2 = 6 \text{ y } x_3 = y_3.$$

Determine el valor de: $\sum_{k=1}^{s} (x_A y_A)$

A)81   B)84   C)70   D)112   E)98

57 Si se define la siguiente progresión geometría: 2; 2 + r; 2 + 2i . . .
Determine el valor de r.

A)– 1   B)– 2   C)0   D)1   E)2

58 Si l término de lugar 2n es "n" veces el término de lugar "n" en una progresión geometía cuyo primer término es "n". Determine el témino de lugar(n + 1) en dicha progresión.

A)n   B)2n   C)3 n   D)n² E)2n²

59 En una progresión geométrica se conoce que el primer término es 7, el útimo es 567 y la suma de todos los términos es 847. Determien la suma del número de términos y la razón de la progresión geométrica.

A)5   B)6   C)7   D)8   E)10

60 Se han interpolado entre 3 y 384 un cierto número de medios geométricas cuya suma es 178. Determine la razón de interpolación.

A) $\frac{3}{2}$ ***B)2***   ***C)*** $\frac{2}{3}$ ***D)*** $\frac{4}{6}$ ***E)*** $\frac{6}{5}$

61 Una progresión geométria finita tiene n términos. Si "S" es suma de susu términos, S' la suma de sus recíprocos y P el producto de sus términos entonces en la expresión

$$P^2 = \left(\frac{S}{S'}\right)^x$$ el valor de "x" es:

A)n   B)2n   C)3n   ***D)*** $\frac{n}{2}$ ***E)*** $\frac{n}{3}$

62 Dado un círvculo de radio r_1 se construye un segundo círculo cuyo diámetro sea el radio del anterior, un tercero cuyo diámetro sea el radio del segundo y así sucesivamente. ¿Cuál será la suma de las áreas de todos los círculos asi formados?

A) $\frac{\pi r^2}{3}$ ***B)*** $\frac{4\pi r^2}{3}$ ***C)*** $\frac{2\pi r^2}{3}$ ***D)*** $\frac{5\pi r^2}{3}$ ***E)*** $\frac{7\pi r^2}{3}$

63 Determine el valor de "n" en la siguiente igualdad.

$$1 + 2(2) + 3(3) + \ldots + n(n!) = 719$$

A)4 *B)5* *C)6* *D)7* *E)8*

64 Determine el valor de:

$$J = \frac{(1!+2!)(2!+3!)(3!+4!)\ldots(19!+20!)}{\cdot 20!.19!.18!\ldots 3!2!1!}$$

A)10 *B)10, 5* *C)20* *D)21, 5* *E)22*

65 Determine el valor de "n" en la siguiente igualdad:

$$\frac{\left[3\left(3n^2+10n+8\right)\right](3n+5)!(3n+4)!}{(3n+5)!-(3n+4)!} = 108!$$

A)22 *B)16* *C)17* *D)12* *E)34*

66 Determine la suma de los valores de "n" que verifican la siguiente iguladad

$$\frac{n!(n!-321)}{5(n!)-9} = 80$$

A)3 *B)5* *C)7* *D)9* *E)10*

67 Determine una expresión equivalente al simplificar: $\frac{2^n\left[(2n)!\right]^2}{(4n)!!(2n-1)!!}$

A)2n! *B)(2n+1)!* *C)n!*
D)(n+1)! *E)4n!*

68 Un hombre se encuentra en el origen de un sistema cartesiano rectangular de ejes OX y OY. El hombre puede dar sólo un paso a la vez, para el norte (N) opara el este (E). ¿Cuántas trayectorias puede recorrer, si da exactamente 4 pasos?

A)18 *B)4* *C)16*
D)8 *E)32*

69 Cuántas números de los tres dígitos, sin dígitos repetidos, pueden escribirse con los dígitos del conjunto {3, 4, 5, 6, 7, 8}

A)120 *B)210* *C)222*
D)280 *E)300*

70 ¿De cuántas formas pueden sentarse un padre, su esposa y sus tres hijos en una fila de 5 asientos?

A)30 *B)40* *C)80*
D)100 *E)120*

71 ¿De cuántas formas diferentes se podrían sentar en una fila de 7 asientos, 4 hombres y 3 mujeres, de tal manera que las 3 mujeres siempre estén siempre juntas?

A)180 *B)360* *C)480*
D)720 *E)1440*

72 ¿Cuántas números menores que 2367 se pueden formar con los dígitos 1, 2, 3, 4 si cada dígito se usa una sola vez?

A)2 *B)6* *C)8* *D)10* *E)12*

73 Un joven estudiante ordenará nueve libros en la repisa de su dormitorio. Determine de cuántas maneras los puede acomodar si la condición es que libros específicos jamás deben estar juntos.

A)332640 *B)332660* *C)30240*
D)30244 *E)332666*

74 ¿Cuántas números pares y mayores que 5×10^5 se pueden forman con los dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6. Si no hay repetición de dígitos?

A)120 *B)420* *C)360* *D)450* *E)720*

75 Sobre una mesa se encuentran 10 bolsas, de las cuales 5 son azuales: 3 son blancas y las restantes de color negro. ¿De cuántas maneras diferentes se pueden colocar dichas bolas en fila?

A)1320 *B)1560* *C)2010*
D)2024 *E)2520*

76 Ocho amigos se sienten alrededor de una mesa, si uno de ellos siempre debe estar entre otros 2 cuántas maneras lo pueden hacer.

A)180 *B)200* *C)220* *D)240* *E)260*

77 Determine "n" en:

$$\frac{C_r^n + 3C_{r-1}^n + 3C_{r-2}^n + C_{r-3}^n}{C_{r-1}^n + 2C_{r-2}^n + C_{r-3}^n} = \frac{37-r}{r}$$

A)32 *B)34* *C)35* *D)36* *E)37*

78 Si:

$$H = \left\{ x \in Z^+ / 3\left(\frac{10x}{3}\right) - 4196\left(\frac{5x}{2}\right) = 0 \right\}$$
$$= (abc)$$

Indique el valor de a + b + c

A)8 *B)7* *C)6* *D)5* *E)4*

79 Determine el valor de "x" en la siguiente igualdad: $\frac{C_{x+1}^{2x} + C_{x-1}^{2x}}{C_{x+2}^{2x} + C_{x-2}^{2x}} = \frac{19}{16}$

A)16 *B)17* *C)18* *D)19* *E)20*

80 Determine el valor de J = 3x + 7y, si se cumple:

$$C_{y-1}^{x} = C_{y}^{x} : 4C_{y}^{x} = 5C_{y-2}^{x}$$

A)86 *B)114* *C)120*
D)186 *E)217*

81 Si $C_1^n + C_2^n + C_3^n + ... + C_{n-1}^n = 30$ entonces el valor de "n" es:

A)3 *B)4* *C)5* *D)6* *E)7*

82 Se considera una baraja de 20 naipes repartida en cuatro colores, cada color se compone de 5 naipes: as, rey, dama. valet, diez: se denomina "mano" a todo subconjunto de 5 naipes elegidos de esta baraja.

Obtenga M + N si:

M es el número de "manos" distintas

N es el número de "manos" distintas que contienen dos ases.

A)18486 *B)18468* *C)18864*
D)18648 *E)18846*

83 Se quiere seleccionar 5 preguntas de un total d 12, pero 2 de ellos no pueden escogerse a la vez .¿Cuántas formas existen?

A)680 *B)672* *C)920*
D)1080 *E)162*

CLAVES DEL SEMINARIO 08

01	02	03	04	05	06	07	08	09	10
B	C	B	E	A	D	D	A	A	C
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
D	C	D	D	A	C	B	D	C	C
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
A	C	A	C	C	C	A	C	C	A
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
C	D	D	B	E	C	A	A	A	A
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
C	A	A	C	E	C	E	C	C	B
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
B	C	B	A	D	B	C	D	D	B
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
A	B	B	B	E	C	C	C	A	E
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
D	D	A	A	E	D	B	C	B	B
81	82	83							
C	C	B							

SEMINARIO TALLER 9 - PARTE I

01 Sabiendo que :

$$\sqrt[3]{x+y-8z}+\sqrt[3]{y+z-8x}+\sqrt[3]{z+x+8y}=0$$

Hallar: $\dfrac{x(y+z)^2+y(z+x)^2+z(x+y)^2}{xyz}$

A) 4 B) 6 C) 8 D) 12 E) 16

02 Sabiendo que :

$$x+y+z+=ax+by+cz=a^2x+b^2y+c^2z=1$$

Calcular: $k=a^3x+b^3y+c^3z+(1-a)(1-b)(1-c)$

A) 1 B) -1 C) 2 D) -2 E) 0

03 Dadas las relaciones:

$$a^3+b^3+c^3=117$$
$$a(b-1)+b(c-1)+c(a-1)=0$$
$$abc=3$$

Donde: $(ab+bc+ac)\in R$

Calcular el valor de:

$$M=a^{-3}(1+ab^{-2})+b^{-3}(1+bc^{-2})+c^{-3}(1+ca^{-2})$$

A) 8/3 B) 2/3 C) -1/3 D) 0 E) 4/3

04 Calcule: $M=\sum_{n=2}^{m} n\sqrt[n]{\dfrac{(a+b+c)^{n+1}}{a^{n+1}+b^{n+1}+c^{n+1}}}$

Sabiendo que: $\dfrac{1}{a}(b+c)+\dfrac{1}{b}(c+a)+\dfrac{1}{c}(a+b)=6$

Donde: $\{a;b;c\}\in R^+$

A) $\dfrac{3}{2}m(m+2)$ B) $\dfrac{m(m-1)}{2}$ C) $\dfrac{3}{2}(m-1)(m+2)$

D) $\dfrac{3}{2}$ E) $\dfrac{3}{2}m(m+1)$

05 Si:

$$a^{-1}b^{-1}+a^{-1}c^{-1}+b^{-1}c^{-1}=ab+ac+bc=1$$
$$abc\neq 0.$$

Hallar : $M=\left(\dfrac{\sqrt{a}}{bc}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{b}}{ac}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{c}}{ab}\right)^2$

A) 1 B) $a+b+c$ C) 3 D) abc E) $\dfrac{1}{abc}$

06 Calcular uno de los valores de :

$$\sqrt[3]{\frac{x^{20}+x^{12}-x^{10}+x^8+1}{x^{10}}}$$

Sabiendo : $x^4-3x^2+1=0$

A) 3 B) - 3 C) 5 D) - 2 E) 4

07 Si: $a+b+c=0$, $abc\neq 0$, proporcionar el equivalente de :

$$\frac{a^{11}+b^{11}+c^{11}+11(abc)^3(ab+ac+bc)}{11abc}$$

A) $(a^2+b^2+c^2)^4$ B) $(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)$

C) $(ab+ac+bc)^4$ D) $(a+b+c)abc$ E) 0

08 Sea: $f(x)=x^{1999}+x^{1998}+x^{1997}+...+x+1$

Calcular el resto que se obtiene al dividir $f_{(x^{2000})}$ entre $f_{(x)}$.

A) 0 B) 1 C) -1 D) 2000 E) -2000

09 En el siguiente cociente notable:

$\dfrac{(x+1)^{999}+(x-1)^{999}}{x}$ existe un término de la forma ; $a(x^2-1)^b$. Hallar : $(a+b)$.

A) 490 B) 497 C) 498 D) 180 E) 200

10 Calcular "mn", si en el cociente notable:

$$\frac{x^{6^{\sqrt{n}}}-x^{6^{\sqrt{m}}}}{x^{7^{\sqrt{n}}-1}-y^{7^{\sqrt{m}}-1}}$$

el término de lugar 12 es: $x^{720}y^{528}$

A) 16 B) 64 C) 128 D) 256 E) 2

11 Los restos de las divisiones de un polinomio entero en "x" por los binomios $(x+3)$; $(x-2)$; $(x-1)$ son 16 ; 11 y 4 respectivamente. Entonces el residuo de la división de dicho polinomio entre x^3-7x+6 será :

A) 1 B) 2 C) x^2+1 D) x^2+x+1 E) $2x^2+x+1$

12 Un polinomio $P_{(x)}$ de noveno grado , tiene raíz cúbica exacta , se anula para $x=2$ es divisible entre $(x+2)$, el resto de dividirlo entre $(x+1)$ es 729 , la suma de sus coeficientes es 27. Señala el término Independiente de dicho polinomio.

A) 27 B) 501 C) 427 D) 512 E) 511

13 Un factor primo de :

$Q(a;b;c)=a^4+b^4+c^4+a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2-2abc(a+b+c)$ es:

A) $a+b+c$ B) $ab+bc+ac$ C) $a^2+b^2-c^2$

D) $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac$ E) $a^2+b^2+c^2-ab+bc-ac$

14 Cuántos factores primos tiene?

$$P(x;y;z)=(xy+x+y)^3=4xy(x+1)(y+1)(x+y)+4x^2y+xy^2$$

A) 6 B) -4 C) 5 D) 3 E) 2

15 De las siguientes afirmaciones:

I) $P(x)-x^5-2x^4+4x^3+2x+6$ es Irreductible en Q.

II) $R(x)=x^6-x^5-2x^3+4x-2$, admite una única descomposición en dos factores , donde el grado de uno de ellos es inferior a 3 .

III) $F(x)=2x^4-4x^3+3x^2+21x+12$ presenta 4 factores algebraicos.

Indicar verdadero (V) o falso (F) :

A) VVV B) VVF C) FFF D) FVF E) VFV

16 Cuántos factores primos posee :

$$P(x;y)=x^4+x^4y^4+y^4-(x^4+x^2y^2+y^4)^2?$$

A) 5 B) 4 C) 3 D) 2 E) 1

(17) Indique un factor primo en:

$$2[(a+b+c)^3+abc]+(a+b)(b+c)(a+c)$$

A) $a+3b+c$ B) $a+b+2c$ C) $a+4b+c$
D) $a+5c-c$ E) $a+7b-c$

(18) Luego de factorizar en $\mathbb{Q}$, el polinomio:

$$P(x)=x^{83}+x^{46}+x^{21}+1$$

Indicar la suma de coeficientes del factor primo de menor grado.

A) 2 B) 4 C) 22 D) 10 E) 12

(19) Indicar la suma de coeficientes de un factor primo de: $P(x)=x^4(4x+1)-(x^2-1)^2(x^2+x+1)^2(x^2-x+1)^2$

A) 5 B) 7 C) 6 D) 8 E) 3

(20) Indicar la suma de los coeficientes de los términos lineales de los factores primos obtenidos al factorizar:
$P(x)=(n^2-n)x^4+(2n^2-n+1)x^3+(3n^2-2)x^2+(2n^2+n+1)x+n^2+n$

A) $2n^2$ B) $n+2$ C) $2n+1$ D) $2n$ E) $2n-1$

(21) ¿Cuántos factores de multiplicidad simple se obtiene en:
$R=2(mn+nz+mz)^3+(m^2+n^2+z^2)^3-3(mn+nz+mz)^2(m^2+n^2+z^2)$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) Ninguno

(22) Del siguiente polinomio:

$$P(x)=3x^6-3x^5+2x^4-8x^3+6x^2+18x-18$$

Se puede afirmar :

A) Tiene 2 factores lineales.
B) Tiene un factor primo cuadrático.
C) Tiene un factor primo cúbico.
D) Tiene un factor primo de grado n>3.
E) b y c son correctas.

(23) Luego de factorizar el polinomio:

$$4(x^2+ax+a^2)^3-27(x+a)^2a^2x^2$$

Afirmamos:

A) Sólo tiene tres factores primos.
B) Sólo tiene dos factores primos.
C) Sólo un factor primo se repite dos veces.
D) Todos los factores primos se repiten dos veces.
E) Hay dos correctas

(24) Dado el polinomio :

$P(x;y;z)=(x+y)^2(y+z)^2(z+x)^2+2x^2y^2z^2-x^4(y+z)^2-y^4(z+x)^2-z^4(x+y)^2$

Podemos decir:

A) Tiene 2 factores primos solamente.
B) Tiene 4 factores primos solamente.
C) 1 factor primo se repite 2 veces.
D) 1 factor primo se repite 3 veces.
E) Hay 2 correctas.

(25) Si: $a+b+c^2=ab+1$; $b\neq 1$

Halle: $F=\dfrac{(b-1)^2}{(b-1)^2-c^2}+\dfrac{a-1}{a-b}$

A) b B) ab C) 1 D) -1 E) $\dfrac{a+b}{a-b}$

(26) Realizar:

$$\frac{a}{x^2-a^2+b^2}+\frac{b}{x^2+a^2-b^2}-\frac{a+b}{x^2-a^2-b^2}+\frac{1}{x}$$

para: $x=a+b$.

A) 0 B) 1 C) -1 D) $a+b$ E) $a-b$

(27) Dados los polinomios :

$P(x)=x^4+4x^3+ax^2+11x+6$
$Q(x)=x^4-x^3+x^2-bx-4$

Si el *MCD* de *P* y *Q* es de tercer grado. Hallar: $a\times b$.

A) 10 B) 12 C) 16 D) 18 E) 24

(28) Si:

$P(x)=(x+3)[x^2+(a-2)x-2a]$
$Q(x)=(x-2)[x^2+(b+3)x+3b]$

y teniendo que: el *T.I.* del *MCM* es *120* y el coeficiente de "*x*" al efectuar: *MCM+MCD* es *1*.

Calcular: $a^{-1}+b^{-1}$; $a>b$.

A) 0,01 B) 0,05 C) –0,05 D) 0,20 E) –0,04

(29) Si: $\dfrac{1}{(y-z)^2}+\dfrac{1}{(z-x)^2}+\dfrac{1}{(x-y)^2}=4$

Calcular: $S=\dfrac{1}{y-z}+\dfrac{1}{z-x}+\dfrac{1}{x-y}$; $x\neq y\neq z$

A) 8 B) 16 C) 2 D) 4 E) 6

(30) La fracción:

$$\frac{mx^3-(m+7)x^2+(m+8)x-(m+1)}{mx^3-(m+9)x^2+(m+16)x-(m+7)}$$

admite simplificación. ¿Cuál es el denominador que se obtiene si se efectúa dicha simplificación?

A) $2x+1$ B) $2x-1$ C) $2x+3$ D) $2x-3$ E) $2x+5$

(31) Sean: $a,b,c\in R-\{0\}$; y además: $(a+b+c)^2=3(ab+ac+bc)$

Calcular:

$$A=\frac{(a+b)^{10}}{a^6b^4}+\frac{(a+c)^{10}}{b^7a^3}+\frac{(b+c)^{10}}{b^7c^3}$$

A) 2048 B) 512 C) 1 D) 1024 E) 3072

(32) Si el *MCD* de los polinomios:

$P(x)=x^3+ax^2+18$
$Q(x)=x^3+bx+12$

es de segundo grado , encontrar la suma de los factores no comunes.

A) $2x+1$ B) $2x+2$ C) $2x+3$ D) $2x+4$ E) $2x+5$

(33) El valor de "*x*" es muy pequeño, de modo que su cuadrado y demás potencias superiores pueden omitirse. Entonces el valor de:

$M=\frac{\sqrt{x+9}}{x+1}$; se puede escribir :

A) $3-\frac{17}{6}x$ B) $3t-\frac{5}{9}$ C) $17x-9$ D) $51x+9$ E) $x-1$

(34) Calcular el coeficiente del término que admite a "xyz" en:

$$\left(\frac{1}{2}\sqrt{x}+3\sqrt[3]{y}-\frac{1}{3}\sqrt[4]{z}\right)^9$$

A) 1052 B) 105 C) 203 D) 513 E) 230

(35) Determínese el coeficiente del término en x^{10} del desarrollo de : $(1+3x^2+3x^4)^7$

A) 807 B) 918 C) 19 278 D) 15362 E) 1254

(36) Determinar el coeficiente del término de lugar $(k+1)$ en el desarrollo de: $(1+x)^{12}$

A) $2^{-k}C_k^{2k}$ B) $(-1)^k 2^{-k}C_k^{2k}$

C) $(-1)^{k-1}4^{-k}C_k^{2k}$ D) $2^{-k}C_k^{4k}$ E) C_k^{4k}

SEMINARIO TALLER 9 - PARTE II

(01) Calcular el término independiente en el desarrollo de : $(x+1+\frac{1}{x})^8$

A) 1218 B) 1118 C) 1208 D) 1107 E) 1120

(02) Determinar el coeficiente de x^n en el desarrollo de:

$$(1-2x+3x^2-4x^3+...)^n\ ;\ (|x|<1)$$

A) C_{n+1}^{2n+1} B) C_{2n+1}^{3n+1} C) $(-1)^nC_{2n-1}^{3n}$ D) $(-1)^nC_{n-1}^{2n+1}$ E) $(-1)^nC_{2n-1}^{3n-1}$

(03) Si un término de la expansión de :

$$(2\sqrt{3}x-721y-\frac{3}{2}z+8w)^n$$

tiene como parte literal a: $x^2y^3z^4w$. Determinar el número de términos de la expansión.

A) 360 B) 260 C) 28 D) 286 E) 300

(04) Efectuar: $\sqrt{5+2\sqrt{3}}\left(\sqrt{47-2\sqrt{3}}-\sqrt{8-2\sqrt{3}}\right)$

A) 13 B) 17 C) $\sqrt{2}$ D) $7\sqrt{2}$ E) 14

(05) Reducir: $\sqrt{2(1+\sqrt[5]{76+43\sqrt{3}}-\sqrt{5}+\sqrt[3]{14\sqrt{5}+18\sqrt{3}})}$

A) $\sqrt{3}+1$ B) $\sqrt{3}-1$ C) $\sqrt{3}$ D) 1 E) 2

(06) Reducir: $$\frac{\sqrt{26+\sqrt{675}}-\sqrt{26-\sqrt{675}}}{\sqrt[3]{26+\sqrt{675}}+\sqrt[3]{26-\sqrt{675}}}$$

A) $\frac{3}{4}\sqrt{2}$ B) $\frac{5}{4}\sqrt{2}$ C) $\frac{3}{4}\sqrt{3}$ D) $2\sqrt{3}$ E) $2\sqrt{2}$

(07) Señale el denominador racionalizado de:

$$\frac{1}{\sqrt[7]{32}-\sqrt[7]{16}+\sqrt[7]{4}-\sqrt[7]{2}+1}$$

A) 1 B) 1897 C) 2191 D) 3284 E) 2

(08) Racionalizar: $\overline{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{4}}$; indicando su denominador.

A) 2 B) 47 C) 73 D) 19 E) 3

(09) Determinar el mínimo valor de $(a+b)$, siendo a, b, números enteros, para que: $x^4+ax^3+bx^2+ax+1$, tenga raíz cuadrada exacta.

A) 1 B) 2 C) -1 D) 3 E) 4

(10) Al racionalizar: $$\frac{1}{\sqrt[3]{10}-\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{20}+\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{12}}$$

se obtiene como denominador:

A) 40 B) 2 C) 6 D) 3 E) 5

(11) Luego de racionalizar y reducir : $$\frac{323}{21-2\sqrt[3]{121}+\sqrt[3]{11}}$$

el denominador resultante es:

A) 10 B) 20 C) 30 D) 40 E) 50

(12) Indicar el valor de verdad en:

I) $Arg(Z_1Z_2)=Arg(Z_1)+Arg(Z_2)$; $(Z_1;\ Z_2\in C)$

II) $|Z|\geq|Re(Z)|$; $(Z\in C)$

III) $|Z+1|<1\Leftrightarrow|\overline{Z}+1|<1$; $(Z\in C)$

A) VFF B) VFV C) FVV D) VVV E) FFV

(13) Asumiendo que: $S_n=i^n+i^{-2n}$; donde : $i=\sqrt{-1}$

Calcular el modulo del complejo resultante de:

$$S_1+S_2+S_3+S_4+\cdots+S_{1990}$$

A) 1 B) 2 C) $\sqrt{3}$ D) $\sqrt{2}$ E) $\sqrt{8}$

(14) Calcular el mínimo valor natural de "n" que verifica la igualdad: $\sqrt[n]{\frac{1-i}{1+i}}=\frac{1}{2}(\sqrt{3}+1)$; $i=\sqrt{-1}$ si este es de 4 cifras.

A) 1000 B) 1009 C) 1004 D) 1005 E) 1006

(15) Calcular "n" en: $(1-w)^{2n}=-2187w$ Siendo "w" una de las raíces cúbicas de la unidad.

A) 1 B) 4 C) 5 D) 7 E) 8

(16) Reducir: $A=\frac{1}{\sqrt{3}}(\sqrt{8-\sqrt{-6i}}+i\sqrt{7-\sqrt{-5i}})$

A) $\sqrt{6}+1$ B) $\sqrt{7+\sqrt{4i}}$ C) $\sqrt{5+\sqrt{4i}}$

D) $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ E) $\sqrt{3}-\sqrt{2}$

(17) Si: $ab\neq0$; $i=\sqrt{-1}$; reducir:

$$M=\frac{\frac{a+bi}{b-ai}+\frac{a-bi}{b+ai}+a+bi}{\frac{b}{2}\left(\frac{a+bi}{b-ai}-\frac{a-bi}{b+ai}\right)+a}$$

A) 1 B) a C) b D) ai E) bi

(18) Si : Z_1 ; $Z_2\in C$ y se sabe que: $|Z_1+Z_2|=|Z_1-Z_2|$; entonces podemos afirmar que: $\frac{iZ_1}{Z_2}$, es:

A) Número real B) Número imaginario
C) Número racional D) Número imaginario puro
E) Hay dos correctas

(19) Sean: z_1 ; $z_2\in C/|z_1|=\sqrt{3}=\frac{|z_2|}{2}$ Calcular:

$M=|z_1+z_2|^4-2[(z_1\bar{z}_2)^2+(\bar{z}_1z_2)^2]+|z_1-z_2|^4$

A) 256 B) 474 C) 441 D) 594 E) 729

(20) Si "w" es una de las raíces cúbicas imaginarias de la unidad, calcular: $(1-w+w^2)(1-w^2+w^4)(1-w^4+w^8)$....... $2n$ factores

A) 1 B) $(-1)^n$ C) 2^n D) 2^{2n} E) 2^{2^n}

(21) Si: 1, w, w^2 son las raíces cúbicas de la unidad, hallar el valor de "n" que cumple la siguiente identidad:

$(1+w)+(1+w^2)^2+(1+w^3)^3+(1+w^4)^4+...+(1+w^{3n})^{3n}=584$

A) 3 B) 6 C) 9 D) 12 E) 15

(22) El equivalente de: $\left(\frac{1+\sqrt{7}i}{2}\right)^4+\left(\frac{1-\sqrt{7}i}{2}\right)^4$ es:

A) 1 B) -1 C) 3 D) 5 E) 6

(23) Sabiendo que: z_1 y z_2 representan un número real y un número imaginario puro respectivamente. Hallar el valor de: $R=p-q$; $pq\neq 0$

Donde: $z_1=\frac{p+q+2i}{p-q-3i}$; $z_2=\frac{p+(q+8)i}{p-qi}$

$p \wedge q$ en $\mathbb{R}$.

A) 30 B) -3 C) -60 D) 10 E) 24

(24) De la igualdad:

I) $\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^6+\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^6=2$

II) $\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^5+\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^5=-1$

III) $\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^6+\left(\frac{i-\sqrt{3}}{2}\right)^6=-2$

Podemos afirmar que son correctas:

A) I y II B) I y III C) II y III D) Ninguna E) Todas

(25) Calcular el valor de:

$$A=4\,ArcTan\left(\frac{1}{5}\right)-ArcTan\left(\frac{1}{239}\right)$$

A) $\frac{\pi}{6}$ B) $\frac{\pi}{4}$ C) $\frac{\pi}{3}$ D) $\frac{\pi}{2}$ E) $\frac{2\pi}{3}$

(26) Hallar la expresión: $M=C_1^n-C_3^n+C_5^n-C_7^n+...+C_n^n$

A) $\sqrt{2}\,Sen\frac{\pi}{4}n$ B) $\sqrt{3}\,Tg\frac{\pi}{3}n$ C) $\sqrt{2}\,Cos\frac{\pi}{4}n$

D) $\sqrt{2}^n\,Cos\frac{\pi}{4}n$ E) $\sqrt{2}^n\,Sen\frac{\pi}{4}n$

(27) Un comerciante compra 54 kilos de té y café. Si hubiera comprado cinco sextos de la cantidad de té y cuatro quintos de la cantidad de café, habría gastado nueve onceavos de lo que realmente gastó y si hubiera comprado tanto té como compró de café y viceversa, habría gastado 5 dólares más de lo que gastó. El té es más caro que el café, y el precio de 6 kilos de café excede al de dos kilos de té por 5 dólares. Indique la diferencia de los precios de un kilo de té y un kilo de café.

A) 1/2 B) 1/3 C) 1/6 D) 1/4 E) 1/12

(28) Luego de resolver: $\frac{\sqrt{x+a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x+a}-\sqrt{x-a}}=\frac{4x-a}{2a}$

Señale: x^2+ax+a^2

A) $\frac{25}{16}a^2$ B) $\frac{61}{16}a^2$ C) $\frac{5}{4}a^2$ D) $\frac{9}{16}a^2$ E) $\frac{61}{25}a^2$

(29) Resolver la ecuación:

$$\frac{x+mab+nbc}{pac}+\frac{x+mab+pac}{nbc}+\frac{x+pac+nbc}{mab}-\frac{qx}{mab+nbc+pac}=q-3$$

Determinar el denominador positivo de dicha raíz.

A) 2 B) $mab+nbc+pac$ C) mnp D) 1 E) $a+b+c$

(30) Resolver la siguiente ecuación:

$$\frac{(x\sqrt{x}-8)(x-\sqrt{x}-6)}{x\sqrt{x}-x-2\sqrt{x}-12}=6$$

A) 2 B) 10 C) 4 D) 3 E) Absurda

(31) Resolver: $\frac{(a+b)x^2-(a^2+b^2)x-2abx+ab(a+b)}{(a-b)x^2(a^2+b^2)x+2abx-ab(a-b)}=\frac{a^2+ab-a-b}{a^2+a-b-ab}$

A) $-a$ B) $-b$ C) ab D) $-\frac{a}{b}$ E) $a+b$

(32) Resolver el sistema:

$\frac{3}{5x+3y+z-4}+\frac{5}{2x-y+3z+7}=-\frac{13}{6}$ ....(I)

$\frac{4}{2x-y+3z-7}+\frac{5}{4x-2y+z-5}=-\frac{43}{30}$ ....(II)

$\frac{1}{5x+3y+z-4}+\frac{6}{4x-2y+z-5}=-\frac{7}{15}$ ....(III)

Señale xyz.

A) -4 B) 6 C) $-\frac{12}{5}$ D) -12 E) 24

(33) Resolver:

$\frac{1}{2\sqrt{2x-y}}-\frac{1}{3\sqrt{2x+y}}=\frac{1}{24}$ ....(I)

$15\sqrt{2x+y}+4\sqrt{2x-y}=3\sqrt{4x^2-y^2}$ ....(II)

Señale: x^2+xy+y^2

A) 2412 B) 1532 C) 3254 D) 6341 E) 1171

(34) Después de resolver:

$\sqrt{x+y}+\sqrt{5x+25y}=\sqrt{5}+25$ ....(I)

$\sqrt{x+5y}-\sqrt{5x+5y}=5\sqrt{5}-5$ ....(II)

Señale xy

A) 25 B) Cero C) -750 D) -625 E) -120

(35) Hallar el valor de "y" en:

$\frac{a}{x+n}+\frac{b}{y+m}=\frac{2an+am+2bm+bn}{(2m+n)(2n+m)}$

$\frac{c}{x+n}+\frac{d}{y+m}=\frac{2cn+cm-2dm-nd}{(2m+n)(2n+m)}$

A) $2m$ B) m C) $2n$ D) n E) mn

(36) Luego de resolver:

$\frac{\sqrt[4]{(x-y)^3}}{x-y}-\frac{\sqrt[4]{(x+y)^3}}{x+y}=-\frac{2}{15}$

$\frac{\sqrt[4]{(x-y)^3}}{4(x-y)}+\frac{\sqrt[4]{(x+y)^3}}{4(x+y)}=\frac{2}{15}$

Señalar: $x+8$

A) 240 B) 315 C) 132 D) 361 E) 24

SEMINARIO TALLER 9 - PARTE III

01 Indicar el valor de verdad de cada uno de las siguientes proposiciones:

I) $a>0 \wedge b<0 \Rightarrow \frac{b+1}{a^{\cdot}}<\frac{1}{a}$

II) $a>0 \wedge b<0 \Rightarrow \frac{a}{b}<\frac{a}{b-a}$

III) $0<a<b \Rightarrow a<\sqrt{ab}<b$

A) VFV B) FVV C) FVF D) VVV E) VVF

02 Siendo a, b y c números reales y positivos (diferentes). Halle el mayor valor de k, si $ab(a+b)+bc(b+c)+ac(a+c)\geq kabc$.

A) 2 B) 4 C) 6 D) 8 E) 10

03 Si las raíces de la ecuación

$$x^5-10x^4+ax^3+bx^2+cx-32=0$$

son reales y positivas. Halle el valor de $2a+b+\frac{c}{2}$

A) 40 B) 5 C) 8 D) 16 E) 12

04 Siendo a ; b y c números reales positivos, indique el menor valor de H, más el mayor de k, si:

$$H=\frac{(a+b)^2}{ab}+\frac{(b+c)^2}{bc}+\frac{(a+c)^2}{ac}\geq k$$

A) 2 B) 6 C) 0 D) 24 E) 4

05 Halle m y M, donde m es el mayor valor y, M es el menor valor que satisface la desigualdad.

$$m\leq\frac{4x^2+6x+2}{2x^2-3x-5}\leq M;\ \forall x\in\left]3;4\right[$$

A) 4; 8 B) 3; 8 C) 5; 8 D) 6; 14 E) 2; 14

06 Dado el conjunto : $A=\{x\in R/3x<2x+1\leq x-2\}$

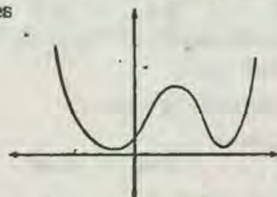
Indique A^C

A) R B) ϕ C) $<-\infty;-3]$ D) $<-3;+\infty>$ E) $<-2;8>$

07 Si la inecuación $x^2-1\leq a(x-1)$ se cumple para un solo valor de x que es x_o, hallar $a+x_o$.

A) 2 B) 3 C) -2 D) 4 E) 1

08 Si tenemos una función polinomial $y=F(x)$ cuya gráfica es



Resolver $F^3_{(x)}.(x-1)^4(x+2)(x-3)<0$

A) ϕ B) $\mathbb{R}$ C) $<-2;3>-\{1\}$ D) $<2;5>$ E) $<-1;7>$

10 Si la ecuación : $ax+\frac{ab+b^2-c^2}{ab+cd}=0;a\neq 0$

es equivalente a la inecuación $4x^2-4kx+1\leq 0$. Halle el menor valor de k.

A) 1 B) -1 C) -6 D) 2 E) 0

11 Dada la expresión matemática

$$f(x)=\frac{(x+1)^5(x-1)^4}{(x^2+x+1)(x^2-5x+6)}$$

Halle el ínfimo del conjunto $B=\{x\in R/f(x)\geq 0\}$

A) 0 B) -1 C) 2 D) -2 E) 6

12 Hallar el mayor valor de k tal que $\sqrt{x}(1+x)\geq kx$, se verifique $\forall x\in R^+$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 6

13 Halle el intervalo de variación de "a" si la desigualdad $\frac{(x-1)(x^2+ax+1)}{x^2+a}>0$, se cumple sólo para $x>1$.

A) $<0;2>$ B) ϕ C) $[0;2]$ D) R E) $[0;2>$

14 Si el conjunto solución de la inecuación $x\frac{(x^2+3)}{x-1}\leq\frac{2(x^2+3)}{x^2-1}$ es $[a;b>$, hallar ab.

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

15 Si $(x_0;y_0)$ es la única solución de la inecuación $x^2-4xy+5y^2+2x-8y+5\leq 0$ calcule x_0+y_0

A) 2 B) 3 C) 5 D) 7 E) 8

16 Cuántos pares de números reales $(x;y)$ verifican el sistema de ecuaciones. $\begin{cases}|x|+y=3\\ x+|y|=1\end{cases}$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) más de 4

17 Cuántas temas de números reales $(x;y;z)$ verifican el sistema.

$$\begin{cases}\frac{x}{2}=\frac{y^2}{1+y^2}\\ \frac{y}{2}=\frac{z^2}{1+z^2}\\ \frac{z}{2}=\frac{x^2}{1+x^2}\end{cases}$$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) más de 4

18 Si la inecuación $\frac{(x+2)(x-1)^2}{(x-5)^2}\geq 0$ tiene:

$C.S.=[a;+\infty)\cup\{b\}-\{c\}$, halle $a+b+c$

A) -2 B) 6 C) 2 D) 8 E) 0

19 Luego de resolver el sistema

$$\begin{cases}\sqrt{x-\frac{\pi}{4}}+\sqrt{\frac{\pi}{3}-x}>-\operatorname{sen}x\\ ax^2+2x+\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}>0;a>1\end{cases}$$

Indique el complemento de su conjunto solución:

A) ϕ B) $\langle-\infty;6\rangle$ C) $\{2\}$ D) $\langle 3;\infty\rangle$ E) $R-\left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{3}\right]$

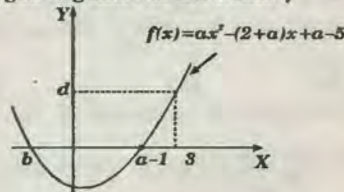
20 Si el rango de la función: $f=\{(2;a-3),(a;1)(b;p),(2;b+3)\}$ y está incluido en el conjunto $\{1;2;4;5\}$ y $Domf=\{m;n\}$. Calcular $2m+2n+4p$

A) 2 B) 4 C) 8 D) 20 E) 40

21 Calcular el dominio de la función. $f(x)=\sqrt{\sqrt{|x|-2}-x+8}$

A) $\langle-\infty;6]$ B) $\langle-\infty;-2]\cup[2;11]$ C) $[6;11]$
D) $[-2;2]$ E) $[-2;11]$

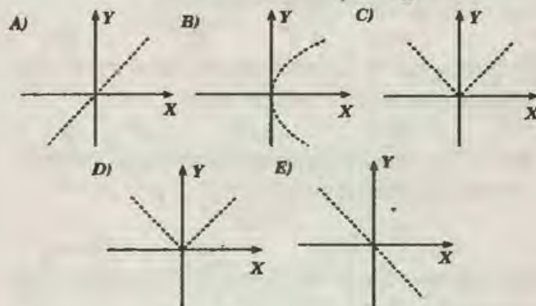
22 Según la gráfica de la función f



Calcule $a+3b+d$

A) 10 B) 2 C) 12 D) 6 E) 14

23 Esbozar la gráfica de: $f(x)=\sqrt{\frac{\llbracket x-4\rrbracket+4-x}{x^2}}+\llbracket x\rrbracket$



24 Dada la función $f:[3;+\infty\rangle\Rightarrow\langle 1;m]$ tal que $f(x)=\frac{x+n}{x-2},n>0$, si f es suryectiva, calcule $m-n$

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

25 Resolver: $\left\llbracket\frac{2-|x|}{x-1}\right\rrbracket\geq 1$

A) $x\in\left\langle 1;\frac{3}{2}\right]$ B) $x\in\langle-1;1\rangle$ C) $x\in\left\langle -1;\frac{3}{2}\right]$
D) $x\in\left[\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right]$ E) $x\in\left[\frac{3}{2};3\right]$

PROBLEMA 26:

Halle el dominio y rango de la siguiente función:

$f(x)=\sqrt{|x|-\llbracket x^2\rrbracket}$

A) $Domf=\langle-\sqrt{2};\sqrt{2}\rangle$ $Ranf=[0;1\rangle$
B) $Domf=\langle 2;2\rangle$ $Ranf=\langle-1;2\rangle$
C) $Domf=\langle-\sqrt{2};\sqrt{2}\rangle$ $Ranf=\langle 0;2\rangle$
D) $Domf=[0;\sqrt{2}\rangle$ $Ranf=[0;2\rangle$
E) $Domf=\langle-1;1\rangle$ $Ranf=\langle 0;1\rangle$

PROBLEMA 27:

Resolver $\frac{(\llbracket 28-x^2\rrbracket-2)\sqrt{36-x^2}}{(\llbracket x\rrbracket+\llbracket -x\rrbracket)(x-\llbracket x\rrbracket+1)}\geq 0$

A) $[-6;-5\rangle\cup\langle 5;6]$ B) $\{-6;6\}$ C) $[-6;6]$
D) $\langle-\infty;-5\rangle\cup\langle 5;+\infty\rangle$ E) $\langle-6;-5\rangle\cup\langle 5;6\rangle$

PROBLEMA 28:

Dada la función : $f(x)=\begin{cases}x^2+b;-4\leq x\leq 2\\ a-x^2-2x;-2\leq x<3\end{cases}$ $\wedge$

Determine el número de elementos de $Ranf\cap Z$. Si $a-b=-1\wedge a\in Z$.

A) 29 B) 30 C) 31 D) 32 E) 33

PROBLEMA 29:

si $2<x<3$

Calcular Rangf. Si $f(x)=\left\llbracket\frac{3x+7}{x+2}\right\rrbracket$

A) $\{4\}$ B) $\{2;3\}$ C) $\{2\}$ D) $\{2;3;4\}$ E) $\{3\}$

PROBLEMA 30:

Hallar los valores de b para que la gráfica de la función f este siempre por debajo o corte a la gráfica de g.

Donde : $f(x)=-|x-3|+b$
$g(x)=\sqrt{4-x};x\leq 3$

A) $b\in[4;+\infty\rangle$ B) $b\in\langle 3;4]$ C) $b\in\langle 2;3\rangle$
D) $b\in\langle 1;2\rangle$ E) $b\in\langle-\infty;1]$

PROBLEMA 31:

Halle el mínimo valor de la función $g(x)=\sqrt{4-x}\ ;\ x\leq 3$

A) −2 B) −1 C) −1/2 D) 0 E) 1

PROBLEMA 32:

Dar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I) $f(x)=\{(x;y)\in R^2/x+y=2\wedge xy=1\}$ es una función.
II) $f(x)=\{(x;x)\in R^2\}$ es una función.
III) Si $f(x)=\{(x;y)\in R^2/y=f(x)\}$ es una función, entonces $\{(x;y)\in R^2/x=f(y)\}$ es una función.

A) FVF B) VFF C) FVV D) VVV E) VVF

SEMINARIO TALLER 9 - PARTE IV

01 Sea la función : $f(x)=\frac{x^2-1}{x^2+3}\ ;\ x\in[-3;2]$

Si $m\leq f(x)\leq M$. Halle la suma entre el mayor valor de M y el menor valor de M

A) 1/2 B) 1/3 C) 1 D) 2 E) 2/3

02 Si m y n son las abcisas de los puntos de corte de las gráficas de: $f(x)=-\llbracket\sqrt{x}\rrbracket$
$g(x)=x^2-14x+46$

Calcular m^2-n^2 si $m>n$

A) 56 B) 48 C) 14 D) 64 E) 28

03 Dada la función $f:A\Rightarrow B$

Dar los valores de verdad

I) Si $(x;y)\in f\wedge(x;z)\in f\rightarrow y=z$

II) Si $(x;y)\in f\wedge(z;y)\in f\rightarrow x=z$

III) $Ranf \subset B$

IV) Si $f(x)=x+5 \wedge A=[-3;2] \rightarrow f(3)=8$

A)VVV B)VFVF C)VFVV D)VVFV E)VVVF

03 Dada la función $g: A \subset \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$

Indique la suma de los elementos del dominio de g, si $g(x)=\sqrt{x-1}+\sqrt{6-x}$

A) 15 B) 10 C) 14 D) 20 E) 21

05 Halle el rango de la función f dada por $f=\left\{(x;y)\in\mathbb{R}^2 / x>2 \wedge y=x+\dfrac{4}{x-2}\right\}$

A) $\langle 0;+\infty\rangle$ B) $\langle 2;+\infty\rangle$ C) $[6;+\infty\rangle$ D) $\langle 2;6]$ E) $\mathbb{R}$

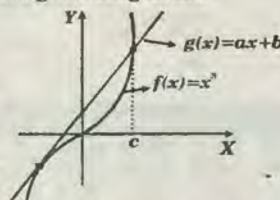
06 El rango de $f(x)=\dfrac{x}{|x|}\left[(x-1)^2+2|x|\right]$ es.

A) $\mathbb{R}-[-1;1]$ B) $\mathbb{R}-\langle -1;1\rangle$ C) $\langle 0;+\infty\rangle$
D) $\langle -\infty;0\rangle$ E) $\langle -1;+\infty\rangle$

07 Sea f una función. Demostrar que f se puede expresar como $f(x)=g(x)+h(x)$

Donde $g(x)=g(-x)$ y $h(x)=-h(-x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

08 Según las siguientes gráficas



Demostrar que $4a=3c^2$

09 Si tenemos la condición

$$Log_2(x^2+1)+Log_2(y^4+1)+Log_2(z^2+1)=0$$

Halle : $x(y-1)(z-2)$

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

10 Indique un intervalo que no está en el conjunto solución de $3Log_{cosx+\sqrt{5}}|x|\le Log_{cosx+\sqrt{5}}(7|x|-6)$

A) $\left[1;\dfrac{3}{2}\right\rangle$ B) $\langle -2;-1\rangle$ C) $[-\sqrt{3};-1\rangle$

D) $\left[\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{2}\right\rangle$ E) $\left[1;\dfrac{4}{3}\right\rangle$

11 Si x e y son números reales positivos para los cuales se cumple:

$$Log_{\frac{y}{2}}x^3=-3;\ y\ \frac{Log_2 x+Log_2 y}{Log_3 x-Log_3 y}=\sqrt{3}^{Log_3\sqrt[4]{9^4}}$$

Calcule $\left(\dfrac{x}{y}\right)^9$

A) $\left(\dfrac{1}{8}\right)^2$ B) $\left(\dfrac{1}{4}\right)^2$ C) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^2$ D) 8 E) 27

12 Si $|a|<1$, resolver : $Log_{1-|a|}(1-|a|)^x>2$

A) $\langle 0;1\rangle$ B) $\langle 1;\infty\rangle$ C) $\langle 2;+\infty\rangle$ D) $\mathbb{R}^+-\{1\}$ E) $\langle 0;1\rangle\cup\langle 1;2\rangle$

13 Si $\{a;b;c\}\subset\mathbb{R}^+-\{1\}$ y los números 1; $Log_b c$ y $Log_c a$ son raíces de la ecuación en x:

$$x^3-\left(Log_a a^3 b\right)x^2+\left(Log_b b^3 c\right)x-1=0$$

Halle : $\dfrac{a^2+b^2}{ab}+\dfrac{b^2+c^2}{bc}-\dfrac{a^2+c^2}{ac}$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 0

14 Indique el valor de verdad de cada una de las proposiciones:

I) $Log_{\sqrt{2}}\left(\left|5x+\dfrac{1}{3}\right|+1\right)\ge 0;\forall x\in\mathbb{R}$

II) $\sqrt{2}Log_8 3=\sqrt[12]{9}$

III) Si $f(x)=Sgn\left\{\dfrac{Log_{0,7}37\,Log_{\frac{\pi}{3}}\pi}{Log_{0,1}0,5}\right\}\Rightarrow f(x)=-1$

A)VVV B)VFV C)VFF D)FVV E)FVF

15 Determine el valor más simple de:

$$\left\{-CoLog_3\left[Anti\,Log_4(Log_4 3)\right]\right\}^{Log_3 4}$$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

16 Simplifique la expresión $a^{\left(\frac{1+Log_a b}{1+Log_b a}\right)}$

A) a B) Loga C) Logb D) b E) $Log_b a$

17 Halle x , al resolver :

$$Log_2\left(\frac{x+3}{x-1}\right)-1=Log_2\left(\frac{5}{3}\right)-Log_2(x-5)$$

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

18 Calcule x al resolver

$$Log\left[Log_3(Log_2 x)\right]+Log\left[Log_{(Log_2 x)}7\right]=Log\,3-Log(Log_7 x)$$

A) 27 B) 36 C) 45 D) 48 E) 81

19 Resolver en x

$$Log_a\left(\sqrt{b^2-x^2}+\sqrt{c^2-x^2}\right)=Log_a b+Log_a c-Log_a x$$

Donde $a=b^2+c^2 \wedge b;c\in\mathbb{R}$

A) $\dfrac{bc}{\sqrt{b^2+c^2}}$ B) $\sqrt{\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}}$ C) $\dfrac{bc}{\sqrt{b^2+c^2}}$

D) $\dfrac{b^2c^2}{b^2+c^2}$ E) $\sqrt{b^2+c^2}$

20 Resolver $Log_x\left(\sqrt{x^2+4}+\sqrt{x^2+9}\right)=2Log_{x^2}5$

A) $\{2\}$ B) $\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$ C) $\{\ \}$ D) $\left\{\dfrac{5}{2}\right\}$ E) $\left\{\dfrac{3}{2}\right\}$

21 Resolver : $Log_{(x-1)}(x-3)^2=2$

A){1} B){3} C){ } D){2} E){4}

22 Resolver :

$$2^{Log|x|}>\left(\frac{1}{4}\right)^{-Log|x|^2}$$

A) $\langle -5;5\rangle$ B) $\langle -10;10\rangle$ C) $\langle -1;1\rangle - \{0\}$
D) $\langle -20;20\rangle$ E) $\{10\}$

23 Si $Ln(1+r) = \sum_{i=1}^{\infty}(-1)^{i+1}\times\frac{r^i}{i}$ y $f(x) = Ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$.
Halle la traza de $f(A)$ tal que $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$

A)0 B)2 C) 4 D)1000 E)1257

24 Resolver $Log\,x < 4\sqrt{Log\,x}$

A) $\langle 1;10\rangle$ B) $\langle 1;10^{16}\rangle$ C) ϕ D) $\langle 10;10^{16}\rangle$ E) $\langle -1;1\rangle$

25 Resolver : $|Log_3 x(3-x)| \geq |Log_3 x| + |Log_3(3-x)|$

A)[1;3] B)[0;3> C)<-1;1> D) [0;5> E)[1;2]

26 Resolver en x :

$$\left(n^{2Log_n m}\right)^{\left(\frac{Log_m xy}{Log_n xy}\right)} = n^x ; \{m;n;y\} \subset \mathbb{R}^+ - \{1\}$$

A) 4 B) 3 C) 2 D) 5 E) 6

27 El valor de la determinante de $\begin{pmatrix} 1 & x & y & 1+z+w \\ 1 & y & z & 1+x+w \\ 1 & z & w & 1+x+y \\ 1 & w & x & 1+y+z \end{pmatrix}$ es

A) xyzw B) x+y+z+w C)0 D) 1 E) 2

28 Si la matriz $\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ es una raíz de $P_{(x)} = x^2 - px + q$, calcule el valor de $\frac{p}{q+1}$

A) 1 B) 2 C) –1 D) 3 E) 0

29 Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}$; $i = \sqrt{-1}$. Calcule $|P(A)|$ sabiendo que
$P(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + ...$

A) 1 B) 0 C) –1 D) 4 E) 5

30 Sea $A = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} -7 & 1 \\ 9 & 5 \end{pmatrix}$ además $X+Y=A$; $X-Y=B$
Calcule traza$(2X+3Y)$

A) 1 B) 2 C) 4 D) 6 E) 8

31 A es una matriz nilpotente de orden 2.
Halle $B = [(I+A)^n + (I-A)^n]$,
si I: Identidad y $n \in N; n \geq 2$

A) A B) 2A C) 2I D) nA E) I+A

32 Sean: $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 10 & 5 \end{bmatrix}$; $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Determine la suma de los elementos de la matriz resultante de $A^2 - B^2 - 6(A-B) + 181I$.

A) 390 B) 280 C) 240 D) 800 E) 122

33 Siendo
$A = \begin{pmatrix} 2 \\ a \\ 1 \end{pmatrix}$; $B = (2\ a)$; $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; $D = A.B.C$ y $E = C^t.B^t.A^t$

Si se cumple $D = kE$, calcule k

A)5 B)2 C)1 D)3 E)4

34 Si $\begin{pmatrix} k & 1 \\ 0 & k \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 16 & 32 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$; tal que n, $k \in Z^+$. Calcule $\frac{n}{k}$

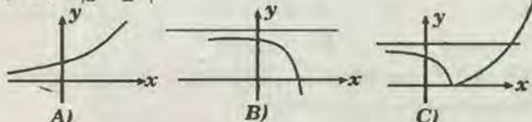
A) $\frac{3}{2}$ B) $\frac{1}{2}$ C) 2 D) $\frac{1}{3}$ E) 1

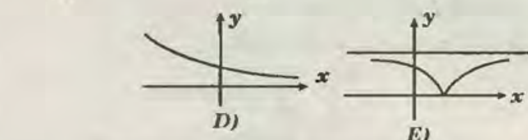
35 Hallar k

$$\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ b_1+c_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ b_2+c_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

A) $\frac{1}{2}$ B)2 C)1 D)4 E)3

36 Grafique la función $f: R \Rightarrow R$ definido por: $f(x) = |3 - 2^x|$





CLAVES SEMINARIO 9 - PARTE I

01) D	02) A	03) C	04) C	05) A
06) C	07) C	08) B	09) C	10) B
11) E	12) D	13) D	14) E	15) B
16) C	17) B	18) A	19) A	20) D
21) E	22) D	23) E	24) D	25) C
26) A	27) E	28) C	29) C	30) D
31) E	32) E	33) A	34) B	35) C
36) C	37) *	38) *	30) *	40) *

CLAVES SEMINARIO 9 - PARTE II

01) D	02) E	03) D	04) A	05) A
06) B	07) C	08) E	09) A	10) C
11) C	12) D	13) D	14) D	15) D
16) A	17) A	18) E	19) D	20) D
21) A	22) A	23) D	24) E	25) B
26) E	27) C	28) B	29) D	30) B
31) C	32) B	33) E	34) C	35) C
36) D				

CLAVES SEMINARIO 9 - PARTE III

01) A	02) C	03) A	04) D	05) D
06) D	07) B	08) C	09) *	10) B
11) B	12) B	13) C	14) B	15) C
16) A	17) B	18) D	19) D	20) E
21) B	22) C	23) A	24) D	05) A
26) A	27) E	28) D	20) E	30) E
31) E	32) E			

CLAVES SEMINARIO 9 - PARTE IV

01) B	02) E	03) B	04) E	05) C
06) A	07) *	08) *	09) A	10) D
11) C	12) B	13) B	14) A	15) D
16) E	17) A	18) C	19) C	20) C
21) C	22) A	23) D	24) E	25) C
26) C	27) A	28) A	20) D	30) C
31) E	32) C	33) C	34) B	

DECIMO SEMINARIO

01. Resolver el problema de programación lineal
Maximizar $z(x,y) = 3x + 2y$
Sujeto a las restricciones
$x + y \le 1$
$x \ge 0,\ y \ge 0$
A) -2 B) 0 C) 2
D) 3 E) 4

02. Maximice $f(x,y) = 4x + 6y$, sujeta a :
$x + 3y \le 6$
$3x + y \le 8$
$x \ge 0, y \ge 0$
A) 9,8 B) 10,7 C) 12
D) 16,5 E) 18

03. Maximizar la función
$Z = f(x,y) = 4x + 3y$ sujeta a las restricciones:
$30x + 20y \le 1800$; $x + y \le 80$; $x \ge 0$; $y \ge 0$
A) 220 B) 240 C) 250
D) 260 E) 280

04. Maximizar $f(x, y) = x + y$ si
$x + y \le 150$
$y \le \frac{x}{2}$
$x \ge 20$; $y \ge 40$, $x, y \in Z^+$
A) 120 B) 130 C) 140
D) 150 E) 160

05. Minimizar : $C(x,y) = 6x + 8y$, sujeta a las restricciones
$40x + 10y > 2400$
$10x + 15y > 2100$
$5x + 15y > 1500$
$x > 0,\ y > 0$
A) 1100 B) 1140 C) 1200
D) 1800 E) 1920

06. Un sastre tiene a su disposición 16 m^2 de algodón, 11m^2 de seda y 15 m^2 de lana. Un traje requiere lo siguiente: 2m^2 de algodón, 1m^2 de seda, 1 m^2 de lana. Una túnica requiere lo siguiente: 1m^2 de algodón, 2m^2 de seda, 3m^2 de lana. Si el traje se vende por $30 y una túnica por $50; ¿cuántas piezas de cada confección debe hacer el sastre para obtener la máxima cantidad de dinero?
A) 8 trajes 0 túnicas
B) 4 trajes 3 túnicas
C) 7 trajes 2 túnicas
D) 3 trajes 4 túnicas
E) 5 túnicas 0 trajes

07. Un granjero tiene 480 hectáreas en la que puede sembrar trigo o maíz. El calcula que tiene 800 horas de trabajo disponible durante la estación crucial de verano. Dados los márgenes de utilidad y los requerimientos laborales que se adjunta:
Maíz
Utilidad : $ 40 por hectárea
Trabajo : 2 hectáreas por hora
Trigo
Utilidad : $ 30 por hectárea
Trabajo : 1 hectáreas por hora
¿Cuántas hectáreas de cada uno debe plantar para maximizar su utilidad? ¿Cuál es la utilidad máxima?
A) 12560 B) 14500 C) 17600
D) 18210 E) 20200

08. En una urbanización del distrito de Surco, se van a construir casas de dos tipos: económicas y super económicas. La empresa constructora dispone de $ 1800 000, siendo el costo de cada tipo de casa $ 30 000 y $20 000 respectivamente. La municipalidad exige que el número total de casas no debe ser superior a 80. sabiendo que el beneficio por la venta de una casa económica es de $4000 y por la super económica $3000. ¿cuántas casas super económicas deben construirse para obtener el máximo beneficio?
A) 20 B) 40 C) 50
D) 60 E) 70

09. Una compañia produce dos tipos de artículos, mecánicos y eléctricos mensualmente. Cada uno requiere para su fabricación del uso tres máquinas A, B y C. En la tabla adjunta se muestra la información relacionada con la fabricación de estos dos tipos de artículos.

	A	B	C	Utilidad/unidad
Mecánico	2h	1h	1h	$ 4
Eléctrico	1h	2h	1h	$ 6
Max. de horas disponibles	180h	160h	100h	

Se sabe que la compañia vende todos los artículos que produce. Determine la utilidad máxima mensual (en dólares).
A) $ 360 B) $ 400 C) $ 440
D) $ 480 E) $ 520

10. Un pequeño negocio se especializa en vender dos tipos de artículos A y B. Si "x" representa la cantidad de artículos producidos del tipo A "y" represente la cantidad de artículos producidos del tipo B, sujetos a:
$2x + y \le 8$
$2x + 3y \le 12$
Determine la utilidad máxima P. si está dada por:
$P(x, y) = (3x + y).1000$ dólares.
A) $4000 B) $8000 C) $10 000
D) $11 000 E) $12 000

11. Determine el término 20 en la sucesión $\left\{2; \frac{9}{4}; \frac{64}{27}; \frac{625}{256}; \ldots\right\}$
A) 2^{20} B) 21^{20} C) $\left(\frac{21}{20}\right)^{21}$
D) $\left(\frac{21}{20}\right)^{20}$ E) $\left(\frac{20}{21}\right)^{20}$

12. Determine el n-ésimo término de la sucesión:
$\left\{1; \frac{3}{5}; \frac{7}{11}; \frac{13}{19}; \frac{21}{29}; \ldots\right\}$
A) $\frac{2n-1}{4n-3}$ B) $\frac{2n-3}{2n^2-3}$
C) $\frac{n^2+n-1}{n^2-n+2}$ D) $\frac{n^2-n+1}{n^2+n-1}$
E) $\frac{n^2-n-3}{n^2+n-5}$

13. ¿Cuántos términos tiene la siguiente sucesión?
{ 13; 16; 21; 28; 37; ..... ; 796 }
A) 26 B) 27 C) 28
D) 29 E) 31

14. Determine el término n-ésimo de la sucesión $\left\{1, \frac{5}{9}, \frac{9}{27}, \ldots\right\}$
A) $\frac{1^n+2^n}{3^n}$ B) $\frac{2^n+3^n}{3^n}$ C) $\frac{2^n-3^n}{3^n}$
D) $\frac{4^n-3^n}{3^n}$ E) $\frac{4^n+3^n}{3^n}$

15. Si $S_n = \frac{n-3}{3n+2}$ es la suma de los "n" primeros términos de una sucesión. Halle el término a_{n+1}.
A) $\frac{9n}{(3n+5)(3n+2)}$ B) $\frac{n}{(3n+5)(3n+2)}$
C) $\frac{11}{(3n+5)(3n+2)}$ D) $\frac{3n-5}{(3n+5)(3n+2)}$
E) $\frac{3n-2}{(3n+5)(3n+2)}$

16. Si $\{a_n\}_{n \in Z_0^+}$ es una sucesión tal que
$a_0=49$, $a_1=7$, $a_n= 7^{\frac{1}{n(n-1)}}$
$\forall\ n \ge 2$, entonces la suma de las cifras del producto de todos los términos de la sucesión $\{a_n\}$, cuando n crece ilimitadamente es.
A) 3 B) 4 C) 5
D) 6 E) 7

17. Dada la sucesión $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, si $a_1 = \sqrt{2}$ y $a_{n+1} = \sqrt{2a_n}$, $\forall n \ge 1$, determine el exponente de 2 en el término a_n
A) 2^{-n} B) $1 - 2^n$ C) $1 + 2^{-n}$
D) $1 - 2^{-n}$ E) 2^{n-1}

18. Sea la sucesión $\{a_n\}$ cuyos cuatro primeros términos $\frac{5}{5};\frac{9}{10};\frac{13}{15};\frac{17}{20};...$ Determine a partir de que lugar los términos de la sucesión son menores que 0,81.
A) 18 B) 19 C) 20
D) 21 E) 22

19. Indique la sucesión o sucesiones que cumplen: $a_n < a_{n+1}\quad \forall n \geq 1$
I. $\{2n+1\}$ II) $\left\{\frac{n}{2^n}\right\}$ III. $\left\{\frac{3n-1}{4n+1}\right\}$
A) solo I B) solo II C) solo III
D) I y III E) I y II

20. Determine cuántas proposiciones son verdaderas:
I. Si $\{a_n\}$ es creciente, $\{b_n\}$ es creciente cuendo $b_n = a_n + 2^n$.
II. Si $\{a_n\}$ es creciente, $\{-a_n\}$ es decreciente
III. Si $\{a_n + b_n\}$ es creciente, entonces $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ son crecientes.
A) solo I B) solo II C) solo III
D) I y II E) II y III

21. Dada la sucesión $\{a_n\}$ con $a_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}}+\frac{1}{\sqrt{n+2}}+...\frac{1}{\sqrt{n+n}}$, indique cuál(es) de los enunciados son correctos:
I. La sucesión $\{a_n\}$ es convergente
II. La sucesión $\{a_n\}$ es divergente
III. La sucesión $\{a_n\}$ es acotada
A) solo I B) solo II C) solo III
D) I y III E) II y III

22. Dadas las sucesiones: $\{n2^{-n}\}$, $\{n^2\}$, $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$, $\left\{\frac{n}{n^2+1}\right\}$, $\left\{(-1)^n\frac{1}{n}\right\}$
¿Cuántas de ellas son acotadas?
A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

23. De los siguientes enunciados
I. Toda sucesión creciente es acotada.
II. Toda sucesión creciente y acotada es convergente.
III. Toda sucesión acotada es convergente.
Son verdaderos:
A) I, II y III B) solo II C) I y II
D) I y III E) III

24. Determine el valor de convergencia de la siguiente sucesión:
$\left\{\frac{2}{5};\frac{5}{11};\frac{10}{21};\frac{17}{35};...\right\}$
A) $\left\{\frac{13}{2}\right\}$ B) 7 C) 6
D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{1}{8}$

25. Sea $\{a_n\}_{n\in N} / a_n = \frac{2^n+3^{n+1}}{3^n+2^{n+1}}$ converge a:
A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

26. Sea $\{a_n\}_{n\in N}$ una sucesión tal que $a_n \geq 0$ y $15(a_{n+1})^2 = 2 + 7a_n$; determine el valor de convergencia de la sucesión $\{a_n\}$.
A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{5}{3}$
D) 6 E) 8

27. Halle los valores de a y b para que la sucesión $\{a_n\}$ definida por:
$a_n = -\frac{n^3+1}{n^2+1}+an+b$ para que la sucesión converge hacia cero De cómo respuesta la suma de estos valores.
A) -2 B) -1 C) 0
D) 1 E) 2

28. Si la sucesión: $\left\{\sqrt{n-\sqrt{\sqrt{a}n+\sqrt{\sqrt{a^3}n}}}-\sqrt{n}\right\}_{n\geq 1}$ converge a $-\frac{1}{2}$. Determine el valor de "a".
A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{2}$ C) 1
D) 2 E) 4

29. Determine el valor de convergencia de la sucesión: $\left\{\frac{5^{2n+1}+2^n}{1-25^n}\right\}_{n\geq 1}$; $n \in N$
A) -5 B) 0 C) 1
D) 2 E) 3

30. Determine el valor de :
$$E = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2n+10}-\sqrt{2n+1}}{\sqrt{n+10}-\sqrt{n+1}}$$
A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
D) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ E) $\frac{\sqrt{2}}{4}$

31. Determine el valor de convergencia de la sucesión $\{a_n\}_{n\in N}$ definida por :
$a_{n+1} = \sqrt{4a_n - a_n^2}$; $a_1 \in \langle 0; 2\rangle$
A) 0 B) 1 C) 2
D) 3 E) 4

32. Sea la sucesión $\{a_n\}$ definida por :
$a_n = \left(1-\frac{3}{n}\right)^{\frac{n^2}{n+3}}$ y los enunciados:
I. $\{a_n\}$ es acotada
II. $\{a_n\}$ es convergente
III. $\{a_n\}$ es divergente.
Son verdaderos.
A) I y II B) solo III C) solo II
D) solo I E) II y III

33. La sucesión $\left\{\left(\frac{3}{8}\right)^4;\left(\frac{4}{7}\right)^5;\left(\frac{5}{8}\right)^6;.....\right\}$ es convergente a:
A) 1 B) e^{-1} C) $2e^{-2}$
D) e^{-3} E) e^{-4}

34. Determine el valor de:
$E = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-3}{n+2}\right)^n$
A) e^{-1} B) e^{-2} C) e^{-3}
D) e^{-4} E) e^{-5}

35. Determine el valor de
$\sum_{k=1}^{60}\left(\frac{1}{25k^2+5k-6}\right)$
A) $\frac{10}{303}$ B) $\frac{20}{303}$ C) $\frac{37}{303}$
D) $\frac{41}{303}$ E) $\frac{53}{303}$

36. Halle el valor de la siguiente suma:
$\sum_{n=1}^{20}\left[9(2n+1)^2-4(3n-1)^2\right]$
A) 10605 B) 10505 C) 11615
D) 12700 E) 13705

37. Halle una fórmula pare la siguiente sumatoria $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k^2+6k+4}$
A) $\frac{n}{2(n+1)}$ B) $\frac{n}{4(n+2)}$
C) $\frac{n}{(n+1)n}$ D) $\frac{1}{(n-1)n}$
E) $\frac{n}{3(n+2)}$

38. Si $a_n = \frac{1}{n-4}$, $\forall n \geq 5$. Determine la suma de los términos de la fracción resultante al efectuar $\sum_{n=6}^{20}\left(a_{n-1}-a_n\right)$.
A) 40 B) 60 C) 20
D) 31 E) 51

39. Determine el valor de n al rasolver la ecuación $\sum_{k=1}^{n} k = 4(n+1)$.
A) 3 B) 6 C) 8
D) 10 E) 12

40. Determine el valor de : $\sum_{n=1}^{100}\frac{2n+1}{(n^2+n)^2}$
A) $\frac{19900}{20101}$ B) $\frac{10300}{10201}$ C) $\frac{10200}{10201}$
D) $\frac{10300}{10301}$ E) $\frac{10400}{10401}$

41. Calcule:

$$S=\frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{m} 1+1}-\frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{m} 1+2}+2\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{(j+1)(j+2)j}$$

A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{2}$
D) 0 E) 1

42. Determine :

$$\sum_{k=1}^{n}\left(k.2^{k}\right)-\sum_{k=1}^{n}\left(k.2^{k-1}\right)$$

A) $(n-1)\ 2^n$
B) $1+(n-1)\ 2^n$
C) $2+(n-1)\ 2^{n+1}$
D) $4+(n-1)\ 2^n$
E) $3+(n-1)\ 2^n$

43. Calcule el valor de

$$A=\sum_{i=1}^{50}\sum_{j=2}^{30}(3i+2j)$$

A) 157 325B) 157 326C)157 327
D) 157 328 E) 157 329

44. Calcule:

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=2}^{n+2}\left(\frac{i^{2/3}+i^{1/3}+1}{1-i}+\frac{i^{1/3}}{i^{1/3}-1}+1\right)$$

A) $2n(n+1)$ B) $2n(n+2)$
C) $\frac{n(n+1)}{2}$ D) $2n^2$
E) $2n^2+2n+1$

45. Calcule:

$$S=1+2\left(\frac{1}{3}\right)+3\left(\frac{1}{3}\right)^2+4\left(\frac{1}{3}\right)^3+\ldots\ldots$$

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{9}{4}$ C) $\frac{3}{4}$
D) $\frac{1}{8}$ E) $\frac{9}{5}$

46. Determine la suma de la serie

$$S=1+\frac{3}{4}+\frac{7}{16}+\frac{15}{64}+\ldots..$$

A) $\frac{4}{3}$ B) $\frac{9}{4}$ C) $\frac{7}{3}$
D) $\frac{8}{3}$ E) $\frac{5}{3}$

47. Si $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$, determine el valor de:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$$

A) $\frac{\pi^2}{2}$ B) $\frac{\pi^2}{8}$ C) $\frac{\pi}{8}$
D) $2\pi^2$ E) $\frac{7\pi^2}{2}$

48. Dada la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^2\operatorname{sen}\left(\frac{2}{n}\right)\right)$; de los siguientes enunciados:

I. La serie converge a 3/2
II. La serie converge a 1/3
III. La serie es divergente
IV. La serie es acotada

Cuáles son correctas.

A) solo I B) solo II C) solo III
D) solo IV E) II y IV

49. Determine el valor de convergencia de la serie:

$$S=\sum_{k=1}^{\infty}\left((8k+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{k+2}\right)$$

A) $\frac{3}{8}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{3}{4}$
D) $\frac{15}{4}$ E) $\frac{17}{4}$

50. Determine el valor de:

$$E=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n^2+n}\,2^{-3n}$$

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{1}{5}$
D) $\frac{1}{6}$ E) $\frac{1}{7}$

51. Determine el valor de la serie:

$$S=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2}{5^n}$$

A) 1 B) 2 C) $\frac{1}{10}$
D) $\frac{1}{5}$ E) $\frac{2}{5}$

52. Determine el valor de convergencia de la serie:

$$E=\sum_{k=1}^{\infty}\left(k\left(\frac{1}{5}\right)^{k-1}\right)$$

A) $\frac{25}{16}$ B) 2 C) 4
D) 6 E) $\frac{121}{16}$

53. Calcular $\sum_{n=3}^{+\infty}(-1)^{4n}2^{-n}$

A) $-\frac{1}{12}$ B) $\frac{1}{12}$ C) $-\frac{1}{24}$
D) $\frac{1}{24}$ E) $\frac{1}{8}$

54. Determine: $\sum_{n=0}^{\infty}\left((-1)^{n^3}(2)^{-n}\right)$

A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{2}{3}$
D) 1 E) 2

55. Si en una progresión aritmética se conoce el término de lugar 4 que vale 10 y el término de lugar 10 que vale 22. ¿Cuál es el valor del término de lugar uno?

A) 4 B) 6 C) 8
D) 10 E) 12

56. El primer término de una progresión aritmética es – 3 y la suma de los 5 primeros términos es 105. ¿Qué lugar ocupa el término de valor 33?

A) 4 B) 5 C) 6
D) 7 E) 8

57. Se tiene tres términos consecutivos en una progresión aritmética tal que el producto de estos es igual a la suma de los mismos al cuadrado; determine el menor de éstos.

A) 6 B) 12 C) 18
D) 24 E) N.A

58. Una progresión aritmética tiene la propiedad de que el producto de los cuatro primeros términos es –15; la relación del segundo al tercero es 3. ¿Cuántos términos es preciso considerar para que la suma sea cero?

A) 6 B) 9 C) 12
D) 18 E) 20

59. Si la suma da los n primeros elementos de una progresión aritmética esta dada por:

$S_n=\frac{(7n+1)n}{2}$, halle el t_{21}.

A) 72 B) 144 C) 148
D) 252 E) 620

60. Si los números $x_1, x_2, \ldots.., x_{11}$ están en P.A creciente tal que:

$x_1+x_2+\ldots..+x_{11}=11$
$x_1^2+x_2^2+\ldots.+x_{11}^2=121$
determine : x_1.

A) – 4 B) – 2 C) 1
D) 6 E) 7

61. Determine el menor número de términos que se debe interpolar entre $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{2}$ para que la razón de la progresión aritmética sea menor que una milésima

A) 160 B) 162 C) 163
D) 166 E) 167

62. El tercer término de una P.G es 144 y el sexto es 486. Determine la suma de los cinco primeros términos de la P.G.

A) 844 B) 288C) 448 D) 840 E) 844

63. En una progresión geométrica se conoce el término de lugar 3 cuyo valor es 2 y el término de lugar 7 cuyo valor es 32. ¿Cuál es el valor del término de lugar 10?

A) 32 B) 64 C) 128
D) 256 E) 512

64. Hallar la ecuación de segundo grado cuyas raíces y el producto de ellas están en P.G. creciente, además el producto de sus raíces, la suma de ellos y la mayor de las raíces estén en P.A.

A) $x^2+6x-8=0$
B) $x^2-6x-8=0$
C) $x^2+6x+8=0$
D) $x^2-6x+8=0$
E) $x^2+6x+10=0$

65. Una progresión geométrica consta da un número par de términos, la suma de todos ellos es igual al triple de la suma de los términos impares, halle la razon dé la P.G.
A) 2 B) 3 C) 4
D) 8 E) 16

66. Si se interpola 5 medios geométricos entre 8 y 5832 el quinto término de la progresión total es:
A) 648 B) 729 C) 1456
D) 1944 E) 2916

67. Se interpolan siete medios geométricos entre 1280 y 5. Determine el término central de la progresión geométrica formada.
A) 30 B) 40 C) 50
D) 60 E) 80

68. ¿Cuál es el primer término negativo de la progresión aritmética?
+60, 53, 46, ...
A) a_{10} B) a_{11} C) a_9
D) a_7 E) a_{13}

69. Si $\frac{(n+2)!}{n!}=5+\left[\frac{(n+12)!}{(n+11)!}\right]$ halle el valor de n, $n \in N$.
A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

70. Determine el valor de n en :
$$36\underbrace{\left\{\frac{0!}{2!}+\frac{1!}{3!}+\frac{2!}{4!}+\frac{3!}{5!}+...\right\}}_{n\ \text{términos}}=n^2+n$$
A) 4 B) 5 C) 6
D) 7 E) 8

71. Determine el valor de:
$$E=\frac{13^{13!+1}\cdot[12!]^{14!}}{(13!)^{13!}\cdot(12!)^{13(13!)}}$$
A) 13 B) 12! C) 13!
D) 12(13!) E) 13(13!)

72. Calcule el valor de n al resolver la ecuación $\frac{(n+3)!(n+5)!}{(n+3)!+(n+4)!}=120$
A) 1 B) 3 C) 4
D) 5 E) 6

73. Determine el valor de "x" en:
$$\frac{(ax+n)!}{(ax+n+1)!}=\frac{(ax)!}{(ax+2)!}+\frac{(ax+1)!}{(ax+3)!}+...+\frac{(ax+n-1)!}{(ax+n+1)!}$$
A) $\frac{n-1}{a}$ B) $\frac{n+3}{a}$ C) $\frac{n+5}{a}$
D) $\frac{n-2}{a}$ E) $\frac{n-3}{a}$

74. ¿De cuántas maneras podemos colocar en línea 10 libros, 5 de ciencias, 2 de razonamiento y 3 de letras, si los libros de una misma materia deben estar juntos?
A) 2140 B) 4320 C) 5424
D) 7642 E) 8640

75. Con relación a la palabra "TEORIA" ¿cuántos palabras con las mismas 6 letras comienzan por T y terminan con A?
A) 12 B) 24 C) 28
D) 120 E) 720

76. En una exposición en el museo de arte de Paris, se van a colocar en línea 3 cuadros de Picasso, 4 cuadros de Rembrandt y 2 cuadros de Van Gogh. ¿De cuántas maneras diferentes pueden ordenarse los cuadros, de modo que los de Rembrandt se encuentren siempre juntos?
A) 288 B) 1728 C) 2880
D) 17280 E) 36288

77. Con los dígitos 1, 3, 5, 8 y 9 ¿cuántos números de 3 cifras diferentes mayores que 300, se pueden formar?
A) 20 B) 24 C) 36
D) 48 E) 64

78. Queremos abrir un candado de combinación de 4 anillos, cada uno marcado con los dígitos: 1, 2, 3, 4 y 5; pero no sabemos cuál es la combinación correcta ¿Cuál es el número máximo de intentos incorrectos que podemos realizar antes de encontrar la correcta?
A) 520 B) 624 C) 720
D) 880 E) 1200

79. ¿De cuántas maneras se pueden colocar en una fila 4 hombre y 3 mujeres de forma que estas ocupan los lugares pares?
A) 12 B) 24 C) 72
D) 120 E) 144

80. De cuántas maneras diferentes 2 peruanos, 4 argentinos y 3 panameños pueden sentarse en fila de modo que los de la misma nacionalidad se sienten juntos.
A) 360 B) 720 C) 1020
D) 1725 E) 1728

81. Sobra una estantería se tiene que colocar 6 libros distintos de álgebra, 5 de aritmética y 2 de geometría, de forma que los de cada materia siempre estén juntos ¿De cuántas maneras se puede hacer?
A) 1036200 B) 1036300
C) 1036600 D) 1036800
E) 1038900

82. Cinco alumnos forman cola en la ventanilla de la secretaria de cierta facultad ¿De cuántas maneras diferentes pueden hacer cola si el más alto y el más bajo no deben estar juntos?
A) 36 B) 72 C) 81
D) 95 E) 120

83. Con todas las letras de la palabra "SELENE" determine en ese orden:
i) el número de palabras distintas que puede formarse.
ii) en cuántos de ellos tienen las 3 letras E juntas.
A) 60; 36 B) 120; 24 C) 75; 48
D) 100; 36 E) 120; 12

84. En el siguiente gráfico, calcule el número de caminos que existen para ir de "A" a "B" siguiendo un recorrido mínimo.



A) 56 B) 70 C) 86
D) 126 E) 152

85. Si el número de maneras posibles que se sienten en una mesa circular n personas, donde hay 2 amigos que siempre se sientan juntos es 240 ¿cuántas personas hay en la mesa circular?
A) 4 B) 7 C) 9
D) 12 E) 15

86. En una mesa redonda se sientan a degustar un cebiche, 8 personas. ¿De cuántas maneras podrán sentarse, si tres de ellos siempre deben estar juntos?
A) 260 B) 540 C) 620
D) 720 E) 1024

87. ¿Cuántas pulseras se pueden hacer ensartado en un hilo 5 cuentes de colores diferentes?
A) 12 B) 24 C) 60
D) 120 E) 240

86. Determine el valor de la suma de números combinatorios:
$$E=\binom{5}{2}+\binom{5}{3}+\binom{6}{4}+\binom{7}{5}+\binom{8}{2}+\binom{9}{2}+\binom{10}{2}+\binom{11}{2}$$
A) $\binom{11}{8}$ B) $\binom{11}{9}$ C) $\binom{12}{8}$
D) $\binom{12}{9}$ E) $\binom{12}{7}$

89. Determine el valor de la suma de números combinatorios
$$E=\binom{10}{0}+\binom{10}{2}+\binom{10}{4}+\binom{10}{6}+\binom{10}{8}+\binom{10}{10}$$
A) 360 B) 430 C) 462
D) 512 E) 518

90. Determine el valor de "x" en la ecuación: $\dfrac{C_2^x . C_4^{x-2}}{C_3^{x-1}} = \dfrac{x}{4}$
A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

91. Determine el valor de n en la siguiente ecuación:
$\binom{n}{1} + 14\binom{n}{2} + 36\binom{n}{3} + 24\binom{n}{4} = 256$
A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

92. Determine la suma:
$S = \left(C_0^n\right)^2 + \left(C_1^n\right)^2 + \left(C_2^n\right)^2 + \ldots + \left(C_n^n\right)^2$
A) $C_{n/2}^n$ B) C_n^{n+1} C) C_n^{2n}
D) C_n^{3n} E) C_{2n}^{4n}

93. Determine el valor de "n" en la siguiente igualdad:
$5\binom{n}{5} = n\binom{n-1}{3}$
A) 4 B) 6 C) 8 D) 9 E) 10

94. ¿De cuántas maneras se pueden elegir dos o más corbatas de entre una colección de 5 corbatas?
A) 21 B) 23 C) 25 D) 26 E) 28

95. ¿Cuántos grupos de 7 miembros se pueden tomar con 6 matemáticas y 5 físicos de manera que en cada uno se encuentran 4 matemáticos?
A) 120 B) 140 C) 150
D) 180 E) 240

96. ¿Cuántas manos de poker contienen exactamente un full (3 de una denominación y dos de otra)?
A) 3744 B) 3850 C) 4550
D) 4884 E) 5772

97. Seis hombres y seis mujeres compiten realizando cierta tarea. Si los seis primeros puestos son ocupados por cuatro hombres y dos mujeres determine el número de casos:
A) 160 000 B) 161 000 C) 162 000
D) 163 000 E) 164 000

98. Si un conjunto tiene 15 subconjuntos de 2 elementos cada uno ¿cuántos subconjuntos tendrá un total?
A) 7 B) 16 C) 32 D) 64 E) 81

99. Se tiene un examen que consta de 10 preguntas, de las cuales hay que elegir 7, si las dos primeras son obligatorias, determine- de cuántas maneras puede escoger sus preguntas.
A) 24 B) 36 C) 42 D) 48 E) 56

100. De 7 hombres y 6 mujeres se debe escoger un comité de 5 personas. ¿De cuántas maneras se podrá hacer esto; si en el comité deben haber, 2 mujeres?
A) 250 B) 300 C) 360 D) 450 E) 525

101. Un profesor tiene una caja de tizas de 4 colores: 6 blancas, 4 rojas, 5 amarillas y 3 verdes. ¿De cuántas formas puede tomar 3 tizas de colores diferentes, si el siempre usa una tiza blanca?
A) 141 B) 282 C) 383 D) 424 E) 564

102. En una reunión hay 10 hombres y 5 mujeres; se van a formar grupos de 5 personas, ¿cuántos grupos diferentes se formarán si siempre debe haber 2 mujeres en el grupo?
A) 1600 B) 1200 C) 720 D) 450 E) 100

103. Para elaborar un examen de 6 preguntas se dispone de un banco de 05 preguntas fáciles, 4 preguntas regulares y 3 preguntas difíciles. ¿De cuántas formas diferentes puede elaborarse dicho examen si el número de preguntas fáciles debe ser estrictamente mayor a las regulares y el número de estas a su vez mayor o igual que las difíciles?
A) 30 B) 60 C) 120 D) 180 E) 274

104. Nueve personas abordan un tren que tiene 3 vagones, cada pasajero escoge aleatoriamente el vagón. ¿De cuántas maneras 2 pasajeros van en un vagón, 3 en el otro vagón y 4 en el vagón restante?
A) 1260 B) 3780 C) 5040
D) 6300 E) 7560

105. Con 4 futbolistas y 8 nadadores ¿Cuántos grupos pueden formarse de 6 integrantes cada uno, de tal manera que en cada grupo se tenga por lo menos un futbolista?
A) 224 B) 600 C) 696
D) 805 E) 896

106. Al desarrollar el binomio $\left(\dfrac{x^m}{y^{n-10}} + \dfrac{y^{n+20}}{x}\right)^n$, se obtiene un solo término central cuya parte literal es x^{60} y^{600}, determine el valor de $E = m + n$.
A) 25 B) 38 C) 44 D) 49 E) 60

107. Determine la relación entre r y n para que los coeficientes de los términos de lugares 3r y r + 2 del binomio $(1 + x)^{2n}$ sean iguales.
A) n = r B) n + r = 0 C) n = 2r
D) r = 2n E) n = 3r

108. Si en el desarrollo del binomio $\left(x^3 + \dfrac{1}{x}\right)^{21}$ el término de lugar (r + 2) contados a partir del último término tiene por grado relativo a x, 7 ¿Cuál es el grado relativo a x del término que ocupa el lugar (r – 2) contados a partir del primer término?
A) 27 B) 31 C) 35 D) 39 E) 43

109. Cuál(es) de los siguientes enunciados son correctos:
I. Al desarrollar $\left(2x^3 + \dfrac{1}{x}\right)^{23}$. el término independiente ocupa el lugar 21.
II. El número de términos racionales al desarrollar: $\left(\sqrt[5]{x} + \dfrac{1}{x}\right)^{32}$ es 7.
III. El término de 5 grado al desarrollar: $\left(x^3\sqrt{x} + \dfrac{1}{x}\right)^{40}$ ocupa el lugar 10 contado desde el final.
A) solo I B) solo II C) II y III
D) solo III E) I, II y III

110. La suma de los coeficientes de los términos 1º, 2º y 3º del desarrollo de: $\left(\sqrt[3]{x} + \dfrac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^n$ es 29. Obtener el término independiente del desarrollo. $n \in N$.
A) 7 B) 14 C) 35 D) 42 E) 56

111. ¿Cuántos términos presenta el desarrollo de: $\left(\dfrac{n}{8}x + y\right)^n$ si los términos de lugares 7mo y 8vo tienen igual coeficiente?
A) 46 B) 47 C) 48 D) 49 E) 50

112. Determine el valor de "n"; si el término de lugar 25, en la expansión de $\left(x^2 + \dfrac{1}{x^3}\right)^n$ contiene a x^{12}.
A) 30 B) 40 C) 66 D) 70 E) 78

CLAVES DEL SEMINARIO 10

01	02	03	04	05	06	07	08	09	10
D	D	D	D	B	C	C	D	E	E
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
D	D	C	A	C	F	D	D	D	D
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
B	D	B	D	C	B	D	C	A	B
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
C	A	D	E	B	D	B	D	C	C
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
C	B	A	A	B	D	B	C	E	E
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
C	A	E	C	A	A	E	B	B	A
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
D	A	D	D	A	A	E	A	C	B
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
A	A	A	E	B	D	D	B	E	E
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
D	B	B	D	B	D	B	D	D	D
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
C	C	C	D	C	A	C	D	E	E
101	102	103	104	105	106	107	108	109	110
B	B	E	E	E	C	C	C	B	C
111	112								
D	C								



PROBLEMA 1 :

Sean p, q, r proposiciones lógicas.

Señale la alternativa que presenta la secuencia correcta después de determinar si la proposición es verdadera *(V)* o falsa *(F)*.

I) $(p \to q) \to r \equiv p \to (q \to r)$

II) $(p \to q) \vee p \equiv q$

III) $q \wedge (p \to \sim q) \equiv \sim (q \to p)$

A) VVV B) VFV C) FVF D) FFV E) FFF

RESOLUCIÓN :

Para determinar el valor de verdad, utilizaremos las leyes lógicas.

I) FALSA :

$$\underbrace{\underbrace{(p \to q)}_{\sim p \vee q} \to r}_{(q \wedge \sim p) \vee r} \equiv \underbrace{p \to \underbrace{(q \to r)}_{\sim q \vee r}}_{\sim p \vee \sim q \vee r}$$

Por lo tanto, no son equivalentes.

II) FALSA : $\underbrace{\underbrace{(p \to q)}_{\sim p \vee q} \vee p}_{\text{Verdadero}} \equiv q$

Por lo tanto, no son equivalentes.

III) VERDADERA :

$$\underbrace{q \wedge \underbrace{(p \to \sim q)}_{\sim p \wedge \sim q}}_{q \wedge \sim p} \equiv \underbrace{\sim \underbrace{(q \to p)}_{\sim q \vee r}}_{q \wedge \sim p}$$

RPTA : "D"

PROBLEMA 2 :

Dados los conjuntos:

$A=\{(x+1) \in \mathbb{R} \,/\, x^2 - 2x+1>0\}$

$B=\{(x-2) \in \mathbb{R} \,/\, x^2+6x+9 \geq 0\}$

$C=\left\{\frac{1}{x} \in \mathbb{R} \,/\, 4x^2 - 4x+1 \leq 0\right\}$

$D=\{x \in \mathbb{R} \,/\, 25x^2+10x+1< 0\}$

Calcule $[(A \cap B) \backslash D] \cup C$

A) $\{2\}$ B) $\left\{2, \frac{1}{5}\right\}$ C) $\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{5}\right\}$ D) $\mathbb{R}-\{2\}$ E) $\mathbb{R}$

RESOLUCIÓN :

- $A=\{(x+1) \in \mathbb{R} \,/\, x^2 - 2x+1>0\}$

$x^2 - 2x+1>0$

$(x-1)^2>0 \Rightarrow x \in \mathbb{R}-\{1\} \Rightarrow (x+1) \in \mathbb{R}-\{2\}$

$\Rightarrow A=\langle -\infty; 2\rangle \cup \langle 2;+\infty\rangle$

- $B=\{(x-2) \in \mathbb{R} \,/\, x^2+6x+9 \geq 0\}$

$x^2+6x+9 \geq 0$

$(x+3)^2 \geq 0 \Rightarrow x \in \mathbb{R} \Rightarrow (x-2) \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow B=\mathbb{R}$

- $C=\left\{\frac{1}{x} \in \mathbb{R} \,/\, 4x^2 - 4x+1 \leq 0\right\}$

$4x^2 - 4x+1 \leq 0$

$(2x-1)^2 \leq 0 \Rightarrow x=1/2 \Rightarrow \frac{1}{x}=2$

$\Rightarrow C=\{2\}$

- $D=\{x \in \mathbb{R} \,/\, 25x^2+10x+1< 0\}$

$25x^2+10x+1<0$

$(5x+1)^2< 0$, *(absurdo)*

$\Rightarrow D=\phi$

Entonces:

$(A \cap B)=(A \cap \mathbb{R})=A$

$\Rightarrow [(A \cap B) \backslash D]=[A \backslash \phi]=A$

$\Rightarrow [(A \cap B) \backslash D] \cup C=A \cup C$

$=(\langle -\infty ; 2\rangle \cup \langle 2 ; +\infty\rangle) \cup \{2\}$

$\Rightarrow [(A \cap B) \backslash D] \cup C =\mathbb{R}$

RPTA : "E"

PROBLEMA 3 :

Sean los conjuntos

$A =\{x \in \mathbb{R} \,/\, \big| x - |x| \big| \leq M\}$

$B =\{x \in \mathbb{R} \,/\, \big| x + |x| \big| \leq M\}$

Entonces los valores de M tales que $A \cap B \neq \phi$ son:

A) $M \in \{0\}$ B) $M \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$ C) $M \in [-1;1]$

D) $M \in [0;\infty\rangle$ E) $M \in \langle -\infty;\infty\rangle$

RESOLUCIÓN :

Sabemos que:

• Si $b \geq 0: |a| \leq b \Rightarrow a \in [-b; b]$

• Si $b < 0$: $|a| \leq b \Rightarrow a$ no toma ningún valor en $\mathbb{R}$.

Dados: $A = \{x \in \mathbb{R} | x - |x|| \leq M\}$

$B = \{x \in \mathbb{R} | x + |x|| \leq M\}$

Tenemos que:

• $\forall M \geq 0: x=0 \in A \cap B \Rightarrow A \cap B \neq \phi$

• $\forall M < 0: A=\phi \wedge B=\phi \Rightarrow A \cap B=\phi$

Luego:

$$A \cap B \neq \phi \leftrightarrow M \geq 0 \leftrightarrow M \in [0; \infty\rangle$$

RPTA : "D"

PROBLEMA 4 :

Sean los conjuntos:

$A = \{x \in \mathbb{R} / ||x - |x|| \leq 1\}$ y

$B = \{x \in A / ||x - |x| - 1| \leq 1\}$

Entonces podemos decir que A/B es:

A) ϕ B) $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$ C) $\left[-\frac{1}{2}; 0\right]$ D) $\left[-\frac{1}{2}; 0\right\rangle$ E) $[0; \infty\rangle$

RESOLUCIÓN :

* Se utilizarán desigualdades con valor absoluto y operaciones con intervalos.

De A: $|x - |x|| \leq 1 \leftrightarrow -1 \leq x - |x| \leq 1$

I) Si $x \geq 0 \Rightarrow -1 \leq x - x \leq 1 \Rightarrow -1 \leq 0 \leq 1$

II) Si $x < 0 \Rightarrow -1 \leq x + x \leq 1$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2} \wedge x < 0 \leftrightarrow x \in \left[-\frac{1}{2}; 0\right\rangle$$

De *(I)* y *(II)* : $x \in \left[-\frac{1}{2}; 0\right\rangle \Rightarrow A = \left[-\frac{1}{2}; +\infty\right\rangle$

De B: $x \in A \wedge |x - |x| - 1| \leq 1$

$-1 \leq x - |x| - 1 \leq 1 \leftrightarrow 0 \leq x - |x| \leq 2$

I) Si $x \geq 0 \Rightarrow 0 \leq x - x \leq 2 \wedge x \in A$

$$\Rightarrow \left(x \geq 0 \wedge x \geq -\frac{1}{2}\right) \Rightarrow x \geq 0$$

II) Si $x < 0 \Rightarrow 0 \leq x + x \leq 2$

$x < 0 \wedge 0 \leq x \leq 1 \Rightarrow x \in \phi$

Luego, $B = [0; +\infty\rangle \Rightarrow A/B = \left[-\frac{1}{2}; 0\right\rangle$

RPTA: "D"

PROBLEMA 5 :

Dadas las siguientes proposiciones:

I) "Si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n^2 < 0$, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n - 3 = 0$".

II) "Si para todo $x \in \mathbb{R}$ se tiene $x^2 \geq 0$, entonces existe $x \in \langle -1; 1\rangle$ tal que $e^x < 0$".

III) "Si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n^2 < 0$, entonces existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $e^x < 0$".

Indique la secuencia correcta después de determinar si es verdadera *(V)* o falsa *(F)*.

A) VVV B) VFV C) FVV D) VVF E) FFF

RESOLUCIÓN :

La tabla de verdad del operador condicional es la siguiente.

p	q	$p \to q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

I) Si $\underbrace{\begin{bmatrix} \text{existe } n \in N \\ \text{tal que } n^2 < 0 \end{bmatrix}}_{F}$, entonces $\underbrace{\begin{bmatrix} \text{existe } n \in N \\ \text{tal que } n - 3 = 0 \end{bmatrix}}_{V}$

$$\underbrace{F \rightarrow V}_{V}$$

II) Si $\underbrace{\begin{bmatrix} \text{para todo} \\ x \in R \\ \text{se tiene } x^2 \geq 0 \end{bmatrix}}_{V}$, entonces $\underbrace{\begin{bmatrix} \text{existe} \\ x \in \langle -1; 1\rangle \\ \text{tal que } e^x < 0 \end{bmatrix}}_{F}$

$$\underbrace{V \rightarrow F}_{F}$$

III) Si $\underbrace{\begin{bmatrix} \text{existe } n \in N \\ \text{tal que } n^2 < 0 \end{bmatrix}}_{F}$, entonces $\underbrace{\begin{bmatrix} \text{existe } x \in R \\ \text{tal que } e^x < 0 \end{bmatrix}}_{F}$

$$\underbrace{F \rightarrow F}_{V}$$

Por lo tanto, la secuencia correcta es **VFV**.

RPTA : "B"

PROBLEMA 6 :

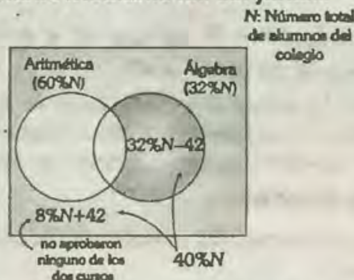
En un colegio el **60%** aprobó aritmética, el **32%** aprobó álgebra y los que aprobaron aritmética y álgebra representan el **60%** de los que no

aprobaron ninguno de los dos cursos. Si **42** aprobaron aritmética y álgebra, calcule el número de alumnos del colegio.

A)340 *B)350* *C)360* *D)370* *E)380*

RESOLUCION :

Los datos del problema representaremos gráficamente mediante los conjuntos.



Por dato : $42 = 60\%(8\%N + 42) \Rightarrow N = 350$

⇒ La cantidad de alumnos del colegio es **350**.

RPTA: "B"

PROBLEMA 7 :

Si $x^y=2$ (donde $x>0$), halle el valor de la expresión

$$\frac{(4^{x^y})^{x^{-y}}\times(x^{x^y})^y+(x^2)^{-y}}{2x^{2y}-6x^{-y}}$$

A)3 *B)* $\frac{11}{4}$ *C)* $\frac{16}{5}$ *D)* $\frac{13}{4}$ *E)* $\frac{16}{3}$

RESOLUCIÓN :

Leyes de exponentes:

Sea $x\in\mathbb{R}$; se cumple

- $x^n.x^m=x^{n+m}$
- $(x^n)^m=(x^m)^n=x^{n.m}$
- $x^{-n}=\left(\frac{1}{x}\right)^n ; x\neq 0$

Dato. $x^y=2$ $(x>0)$

Piden el valor de

$$M=\frac{(4^{x^y})^{x^{-y}}\times(x^{x^y})^y+(x^2)^{-y}}{2x^{2y}-6x^{-y}}$$

Utilizando propiedades y leyes de exponentes, podemos transformar la expresión; luego, tenemos:

$$M=\frac{4^{x^y\times x^{-y}}\times(x^y)^{(x^y)}+(x^y)^{-2}}{2\times(x^y)^2-6(x^y)^{-1}}$$

($x^0=1$)

Finalmente, reemplazamos $x^y=2$ y operamos.

$$M=\frac{4\times2^2+2^{-2}}{2\times2^2-6\times2^{-1}}=\frac{16+\frac{1}{4}}{8-3}=\frac{\frac{65}{4}}{5}=\frac{13}{4}$$

RPTA : "D"

PROBLEMA 8 :

Halle el producto de la suma de los coeficientes de $(2x^2-3y)^5$ con la suma de los coeficientes de $(x+y)^4$.

A) 15 *B) −16* *C) 30* *D) −18* *E) 20*

RESOLUCIÓN :

Consideremos los siguientes ejemplos :

Si: $P_{(x)}=x^2+2x+5$, luego la suma de coeficientes será: $P_{(1)}=8$

Si se tiene más de una variable:

$P_{(x;y)}=3x^2+5xy+6y^2$

suma de coeficientes $=P_{(1;1)}=14$

- $P_{(x;y)}=(2x^2-3y)^5$

suma de coeficientes $=P_{(1;1)}=(2-3)^5=-1$

- $Q_{(x;y)}=(x+y)^4$

suma de coeficientes $=Q_{(1;1)}=(1+1)^4=16$

Nos piden: $(-1)(16)=-16$

RPTA : "B"

PROBLEMA 9 :

Sabiendo que $f(x+6)=ax+b$; $f(2)=-14$; $f(-3)=-29$, halle el valor de $2a-b$.

A) 8 *B) −6* *C) 10* *D) 4* *E) 12*

RESOLUCIÓN :

De la condición

$f(x+6)=a(x)+b$, al hacer el cambio de variable

-6

$x+6=n$, tenemos

$\Rightarrow \boxed{f(n)=a(n-6)+b}$

Analizamos los datos:

- $f(2)=-14$

$a(-4)+b=-14 \to -4a+b=-14$....(I)

- $f(3)=-29$

$a(-9)+b=-29 \to -9a+b=-29$....(II)

Al resolver (I) y (II), se obtiene $\underline{a=3;\ b=-2}$

Nos piden: $2a-b$

$=2(3)-(-2)=8$

RPTA : "A"

PROBLEMA 10 :

Si $ab=3$ y $a^2+b^2=19$, calcule el valor de a^3+b^3.

A) 75 B) 60 C) 80 D) 120 E) 90

RESOLUCIÓN :

* Recuerde el desarrollo de algunos productos notables.

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

$$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

ó

$$(x+y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x+y)$$

Piden el valor de a^3+b^3

Datos :

$$ab=3$$

$$a^2+b^2=19$$

De acuerdo a los datos, podemos determinar el valor de $a+b$ y luego, en dicho valor, debemos hallar lo requerido.

1°) $(a+b)^2=\underbrace{a^2+b^2}+2ab$

$(a+b)^2= 19 + 2(3)=25$

$\Rightarrow a+b=5 \vee a+b=-5$ (no obtiene alternativa)

* Consideraremos : $a+b=5$

2°) $\underbrace{(a+b)^3} = a^3+b^3 + \underbrace{3ab}\underbrace{(a+b)}$.

$5^3 \; = a^3+b^3+3\,(3)\;\;(5)$

$\Rightarrow a^3+b^3=80$

RPTA : "C"

PROBLEMA 11 :

Si $a(b+c)=-bc$ y $a+b+c=2$, entonces el valor de $a^2+b^2+c^2$ es

A) 4 B) 2 C) $2\sqrt{2}$ D) 3 E) $4\sqrt{2}$

RESOLUCIÓN :

Recordemos el desarrollo de un trinomio al cuadrado. $(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+xz+yz)$

Datos:

$a(b+c)=-bc$ ....(I)

$a+b+c=2$.....................................(II)

Piden el valor de $a^2+b^2+c^2$.

Elevamos al cuadrado en el dato *II* :

$(a+b+c)^2=2^2$

$a^2+b^2+c^2+2(ab+ac+bc)=4$

$$\Rightarrow a^2+b^2+c^2+2\left[\underbrace{a(b+c)}_{-bc...dato\ (I)}+bc\right]$$

$$\Rightarrow a^2+b^2+c^2+2[0]=4$$

$$\Rightarrow a^2+b^2+c^2=4$$

RPTA : "A"

PROBLEMA 12 :

Sabiendo que $a+b+c=0$, $ab+ac+bc=-7$ y $abc=-6$

calcule $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$.

A) $\frac{18}{36}$ B) $\frac{49}{36}$ C) $\frac{29}{36}$ D) $\frac{7}{36}$ E) $\frac{7}{6}$

RESOLUCIÓN :

Datos: $a+b+c=0$..............(I)

$ab+ac+bc=-7$................ (II)

$abc=-6$ ....(III)

Piden el valor de $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$.

Al dividir *II* con *III* se obtiene

$$\frac{ab+ac+bc}{abc}=-\frac{7}{6}\rightarrow\frac{1}{c}+\frac{1}{b}+\frac{1}{a}=\frac{7}{6}$$

Elevamos al cuadrado y desarrollamos el trinomio cuadrado

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2=\left(\frac{7}{6}\right)^2$$

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+2\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{ac}+\frac{1}{bc}\right)=\frac{49}{36}$$

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+2\left(\frac{c+b+a}{abc}\right)=\frac{49}{36}$$

Según el dato *I*, $a+b+c=0$.

$$\Rightarrow\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+2\left(\frac{0}{abc}\right)=\frac{49}{36}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{49}{36}$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 13 :

Al dividir un polinomio $p(x)$ entre x^4-1 se obtuvo como residuo: $3x^3+nx^2+mx-2$; si además se sabe que el resto de dividir $p(x)$ entre (x^2-1) es $5x-4$, entonces el valor de m^n es:

A) -4 B) -2 C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{1}{4}$ E) 4

RESOLUCIÓN :

Dada la división $\frac{D_{(x)}}{d_{(x)}}$ siendo $D_{(x)}$; $d_{(x)}$ polinomios

no nulos, tal que $°[D_{(x)}\rangle \geq °[d_{(x)}\rangle$ se tiene que :

$D_{(x)}=d_{(x)}\times q_{(x)}+R_{(x)}$ *identidad fundamental*

donde: $q_{(x)}$ y $R_{(x)}$ son polinomios.

Por dato:

- $P_{(x)}=(x^4-1)q_{(x)}+3x^3+nx^2+6mx-2$ ....(I)
- $P_{(x)}=(x^2-1)Q_{(x)}+5x-4$ ....(II)

De (II) tenemos $P_{(1)}=1 \wedge P_{(-1)}=-9$.

Reemplazando en (I)

$P_{(1)}=3+n+m-2=1 \Rightarrow n+m=0$

$P_{(-1)}=-3+n-m-2=-9 \Rightarrow n-m=-4$

$\Rightarrow n=-2 \wedge m=2$

$\Rightarrow m^n=2^{-2}=\dfrac{1}{4}$

RPTA : "D"

PROBLEMA 14 :

Determine el valor de n, sabiendo que el desarrollo de $(x+a)^{2n+5}$ tiene **524** términos.

A) 295 B) 305 C) 259 D) 209 E) 269

RESOLUCIÓN :

Por las características que presenta el problema; es decir, es operativo y tiene en su desarrollo cierta formación, aplicamos el método de razonamiento inductivo.

Desarrollo del binomio cantidad de términos

$(x+a)^1=x+a \qquad 2=1+1$

$(x+a)^2=x^2+2ax+a^2 \qquad 3=2+1$

$(x+a)^3=x^3+3x^2a+3a^2x+a^3 \qquad 4=3+1$

Se observa que la cantidad de términos se obtiene como el exponente del binomio aumentado en uno.

Para el caso $(x+a)^{2n+5}$, la cantidad de términos es $2n+5+1=524$, por dato.

$\Rightarrow n=259$

RPTA : "C"

PROBLEMA 15 :

La suma de todas las soluciones positivas de la ecuación $\dfrac{10}{1+x+x^2}=6-x-x^2$ es:

A) $\dfrac{-2-\sqrt{5}+\sqrt{17}}{2}$ B) $\dfrac{-2+\sqrt{5}+\sqrt{17}}{2}$ C) $\dfrac{2+\sqrt{5}+\sqrt{17}}{2}$

D) $\dfrac{-3+\sqrt{5}+\sqrt{17}}{2}$ E) $\dfrac{3+\sqrt{5}+\sqrt{17}}{2}$

RESOLUCIÓN :

•Cambiando la forma de la ecuación convenientemente , obtenemos

$$\frac{10}{1+x+x^2}=7-(1+x+x^2)$$

Hacemos cambio de variable (incógnita)

Sea $y=1+x+x^2$; luego, en la ecuación tenemos que

$$\frac{10}{y}=7-y \Leftrightarrow y^2-7y+10=0$$

$$\Leftrightarrow (y-5)(y-2)=0 \Leftrightarrow y=5 \vee y=2$$

Volvemos a la incógnita inicial

$$x^2+x+1=5 \ \vee \ x^2+x+1=2$$

$$x^2+x-4=0 \ \vee \ x^2+x-1=0$$

Utilizamos la formula general para cada caso y obtenemos lo siguiente:

$$x_1=\frac{-1+\sqrt{17}}{2} \vee x_2=\frac{-1-\sqrt{17}}{2}$$

$$x_3=\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \vee x_4=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$$

Entonces, la suma de las soluciones positivas es

$$x_1+x_3=\frac{-2+\sqrt{5}+\sqrt{17}}{2}$$

RPTA: "B"

PROBLEMA 16 :

Si x e y son números enteros positivos que satisfacen las ecuaciones

$\sqrt{\dfrac{x+y}{6x}}+\sqrt{\dfrac{6x}{x+y}}=\dfrac{5}{2}$ y $xy-x-y=9$, halle el valor de $13x+9y$.

A) 105 B) 104 C) 103 D) 102 E) 106

RESOLUCIÓN :

Resolución de ecuaciones irracionales y cuadráticas.

El sistema de ecuaciones no lineales es

$$\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x+y}{6x}}+\sqrt{\dfrac{6x}{x+y}}=\dfrac{5}{2} \ldots\ldots\ldots\ldots(I) \\ xy-x-y=9 \ldots\ldots\ldots\ldots(II) \end{cases}$$

En la ecuación (I) observamos la adición de dos números recíprocos no negativos cuya suma es $5/2$; luego, uno de ellos es 2 y el otro $1/2$ o viceversa. Entonces, tenemos dos casos.

Primer caso :

$$\sqrt{\frac{x+y}{6x}}=2; \text{ con } x \text{ e } y \text{ enteros positivos.}$$

$$\Rightarrow \frac{x+y}{6x}=4 \Rightarrow y=23x$$

Analizamos la ecuación *(II)*.

$xy-x-y=9 \Rightarrow xy-x-y+1=10$

$\Rightarrow (x-1)(y-1)=10$, con x, y en Z^+.

Como $y=23x \Rightarrow (x-1)(23x-1)=10$

Puede observarse que ningún entero positivo verifica esta ecuación; por lo tanto, no hay solución entera positiva.

Segundo caso :

$$\sqrt{\frac{x+y}{6x}}=\frac{1}{2}; \text{ con } x \text{ e } y \text{ enteros positivos.}$$

$$\Rightarrow \frac{x+y}{6x}=\frac{1}{4} \Rightarrow x=2y$$

Reemplazamos la ecuación *(II)*.

$$xy-x-y=9 \Rightarrow 2y^2-2y-y=9;$$

$$\Rightarrow 2y^2-3y-9=0 \Rightarrow (2y+3)(y-3)=0$$

$$\Rightarrow 2y+3=0 \lor y-3=0$$

Como $y \in Z^+$, entonces, $y=3$.

En consecuencia, $x=2(3)=6$.

Luego : $13x+9y=13(6)+9(3)=105$

RPTA : "A"

PROBLEMA 17 :

Dada la ecuación $2\left|x+\frac{1}{2}\right|^2-7\left|x+\frac{1}{2}\right|=-6$, halle la suma de sus soluciones.

A) -1 B) -2 C) $-\frac{3}{4}$ D) $\frac{3}{4}$ E) $-\frac{11}{4}$

RESOLUCIÓN :

Factorizando la ecuación obtenemos :

$$2\left|x+\frac{1}{2}\right|^2-7\left|x+\frac{1}{2}\right|+6=0$$

$$2\left|x+\frac{1}{2}\right| \qquad -3$$

$$\left|x+\frac{1}{2}\right| \qquad -2$$

$$\Rightarrow \left(2\left|x+\frac{1}{2}\right|-3\right)\left(\left|x+\frac{1}{2}\right|-2\right)=0$$

$$\Rightarrow \left|x+\frac{1}{2}\right|=\frac{3}{2} \lor \left|x+\frac{1}{2}\right|=2$$

$$\Rightarrow x+\frac{1}{2}=\frac{3}{2} \lor x+\frac{1}{2}=-\frac{3}{2} \lor x+\frac{1}{2}=2$$

$$\lor x+\frac{1}{2}=-2$$

$$\Rightarrow x=1 \lor x=-2 \lor x=\frac{3}{2} \lor x=-\frac{5}{2}$$

Son las soluciones :

$$\Rightarrow C.S=\left\{-2;-\frac{5}{2};1;\frac{3}{2}\right\}$$

La suma de las soluciones es -2.

RPTA : "B"

PROBLEMA 18 :

Sea $P(x)=x^3-3ax^2-a^2x+3a^2$, donde $a>0$ y $Q(x)=-P(x-a)$. Diga cuál de las siguientes afirmaciones es correcta:

A) $Q(x) \geq P(x), \forall x<0$

B) $Q(x) \geq P(x), \forall x \in \langle 0; a\rangle$

C) $P(x) \geq Q(x), \forall x \in \langle a; 2a\rangle$

D) $Q(x) \geq P(x), \forall x \in \langle 2a; 3a\rangle$

E) $P(x) \geq Q(x), \forall x>3a$

RESOLUCIÓN :

* Factorización de polinomios y criterio de los puntos críticos.

$$P(x)=x^3-3ax^2-a^2x+3a^3$$

$$\Rightarrow P(x)=(x-a)^3-4a^2(x-a); a>0$$

Como $Q(x)=-P(x-a)$

$$\Rightarrow Q(x)=-[(x-2a)^3-4a^2(x-2a)]$$

Luego, si $R(x)=P(x)-Q(x)$, entonces

$$R(x)=(x-a)^3-4a^2(x-a)+(x-2a)^3-4a^2(x-2a)$$

$$\Rightarrow R(x)=(2x-3a)(x^2-3ax-a^2)$$

$$\Rightarrow R(x)=(2x-3a)\left(x-\left(\frac{3-\sqrt{13}}{2}\right)a\right)\times\left(x-\left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)a\right)$$

Si resolvemos $R(x) \leq 0$, obtenemos

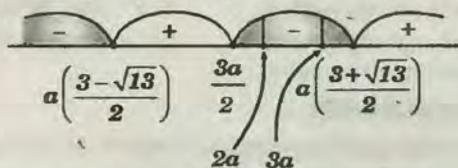
$$P(x)-Q(x) \leq 0 \Leftrightarrow Q(x) \geq P(x)$$

Luego

$$(2x-3a)\left(x-\left(\frac{3-\sqrt{13}}{2}\right)a\right)\left(x-\left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)a\right) \leq a$$

Los puntos críticos son

$$\frac{3}{2}a;\left(\frac{3-\sqrt{13}}{2}\right)a;\left(\frac{3-\sqrt{13}}{2}\right)a$$



Luego, $\forall x \in \langle 2a;3a\rangle$, entonces, se cumple que $Q(x) \geq P(x)$.

RPTA: "C"

PROBLEMA 19 :

Halle la suma de los valores de x que satisfacen la ecuación:

$$2|x+3|-3|x-6|+|x-15|=x+6$$

A) -3 B) -7 C) 10 D) -15 E) 18

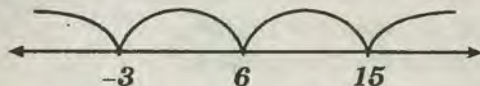
RESOLUCIÓN :

Para la resolución de la ecuación

$$2|x+3|-3|x-6|+|x-15|=x+6$$

se trabajará por zonas o casos.

Es decir:



Tenemos que: $2|x+3|-3|x-6|+|x-15|=x+6$

1er CASO:

$x<-3: -2x-6+3x-18-x+15=x+6$

de donde $x=-15$

2do CASO:

$-3\leq x<6: 2x+6+3x-18-x+15=x+6$

de donde $x=1$

3er CASO:

$6\leq x<15: 2x+6-3x+18-x+15=x+6$

de donde $x=11$

4° CASO:

$x\geq 15: 2x+6-3x+18+x-15=x+6$

de donde $x=3$ (no cumple la condición)

Los valores de x son: -15 ; 1 y 11. Luego, la suma de los valores de x es: -3.

RPTA : "A"

PROBLEMA 20 :

Si r y s son las raíces reales distintas de $x^2-px+q=0$; entonces la ecuación cuyas raíces son r^2 y s^2 es:

A) $x^2+(p^2-2q)x+q^2=0.$ B) $x^2-(2q-3p^2)x+q=0.$
C) $x^2-(2p-3q^2)x+p^2=0.$ D) $x^2-(2p-q^2)x+p=0.$
E) $x^2+(2q-p^2)x+q^2=0.$

RESOLUCIÓN :

Recordando el Teorema de Cardano, se sabe que en toda ecuación cuadrática de la forma:

$ax^2+bx+c=0;\ a\neq 0$ de raíces r y s

se cumple que: $r+s=-\dfrac{b}{a};\ rs=\dfrac{c}{a}$

Para reconstruir una ecuación cuadrática de raíces r y s, se aplica:

$$x^2-(r+s)x+rs=0$$

Dada la ecuación $x^2-px+q=0$ de raíces r y s. Por Teorema de Cardano:

$$r+s=p\ ;\ rs=q$$

De: $(r+s)^2=p^2$

$r^2+s^2+2rs=p^2$

$r^2+s^2=p^2-2q$

También: $(rs)^2=q^2$.

Se nos pide la ecuación cuadrática de raíces r^2 y s^2

Aplicando la propiedad se tiene:

$$x^2-(r^2+s^2)x+r^2s^2=0$$

Entonces:

$$x^2-(p^2-2q)x+q^2=0$$

Ordenando se tiene:

$$x^2+(2q-p^2)x+q^2=0$$

RPTA : "E"

PROBLEMA 21 :

La ecuaciones de segundo grado:

$x^2+bx+c=0$ y $x^2+b'x+c'=0$

tienen raíz común si :

$$(c-c')^2+(b-b')(bc'-b'c)=0$$

Determínese la condición para que las ecuaciones

$x^3+px+q=0$ y $x^2+x+r=0$

tengan una raíz común.

A) $(r-p-r)(r^2-pr+q)=0$
B) $(r+q)^2+(r-p-1)(r^2-pr+q)=0$
C) $(r+q)^2+(r^2-pr+q)=0$
D) $(r+q)^2+(r-p-1)=0$
E) $(r+q)^2-(r+p+1)(r^2-pr+q)=0$

RESOLUCIÓN :

Recuerde que si r es una raíz del polinomio $P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_n;\ a_0\neq 0,$ entonces :

$P(r)=0;$ es decir $a_0r^n+a_1r^{n-1}+...+a_n=0$

Como las ecuaciones $x^3+px+q=0$ y $x^2+x+r=0$ tienen una raíz en común que sea x_0, luego se tiene que: $x_0^3+px_0+q=0$ ....(I)

$x_0^2+x_0+r=0$ ....(II)

En *(II)*, multiplicando por x_0, tenemos que

$x_0^3+x_0^2+rx_0=0$ y $-x_0^2=-x_0-r$

$\leftrightarrow x_0^3-x_0-r+rx_0=0$

Luego se tiene el sistema :

$$\begin{cases} x_0^3+(r-1)x_0-r=0 \\ x_0^3+px_0+q=0 \end{cases}$$

Restando **(III)** y **(I)** , tenemos :

$(r-p-1)x_0 = r+q$

$$x_0=\frac{r+q}{r-p-1}$$

Reemplazando en **(II)**, se tiene :

$$\left(\frac{r+q}{r-p-1}\right)^2+\left(\frac{r+q}{r-p-1}\right)+r=0$$

Multiplicando por $(r-p-1)^2$, se tiene :

$(r+q)^2+(r+q)(r-p-1)+r(r-p-1)^2=0$

$(r+q)^2+(r-p-1)(r+q+r^2-rp-r)=0$

$(r+q)^2+(r-p-1)(r^2-pr+q)=0$

RPTA : "B"

PROBLEMA 22 :

Para que en la ecuación $px^2+10x-2=0$, una de las raíces sea $1/8$, el valor de p debe ser

A) 64 B) 48 C) 36 D) 69 E) $-1/3$

RESOLUCIÓN

Recuerde que dada la ecuación cuadrática $ax^2+bx+c=0$, si α es raíz de la ecuación, entonces reemplazamos $x=\alpha$. Luego se cumple lo siguiente : $a(\alpha)^2+b(\alpha)+c=0$

Se tiene la ecuación

$$px^2+10x-2=0...(I)$$

Como $x=\dfrac{1}{8}$ es raíz de la ecuación

Reemplazamos en **(I) :**

$$p\left(\frac{1}{8}\right)^2+10\left(\frac{1}{8}\right)-2=0\Rightarrow\frac{p}{64}+\frac{5}{4}-2=0$$

Por lo tanto, $p=48$

RPTA : "B"

PROBLEMA 23 :

Si las raíces de la ecuación $x^2-(a+d)x+ad-bc=0$ son $x_1=3$, $x_2=5$; y las raíces de la ecuación :

$y^2-(a^3+d^3+3abc+3bcd)y+(ad-bc)^3=0$ son y_1, y_2. Entonces el valor de $y_1^2y_2+y_1y_2^2$ es:

A)213 000 B)313 000 C)413 000 D)513 000 E)613 000

RESOLUCION :

En la ecuación $x^2-(a+d)x+ad-bc=0$, de raíces $x_1=3$ y $x_2=5$ aplicamos el teorema de Cardano :

$x_1+x_2=8=a+d$..............................(α)

$x_1x_2=15=ad-bc$

En la ecuación

$y^2-(a^3+d^3+3abc+3bcd)y+(ad-bc)^3=0$,de raíces y_1, y_2

Aplicamos el teorema de Cardano:

$y_1\times y_2=(ad-bc)^3=15^3=3375$

$y_1+y_2=a^3+d^3+3abc+3bcd$.................($\beta$)

De (α): $a+d=8$, elevamos al cubo

$$a^3+d^3+3ad(a+d)=8^3$$
$$a^3+d^3=8^3-3ad(a+d)$$

Reemplazamos en (β) :

$$y_1+y_2=8^3-3ad(a+d)+3bc(a+d)$$
$$=8^3-3\underbrace{(a+d)}_{8}\underbrace{[ad-bc]}_{15}$$
$$y_1+y_2=8^3-3(8)(15)=152$$

Nos piden :

$$y_1^2y_2+y_1y_2^2=y_1y_2(y_1+y_2)$$
$$y_1^2+y_1y_2^2=3375(152)=513000$$

$\Rightarrow$ El valor de $y_1^2y_2+y_1y_2^2$ es 513 000

RPTA: "D"

PROBLEMA 24 :

Si a, b y c son raíces de la ecuación:

$x^3-px^2+qx-r=0$ donde $r\neq 0$, halle el valor de $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}$

A) $\dfrac{q^2+2pr}{r^2}$ B) $\dfrac{q^2-2pr}{r^2}$ C) $\dfrac{q^2-2p}{r^2}$

D) $\dfrac{q^2+2p}{r^2}$ E) $\dfrac{q^2+2r}{p}$

RESOLUCIÓN :

De la ecuación cúbica $x^3-px^2+qx-r=0$, cuyas raíces son a, b y c, se cumple por el teorema de Cardano $a+b+c=p$

$$ab+bc+ac=q$$
$$abc=r$$

Luego, nos piden calcular el valor de :

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{(bc)^2+(ac)^2+(ab)^2}{(abc)^2}\dots(\alpha)$$

Por otro lado, sabemos que : $ab+bc+ac=q$

elevando al cuadrado

$(ab+bc+ac)^2=q^2$

$\Rightarrow (ab)^2+(bc)^2+(ac)^2+2((ab)(bc)+(bc)(ac)+(ab)(ac))=q^2$

$\Rightarrow (ab)^2+(bc)^2+(ac)^2+2(abc)(b+c+a)=q^2$

$\Rightarrow (ab)^2+(bc)^2+(ac)^2+2(r)(p)=q^2$

$(ab)^2+(bc)^2+(ac)^2=q^2-2rp\dots(\beta)$

Finalmente, reemplazamos (β) en (α)

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{q^2-2rp}{r^2}$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 25 :

Dado el sistema $2x-y+z=1$

$x+4y+2z=-1$

¿Cuál de las siguientes ecuaciones

I) $x-5y-z=2$

II) $3x+3y+3z=2$

III) $5x+2y+4z=1$

puede agregarse al sistema anterior de modo que el conjunto solución no varíe?

A) solo I B) I y II C) I y III D) solo II E) solo III

RESOLUCION :

Una característica de los sistemas es que si sumamos o restamos las ecuaciones en una cantidad finita no se altera el conjunto solución.

Del dato : $2x-y+z=1$

$x+4y+2z=-1$

- Al restar las ecuaciones

$$\begin{array}{l}2x-y+z=1\\ \underline{x+4y+2z=-1}\end{array}\Big)-$$

Se obtiene $x-5y-z=2$ (*)

- Al sumar las ecuaciones

$$\begin{array}{l}2x-y+z=1\\ \underline{x+4y+2z=-1}\end{array}\Big)+$$

Se obtiene $3x+3y+3z=0$ (**)

- Multiplicamos por **2** a la primera ecuación y sumamos con la segunda ecuación.

$$\begin{array}{l}4x-2y+2z=2\\ \underline{x+4y+2z=-1}\end{array}\Big)+$$

Se obtiene $5x+2y+4z=1$ (***)

Las ecuaciones que se obtienen (*), (**) y (***) son equivalentes a las primeras.

Entonces, podemos indicar que las proposiciones *I* y *III* del problema coinciden con (*) y (***); en cambio, *II* no coincide con (**); entonces, no podemos agregarlo al sistema.

$\Rightarrow$ Podemos agregar las ecuaciones *I* y *II*.

RPTA: "C"

PROBLEMA 26 :

Al resolver el sistema:

$$\begin{cases} xz=6 \\ (x+y)^x=1000 \\ (x+y)^z=1000 \end{cases}$$

el valor para y es:

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

RESOLUCIÓN :

Notar que $x, y, z > 0$.

De (β) se obtiene:

$$x\log(x+y)=\log 1000 \Rightarrow x\log(x+y)=3$$

De (γ) se obtiene:

$$z\log(x+y)=\log 100 \Rightarrow z\log(x+y)=2$$

Luego de (1) y (2):

$\frac{x}{z}=\frac{3}{2}$ entonces $x=3k; z=2k$

Reemplazando en (α) tenemos:

$$6k^2=6;\quad k>0 \Rightarrow k=1$$

entonces $x=3; z=2$

De (γ) se obtiene: $(3+y)^2=1000 \Rightarrow y=7$

RPTA: "C"

PROBLEMA 27 :

Halle el conjunto de valores reales de m para los cuales el sistema

$$\begin{cases} mx-2y=5 \\ -3x+(m-1)y=1 \end{cases}$$

tiene solución única.

A) $\mathbb{R}$ B) $\{-2;3\}$ C) $\{3\}$ D) $\mathbb{R}-\{-2;3\}$ E) $\{-2\}$

RESOLUCIÓN :

Aplicaremos la siguiente propiedad :

El sistema lineal :

$$\begin{cases} ax+by=c \\ dx+ey=f \end{cases}$$

tienen solución única si :

$$\frac{a}{b} \neq \frac{b}{e}$$

Se tiene el sistema siguiente :

$$\begin{cases} mx-2y=5 \\ -3x+(m-1)y=1 \end{cases}$$

Para que el sistema presente única solución, se cumple que

$$\frac{m}{-3} \neq \frac{-2}{m-1}, \text{ con } m \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow m(m-1) \neq 6$$

$$m^2-m-6 \neq 0$$

$$(m-3)(m+2) \neq 0$$

$$m \neq 3 \wedge m \neq -2$$

Luego, $m \in \mathbb{R}-\{-2;3\}$

• El conjunto de valores de m es $\mathbb{R}-\{-2;3\}$

RPTA : "D"

PROBLEMA 28 :

Si el par $(1;a)$ es solución del sistema:

$3x-y=k$

$5x+y=k-2$

Halle el valor de a.

A) 2 B) 5 C) –2 D) –5 E) 1

RESOLUCIÓN :

Recuerde que si $(a;b)$ es solución del sistema en variables x e y

$$\begin{cases} nx+ny=p \\ ax+\beta y=\theta \end{cases}$$

Al reemplazar simultáneamente en cada ecuación, esta se verifica también en forma simultánea.

Como el par $(1;a)$ es solución, es decir, $x=1 \wedge y=a$ del sistema

$$\begin{cases} 3x-y=k \\ 5x+a=k-2 \end{cases}$$

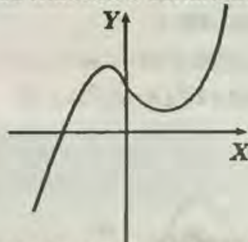
Reemplazamos: $\begin{cases} 3-a=k \text{ .... } (I) \\ 5+a=k-2 \text{ ....} (II) \end{cases}$

Restando (II) con (I) : $2+2a=-2$ de aquí $a=-2$

RPTA : "C"

PROBLEMA 29 :

Sea $p(x)$ un polinomio con coeficientes reales cuya gráfica se muestra a continuación:



Indique la sucesión correcta después de verificar la veracidad o falsedad de las siguientes proposiciones:

I) $p(x)$ tiene grado 3.

II) $p(x)$ tiene solo **2** raíces complejas.

III) Existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $p(x+c)$ no tiene raíces complejas.

A) VVV B) VVF C) VFF D) FFV E) FFF

RESOLUCIÓN :

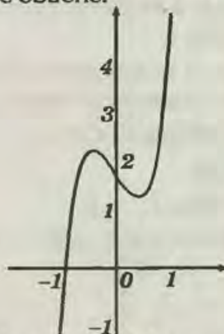
Consideremos la siguiente función polinomial.

$$p_{(x)}=x^5-x^4+2x^3+x^2-x+2$$

Si procedemos a factorizar en los reales, tenemos

$$p_{(x)}=(x^3+1)(x^2-x+2)$$

Al graficarlo se obtiene:



Por lo que podemos concluir que :

• x^3+1 tiene raíz real negativa $x=-1$ y **2** raíces complejas imaginarias.

• x^2-x+2 tiene **2** raíces complejas imaginarias.

Luego

Podemos afirmar que las proposiciones ***I*** y ***II*** son falsas.

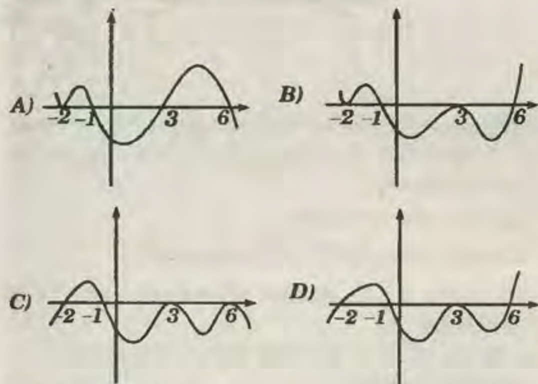
Ahora recordemos que $p(x+c)$ es un desplazamiento de la gráfica en el eje X, por lo

que no se altera el número de raíces reales. Entonces la proposición *III* es falsa.

RPTA : "E"

PROBLEMA 30 :

Determine la gráfica que corresponde a la función
$f(x)=(x+2)(x+1)^3(x-3)^4(x-6)^5$



RESOLUCIÓN :

Recuerde que:

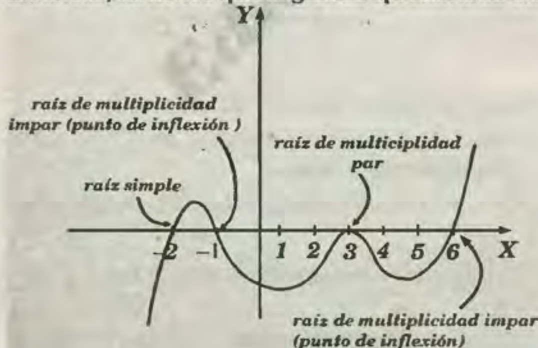
1ro) Las raíces reales de la función polinomial intersecan al eje X.

2do) Si la raíz es de multiplicidad impar o simple, interseca al eje X; si la raíz es de multiplicidad par, es tangente al eje X.

Se observa que: 6 es raíz de multiplicidad impar.
-1 es raíz de multiplicidad impar.
3 es raíz de multiplicidad par.
-2 es raíz simple.

Además si $x>6 \Rightarrow f_{(x)}>0$

Entonces, tenemos que la gráfica aproximada es.



RPTA : "D"

PROBLEMA 31 :

Halle el conjunto de los números reales x, tal que la suma del número x y su inverso multiplicativo sea mayor que 2.

A) $\{x\in R/x>0 \wedge x\neq 1\}$ B) $\{x\in R/x>1\}$ C) $\{x\in R/x<1\}$
D) $\{x\in R/x<-1\}$ E) $\{x\in R/x\neq 0\}$

RESOLUCIÓN :

De la condición :

$$x+\frac{1}{x}>2 \Rightarrow x+\frac{1}{x}-2>0$$

$$\Rightarrow \frac{x^2-2x+1}{x}>0 \Rightarrow \frac{(x-1)^2}{x}>0$$

De donde $(x-1)^2\geq 0 ; x\neq 1$

$$\Rightarrow \frac{1}{x}>0 \Rightarrow x>0 \Rightarrow \{x\in \mathbb{R}/x<0 \wedge x\neq 1\}$$

RPTA : "A"

PROBLEMA 32 :

Halle el mayor número real r que satisface la relación $r\leq x^2+4x+6$, $\forall x\in \mathbb{R}$.

A) -2 B) 2 C) 0 D) 1 E) -1

RESOLUCIÓN :

* Recuerde que :

Para todo real se cumple que $a^2\geq 0 \Rightarrow$ mínimo de a^2 es cero.

Si $M\leq f(x); M\in \mathbb{R}; \forall x\in \mathbb{R}$, entonces, el máximo valor de M es igual al mínimo valor de $f_{(x)}$. Nos piden el mayor número real r que cumpla que

$$r\leq \underbrace{x^2+4x+6}_{f_{(x)}};\forall x\in \mathbb{R}$$

Entonces, el mayor valor de r es el mínimo valor de $f_{(x)}$.

Procedemos a completar cuadrados en $f_{(x)}$ para luego minimizarla.

$$f_{(x)}=(x^2+4x+4)+2 \Rightarrow f_{(x)}=(x+2)^2+2$$

El mínimo valor de $f_{(x)}=\underbrace{(x+2)^2}_{\text{mínimo valor es 0}}+2=2$

Por lo tanto, el mayor valor de r es 2

RPTA : "B"

PROBLEMA 33 :

Halle el conjunto solución de la inecuación :

$$2^{x+4}(2^{x-4}-1)<2^x-16$$

A) $\langle 1 ; 16\rangle$ B) $\langle 0 ; 16\rangle$ C) $\langle 0 ; 4\rangle$ D) $\langle 2 ; 8\rangle$ E) $\langle 4 ; 64\rangle$

RESOLUCIÓN :

Según la teoría: para $b>1$ se cumple que:

$$b^m < b^n \leftrightarrow m < n$$

Dada la inecuación:

$$2^{x+4}(2^{x-4}-1) < 2^x - 16$$

Operando:

$$2^{2x} - 2^{x+4} < 2^x - 16$$

$$(2^x)^2 - 17\times 2^x + 16 < 0$$

$2^x \quad -16$

$2^x \quad -1$

Puntos críticos en la recta numérica:

$-\infty$ (+) 1 (−) 16 (+) $+\infty$

Entonces: $1<2^x<16 \Rightarrow 2^0<2^x<2^4$

Luego: $0<x<4$

Se concluye: $\langle 0;4\rangle$

RPTA : "C"

PROBLEMA 34 :

Halle el conjunto solución del sistema de inecuaciones: $\sqrt{1+x+2\sqrt{x}} \geq 1-\sqrt{x} \geq 0$

A) $[0,+\infty\rangle$ B) $\langle 0,+\infty\rangle$ C) $\langle 0,1\rangle$
D) $[0,1]$ E) $[1,+\infty\rangle$

RESOLUCIÓN :

1°) Hallaremos el conjunto de valores admisibles *(CVA)*.

2°) Efectuaremos operaciones para eliminar radicales.

Piden resolver: $\sqrt{1+x+2\sqrt{x}} \geq 1-\sqrt{x} \geq 0$

• Hallando el *CVA*: $x\geq 0 \Rightarrow CVA = R_0^+$

• La inecuación se puede escribir de la siguiente manera. $\sqrt{1+x+2\sqrt{x}} \geq 1-\sqrt{x} \wedge 1-\sqrt{x}\geq 0$

Completando cuadrados:

$$\sqrt{1^2+\sqrt{x}^2+2\sqrt{x}\times 1} \geq 1-\sqrt{x} \wedge 1\geq \sqrt{x}$$

$$\sqrt{(1+\sqrt{x})^2} \geq 1-\sqrt{x} \wedge 1\geq x$$

$$\Rightarrow 1+\sqrt{x} \geq 1-\sqrt{x} \wedge x\leq 1 \Rightarrow 2\sqrt{x}\geq 0 \wedge x\leq 1$$

$$\Rightarrow \quad x\geq 0 \wedge x\leq 1$$

$\Rightarrow$ intersectando (gráfico en la recta numérica: 0, 1)

RPTA : "D"

PROBLEMA 35 :

La tabla adjunta muestra parte del dominio y rango de una función lineal f.

x	2	5	8	b
$f(x)$	10	a	28	37

La suma de a y b es

A) 30 B) 25 C) 40 D) 45 E) 35

RESOLUCIÓN :

Se utiliza la ecuación general de una función lineal.

$$f(x)=mx+b;\ m\neq 0$$

Sea $f(x)=mx+b;\ m\neq 0$

Del dato :

x	2	5	8	b
$f(x)$	10	a	28	37

Tenemos

$$f(2)=10;\ f(8)=28;\ f(5)=a;\ f(b)=37$$

Reemplazando en $f_{(x)}=mx+b$, se tiene

$$f(2)=2m+b=10 \ldots\ldots\ldots\ldots(\alpha)$$

$$f(8)=8m+b=28 \ldots\ldots\ldots\ldots(\beta)$$

Restando $(\beta)-(\alpha)$:

$$6m=18 \Rightarrow m=3$$

Reemplazando en (α) :$b=4$

Luego, $f(x)=3x+4$

entonces :

$$f(5)=3(5)+4=a \Rightarrow a=19$$

$$f(b)=3b+4=37 \Rightarrow b=11$$

Por lo tanto, $a+b=30$.

RPTA : "A"

PROBLEMA 36 :

Halle el rango de la función $f_{(x)}=-x^2+2x$, sabiendo que su dominio es igual al conjuntos de los números reales.

A) $\langle -\infty;0]$ B) $\langle -\infty;1\rangle$ C) $\langle -\infty;\infty\rangle$ D) $[0;\infty\rangle$ E) $\langle -\infty;1]$

RESOLUCIÓN :

Se tiene la función $f_{(x)}=-x^2+2x;\ x\in R$.

Completamos el cuadrado.

$f_{(x)}=-(x^2-2x+1)+1 \Rightarrow f_{(x)}=-(x-1)^2+1$

Como x es un número real, entonces:

$$(x-1)^2 \geq 0$$

Luego: $-(x-1)^2 \leq 0$

Sumamos 1 en ambos miembros.

$$\underbrace{-(x-1)^2+1}_{f_{(x)}} \leq 1 \Rightarrow f_{(x)} \leq 1 \Rightarrow Ran(f)=\langle -\infty;1]$$

RPTA : "E"

PROBLEMA 37 :

Sean f y g dos funciones definidas por :

$$f_{(x)}=(\sqrt{2})^{3senx-1}; \text{ y } g_{(x)}=\left(\frac{1}{2}\right)^{3sen^2x-1}, \forall x \in R.$$

La suma del valor mínimo de f con el valor mínimo de g es igual a

A) $\frac{1}{2}$ B) $-\frac{1}{4}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $-\frac{1}{2}$ E) 1

RESOLUCIÓN :

Para su resolución debemos recortar las siguientes propiedades.

Si $b>1 \wedge n \leq x \leq m$, entonces, $b^n \leq b^x \leq b^m$.

Si $0<b<1 \wedge n \leq x \leq m$, entonces, $b^n \geq b^x \geq b^m$.

Además, debemos tener en cuenta que

$$-1 \leq senx \leq 1 \Rightarrow 0 \leq sen^2x \leq 1; \forall x \in R$$

• Se sabe que $-1 \leq sen\, x \leq 1; \forall x \in R$

Multiplicamos por 3 y restamos 1

$$-3-1 \leq 3\,senx-1 \leq 3-1$$

Como $\sqrt{2}$ es mayor que 1, entonces

$$\sqrt{2}^{-4} \leq \underbrace{\sqrt{2}^{3senx-1}} \leq \sqrt{2}^2$$

$$\frac{1}{4} \leq f_{(x)} \leq 2$$

Por lo tanto, el mínimo valor de f es $\frac{1}{4}$

• Además, $0 \leq sen^2x \leq 1$.

Multiplicamos por 3 y restamos 1.

$$3(0)-1 \leq 3sen^2x-1 \leq 3(1)-1$$

Como $\frac{1}{2}$ es menor que 1, entonces

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} \geq \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^{3sen^2x-1}}_{2 \geq g_{(x)} \geq \frac{1}{4}} \geq \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

Por lo tanto, el mínimo valor de g es $\frac{1}{4}$

• El mínimo valor de f sumado con el mínimo valor de g es $1/2$.

RPTA : "C"

PROBLEMA 38 :

La suma de las coordenadas de los puntos de intersección de las gráficas de las funciones f y g, definidas en el conjunto de los números reales

$$f_{(x)}=x^2-2x+3$$

$$g_{(x)}=\frac{x}{2}+2 \quad \text{es:}$$

A) 31/4 B) 31/3 C) 41/4 D) 41/3 E) 33/4

RESOLUCIÓN :

La teoría nos dice que los puntos de intersección de la gráfica de funciones $f_{(x)}$ y $g_{(x)}$ se obtienen igualándo: $f_{(x)}=g_{(x)}$

Se nos pide hallar la suma de coordenadas de los puntos de intersección de las gráficas de funciones f y g.

Según el enunciado:

$$f_{(x)}=x^2-2x+3; \; g_{(x)}=\frac{x}{2}+2$$

Como queremos los puntos de intersección, igualamos $f_{(x)}=g_{(x)}$, de tal modo que:

$$x^2-2x+3=\frac{x}{2}+2$$

$$2x^2-5x+2=0$$

$$x=2 \; ; \; x=\frac{1}{2}$$

Reemplazando en la función g, obtenemos:

$x=2 \; ; \; g_{(2)}=3$ $x=\frac{1}{2} \; ; \; g_{\left(\frac{1}{2}\right)}=\frac{9}{4}$

Luego los puntos de intersección son: $(2;3)$ y $\left(\frac{1}{2};\frac{9}{4}\right)$.

Finalmente, la suma de las coordenadas es:

$$2+3+\frac{1}{2}+\frac{9}{4}=\frac{31}{4}$$

RPTA : "A"

PROBLEMA 39 :

Si x_0 e y_0 son números reales tal que $x_0>y_0$ y satisfacen el sistema de ecuaciones :

$$\begin{cases} xy\,(x+y)=30 \\ x^3+y^3=35 \end{cases}$$

halle el valor de $x_0 - y_0$

A) 5 B) 2 C) 1 D) 3 E) 4

RESOLUCIÓN :

Dado el enunciado, tenemos el siguiente sistema:

$$\begin{cases} xy(x+y)=30 \\ x^{3}+y^{3}=35 \end{cases}$$

Recordemos la siguiente propiedad algebraica:

$$(x+y)^3=x^3+y^3+3xy(x+y)$$

Según el sistema, donde la solución es $(x_0;\, y_0)$:

$$\begin{cases} x_0y_0(x_0+y_0)=30 \text{.......}(I) \\ x_0^3+y_0^3=35 \text{..............}(II) \end{cases}$$

Operando $3(I)+(II)$ resulta:

$x_0^3+y_0^3+3x_0\,y_0(x_0+y_0)=35+3(30)$

$\Rightarrow (x_0+y_0)^3=125 \Rightarrow (x_0+y_0)=5$

De (I): $x_0y_0=6$

Se nos pide hallar: x_0-y_0

Para tal fin aplicaremos la identidad de Legendre:

$$(x_0+y_0)^2-(x_0-y_0)^2=4x_0y_0$$

Sustituyendo valores tenemos:

$$5^2-(x_0-y_0)^2=4(6) \Rightarrow (x_0-y_0)^2=1$$

ya que: $x_0>y_0 \Rightarrow x_0-y_0=1$

RPTA : "C"

PROBLEMA 40 :

El sistema de ecuaciones lineales

$x+y+z=2$

$ax+by+z=4a$

$\alpha x+\beta y+z=0$

tiene la solución única $(x_0,\, y_0,\, z_0)$ donde $y_0=0$. Halle la relación correcta entre a y α.

A) $4a\alpha=a+\alpha$ B) $2a\alpha=a+\alpha$ C) $8a\alpha=a+\alpha$

D) $a\alpha=2a+2\alpha$ E) $a\alpha=4a+4\alpha$

RESOLUCIÓN :

Resolviendo el sistema lineal , usando el método de reducción.

Como $y=0$, el sistema lineal se reduce a

$$\begin{cases} x+z=2 \text{..............................}(I) \\ ax+z=4a \text{.........................}(II) \\ \alpha x+z=0 \text{..............................}(III) \end{cases}$$

* Restamos (I) de (II) :

$(a-1)x=4a-2$ ....(IV)

* Restamos (I) de (III) :

$(\alpha-1)x=-2$ ....(V)

* Dividimos $(IV) \div (V)$:

$\dfrac{a-1}{\alpha-1}=1-2a \Rightarrow a-1=(\alpha-1)(1-2a)$

$\Rightarrow a-1=\alpha-1-2a\alpha+2a \Rightarrow 2a\alpha=a+\alpha$

RPTA : "B"

PROBLEMA 41 :

Si las ecuaciones $2\sqrt{x}+\dfrac{2}{\sqrt{x}}=5$ y $ax^2+bx+8=0$ tienen las mismas raíces, hallar $a+b$.

A) -34 B) -32 C) -30 D) -26 E) 24

RESOLUCIÓN :

Recordando que en la ecuación cuadrática $ax^2+bx+c=0$, cuyas raíces son x_1 y x_2, se cumple lo siguiente:

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a} \quad \wedge \quad x_1 \cdot x_2=\frac{c}{a}$$

Datos:

$2\sqrt{x}+\dfrac{2}{\sqrt{x}}=5$ ....(I)

$ax^2+bx+8=0$ ....(II)

Por dato sabemos que las ecuaciones (I) y (II) tienen raíces iguales.

De (I):

$$\frac{2\sqrt{x}^2+2}{\sqrt{x}}=5$$

$$2\sqrt{x}^2-5\sqrt{x}+2=0$$

$2\sqrt{x}$ ⟍⟋ -1

$\sqrt{x}$ ⟋⟍ -2

$(2\sqrt{x}-1)\times(\sqrt{x}-2)=0 \Rightarrow 2\sqrt{x}-1=0 \vee \sqrt{x}-2=0$

$$\Rightarrow x_1=\frac{1}{4} \quad \vee \quad x_2=4$$

En (II) la ecuación $ax^2+bx+8=0$ tiene raíces $x_1=\dfrac{1}{4}$; $x_2=4$ (dato)

Se cumple que:

* $x_1 \times x_2=\dfrac{8}{a} \Rightarrow \left(\dfrac{1}{4}\right)\times(4)=\dfrac{8}{a}$

$\Rightarrow a=8$

* $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a} \Rightarrow \dfrac{1}{4}+4=-\dfrac{b}{8}$

$\Rightarrow b=-34 \Rightarrow a+b=8+(-34)=-26$

Se concluye que el valor de $a+b$ es -26.

RPTA : "D"

PROBLEMA 42 :

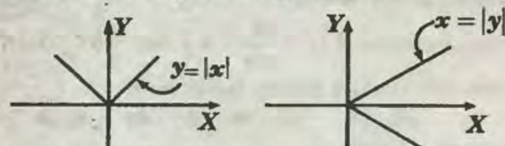
Halle el área de la región limitada por el gráfico de la relación.

$$R=\{(x;y)\in\mathbb{R}^2/x=|y|\vee x=5\}.$$

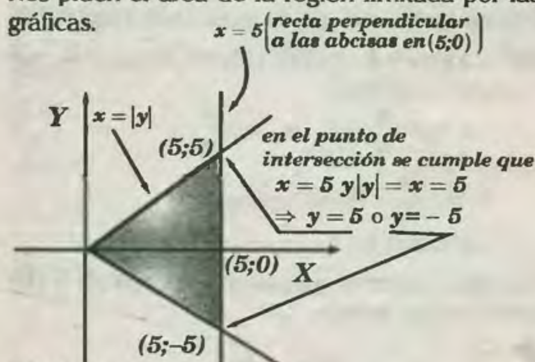
A)20 u^2 B)30u^2 C)25u^2 D)15u^2 E)12,5u^2

RESOLUCIÓN :

• Recuerde las siguientes gráficas.



Nos piden el área de la región limitada por las gráficas.



Finalmente

$$\underset{\text{sombreada}}{\text{Área de la región}}=\frac{\overset{\text{base}}{10}.\overset{\text{altura}}{5}}{2}=25u^2$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 43 :

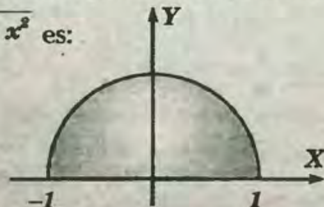
Halle el área de la región determinada por el gráfico de la relación

$$R=\{(x;y)\in\mathbb{R}^2/|x|\le y\le\sqrt{1-x^2}\}$$

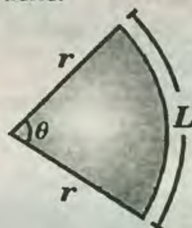
A) $\frac{\pi}{2}u^2$ B) πu^2 C) $4\pi u^2$ D) $\frac{\pi}{4}u^2$ E) $2\pi u^2$

RESOLUCIÓN :

• Recordando que la gráfica de la relación $y\le\sqrt{1-x^2}$ es:



Asimismo si se tiene:



$$A_{\substack{sector\\circular}}=\frac{1}{2}\theta r^2;\ \theta \text{ en radianes}$$

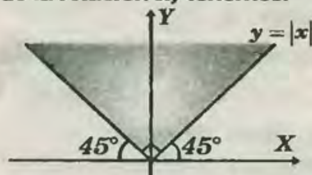
Tenemos la siguiente relación:

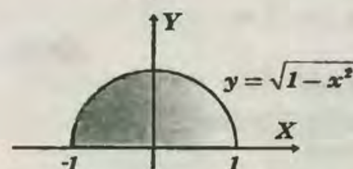
$$R=\left\{(x;y)\in\mathbb{R}^2/|x|\le y\le\sqrt{1-x^2}\right\}$$

Según la condición: $|x|\le y\le\sqrt{1-x^2}\Rightarrow$

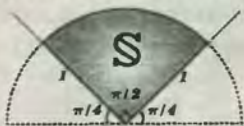
$$|x|\le y\ \wedge\ y\le\sqrt{1-x^2}$$

Estableciendo las relaciones anteriores para hallar el área de la relación R, tenemos:





La nueva región surgida de la intersección de ambas relaciones es representada por S.



Se nos pide hallar el área S.

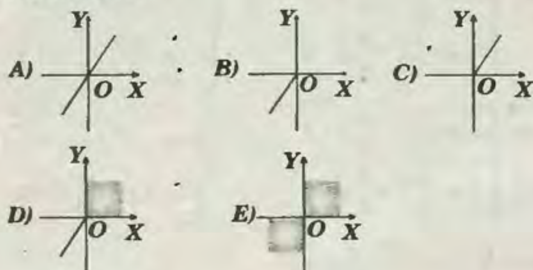
$$S=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)(1)^2u^2\Rightarrow\frac{\pi}{4}u^2$$

RPTA : "D"

PROBLEMA 44 :

Dada la siguiente relación: $y-\lfloor y\rfloor=x-\lfloor x\rfloor$; diga cuál de las siguientes gráficas es la que le

corresponde:



RESOLUCION :

En la resolución del problema, aplicamos la definición de valor absoluto.

$$|x|=\begin{cases} x;\ \text{si } x\geq 0 \\ -x;\ \text{si } x<0 \end{cases}$$

En el problema nos piden la gráfica de

$$y-|y|=x-|x| \qquad \text{....................(1)}$$

CASO 1 : $y\geq 0$

Reemplazamos en *1*

$$y-y=x-|x| \rightarrow x=|x| \rightarrow x\geq 0$$

cuya gráfica será

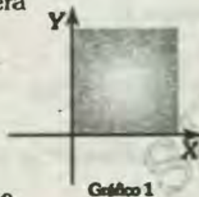


Gráfico 1

CASO 2 : $y<0$

Reemplazamos en *1*

$$y+y=x-|x| \rightarrow y=\frac{x-|x|}{2}$$

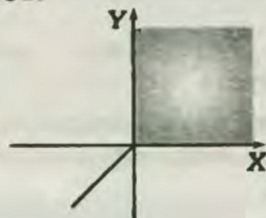
$$y=\begin{cases} 0;\text{si } x\geq 0 \\ x;\text{si } x<0 \end{cases}$$

pero como $y<0 \rightarrow y=x;\ x<0$

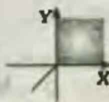


Gráfico 2

Luego, la gráfica pedida es la unión del gráfico *1* con el gráfico **2**.



$\Rightarrow$ La gráfica de la relación es



RPTA: "D"

PROBLEMA 45 :

Sea *f* una función tal que:

$f(x-2\sqrt{x})=2(x-4\sqrt{x}),\ x\geq 4$, entonces:

$Dom(f)\cap Ran(f)$ es igual a:

A) $[0;\infty\rangle$ B) $[1;\infty\rangle$ C) $\langle 0;\infty\rangle$ D) $[4;\infty\rangle$ E) $\langle 1;\infty\rangle$

RESOLUCIÓN :

- Composición de funciones
- Cálculo del dominio y rango

$f(x-2\sqrt{x})=2(x-4\sqrt{x});\ x\geq 4$

$=f(x-2\sqrt{x}+1-1)=2(x-4\sqrt{x}+4-4)$

$=f((\sqrt{x}-1)^2-1)=2((\sqrt{x}-2)^2-4))$

$=f((\sqrt{x}-1)^2-1)=2((\sqrt{x}-1-1)^2-4))$

La $\sqrt{x}-1=a$ y obtenemos

$$f(a^2-1)=2((a-1)^2-4) \text{ ....(*)}$$

Como $x\geq 4\Rightarrow\sqrt{x}\geq 2\Rightarrow\sqrt{x}-1\geq 1$

$$\Rightarrow a\geq 1\Rightarrow a^2\geq 1\Rightarrow a^2-1\geq 0$$

Luego de (*) se tiene lo siguiente:

$$Domf=[0;+\infty\rangle$$

También $a\geq 1\Rightarrow(a-1)\geq 0\Rightarrow(a-1)^2\geq 0$

$$\Rightarrow(a-1)^2-4\geq -4\Rightarrow 2((a-1)^2-4)\geq -8$$

luego de (*) se tiene lo siguiente

$$Ranf=[-8;+\infty\rangle$$

RPTA: "A"

PROBLEMA 46 :

Sean las funciones:

$$f_{(x)}=\sqrt[4]{|x|-8}-\sqrt{64-x^2}$$

$$g_{(x)}=(x^3)sgn(x),$$

donde *sgn* es la función signo.

Luego, el número de elementos de $\{(x,f(g(x)))\}$ es:

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

RESOLUCIÓN :

Nos piden el número de elementos de $\{x;f(g(x))\}$.

Para eso, analizaremos cada una de las funciones f y g. Veamos:

- $f_{(x)}=\sqrt[4]{|x|-8}-\sqrt{64-x^2}$

Determinamos su dominio: *Domf=CVA*

$|x|-8\geq 0\ \wedge\ 64-x^2\geq 0$

$\leftrightarrow |x|\geq 8\ \wedge\ 64\geq x^2$

$\leftrightarrow (x\geq 8\vee x\leq -8)\wedge(-8\leq x\leq 8)$

$\leftrightarrow x=8;-8$

Entonces la función $f=\{(8;0);(-8;0)\}$

- $g_{(x)}=x^3\times sgn(x)$

Entonces:

$$g_{(x)}=\begin{cases}x^3;x>0\\0;x=0\\-x^3;x<0\end{cases}$$

Ahora veamos la composición $(f\circ g)$.

1°) $D(f\circ g)=\{x/x\in Dg\ \wedge\ g_{(x)}\in Df\}$

$=\{x/x\in Dg\wedge g_{(x)}\in\{8;-8\}\}$

$\Rightarrow D(f\circ g)=\underbrace{\{x/x\in\mathbb{R}^+\wedge x^3\in\{8;-8\}\}}_{\{2\}}\vee\underbrace{\{x/x\in\mathbb{R}^-\wedge -x^3\in\{8;-8\}\}}_{\{-2\}}\vee\underbrace{\{x/x=0\wedge 0\in\{8;-8\}\}}_{\phi}$

$\Rightarrow D(f\circ g)=\{2;-2\}$

2°) Hallamos:

$(f\circ g)_{(x)}=f(g_{(x)});\ \forall\ x\in D(f\circ g)$

$x=2:\ (f\circ g)_{(2)}=f\left(g_{(2)}\right)=f_{(8)}=0$

$x=2:\ (f\circ g)_{(-2)}=f\left(g_{(-2)}\right)=f_{(8)}=0$

$\Rightarrow\ (f\circ g)=\{(2;0);(-2;0)\}$

RPTA : "C"

PROBLEMA 47 :

Dadas las funciones $f,g:\mathbb{R}\Rightarrow\mathbb{R}$, definidas por $f(x)=|x-2|+2$ y $g(x)=-(x^2+2)$. Determine $f+g$.

A) $\begin{cases}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{7}{4},x\geq 2\\-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{4},x<2\end{cases}$ B) $\begin{cases}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4},x\geq 2\\-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4},x<2\end{cases}$

C) $\begin{cases}\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{9}{4},x\geq 2\\\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4},x<2\end{cases}$ D) $\begin{cases}(x-1)^2+\frac{7}{4},x\geq 2\\-(x+1)^2-\frac{1}{4},x<2\end{cases}$

E) $\begin{cases}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4},x\geq 2\\-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4},x<2\end{cases}$

RESOLUCIÓN :

Recuerde

Sean las funciones

$f:A\Rightarrow B$ y $g:C\Rightarrow D$

Se define : $(f+g)_{(x)}=f_{(x)}+g_{(x)}$

$Dom(f+g)=Domf\cap Domg$

* Nos piden determinar $f+g$.

Datos :

$f_{(x)}=|x-2|+2;\ Domf=\mathbb{R}$

$g_{(x)}=-x^2-2;\ Domg=\mathbb{R}$

Entonces : $(f+g)_{(x)}=f_{(x)}+g_{(x)}$

Reemplazando los datos: $(f+g)_{(x)}=|x-2|-x^2$

y además :

$Dom(f+g)=Domf\cap Domg=\mathbb{R}\cap\mathbb{R}=\mathbb{R}$

Redefiniendo la función :

$$(f+g)_{(x)}=\begin{cases}-x^2+x-2;x\geq 2\\-x^2-x+2;x<2\end{cases}$$

Completando cuadrados, obtenemos lo siguiente.

$$(f+g)_{(x)}=\begin{cases}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{7}{4};x\geq 2\\-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{4};x<2\end{cases}$$

RPTA : "A"

PROBLEMA 48 :

La raíz cúbica del número complejo $z=-2$ de mayor argumento principal, es también raíz 18-ésima de otro complejo $u=a+bi$ con a y b número reales. Determine $a+b$.

A) $2^5(\sqrt{3}+1)$ B) 2^6 C) $2^7(\sqrt{3}+1)$ D) 2^8 E) 2^9

RESOLUCIÓN :

• Forma polar y radicación de números complejos

$$\sqrt[3]{z}=\sqrt[3]{-2}=\sqrt[3]{2}.\sqrt[3]{-1}$$

Pero

$$\sqrt[3]{-1}=\begin{cases}\cos\frac{\pi}{3}+isen\frac{\pi}{3}\\ \cos\pi+isen\pi\\ \cos\frac{5\pi}{3}+isen\frac{5\pi}{3}\text{(mayorargumento principal)}\end{cases}$$

Entonces , la raiz de $z=-2$ de mayor argumneto es

$$\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{5\pi}{3}+isen\frac{5\pi}{3}\right)$$

Por dato sabemos que :

$$\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{5\pi}{3}+isen\frac{5\pi}{3}\right)=\sqrt[18]{a+bi}$$

$\Leftrightarrow 2^6(\cos 30\pi+isen30\pi)=a+bi$

$\Leftrightarrow 2^6(1+i.0)=a+bi \Leftrightarrow 2^6+0.i=a+bi$

$\Leftrightarrow a=2^6 \wedge b=0 \Rightarrow a+b=2^6$

RPTA: "B"

PROBLEMA 49 :

Al resolver el sistema $\begin{cases}|z-3i|=2\\ y-x^2=1\end{cases}$ donde $z=x+iy$ es un número complejo; la suma de las ordenadas de los puntos solución es:

A) 9 B) 8 C) 7 D) 6 E) 5

RESOLUCIÓN :

Para dar respuesta a este problema, debemos recordar el módulo de un complejo y relacionarlo con la ecuación de una circunferencia, finalmente resolveremos una ecuación cuadrática.

Dado el sistema:

$$\begin{cases}|z-3i|=2\ ...(I)\\ y-x^2=1\ ...\ (II)\end{cases}$$

La ecuación *(I)* representa una circunferencia con centro en *(0; 3)* y radio $r=2$.

Como $z=x+yi$ <> $(x;y)$, la ecuación equivalente a *I* es $x^2+(y-3)^2=2^2$....(III)

De *(II)* obtenemos $x^2=y-1$, reemplazamos en *(III)* y obtenemos $y-1+(y-3)^2=4$.

$\Rightarrow y^2-5y+4=0 \Rightarrow (y-1)(y-4)=0$

$\Rightarrow y_1=1 \vee y_2=4$

Reemplazando *(II)* :

$$CS=\left\{(0;1),\left(\sqrt{3};4\right),\left(-\sqrt{3};4\right)\right\}$$

Piden : $1+4+4=9$

RPTA : "A"

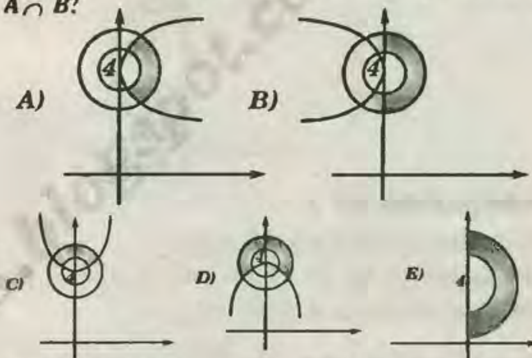
PROBLEMA 50 :

Sean los números complejos $z=x+iy$ y $u=\sqrt{x}+iy,\ x>0$ y los conjuntos

$A=\{z/1\le|\bar{z}+4i|\le 2\}$,

$B=\{u=\sqrt{x}-iy\ /\ |u+4i|\ge 0\}$

¿Cuál de las siguientes gráficas representa a $A\cap B$?



RESOLUCIÓN :

En la resolución de este problema utilizaremos algunas propiedades de módulo de un complejo y luego graficaremos regiones generadas por conjuntos cuyos elementos son números complejos.

Hallamos las regiones determinadas por los conjuntos *A* y *B*.

$A=\{z=x+yi/\ 1\le|\bar{z}+4i|\le 2\}$

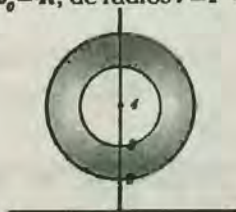
$1\le|\bar{z}+4i|\le 2$

$\leftrightarrow 1\le|\overline{\bar{z}+4i}|\le 2$

$\leftrightarrow 1\le|z-4i|\le 2$

Se observa que el conjunto *A* es una corona centrada en $z_0=4i$, de radios $r=1 \wedge R=2$.

Es decir :



$B=\{u=\sqrt{x}-yi\ /|u+4i|\geq 0 \wedge x>0\}$

Como $|u+4i|\geq 0$ siempre se cumple $\wedge\ x>0$, entonces, B es un semiplano de puntos $(x;y)$, tal que $x>0$.

Es decir :



Por lo tanto, $A\cap B$ es :



RPTA : "E"

PROBLEMA 51 :

Dadas las siguiente proposiciones:

I) Las raíces de $e^{in}-1=0$, pertenecen a un polígono regular de n lados, $\forall n\in\mathbb{N}$

II) Si $e^{i\theta}=a+bi$ y $\theta\in,\left\langle\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right\rangle$, entonces

$$a\in\left\langle-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right\rangle \text{ y } b\in\left\langle\frac{\sqrt{2}}{2};1\right\rangle.$$

III) Dados $\alpha,\beta\in\langle 0,2\pi\rangle$, tales que $\beta>\alpha$, si $\cos(\alpha)=\cos(\beta)$, entonces $e^{i(\alpha+\beta)}=1$.

Indique cuáles son correctas.

A)solo I B)solo II C)solo III D)I y II E)II y III

RESOLUCION :

En el problema aplicaremos la definición de exponencial compleja.

Veamos cada una de las afirmaciones:

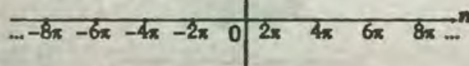
I) FALSO :

Resolvemos

$e^{in}-1=0$ (considerando $e=2,718281...$

$e^{in}=e^{2k\pi i}$ y $i=\sqrt{1})$

$\rightarrow n=2k\pi;\ k\in Z$



Las soluciones de la ecuación no forman un polígono de n lados.

II) FALSO :

Veamos un contraejemplo:

De $\theta\in\left\langle\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right\rangle$ tomamos $\theta=\frac{\pi}{2}$

entonces, $a=0$ y $b=1\notin\left\langle\frac{\sqrt{2}}{2};1\right\rangle$

III) VERDADERO :

Como $\alpha,\beta\in\langle 0;2\pi\rangle;\ \beta>\alpha$

además, $Cos\alpha=Cos\beta$; entonces, $\alpha+\beta=2\pi$ de donde $e^{i(\alpha+\beta)}=e^{i(2\pi)}=1$

$\Rightarrow$ La proposición verdadera es solo *III*.

RPTA: "C"

PROBLEMA 52 :

Indique la secuencia correcta después de determinar si la proposición es verdadera *(V)* o falsa *(F)*:

I) La composición de una función par con una función impar es una función par.

II) El producto de dos funciones impares es una función impar.

III) La suma de dos funciones pares es una función par.

A) VFV B) VVV C) FVV D) FFV E) VFF

RESOLUCIÓN :

Teniendo en cuenta las siguientes definiciones :

* f es una función par si y solo si

$f_{(x)}=f_{(-x)};\ \forall\ x;-x\in Dom(f)$

* f es una función impar si y solo si

$f_{(-x)}=-f_{(x)};\forall\ x;-x\in Dom(f)$

I) VERDADERO :

La composición de una función par con una impar es una función par.

Efectivamente, sean f y g funciones par e impar, respectivamente, teniéndose:

$f_{(x)}=f_{(-x)}\quad \forall\ x;-x\in Dom(f)$

$g_{(-x)}=-g_{(x)}\quad \forall\ x;-x\in Dom(g)$

Entonces : $(f\circ g)_{(-x)}=f_{(g(-x))}$

$=f_{(-g(x))}$, ya que g es impar

$=f_{(g(x))}$, ya que f es par

$=(f\circ g)_{(x)}$

Luego, $f \circ g$ es una función par.

II] FALSO :

El producto de dos funciones impares es una función impar.

Teniendo en cuenta el siguiente contraejemplo:

Siendo $f_{(x)}=x^3$ y $g_{(x)}=x^5$ dos funciones impares, ya que :

$f_{(-x)}=(-x)^3=-(x^3)=-f_{(x)}$

$g_{(-x)}=(-x)^5=-(x^5)=-g(x)$

Pero : $(f\cdot g)_{(x)}=f_{(x)}\cdot g_{(x)} \Rightarrow x^3\cdot x^5 \Rightarrow x^8$

es par, ya que : $(f\cdot g)_{(x)}=x^8=(-x)^8=(f\cdot g)_{(-x)}$

Sintetizando, tenemos dos funciones impares cuyo producto es una función par.

III] VERDADERO :

La suma de dos funciones pares es una función par.

Efectivamente, siendo f y g dos funciones pares, tenemos:

$(f+g)_{(x)}=f_{(x)}+g_{(x)}$

$=f_{(-x)}+g_{(-x)}$, pues f y g son pares

$=(f+g)_{(-x)}$

Se concluye que $(f+g)$ es una función par.

RPTA : "A"

PROBLEMA 53 :

Si $P_{(x)}=x^3+ax^2-x+b-6$ es divisible entre x^2-1 y la suma de los valores de x que cumplen $P_{(x)}=0$ es -4.

Calcule el producto de a y b.

A) – 7 B) – 4 C) 4 D) 5 E) 8

RESOLUCIÓN :

Recordando que si $P_{(x)}$ es divisible por $(M_{(x)}\,.\,N_{(x)})$ con $°[P_{(x)}]\geq °[M_{(x)}.\,N_{(x)}]$

$\Rightarrow P_{(x)}$ es divisible por $M_{(x)}$ y divisible por $N_{(x)}$

Ya que: $P_{(x)}=x^3+ax^2-x+b-6$

es divisible por : $x^2-1=(x+1)(x-1)$

$\Rightarrow P_{(x)}$ es divisible por $x-1 \Rightarrow \dfrac{P_{(x)}}{x-1}$ es una division exacta

$\Rightarrow P_{(1)}=0$ (por teorema del resto)

$\Rightarrow 1+a-1+b-6=0 \Rightarrow a+b=6$...............(I)

También, para : $P_{(x)}=1x^3+ax^2-x+b=0$

sabemos por dato que la suma de los valores de x es -4.

$\Rightarrow \underbrace{\text{suma de las raíces}}_{\text{por Cardano}}=-4$

$\leftrightarrow -a=-4 \leftrightarrow a=4$

Reemplazamos en (I): $b=2 \Rightarrow a\times b=8$ **RPTA : "E"**

PROBLEMA 54 :

Si $2(4^x)-3(2^x)-20=0$, halle el valor de $Log_2(4^x)$.

A) 2 B) 3 C) 4 D) 8 E) 16

RESOLUCION :

Según las condiciones del enunciado, recordemos:

- La factorización por aspa simple y
- La propiedad de logaritmos

$$Log_b a^n=nLog_b a;\ a>0;\ b>0\wedge b\neq 1$$

Factorizando la ecuación:

$2(2^x)^2-3(2x)-20=0$

$2(2^x)$ ⟍⟋ $+5$

(2^x) ⟋⟍ -4

$\Rightarrow (\underbrace{2(2^x)+5}_{(+)})(\underbrace{2^x-4}_{=0})=0$

$\Rightarrow 2^x=4$

Además se nos pide:

$Log_2(4^x)=Log_2(2^x)^2=Log_2 4^2=Log_2 2^4=4Log_2 2=4$

RPTA : "C"

PROBLEMA 55 :

Sea $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función definida por

$$f_{(x)}=\frac{1}{2}Log_a a\left(\frac{1+x}{1-x}\right)+\frac{1}{2}Log_a a\left(\frac{1+4x}{1+x}\right)+\frac{1}{2}Log_a a\left(\frac{1-x}{1+4x}\right)$$

donde $a>0$ y $a\neq 1$, cuyo dominio es un intervalo de la forma $\left\langle -\frac{1}{p};q\right\rangle$. Halle $p-q$.

A) 5 B) – 2 C) 1 D) 3 E) 4

RESOLUCIÓN :

Recordando que la función logaritmo $f_{(x)}=Log_b x$ queda bien establecida si $x>0\wedge b>0\wedge b\neq 1$

Queda bien establecida la función $f_{(x)}$, si:

$$a\left(\frac{1+x}{1-x}\right)>0\wedge a\left(\frac{1+4x}{1+x}\right)>0\wedge a\left(\frac{1-x}{1+4x}\right)>0$$

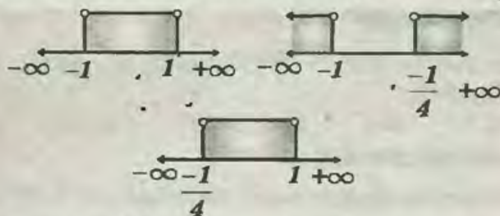
Se cancela a porque $a>0$.

$$\frac{1+x}{1-x}>0\wedge\frac{1+4x}{1+x}>0\wedge\frac{1-x}{1+4x}>0$$

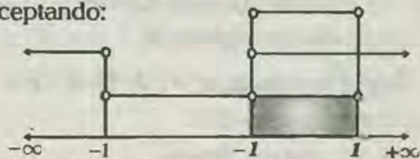
$\leftrightarrow (1+x)(1-x)>0\wedge(1+4x)(1+x)>0(1-x)(1+4x)>0$

$x\neq 1;1 \quad x\neq\frac{-1}{4};1 \quad x\neq 1;\frac{-1}{4}$

Empleando en cada inecuación puntos críticos, tenemos:



Interceptando:



$$\Rightarrow Dom(f)=\left\langle \frac{-1}{4};1\right\rangle=\left\langle \frac{-1}{p};q\right\rangle \text{ (enunciado)}$$

$\Rightarrow p=4 \wedge q=1 \Rightarrow p-q=3$

RPTA : "D"

PROBLEMA 56 :

Si $f: R \to R$ es una función cuadrática que satisface las condiciones $f_{(1)}=2;\ f_{(-1)}=-2$ y $f_{(2)}=-4$, halle $g_{(x)}=f_{(x+1)}+f_{(x-1)}$.

A) $g_{(x)}=-\frac{16}{3}x^2+4x+1$ B) $g_{(x)}=-\frac{16}{3}x^2+4x$

C) $g_{(x)}=\frac{8}{3}x^2-4x$ D) $g_{(x)}=-\frac{16}{3}x^2+4x-1$

E) $g_{(x)}=-\frac{8}{3}x^2+2x+\frac{8}{3}$

RESOLUCION :

* Recordando la forma general de la función cuadrática: $f_{(x)}=ax^2+bx+c;\ a\neq 0$.

Ya que $f_{(x)}=ax^2+bx+c;\ a\neq 0$

Se remplaza los datos:

$f_{(1)}=a+b+c=2$

$f_{(-1)}=a-b+c=-2$

$f_{(2)}=4a+2b+c=-4$

Al resolver el sistema, tenemos:

$$b=2;\ c=\frac{8}{3};\ a=-\frac{8}{3}$$

* Nos piden hallar:

$g_{(x)}=f_{(x+1)}+f_{(x-1)}$

$\Rightarrow g_{(x)}=a(x+1)^2+b(x+1)+c+a(x-1)^2+b(x-1)+c$

$\Rightarrow g_{(x)}=2a(x^2+1)+2bx+2c$

$\Rightarrow g_{(x)}=-\frac{16}{3}(x^2+1)+4x+\frac{16}{3}=-\frac{16}{3}x^2+4x$

$\Rightarrow g_{(x)}=-\frac{16}{3}x^2+4x$

RPTA : "B"

PROBLEMA 57 :

Sean A,B conjuntos no vacíos. Señale la alternativa que presenta la secuencia correcta, después de determinar si la proposición es verdadera *(V)* o falsa *(F)*.

I) Si

$(x,y);(x,z)\in f=\{(x,y)\ /x\in A,\ y\in B\}\subset A\times B$ implica que $y=z$, entonces podemos decir que f es un función de A en B.

II) Toda función sobreyectiva $f: A\to B$ es inyectiva.

III) Toda función inyectiva $f: A\to B$ es sobreyectiva.

A) VVV B) VFV C) VFF D) FFV E) FFF

RESOLUCION :

Para determinar el valor de verdad recordemos la definición de función.

f es una función de A en B

$$\leftrightarrow \forall x\in A, \exists'\ y\in B \text{ tal que } (x;y)\in f$$

I] VERDADERO :

Pues si $(x;y)\in f \wedge (x;z)\in f$ implica $y=z$. Significa que dos pares ordenados diferentes de f no tienen la misma primera componente. Por lo tanto, f es una función.

II] FALSO :

Pues tenemos la siguiente función constante

$$f: R\to\{k\}, \text{ para } f_{(x)}=k.$$

f es sobreyectiva, pero no es inyectiva.

III] FALSO :

Pues si tenemos la función lineal

$$f:[0;5]\to[0;6] \text{ tal que } f_{(x)}=x$$

f es inyectiva, sin embargo, no es sobreyectiva, pues el $Ranf=[0;5]$ es diferente al conjunto de llegada $B=[0;6]$.

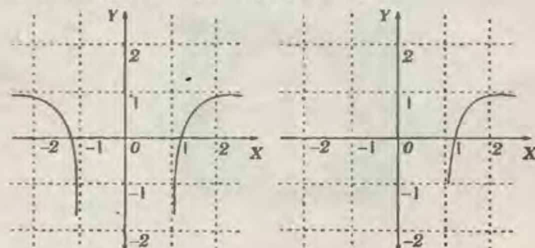
$\Rightarrow$ La secuencia correcta es **VFF**.

RPTA: "C"

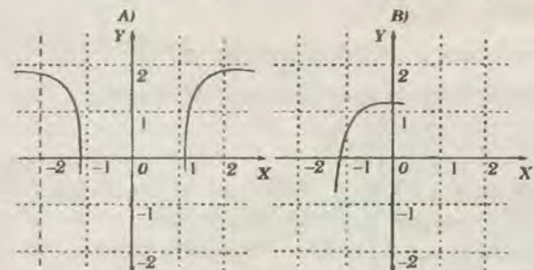
PROBLEMA 58:

Señale cuál de las figuras representa adecuadamente la gráfica de la función

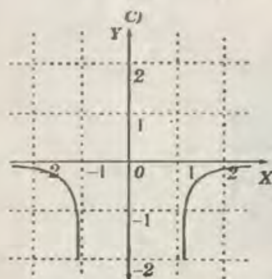
$f(x)=Log(|x|+1)+Log(|x|-1)$



A) B)



C) D)



E)

RESOLUCIÓN :

Recuerde que f es una función par si y solo si $f_{(x)}=f_{(-x)}$; $\forall -x \wedge x \in Dom(f)$, y que la gráfica de una función par es simétrica con respecto al eje Y.

I). La existencia de la función está garantizada cuando $|x|-1>0$.

$$\Rightarrow |x|>1 \Rightarrow x \in \langle -\infty;-1\rangle \cup \langle 1;+\infty\rangle$$

Luego, $Dom(f)=\langle -\infty;-1\rangle \cup \langle 1;+\infty\rangle$

II). La función es par.

En efecto, sea $x \in Dom(f)$

$\Rightarrow f_{(x)}=Log(|x|+1)+Log(|x|-1)$

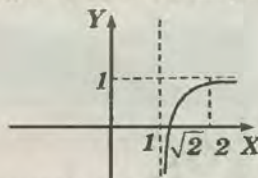
$=Log(|-x|+1)+Log(|-x|-1)=f_{(-x)}$

III) Si $x \in \langle 1;+\infty\rangle \Rightarrow f_{(x)}=Log(x+1)+Log(x-1)$

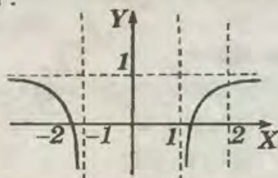
$=Log(x^2-1)$

Además, $x=1$ es una asíntota y $f_{(\sqrt{2})}=0$ también es fácil de ver que $f_{(2)}<1$.

Entonces, la gráfica de f es dada por.



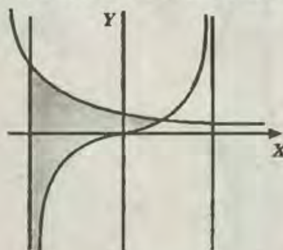
* Finalmente, como la función es par, su gráfica es dada por :



RPTA : "A"

PROBLEMA 59 :

La región sombreada de la figura mostrada, representa al conjunto solución de un sistema de inecuaciones. Determine dicho sistema.



A) $\begin{cases} y+e^{-x}\le 0 \\ y-\tan x \ge 0 \end{cases}$

B) $\begin{cases} y-e^{-x}\ge 0 \\ y-\tan x \le 0 \\ x\le \frac{\pi}{2} \end{cases}$

C) $\begin{cases} y+e^{-x}\le 0 \\ y+\tan x \ge 0 \\ x\ge -\frac{\pi}{2} \end{cases}$

D) $\begin{cases} y-e^{-x}\ge 0 \\ y+\tan x \le 0 \end{cases}$

E) $\begin{cases} y-e^{-x}\le 0 \\ y-\tan x \ge 0 \\ x\ge -\frac{\pi}{2} \end{cases}$

RESOLUCIÓN :

* Recordando las gráficas de las funciones :

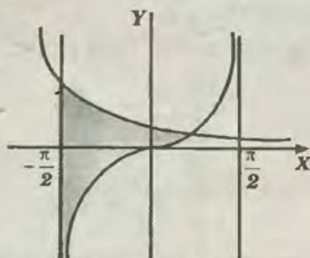
$f(x)=e^{-x}$

$g_{(x)}=\tan x; -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$

* Trazando la gráfica de la región:

$$R = \left\{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, y \le e^{-x} \wedge y \ge \tan x \;;\; x \ge -\frac{\pi}{2}\right\}$$

tenemos:



el cual corresponde a la gráfica mostrada.

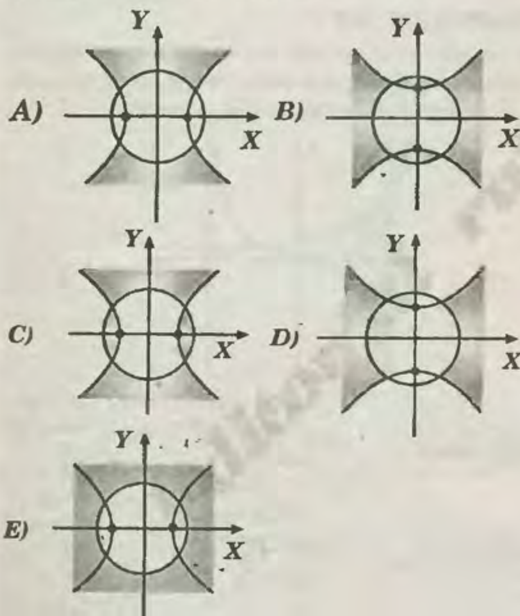
RPTA : "E"

PROBLEMA 60 :

El gráfico del conjunto solución del sistema de inecuaciones $x^2+y^2 \ge 4$

$x^2 - y^2 \le 1$

es representado por la región sombreada:



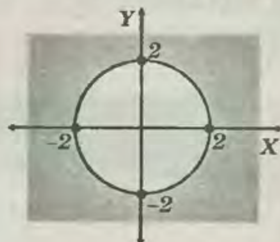
RESOLUCIÓN :

La intersección de cada desigualdad nos da el conjunto solución:

Graficamos *(I)*:

Graficaremos la siguiente igualdad: $x^2+y^2=2^2$

Observamos que la ecuación de la circunferencia de centro $C=(0;0)$, radio $r=2$ y como $y^2 \ge 4 - x^2$ se sombreará fuera de la circunferencia.



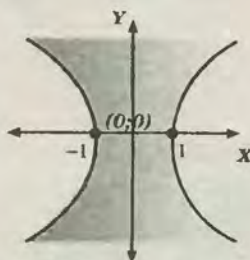
Graficamos *(II)*:

Graficaremos la siguiente igualdad: $x^2 - y^2=1$

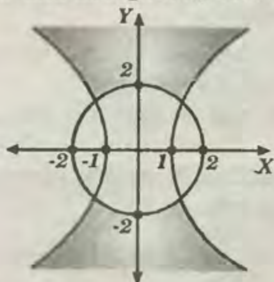
Observamos la ecuación de la hipérbola.

$$\frac{x^2}{1^2} - \frac{y^2}{1^2} = 1$$

Antes de sombrear, debemos observar que el $(0;0)$ cumpla la inecuación; solo entonces sombreamos la zona que está entre las ramas de la hipérbola.



Intersecando ambas regiones, tenemos:



RPTA : "A"

PROBLEMA 61 :

Halle el producto de los valores de x que satisfacen la ecuación

$$Log^2{}_2x - 5Log_2x + 6 = 0$$

A) 12 B) 6 C) 30 D) 32 E) 5

RESOLUCIÓN :

Resolvemos la ecuación logarítmica mediante un cambio de variable para facilitar la factorización de la expresión logarítmica. Luego, se iguala a cero cada factor para calcular los valores de la incógnita *x y*, finalmente, el producto de ellos.

$$(Log_2x)^2-5(Log_2x)+6=0$$

Hacemos el cambio :

$$Log_2x=t;x>0$$

Luego : $t^2-5t+6=0$

Factorizamos

$(t-2)(t-3)=0$

$\Rightarrow t-2=0 \vee t-3=0$

$\Rightarrow t=Log_2x=2 \vee t=Log_2x=3$

Por definición de logaritmos obtendremos :

$$x=2^2 \vee x=2^3$$

Luego : $x_1=4 \vee x_2=8$

Nótese que ambas soluciones son positivas.

Por lo tanto, $x_1x_2=32$

• El producto de valores de *x* que satisfacen la ecuación es *32*.

RPTA : "D"

PROBLEMA 62 :

La suma de los cuadrados de dos números reales positivos es *11* y la diferencia de sus logaritmos, en base *10*, es *1/2*. Determine el producto de dichos números.

A) $\sqrt{11}$ B) $\sqrt{10}$ C) $\sqrt{7}$ D) $\sqrt{10}$ E) $\sqrt[4]{10}$

RESOLUCIÓN :

• Definición de logaritmos :

$Log_b N=x \leftrightarrow b^x=N$

$x>0; b>0 \wedge b \neq 1$

• Propiedad de logaritmos

$$Log_b M - Log_b N=Log_b \frac{M}{N}$$

* Sean los números reales positivos *a* y *b*.

Del enunciado

$$Loga-Logb=\frac{1}{2} \Rightarrow Log\frac{a}{b}=\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{a}{b}=\sqrt{10}...(I)$$

Además, en el dato se tiene que

$a^2+b^2=11$

$\div(ab):\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=\frac{11}{ab}$

De *(I)* :

$$\sqrt{10}+\frac{1}{\sqrt{10}}=\frac{11}{ab} \Rightarrow ab=\sqrt{10}$$

RPTA : "D"

PROBLEMA 63 :

Si $2^{2y+1}+5\times2^y=12$, halle $2(y+1)$

A) Log_23 B) $3Log_25$ C) Log_29

D) $7Log_27$ E) $\frac{1}{2}Log_23$

RESOLUCIÓN :

* Definición de logaritmo

$$Log_bN=x \leftrightarrow b^x=N; x>0; b>0 \wedge b \neq 1$$

Propiedad de logaritmos (regla del sombrero)

$$KLog_bN=Log_bN^K$$

Nos piden $2(y+1)$

Del dato tenemos

$2^{2y+1}+5\times2^y=12$

$2(2^y)^2+5(2^y)-12=0$

$2(2^y) \quad -3 \rightarrow 2^y=3/2$

$1(2^y) \quad +4 \rightarrow 2^y=-4(\nexists y)$

Luego

$2^y=3/2$

$2^{y+1}=3 \Rightarrow log_23=y+1$

$\times2:2(y+1)=2Log_23=Log_29$

RPTA : "C"

PROBLEMA 64 :

Sea *a* un número real positivo diferente de *1*. Halle el valor de *y* que satisface el sistema de ecuaciones

$a^{x+y}=16; a^{x-2y}=\frac{1}{4}$.

A) Log_a6 B) Log_a64 C) Log_a4 D) Log_a16 E) Log_a8

RESOLUCIÓN :

De la segunda ecuación obtenemos :.

$$\frac{a^x}{a^{2y}}=\frac{1}{4} \Leftrightarrow a^x=\frac{a^{2y}}{4}$$

Reemplazamos en la primera ecuación tenemos

$a^x.a^y=16$

$\Rightarrow \frac{a^{2y}}{4}\times a^y=16 \Rightarrow a^{3y}=64$

Extraemos la raíz cúbica y obtenemos : $a^y=4$

Tomamos logaritmo en base a y obtenemos

$$y=log_a 4$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 65 :

Halle los valores de x que satisfacen la ecuación

$5^{\log_x(x^2-5x+15)}=3^{\log_x 25}$

A) 2 y 4 B) 3 y 5 C) 3 y 4
D) 2 y 3 E) 2 y 5

RESOLUCIÓN :

Utilizaremos las siguientes propiedades:

. $b^{x_1}=b^{x_2} \Leftrightarrow x_1=x_2; \forall b>0 \wedge b\neq 1$

. $log_b x_1=log_b x_2 \Leftrightarrow x_1=x_2; \forall b>0 \wedge b\neq 1$

. $a^{\log_b c}=c^{\log_b a}\ \forall a,b,c \in \mathbb{R}^+-\{1\}$

Tenemos la ecuación

$5^{\log_x(x^2-5x+15)}=3^{\log_x 25}$

$=25^{\log_x 3}=5^{2\log_x 3}=5^{\log_x 9}$

$\Rightarrow 5^{\log_x(x^2-5x+15)}=5^{\log_x 9}$

$\Leftrightarrow log_x(x^2-5x+15)=log_x 9$

$\Leftrightarrow x^2-5x+15=9; x>0 \wedge x^2-5x+15>0$

$\Leftrightarrow x^2-5x+6=0$

$\Leftrightarrow (x-2)(x-3)=0$

$\Leftrightarrow x=2 \vee x=3$

Como $x=2$; $x=3$ satisfacen las desigualdades arriba mencionadas, entonces son las soluciones de la ecuación.

RPTA : "D"

PROBLEMA 66. :

Resuelva la inecuación exponencial $3^{|x|^2-|x|}<2^{1-(\sqrt{x})^2}$ e indique el intervalo solución.

A) $[0;+\infty\rangle$ B) $[0;1\rangle$ C) $\langle 1;+\infty\rangle$
D) $[0;Log_3 2\rangle$ E) $\langle 1;Log_3 2\rangle$

RESOLUCIÓN :

Recordando la siguiente propiedad :

Para $a>1$, $M>0$, $N>0$ se tiene que

$M<n \leftrightarrow Log_a m<Log_a N$

$3^{|x|^2-|x|}<2^{1-(\sqrt{x})^2}$

Hallamos el conjunto de valores admisibles.

$x\geq 0$......................(I)

Luego la inecuación queda : $3^{x^2-x}<2^{1-x}$

Usando la propiedad obtenemos :

$Log_3(3^{x^2-x})<Log_3(2^{1-x})$

$\Rightarrow x^2-x<(1-x)Log_3 2$

$\Rightarrow x(x-1)+(x-1).Log_3 2<0$

$\Rightarrow (x-1).\underbrace{(x+Log_3 2)}_{\text{es positivo}}<0$

$\Rightarrow x<1$..........................(II)

De (I) y (II)

$0\leq x<1$

RPTA : "B"

PROBLEMA 67 :

Halle el valor de x en la siguiente ecuación:

$logx^{logx}-logx-6=0$

Dé como respuesta la suma de las soluciones.

A) 10,01 B) 99,99 C) 100,01
D) 999,99 E) 1 000,01

RESOLUCIÓN :

Regla del sombrero

> Siendo a; b positivos, se tiene $log_a b^n=n\times log_a b$ con $a\neq 1; n\in\mathbb{R}$

$logx^{logx}-logx-6=0$

$\Rightarrow (logx)\times(logx)-logx-6=0$

$(logx)^2-logx-6=0$

logx ⟋ −3
logx ⟍ +2

$\Rightarrow (logx-3)\times(logx+2)=0$

$\Rightarrow logx=3 \vee logx=-2$

$\Rightarrow \underbrace{x=10^3 \vee x=10^{-2}}_{\text{estos valores garantizan la existencia del logaritmo}}$

Por lo tanto, la suma de soluciones$=10^3+10^{-2}$

$=1000{,}01$

RPTA : "E"

PROBLEMA 68 :

Halle el valor de

$$M=\frac{1}{1+\log_3(10e)}+\frac{1}{1+Ln(30)}+\frac{1}{1+\log(3e)}+\frac{1}{\log_3(e)}-1$$

donde *"e"* es la base de logaritmo neperiano.

A) $\frac{\log(3)}{10}$ B) $\frac{Ln(3)}{10}$ C) $\frac{Ln(3)}{3}$
D) $Ln(3)$ E) 1

RESOLUCIÓN :

Recordemos :

* $\log_e x = Lnx;\ x>0$
* $\frac{1}{\log_b a}=\log_a b;\ a,b>0;b\neq 1;a\neq 1$
* $1=\log_b b;\ b>0\wedge b\neq 1$

Luego :

$$M=\frac{1}{\log_3 3+\log_3(10e)}+\frac{1}{\log_e e+\log_e 30}+\frac{1}{\log 10+\log(3e)}+\frac{1}{\log_3 e}-1$$

La suma de logaritmos en la misma base es logaritmo del producto.

$$M=\frac{1}{\log_3 30e}+\frac{1}{\log_e 30e}+\frac{1}{\log 30e}+\frac{1}{\log_3 e}-1$$

$$M=\underbrace{\log_{30e}3+\log_{30e}e+\log_{30e}10}+\log_e 3-1$$

$$M=\underbrace{\log_{30e}30e}+Ln3-1$$

$$M=\cancel{1}+Ln3-\cancel{1}=Ln3$$

RPTA : "D"

PROBLEMA 69 :

Sea S el conjunto solución de la ecuación, en $\mathbb{R}$,

$$x^3-7x^2+15-9=\frac{1}{Log_x\left(\frac{3}{5}\right)}$$

Halle la cantida de elementos de S.

A)0 B)1 C)2 D)3 E)4

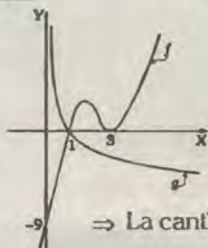
RESOLUCION :

Para determinar el número de soluciones reales usaremos gráficas de funciones. Para ello reducimos las expresiones; así:

$$x^3-7x^2+15x-9=\frac{1}{Log\times\left(\frac{3}{5}\right)}\wedge x>0;\ x\neq 1$$

$$\Rightarrow \underbrace{-(x-1)(x-3)^2}_{f_{(x)}} = \underbrace{Log_{\left(\frac{3}{5}\right)}x}_{g_{(x)}}\wedge x>0;\ x\neq 1$$

Graficamos :



Se observa que las gráficas se cortan sólo en un punto; entonces, solo tiene una solución real.

$\Rightarrow$ La cantidad de elementos de S es 0.

RPTA: "A"

PROBLEMA 70 :

Indique la secuencia correcta después de determinar si la proposición es verdadera *(V)* o falsa *(F)*.

I) Si A es una matriz de orden $n\times n$, entonces $A-AT=0$.

II) Si

$$A=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix},\ entonces\ A^n=\begin{bmatrix}1&n\\0&1\end{bmatrix}$$

donde n es un número natural.

III) Si

$$A=\begin{bmatrix}a&2\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&3\\b&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2+a&5\\1+b&4\end{bmatrix},$$

entonces $a-b=0$

A) VVV B) VVF C) FFV D) FVV E) FFF

RESOLUCIÓN :

Debemos tener en cuenta la siguiente definición.

* $A^1=A$
* $A^n=\underbrace{A\times A\times A\times...\times A}_{n\ veces}$

I] FALSO :

Porque si $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$, no necesariamente $A=A^T$

Por ejemplo

$$Si\ A=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\Rightarrow A^T=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\wedge$$

$$A-A^T=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\neq O$$

II] VERDADERO :

En efecto, induciendo el resultado.

$$A=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$$

$$A^2=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}$$

$$A^3=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&3\\0&1\end{pmatrix}$$

$\vdots$

$$A^n=\begin{pmatrix}1&n\\0&1\end{pmatrix}$$

III) VERDADERO :

En efecto, operando tenemos

$$\begin{bmatrix}a&2\\1&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&3\\b&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a+2b&3a+2\\b+1&4\end{bmatrix}$$

Igualando con el dato, obtenemos

$$\begin{bmatrix}a+2b&3a+2\\b+1&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2+a&5\\1+b&4\end{bmatrix}$$

$\leftrightarrow\ a+2b=2+a\ \wedge\ 3a+2=5$

$b=1\quad\wedge\quad a=1$

*Entonces: $a-b=0$

RPTA : "D"

PROBLEMA 71 :

Considere la ecuación matricial $X\begin{vmatrix}1&3\\2&7\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}4&0\\-1&2\end{vmatrix}$, donde X es una matriz.

Calcule det(X).

A) 6 B) 7 C) 8 D) 11 E) 19

RESOLUCION :

Para la resolución del problema aplicamos la siguiente propiedad:

Si A y B son matrices cuadradas del mismo orden, entonces $|AB|=|A|\times|B|$.

Por dato se tiene que :

$$X\begin{bmatrix}1&3\\2&7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&0\\-1&2\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\left|X\begin{bmatrix}1&3\\2&7\end{bmatrix}\right|=\left|\begin{bmatrix}4&0\\-1&2\end{bmatrix}\right|$$

$$|X|\begin{vmatrix}1&3\\2&7\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}4&0\\-1&2\end{vmatrix}\Rightarrow|X|\times1=8\Rightarrow|X|=8$$

El determinante de la matriz X es 8

RPTA: "C"

PROBLEMA 72 :

Considere la matriz $A=\begin{bmatrix}1&4&k\\1&k&4\\1&k&k\end{bmatrix}$

Determine el conjunto de valores de k para que A sea invertible.

A) $k\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ B) $k\in\mathbb{R}$ C) $k\in\mathbb{R}\setminus\{4\}$

D) $k=-4$ E) $k=0$

RESOLUCIÓN :

1° Para que una matriz cuadrada A sea invertible $|A|\neq0$.

2° Aplicamos operaciones con filas.

Piden el conjunto de valores para que la matriz

$A=\begin{bmatrix}1&4&k\\1&k&4\\1&k&k\end{bmatrix}$ sea invertible.

Entonces $|A|\neq0$.

Aplicando las propiedades:

$$|A|=\begin{vmatrix}1&4&k\\1&k&4\\1&k&k\end{vmatrix}\begin{matrix}F_2-F_1\\ \\F_3-F_2\end{matrix}$$

$$|A|=\begin{vmatrix}1&4&k\\0&k-4&4-k\\0&0&k-4\end{vmatrix}$$

$$|A|=(k-4)^2\neq0\Rightarrow k\neq4$$

$$\Rightarrow k\in\mathbb{R}-\{4\}$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 73 :

Indique la secuencia correcta después de determinar si las proposiciones relacionadas a matrices son verdaderas *(V)* o falsas *(F)*:

I) Si A^2 es simétrica, entonces A es simétrica.

II) Si $A+B$ y B son simétricas, entonces A es simétrica.

III) Si A y B son matrices del mismo orden, ambas simétricas, entonces AB es simétrica.

A) FFF B) FFV C) FVF D) VFF E) VVF

RESOLUCIÓN :

Recordemos que si A es una matriz simétrica, se cumple que: $\boxed{A=A^T}$

I) FALSO :

Si A^2 es simétrica, entonces A es simétrica.

Teniendo en cuenta el siguiente contraejemplo, tenemos:

$$A=\begin{pmatrix}2&0\\1&-2\end{pmatrix}\Rightarrow A^2=A\times A=\begin{pmatrix}2&0\\1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0\\1&-2\end{pmatrix}\Rightarrow A^2=\begin{pmatrix}4&0\\0&4\end{pmatrix}$$

Observamos que $A^2=(A^2)^T$, pero A no es simétrica.

II) VERDADERO :

Si $A+B$ y B són simétricas, entonces A es simétrica.

Sabemos que $(A+B)=\underbrace{(A+B)^T}$ y $B=B^T$

$$A+B=A^T+\underline{B}^T$$

$$A+\cancel{B}=A^T+\cancel{B}$$

$$A=A^T;\ A \text{ es simétrica}$$

III) FALSO :

Si A y B son matrices del mismo orden, ambas simétricas, entonces $A\times B$ es simétrica.

Debemos demostrar que $(AB)=(AB)^T$.............*(I)*

De los datos: $A=A^T$ y $B=B^T$

Suponiendo que *(I)* es verdadero

$\Rightarrow A\times B=(A\times B)^T$

$\Rightarrow A\times B=B^T\times A^T$

$\Rightarrow A\times B=B\times A$

Lo cual no se cumple necesariamente, pues el producto de matrices no es siempre conmutable.

Entonces, lo supuesto es siempre falso.

RPTA : "C"

PROBLEMA 74 :

Indique la secuencia correcta después de determinar si la proposición es verdadera *(V)* o falsa *(F)*.

I) Si A es un matriz de orden $m\times n$ y B es una matriz de orden $n\times \ell$, entonces $A+B$ es de orden $m\times \ell$.

II) Si $A=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$ es una matriz de orden 4×4, entonces existe un número natural k tal que $A^k=0$.

A)VFV *B)VFF* *C)FVF* *D)FFV* *E)FFF*

RESOLUCIÓN :

I)FALSO

En efecto , si $A=(a_{ij})_{m\times n}$ y $B=(bij)_{n\times l}$, entoces , no está definida la suma $A+B$, pues A y B son de orden diferente.

II) VERDADERO

Hallemos las potencias de A.

$$A^2=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$A^3=A^2.A=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$A^4=A^3.A=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

de donde existe $k=4$, tal que $A^4=0$; se concluye que A es una matriz nilpotente.

III) FALSO

Veamos un contraejemplo:

Dada la matriz

$A=\begin{pmatrix}2&3\\4&5\end{pmatrix}_{2\times 2}$, entonces, $A^T=\begin{pmatrix}2&4\\3&5\end{pmatrix}$

Luego,

$$A+A^T=\begin{pmatrix}4&7\\7&10\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

RPTA: "C"

PROBLEMA 75 :

En un antiguo texto, se encuentra la matriz:

$A=\begin{bmatrix}1&x&0\\0&0&y\\0&0&z\end{bmatrix}$, y del producto A^2A^T la última columna, la cual es $\begin{bmatrix}-6\\2\\-1\end{bmatrix}$. Halle la matriz A.

A) $\begin{bmatrix}1&3&0\\0&0&2\\0&0&-1\end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix}1&2&0\\0&0&3\\0&0&-1\end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix}1&1&0\\0&0&2\\0&0&1\end{bmatrix}$

D) $\begin{bmatrix}1&1&0\\0&0&3\\0&0&2\end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix}1&1&0\\0&0&2\\0&0&3\end{bmatrix}$

RESOLUCIÓN :

- Operaciones con matrices.
- Transpuesta de una matriz.

Hallamos A^2 y $A^2.A^T$

$$A^2\begin{pmatrix}1&x&0\\0&0&y\\0&0&z\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&x&0\\0&0&y\\0&0&z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&x&xy\\0&0&yz\\0&0&z^2\end{pmatrix}$$

$$A^2.A^T=\begin{pmatrix}1 & x & xy\\ 0 & 0 & yz\\ 0 & 0 & z^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ x & 0 & 0\\ 0 & y & z\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A^2.A^T=\begin{pmatrix}(x^2+1) & xy^2 & xyz\\ 0 & y^2z & yz^2\\ 0 & z^2y & z^3\end{pmatrix}$$

De la condición dada tenemos lo siguiente

$$\begin{pmatrix}xyz\\ yz^2\\ z^3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6\\ 2\\ -1\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow z^3=-1 \wedge yz^2=2 \wedge xyz=-6$$

$$\Rightarrow z=-1 \wedge y=2 \wedge x=-3$$

RPTA: "A"

PROBLEMA 76 :

Si $A=\begin{bmatrix}-1 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ Calcular $S=A^{42}+A^{55}$

A) $A=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$ B) $=A\begin{bmatrix}0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$

C) $=A\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix}$ D) $=A\begin{bmatrix}0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix}$

E) $=A\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}$

RESOLUCION :

Para determinar potencias de una matriz, una de las formas es mediante el polinomio característico:

$P_{(x)}$ Si $A\in R^{n\times n}$; $P_{(x)}=det(A-xI)$

Hallemos él polinomio característico de A.

$P_{(x)}=det(A-xI)$

$$P_{(x)}\begin{bmatrix}-1 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}x & 0 & 0\\ 0 & x & 0\\ 0 & 0 & x\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow P_{(x)}\begin{vmatrix}(-1-x) & -1 & -1\\ 0 & -x & 0\\ 0 & 0 & (1-x)\end{vmatrix}\Rightarrow P_{(x)}=x-x^3$$

Entonces, $P_{(A)}=A-A^3=\phi$ (ϕ : *matriz nula*)

$$\leftrightarrow A^3=A \leftrightarrow A^{3k}=A;\ \forall k\in Z^+$$

Reemplazamos en $A^{42}+A^{55}=(A^3)^{14}+(A^3)^{18}A$

$$=A+(A)A=A+A^2$$

Determinamos :

$$A^2=\begin{pmatrix}-1 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow A^2+A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ La matriz $A^{42}+A^{55}$ es $\begin{pmatrix}0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

RPTA: "B"

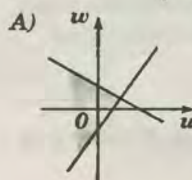
PROBLEMA 77 :

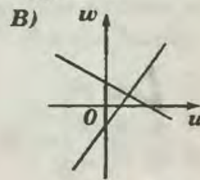
Si $(x_0; y_0)$ es la solución del sistema:

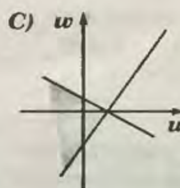
$$\begin{cases}4e^{2x}e^y+e^xe^{-y}=5e\\ e^{2x}e^y+e^xe^{-y}=2e\end{cases}$$

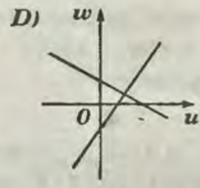
¿cuál de las siguientes regiones sombreadas corresponde al conjunto solución del sistema:

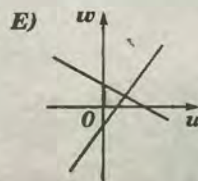
$$\begin{cases}6x_0u+3y_0w\le 1\\ -3x_0u+9y_0w\ge -2\end{cases}$$

A)


B)


C)


D)


E)


RESOLUCIÓN :

Del sistema

$$\begin{cases} 4e^{2x+y}+e^{x-y}=5e \;........................(I) \\ e^{2x+y}+e^{x-y}=2e \;........................(II) \end{cases}$$

Restamos las ecuaciones *(I)* – *(II)*:

$$\Rightarrow \not{3}e^{2x+y}=\not{3}e \Rightarrow 2x+y=1 \;....................(III)$$

Reemplazamos en *(II)*:

$$e^{1}+e^{x-y}=2e \Rightarrow x-y=1 \;........................ (IV)$$

De las ecuaciones *(III)* y *(IV)* se obtiene:

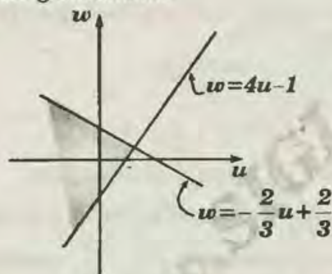
$$x=\frac{2}{3} \wedge y=-\frac{1}{3}$$

Luego, el sistema de ecuaciones es el siguiente:

$$\begin{cases} 6.\frac{2}{3}u+3.\left(-\frac{1}{3}\right)w\leq 1 \\ -3\left(\frac{2}{3}\right)u+9\left(-\frac{1}{3}\right)w\geq -2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} w\geq 4u-1 \\ w\leq -\frac{2}{3}u+\frac{2}{3} \end{cases}$$

Resolvemos gráficamente



RPTA: "A"

PROBLEMA 78 :

Señale el menor valor para x que dé solución al sistema siguiente:

$$\begin{cases} 4x^2+y^2=-25\frac{x}{|x|} \\ |2x-3|+y=10 \end{cases}$$

A) – 4 B) – 3 C) – 2 D) – 1 E) 0

RESOLUCIÓN :

Teniendo en cuenta que:

$$|x|=\begin{cases} x; & x>0 \\ 0; & x=0 \\ -x; & x<0 \end{cases}$$

Teniendo en cuenta el sistema

$$\begin{cases} 4x^2+y^2=-25\frac{x}{|x|} \;..................(\alpha) \\ |2x-3|+y=10 \;........................(\beta) \end{cases}$$

De (α) se infiere que:

$4x^2+y^2\geq 0$, entonces $-25\frac{x}{|x|}\geq 0$

$$\Rightarrow x<0 \Rightarrow 4x^2+y^2=25 \;..............(I)$$

Deduciendo de (β) y considerando que $x<0$ observamos que :

$$\left|\underbrace{(2x-3)}_{(-)}\right|+y=10$$

$$-(2x-3)+y=10 \Rightarrow -2x+3+y=10$$

Despejamos y : $\boxed{y=7+2x}$

Reemplazando en *(I)*

$$4x^2+(2x+7)^2=25 \Rightarrow 4x^2+4x^2+28x+49=25$$

$$8x^2+28x+24=0 \Rightarrow 2x^2+7x+6=0$$

$$\begin{matrix} 2x & +3 \\ x & +2 \end{matrix}$$

$$2x+3=0 \quad \vee \quad x+2=0$$

$$x=-\frac{3}{2} \quad \vee \quad x=-2$$

Finalmente, el menor valor de x es -2.

RPTA : "C"

PROBLEMA 79 :

Halle el valor de $a\in\mathbb{R}$, para que la inecuación $(a^2-14)x^2-4x+4a\leq 0$, tenga como solución el conjunto $[-2;4]$.

A) – 6 B) – 4 C) – 2 D) –1 E) –1/2

RESOLUCIÓN :

Para resolver el problema vamos a utilizar las siguientes propiedades.

1ro) Dada la ecuación $ax^2+bx+c; a\neq 0$ de raíces $x_1; x_2$, se cumple que :

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a} \wedge x_1x_2=\frac{c}{a}$$

2do) En una inecuación cuadrática $ax^2+bx+c\gtrless 0$; $a\neq 0$, los puntos críticos son las raíces.

Piden el valor de $a\in\mathbb{R}$, tal que.

$$(a^2-14)x^2-4x+4a\leq 0; CS=[-2;4]$$

Entonces, $a^2 - 14 > 0$; $-2 \wedge 4$ son los puntos críticos.

Aplicando la propiedad anterior :

$$-2+4 = \frac{-(-4)}{a^2-14} \wedge (-2)(4) = \frac{4a}{a^2-14}$$

Se tiene

$$2(a^2-14) = 4 \wedge -2(a^2-14) = a$$

$$a^2 = 16 \wedge 2a^2 + a - 28 = 0$$

$$(a=4 \vee a=-4) \wedge (2a-7)(a+4)=0$$

$$(a=4 \vee a=-4) \wedge \left(a=\frac{7}{2} \vee a=-4\right)$$

Por lo tanto, $a=-4$.

RPTA : "B"

PROBLEMA 80 :

Dados los conjuntos :

$A=\{(a_1; a_2) \in \mathbb{R}^2 / (a_1; a_2) \in [3;4] \times [4;5]\} \wedge$

$B=\{(b_1; b_2) \in \mathbb{R}^2 / b_1^2+b_2^2 \leq 1\}$.

Si se define

$A+B=\{\overline{a}+\overline{b} \ / \ \overline{a} \in A, \overline{b} \in B\}$,

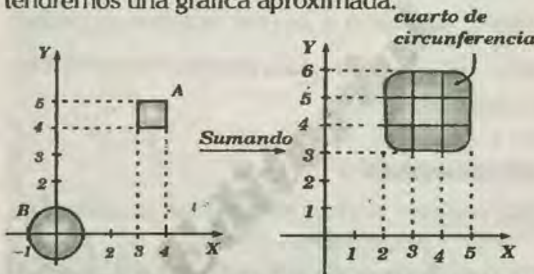
determine el área de $A+B$.

A) $1+\pi$ B) $2+\pi$ C) $3+\pi$

D) $5+\pi$ E) $6+\pi$

RESOLUCIÓN :

Utilizaremos la definición del producto cartesiano y la suma de pares ordenados en $\mathbb{R}^2$. De la definición de $(A+B)$, la circunferencia se va ha trasladar hacia la derecha y hacia arriba, entonces tendremos una gráfica aproximada:



Es decir un elemento de $A+B$ es $(a_1+b_1; a_2+b_2)$ entonces el área de $A+B$ es :

$$= 1+1+1+1+1+4\left(\frac{\pi}{4}\right)=5+\pi$$

RPTA : "D"

PROBLEMA 81 :

El conjunto solución del sistema :

$$x^2-2x-y=-1$$
$$x^2+y^2=1$$

es:

A) $\{(1;1), (2;-1), (1;0)\}$ B) $\{(1;2), (2;1), (1;-1)\}$

C) $\{(1;0), (-1;-1)\}$ D) $\{(1;0), (0;1)\}$

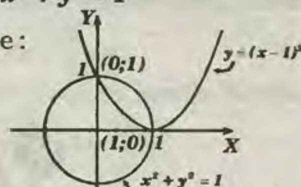
RESOLUCIÓN :

Para resolver un sistema de ecuaciones no lineales se pueden graficar las ecuaciones y evaluar los puntos de corte que serían las soluciones del sistema.

Completando cuadrados en la primera ecuación se tiene

$$\begin{cases} (x-1)^2 = y \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$$

Graficando se obtiene :



Se observa que los puntos de corte son $(0; 1)$ y $(1; 0)$, y estas son las soluciones del sistema no lineal.

RPTA : "D"

PROBLEMA 82 :

Sea S la región limitada por las siguientes inecuaciones:

• $y-x \leq 4$ • $y+\frac{x}{2} \leq 6$

• $\frac{x}{2}-y \leq 0$ • $-x-y \leq -2$

al minimizar $F_{(x;y)}$, sobre S se afirma que:

A) Si $F_{(x,y)} = x+y$, entonces se tiene 2 soluciones.

B) Si $F_{(x,y)} = y-x$, entonces $\left(\frac{4}{13}; \frac{16}{3}\right)$ es solución.

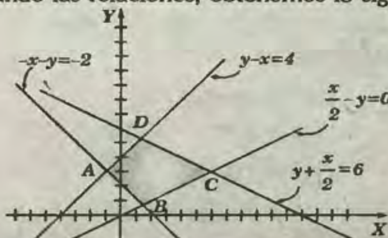
C) Si $F_{(x,y)} = \frac{x}{2}+y$, entonces $(2;0)$ es solución.

D) Si $F_{(x,y)} = \frac{x}{2}-y$, entonces se tiene infinitas soluciones.

E) Si $F_{(x,y)} = y-\frac{x}{2}$, entonces $(6;3)$ es solución.

RESOLUCIÓN :

Graficando las relaciones, obtenemos lo siguiente



Intersecando las rectas se obtienen los puntos

$$A=(-1;3) \wedge B=\left(\frac{4}{3};\frac{2}{3}\right) \wedge$$

$$C=(6;3) \wedge D=\left(\frac{4}{3};\frac{16}{3}\right)$$

Analizando las alternativas , solo se cumple la proposición *E*.

Veamos lo siguiénte:

Para determinar $mín_{f(x,y)} = y-\frac{x}{2}$, elevaluamos en los vértices de la región convexa

$$f_{(A)}=f_{(-1;3)}=3+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$$

$$f_{(B)}=f_{\left(\frac{4}{3};\frac{2}{3}\right)}=\frac{2}{3}-\frac{2}{3}=0$$

$$f_{(C)}=f_{(6;3)}=3-3=0$$

$$f_{(D)}=f_{\left(\frac{4}{3};\frac{16}{3}\right)}=\frac{16}{3}-\frac{2}{3}=\frac{14}{3}$$

Como queremos el mínimo valor de *f*, este se encuentran en *B* y *C*, ya que $f_{(B)}=0 \wedge f_{(C)}=0$

Entonces , se encuentran en todo el segmento $\overline{BC}$

y, como $(6;3) \in \overline{BC}$,entonces , es una solución.

RPTA: "E"

PROBLEMA 83 :

Determine el valor mínimo que toma la función objetivo, $P(x;y)=10x+20$ y sujeta a las restricciones:

$$\begin{cases} x+y \geq 2 \\ x-2y \leq 2 \\ y \leq x \end{cases}$$

A) – 70 B) – 20 C) 0 D) 20 E) 30

RESOLUCIÓN :

Para resolver el problema, vamos a graficar el conjunto de restricciones para hallar la región factible, luego, evaluamos en los vértices y elegimos el menor valor.

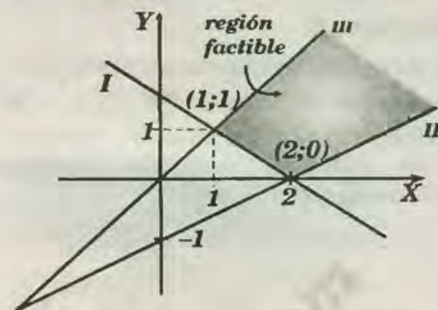
Piden el valor mínimo que toma la función $P(x;y)=10x+20$ y sujeta a las restricciones

$$\begin{cases} x+y \geq 2 \\ x-2y \leq 2 \\ y \leq x \end{cases}$$

Reordenando el conjunto de restricciones

$$\begin{cases} y \geq -x+2 \ldots\ldots\ldots\ldots I \\ y \leq \frac{x-2}{2} \ldots\ldots\ldots\ldots II \\ y \leq x \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots III \end{cases}$$

Ahora, graficamos el conjunto de restricciones :



Luego, el valor mínimo que toma la función objetivo $P(x;y)$ se encontrará en un vértice o dos vértices consecutivos. En este caso, los vértices son $(1;1) \wedge (2;0)$.

Evaluando en $P(x;y)=10x+20y$, se obtienen $P(1;1)=30$; $P(2;0)=20$

Luego el valor mínimo que toda la función objetivo $P(x;y)$ es 20 .

RPTA : "D"

PROBLEMA 84 :

En relación a un programa lineal, indique la secuencia correcta, después de determinar si la proposición es verdadera *(V)* o falsa *(F)*:

I) Las condiciones de no negatividad significan que todas las variables de decisión deben ser positivas.

II) El número de puntos extremos de la región admisible es finito.

III) En un programa lineal pueden variarse los coeficientes de la función objetiva y aún mantenerse la solución optima.

A)VFV B)FFF C)FFV
D)FVV E)VFF

RESOLUCION :

En el problema debemos recordar las definiciones básicas de programación lineal.

I] FALSO

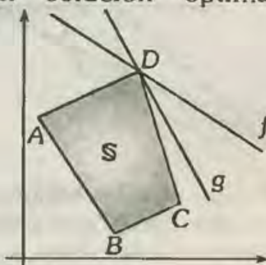
Si *x*, *y* son variables de decisión, entonces por la condición de no negatividad se cumple que $x \geq 0;\ y \geq 0$.

II] VERDADERO

Pues el número de vértices de toda región factible es finito.

III) VERDADERO

Pues dada la región factible $\mathbb{S}$ y la función objetivo $f(x;y)=ax+by+c$. Supongamos que $(x_1;y_1)\in\mathbb{S}$ es la solución óptima del problema, entonces puede ser también solución óptima de $g(x;1)=cx+dy+k$.



La secuencia correcta es *FVV*

RPTA: "D"

PROBLEMA 85 :

Sea:

$S=\{(x,y)/a_1x+b_1y\le C_1;\ a_2x+b_2y\le C_2,\ x\ge 0, y\ge 0\}$

La región admisible de un problema de programación lineal.

Indique la secuencia correcta después de determinar si la proposición es verdadera *(V)* o falsa *(F)*.

I) Si se modifica S, obteniéndose

$S_1=\{(x,y)/a_1x+b_1y\le C_1;\ a_2x+b_2y\le C_2;$
$a_3x+b_3y\le C_3,\ x\ge 0,\ y\ge 0\}$,

la solución no cambia, en un problema de maximización.

II) Si $f(x;y)$ es la función objetivo, y (x_0, y_0) es la solución en S_1 entonces, en un problema de minimización se tendrá $f(x_0;y_0)\le f(x_1,y_1)$.

III) En general S_1, la nueva región admisible, puede o no variar en relación a S.

A) FFV B) FVV C) FFF D) VVF E) VFV

RESOLUCIÓN :

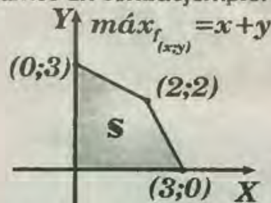
Condición de mínimo en un problema de programación lineal

$f(x_0, y_0)$ es el mínimo $\forall (x;y)\in S$

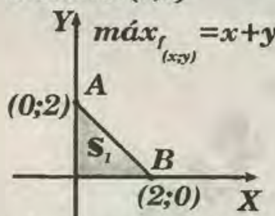
$\leftrightarrow f(x_0;y_0)\le f(x;y)\forall(x;y)\in S$

I) Al aumentar una condición más $(a_3x+b_3y\le C_3)$ se obtendrá un subconjunto S_1 de S; por lo tanto, los vértices (puntos extremos) pueden ser otros y cambiar la solución.

Veamos un contraejemplo.



La solución es *(2;2)*



La solución es cualquier punto de la recta $\overline{AB}$.

Por lo tanto, la proposición *I* es falsa.

II) Como $S_1\subseteq S$ y $f(x_0, y_0)\le f(x;y)\forall(x;y)\in S$ porque estamos minimizando, entonces un caso particular es $(x;y)=(x_1;y_1)\in S_1\subseteq S$.

$\Rightarrow f_{(x_0;y_0)}\le f_{(x_1;y_1)}$

Por lo tanto, la proposición *II* es verdadera.

III) S_1 en relación a S sí puede variar como el ejemplo de la proposición *I*.

Por lo tanto, la proposición *III* es verdadera.

RPTA : "B"

PROBLEMA 86 :

Un lago se llena de dos especies de peces S_1 y S_2. La especie S_1 proporciona un peso promedio de *4 kg* de carne y la especie S_2 un peso promedio de *2kg*. Dos tipos de comida F_1 y F_2 están disponibles en el lago. El requerimiento promedio de la especie S_1 es *1* unidad de F_1 y *3* unidades de F_2, mientras que el requerimiento de S_2 son *2* unidades de F_1 y *1* unidad de F_2 cada día.

Si se dispone diariamente de *500* unidades de F_1 y *900* unidades de F_2, determine el número total de peces en el lago que maximice el peso total de carne de pescado.

A) 360 B) 380 C) 400 D) 420 E) 460

RESOLUCIÓN :

Graficaremos el conjunto de restricciones y

aplicaremos el teorema de la programación lineal.

Especie	Peso	Número de peces	Tipos de comida F_1	F_2
S_1	4	x	1	3
S_2	2	y	2	1

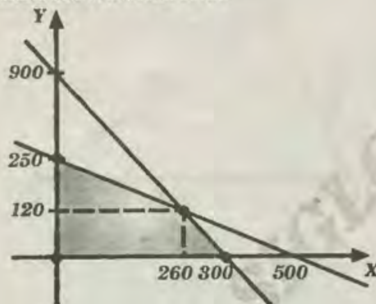
Función objetivo

$$Máx\ f_{(x;\,y)}=4x+2y$$

Sean las restricciones :

$$\begin{cases} x+2y\le 500 \ldots\ldots (I)\\ 3x+y\le 900 \ldots\ldots (II)\\ x\ge 0\ ;\ y\ge 0 \ldots\ldots (III)\end{cases}$$

Graficando las restricciones



En la función objetivo

$$f_{(x;\,y)}=4x+2y$$

Valorando los puntos extremos

$f_{(0;0)}=0$; $f_{(0;250)}=500$; $f_{(260;120)}=1280$; $f_{(300;0)}=1200$

Entonces, el número total de peces que maximice el peso total es $260+120=380$.

RPTA : "B"

PROBLEMA 87 :

A lo largo de un camino $\overline{AB}$; se coloca n piedras separadas 2 metros una de otra; la primera en A y la última en B. Se coge la primera piedra y se la lleva a B recorriendo la menor distancia; se coge la segunda piedra y se la lleva a B, recorriendo también la menor distancia; y así sucesivamente. Si al terminar se ha recorrido **20** veces la distancia entre la primera y la última piedra, halle n.

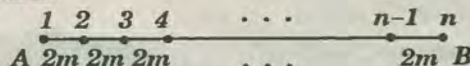
A) 19 B) 20 C) 22 D) 23 E) 21

RESOLUCIÓN :

Recuerde :

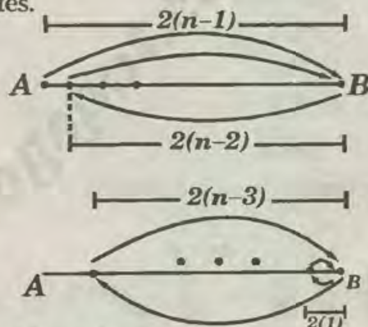
$$1+2+3+4+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

Se tiene el camino $\overline{AB}$ en el que se colocan n piedras.



Se deben coger las piedras y llevarlas al punto B, empezando por la que se encuentra en A. Ello se debe hacer recorriendo la menor distancia.

Por dato tenemos que los recorridos son los siguientes.



El recorrido total es

$$[2(n-1)]+2[2(n-2)+2(n-3)+\ldots+2(2)+2(1)] \overset{\text{por dato}}{=} 20[2(n-1)]$$

$$4[(n-2)+(n-3)+\ldots+2+1]=19[2(n-1)]$$

$$\cancel{4}\left[\frac{(n-2)\cancel{(n-1)}}{\cancel{2}}\right]=19[\cancel{2}\cancel{(n-1)}]\Rightarrow n-2=19$$

Como nos piden hallar el valor de n, entonces, $n=21$.

RPTA : "D"

PROBLEMA 88 :

Si $7^{-3r}-6(7^{-2r})=7^{1-r}$, calcule el valor de la expresión

$$\frac{1}{(-r)(1-r)}+\frac{1}{(1-r)(2-r)}+\ldots+\frac{1}{(48-r)(49-r)}$$

A) $\frac{7}{5}$ B) $\frac{87}{98}$ C) $\frac{4}{5}$ D) $\frac{48}{49}$ E) $\frac{49}{50}$

RESOLUCIÓN :

En este tipo de serie notable, para llegar a reducirla hay que descomponer cada sumando teniendo en cuenta la siguiente forma.

$$\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{b-a}{ab}$$

Piden el valor de la expresión

$$E=\frac{1}{(-r)(1-r)}+\frac{1}{(1-r)(2-r)}+...+\frac{1}{(48-r)(49-r)}$$

Hallaremos el valor de r en el dato

$$7^{-3r}-6(7^{-2r})=7^{1-r}$$

Multiplicamos por 7^{3r}

$$7^{-3r}\times 7^{3r}-6(7^{-2r})\times 7^{3r}=(7^{1-r})\times 7^{3r}$$

$$7^{0}-6\times 7^{r}=7^{2r+1}$$

Por aspa simple en

$$7(7^{r})^{2}+6(7^{r})-1=0$$

$$\begin{matrix} 7(7^{r}) & \times & -1 \\ 7^{r} & & +1 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow 7^{r}=\frac{1}{7}\ \text{ o }\ 7^{r}=-1$$

$$r=-1 \quad \nexists r\in R$$

Luego, reemplazamos en lo pedido :

$$E=\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+...+\frac{1}{49\times 50}$$

$$E=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+...+\frac{1}{49}-\frac{1}{50}\Rightarrow E=1-\frac{1}{50}=\frac{49}{50}$$

RPTA : "E"

PROBLEMA 89 :

¿Cuál es el valor de

$$S=\frac{1}{3}+\frac{2}{3^{2}}+\frac{3}{3^{3}}+\frac{4}{3^{4}}+\frac{5}{3^{5}}+...\ ?$$

A) 2/3 B) 8/9 C) 3/2 D) 1 E) 3/4

RESOLUCIÓN :

Sea la serie geométrica decreciente infinita: S

$$S_1=t_1+t_2+t_3+t_4+t_5+...$$

(cada término se obtiene del anterior $\times q$)

$$\boxed{S_{aprox}=\frac{t_1}{1-q}}$$

Se pide el valor aproximado de S.

$$\times 3\begin{pmatrix} S=\frac{1}{3}+\frac{2}{3^{2}}+\frac{3}{3^{3}}+\frac{4}{3^{4}}+\frac{5}{3^{5}}+ \\ 3S=1+\frac{2}{3}+\frac{3}{3^{2}}+\frac{4}{3^{3}}+\frac{5}{3^{4}}+\cdots \end{pmatrix}-$$

$$2S=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^{2}}+\frac{1}{3^{3}}+\frac{1}{3^{4}}+\frac{1}{3^{5}}+\cdots$$

(cada término se obtiene del anterior $\times\frac{1}{3}$)

$$2S=\frac{1}{1-\frac{1}{3}}\Rightarrow S=\frac{3}{4}$$

RPTA : "E"

PROBLEMA 90 :

La longitud de los lados de un triángulo forman una progresión geométrica de razón $q>1$. Entonces q toma los valores

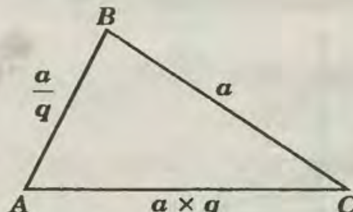
A) $q>\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ B) $\frac{1-\sqrt{5}}{2}<q<\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

C) $1<q<\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ D) $\frac{1+\sqrt{5}}{2}<q<\frac{1+\sqrt{6}}{2}$

E) $\frac{1+\sqrt{6}}{2}<q<\frac{1+\sqrt{7}}{2}$

RESOLUCIÓN :

Sea q la razón geométrica y a la longitud del lado intermedio, entonces, los lados serán :



$AB=\frac{a}{q}$

$BC=a$

$AC=a\times q$

Como todo lado es menor que la suma de los otros dos, el mayor de los lados debe ser menor que la suma de los menores lados.

Así : $aq<\frac{a}{q}+a$

Luego, $q^{2}-q-1<0.$

Completando cuadrados

$$q^{2}-q+\frac{1}{4}<\frac{5}{4}\Rightarrow\left(q-\frac{1}{2}\right)^{2}<\frac{5}{4}$$

$$\Rightarrow-\frac{\sqrt{5}}{2}<q-\frac{1}{2}<\frac{\sqrt{5}}{2}\Rightarrow\frac{1-\sqrt{5}}{2}<q<\frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 91 :

Sabiendo que $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}=e$, halle la suma de la serie $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{(n+1)!}$

A) 0,5 B) 1,0 C) 1,5 D) 2,0 E) 2,5

RESOLUCIÓN :

Recordando que, para hallar la suma de la serie, se debe expandir de manera conveniente la serie.

Ya que el primer sumando es cero, se puede escribir la serie del siguiente modo:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n}{(n+1)!}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(n+1)-1}{(n+1)!}$$

$$=\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{n+1}{(n+1)!}-\frac{1}{(n+1)!}\right]$$

$$=\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}\right]$$

$$=\lim_{k\to+\infty}\sum_{n=1}^{k}\left[\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}\right]$$

$$=\lim_{k\to+\infty}\left[\frac{1}{1!}-\frac{1}{2!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}+...\frac{1}{k!}-\frac{1}{(k+1)!}\right]$$

$$\Rightarrow\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n}{(n+1)!}=\lim_{k\to+\infty}\left[1-\frac{1}{(k+1)!}\right]=1$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 92 :

Sea una sucesión de rectángulos $R_1, R_2, ..., R_k,...$ tales que para cada $k \geq 1$, el k – ésimo rectángulo tiene lados de longitudes $\frac{1}{k}$ y $\frac{1}{k+1}$. Entonces, la suma de las áreas de todos los rectángulos es igual a :

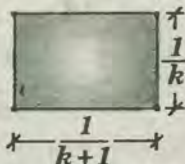
A) 0,5 B) 1,0 C) 1,5 D) 2,5 E) ∞

RESOLUCION :

Teniendo en cuenta la propiedad telescópica

$$\sum_{n=1}^{k}(a_n-a_{n+1})=(a_1-a_2)+(a_2-a_3)+$$
$$+(a_3-a_4)+...+(a_k-a_{k+1})$$

Según dato:



Sea R_k el área de la región del k – ésimo rectángulo.

$$R_k=\frac{1}{k}\times\frac{1}{k+1}=\frac{1}{k(k+1)}=\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$

Nos piden hallar la suma:

$$\sum_{k=1}^{+\infty}R_k=R_1+R_2+R_3+...+$$

$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+...$$

Luego:

$$R_1+R_2+R_3+...=1$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 93 :

Sea una sucesión de rectángulos $R_1, R_2, ..., R_k,$ donde el k-ésimo rectángulo tiene lado $\frac{1}{k}$ y $\frac{1}{k+3}$; entonces, la suma de las áreas de todos los rectángulos es igual a:

A) 1 B) $\frac{11}{18}$ C) $\frac{7}{6}$ D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{1}{6}$

RESOLUCIÓN :

Para resolver este problema haremos uso de algunas propiedades de sumatorias, en particular de la propiedad telescópica.

$$\sum_{k=1}^{n}\left(f_{(k)}-f_{(k+1)}\right)=f_{(1)}-f_{(n+1)}$$

Finalmente, aplicaremos límites cuando n tiende al infinito y obtendremos el resultado requerido.

Sea $\{R_k\}$ la sucesión de rectángulos, tal que el k-ésimo rectángulo tiene de lados $\frac{1}{k}$ y $\frac{1}{k+3}$.

Luego, $A_k=\frac{1}{k(k+3)}$ representa el área de este k-ésimo rectángulo.

Luego, debemos calcular $\sum_{k=1}^{\infty}A_k$, así:

$$\sum_{k=1}^{\infty}A_k=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k(k+3)}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+3}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+2}-\frac{1}{k+3}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\left[\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)+\right.$$
$$\left.+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k+2}-\frac{1}{k+3}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{3}-\lim_{n\to+\infty}\left[\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)+\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)+\right.$$
$$\left.+\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+2}-\frac{1}{k+3}\right)\right]$$

Usamos la propiedad telescópica y obtenemos

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k = \frac{1}{3} lím \left[1 - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{n+3} \right]$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) = \frac{11}{18}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} A_k = \frac{11}{18}\mu^2$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 94 :

Sea la sucesión :

$a_1 = 0, a_2 = 1, a_3 = \frac{1}{2}, a_4 = \frac{3}{4}, a_5 = \frac{5}{8}$

$a_6 = \frac{11}{16}; a_7 = \frac{21}{32}; a_8 = \frac{43}{64};$........, entonces la sucesión $\{a_n\}$ converge a :

A) $\frac{7}{12}$ B) $\frac{5}{8}$ C) $\frac{2}{3}$ D) 1 E) ∞

RESOLUCION :

Por dato se tiene

$$\begin{matrix} a_1; & a_2; & a_3; & a_4; & a_5; & a_6 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 0; & 1; & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & \frac{5}{8} & \frac{11}{16}; ... \end{matrix}$$

Múltipliquemos por *3* y dividimos entre *3* a cada término.

$$\frac{1}{3}\left[0; \quad 3; \quad \frac{3}{2}; \quad \frac{9}{4}; \quad \frac{15}{8}; \quad \frac{33}{16}; ...\right]$$

$$\frac{1}{3}\left[0; \frac{2^1+1}{2^0}; \frac{2^2-1}{2^1}; \frac{2^3+1}{2^2}; \frac{2^4-1}{2^3}; \frac{2^5+1}{2^6}; ...\right]$$

Entonces, tenemos la regla de formación

$$a_n = \frac{1}{3}\left[2 + \left(\frac{-1}{2}\right)^{n-2}\right]; \ n \geq 2$$

Tomando límite:

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = \lim_{n \to +\infty}\left[\frac{1}{3}\left(2 + \left(\frac{-1}{2}\right)^{N-2}\right)\right] = \frac{2}{3}$$

Es decir, $\{a_n\}$ converge a $\frac{2}{3}$

RPTA: "C"

PROBLEMA 96 :

Dada la serie $\sum_{k=0}^{n} x^k$, cuya sumas parciales son dadas por $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k$. Indique la secuencia correcta después de determinar si la proposición es vedadera *(V)* o falsa *(F)*.

I) $S_n(1)$ diverge cuando n tiende a ∞.

II) $S_n\left(\frac{1}{2}\right)$ converge a *2* cuando n tiende a ∞.

III) $S_n\left(\frac{1}{100}\right)$ convegue a *0* cuando n tiende a ∞.

A) VVF B) FVF C) FFF D) FVV E) FFV

RESOLUCIÓN :

Se sabe que

$$\sum_{k=0} x^k = 1 + x + x^2 + ... = \frac{1}{1-x}; \forall x \in \langle -1; 1 \rangle$$

Entonces , se observá lo siguiente

I) VERDADERO :

En efecto,tenemos

$$S_n(1) = \sum_{k=0}^{n} 1^k = 1 + 1 + ... + 1 = n + 1$$

Luego, si $n \to \infty$, entonces , $S_n(1) \to \infty$ de donde $S_n(1)$ divergue si n tiende al infinito

I) VERDADERO :

Pues $S_n\left(\frac{1}{2}\right) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + ... + \left(\frac{1}{2}\right)^n$

luego , si $n \to \infty$, entonces

$$S_n\left(\frac{1}{100}\right) = \frac{1}{1-\left(\frac{1}{2}\right)} = 2$$

III) FALSO :

Pues $S_n\left(\frac{1}{100}\right) = 1 + \frac{1}{100} + \left(\frac{1}{100}\right)^2 + ... + \left(\frac{1}{100}\right)^n$

luego , si $n \to \infty$, entonces ,

$$S_n\left(\frac{1}{100}\right) = \frac{1}{1-\frac{1}{100}} = \frac{100}{99}$$

RPTA: "A"

Para observar libros y videos sobre algebra preuniversitaria de la editorial rubiños , visitar :

www.MIACADEMIA1.blogspot.com

www.SIGLO21X.blogspot.com

www.W2012.blogspot.com

www.RUBINOSS.blogspot.com

www.ALGEBRATOTAL.blogspot.com

COLECCIÓN "RUBIÑOS 2012"

1000 PÁGINAS



1700 PÁGINAS



Incluye 2 DVDs multimedia

1100 PÁGINAS



Incluye 2 DVDs multimedia

1500 PÁGINAS



Incluye 2 DVDs multimedia

1500 PÁGINAS



Incluye 2 DVDs multimedia

1000 PÁGINAS



Incluye 2 DVDs multimedia

1700 PÁGINAS



Incluye 2 DVDs multimedia

1500 PÁGINAS



Incluye 2 DVDs multimedia

1500 PÁGINAS



Incluye 2 DVDs multimedia

Pedidos al por mayor: 5281921/ 7259505

www.SIGLO21X.blogspot.com